

O.R.S.T.O.M.

Service Hydrologique

Note technique n° 27

2ème Edition révisée

Diffusion restreinte

QUELQUES ORIENTATIONS PRATIQUES POUR APPLIQUER LA METHODE  
DES DEVIATIONS RESIDUELLES A LA RECHERCHE DES RELATIONS ENTRE LE RUISSELLEMENT  
ET SES DIVERS FACTEURS SUR UN PETIT BASSIN VERSANT

---

par J. HERBAUD

Paris, Mars 1972

## 1. RAPPEL du PRINCIPE de la METHODE

Ce rappel est très sommaire car la méthode est connue de tous.

On a un facteur principal et quelques facteurs secondaires, déterminant ensemble la variable X.

On reporte sur un premier graphique la variable X en ordonnées et le facteur principal en abscisses. On obtient ainsi un nuage de points.

On trace une courbe moyenne C et on lit les écarts  $\Delta X$  en ordonnées entre les points et la courbe (voir figure 1). On peut également tracer une courbe enveloppe, comme on le verra plus loin.

On reporte sur un deuxième graphique  $\Delta X$  en ordonnées et le premier facteur secondaire en abscisses, on trace une courbe  $\Gamma_1$  et on lit les écarts  $\Delta X_1$  entre les points et la courbe.

On reporte sur un troisième graphique  $\Delta X_1$  en ordonnées et le deuxième facteur secondaire en abscisses, on trace une courbe  $\Gamma_2$ , etc ... (voir figures 2 et 3).

Sur le dernier graphique, les écarts  $\Delta X_n$  sont les déviations résiduelles. On peut les reporter sur le premier graphique à partir de la courbe C, avec leur signe, pour ajuster une courbe C', dans une deuxième approximation. La correction qui fait passer de C à C' oblige à remplacer  $\Gamma_1$  par  $\Gamma_1'$ ,  $\Gamma_2$  par  $\Gamma_2'$ , ...,  $\Gamma_n$  par  $\Gamma_n'$  et si l'on s'arrête à cette deuxième approximation, l'ensemble des courbes C',  $\Gamma_1'$ ,  $\Gamma_2'$ ,  $\Gamma_n'$  permet d'obtenir une valeur "calculée" de X (voir figure 4).

On reportera en général les valeurs observées de X en face des valeurs calculées correspondant aux mêmes événements, pour vérifier qu'il y a une faible dispersion et pas d'erreur systématique par excès ou par défaut dans l'ensemble de l'échantillon ou dans une gamme de valeurs de X étendue, soit parmi les faibles valeurs, soit parmi les fortes valeurs.

Il est important de rappeler les limites d'application de la méthode : on suppose que la relation entre X et les variables explicatives est de la forme :

$$X = f_1(X_1) + f_2(X_2) + \dots + f_n(X_n),$$

c'est-à-dire que les "actions" de  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont cumulatives et dépendent respectivement de  $X_1$  (sans dépendre des  $(N - 1)$  autres variables), de  $X_2$  (sans dépendre des  $(N - 1)$  autres variables), etc ...

## 2. REMARQUES pour l'APPLICATION PRATIQUE de la METHODE

2.1 Une faute grave n'a pas toujours été évitée par ceux qui mettent en oeuvre ces méthodes. Supposons que l'on ajuste une relation de la forme :

$$l_r = F(p) + G(s)$$

$l_r$  étant la lame ruisselée,  $p$  la hauteur d'averse et  $s$  l'indice de saturation préalable du sol. Il faut que l'extrapolation des courbes  $C$  et  $\Gamma$  soit telle que pour les valeurs les plus fortes possibles de  $p$  et  $s$ , l'estimation de  $l_r$  n'excède pas  $p$ . Or, le désir de s'appuyer trop sur les points observés a parfois conduit au résultat inverse. Il faut prohiber absolument l'ajustement d'une droite sur papier logarithmique à la place de  $C$ , car la relation représentée par cette droite est  $l_r = a p^n$ , et la tendance générale conduisant pratiquement toujours à une valeur  $n > 1$ ,  $l_r$  calculé à partir de  $p$  pourra excéder  $p$  (voir figure 5). En travaillant avec des échelles arithmétiques, on doit s'imposer d'ajuster une courbe  $C$  ayant en chacun de ses points une tangente de pente  $\frac{dl_r}{dp} < 1$ .

Si c'est le coefficient  $K_r$  que l'on cherche à estimer, il faut vérifier qu'en aucun cas l'estimation ne sera supérieure à 1, ce qui est relativement plus facile.

2.2 Nous n'avons pas précisé jusqu'ici, mais cela va de soi, que la forme des relations représentées par les courbes  $C$  et  $\Gamma$  doit être simple pour que l'ajustement reste significatif : une courbe qui présenterait 2 ou 3 points d'inflexion en ne s'appuyant que sur 10 à 20 points observés n'aurait qu'une très faible probabilité de représenter une loi physique.

En pratique,  $C$  ne doit jamais présenter aucun point d'inflexion si la variable est  $l_r$ , et toujours un seul point d'inflexion si la variable est  $k_r$ .

Pour  $\Gamma$ , avec des échantillons de moins de 100 points observés, on admet au maximum 1 point d'inflexion.

2.3 Pour la même raison évoquée ci-dessus (2.2), il est illusoire de rechercher une relation entre  $X$  et un nombre de facteurs trop grand compte tenu du nombre de points observés. On doit s'imposer les limites suivantes : 1 facteur pour moins de 15 points, 2 facteurs pour 15 à 30 points, 3 facteurs pour 30 à 60 points, 4 facteurs pour plus de 60 points. Ces limites doivent encore être rendues plus sévères si, après la prise en compte du facteur de rang  $i$  et en supposant l'ajustement terminé pour minimiser les déviations résiduelles sans faire appel aux facteurs suivants, ces déviations ne sont pas nettement inférieures à ce qu'elles auraient été en s'arrêtant au facteur de rang  $i - 1$  (il faut que chaque variable soit significativement explicative).

### 3. SOLUTION GRAPHIQUE du PROBLEME SOULEVE en 2.1 et 2.2

#### 3.1 La variable X est la lame ruisselée l, le facteur principal est la pluie moyenne p

Il faut que dans le plan (p, l) la courbe C soit croissante, à concavité constamment tournée vers le haut, et avec une branche infinie asymptote à une parallèle à la bissectrice  $l = p$ .

En pratique le départ de la courbe C, à partir de l'axe  $l = 0$  (pour une valeur de p obligatoirement positive), peut être d'allure parabolique, la pente de la tangente à C allant en croissant en fonction de p, mais cette pente ne doit pas dépasser la valeur 1, même pour de fortes valeurs de p. Dans cette gamme des fortes valeurs de p, la différence (p - l), qui se lit facilement entre la courbe C et la bissectrice  $l = p$ , tend vers un maximum qu'on peut appeler  $\Delta l_{\max}$ . Ce maximum peut souvent être lu sur le graphique à condition que ce dernier soit extrapolé jusqu'aux valeurs fortes de p de récurrence extrêmement faible (voir figure 6); mais s'il y a des cas de bassins où les observations mettent en évidence un tronçon de la courbe C pratiquement confondu avec l'asymptote d'équation  $l = p - \Delta l_{\max}$ , il y a des cas de bassins où ceci ne pourrait apparaître que pour des valeurs de p plusieurs fois supérieures aux valeurs maximales observées : il ne faut pas croire qu'on doit extrapoler C jusque là.

L'ajustement de  $\Gamma$  sur le deuxième graphique (en fonction du facteur secondaire) doit être alors tel que la somme de l'estimation provisoire de  $l'$  (ordonnée de C sur le premier graphique) et de la correction  $\Delta l$  (ordonnée de  $\Gamma$  sur le deuxième graphique), n'excède pas la valeur de p.

Cette contrainte peut être suivie approximativement en imposant à  $\Gamma$  la forme d'une courbe limitée par une asymptote horizontale  $\Delta l = \Delta l_{\max}$  (voir figure 7).

Le facteur secondaire étant l'indice de saturation du sol s, pour fixer les idées (comme nous l'avons déjà supposé plus haut), on sait que les plus forts ruissellements apparaîtront si l'on a une forte valeur de p et une forte saturation s : on sait alors grâce à la précaution prise pour le tracé de  $\Gamma$  que la somme ( $l' + \Delta l$ ), inférieure à ( $l' + \Delta l_{\max}$ ), sera pratiquement toujours inférieure à p.

Evidemment, le risque d'avoir  $l' + \Delta l > p$  reste plus fort dans la gamme des faibles valeurs du ruissellement, mais on peut admettre que chacun parviendra à diminuer ce risque par un tracé judicieux de C et de  $\Gamma$ , sans qu'il soit nécessaire d'élaborer une méthode générale et infaillible.

Le risque d'avoir  $l' + \Delta l < 0$  peut être assez grand dans la gamme des faibles ruissellements. On peut l'éviter complètement à condition de prendre pour C une enveloppe inférieure des points observés (à quelques points isolés près), et pour une courbe située au-dessus de l'axe  $\Delta l = 0$  (voir figures 8 et 9).

### 3.2 La variable X est le coefficient de ruissellement $k_r$ (voir figure 10)

La contrainte précédemment décrite pour tracer C est ici plus facile à exprimer : la courbe C aura une asymptote horizontale d'équation  $k_r = 100 - a$  (en %), et la courbe  $\Gamma$  aura une asymptote horizontale d'équation  $\Delta k_r = a$ .

Ici, plus que dans le cas précédent (paragr. 3.1), il est recommandé de choisir un tracé de C enveloppe inférieure des points observés et un tracé de  $\Gamma$  tel que  $\Gamma$  soit situé au-dessus de l'axe  $\Delta k_r = 0$ . En effet, la condition d'avoir  $k_r + \Delta k_r < 1$  sera ici toujours respectée, contrairement à  $1 + \Delta 1 < p$  dans le cas du paragraphe 3.1. Il serait dommage de ne pas respecter, en même temps, d'une manière absolue, la condition  $k_r + \Delta k_r > 0$ .

## 4. SOLUTION ANALYTIQUE du PROBLEME SOULEVE en 2.1 et 2.2

Etant donné que la méthode du paragraphe 3.2 se prête bien à l'estimation du ruissellement dans toute la gamme de variation physiquement possible de celui-ci et de ses facteurs, on peut avoir l'idée d'ajuster des courbes de forme analytique connue, en optimisant les paramètres de leurs équations.

a) Nous proposons la forme suivante pour la relation avec le facteur principal :

$$k_r = (100 - a) 10^{\frac{A}{p - p_0}}, \quad p_0 > 0 \quad (1)$$

Cette forme de relation permet de choisir  $p_0$  égal à la pluie-limite de ruissellement, si l'on veut faire en sorte que l'estimation du coefficient de ruissellement soit 0 quel que soit le facteur secondaire quand  $p$  est inférieur ou égal à  $p_0$ .

Supposons que  $p_0$  soit choisi ainsi. Pour obtenir un nuage de points sur un graphique, on peut utiliser du papier semi-logarithmique :  $k_r$  sera reporté en ordonnées logarithmiques et on reportera  $\frac{1}{p - p_0}$  en abscisses classiques (aucune valeur  $p$  inférieure ou égale à  $p_0$  ne pourra être représentée dans ce système, l'abscisse  $\frac{1}{p - p_0}$  du point correspondant étant rejetée à l'infini, mais l'ordonnée de ce même point est aussi à l'infini puisque le ruissellement est nul).

La courbe C sera représentée ici par une droite D passant par le pivot d'ordonnée  $(100 - a)$  sur l'axe des ordonnées.

Les écarts d'ordonnées entre les points et la droite D sur le graphique semi-logarithmique sont des différences de logarithmes.

Si on écrit l'équation (1) d'une autre manière

$$y = \log k_r = \log (100 - a) - \frac{A}{p - p_0} \quad (2)$$

les écarts  $\Delta y$  peuvent être reportés en ordonnées sur un deuxième graphique semi-logarithmique (report au compas à pointe sèche par exemple, comme d'habitude), en face des abscisses  $\frac{1}{s + s_0}$ .

b) la courbe  $\Gamma$  qu'on va ajuster aux points obtenus sur ce deuxième graphique ne peut pas être absolument quelconque : elle doit partir du point d'ordonnée logarithmique  $\frac{100}{100 - a}$  sur l'axe des ordonnées et représenter une fonction décroissante de  $\frac{1}{s + s_0}$  jusqu'à la verticale d'abscisse  $\frac{1}{s_0}$ . La courbe  $\Gamma$  doit être de forme aussi simple que possible (voir figure 12).

Dans les cas les plus favorables,  $\Gamma$  peut être elle aussi une droite  $\Delta$  et l'on aura alors la relation :

$$\Delta y = \log \frac{100}{100 - a} - \frac{B}{s + s_0} \quad (3)$$

L'estimation de  $y$  à partir de  $p$  et  $s$  peut alors être effectuée analytiquement par la relation suivante :

$$y = y' + \Delta y = 2 - \frac{A}{p - p_0} - \frac{B}{s + s_0} \quad (4)$$

ou encore

$$k_r = 10^2 - \frac{A}{p - p_0} - \frac{B}{s + s_0} \quad (5)$$

Mais en pratique, l'estimation pourra être effectuée à partir de lectures des deux graphiques, en remarquant que (4) s'écrit aussi :

$$\log k_r = \log k'_r + \log R$$

$$k_r = R k'_r$$

$R$  étant l'ordonnée logarithmique du point de la droite  $\Delta$  pour l'abscisse  $\frac{1}{s + s_0}$ .

On voit que ce mode de calcul de  $k_r$  à partir de ses facteurs ne peut conduire à une valeur négative ni à une valeur supérieure à 1. C'est vrai aussi bien si l'on a adopté la relation (5) ou si l'on a adopté une courbe  $\Gamma$  dont on ne précise pas l'équation.

## REMARQUES

Dans le cas où une des courbes C et  $\Gamma$  aura une forme imposée par le choix d'une relation analytique, la dispersion résiduelle des points sera plus élevée que si la forme des courbes C et  $\Gamma$  était libre. Cependant la différence peut être assez faible, comme dans le cas du BIDJIR (de l'ensemble du BAM-BAM, au TCHAD), exemple traité ici (voir figures 11, 12 et 14) : le choix d'une courbe à la place de la droite D (figure 11) ne s'imposait absolument pas (noter, en considérant cet exemple, que grâce à la méthode d'ajustement sur papier semi-logarithmique, les valeurs calculées de  $k_r$  sont bien toutes dans l'intervalle (0,1), même si la courbe C, ou ici la droite D, est choisie par commodité en position d'enveloppe supérieure des points expérimentaux).

Dans certains cas, on pourra envisager de renoncer à une signification physique pour  $p$  ; à la rigueur  $p$  peut alors être négatif et la droite D devra être limitée par la verticale d'abscisse  $-\frac{1}{p_0}$  : l'estimation de  $k_r$  pour  $p=0$  à partir de la droite D sera alors positive mais très faible, et l'opérateur jugera si cette inadéquation à la réalité physique peut être acceptée, vu l'ordre de grandeur très faible des phénomènes, si le choix de  $p_0$  qui conduit à cette situation procure par ailleurs un résultat bien meilleur que tout autre essai, quant à la dispersion résiduelle entre valeurs estimées et observées du ruissellement. (Noter que la valeur de  $s_0$ , positive, sera dans tous les cas choisie dans cette optique de réduction de la dispersion résiduelle).

## 5. CONTROLE des RESULTATS de l'AJUSTEMENT

Quand on dispose des courbes ajustées représentant la fonction  $X = f_1(X_1) + f_2(X_2)$ , il est possible de constituer une série de valeurs "calculées" de X, soit  $X'$ , à partir de l'ensemble des couples de valeurs observées  $(X_1, X_2)$ .

Un contrôle nécessaire de la qualité des ajustements consiste à porter sur un graphique les valeurs  $X'$  en face des valeurs X observées (voir fig. 13 et 14).

Si le nuage de points est bien disposé sans distorsion autour de la bissectrice  $X = X'$ , on peut s'estimer satisfait; sinon, il faut repérer les points aberrants et voir dans quel sens modifier le tracé des courbes C et  $\Gamma$  pour que  $X'$  prenne toujours une valeur acceptable.

Cette opération exigera en général que l'on reprenne les ajustements à leur début (contrairement à ce qu'on fait quand on reporte des déviations résiduelles sur le 1er graphique pour une nouvelle itération); en effet :

a) l'échec de la première tentative ayant conduit aux courbes C et  $\Gamma$  est peut-être dû à un mauvais tracé initial de la courbe C, qui ne permet pas que les déviations résiduelles soient décroissantes au fur et à mesure des itérations,

b) de plus, même si on a travaillé avec une relation où la variable  $X$  est le coefficient  $k_r$ , on doit faire le contrôle d'ajustement en comparant les lames ruisselées  $l_r$  observées et calculées, et dans ce cas il est plus simple de considérer que cette comparaison ne donne que des indications qualitatives pour modifier  $C$  et  $\Gamma$ .

#### 6. ORIENTATIONS ADOPTEES pour le TRAITEMENT AUTOMATIQUE (POUR MEMOIRE)

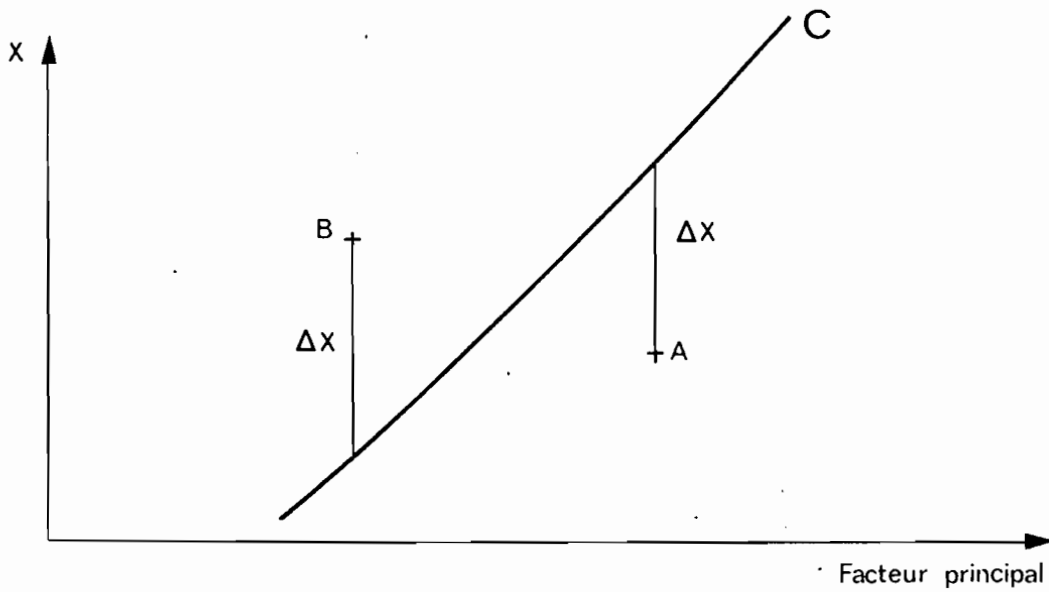
Parallèlement au traitement manuel, il est envisagé d'effectuer un traitement automatique des données en vue de faire une synthèse des résultats obtenus sur l'ensemble des bassins.

L'indice de saturation sera peut-être une variable représentant la réserve en eau du sol, sous réserve d'admettre qu'elle peut être calculée de proche en proche en faisant une série de bilans hydriques journaliers.

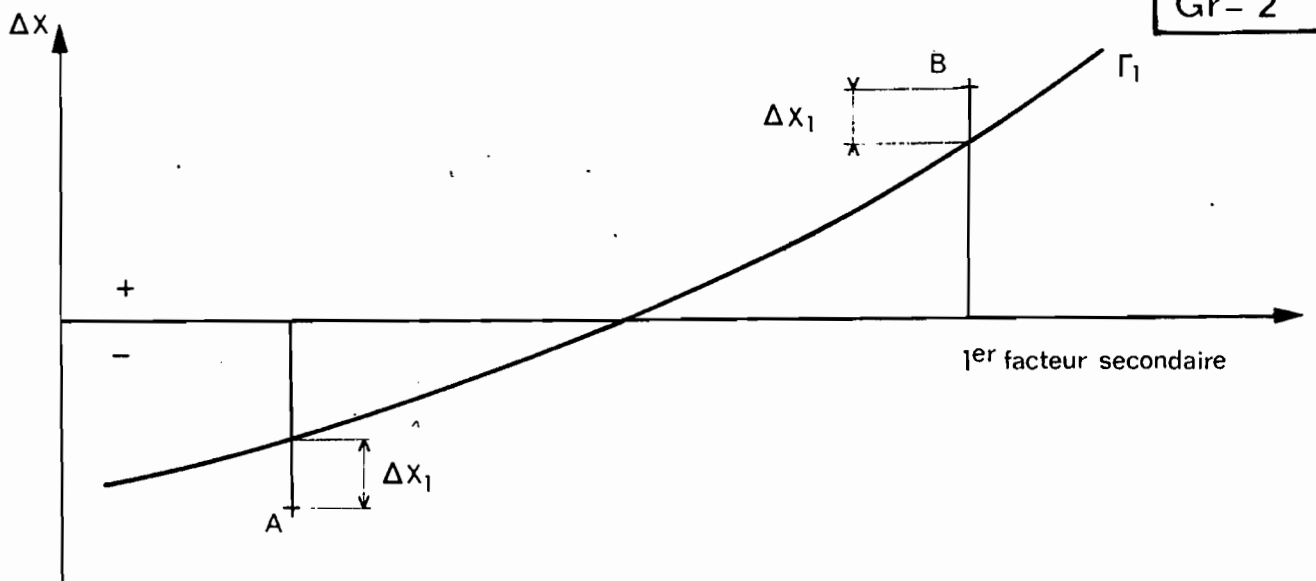
En outre, il est évident que l'on choisira des formes analytiques pour les relations.



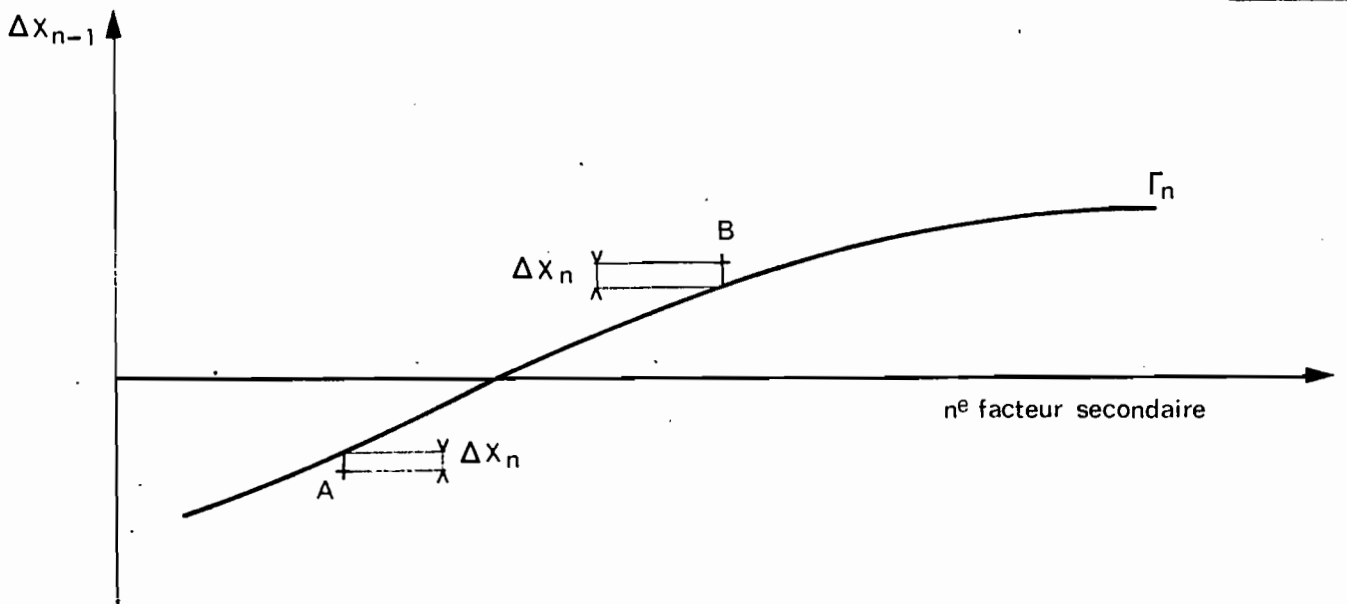
Gr-1



Gr-2

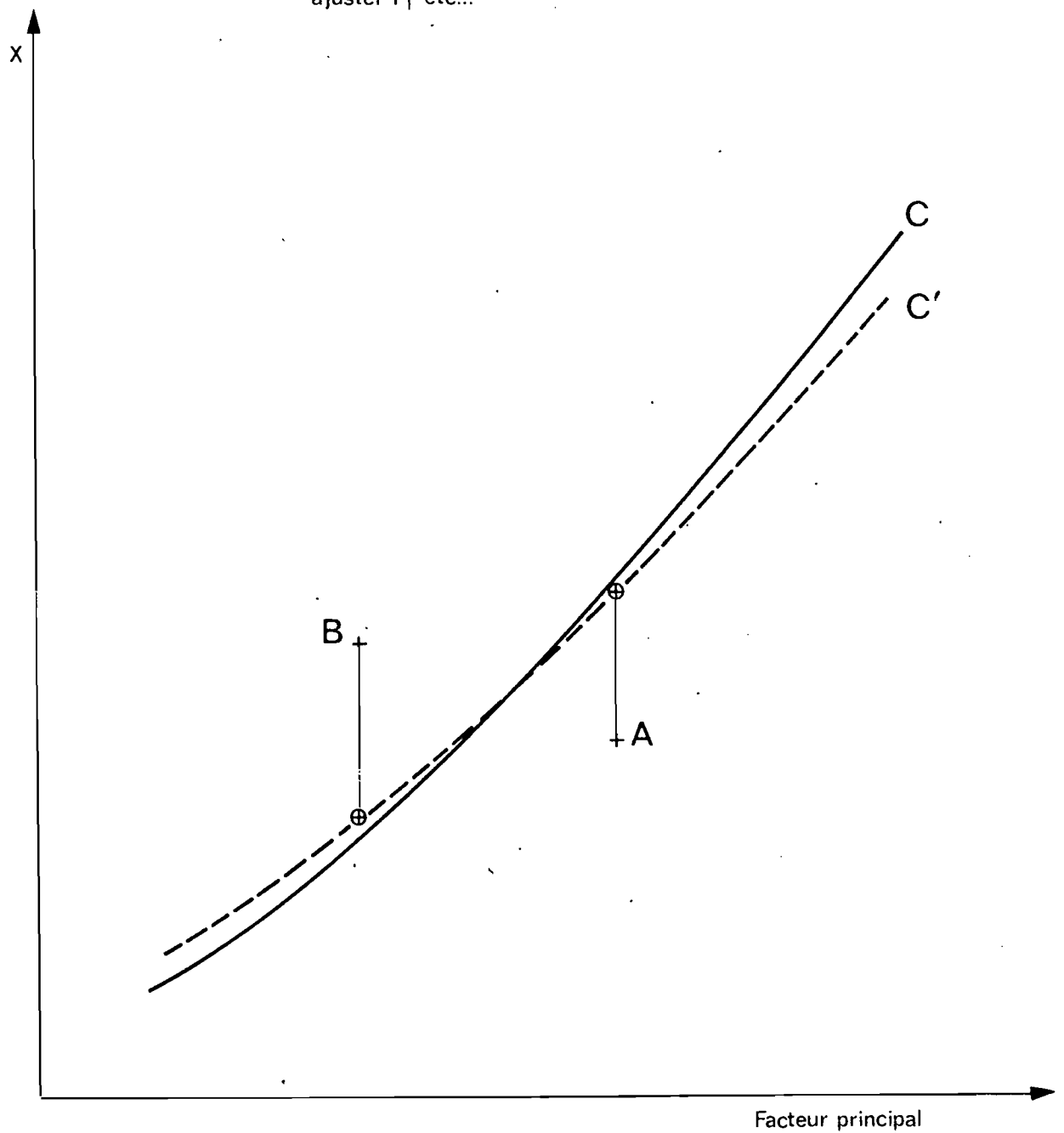


Gr-3

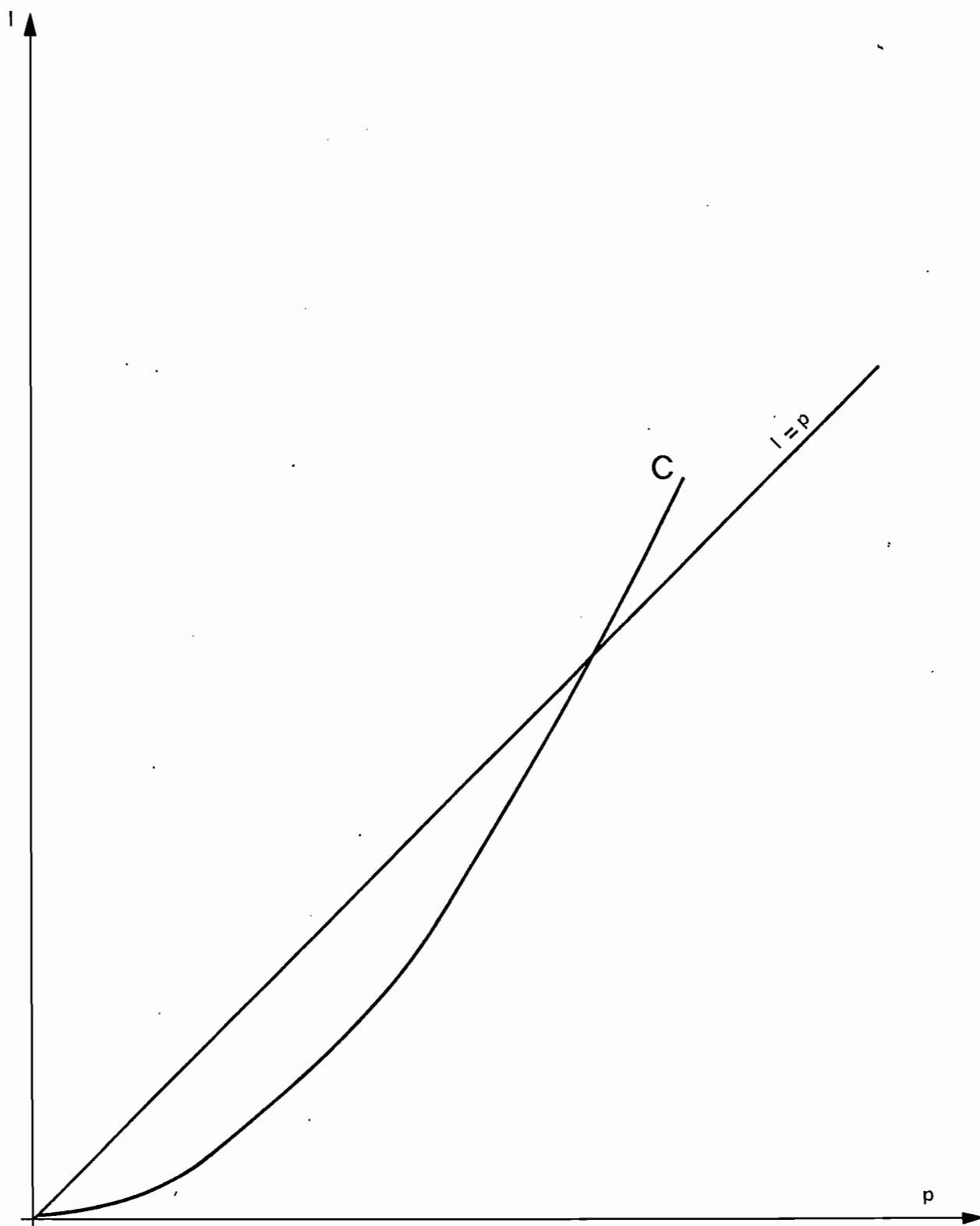


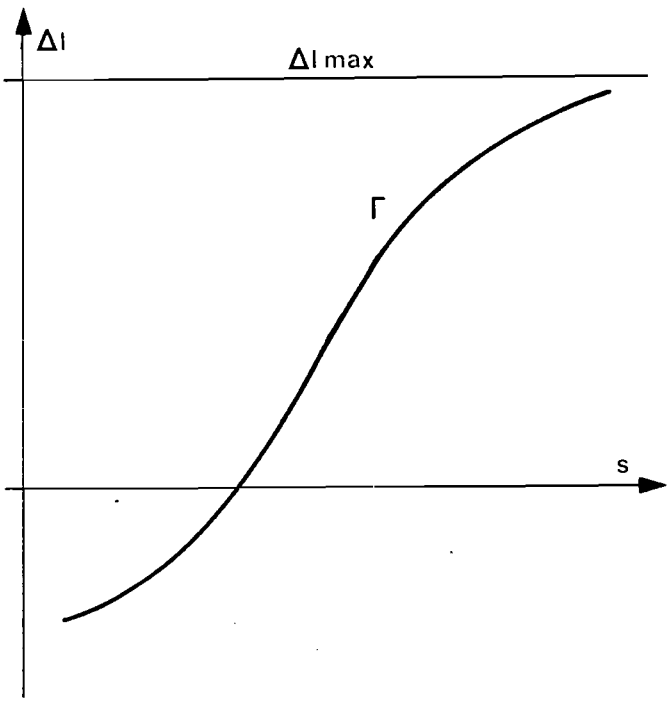
## Correction de la courbe C par C' en deuxième approximation

Nota : Les écarts entre les points corrigés  $\oplus$  et C' doivent être reportés à partir de  $\Gamma_1$  pour ajuster  $\Gamma'_1$  etc...

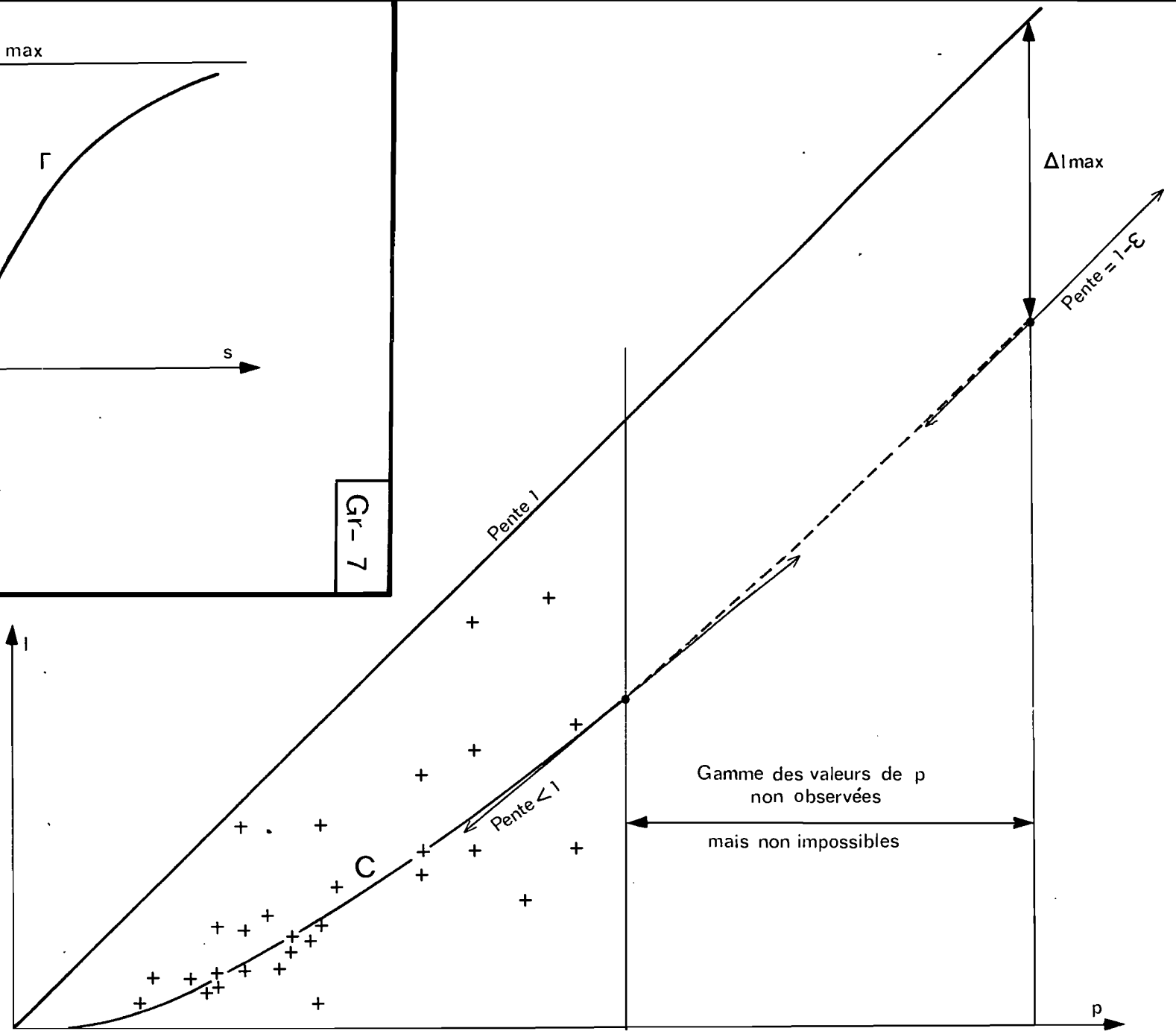


Allure d'une courbe C d'équation  $l = a p^n$  pour  $n > 1$

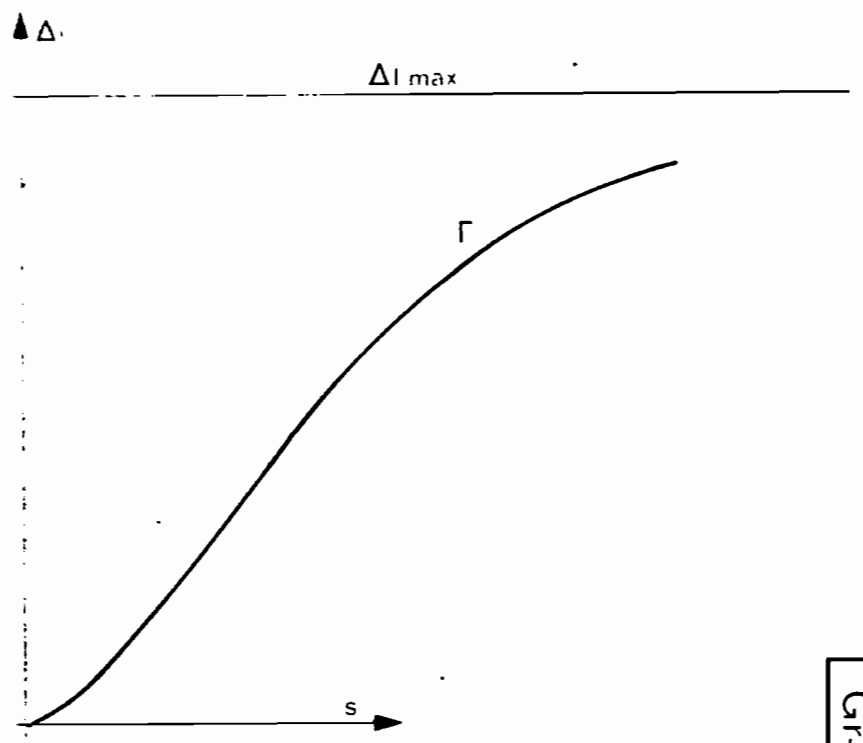




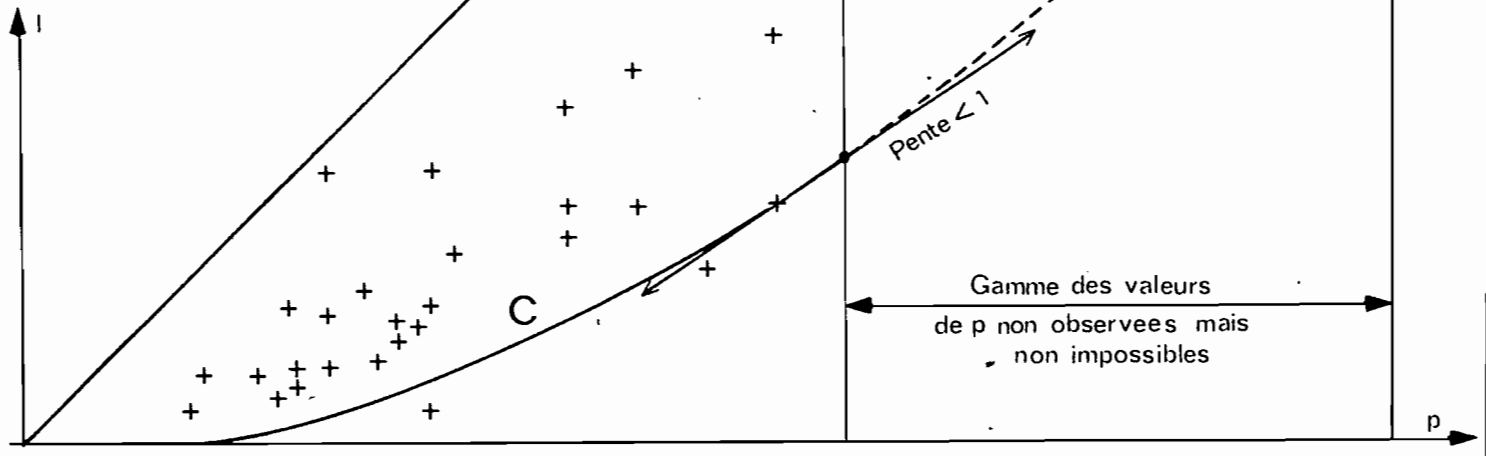
Gr-7



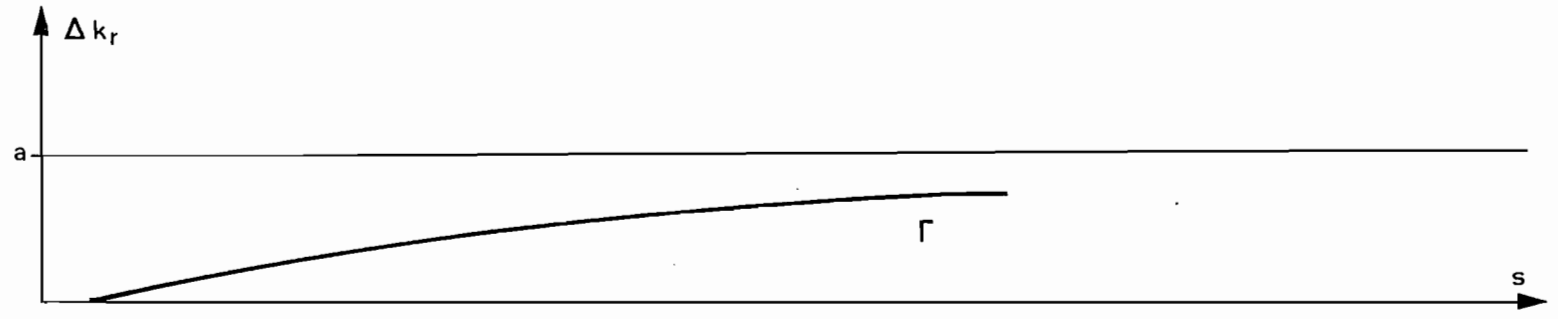
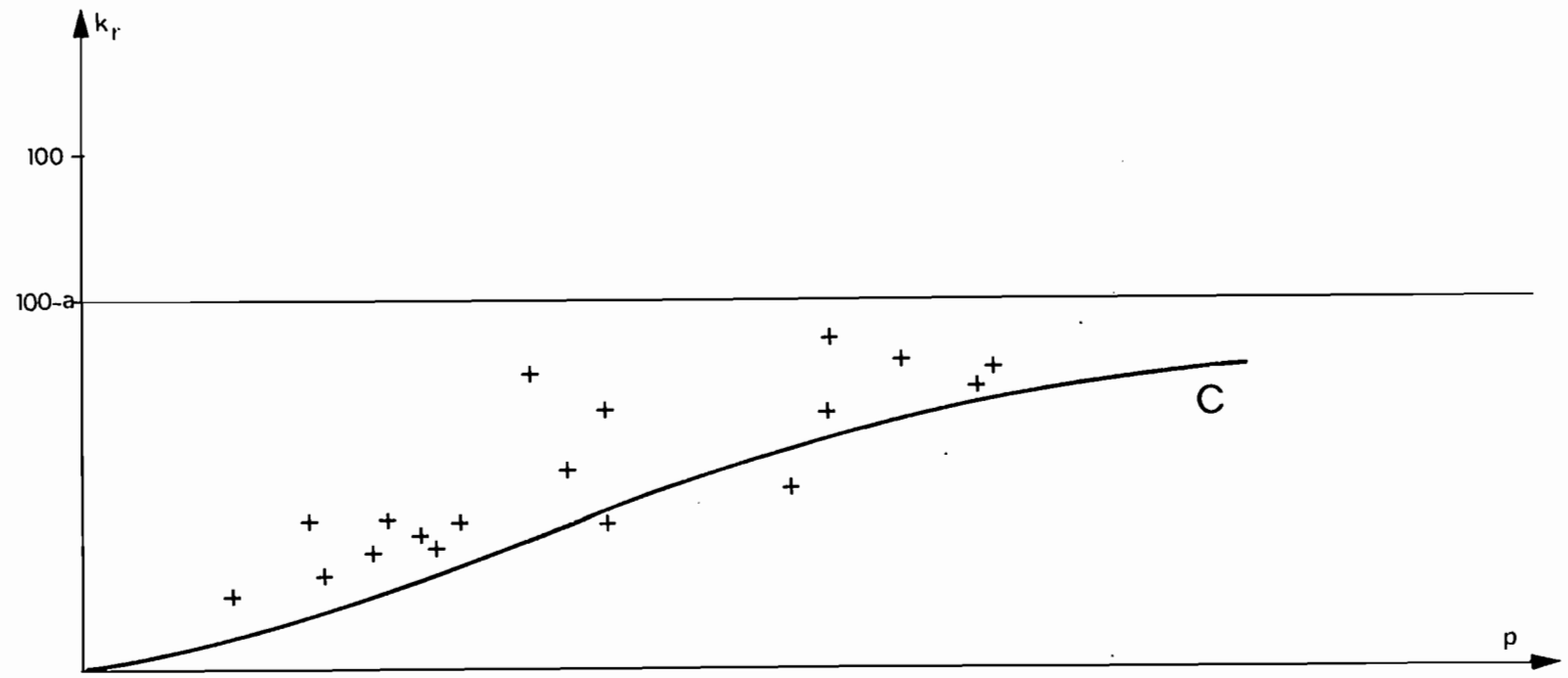
Gr-6



Gr-9

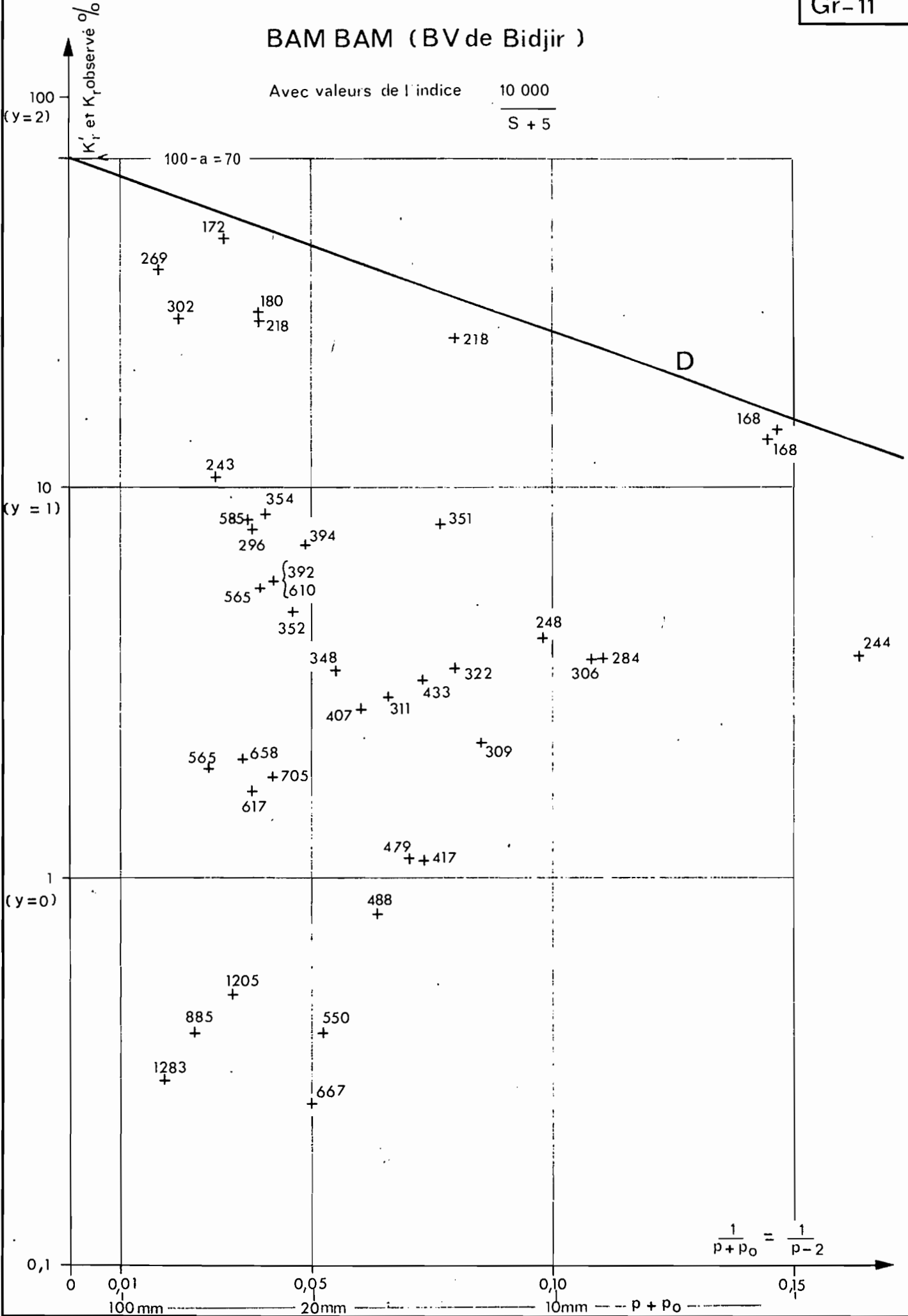


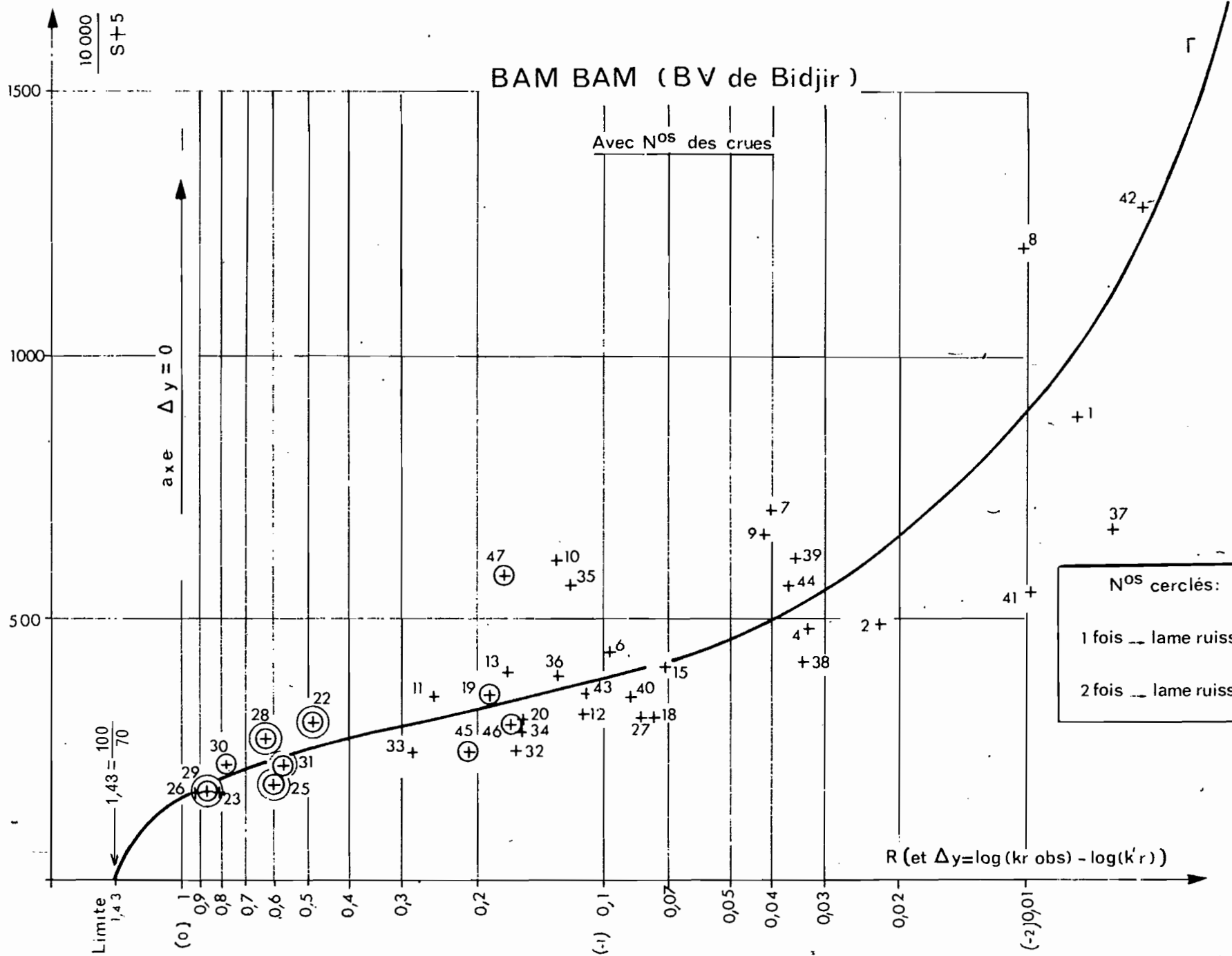
Gr-8



# BAM BAM (BV de Bidjir)

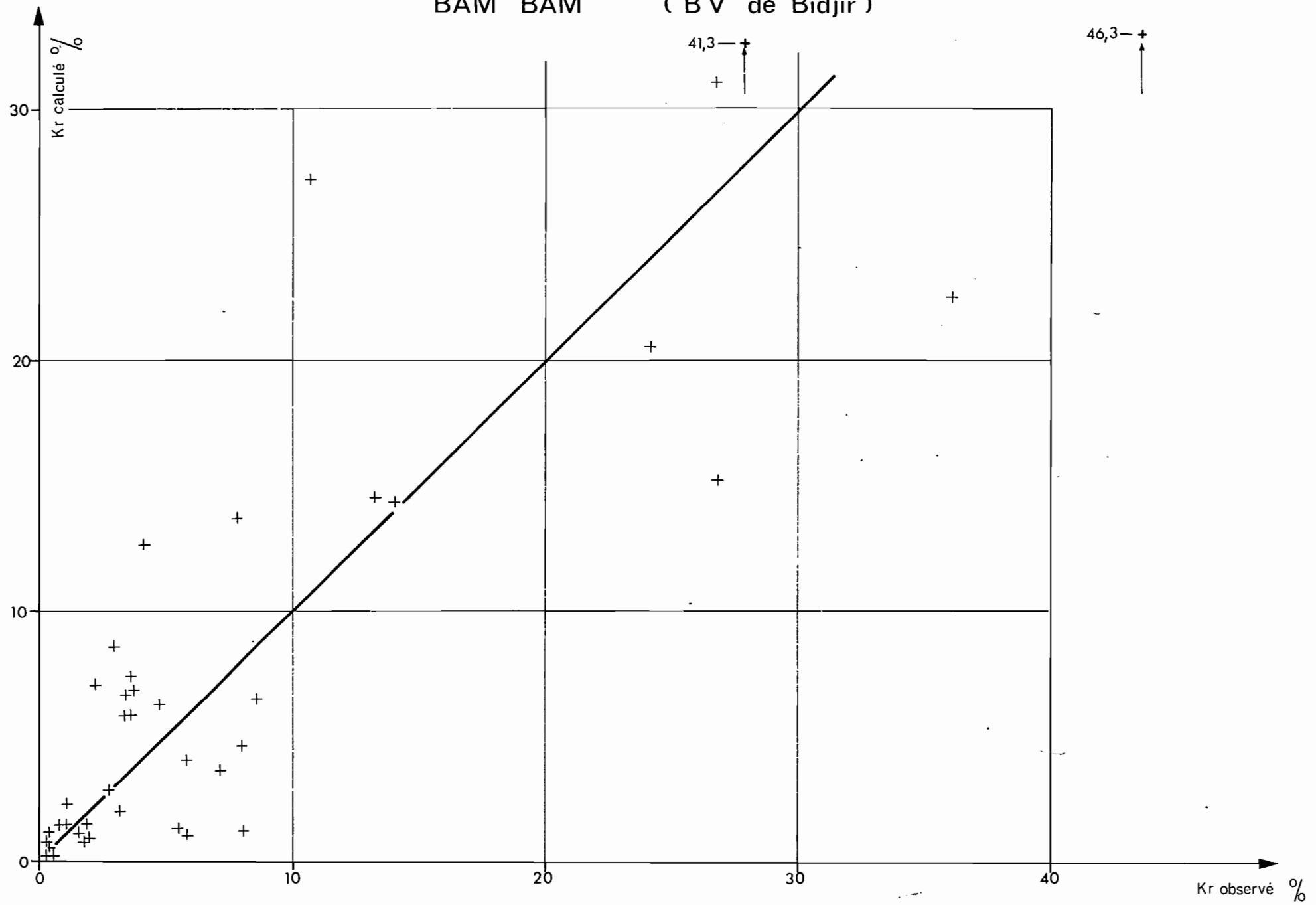
Avec valeurs de l'indice  $\frac{10\ 000}{S + 5}$







BAM BAM (BV de Bidjir)



### BAM BAM (BV de Bidjir )

