

UTILISATION DE LA GRAVIMÉTRIE EN GÉOLOGIE STRUCTURALE

JEAN GOGUEL

*Ingénieur Général des Mines
Président du comité technique de géophysique de l'O.R.S.T.O.M.
O.R.S.T.O.M., 24, rue Bayard 75008 Paris*

Introduction

Lorsqu'on cherche à utiliser la gravimétrie pour préciser des structures à moyenne échelle — mettons, pour fixer les idées, sur des étendues de 10 à 100 km et plus — on ne peut pas se contenter, comme pour les petites structures, d'utiliser l'anomalie de BOUGUER, mais il faut prendre en compte la manière dont se fait la compensation isostatique. Il y a 30 ans, on utilisait pour cela des cartes en anomalie isostatique, mais celle-ci est progressivement tombée en désuétude, en grande partie à cause du caractère artificiel et conventionnel des modèles utilisés pour la calculer, et qui avaient d'ailleurs été conçus à d'autres fins.

Plusieurs raisons me conduisent à reprendre à leur base les méthodes de l'interprétation gravimétrique à moyenne échelle. La première est que l'on dispose maintenant, grâce aux satellites altimétriques, de déterminations directes de la forme du géoïde en mer, c'est-à-dire d'une donnée sur la forme du champ de gravité, qu'il faut apprendre à utiliser au même titre que les valeurs de la gravité.

En théorie, la connaissance des valeurs de la gravité, et celle de la forme du géoïde, sont équivalentes, c'est-à-dire qu'on peut déduire l'une de l'autre, et réciproquement. Mais cela suppose que leurs valeurs sont connues sur toute l'étendue du globe, la hauteur du géoïde se déduisant de la gravité par l'intégrale de STOKES, étendue à toute la surface et réciproquement, la gravité en un point se déduisant de la hauteur du géoïde par une intégration étendue à toute la surface.

Or, les valeurs de la gravité sont — ou peuvent être — bien connues à terre, et leur connaissance en mer est beaucoup plus rudimentaire; inversement la hauteur du géoïde n'est mesurée directement qu'en mer. Plutôt que d'essayer de calculer, tant bien que mal, l'une ou l'autre de ces grandeurs sur toute l'étendue d'une zone mixte, à la fois marine et continentale, mieux vaut utiliser directement les valeurs mesurées, soit de la gravité, soit de l'élévation du géoïde, pour contrôler la validité d'un modèle (d'autant plus que nous verrons que cela ne présente aucune difficulté).

Il suffit en effet — et c'est la deuxième raison de ce travail — de compléter les programmes de calcul de gravité à partir d'un modèle, dont l'usage se répand de plus en plus. Il s'agit jusqu'à présent, surtout de modèles à deux dimensions, mais il faut être prêt à mettre en œuvre des modèles à trois dimensions, quitte à renoncer à certaines complications, sans doute très illusoire, qui figurent dans nombre de modèles à deux dimensions.

Pour un modèle de structure, concernant nécessairement une étendue limitée, nous aurons donc à calculer, pour les comparer aux données dont nous disposons, d'une part la valeur de la gravité

(ou plus exactement son anomalie) et d'autre part, la hauteur du géoïde au-dessus de la surface de référence (en général, plan ou ellipsoïde) laquelle résulte directement de la valeur du potentiel.

Mais il est une autre condition, à laquelle il convient d'attacher une grande importance. Nous n'avons pas à décider à l'avance si et comment la compensation isostatique est réalisée. Mais, si elle ne l'est pas localement, cela veut dire qu'une partie de la charge, celle qui n'est pas compensée, est supportée par l'écorce, laquelle transmet des efforts de cisaillements. On a souvent calculé celui-ci pour des modèles à deux dimensions, ce pour quoi il suffit de transposer la théorie classique des poutres droites. Nous allons montrer que le calcul peut parfaitement se faire à trois dimensions; on peut ainsi, pour tout modèle de structure, calculer les efforts de cisaillement transmis à travers la lithosphère, qu'il implique. Il restera à juger de la vraisemblance des valeurs trouvées.

Dans une première partie, nous nous en tiendrons à une approximation plane, négligeant la courbure de la Terre.

Mais la notion d'équilibre isostatique n'est qu'un aspect de la théorie hydrostatique, formulée en premier lieu par CLAIRAUT, et qui rend compte de la figure de la Terre à 10^{-5} près. Cette théorie peut également être utilisée pour analyser les écarts à la forme ellipsoïdique qu'elle fait prévoir, et ce sera l'objet de notre deuxième partie.

Les écarts à la distribution hydrostatique des densités peuvent se situer à différents niveaux. Laissant de côté le noyau, nous examinerons l'effet de fluctuations de densités dans le manteau, qui pourraient y correspondre à des courants de convection, tout en conservant cependant l'hypothèse d'un équilibre hydrostatique, tant de la limite du noyau que de la surface extérieure, et nous calculerons leur effet, tant sur la distribution de la gravité que sur la hauteur du géoïde.

Un autre lieu d'irrégularité dans la distribution, non hydrostatique, des densités, est la croûte, ou lithosphère, douée de rigidité, c'est-à-dire capable de transmettre des efforts de cisaillement. Il est intéressant de reprendre son étude, non plus dans l'approximation plane, mais pour un modèle sphérique.

Nous négligerons, ce faisant, l'aplatissement dû à la rotation, admettant qu'il est assez petit pour se superposer simplement aux déformations (beaucoup plus petites encore) que nous envisageons.

On prendra partout, ci-après, le km comme unité de longueur, 10^9 tonnes comme unité de masse (c'est-à-dire la masse d'un km^3 de densité 1), et le gal comme unité d'accélération. Pour ce système, la constante de la gravitation, $f = 0,006666$. Cependant, les formules finales seront modifiées pour donner en mètres les hauteurs du géoïde, et en mgal, les anomalies de la gravité.

Approximation plane

Celle-ci revient à considérer le rayon de la sphère terrestre comme infini. On se donne — par des considérations de géodynamique et de géologie structurale qui sortent du domaine de la présente étude — un modèle de structure, comportant la définition de la densité dans un certain nombre de volumes géométriquement définis, par rapport au plan horizontal représentant le niveau de la mer.

Il faut compléter ce modèle par la définition du profil des densités en dessous de ce niveau, considéré comme représentatif de la Terre normale, en dehors de la région accidentée, en principe d'étendue limitée, dont nous étudions les effets; ce profil de densité peut donc être celui qu'impliquerait notre modèle à grande distance.

Ce profil de référence, en l'absence des accidents que nous étudions, est d'ailleurs largement indéterminé, puisque l'effet d'un plan horizontal de densité uniforme, tant sur la gravité que sur le potentiel, est indépendant de sa profondeur.

Quoi qu'il en soit, on soustraira, en chaque point, la densité correspondant à cette structure normale, de celle attribuée à notre modèle, la différence de densité ϖ devant seule intervenir dans les calculs.

Potentiel

Au point $x_0 y_0 h_0$, la contribution de l'élément de volume de densité ϖ , situé en xyz , au potentiel est :

$$(1) \quad du = f \times \frac{\varpi \, dx \, dy \, dz}{D} \text{ avec } D^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - h_0)^2$$

ou, si on pose :

$$(2) \quad r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

$$u = f \iiint \frac{\varpi(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}{\sqrt{r^2 + (z - h)^2}}$$

Pour une structure à deux dimensions, cylindrique indéfinie, cette formule devrait être remplacée par :

$$(3) \quad u = -2f \iint \varpi(x, z) \operatorname{Log} \sqrt{x^2 + (z - h)^2} \, dx \, dz$$

Connaissant la valeur de la perturbation du potentiel u apportée par notre modèle, on en déduit la hauteur ζ du géoïde, par $\zeta = \frac{u}{g}$, où g est la valeur normale de la gravité, 980 gal ou, si on veut calculer ζ en mètres, $u/(0,98)$.

Cette formule néglige l'effet de l'attraction de la tranche d'eau en plus ou en moins qui résulte de ce que le niveau de la mer se met en équilibre à la hauteur ζ . C'est une approximation justifiée dans l'approximation plane, qui s'applique à une structure de dimensions limitées (une ou quelques centaines de km), mais sur laquelle nous reviendrons plus loin.

Gravité

La composante verticale de l'attraction due au modèle, c'est-à-dire la modification Δg qu'il apporte à la gravité est donnée par :

$$(4) \quad \Delta g = f \iiint \frac{\varpi(x, y, z) (h - z) \, dx \, dy \, dz}{[r^2 + (h - z)^2]^{3/2}}$$

Pour une structure cylindrique, à deux dimensions

$$(5) \quad \Delta g = 2f \iint \frac{\varpi \times (h - z) \, dx \, dz}{x^2 + (h - z)^2}$$

On pourrait calculer ainsi la gravité correspondant aux mesures faites en des stations d'altitude h quelconque. Mais souvent le modèle ne représente que très imparfaitement le détail du relief, et on préférera comparer l'anomalie calculée, à l'anomalie de BOUGUER. Cela conduit à n'effectuer l'intégration qu'en dessous de la surface $z = 0$ (alors que, pour le potentiel, l'intégration doit évidemment porter sur la totalité du modèle).

On a l'habitude aujourd'hui, dans les régions partiellement marines, d'utiliser l'anomalie à l'air libre en mer, l'anomalie de BOUGUER à terre; mais il convient de préciser la définition de celle-ci.

En principe, l'anomalie de BOUGUER s'obtient en appliquant à la valeur mesurée, moins la valeur théorique de référence au niveau de la mer, trois corrections :

- 1° la correction de plateau;
- 2° la correction topographique pour le relief terrestre, dont on estime souvent qu'elle peut être négligée, quand le relief est doux;
- 3° la correction topographique marine, c'est-à-dire l'effet de la substitution d'une densité 2,67, à la densité de l'eau de mer (1,027); cette correction peut être considérable, à l'approche d'un océan profond.

Si on veut passer de l'anomalie de BOUGUER à l'anomalie à l'air libre, au passage du littoral, sans discontinuité, il faut ne pas faire de correction de topographie marine; on utilise donc une pseudo-anomalie de BOUGUER, s'écartant au voisinage du littoral de la définition classique, mais beaucoup plus commode, et de calcul, et d'emploi.

Le point de vue de l'isostasie

Pour que la compensation isostatique locale soit réalisée en tout point, il suffit que l'intégrale $\int \rho dz$ appliquée suivant la verticale x, y , soit nulle en tout point. L'auteur qui entreprend une recherche géodynamique peut s'imposer cette condition, mais il peut également faire l'hypothèse que l'équilibre isostatique n'est pas réalisé localement, pour tout prisme élémentaire. La croûte terrestre subsistant, à sa base, une certaine pression de la part de l'Asthénosphère, cela revient à dire qu'il subsiste, pour chaque élément de surface $dx dy$ une charge égale au poids de $dx dy \int \rho dz$ non compensée, et qui se trouve supportée grâce à la rigidité de l'écorce, qui est le siège d'efforts de cisaillements. Nous allons chercher comment on peut calculer ceux-ci, leur grandeur pouvant constituer un critère de vraisemblance, ou en tout cas une caractéristique du modèle étudié.

Cas du modèle bidimensionnel

Ce calcul des efforts de cisaillement est classique pour le modèle bidimensionnel, où il reprend le calcul des efforts dans une poutre droite (à l'approximation de SAINT-VENANT). Cette poutre, horizontale, étant soumise à des efforts verticaux, concentrés ou répartis, $F(x)$, on montre que l'effort tranchant, ou cisaillement T , est tel que $F = \frac{\partial T}{\partial x}$, c'est-à-dire qu'on déduit T de la distribution de F , par une intégration, avec une constante déterminée par les conditions aux extrémités ou aux appuis. La poutre transmet un « moment fléchissant » M , qui est tel que $T = \frac{\partial M}{\partial x}$, et on obtient M par une nouvelle intégration de T , avec une autre constante à déterminer. La courbure que prend la poutre est liée au moment fléchissant M , par l'élasticité, mais le coefficient, ou raideur de la poutre, peut très bien varier suivant sa longueur (de même que la croûte terrestre peut ne pas être élastiquement uniforme, mais comporter des failles, ou d'autres particularités structurales). De la courbure, on déduit par une première intégration la pente, et par une deuxième le déplacement vertical.

Il y a, dans ce processus, deux phases : le calcul de la distribution des contraintes, puis celui des déplacements. Les conditions imposées à une poutre (appuis, encastrement, etc.) peuvent être telles qu'elles soient inséparables et que les deux phases soient nécessaires pour obtenir la distribution des contraintes. Mais il n'en est généralement pas de même dans le problème que nous envisageons. Les conditions aux limites (décroissance du cisaillement à l'infini), sont généralement telles qu'on puisse se borner à la première phase du calcul, concernant la distribution des contraintes.

Le calcul des déformations élastiques implique d'autres hypothèses, sur l'élasticité de l'écorce, sur la distribution initiale des contraintes, etc. Il sort du cadre du présent travail (1).

(1) Voir, à titre d'exemple : Jean GOGUEL. — Gravimétrie et Fossé Rhénan. Gedenkboek F. A. Veining-Meinesz, *Verhandeling v. het Nederlandsch Geologisch Mynebouwkundig-Genootschap* Geol. ser Deel XVIII, 1957 : 125-147.

Détermination des cisaillements pour un modèle à trois dimensions

Rappelons brièvement que, pour une plaque plane, sur laquelle on n'exerce que des forces et non des couples, les équations de l'élasticité se scindent en deux groupes.

D'une part, les forces et les déplacements dans le plan de la plaque, les compressions σ_{11} et σ_{22} , le cisaillement σ_{12} (Oz étant perpendiculaire à la plaque), obéissent aux équations classiques de l'élasticité à deux dimensions.

D'autre part, les forces et les déplacements perpendiculaires à la plaque, sont liées aux contraintes intérieures à celle-ci, non visées plus haut, par des équations que nous allons étudier.

De cela résulte que nous pouvons à l'approximation plane étudier l'effet des forces verticales sur la croûte, sans nous occuper des compressions horizontales qui peuvent exister par ailleurs, et qui peuvent engendrer certaines déformations tectoniques. Cela est essentiel pour la considération de l'Isostasie. Cependant il peut arriver que la structure de la croûte soit telle que la compression horizontale engendre — par le jeu de failles obliques, ou d'une subduction — des déformations et des contraintes intérieures verticales dans la croûte. Nous montrerons comment il peut en être tenu compte sans entrer dans le détail des hypothèses qu'on peut envisager à leur sujet.

L'axe z étant perpendiculaire à la plaque, les axes x et y dans son plan médian, les forces $F dx dy$ s'exercent, parallèlement à Oz, sur l'élément $dx dy$.

Pour définir les contraintes intérieures, on coupe la plaque suivant un contour, orienté dans le sens Os, et on considère la normale On à ce contour et à Oz, telle que le trièdre Onsz soit de même sens que Oxyz. Les forces qu'exerce le côté n positif sur l'élément ds du contour qui limite le reste de la plaque, se réduisent, pour ce qui nous concerne, à un cisaillement parallèlement à Oz, $T ds$, à une torsion $N ds$, dont le moment est dirigé suivant n, et à un effort fléchissant M , de moment orienté suivant Os (qui s'il est positif, tend à produire une courbure convexe du côté des z positifs).

On affecte de l'indice x ces grandeurs, si la normale n est parallèle à l'axe Ox, de l'indice y si n est parallèle à Oy.

Si n fait un angle α avec Ox, on a :

$$(6) \quad T = T_x \cos \alpha + T_y \sin \alpha \quad N_y = -N_x$$

$$(7) \quad \begin{cases} M = M_x \cos^2 \alpha + M_y \sin^2 \alpha - N_x \frac{\sin 2\alpha}{2} \\ N = N_x \cos^2 \alpha + (M_x - M_y) \frac{\sin 2\alpha}{2} \end{cases}$$

Ces équations montrent : que le cisaillement est défini dans le plan de la plaque, par un vecteur T de composante T_x et T_y . Il est nul sur la surface parallèle à ce vecteur, et a la valeur $T \cos \omega$ sur une surface dont la normale fait un angle ω avec ce vecteur.

Les conditions d'équilibre, avec les forces extérieures F, sont les suivantes :

$$(8) \quad \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + F = 0$$

$$(9) \quad T_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial N_x}{\partial y} \quad T_y = \frac{\partial N_x}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y}$$

Nous n'aurons, pour l'instant, à considérer que la première de ces équations, dont l'analogie avec la théorie de la poutre droite est évidente. Mais nous avons affaire ici à des dérivées partielles, c'est-à-dire qu'au lieu de constantes d'intégration, nous devons nous attendre à voir s'introduire des fonctions arbitraires, à déterminer.

Des équations (6) et (8) on déduit que si

$$(10) \quad w(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \iint F \operatorname{Log} r \, dx \, dy \quad r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

et si on pose $T_x = \frac{\partial w}{\partial x}$, $T_y = \frac{\partial w}{\partial y}$, T_x et T_y vérifient l'équation d'équilibre et correspondent à une distribution possible des contraintes.

Mais il faut en envisager d'autres. Si v est une fonction harmonique quelconque dans le plan, $\Delta^2 v = 0$ les cisaillements $T_x = \frac{\partial v}{\partial x}$, $T_y = \frac{\partial v}{\partial y}$ vérifient l'équation d'équilibre en l'absence de forces extérieures F , et peuvent s'ajouter à la distribution trouvée ci-dessus. Mais une fonction harmonique, ne présentant pas de point singulier, augmente indéfiniment à grande distance; cette solution correspondrait à l'effet de contraintes exercées sur une limite éloignée, alors que nous avons toutes les raisons de penser que, l'équilibre isostatique étant à peu près réalisé, les cisaillements ne doivent pas augmenter à grande distance. Nous pouvons donc ne pas introduire une telle solution.

Si $q(x, y)$ est une fonction quelconque, les contraintes

$$(11) \quad T_x = -\frac{\partial q}{\partial y} \quad T_y = \frac{\partial q}{\partial x}$$

vérifient l'équation d'équilibre en l'absence de force F .

Cette distribution de cisaillements correspond donc aux contraintes qui pourraient exister dans la plaque, en l'absence de forces extérieures. Elles pourraient résulter du jeu de failles obliques, ou de subduction, sous l'effet de compressions horizontales. Il pourrait également en apparaître si sous l'effet des cisaillements engendrés par la charge F , la plaque avait subi une déformation permanente, par exemple le jeu d'une faille, figée après un certain coulissement. Des contraintes de ce type, qui, comme la fonction q , peuvent se développer dans une petite zone, et décroître à grande distance, peuvent donc parfaitement avoir à être prises en considération, mais seulement à la suite d'une analyse dynamique de l'évolution de la croûte, qui sort du cadre envisagé ici.

Les couples de flexion et de torsion, M_x , M_y , N_x sont directement liés à la courbure (avec deux directions orthogonales de courbures principales de rayons différents), prise sous leur effet par une plaque élastique uniforme. Nous ne sommes nullement assurés que l'élasticité de la croûte soit isotrope et uniforme, ni que les déformations qu'elle a pu subir soient élastiques. Nous n'aborderons donc pas ici l'étude de la déformation de la plaque qui schématise la croûte.

Nous pouvons retenir que, pour une distribution quelconque des surcharges F , que nous savons calculer pour notre modèle (et dont le champ d'application est limité en étendue), il est facile de calculer (par les équations (10)), un système de cisaillements en équilibre avec F .

Mais il peut s'y ajouter un système de contraintes (11) largement indéterminé, qui peut avoir été engendré par une évolution géodynamique de la croûte, et dont la détermination sort du cadre envisagé ici.

Calcul simplifié de la gravité et du potentiel

Revenons aux équations (2) et (4), qui fournissent les valeurs du potentiel et de la gravité.

Au moins en dehors du modèle — mais nous verrons plus loin que la méthode peut s'appliquer également dans son étendue — nous pouvons les développer par rapport à z , ou par rapport à $(z - z_0)$. Nous poserons pour cela $\rho^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (h - z_0)^2$. Intégrant suivant la verticale, pour l'élément $dx \, dy$, nous verrons s'introduire les expressions :

$$(12) \quad I_0 = \int \omega dz \quad I_1 = \int \omega z dz \quad I_2 = \int \omega z^2 dz \quad I_3 = \int \omega z^3 dz$$

et il vient en posant $\sin \theta = \frac{h}{\rho}$

$$(13) \quad du = f \, dx \, dy \left[\frac{I_0}{\rho} - \frac{I_1 P_1(\cos\theta)}{\rho^2} + \frac{I_2 P_2(\cos\theta)}{\rho^3} - \frac{I_3 P_3(\cos\theta)}{\rho^4} + \dots \right]$$

$$(14) \quad d\Delta g = f \, dx \, dy \left[\frac{I_0 P_1(\cos\theta)}{\rho^2} - \frac{2 I_1 P_2(\cos\theta)}{\rho^3} + \frac{3 I_2 P_3(\cos\theta)}{\rho^4} - \frac{4 I_3 P_4(\cos\theta)}{\rho^5} + \dots \right]$$

où $P_m(\cos \theta)$ est le polynome de Legendre d'ordre m

$$\left(P_0 = 1 \quad P_1 = \cos \theta \quad P_2 = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) \quad P_3 = \frac{1}{2} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) \text{ etc.} \right)$$

Ce résultat était prévisible, puisque notre calcul revient à considérer une masse, puis un doublet, un triplet, etc., ramené au point z_0 , dont les potentiels sont caractérisés par la fonction harmonique formée à partir de ces polynomes, $\frac{P_m}{\rho^{m+1}}$.

Si on calcul $I_0 \dots I_n$ pour $z_0 = 0$ on en déduit immédiatement les valeurs I' pour $z_0 \neq 0$ par la formule du binome.

$$(15) \quad I'_0 = I_0 \quad I'_1 = I_1 - z_0 I_0 \quad I'_2 = I_2 - 2z_0 I_1 + I_0 z_0^2 \quad I'_3 = I_3 - 3z_0 I_2 + 3z_0^2 I_1 - z_0^3 I_0 \dots$$

Si, à grande distance, nous cherchons les valeurs de la gravité et du potentiel au niveau de la mer, pour $h = 0$ $z_0 = 0$ les polynomes de LEGENDRE se réduisent à zéro pour m impair, à $1, \frac{-1}{2}, \frac{+3}{8}, \frac{-5}{16}$, etc., pour m pair, et les expressions ci-dessus conduisent à :

$$(16) \quad u = f \iint \left[\frac{I_0}{\rho} - \frac{I_2}{2\rho^3} + \frac{3 I_4}{8 \rho^5} - \frac{5 I_6}{16 \rho^7} + \dots \right] dx \, dy$$

$$(17) \quad \Delta g = f \iint \left[\frac{I_1}{\rho^3} - \frac{3 I_3}{2 \rho^5} + \frac{5 \times 6 I_5}{16 \rho^7} - \dots \right] dx \, dy$$

Il est clair que, à grande distance, étant donné les exposants de ρ en dénominateur, on pourra se borner aux premiers termes de ces développements; d'une manière plus précise, il suffit pour cela que ρ soit grand par rapport à l'épaisseur de la croûte, sur laquelle intervient l'intégration des termes $I_n(x, y)$.

Ces formules doivent permettre d'aborder l'étude de modèles à trois dimensions, dont les caractéristiques peuvent être résumées en chaque point par les valeurs de $I_0, I_1 \dots I_n$. Celles-ci étant données, le calcul des intégrales (16) et (17), sera facile à programmer, terme par terme. L'intégrale I_0 n'est autre que la charge non compensée F , qui intervient dans le calcul des cisaillements.

A titre d'exemple, et pour fixer des ordres de grandeur, calculons les termes I pour un compartiment terrestre d'altitude h , compensé dans le système de AIRY — 30 km

$$(18) \quad I_0 = 0 \quad I_1 = 2,67h [30 + 2,725h] \quad I_2 = 2,67h [900 + 30 \times 4,45h + 6,268h^2]$$

A première vue, les formules (16) et (17) ne paraissent pas pouvoir s'appliquer dans l'étendue du modèle, où les I ne sont pas nuls, à cause des puissances de ρ en dénominateur. Mais il faut y regarder de plus près.

Revenons donc aux formules (13) et (14), en ne supposant plus h (ou $h+z$) nul, mais petit et égal à e . Dans les formules on posera $\rho = e/\cos \theta$, et nous aurons à intégrer, des termes de la forme

$$I_n P_n \cos^{n+1} \theta / e^{n+1} \quad \text{ou} \quad I_n P_{n+1} \cos^{n+2} \theta / e^{n+2}$$

Si I est constant, c'est-à-dire si on a affaire à un feuillet multipolaire uniforme, on sait qu'un feuillet de densité uniforme I_0 produit une attraction $\Delta g = 2\pi f I_0$ uniforme et donc un potentiel linéaire $2\pi f I_0 e$, et qu'un feuillet dipolaire I_1 uniforme, produit un potentiel uniforme $2\pi f I_1$, et un champ Δg nul, des feuillets uniformes d'ordre supérieur ont un effet nul.

Pour e petit, l'intégration pour la singularité située au voisinage de l'origine fournit donc ces valeurs. Si I_0 ou I_1 ne sont pas uniformes on pourra calculer à part l'intégration de la différence entre I_0 ou I_1 , et leur valeur au point pour lequel se fait l'intégration; cette différence étant nulle en ce point, cette deuxième intégration ne donne pas lieu à singularité.

Si $n \geq 2$, u et g sont nuls si I_n a une valeur constante; mais il faut se préoccuper des variations de cette grandeur. Si elle est continue et dérivable, on développera en série de TAYLOR sa valeur moyenne \bar{I} sur un cercle de rayon $r = etg\theta = \xi e$. Seules, les dérivées paires intervenant dans ce développement (que nous pouvons supposer conduit par rapport à ξ). On aura donc à intégrer des expressions de la forme suivante (n étant égal à m ou à $m - 1$)

$$(19) \quad \iint \frac{I_n P_m(\cos \theta)}{\rho^{m+1}} ds = 2\pi \int_0^\infty \left(I_n(0) + \frac{e^2}{2} \frac{\partial^2 \bar{I}_n}{\partial \xi^2} + \frac{e^4}{4!} \frac{\partial^4 \bar{I}_n}{\partial \xi^4} + \dots \right) \frac{P_m(\sqrt{1+\xi^2}^{-1})}{e^{m+1}(1+\xi^2)^{\frac{m+1}{2}}} \times e^2 \xi d\xi$$

dont on voit immédiatement que les termes résultant de la variation de I restent finis quand e tend vers zéro, tant que m n'est pas supérieur à 3 et ne donnent nulle part de résidus au voisinage de l'origine.

Par contre, si I n'est pas dérivable, ou présente des discontinuités, nous ne sommes pas sûrs de pouvoir conduire cette intégration.

Si le modèle envisagé comporte des discontinuités des fonctions I , on peut le décomposer en un modèle approché continu, auquel on appliquera la méthode simplifiée d'intégration, et un modèle correcteur, égal à la différence du modèle initial et du modèle approché, auquel on peut appliquer la méthode complète d'intégration. Bien souvent, si le modèle approché est convenablement choisi, on pourra s'arranger pour que l'effet du modèle correcteur soit presque partout négligeable, sauf au voisinage de la discontinuité.

Lorsque nous étudierons, plus loin, un modèle sphérique de la Terre, nous admettrons qu'il en est ainsi, et que l'effet des irrégularités de distribution de densité dans la croûte, peut se réduire à l'effet de feuillets multipolaires, de puissances variables, situés immédiatement sous la surface.

Développement en série de Fourier d'un modèle plan

Mais auparavant, il est intéressant de mettre en évidence l'effet, sur le potentiel et sur la gravité, des variations latérales de la puissance d'un feuillet, dans le cas particulier où celle-ci peut être développée en série double de FOURIER, c'est-à-dire en une somme de termes tels que :

$$(20) \quad I = A \cos ux \cos vy$$

On sait que la fonction

$$(21) \quad \Psi = Ae^{-\rho z} \cos ux \cos vy \quad \rho^2 = u^2 + v^2$$

est harmonique; il est facile de déterminer, par récurrence, le facteur dont cette expression doit être affectée, pour représenter soit le potentiel, u_a soit la gravité g , pour un feuillet de puissance I_a donné par (20).

On trouve ainsi :

$$(22) \quad \begin{array}{lll} u_0 = \frac{2\pi f}{\rho} \times \Psi & g_0 = 2\pi f \cdot \Psi = u_1 & g_1 = 2\pi f \cdot \rho \cdot \Psi \\ u_2 = 2\pi f \rho \Psi & g_2 = 2\pi f \rho^2 \Psi = u_3 & g_3 = 2\pi f \rho^3 \Psi \end{array}$$

Si les largeurs d'anomalie, $\frac{\pi}{u}$ et $\frac{\pi}{v}$ et donc $\frac{1}{\rho}$ sont grandes par rapport à l'épaisseur de la croûte, qui intervient, approximativement, par sa puissance n dans I_n , les coefficients diminuent quand n augmente, et on pourra se borner à considérer les premiers moments. Cet exemple montre très clairement comment, pour des feuillets multipolaires dont l'effet est nul lorsqu'ils ont une puissance uniforme, les variations latérales entraînent des valeurs non nulles, tant pour le potentiel que pour la gravité.

Étude de modèles sphériques

Par rapport au modèle idéal de CLAIRAUT, les irrégularités de distribution de densité sous la croûte ne sont pas les seules causes d'écart. En effet, ce que l'on sait de la forme du géoïde fait apparaître que, en dehors des corrugations locales (mises en évidence par la seule altimétrie par satellites), qui peuvent être interprétées à partir des irrégularités crustales (sans en exclure des subductions, telles que celles des surfaces de BENIOFF), il existe de larges ondulations, dont l'amplitude atteint une centaine de mètres, qui sont bien mises en évidence par différentes méthodes : géodésiques (déviation de la verticale) gravimétriques (formule de STOKES), et par l'étude des perturbations des orbites des satellites (développement en harmoniques sphériques du potentiel), ainsi que par l'altimétrie. Ces larges ondulations paraissent sans rapport avec la topographie et les structures crustales. Elles impliquent donc un autre type d'écarts au modèle hydrostatique de CLAIRAUT.

Nous allons étudier un modèle, qui envisage pour leur origine des fluctuations de densité dans le manteau. De telles fluctuations, contraires à l'équilibre hydrostatique, peuvent être liées à des courants de convection. Mais, étant donné la lenteur de ceux-ci, leur existence n'est nullement en contradiction avec un équilibre hydrostatique instantané, à d'autres niveaux, que nous supposons réalisé par hypothèse.

Il faut donc envisager un globe en équilibre hydrostatique formé de plusieurs couches de densités échelonnées. Puisque nous faisons abstraction de la rotation, les interfaces sont des sphères concentriques, et il y correspond un potentiel de pesanteur et une distribution du champ de gravité, g dont le calcul est immédiat.

Pour ajouter une distribution de densités anormales, positives ou négatives, nous les supposons distribuées sur une sphère de rayon b , cette distribution étant représentée par un développement harmonique. Il n'y a pas à considérer de terme P_0 (constant), puisque l'effet d'une couche uniforme serait inclus dans le modèle précédent.

Un terme du 1^{er} ordre, aurait un effet du même ordre sur la surface du géoïde, qui se réduit à un déplacement du centre de la sphère, que nous n'avons aucun moyen de mettre en évidence. Nous pourrions donc être amenés à le poser égal à zéro.

Si on voulait supposer une distribution de densités anormales sur plusieurs sphères de rayons différents, il suffirait de calculer séparément leurs effets et de les ajouter; et, bien entendu, toute masse perturbatrice ponctuelle est équivalente à une sphère de même masse centrée sur le point.

La méthode que nous allons utiliser serait applicable à un modèle comportant un nombre quelconque de couches de densités uniformes. Pour alléger le calcul, nous nous bornerons à considérer un manteau et un noyau. En lui attribuant son rayon vrai, $C = \gamma a$, avec $\gamma = 0,545$, on reproduit la densité moyenne vraie et le moment d'inertie en prenant pour densité $\varpi_c = 12,2$ dans le noyau, $\varpi_m = 4,217$ dans le manteau. Avec le rayon de la surface $a = 6371$, on a $g = 980$ gal, et la gravité à la limite du noyau, $g_c = 1182,7$. Posant $r = \rho a$ on trouve immédiatement les expressions du potentiel à l'extérieur, dans le manteau et dans le noyau

$$(23) \quad U_{\text{ext}} = 6,244012 \times \frac{1}{\rho} \quad U_m = 1,464619 \times \frac{1}{\rho} + 7,169089 - 2,389696 \rho^2$$

$$U_c = 9,366018 - 6,913515 \rho^2 \quad (\text{en } 10^6 \text{ gal} \times \text{km})$$

A ce modèle nous ajoutons des masses perturbatrices, sur une sphère de rayon $b = \beta.a$, β étant compris entre γ et 1, nous posons leur masse par unité de surface,

$$\mu = \sum \sum \mu_m^n P_m^n$$

Pour tenir compte de l'existence de ces masses, et de leurs effets indirects — déformations de la surface et de la surface du noyau —, il faut ajouter au potentiel envisagé ci-dessus, un potentiel complémentaire qui peut s'écrire

$$(24) \quad u = \sum \sum \left[q_m^n r^m + Q_m^n \frac{1}{r^{m+1}} \right] P_m^n (\theta, \varphi)$$

On posera

$$(25) \quad q_m^n = q'_m \times a^m \quad Q_m^n = Q'_m a^{-(m+1)}$$

pour écrire

$$(26) \quad u = \sum \sum \left[q_m^n \rho^m + \frac{Q_m^n}{\rho^{m+1}} \right] P_m^n (\theta, \varphi)$$

q et Q sont écrits ici à la place des coefficients valables dans les différentes couches concentriques :

$\rho :$	γ	β	1
$q :$	f	g	h
$Q :$	o	G	H

Pour déterminer ces coefficients, q_m^n en fonction de μ_m^n il nous faut d'abord écrire que les surfaces de séparations sont des équipotentielles, c'est-à-dire, si $Z(\theta, \varphi)$ est la quantité dont se soulève cette surface

$$(27) \quad u = gZ \quad (Z_c \text{ ou } Z_a)$$

D'autre part, ce soulèvement introduit un bourrelet de matière, de densité $\varpi_c - \varpi_m$, ou ϖ_n dont il faut tenir compte dans les raccordements des potentiels de part et d'autre : si les valeurs du potentiel sont identiques, de part et d'autre du feuillet, son gradient présente une discontinuité

$$(28) \quad \Delta g = 4\pi f \times Z \Delta \varpi$$

Cette expression est aussi valable au niveau b des densités perturbatrices.

En écrivant chacune de ces équations, pour les trois rayons c , b , a , on peut obtenir les coefficients $f_m \dots J_m$ en fonction de μ_m^n . En pratique, il nous suffira de calculer J pour obtenir le potentiel extérieur, et donc Z , c'est-à-dire la hauteur du géoïde.

Nous devons calculer également la valeur de la gravité au niveau du géoïde. A l'approximation où nous nous plaçons, son écart par rapport à g_a , ou anomalie Δg correspond d'une part, au gradient du potentiel complémentaire u , et d'autre part, au fait qu'à l'altitude Z , la gravité du modèle sphérique se trouve diminuée de $2 \times 980 \frac{Z}{a}$ d'où

$$(29) \quad \Delta g = \sum \sum P_m^n J_m^n \left(\frac{m+1}{a} - \frac{2}{a} \right) = \sum \sum P_m^n J_m^n \frac{(m-1)}{a}$$

Le système de ces six équations s'écrit :

$$(30) \quad (I) \quad f - g - \frac{G}{\gamma^{2m+1}} = 0$$

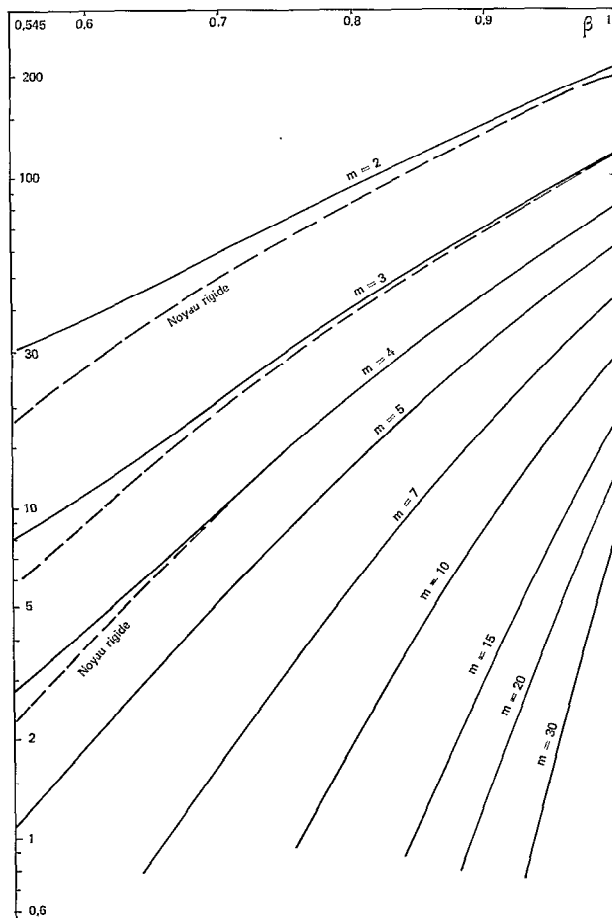


Fig. 1. — Coefficients Z_m/μ_m (échelle logarithmique).

$$(II) \quad f(m - K1) - mg + \frac{(m+1)}{\gamma^{2m+1}} G = 0$$

$$(III) \quad g + \frac{G}{\beta^{2m+1}} - h - \frac{H}{\beta^{2m+1}} = 0$$

$$(IV) \quad mg - \frac{(m+1)}{\beta^{2m+1}} G - mh + \frac{m+1}{\beta^{2m+1}} H = \frac{K3}{\beta^{m-1}} \mu_m^n$$

$$(V) \quad h + H - J = 0$$

$$(VI) \quad mh - (m+1) H + (m+1 - K2) J = 0$$

en sous-entendant les indices μ_m^n , et en posant

$$(31) \quad K1 = \frac{4\pi f a (\varpi_c - \varpi_m) \times \gamma}{g_c} = 1,963169$$

$$K2 = \frac{4\pi f a \varpi_m}{g_o} = 2,296468$$

$$K3 = 4\pi f a = 533,682$$

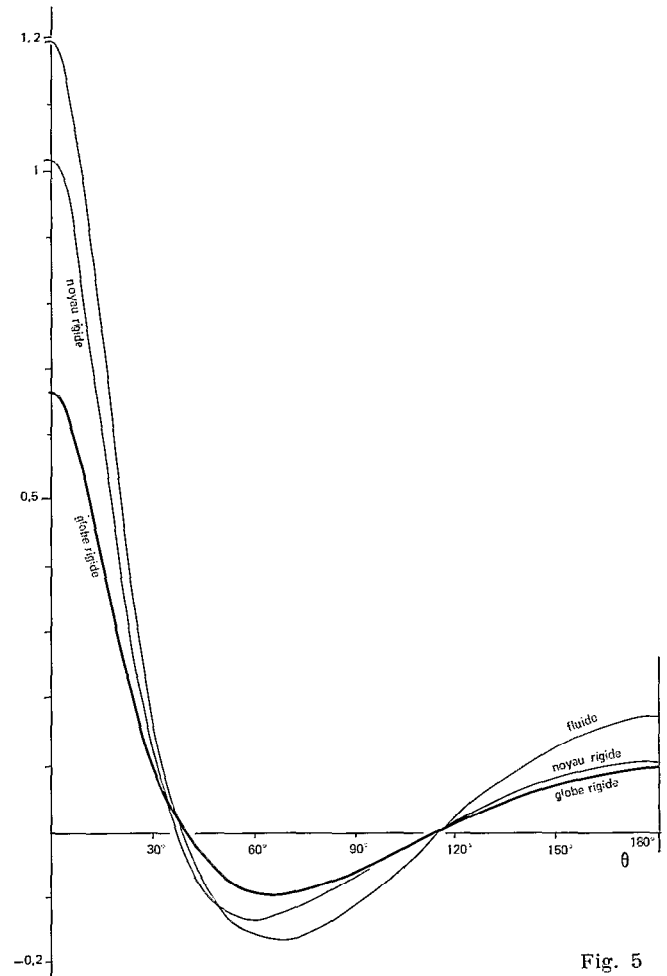
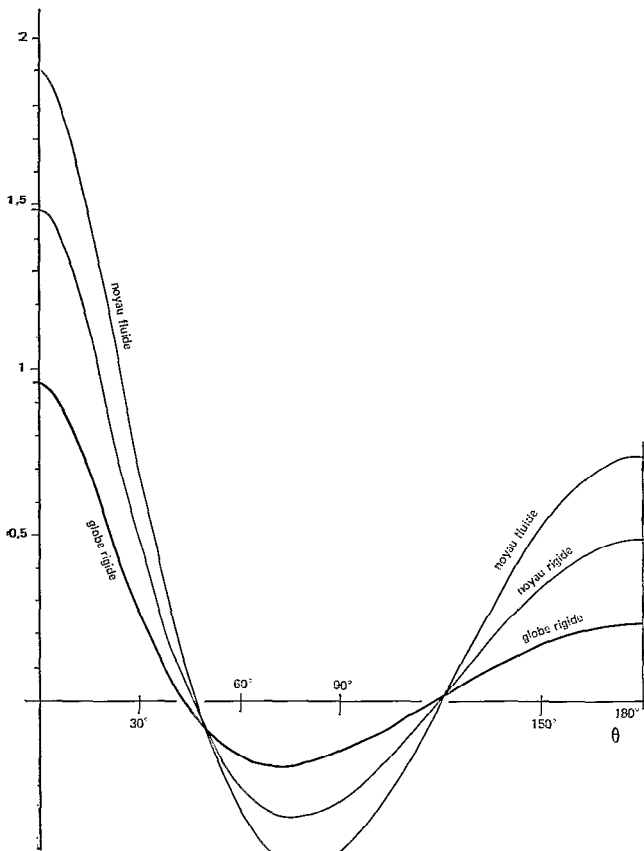
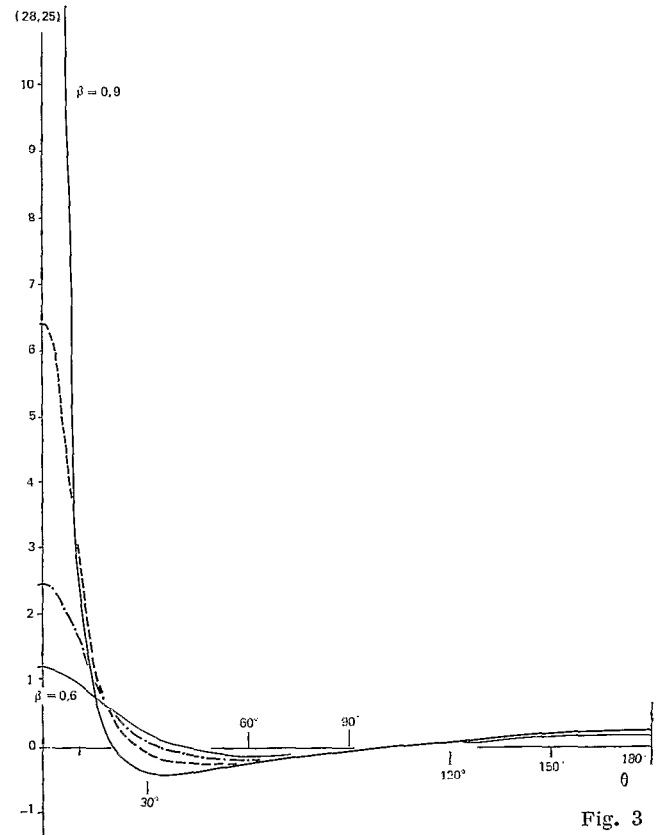
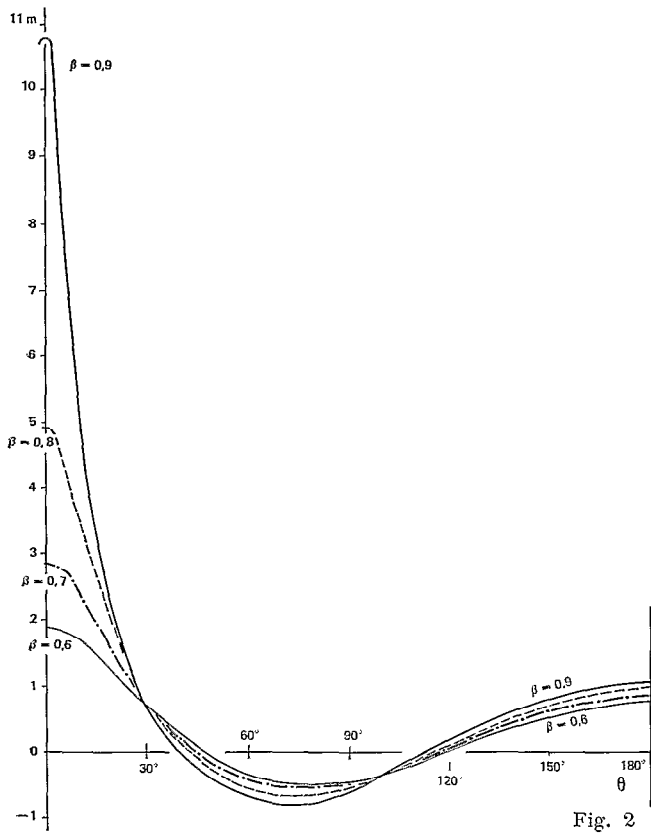


Fig. 4

Fig. 5

L'élimination des cinq premières inconnues se fait facilement, par addition des équations multipliées respectivement par :

$$(32) \quad \begin{array}{l} (I) \times (-m + K1) \quad (III) \times (K1 - mC1) \\ (IV) \quad C1 = \frac{(2m+1 - K1) \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{2m+1} + K1}{2m+1} \quad (V) \times (K1 - mC2) \\ (VI) \quad C2 = \frac{\frac{(2m+1 - K1)}{\gamma^{2m+1}} + K1}{2m+1} \end{array}$$

et on obtient ainsi :

$$(33) \quad J_m^n = \mu_m^n \frac{C1 \times K3 \times \gamma^{2m+1}}{\beta^{m-1} \left(2m+1 - K1 - K2 + \frac{K1 \times K2 (1 - \gamma^{2m+1})}{2m+1} \right)}$$

D'où les expressions de la hauteur du géoïde, et de l'anomalie de la gravité

$$(34) \quad Z \text{ (en mètres)} = \sum \sum \frac{J_m^n}{0,98} P_m^n \quad \Delta g \text{ (en milligals)} = \frac{1000}{a} \sum \sum (m-1) J_m^n P_m^n$$

Le facteur $m-1$ dans la seconde, montre pourquoi la forme du géoïde est plus sensible que la gravité, pour mettre en évidence des ondulations de grandes longueurs d'onde, qui sont d'ailleurs les seules sensibles à des irrégularités de densité profonde dans le manteau.

C'est ce que met en évidence la valeur des coefficients Z_m/μ_m , calculée pour différentes valeurs de β et de m qu'indique la figure 1 qui indique, en fonction de β , les log des coefficients multipliant les coefficients du développement harmonique décrivant la distribution des masses sur la sphère de rayon $b = \beta a$. On voit que ces coefficients ne diminuent avec β d'une manière notable que pour m élevé. La convergence de la série ne sera donc pas très rapide.

On a fait le calcul de Z et Δg pour une masse ponctuelle $M = 10^6$ (ou une masse sphérique, qui aurait un rayon de 133 km pour une densité 0,1), pour les rayons $\beta = 0,6, 0,7, 0,8$ et $0,9$, bien que la convergence dans le dernier cas soit très lente. On sait que le développement de cette masse en harmoniques sphériques est donné par

$$(35) \quad M \sum \frac{2m+1}{4\pi} P_m$$

expression qui n'est pas convergente, mais dont on tire des expressions convergentes pour tout rayon différent.

Comme il a été expliqué plus haut, on n'a pas tenu compte du terme $m = 0$, qui intervient dans la masse totale de la Terre, ni de $m = 1$, qui revient à un déplacement du sphéroïde de référence, et qu'il n'est donc pas possible de mettre en évidence.

Les figures 2 et 3 indiquent les résultats de ces calculs. A titre de comparaison, on a refait le même calcul pour $\beta = 0,6$, en supposant le noyau rigide. Il suffit, pour cela, de remplacer K_1 par zéro, dans les formules ci-dessus (fig. 4 et 5).

De haut en bas, de gauche à droite :

Fig. 2. — Hauteur Z du géoïde modèle fluide en mètres pour $M = 10^6$; $\beta = 0,6 - 0,7 - 0,8 - 0,9$.

Fig. 3. — Anomalie de la gravité; milligals pour $M = 10^6$; $\beta = 0,6 - 0,7 - 0,8 - 0,9$.

Fig. 4. — Comparaison de la hauteur Z du géoïde pour trois modèles, globe fluide, noyau rigide et globe rigide; mètres pour $M = 10^6$; $\beta = 0,6$.

Fig. 5. — Comparaison de l'anomalie de la gravité pour trois modèles: hydrostatique, noyau rigide, globe rigide; mgals pour $M = 10^6$; $\beta = 0,6$.

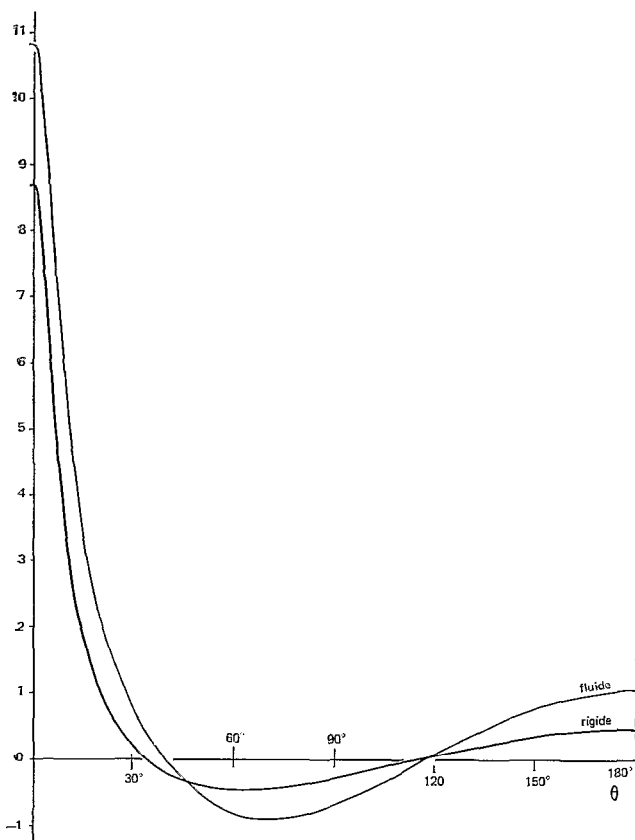


Fig. 6. — Comparaison de la hauteur Z du géoïde pour les modèles hydrostatique et rigide ; mètres pour $M = 10^6$; $\beta = 0,9$.

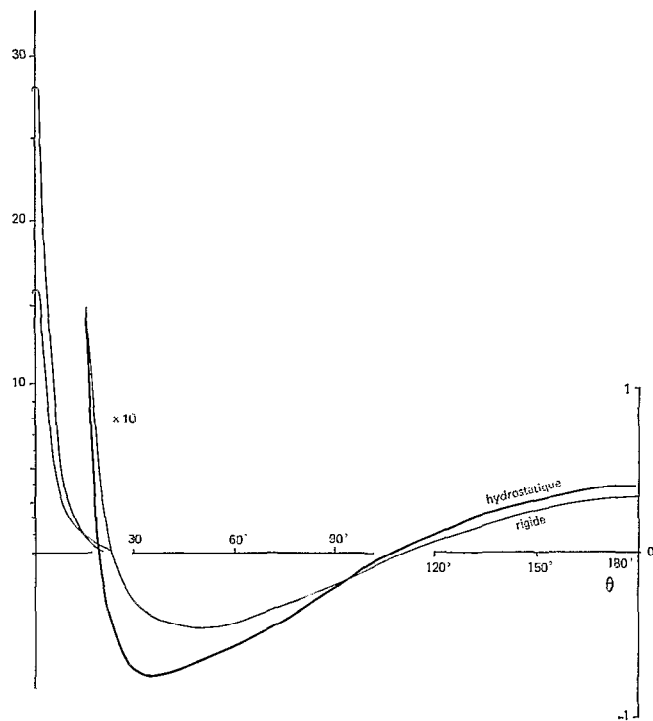


Fig. 7. — Comparaison de l'anomalie de la gravité pour les modèles hydrostatique et rigide ; mgals pour $M = 10^6$; $\beta = 0,9$.

On a aussi refait le calcul, pour un globe rigide, en plaçant la masse M aux rayons $\beta = 0,6$ et $0,9$. Les calculs de la dénivelée du géoïde — qui, ici, est une équipotentielle, à laquelle n'est attachée aucune variation de densité — et de l'anomalie de la gravité, sont tout à fait élémentaires. Mais, pour les rendre comparables à celles calculées précédemment, il faut les débarrasser du terme d'ordre zéro du développement harmonique, qui est une constante égale à l'effet d'une masse M placée au centre, et du terme du premier ordre, qui est l'effet d'un dipole central du moment $M\beta a$. D'où les formules :

$$(36) \quad Z = \frac{fM}{a \times 0,98} \left(\frac{1}{d} - 1 - \beta \cos \theta \right) \quad \Delta g = \frac{1000fM}{a^2} \left(\frac{\cos \alpha}{d^2} - 1 - 2\beta \cos \theta \right)$$

$$\text{en posant : } d = \sqrt{1 + \beta^2 - 2\beta \cos \theta} \quad \frac{\sin \alpha}{\beta} = \frac{\sin \theta}{d}$$

Les résultats de ces calculs sont indiqués par les figures 4, 5, 6 et 7. On voit que, pour $\beta = 0,6$ le fait de négliger la fluidité du noyau entraînerait une erreur atteignant 20 %, mais qui serait sans doute moindre pour β plus grand.

L'erreur entraînée par l'assimilation du Globe à un corps rigide est plus forte, et d'autant plus que β est grand.

L'amélioration qu'on pourrait en attendre justifierait-elle que l'on serre de plus près la loi de variation de la densité dans le noyau, en multipliant les surfaces de discontinuités ? Je laisse au lecteur le soin d'en juger.

Les fonctions représentées par ces différentes courbes pourraient être utilisées pour obtenir, par convolution, l'effet, en Z et Δg , d'une distribution quelconque de masses sur une sphère de rayon $b = \beta a$; mais en fait, c'est le problème inverse qui se pose : connaissant l'amplitude des ondulations de grande longueur d'onde de la surface du géoïde, en déduire les masses, non en équilibre hydrostatiques qui peuvent les avoir engendrées, ou en d'autres termes, l'amplitude des fluctuations de densité moyenne, sur des distances de l'ordre du millier de km. Nous avons abordé ce problème dans un travail antérieur, sur lequel nous ne reviendrons pas (1).

Modèle sphérique de croûte

Nous allons reprendre l'étude des anomalies de la pesanteur et de la déformation du géoïde, résultant d'une croûte, en équilibre isostatique ou non, mais cette fois, en tenant compte de la courbure de la Terre. Cela ne présente d'intérêt que pour des structures étendues, dont les dimensions sont grandes par rapport à l'épaisseur de la croûte. L'emploi du modèle simplifié, envisagé précédemment, est donc tout indiqué. Nous supposons donc, suivant la surface du globe, des feuillet, simples ou multipolaires, dont l'intensité ${}_0\mu_{1\mu_2\mu}$ est définie en chaque point par les intégrales écrites plus haut (12). Nous supposons chacun de ces feuillet, d'ordre ρ , développé en série d'harmoniques sphériques. Mais il nous faut auparavant préciser leur définition.

Il n'y a aucune difficulté à définir un feuillet de densité superficielle ${}_0\mu$, au rayon a , et à écrire l'expression de son potentiel et de son champ de gravité extérieur.

Soit :

$$(37) \quad {}_0\mu = \sum_m \sum_n {}_0\mu_m^n P_m^n(\theta, \varphi)$$

la densité d'une couche à la surface, de rayon a . Pour un rayon q différent de a , la distribution de la même masse correspond à une densité

$$(38) \quad \sum_m \sum_n {}_0\mu_m^n \times \frac{a^2}{q^2} P_m^n$$

laquelle produit un potentiel, et un champ de gravité, dont les expressions sont à l'intérieur :

$$(39) \quad \begin{aligned} u_{\text{int}} &= 4\pi f \sum_m \sum_n {}_0\mu_m^n \frac{a^2}{q^2} \times \frac{1}{(2m+1)} \frac{r^m}{q^{m-1}} P_m^n \\ g_{\text{int}} &= -4\pi f \sum_m \sum_n {}_0\mu_m^n \frac{a^2}{q^2} \frac{m}{(2m+1)} \frac{r^{m-1}}{q^{m-1}} P_m^n \end{aligned}$$

et à l'extérieur

$$(40) \quad \begin{aligned} u_{\text{ext}} &= 4\pi f \sum_m \sum_n {}_0\mu_m^n \frac{a^2}{q^2} \frac{1}{(2m+1)} \frac{q^{m+2}}{r^{m+1}} P_m^n \\ g_{\text{ext}} &= 4\pi f \sum_m \sum_n {}_0\mu_m^n \frac{a^2}{q^2} \frac{m+1}{2m+1} \times \frac{q^{m+2}}{r^{m+2}} P_m^n \end{aligned}$$

et au niveau du feuillet ($r = q = a$)

$$(41) \quad \Delta u = 0 \quad \Delta g = 4\pi f \sum_m \sum_n {}_0\mu_m^n P_m^n = 4\pi f {}_0\mu$$

(1) Jean GOGUEL. — Une estimation de l'ordre de grandeur des fluctuations de densité dans le Manteau d'après la Gravimétrie, *Bull. Géod.*, n^o série 1967, n^o 85 : 289-300, 4 fig.

on obtient l'effet d'un feuillet dipolaire en dérivant ces expressions par rapport à q :

$$(42) \quad \begin{aligned} u_{\text{int}} &= -4\pi f \sum \sum 1\mu_m^n \frac{m+1}{2m+1} \frac{a^2 r^m}{q^{m+2}} P_m^n \\ g_{\text{int}} &= 4\pi f \sum \sum 1\mu_m^n \frac{m(m+1)}{2m+1} \frac{a^2 r^{m-1}}{q^{m+2}} P_m^n \end{aligned}$$

et à l'extérieur :

$$(43) \quad \begin{aligned} u_{\text{ext}} &= 4\pi f \sum \sum 1\mu_m^n \frac{m}{2m+1} \frac{a^2 q^{m-1}}{r^{m+1}} P_m^n \\ g_{\text{ext}} &= 4\pi f \sum \sum 1\mu_m^n \frac{m(m+1)}{2m+1} \frac{a^2 q^{m-1}}{r^{m+2}} P_m^n \end{aligned}$$

et, au niveau du feuillet ($r = q = a$)

$$(44) \quad \Delta u = 4\pi f \sum \sum 1\mu_m^n P_m^n = 4\pi f \sum 1\mu \quad \Delta g = 0$$

Pour un feuillet tripolaire, il suffit de dériver par rapport à q les expressions (42) et (43) pour obtenir

$$(45) \quad \begin{aligned} u_{\text{int}} &= 4\pi f \sum \sum 2\mu_m^n \frac{(m+1)(m+2)}{2m+1} \frac{a^2 r^m}{q^{m+3}} P_m^n \\ g_{\text{int}} &= -4\pi f \sum \sum 2\mu_m^n \frac{m(m+1)(m+2)}{2m+1} \frac{a^2 r^{m-1}}{q^{m+3}} P_m^n \\ u_{\text{ext}} &= 4\pi f \sum \sum 2\mu_m^n \frac{m(m-1)}{2m+1} \frac{a^2 q^{m-2}}{r^{m+1}} P_m^n \\ g_{\text{ext}} &= 4\pi f \sum \sum 2\mu_m^n \frac{(m+1)m(m-1)}{2m+1} \frac{a^2 q^{m-2}}{r^{m+2}} P_m^n \end{aligned}$$

Et, au niveau du feuillet, pour $a = q = r$, on a

$$(46) \quad \begin{aligned} \Delta u &= -4\pi f \times \frac{2}{a} \sum \sum 2\mu_m^n P_m^n = \frac{-4\pi f \times 2}{a} \sum 2\mu \\ \Delta g &= 4\pi f \sum \sum 2\mu_m^n \times \frac{m(m+1)}{a^2} P_m^n \end{aligned}$$

et pour un feuillet quadripolaire, dérivant encore une fois par rapport à q les expressions (45), on trouve :

$$(47) \quad \begin{aligned} u_{\text{int}} &= -4\pi f \sum \sum 3\mu_m^n \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{2m+1} \frac{a^2 r^m}{q^{m+4}} P_m^n \\ g_{\text{int}} &= 4\pi f \sum \sum 3\mu_m^n \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{2m+1} \frac{a^2 r^{m-1}}{q^{m+4}} P_m^n \\ u_{\text{ext}} &= 4\pi f \sum \sum 3\mu_m^n \frac{m(m-1)(m-2)}{2m+1} \frac{a^2 q^{m-3}}{r^{m+1}} P_m^n \\ g_{\text{ext}} &= 4\pi f \sum \sum 3\mu_m^n \frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{2m+1} \frac{a^2 q^{m-3}}{r^{m+2}} P_m^n \end{aligned}$$

Et, au niveau du feuillet, pour $r = q = a$

$$(48) \quad \begin{aligned} \Delta u &= 4\pi f \sum \sum 3\mu_m^n \frac{(m^2+m+6)}{a^2} P_m^n \\ \Delta g &= -4\pi f \sum \sum 3\mu_m^n \frac{m(m+1) \times 4}{a^3} P_m^n \end{aligned}$$

On se souviendra que les moments p — polaires de la croûte, croissent tout au plus comme une puissance $(p - 1)$ de l'épaisseur de la croûte, et on voit que l'influence de ces feuillets décroît rapidement, tant que $\frac{a}{m}$, c'est-à-dire la largeur des structures envisagées, n'est pas de l'ordre de l'épaisseur de la croûte. Ce dernier cas relève des modèles complets à l'approximation plane, mais tant que nous envisageons des structures régionales étendues, de dimensions notables par rapport à l'épaisseur de la croûte, ces formules montrent que l'influence des feuillets diminue rapidement quand leur ordre augmente. La puissance du feuillet d'ordre 0 (masse), est nulle si la compensation isostatique est réalisée.

Si elle ne l'est pas, la limitation de l'effort de cisaillement que peut supporter la croûte (voir ci-dessus, équation (10)) signifie que μ ne peut être de signe constant que sur une étendue très limitée, et doit avoir une moyenne proche de zéro sur une étendue notable.

Nous aurons donc surtout à considérer l'effet du feuillet dipolaire, de puissance fonction (pas exactement linéaire) de l'altitude, qui représente l'effet du mode de compensation isostatique.

Prise en compte de l'équilibre isostatique à l'échelle du Globe

Comme nous l'avons fait précédemment, pour les fluctuations de densité dans le manteau, nous allons chercher comment l'équilibre hydrostatique du Globe modifie l'expression extérieure du potentiel et de la gravité qui aurait été provoquées par des feuillets mono, bi, tri ou tétrapolaires placés à la surface.

Des expressions ci-dessus il suffit de retenir l'effet de l'ensemble des feuillets considérés, d'une part comme introduisant une discontinuité dans le potentiel, d'autre part dans la valeur de la gravité. Posant :

$$(49) \quad \Delta u = \sum \sum 1 \Phi_m^n P_m^n \quad \Delta g = \sum \sum 2 \Phi_m^n P_m^n$$

on a :

$$(50) \quad \begin{aligned} 1\Phi_m^n &= 4\pi f \left(1\mu_m^n - \frac{2}{a} 2\mu_m^n + \frac{m^2+m+6}{a^2} 3\mu_m^n \right) \\ 2\Phi_m^n &= 4\pi f \left(0\mu_m^n + \frac{m(m+1)}{a^2} 2\mu_m^n - \frac{4m(m+1)}{a^3} 3\mu_m^n + \dots \right) \end{aligned}$$

On considère d'abord le même modèle que ci-dessus, qui tient compte de l'équilibre hydrostatique entre noyau et manteau. On fera $g \equiv h$ et $G \equiv H$, ce qui réduit le système (30) à quatre équations, que l'on obtient, en écrivant les relations entre potentiel et gravité au niveau de la surface du noyau ; et en introduisant, aux deuxièmes membres, les discontinuités Δu et Δg , calculées ci-dessus :

$$(51) \quad \left\{ \begin{aligned} f - g - \frac{G}{\gamma^{2m+1}} &= 0 & (I) \\ -f(m+K1) + mg - \frac{(m+1)G}{\gamma^{2m+1}} &= 0 & (II) \\ -g - G + J &= \Phi_1 & (III) \\ -mg + (m+1)G - (m+1+K2)J &= a \Phi_2 & (IV) \end{aligned} \right.$$

Comme précédemment, on trouve facilement les multiplicateurs A, B, C, D, tels que fg et G soient éliminés de la combinaison A (I)+B (II)+C (III)+D (IV).

On peut prendre

$$(52) \quad B = 1 \quad A = m + K1 \quad C = -mD1 - K1$$

$$D1 = \frac{\frac{2m+1+K1}{\gamma^{2m+1}} - K1}{2m+1}$$

et on obtient la valeur de J_m :

$$(53) \quad J_m^n = \frac{(mD1 + K1) {}_1\Phi_m^n - D1 \times a \times {}_2\Phi_m^n}{(2m+1+K2)D1 + K1}$$

De J on tire les valeurs de Z et Δg par les équations (34).

Avant de discuter cette expression, il est intéressant d'examiner un autre modèle. Des calculs ci-dessus résulte que la fluidité du noyau a peu d'influence sur l'effet des masses superficielles. Nous considérons donc un modèle a noyau rigide, mais où nous schématiserons la variation des densités dans le manteau, par une discontinuité à 500 km de profondeur la densité passant de 3 à 4,3. On trouve pour la gravité à ce niveau : $g = 1017,6$, $\Delta\sigma = 1,3$; à la surface, la gravité reste $g = 980$, $\Delta\sigma = 3$.

Comme ci-dessus, on écrit les équations :

$$(54) \quad \left\{ \begin{array}{l} -f + g + \frac{G}{\delta^{2m+1}} = 0 \quad (I) \\ f(m+K4) - mg + \frac{(m+1)G}{\delta^{2m+1}} = 0 \quad (II) \\ g + G - J = -\Phi_1 \quad (III) \\ mg - (m+1)G + (m+1+K5)J = -a \Phi_2 \quad (IV) \end{array} \right.$$

avec :

$$(55) \quad K4 = \frac{4\pi f a \times 1,3 \times \delta}{1017,6} = 0,628280 \quad K5 = \frac{4\pi f \times a \times 3}{980,2} = 1,633368$$

et on obtient, comme ci-dessus :

$$(56) \quad J_m^n = \frac{(mD2 + K4) {}_1\Phi_m^n - D2 \times a \times {}_2\Phi_m^n}{(2m+1+K5)D2 + K4} \quad D2 = \frac{\frac{2m+1+K4}{\delta^{2m+1}} - K4}{2m+1}$$

Que ce soit avec cette expression, ou celle trouvée ci-dessus (53), nous avons pratiquement deux cas à envisager dans la discussion.

Pour des structures d'échelles continentales, la compensation isostatique est à peu près réalisée et nous n'avons guère à envisager que le moment dipolaire ${}_1\mu$, fonction (non exactement linéaire) de l'altitude. Les formes des continents sont telles que le développement harmonique comportera des termes d'ordre m faible.

Les valeurs de coefficients de ${}_1\mu_m^n$ dans les expressions (34) sont indiquées par la figure 8.

Si on se souvient que ${}_1\mu$ est de l'ordre de 300, pour un continent moyen, en contraste avec la profondeur moyenne océanique dans le système AIRY 30, il apparaît, étant donné la faible marge de variation de ces coefficients, qu'il faut s'attendre à voir la forme du géoïde suivre l'allure générale du contraste océan-continent, avec une amplitude de l'ordre d'une dizaine de mètres. En fait d'autres influences masquent, sur les modèles existants, cet effet.

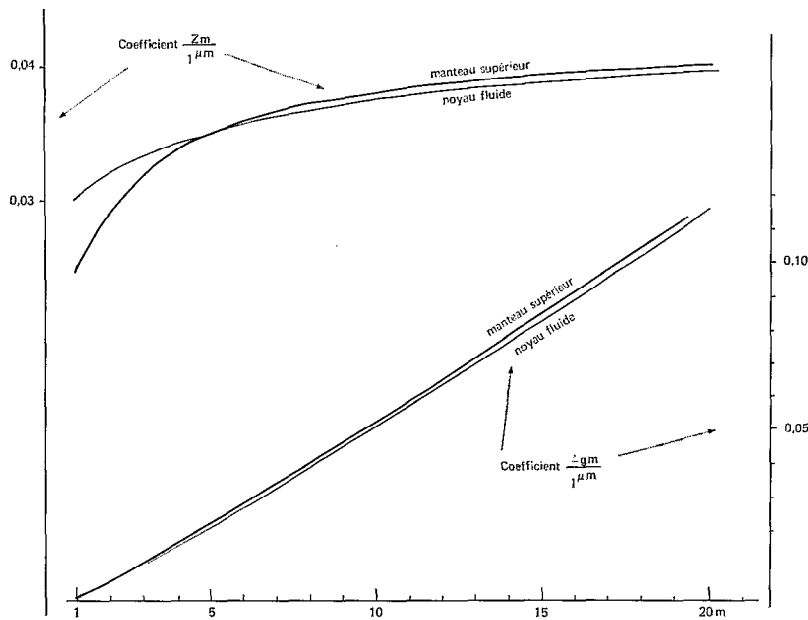


Fig. 8. — Effet du feuillet dipolaire 1μ .

Pour la gravité, les harmoniques fondamentaux disparaissent, et la corrélation avec la forme des continents doit être beaucoup moins nette; la dizaine de mgal que nos calculs font prévoir pour $m = 8$ à 10 doit être masquée par d'autres variations et peut-être aussi par la faible précision des mesures de la gravité en mer.

La corrélation que les calculs précédents mettent en évidence, entre forme générale des continents, d'une part, la forme du Géoïde de l'autre (et accessoirement la distribution de la gravité), mérite une certaine attention. Une théorie simplifiée, qui revient à considérer le rayon de la Terre comme infini, l'aurait fait méconnaître; malgré l'incertitude qui règne sur le mode exact de compensation, c'est-à-dire sur la relation entre l'altitude et le moment dipolaire 1μ , cet effet devrait pouvoir être retrouvé sur les modèles globaux du géoïde.

Pour les structures de faible étendue, qui correspondent à des valeurs élevées de m , nous avons vu plus haut que le coefficient liant la dénivellée du géoïde au terme dipolaire qui exprime la hauteur du relief pour une croûte en équilibre isostatique, est une constante, et que l'influence sur la gravité est nulle (faisant abstraction de l'effet secondaire dû à l'équilibre hydrostatique dans le manteau supérieur).

Quant aux irrégularités d'ordre supérieur (représentées par les variations des moments tripolaires 2μ , quadripolaire 3μ , etc.) on a vu (46, 48) qu'ils comportent un facteur de l'ordre de $\frac{m}{a}$ or, $\frac{m}{a}$ est de l'ordre de grandeur de la largeur des anomalies représentées; et les valeurs successives de 1μ , 2μ , 3μ , etc., croissent au plus d'un facteur de l'ordre de l'épaisseur de la croûte. Tant que la largeur $\frac{a}{m}$ reste notable par rapport à l'épaisseur de la croûte, l'effet de ces irrégularités de structure reste donc négligeable.

Si on se place à une plus petite échelle, celle de dix à 100 km, où ces irrégularités peuvent jouer un rôle, il faut revenir à l'approximation plane, et faire le calcul complet de Z et Δg , à partir d'un modèle détaillé.

A l'échelle de 100 à 1000 km, la méthode simplifiée à l'approximation plane peut être utilisée, aussi bien que les formules sphériques, mais ces dernières exigent le développement des structures en série d'harmoniques sphériques, ce qui alourdit singulièrement le calcul.

Conclusion

Il est nécessaire de revenir sur l'objet essentiel de ce travail, qui ne doit pas être masqué par des calculs, dont l'objet est surtout de justifier la légitimité des méthodes proposées.

Dans les ondulations de grande longueur d'onde du géoïde, un facteur essentiel doit être les fluctuations de densité dans le Manteau, que nous pouvons supposer en relation avec des courants de convection. Mais il faut s'attendre à y trouver aussi un terme, masqué par le précédent parce que beaucoup moins important, lié à la forme générale des continents et à leur mode de compensation isostatique.

Il n'y a, en pratique, pas de difficulté à séparer des précédentes les ondulations du géoïde de faible longueur d'onde afin de les utiliser, concurremment aux anomalies de la gravité, en vue de contribuer à la connaissance de la structure de la croûte.

Pour ce faire, la procédure est nécessairement indirecte, c'est-à-dire qu'on doit se donner, par des considérations structurales, sismiques, thermiques, etc., un modèle de distribution des densités.

De ce modèle, nous avons montré comment on doit tirer, non pas la seule distribution de la gravité, mais celle de trois grandeurs : la gravité, la hauteur du géoïde, et la valeur du cisaillement supporté par la croûte, qui serait nulle si l'équilibre isostatique était réalisé ponctuellement (comme le supposaient les modèles classiques, tels que AIRY ou PRATT).

Il reste à comparer la gravité et la forme du géoïde aux données dont on dispose à la suite de mesures directes, qui pour le géoïde résultent de mesures altimétriques en mer à partir de satellites.

Quant au cisaillement supporté par la croûte, on s'assurera que ses valeurs ne croissent pas d'une manière invraisemblable ; c'est une manière de rendre compte d'un équilibre isostatique régional, sinon local. Bien que nous ne puissions pas, ici, indiquer la valeur du cisaillement qui ne peut être dépassée, la considération de celui-ci, qui élargi et assoupli la notion fondamentale de l'équilibre isostatique, est une contrainte essentielle qui ne saurait être négligée.

Le modèle de structure que l'on s'est donné doit, bien entendu, être corrigé en fonction des contrôles, par les mesures de gravité et de hauteur du géoïde, qui viennent d'être indiquées, en procédant par approximations successives. Quant aux bornes qu'on se fixe pour les valeurs du cisaillement, c'est en général dès la conception du modèle qu'il y aura lieu de les prendre en compte.

Il existe actuellement des programmes qui permettent le calcul de la gravité pour des modèles à deux dimensions, même très compliqués.

Il nous paraît souhaitable de passer à des modèles à trois dimensions, quitte à se contenter de l'approximation indiquée ci-dessus (formules 12 à 16) en tous cas à distance, et peut-être sauf au voisinage immédiat de certaines discontinuités.

C'est dans le cadre de tels modèles que seront utilisées au mieux les données fournies, par les valeurs connues de la gravité, d'une part, et la hauteur du géoïde en mer, déterminée par altimétrie, de l'autre.

Manuscrit reçu au Service des Publications de l'O.R.S.T.O.M. le 21 avril 1980.

