

Une méthode d'analyse des expériences factorielles

Ana GARCÍA GÓMEZ (1), Raymond VAN DEN DRIESSCHE (2)

(1) *Fernando IV, 09, Sevilla 11 (Espagne)*

(2) *Chercheur O.R.S.T.O.M., Services Scientifiques Centraux, 70-74, route d'Aulnay, 93140 Bondy (France)*

RÉSUMÉ

L'obtention directe des composantes de chacune des dix interactions à deux facteurs ne dépassant pas cinq niveaux passe, quel que soit le dispositif factoriel utilisé, par des tableaux 2×2 et leur coefficient de pondération, ainsi que par des constantes que l'on trouve dans deux figures de référence.

MOT-CLÉ : Expérimentation factorielle.

ABSTRACT

ANALYSIS OF FACTORIAL EXPERIMENTS

Single degrees of freedom components from unconfounded first-order interactions and from unconfounded main effects are obtained in a straightforward manner. The factorial designs may be of any type, mixed or not, up to 5 levels :

$r \times 2^s \times 3^t \times 4^u \times 5^v$ in blocks of k units,

where $k \leq r \times 2^s \times 3^t \times 4^u \times 5^v$; $s+t+u+v \geq 2$; $r > 0$; $r = 1, \frac{1}{2}, \dots$

Fourfold tables of means w_i, x_i, y_i, z_i , with weighing factors f_i are applicable to all 10 possible interactions, with constant m to yield the mn_i components, where

$$n_i = f_i (w_i - x_i - y_i + z_i)^2$$

Test of the components follows.

KEY WORD : Factorial designs.

La méthode d'analyse qui suit concerne toutes les expériences factorielles $r \times 2^s \times 3^t \times 4^u \times 5^v$ en blocs de k unités. Dans ces expériences, il y a r répétitions; la répétition étant définie comme le nombre de traitements factoriels obtenus par combinaison des facteurs à tous leurs niveaux : entier positif non-nul ou nombre fractionnaire. Il y a s facteurs à 2 niveaux, t facteurs à 3 niveaux, u facteurs à 4 niveaux, v facteurs à 5 niveaux; s, t, u, v sont des entiers ≥ 0 avec $s+t+u+v \geq 2$. Quant aux blocs, ils regroupent tous le même nombre k de traitements, inférieur, égal ou supérieur à celui de la répétition. Sa mission, rarement remplie, est de contrôler l'hétérogénéité du milieu expérimental.

Le planificateur d'une expérience ne doit pas confondre, même partiellement, des interactions à 2 facteurs avec les différences éventuelles entre blocs. Les expériences dans lesquelles les interactions à deux facteurs et les effets principaux ne sont pas confondus se prêtent à la démarche que voici.

Étape 1

Chaque interaction à 2 facteurs apparaît sous la forme d'un tableau à double entrée (Les entrées lignes correspondent aux niveaux du premier facteur : 1, 2, ..., 5; les entrées colonnes correspondent aux niveaux du second facteur : 1, 2, ..., 5 de l'inter-

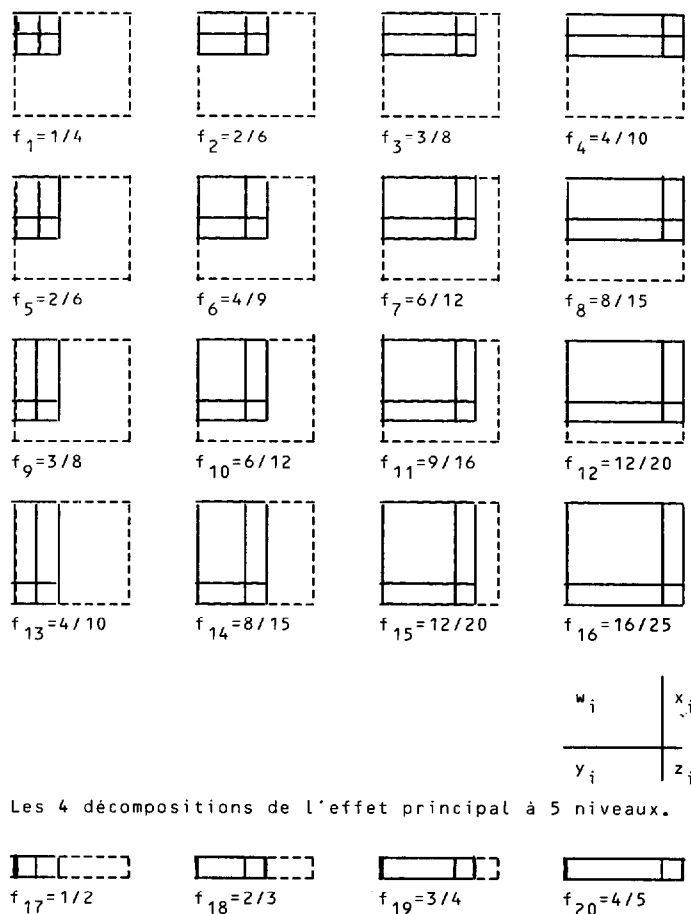


FIG. 1. — Les 16 décompositions de l'interaction 5 × 5

action; quant aux cellules du tableau, elles renferment des moyennes obtenues sur l'ensemble des autres facteurs et sur l'ensemble des répétitions). Cela ne diffère en rien de l'approche habituelle. Quand $r < 2$ et $s+t+u+v = 2$ l'unique tableau est celui des données par unité.

Étape 2

Chaque tableau est maintenant décomposé en tableaux élémentaires 2 × 2 de moyennes, conformément aux indications de la figure 1 qui rassemble les 16 décompositions de l'interaction 5 × 5. Les décompositions sont schématisées : les traits pleins délimitent, par rapport aux 25 moyennes, le contenu des 4 cellules du tableau 2 × 2. C'est ce contenu qui doit être remplacé par 4 moyennes. Désignons ces moyennes par w_i, x_i, y_i, z_i , et faisons $n_i = f (w_i - x_i - y_i + z_i)^2$

formule dans laquelle f_i est un coefficient de pondération fractionnaire, dont la correspondance au schéma est apparente; il est simplifiable ou exprimable en nombre décimal (Au dénominateur on a le nombre de cellules concernées, au numérateur le nombre maximal de cellules; ainsi $f_{15} = \frac{12}{20}$ 20 cellules au total, soit $12+4+4+1$).

La figure 2 présente toutes les interactions à 2 facteurs que l'expérimentateur peut rencontrer. Un schéma et une formule accompagnent chaque interaction : (1) le schéma indique quelles sont — des 16 décompositions — celles qu'il y a lieu d'effectuer; (2) la formule sert au calcul de la constante m à introduire dans le calcul des composantes de l'interaction en question. Le produit mn_i n'est autre que la composante recherchée.

5X5	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16	ou	5X4	1 2 3 5 6 7 9 10 11 13 14 15	$m=rX2^s X3^t X4^u X5^{v-2}$	16
4X5	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12	ou	5X4	1 2 3 5 6 7 9 10 11 13 14 15	$m=rX2^s X3^t X4^{u-1} X5^{v-1}$	12
3X5	1 2 3 4 5 6 7 8	ou	5X3	1 2 5 6 9 10 13 14	$m=rX2^s X3^{t-1} X4^u X5^{v-1}$	8
2X5	1 2 3 4	ou	5X2	1 5 9 13	$m=rX2^{s-1} X3^t X4^u X5^{v-1}$	4
4X4	1 2 3 5 6 7 9 10 11				$m=rX2^s X3^t X4^{u-2} X5^v$	9
3X4	1 2 3 5 6 7	ou	4X3	1 2 5 6 9 10	$m=rX2^s X3^{t-1} X4^{u-1} X5^v$	6
2X4	1 2 3	ou	4X2	1 5 9	$m=rX2^{s-1} X3^t X4^{u-1} X5^v$	3
3X3	1 2 5 6				$m=rX2^s X3^{t-2} X4^u X5^v$	4
2X3	1 2	ou	3X2	1 5	$m=rX2^{s-1} X3^{t-1} X4^u X5^v$	2
2X2	1				$m=rX2^{s-2} X3^t X4^u X5^v$	1

TABLE
F au risque 1 % avec
d degrés de liberté

F	d
16,3	5
13,7	6
12,3	7
11,3	8
10,6	9
10,0	10
9,7	11
9,3	12
9,1	13
8,9	14
8,7	15
8,5	16
8,4	17
8,3	18
8,2	19
8,1	20
8,0	21
7,9	22
7,9	23
7,8	24
7,8	25
7,7	26
7,7	27
7,6	28
7,6	29
7,6	30
7,5	31
7,5	32
7,5	33
7,4	34
7,4	35
7,4	36
7,4	37
7,4	38
7,3	39
7,3	40
7,3	41
7,3	42
7,3	43
7,2	44
7,2	45
7,2	46
7,2	47

FIG. 2. --- Interactions possibles, décompositions correspondantes, constantes avec leur fréquence d'utilisation

5	17 18 19 20	$m=rX2^s X3^t X4^u X5^{v-1}$	4
4	17 18 19	$m=rX2^s X3^t X4^{u-1} X5^v$	3
3	17 18	$m=rX2^s X3^{t-1} X4^u X5^v$	2
2	17	$m=rX2^{s-1} X3^t X4^u X5^v$	1

FIG. 2 (suite). --- Effets principaux, décompositions, constantes avec leur fréquence d'utilisation

Étape 3

Les effets principaux sont traités de manière analogue, en calculant directement leurs composantes à partir des schémas et formules des figures 1 et 2.

Nous avons de la sorte

$$n_i = f_i (w_i - x_i)^2$$

ainsi que les composantes mn_i,

Étape 4

Il n'est pas sans intérêt, à ce stade, d'observer la taille des composantes; mais cela ne suffit pas. Il s'agit de faire le test de signifiante, en se servant de l'erreur expérimentale. Rappelons que c'est avant la mise en place de l'expérience qu'est fixé le risque du test (F à 5 %, à 1 %) et qu'est connu le nombre d de degrés de liberté à l'erreur. A l'issue de l'expérience, ou en cours d'expérience, on a r × 2^s × 3^t × 4^u × 5^v données a d'une même variable. Si c désigne la somme des k données d'un même bloc, l'erreur expérimentale

$$E = \left(\Sigma a^2 - \Sigma mn_i - \frac{\Sigma c^2}{k} \right) / d$$

Le F est extrait, au risque fixé, à la ligne d de la colonne 1 de la table.

Le produit EF est la valeur de référence pour le test; les composantes mn_i qui la dépassent sont significatives. Par convention, on les affecte d'un astérisque.

Pour la commodité de l'analyse, on a intérêt à multigraphier les figures 1 et 2 et à les annoter à mesure que progressent les calculs (sur une cal-

culette à 50 F par exemple). Les mêmes schémas seront ensuite utilisés à l'interprétation des composantes significatives.

Manuscrit reçu au Service des Éditions de l'O.R.S.T.O.M. le 11 mai 1983

Exemple

Calcul direct des composantes de l'interaction AB dans une expérience factorielle 1 × 2⁰ × 3⁴ × 4⁰ × 5⁰ en blocs de 9 parcelles de palmiers à huile (INEAC). La parcelle est formée de 2 lignes de 12 palmiers et entourée d'un périmètre tampon de 32 palmiers.

Traitements : 4 fertilisants à 3 doses.

		B			
		1	2	3	
A	1	873,3	945,6	871,1	kg régimes/7 mois
	2	992,2	886,7	1066,7	
	3	875,6	862,2	897,8	
Composante 1		873,3	945,6		
		992,2	886,7		
Composante 2		909,4	871,1		
		939,4	1066,7		
Composante 5		932,8	916,1		
		875,6	862,2		
Composante 6		924,4	968,9		
		868,9	897,8		
m = 1 × 2 ⁰ × 3 ⁴⁻² × 4 ⁰ × 5 ⁰ = 9					
n ₁	=	$\frac{1}{4} \times 177,8^2$	=	7903	mn ₁ = 71127
n ₂	=	$\frac{2}{6} \times 165,6^2$	=	9141	mn ₂ = 82269
n ₅	=	$\frac{2}{6} \times 3,3^2$	=	3,63	mn ₅ = 33
n ₆	=	$\frac{4}{9} \times 15,6^2$	=	108,16	mn ₆ = 973

BIBLIOGRAPHIE

YATES (F.), 1937. — The design and analysis of factorial experiments. Comm. Bur. Soils t.c. 35. CAB, Farnham Royal, Bucks. UK, 96 p.

VAN DEN DRIESSCHE (R.), 1961. — Analyse systématisée des expériences factorielles. *Biom.-Prax.*, 2, (4) : 245-259.

ANNEXE

Dans le choix des douze dispositifs factoriels présentés en annexe, après les permutations d'usage, a prévalu la recommandation du préambule ; à savoir qu'il ne faut pas confondre d'interaction à deux facteurs avec les différences entre blocs. Au sujet des blocs, on sait que leur agencement doit épouser l'hétérogénéité du milieu expérimental : serre, étuve, pépinière, etc., et qu'aligner les k unités n'est pas une obligation. En outre, seuls des dispositifs peu encombrants ont été présentés. Il en existe beaucoup d'autres dans cette catégorie.

ANNEXE I

Dispositifs:										
1				2		3		4		
blocs:										
1	2	3		1	2	1	2	1	2	3
facteurs:										
12345	12345	12345		12	12	12	12	1234	1234	1234
traitements:										
21212	22313	23111		52	53	34	11	1323	2133	2322
23231	31211	31232		33	12	44	44	1113	1212	2123
11333	23123	11111		14	43	14	42	1312	2231	1131
33113	23222	32213		45	45	32	34	2312	1231	2221
31223	22211	32312		51	54	22	12	1331	1111	1221
33212	12131	33323		21	41	11	15	1132	2332	1322
13322	11321	11312		44	21	13	41	2222	2122	2333
32333	11222	21122		42	52	31	24	2323	1122	1213
32231	13211	21221		12	33	43	45	2121	2111	1311
13121	32222	33221		13	44	24	21	2211	1332	2112
21113	23321	31331		31	42	12	22	1222	2212	1333
22121	21131	11213		53	14	45	23	2233	2321	2213
11132	21332	32111		34	55	23	25	2331	2313	1112
21311	33233	33122		25	31	35	13	1121	1223	2131
32132	33332	13232		35	51	41	31	2132	1313	2232
12113	32123	22331		32	15	42	43	2113	1321	2311
23132	33131	13331		24	13	25	33	1211	2223	1123
31121	12332	21323		54	24	21	35	1233	1133	1232
22322	31313	22133		23	25	15	14			
22223	13313	31133		22	22	33	32			
33311	32321	13133		43	34					
31322	21233	22232		11	32					
12311	11123	23312		41	35					
23333	12233	23213		55	11					
12212	31112	12323		15	23					
11231	22112	12122								
13223	13112	12221								
Dispositif 1										
$1/3 \times 2^0 \times 3^5 \times 4^0 \times 5^0$ en 3 blocs de 27 unités, $d = 28$										
Dispositif 2										
$2 \times 2^0 \times 3^0 \times 4^0 \times 5^2$ en 2 blocs de 25 unités, $d = 24$										
Dispositif 3										
$2 \times 2^0 \times 3^0 \times 4^1 \times 5^1$ en 2 blocs de 20 unités, $d = 19$										
Dispositif 4										
$1 \times 2^1 \times 3^3 \times 4^0 \times 5^0$ en 3 blocs de 18 unités, $d = 26$										

ANNEXE II

dispositifs:									
5	6			7			8		
blocs:									
1	2	1	2	3	1	2	3	4	1
facteurs:									
12345	12345	123	123	123	123	123	123	123	123
traitements:									
12223	12212	312	131	212	113	224	121	213	321
22121	12221	222	311	122	124	212	223	123	211
21214	22114	132	333	321	222	122	113	212	323
21223	21221	331	221	332	214	114	211	111	313
22222	21212	121	112	231	211	123	112	114	322
11121	21111	323	123	111	112	221	222	224	311
12124	21122	211	232	313	223	111	124	122	122
11211	11123	233	213	133	121	213	214	221	132
12214	22123	113	322	223					232
22112	11114								212
11112	22213								113
12113	22224								223
21124	12111								333
11222	11213								331
22211	11224								222
21113	12122								221
									231
									111
									112
									213
									123
									233
									332
									312
									131
									121
									133
Dispositif 5									
$1/2 \times 2^4 \times 3^0 \times 4^1 \times 5^0$ en 2 blocs de 16 unités, $d = 5$									
Dispositif 6									
$1 \times 2^0 \times 3^3 \times 4^0 \times 5^0$ en 3 blocs de 9 unités, $d = 6$									
Dispositif 7									
$2 \times 2^2 \times 3^0 \times 4^1 \times 5^0$ en 4 blocs de 8 unités, $d = 16$									
Dispositif 8									
$1 \times 2^0 \times 3^3 \times 4^0 \times 5^0$ en 1 bloc de 27 unités, $d = 8$									

ANNEXE III

dispositifs:						11	
9	10						
blocs:						1 2	
1	2	1	2	3	4	1	2
facteurs:						12 12	
12	12	12345678	12345678	12345678	12345678	12	12
traitements:							
31	35	12112211	22122121	12222111	11211222	41	42
22	24	22111121	12121211	11212211	11221211	14	23
11	12	21111212	11212121	22112222	12221122	21	43
13	21	11211112	21112221	22221221	12211111	11	34
15	14	11122111	21221222	11222222	11122221	34	31
33	33	22212111	22221111	22211212	21212112	33	44
25	22	21121221	22211122	22122211	11112212	12	12
14	25	11112122	22112112	21112111	22222212	23	13
32	11	22222122	21211211	12212122	22212221	44	21
12	15	11221121	21122212	12111112	22121222	22	22
35	34	12211221	11111111	21221112	22111211	13	14
21	23	12221212	12222221	11111221	21111122	24	11
34	32	21212222	12111222	12121121	12122112	32	41
24	13	12122222	11222112	21211121	21121111	43	33
23	31	22121112	12212212	21122122	21222121	42	32
		21222211	11121122	11121212	12112121	31	24

Dispositif 9
 $2 \times 2^0 \times 3^1 \times 4^0 \times 5^1$ en 2 blocs de 15 unités, $d = 14$

Dispositif 10
 $1/4 \times 2^8 \times 3^0 \times 4^0 \times 5^0$ en 4 blocs de 16 unités, $d = 24$

Dispositif 11
 $2 \times 2^0 \times 3^0 \times 4^2 \times 5^0$ en 2 blocs de 16 unités, $d = 15$

ANNEXE IV

dispositif:
12

blocs:

1 2 3 4 5 6 7 8 9

facteurs:

1234 1234 1234 1234 1234 1234 1234 1234 1234

traitements:

1222 1133 2331 2222 2123 3212 2312 2223 3223

2112 1312 2213 2131 1112 3333 3323 1333 2333

2233 1221 3312 1332 3222 2113 1331 1212 1231

3123 3122 3133 2313 2211 3121 1122 3322 3311

1131 3331 1323 1123 3131 1223 1213 2132 2212

3332 2111 1232 1211 3313 1132 3111 3113 2121

3211 2232 1111 3233 1321 1311 2221 3231 1322

2321 2323 2122 3321 2332 2322 3232 1121 3132

1313 3213 3221 3112 1233 2231 2133 2311 1113

dispositif 12

$1 \times 2^0 \times 3^4 \times 4^0 \times 5^0$ en 9 blocs de 9 unités, $d = 40$