République du MALI

MINISTERE du DEVELOPPEMENT INDUSTRIEL
et des TRAVAUX PUBLICS

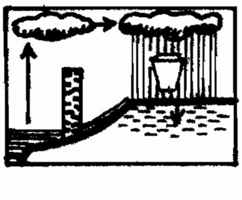
DIRECTION de l'HYDRAULIQUE
et de l'ENERGIE

OFFICE de la RECHERCHE SCIENTIFIQUE
et TECHNIQUE OUTRE MER

MISSION au MALI

HYDROLOGIE

CALCUL SIMPLE DES PARAMETRES D'AJUSTEMENT DES LOIS STATISTIQUES USUELLES UTILISEES EN HYDROLOGIE



BAMAKO - AOÛT 1974

Jean - Pierre LAMAGAT
Chargé de Recherches de l'O.R.S.T.O.M.

S O M M A I R E

Pages

Au début de l'année 1974 la Direction Générale de l'Hydraulique et de l'Energie a passé un contrat avec la Direction du Génie Rural intitulé:

"Accords sur les modalités d'exécution des études statistiques des données hydrologiques à trente stations du NIGER et du BANI et de leurs publica - tions"-.

Dans ces accords il est prévu l'homogénéisation des débits et hauteurs moyennes décadaires ainsi que l'ajustement,lorsqu'il y a possibilité,des lois utilisées courrament en hydrologie: Lois de GAUSS - GAMMA INCOMPLETE - GALTON - GUMBEL -.

Le volume des données à traiter étant extrèmement important,nous nous sommes sentis incapable d'effectuer seul tous les calculs,c'est pourqoi nous avons écrit la présente note qui permettra aux Techniciens de la DHE de calculer les paramètres des différentes lois connaissant uniquement les moyennes et écart-types des échantillons de données étudiés.

La note comporte à la fin les tables suffisantes pour calculer les hauteurs et débits en fonction de diverses fréquences au non-dépassement -.

Nous avons jugé bon d'introduire le calcul théorique des paramètres et quelques définitions de base -.

BAMAKO,le 31 Août 1974

ETUDES STATISTIQUES ET HYDROLOGIE

Lorsque l'on possède une série d'observations représentée par des chiffres, par exemple les débits moyens annuels à une station ou modules,les débits max., etc...,on commence par mettre cette série de chiffre en ordre soit croissant, soit décroissant.Puis on caractérise la série que l'on a mis en ordre à l'aide de graphiques et de valeurs types (moyenne - écart-type - etc...).

Ensuite on passe à l'analyse des résultats.On essaie de mettre sous une forme mathématique donnée l'information contenue dans la série étudiée.Il existe un certain nombre de modèles mathématiques dits "PROBABILISTES" qu'il est souvent possible d'ajuster à l'échantillon que l'on étudie en faisant varier certains paramètres du modèle.

La présente note a été conçue pour faciliter le calcul de ces paramètres.En effet bien souvent les méthodes de calcul et d'ajustement sont relativement compliquées et ne sont pas à la portée d'un technicien de niveau moyen.

Toutes les LOIS dont nous présentons le calcul des paramètres dans la présente notes sont d'un usage trés courant en hydrologie.Tous les ajustements de paramètres ont été réalisés avec seulement deux valeurs types d'une série de données: la moyenne et l'écart-type.

1. DEFINITIONS (ROCHE)

1.1. Probabilité

La probabilité d'un évènement élémentaire est représentée par un nombre compris entre 0 et 1 attribué à un évènement donné,soit par la structure même du problème étudié,soit par l'étude statistique d'un échantillon expérimental d'évènements.

1.2. Variable aléatoire

C'est une vatiable X qui peut prendre des valeurs x1,x2,...,xn avec desprobabilités p1,p2,...,pn -.

1.3. Probabilité élémentaire

La définition qui suit est valable pour une variable aléatoire continue ,c'est-à-dire qui peut prendre une valeur quelconque dans un intervalle fini ou indéfini.

La probabilité élémentaire est la probabilité pour que X soit compris entre x et x + dx,on la note f(x).dx - f(x) est appelé densité de probabilité.

La probabilité pour que x soit compris dans l'intervalle $(x_1,x2)$ est donnée par:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x).dx$$

1.4. Moments

On appelle moment d'ordre k :

$$m_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k . f(x).dx$$

Le moment d'ordre 1 ou moyenne est noté m_1:

$$m_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x . f(x) . dx$$

On appelle moment centré d'ordre k:

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_1)^k . f(x) . dx$$

Le moment d'ordre 2 s'appelle la <u>variance</u> et sa racine carrée est l'<u>écart-type</u> σ :

$$m_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx \qquad \mu_2 = \sigma^2 = m_2 - m_1^2$$

On appelle <u>écart-réduit</u> ou <u>variable réduite de GAUSS</u> la variable aléatoire

$$u = \frac{x - m_1}{\sigma}$$

On appelle <u>moyenne géomètrique</u> g :

$$\mathrm{Log}\, g = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Log}\, x . f(x) . dx$$

2. <u>Les LOIS de PROBABILITES à une VARIABLE</u>

On peut considérer toute fonction monotone croissante variant de 0 à 1 pour les limites assignées à la variable aléatoire comme représentant une loi de probabilité. Une telle fonction est dite <u>FONCTION de REPARTITION</u> et sa dérivée lorsqu'elle existe est appelée <u>DENSITE de PROBABILITE</u>. (voir définition mathématique à 1.3.)-.

Comme nous l'avons écrit plus haut, nous nous sommes efforcés de présenter des methodes de calculs des paramètres d'ajustements des diverses lois en fonction de deux valeurs types représentatives des échantillons étudiés: moment d'ordre 1 ou moyenne et écart-type.

A la Direction de l'Hydraulique et de l'Energie du MALI, il existe deux sortes de calculatrices permettant d'obtenir la moyenne et l'écart-type d'un échantillon donné:

La calculatrice programmable P 101 donne directement les deux valeurs et le nombre de données frappées sur le clavier, il n'y a pas de problème de ce côté là étant donné que le programme de calcul est déjà enregistré sur carte magnétique,
les autres machines de bureau ne possèdent qu'une seule mémoire et ne permettent pas d'effectuer le calcul des deux valeurs à l'aide d'une seule frappe des valeurs de l'échantillon, il faut procèder comme suit:

- Calculer la moyenne avec une première frappe : $m_1 = \dfrac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$

- L'écart-type est calculé à l'aide de la formule:

$$\sigma^2 = \frac{n\sum x^2 - (\sum x)^2}{n\,(n-1)}$$

il faut donc à l'aide d'une 2ème frappe calculer $\sum x^2$ et en utilisant la formule ci-dessus on obtient σ^2 et σ.

2.I. LA LOI NORMALE OU LOI DE GAUSS

Enonçons le THEOREME CENTRAL LIMITE:

-"Si Zn est une combinaison linéaire de n variables aléatoires Xi indépendantes, quelle que soit la loi suivie par chacun des Xi, la loi de répartition de Zn tend vers une loi normale lorsque n augmente indéfiniment"-.

La LOI NORMALE est trés répendue en HYDROLOGIE pour représenter la répartition statistique de valeurs moyennes.

Dans la pratique la loi s'applique à des échantillons de variables x prenant des valeurs qui résultent de l'action de nombreux facteurs dont les effets sont additifs et les fluctuations indépendantes, distribuées suivant des lois de probabilités quelconques dont les premiers moments existent. Ces fluctuations sont du même ordre de grandeur et la fluctuation d'un facteur particulier est petite par rapport à la fluctuation totale due à l'ensemble des facteurs.

La LOI NORMALE offre une répartition symètrique par rapport à la moyenne qui est en même temps médiane et mode.

Nous utiliserons la LOI NORMALE sous sa forme réduite:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot du \qquad \text{avec: } u = \frac{x - m}{\sigma}$$

m = moyenne des x_i

σ = écart-type de l'échantillon

u = écart réduit

Les valeurs de F(x) sont données par la table de l'intégrale de GAUSS en fonction de l'écart réduit u.

Tableau (I)

F	u
0,999	3,0897
0,99	2,3267
0,90	1,2817
0,80	0,8413
0,70	0,5244
0,60	0,2533
0,50	0,0000
0,40	-0,2533
0,30	-0,5244
0,20	-0,8413
0,10	-1,2817
0,05	-1,6450
0,01	-2,3267
0,001	-3,0897

Le tableau ci-contre donne les valeurs de u en fonction de la probabilité de trouver une valeur inférieure à u (fréquence au non-dépassement)

La table complète de l'intégrale de GAUSS se trouve en annexe. Le tableau ci-contre a été tiré de cette table.

Connaissant σ et m il est facile de calculer x en fonction de u:

$$x = \sigma . u + m$$

Exemple: crues max. à KOULIKORO

66 années d'observations $N = 66$

$m = 6073$ m3/s

$\sigma = 1294$ m3/s

On veut connaître le débit de fréquence 0,90 (décennal fort): $u = 1,2817$ ce qui donne:

$$Q_{0,90} = 1,2817 \times 1294 + 6073 = 7.732 \text{ m3/S}$$

2.II. LOI DE GALTON OU LOI DE GIBRAT - GAUSS

Lorsque la variable x résulte d'effets multiplicatifs en valeurs naturelles, ces effets devenant additifs en logarithmes, on retombe sur la LOI NORMALE appliquée au logarithme de x.

La densité de probabilité s'écrit:

$$f(x) = \frac{1}{S\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{Log}\, x - M}{S}\right)^2}$$

Signification des paramètres:

M = Log népérien de la moyenne géomètrique des observations = Log g

S = écart-type des Log des observations.

m_1 = moyenne des observations

σ = écart-type des observations.

Relations entre m_1, σ, M et S :

On pose $y = a.\mathrm{Log}\, x + b$ y est une variable Log - Normale centrée réduite.

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{y^2}{2}} . dy$$

La moyenne ou moment d'ordre 1 est égale à:

$$m_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(y) . e^{-\frac{y^2}{2}} dy \qquad \text{avec } x = e^{\frac{y-b}{a}}$$

$$m_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2} + \frac{y-b}{a}} . dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1-2ab}{2a^2}} . e^{-\frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{a}\right)^2} . dy$$

$$m_1 = e^{\frac{1}{2a^2} - \frac{b}{a}} \quad (1)$$ de même on obtient le moment d'ordre k:

$$m_k = e^{\frac{k^2}{2a^2} - \frac{kb}{a}} \qquad \text{et} \quad m_2 = e^{\frac{2}{2a^2} - \frac{2b}{a}}$$

$$\sigma^2 = m_2 - m_1^2 = e^{\frac{1}{a^2} - \frac{2b}{a}} . e^{\frac{1}{a^2}} - 1 \qquad (2)$$

Remplaçons a et b par leur valeur en fonction de M et S :

$a = 1/S$ et $b = -M/S = -\mathrm{Log}\, g/S$

D'aprés (1) : $\mathrm{Log}\, m_1 = \frac{S^2}{2} + \mathrm{Log}\, g$

(2) : $\mathrm{Log}\, \sigma = \mathrm{Log}\, g + \frac{S^2}{2} + \mathrm{Log}(e^{S^2} - 1)$

Introduisons le coefficient de variation $C_v = \frac{\sigma}{m_1}$

$$\text{Log } C_v = \text{Log } \sigma - \text{Log } m_1 = \frac{1}{2} \text{Log}(e^{S^2} - 1)$$

$$C_v^2 = e^{\frac{1}{a^2}} - 1 = e^{S^2} - 1$$

On a donc:

$$S = \sqrt{\text{Log}(1 + C_v^2)}$$

$$g = \frac{m_1}{\sqrt{1 + C_v^2}}$$

D'où les valeurs des paramètres en fonction de C_v et m_1 :

$$a = 1/S = 1/\sqrt{\text{Log}(1 + C_v^2)}$$

$$b = - a \cdot \text{Log}\left(\frac{m_1}{\sqrt{1 + C_v^2}}\right)$$

Nous avons effectué le changement de variable $y = a.\text{Log}x + b$, y étant une variable Log-Normale centrée réduite,ses valeurs sont données par la table de l'intégrale de GAUSS et par le tableau I en fonction de la fréquence au non-dépassement.On calcule donc x facilement:

$$\text{Log } x = \frac{y - b}{a}$$

ou:

$$x = e^{\frac{y - b}{a}}$$

<u>Exemple:</u>

<u>CRUES MAX A KOULIKORO</u>

m_1 = 6.073 m3/s	C_v = 0,21307	S = 0,2107	a = 4,7461
σ = 1.294 m3/s		g = 5.943	
		M = 8,6898	b = - 41,243

La crue décennale correspond à $F(x) = 0,90$,on lit la valeur correspondante de l'écart réduit dans la table de l'intégrale de GAUSS:

$$F(x) = 0,90 \qquad y = 1,2817$$

d'où: $\text{Log } x = \dfrac{1,2817 + 41,243}{4,7461} = 8,9600$ et $x \simeq$ 7.780 m3/s

2.III. LA LOI GAMMA INCOMPLETE OU LOI DE PEARSON III

La densité de probabilité s'écrit:

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \cdot a^{\gamma}\, e^{-ax}\, x^{\gamma - 1}$$

Posons: $y = ax$,il vient:

$$f(y) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\, e^{-y}\, y^{\gamma - 1}$$

Calculons les paramètres par les moments en rappelant que:

$$\Gamma(\gamma) = (\gamma - 1)! = \int_0^{\infty} f(y)\, dy$$

on a donc:

$$m_{1y} = \int_0^{\infty} y.f(y).dy = \gamma$$

$$\sigma_y^2 = \int_0^{\infty} y^2 \cdot f(y) \cdot dy - \gamma^2 = \gamma(\gamma + 1) - \gamma^2 = \gamma$$

si on repasse en x :

$$m_{1x} = \frac{\gamma}{a} \qquad \text{et} \quad \sigma_x^2 = \frac{\gamma}{a^2}$$

Les paramètres sont dencentièrement défini en fonction des deux premiers moments :

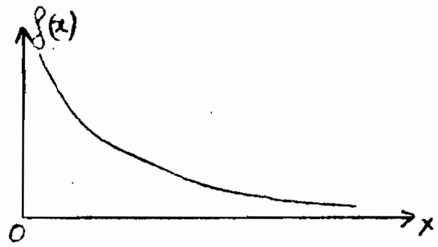
$$\left| \begin{array}{l} a = m_1 / \sigma^2 \\ \gamma = m_1^2 / \sigma^2 \end{array} \right.$$

a est le paramètre d'échelle,

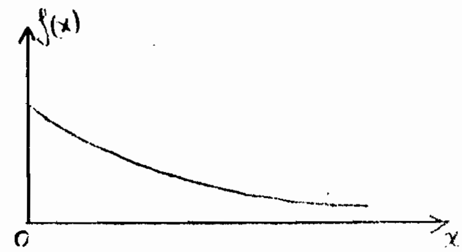
γ est le paramètre de forme.

Lorsque γ varie de 0 à l' ∞ ,la fonction prend les allures suivantes:

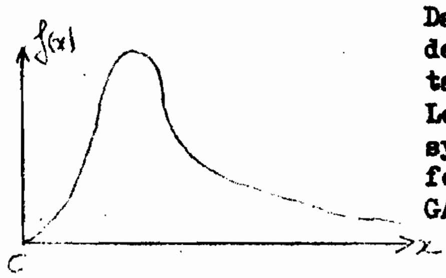
$\gamma < 1$



$\gamma = 1$



$\gamma > 1$



Dans ce cas on obtient des fonctions en forme de cloche avec une dissymètrie qui est d'autant plus accentuée que γ est petit(de 1 à 5). Lorsque γ grandit (de l'ordre de 20) la dissymètrie s'atténue et lorsque $\gamma > 50$ la fonction devient approximable par la LOI de GAUSS.

La fonction $f(y) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} e^{-y} y^{\gamma-1}$ a été tabulée par PEARSON.

Les tableaux et en annexe donnent les valeurs de x en fonction de γ et de u. Connaissant l'écart-type σ de l'échantillon considéré ainsi que m_1, on calcule $\gamma = m_1^2/\sigma^2$, on lit dans les tableaux de u en fonction de F(u) et on a :

$$x = \sigma . u$$

<u>Exemple</u>: CRUES MAX. A KOULIKORO -.

$m_1 = 6.073$ m3/s
$\sigma = 1.294$ m3/s

$\gamma = 22,02$

On veut avoir la fréquence décennale au non-dépassement:

$F(x) = 0,90$

Ces deux valeurs de γ et F(x) donnent pour u :

$\gamma = 22,02$
$F(x) = 0,90$

u = 5,962 et x = 5,962 x 1.294
x = 7.715 m3/s

La valeur de x trouvée ici est trés peu différente de celle que nous a - vions obtenu avec la LOI NORMALE :7.732 m3/s

IV. LOI DE GUMBEL

La Loi s'écrit : $F(x) = e^{-e^{-a(x-x_0)}}$ elle est définie entre $-\infty$ et $+\infty$.

La densité de probabilité s'écrit:

$$f(x) = a\, e^{-a(x-x_0)}\, e^{-e^{-a(x-x_0)}}$$

Calculons les deux premiers moments :

On pose: $u = e^{-a(x-x_0)}$ l'intervalle de définition devient: $+\infty$, 0

Il vient:

$$\left|\begin{array}{l} \text{Log}\, u = -a\,(x - x_0) \\ x = -\frac{1}{a}\,\text{Log}\, u + x_0 \\ dx = -\frac{du}{a.u} \end{array}\right.$$

$$m_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x.a.\, e^{-a(x-x_0)}\,.\, e^{-e^{-a(x-x_0)}}\,.\, dx$$

$$m_1 = -\int_{+\infty}^{0} \left(x_0 - \frac{1}{a}\,\text{Log}\, u\right).\, e^{-u}.\, du = x_0 \int_0^{+\infty} e^{-u}.\, du - \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \text{Log}\, u\,.\, e^{-u}.\, du$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-u}.\, du = 1 \qquad \text{et} \qquad -\int_0^{+\infty} \text{Log}\, u\,.\, e^{-u}.\, du = 0{,}5772$$

$$m_1 = x_0 + \frac{0{,}5772}{a}$$

$$\mu_2 = \sigma^2 = m_2 - m_1^2 = -m_1^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} x^2.\, a\,.\, e^{-a(x-x_0)}.\, e^{-e^{-a(x-x_0)}}\,.\, dx$$

$$\left.\begin{array}{l} u = e^{-a(x-x_0)} \\ dx = -\frac{du}{a\,.\,u} \end{array}\right| \quad \sigma^2 = \frac{1}{a^2}\left\{\int_0^{+\infty} (\text{Log}\, u)^2.\, e^{-u}.du - \left(\int_0^{+\infty} \text{Log}\, u\,.\, e^{-u}.\, du\right)^2\right\}$$

Ce qui donne :

$$\sigma = \frac{1}{0{,}780\,.\,a}$$

Connaissant σ et m_1 on peut donc déterminer complètement la fonction de répartition :

$$\left|\begin{array}{l} F(x) = e^{-e^{-a(x-x_0)}} \\ a = 1/0{,}780\,\sigma \\ x_0 = m_1 - 0{,}4502\,\sigma \end{array}\right.$$

On peut écrire la loi de répartition sous une autre forme :

$$-\text{Log}\, F(x) = e^{-a(x-x_0)} \quad \text{et donc : } \text{Log}(-\text{Log}\, F(x)) = -a(x - x_0)$$

D'où :

$$\boxed{x = -\frac{1}{a} \cdot \mathrm{Log}(-\,\mathrm{Log}F(x)) + x_0}$$

F(x) étant la fréquence au non-dépassement, le tableau ci-dessous donne les valeurs de: Log(- LogF(x)) en fonction de valeurs usuelles de F(x).

(III)

F(x)	L(- L F(x))
0,999	- 6,91779
0,99	- 4,60128
0,98	- 3,90238
0,95	- 2,97002
0,90	- 2,25031
0,80	- 1,49993
0,75	- 1,24589
0,70	- 1,03096
0,60	- 0,67172
0,50	- 0,36650
0,40	- 0,08742
0,30	0,18563
0,25	0,32662
0,20	0,47590
0,10	0,83403
0,05	1,09719
0,02	1,36405
0,01	1,52718
0,001	1,93269

Exemple: CRUES MAX. A KOULIKORO

m_1 = 6.073 m3/s

σ = 1.294 m3/s

On en déduit :

1/a = 1.009,32 m3/s

x_0 = 5.490,7 m3/s

Pour la fréquence décennale au non-dépassement, soit :

F(x) = 0,90 en a: Log(-Log F(x)) = - 2,25031

On en déduit le débit de fréquence décennale à KOULIKORO:

x_{10} = 7.762 m3/s

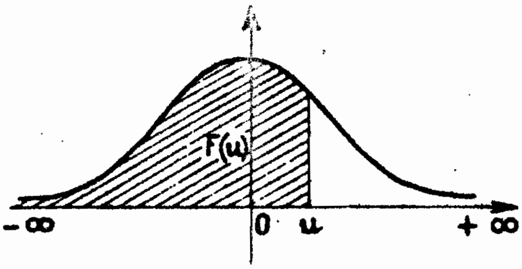
Cette valeur est trés proche de celles trouvées par les lois de GAUSS (7.715 m3/s) et de PEARSON III (7.732 m3/s)

NOTA:

La loi de GUMBEL est une loi qui s'applique surtout dans le calcul des fréquences rares, elle est utilisée pour étudier les distributions des minimums et des maximums.

FONCTION DE REPARTITION DE LA LOI NORMALE REDUITE

(Probabilité de trouver une valeur inférieure à u)



u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Table pour les grandes valeurs de u

u	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
F(u)	0,99865	0,99904	0,99931	0,99952	0,99966	0,99976	0,999841	0,999928	0,999968	0,999997

Nota - La table donne les valeurs de F(u) pour u positif. Lorsque u est négatif il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table.

Exemple . pour u = 1,37 F(u) = 0,9147

pour u = - 1,37 F(u) = 0,0853

TABLE DE LA FONCTION GAMMA INCOMPLETE

	.5	.6	.7	.8	.9	1.	1.5	2.	2.5	3.	3.5	4.	4.5	5.
.001	u= .00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.11	.14	.21	.26	.32
.005	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.12	.19	.26	.33	.41	.48
.010	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.10	.17	.24	.30	.41	.48	.62
.025	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.17	.26	.35	.45	.54	.63	.72
.050	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.15	.25	.36	.47	.58	.68	.78	.88
.075	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.19	.32	.44	.56	.69	.78	.89	.99
.100	.00	.00	.00	.00	.00	.11	.24	.37	.51	.63	.75	.87	.98	1.09
.150	.00	.00	.00	.10	.13	.16	.32	.48	.63	.77	.90	1.02	1.13	1.24
.200	.00	.00	.11	.15	.19	.22	.41	.58	.74	.89	1.02	1.15	1.27	1.38
.250	.00	.00	.16	.20	.25	.29	.49	.68	.85	1.00	1.14	1.27	1.39	1.51
.300	.11	.13	.21	.26	.31	.36	.58	.78	.96	1.10	1.25	1.38	1.51	1.62
.350	.15	.20	.27	.32	.38	.43	.67	.87	1.05	1.21	1.36	1.49	1.62	1.74
.400	.20	.27	.33	.39	.45	.51	.76	.97	1.16	1.32	1.47	1.61	1.73	1.83
.450	.26	.33	.40	.47	.54	.60	.86	1.08	1.26	1.43	1.58	1.72	1.85	1.97
.500	.32	.41	.49	.56	.66	.69	.97	1.19	1.38	1.54	1.70	1.84	1.97	2.09
.550	.40	.49	.58	.66	.78	.80	1.08	1.30	1.49	1.66	1.82	1.96	2.09	2.21
.600	.50	.60	.69	.77	.85	.92	1.20	1.43	1.62	1.79	1.95	2.09	2.22	2.34
.650	.62	.73	.82	.90	.98	1.05	1.34	1.57	1.76	1.93	2.09	2.23	2.36	2.48
.700	.76	.87	.98	1.06	1.13	1.20	1.50	1.73	1.92	2.09	2.24	2.38	2.51	2.65
.750	.94	1.05	1.15	1.24	1.31	1.39	1.68	1.90	2.10	2.26	2.42	2.56	2.68	2.81
.800	1.16	1.28	1.38	1.46	1.54	1.61	1.90	2.12	2.31	2.47	2.62	2.76	2.89	3.01
.850	1.48	1.58	1.67	1.76	1.83	1.90	2.17	2.39	2.57	2.73	2.87	3.01	3.13	3.25
.900	1.91	2.02	2.10	2.17	2.24	2.30	2.55	2.75	2.92	3.07	3.21	3.34	3.46	3.58
.925	2.24	2.33	2.41	2.48	2.54	2.59	2.82	3.00	3.17	3.30	3.44	3.57	3.69	3.80
.950	2.70	2.79	2.85	2.90	2.95	3.00	3.19	3.36	3.50	3.64	3.76	3.88	3.99	4.09
.975	3.55	3.58	3.60	3.64	3.66	3.69	3.82	3.94	4.06	4.17	4.28	4.38	4.48	4.58
.990	4.69	4.66	4.63	4.62	4.61	4.61	4.60	4.69	4.77	4.85	4.94	5.03	5.11	5.19
.995	5.57	5.48	5.41	5.37	5.33	5.30	5.24	5.26	5.30	5.36	5.41	5.49	5.56	5.63
.999	7.65	7.43	7.25	7.11	7.00	6.91	6.64	6.53	6.49	6.48	6.50	6.53	6.57	6.62

Exemple d'utilisation du tableau: Soit un échantillon dont on a déjà calculé la moyenne et l'écart-type:

$$m_1 = 15 \qquad \gamma = \frac{m_1^2}{\sigma^2} = 2,25$$

$$\sigma = 10$$

On a la normale pour F = 0,5 ce qui donne pour $\gamma = 2,25$ u = 1,285

$$u \cdot \sigma = X_{0,5} = 1,285 \times 10 = 12,85$$

TABLE DELA FONCTION GAMMA INCOMPLETE

(suite 1)

F \ γ	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
.001	u=.41	.57	.69	.81	.93	1.04	1.16	1.27	1.39	1.49	1.63	1.72	1.84	1.91
.005	.62	.76	.90	1.04	1.17	1.30	1.42	1.54	1.66	1.78	1.90	2.00	2.11	2.22
.010	.72	.88	1.02	1.16	1.31	1.43	1.56	1.69	1.81	1.93	2.05	2.16	2.27	2.37
.025	.90	1.06	1.22	1.37	1.51	1.65	1.79	1.92	2.04	2.16	2.29	2.40	2.51	2.62
.050	1.06	1.24	1.41	1.56	1.71	1.86	2.00	2.13	2.26	2.39	2.52	2.63	2.74	2.85
.075	1.19	1.37	1.54	1.70	1.85	2.00	2.14	2.28	2.41	2.54	2.67	2.78	2.90	3.01
.100	1.29	1.47	1.64	1.81	1.97	2.12	2.26	2.40	2.53	2.66	2.79	2.91	3.02	3.13
.150	1.45	1.64	1.82	1.99	2.15	2.30	2.45	2.59	2.75	2.85	2.99	3.10	3.22	3.33
.200	1.59	1.79	1.97	2.14	2.30	2.46	2.61	2.75	2.88	3.02	3.15	3.27	3.39	3.49
.250	1.72	1.92	2.11	2.28	2.44	2.60	2.75	2.89	3.03	3.16	3.30	3.41	3.53	3.64
.300	1.84	2.04	2.23	2.47	2.57	2.73	2.88	3.02	3.16	3.29	3.43	3.55	3.67	3.77
.350	1.96	2.16	2.35	2.53	2.70	2.85	3.00	3.15	3.29	3.43	3.55	3.67	3.77	3.88
.400	2.08	2.28	2.47	2.65	2.82	2.97	3.15	3.29	3.42	3.56	3.67	3.80	3.90	4.01
.450	2.20	2.40	2.59	2.77	2.94	3.09	3.25	3.39	3.53	3.60	3.79	3.90	4.03	4.14
.500	2.31	2.52	2.71	2.89	3.06	3.22	3.37	3.51	3.65	3.79	3.91	4.03	4.15	4.26
.550	2.44	2.65	2.84	3.01	3.18	3.34	3.49	3.64	3.78	3.91	4.03	4.15	4.27	4.38
.600	2.57	2.78	2.97	3.15	3.31	3.47	3.62	3.77	3.91	4.04	4.16	4.28	4.40	4.51
.650	2.71	2.91	3.11	3.28	3.45	3.61	3.76	3.91	4.05	4.18	4.30	4.42	4.54	4.65
.700	2.86	3.07	3.26	3.43	3.60	3.76	3.91	4.06	4.20	4.33	4.44	4.56	4.68	4.79
.750	3.03	3.24	3.42	3.60	3.77	3.93	4.08	4.22	4.36	4.49	4.61	4.73	4.85	4.96
.800	3.23	3.43	3.62	3.79	3.96	4.12	4.27	4.39	4.55	4.68	4.79	4.91	5.03	5.15
.850	3.47	3.67	3.85	4.03	4.19	4.35	4.49	4.64	4.77	4.90	5.02	5.14	5.26	5.37
.900	3.79	3.98	4.16	4.33	4.49	4.65	4.79	4.93	5.07	5.20	5.31	5.43	5.55	5.65
.925	4.00	4.19	4.37	4.54	4.69	4.85	4.99	5.13	5.26	5.39	5.51	5.63	5.75	5.85
.950	4.29	4.48	4.65	4.81	4.97	5.12	5.26	5.40	5.53	5.65	5.77	5.89	6.00	6.11
.975	4.77	4.94	5.10	5.26	5.40	5.55	5.68	5.80	5.94	6.07	6.19	6.31	6.42	6.54
.990	5.35	5.51	5.66	5.80	5.94	6.08	6.20	6.33	6.45	6.57	6.70	6.83	6.93	7.06
.995	5.78	5.92	6.06	6.19	6.34	6.45	6.58	6.70	6.82	6.93	7.06	7.20	7.32	7.45
.999	6.72	6.83	6.94	7.05	7.17	7.28	7.39	7.50	7.60	7.74	7.87	8.02	8.15	8.28

TABLE DE LA FONCTION GAMMA INCOMPLETE

(suite 2)

F \ γ	20	21	22	23	24	25	30	35	40	45	50
.001	u=2.04	2.18	2.27	2.36	2.47	2.56	3.11	3.54	4.12	4.56	4.98
.005	2.34	2.45	2.55	2.64	2.75	2.86	3.36	3.79	4.28	4.72	5.11
.010	2.49	2.60	2.70	2.80	2.91	3.02	3.50	3.93	4.39	4.80	5.18
.025	2.73	2.84	2.94	3.04	3.15	3.26	3.72	4.16	4.58	4.95	5.32
.050	2.96	3.06	3.17	3.28	3.38	3.50	3.94	4.37	4.76	5.11	5.46
.075	3.12	3.22	3.33	3.43	3.54	3.65	4.09	4.52	4.89	5.23	5.56
.100	3.24	3.34	3.45	3.55	3.66	3.77	4.21	4.63	5.00	5.33	5.65
.150	3.43	3.53	3.64	3.75	3.86	3.97	4.40	4.82	5.18	5.49	5.79
.200	3.60	3.70	3.81	3.92	4.02	4.13	4.55	4.97	5.33	5.63	5.92
.250	3.75	3.86	3.97	4.07	4.17	4.27	4.70	5.11	5.46	5.77	6.04
.300	3.88	3.99	4.09	4.20	4.30	4.40	4.82	5.23	5.58	5.89	6.15
.350	4.01	4.11	4.22	4.32	4.42	4.52	4.95	5.35	5.70	6.00	6.26
.400	4.13	4.23	4.34	4.44	4.54	4.64	5.06	5.46	5.81	6.12	6.36
.450	4.26	4.36	4.46	4.56	4.66	4.76	5.18	5.57	5.92	6.24	6.47
.500	4.37	4.47	4.58	4.68	4.78	4.88	5.30	5.68	6.03	6.35	6.58
.550	4.50	4.60	4.70	4.80	4.90	5.00	5.42	5.80	6.15	6.46	6.70
.600	4.62	4.72	4.83	4.93	5.02	5.12	5.54	5.92	6.28	6.58	6.82
.650	4.76	4.86	4.96	5.06	5.16	5.26	5.67	6.05	6.41	6.71	6.95
.700	4.90	5.00	5.10	5.20	5.30	5.41	5.81	6.19	6.55	6.94	7.10
.750	5.07	5.17	5.27	5.36	5.47	5.57	5.98	6.35	6.71	7.01	7.26
.800	5.25	5.34	5.45	5.55	5.65	5.75	6.16	6.53	6.89	7.19	7.45
.850	5.47	5.56	5.67	5.76	5.86	5.97	6.38	6.76	7.11	7.41	7.68
.900	5.76	5.86	5.96	6.06	6.16	6.26	6.68	7.06	7.40	7.71	7.98
.925	5.96	6.05	6.16	6.26	6.35	6.45	6.88	7.25	7.59	7.91	8.18
.950	6.21	6.31	6.42	6.52	6.61	6.71	7.15	7.51	7.83	8.16	8.45
.975	6.63	6.73	6.84	6.94	7.04	7.13	7.58	7.95	8.24	8.59	8.89
.990	7.15	7.25	7.35	7.45	7.55	7.65	8.11	8.47	8.72	9.09	9.42
.995	7.52	7.62	7.73	7.84	7.94	8.05	8.50	8.85	9.08	9.45	9.82
.999	8.38	8.49	8.60	8.71	8.83	8.94	9.40	9.64	9.88	10.28	

5. ETUDES STATISTIQUES DES DEBITS MAX.ANNUELS A KOULIKORO (NIGER)

5.1. TABLEAUX DES DONNEES

Dans le tableau ci-dessous les débits et les hauteurs sont classés par ordre décroissant. La fréquence F est au non-dépassement et le rang est donné par r:

$$F = \frac{r}{N + 1}$$

$\frac{r - \frac{1}{2}}{N}$

r	F	An.	H (cm)	Q (m3/s)
1	0,985	1925	825	9.675
2	0,970	24	813	9.375
3	0,955	67	810	9.300
4	0,940	28	775	8.500
5	0,925	62	743	7.817
6	0,910	69	738	7.722
7	0,896	32	725	7.475
8	0,881	29	716	7.304
9	0,866	57	713	7.247
10	0,851	63	712	7.228
11	0,836	36	712	7.228
12	0,821	33	708	7.152
13	0,806	55	706	7.114
14	0,791	59	697	6.946
15	0,776	26	689	6.802
16	0,761	27	687	6.766
17	0,746	53	686	6.742
18	0,731	09	686	6.742
19	0,716	49	685	6.730
20	0,701	17	683	6.694
21	0,687	30	680	6.640
22	0,672	64	680	6.640
23	0,657	60	675	6.550
24	0,642	11	675	6.550
25	0,627	48	665	6.370
26	0,612	54	662	6.316
27	0,597	50	660	6.280
28	0,582	31	660	6.280
29	0,567	51	659	6.262
30	0,552	38	657	6.226
31	0,537	22	656	6.208
32	0,522	61	654	6.172
33	0,507	52	652	6.136

r	F	An.	H (cm)	Q (m3/s)
34	0,493	1947	649	6.083
35	0,478	56	648	6.066
36	0,463	41	646	6.032
37	0,448	16	636	5.862
38	0,433	34	630	5.760
39	0,418	65	630	5.760
40	0,403	70	628	5.726
41	0,388	35	622	5.624
42	0,373	71	620	5.590
43	0,358	66	618	5.556
44	0,343	39	614	5.488
45	0,328	58	611	5.437
46	0,313	12	610	5.420
47	0,299	46	608	5.386
48	0,284	23	603	5.301
49	0,269	68	596	5.186
50	0,254	19	595	5.170
51	0,239	21	595	5.170
52	0,224	15	589	5.074
53	0,209	45	586	5.026
54	0,194	43	585	5.010
55	0,179	37	580	4.930
56	0,164	20	570	4.770
57	0,149	18	570	4.770
58	0,134	42	566	4.706
59	0,119	44	566	4.706
60	0,104	10	560	4.610
61	0,090	14	537	4.255
62	0,075	73	530	4.150
63	0,060	07	525	4.075
64	0,045	40	505	3.785
65	0,030	72	497	3.684
66	0,015	1913	479	3.470

Les calculs des moyennes et écart-types des hauteurs et des débits donnent:

HAUTEURS: m_1 = 645 cm, σ = 72,8 cm, γ = 78,5

DEBITS: m_1 = 6.073 m3/s, σ = 1.294 m3/s, γ = 22,02

Pour les hauteurs, nous n'ajusterons que la loi de GAUSS, étant donné la forte valeur du paramètre de forme γ.

5.2. LOI DE GAUSS OU LOI NORMALE:

Le tableau(I) donne directement les valeurs de H et Q en fonction des m_1 et σ respectifs. (voir tableau des résultats).

5.3 LOI DE GALTON OU DE GIBRAT - GAUSS

Le calcul des paramètres a déjà été fait à la page 5 :

$$a = 4{,}7461$$

$$b = -\ 41{,}243$$

On a vu que:

$$\log Q = \frac{1}{2{,}302585} \cdot \frac{u + 41{,}243}{4{,}7461} = \frac{u + 41{,}243}{10{,}9283}$$

u est la variable réduite de GAUSS, on trouve les valeurs de u en fonction de la fréquence au non-dépassement dans le tableau (I) de la page 3 et dans la table de l'intégrale de GAUSS page 10. Les valeurs obtenus pour Q(F) sont portées dans le tableau(IV).

5.4. LOI GAMMA INCOMPLETE OU LOI DE PEARSON III

Connaissant γ, à l'aide de la table de la fonction qui se trouve aux pages 11 à 13, on calcule directement les valeurs de Q(F) à l'aide de la formule:

$$Q(F) = \sigma \cdot u = 1.294 \cdot u$$

u est lue directement dans la table en fonction de γ et de F .

5.5. LOI DE GUMBEL

Le calcul des paramètres a été fait à la page 9, il a donné les résultats suivants:

$$1/a = 1.009 \text{ m3/s}$$

$$Q_o = 5.491 \text{ m3/s}$$

Or: $Q(F) = -\ 1/a \cdot \mathrm{Log}(-\mathrm{Log}(F(Q))) + Q_o$

$$Q(F) = -\ 1.009 \cdot \mathrm{Log}(-\mathrm{Log}\ F(Q)) + 5.491$$

Les valeurs de L(-L(F)) sont données par le tableau (III), on calcule directement Q en fonction de F au non-dépassement.

5.6 TABLEAU DES RESULTATS

				GALTON			PEARSON		GUMBEL	
F	u GAUSS	H	Q	u GAUSS	log Q	Q	u PEAR	Q	L(-L(F))	Q
0,999	3,0897	870	10.100	3,0897	4,05669	11.400	8,60	11.100	- 6,9178	12.500
0,990	2,3267	814	9.100	2,3267	3,98687	9.700	7,35	9.500	- 4,6013	10.100
0,950	1,6450	764	8.200	1,6450	3,92449	8.400	6,42	8.300	- 2,9700	8.500
0,900	1,2817	738	7.750	1,2817	3,89125	7.800	5,96	7.700	- 2,2503	7.750
0,800	0,8413	706	7.150	0,8413	3,85095	7.100	5,45	7.050	- 1,4999	7.000
0,750	0,6732	694	6.950	0,6732	3,83557	6.850	5,27	6.820	- 1,2459	6.750
0,700	0,5244	683	6.750	0,5244	3,82195	6.650	5,10	6.600	- 1,0310	6.530
0,600	0,2533	663	6.400	0,2533	3,79714	6.250	4,83	6.250	- 0,6717	6.170
0,500	0,0000	645	6.100	0,0000	3,77396	5.950	4,58	5.930	- 0,3665	5.860
0,400	$\bar{0}$,2533	626	5.750	$\bar{0}$,2533	3,75079	5.630	4,34	5.620	- 0,0874	5.580
0,300	$\bar{0}$,5244	606	5.400	$\bar{0}$,5244	3,72598	5.320	4,09	5.290	0,1856	5.300
0,250	$\bar{0}$,6732	596	5.200	$\bar{0}$,6732	3,71236	5.160	3,97	5.140	0,3266	5.160
0,200	$\bar{0}$,8413	583	5.000	$\bar{0}$,8413	3,69698	4.980	3,81	4.930	0,4759	5.010
0,100	1,2817	551	4.400	1,2817	3,65668	4.540	3,45	4.460	0,8340	4.650
0,050	1,6450	525	3.950	1,6450	3,62344	4.200	3,17	4.100	1,0972	4.380
0,010	2,3267	475	3.060	2,3267	3,56106	3.640	2,70	3.495	1,5272	3.950
0,001	3,0897	420	2.075	3,0897	3,49124	3.100	2,27	2.940	1,9327	3.540