

UGBS

## RAPPORT DE STAGE

# MODÈLE DE MILIEU POREUX DÉFORMABLE

M.T.NIANE

C.HAMMECKER

SOULEYE KANE *biologiste*

10 mars 2000

---

# Table des matières

<b>1</b>		<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Modèle de transfert en milieu poreux rigide</b>	<b>5</b>
	Modèle physique . . . . .	5
	Modèle mathématique . . . . .	6
	Transferts hydriques . . . . .	6
	Transferts de solutés . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Modèle de transfert en milieu poreux déformable</b>	<b>13</b>
	Element de mécanique des milieux continus . . . . .	13
	Point matériel ou particules du squelette et du fluide . . . . .	13
	Continuité du milieu poreux . . . . .	14
	Description de la transformation du squelette . . . . .	14
	Gradient de la transformation . . . . .	14
	Formule de transport . . . . .	15
	Tenseur des déformations de Green-Lagrange . . . . .	17
	Transformation infinitésimale, tenseur des déformations linéarisé, tenseur de déformation plane . . . . .	18
	Cinématique de la déformation du squelette . . . . .	21
	Modélisation . . . . .	23
	Équation d'écoulement . . . . .	23
	Équation de transport de soluté . . . . .	25
	Modèle de retrait de vertisol . . . . .	26
	Écoulement monodirectionnel et déformation tridimensionnelle ani- sotrope . . . . .	27

# Chapitre 1

Introduction L'étude des problèmes de pollution liés à l'agriculture passe par la connaissance des propriétés hydrodynamiques du sol.

La plupart des études menées à cet égard supposent que le sol est un milieu poreux rigide. On peut citer les travaux de Richards qui a établi le modèle de transfert en milieu poreux non saturé non déformable en généralisant la loi de Darcy.

Cependant, très peu de chercheurs dans leurs études ont tenu compte de la déformation du sol. On peut noter les travaux de TALSMA et VAN DER LELIJ(en 1976) (ref[2]) qui ont cherché à quantifier l'infiltration et le gonflement d'un vertisol sous riziculture.

Mais de plus en plus, les résultats des recherches montrent le rôle joué par la déformation pour certains types de sol(ref[2]).

Pour les sols déformables, la variation de la teneur en eau  $\theta$  est simultanée à un changement de volume; ce qui fait que le domaine  $\Omega$  dépend de  $\theta$  ( $\Omega = \Omega(\theta)$ ). Si on note  $e$  l'indice de vide, les caractéristiques hydrodynamiques du sol seront de la forme :

$$K = K(\theta); h = h(\theta); e = e(\theta);$$

avec  $K$  la conductivité hydraulique et  $h$  le potentiel matriciel.

La teneur en eau étant définie comme le rapport du volume de liquide présent dans  $\Omega$  sur le volume total  $V_\Omega$ , et  $V_\Omega$  étant variable, il est plus commode dans la pratique d'utiliser comme variable globale le taux d'humidité  $\Theta$  qui est le rapport du volume de liquide présent dans  $\Omega$  par le volume de solide qui y est contenu.

Ceci est d'autant plus intéressant que dans la phase expérimentale, il sera plus commode de mesurer  $\Theta$  que  $\theta$  puisque le premier a son dénominateur constant tandis que le second variable.

Ainsi, en notant par  $C$  la concentration massique du polluant dans le milieu, nous établirons d'abord un modèle de transfert en milieu poreux où les variables seront  $\Theta$  et  $C$ , et où on suppose que le domaine est rigide.

Ensuite nous regarderons le cas déformable qui sera matérialisé par la courbe de retrait ( $e = e(\Theta)$ ).

Et enfin, nous tenterons de regarder ce qui se passe lorsque la déformation et l'écoulement sont monodirectionnels et le cas où la déformation est tridimensionnelle anisotrope et l'écoulement monodirectionnel.

## Chapitre 2

# Modèle de transfert en milieu poreux rigide

### Modèle physique

Le problème que l'on se pose est le suivant : on suppose qu'on a un domaine borné (un cylindre de rayon 1 et de hauteur 1 contenant un sol non saturé de teneur en eau initiale  $\theta_r$  ). On injecte dans ce milieu poreux à travers la base supérieure une solution contenant un seul soluté et on regarde l'évolution spatio-temporelle de la concentration du traceur dans le domaine.

La propagation du soluté dans le milieu poreux étant étroitement liée à l'écoulement du fluide fait que l'étude de ce phénomène nécessite la connaissance de l'équation gouvernant le transport de masse en milieu poreux.

Comme condition de bord, on suppose qu'il n'y a pas d'écoulement latérale. Le fond est ouvert et le débit de la source extérieure n'est pas élevé pour éviter d'avoir un écoulement diphasique. L'étude se fait dans un intervalle de temps tel que le front d'humectation n'atteint pas le fond. Cette hypothèse nous permet de simplifier le problème en évitant d'être confronté à un autre type de problème à frontière libre où la variation du niveau de la nappe phréatique est non négligeable.

On utilise comme sol du sable qui peut être supposé comme un milieu poreux rigide. On fait aussi l'hypothèse que le soluté est inerte(chimiquement) par rapport au milieu c'est à dire qu'il n'y a pas de réactions chimiques (précipitation,dissolution) ni d'adsorption. Le milieu est supposé isothermique.

## Modèle mathématique

### Notation :

$\theta$  = la teneur en eau ;

$\rho$  = la masse volumique de l'eau ;

$\vec{q}$  = la vitesse de filtration ;

$C$  = la concentration molaire massique de la solution dans le domaine ;

$D$  = le coefficient de diffusion dispersion ;

$\rho_s$  = densité de soluté dans la partie solide du milieu poreux ;

$C_s$  = concentration du soluté dans la partie solide ;

$\rho_d$  = densité apparente sèche du sol ;

$C_v$  = Concentration molaire volumique du soluté.

L'évolution du soluté dans le milieu poreux sera régie par deux phénomènes physico-chimiques ; l'un décrivant l'écoulement du fluide et l'autre le transport de soluté.

## Transferts hydriques

Supposons que le milieu poreux soit le cylindre universel de  $R^3$  noté  $\Omega$ . Soit  $\omega$  une partie de  $\Omega$ ,  $V_\omega$  le volume de  $\omega$  et  $\mathcal{M}(\omega, t)$  la masse de fluide contenue dans  $\omega$  à l'instant  $t$ .

Le volume élémentaire de  $\omega$  sera  $dV_\omega$  et la portion de volume occupée par le fluide,  $\theta dV_\omega$ .

De là, on en déduit la masse élémentaire de fluide contenue dans  $dV_\omega$

$$dm = \rho\theta dV_\omega$$

Ce qui fait que

$$\mathcal{M}(\omega, t) = \int_\omega dm = \int_\omega \rho\theta(x, t) dV_\omega$$

Si  $\omega$  est un volume fixé, la loi de conservation de la masse nous permet d'affirmer que la variation de la masse dans  $\omega$  par rapport au temps est égale au flux  $\phi$  à travers la surface  $\partial\omega$  plus l'apport extérieur  $\lambda$  ; le flux étant compté positif en sortie.

Ce qui se traduit par l'équation

$$\frac{d}{dt}\mathcal{M}(\omega, t) = -\phi + \lambda.$$

En remplaçant  $\mathcal{M}$  et  $\phi$  par leur valeur et en supposant  $\lambda = 0$ , on obtient

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \rho \theta(x, y, z; t) dV_{\omega} + \int_{\partial\omega} \rho \vec{q} \cdot \vec{n} d\sigma = 0$$

avec

$\vec{q} = \vec{Q}$  sur le bord ;

$\vec{Q}$  = débit de la source extérieure ;

$\vec{q}$  = vitesse de filtration.

$\vec{n}$  = normale extérieure à  $d\sigma$ .  $d\sigma$  = surface élémentaire. La formule de la divergence nous permet d'écrire que

$$\int_{\omega} \frac{\partial \rho \theta}{\partial t} dV_{\omega} + \int_{\omega} \text{div}(\rho \vec{q}) dV_{\omega} = 0 \quad \forall \omega.$$

Ce qui donne ainsi l'équation d'écoulement :

$$\frac{\partial \rho \theta}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{q}) = 0.$$

Sachant que  $\rho = \text{constante}$ , on obtient :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \text{div}(\vec{q}) = 0 \tag{2.1}$$

La quantité  $\vec{q}$  est donnée par la loi de Darcy généralisée par Richard :

$$\vec{q} = -K(\theta) \nabla H(\theta)$$

$K$  étant la conductivité hydraulique,  $H$  la charge hydraulique. On a  $H(\theta) = h(\theta) + z$  où  $h$  désigne le potentiel matriciel et  $z$  la cote.

En rapportant cette expression de  $\vec{q}$  dans (2.1), on obtient :

$$\frac{\partial(\theta)}{\partial t} - \text{div}(K(\theta) \nabla H(\theta)) = 0 \tag{2.2}$$

Dans ce cas puisque le milieu est supposé rigide, on peut garder  $\theta$  comme variable globale.

Le problème qui se pose est la détermination de  $K(\theta)$  et de  $h(\theta)$  qui constituent les caractéristiques hydrodynamiques du sol.

Les expressions de  $K(\theta)$  et de  $h(\theta)$  sont généralement empiriques. Les modèles couramment utilisés sont ceux de **Van Genuchten** établi en 1980, de **Brooks et**

## 8 CHAPITRE 2. MODÈLE DE TRANSFERT EN MILIEU POREUX RIGIDE

**Corey** (1964) et de **Gardner** (1958) revu par **Russo** (1988) (ref[2]).

L'expression du modèle de **Van Genuchten** de  $h(\theta)$  est donnée par l'équation :

$$\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = (1 + (\alpha h)^n)^{-m} \quad (2.3)$$

avec  $\theta_r$  = la teneur en eau résiduelle ;

$\theta_s$  = la teneur en eau à saturation.

Les valeurs  $\alpha, n, m$  étant des paramètres empiriques.

La quantité  $\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r}$  est la saturation effective noté  $S_e$ . Dans certains cas au lieu d'utiliser  $\theta$  comme variable globale, il est préférable de prendre  $S_e$ .

Ainsi,

$$h(S_e) = \frac{1}{\alpha} (S_e^{-\frac{1}{m}} - 1)^{\frac{1}{n}}.$$

La condition de **Mualem** (ref[2]) nous permet de relier  $n$  et  $m$  :  $m = 1 - \frac{1}{n}$  de même que celui de **Burdine** (ref[2]) :  $m = 1 - \frac{2}{n}$ .

**Van Genuchten** fournit aussi l'expression de  $K(\theta)$  suivante :

$$K(\theta) = K_{sat} S_e^L \left[ 1 - (1 - S_e^{\frac{1}{m}})^m \right]^2. \quad (2.4)$$

La valeur  $L$  étant un paramètre empirique souvent égal à 0,5. Ce modèle contient 5 paramètres à déterminer :  $\theta_s, \theta_r, K_{sat}, n, \alpha$ . Cependant, **Brooks et Corey** en 1964 (ref[2]) avaient proposé le modèle suivant à 6 paramètres :

$$S_e = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \frac{h_c^\beta}{h}; \quad (2.5)$$

ce qui est équivalent à :

$$h(\theta) = h_c \left( \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right)^{\frac{-1}{\beta}} \quad (2.6)$$

avec  $\beta$  paramètre empirique et  $h_c$  le potentiel au point d'entrée de l'air.

La conductivité hydraulique est :

$$K(\theta) = K_{sat} S_e^{p+2\beta}. \quad (2.7)$$

Quant à **Gardner**, il estime que

$$K(\theta) = K_{sat} \frac{1}{1 + (Ah)^B} \quad (2.8)$$

avec  $A, B$  paramètre empirique.

En 1988, **Russo** obtient à partir de l'expression de **Gardner** la saturation effective sous la forme :



$$S_e = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = [(exp(-0,5a|h|))(1 + 0,5a|h|)]^{\frac{2}{b+2}}. \quad (2.9)$$

Le paramètre  $b$  est empirique et souvent égal à 0,5.

Dans ce cas, il y a quatre paramètres à déterminer.

Le modèle exponentiel nous donne la conductivité hydraulique sous la forme :

$$k(\theta) = K_{sat}exp(-a|h|) \quad (2.10)$$

avec  $a$  paramètre empirique.

Le modèle le plus utilisé par les physiciens du sol est celui de **Van Genuchten**.

## Transferts de solutés

Soit  $C$  la concentration massique du soluté présent dans  $\Omega$ . Avec l'hypothèse faite sur l'inertie chimique du soluté par rapport au milieu, le nombre de mole total présent dans la solution contenue dans le volume  $\omega$  sera :

$$n = \mathcal{M}C.$$

Sachant que  $dm = \rho\theta dV_\omega$  on a :

$$dn = dmC = \rho\theta C dV_\omega.$$

On obtient ainsi l'expression suivante :

$$n = \int_\omega dn = \int_\omega \rho\theta C dV_\omega.$$

Si on note  $C_v$  la concentration volumique du soluté, on a :

$$C_v dV_\omega = C dm \text{ ce qui implique que } C_v = \rho\theta C.$$

La loi de conservation du nombre de mole nous permet d'affirmer que la variation du nombre de mole par rapport au temps dans  $\omega$  est égale au flux à travers  $\partial\omega$  plus la quantité diffuse et dispersée à travers  $\partial\omega$ , plus l'apport extérieur.

Le flux du soluté à travers la surface de  $\omega$  est donné par

$$\phi = \int_{\partial\omega} C_v \vec{q} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\partial\omega} \rho\theta C \vec{q} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

La quantité diffuse et dispersée à travers  $\partial\omega$  est donnée par la loi de Fick : Si on note  $d\phi_c$  le flux de diffusion-dispersion de soluté à travers  $d\sigma$  alors,

$$d\phi_c = \rho\theta D \nabla C \cdot \vec{n} d\sigma$$

## 10 CHAPITRE 2. MODÈLE DE TRANSFERT EN MILIEU POREUX RIGIDE

avec  $\vec{n}$  la normale extérieure à  $d\sigma$  et  $D$  le tenseur de diffusion-dispersion.

Ainsi

$$\phi_c = \int_{\partial\omega} \rho\theta D\nabla C \cdot \vec{n} d\sigma.$$

En appliquant la loi de conservation du nombre de mole ou on suppose que l'apport extérieur est nul, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \rho\theta C dV_{\omega} = - \int_{\partial\omega} \rho\theta C \vec{q} \cdot \vec{n} d\sigma + \int_{\partial\omega} \rho\theta D\nabla C \cdot \vec{n} d\sigma;$$

ce qui implique que

$$\int_{\omega} \frac{\partial}{\partial t} \rho\theta C dV_{\omega} + \int_{\omega} \text{div}(\rho\theta C \vec{q} - \rho\theta D\nabla C) dV_{\omega} = 0$$

et ceci pour tout  $\omega$ . Ce qui nous donne l'équation de transport de soluté sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\theta C) + \text{div}[\theta C \vec{q} - \theta D\nabla C] = 0.$$

Avec l'équation de Richard :

$$\vec{q} = -K(\theta)\nabla H(\theta)$$

l'équation devient :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\theta C) - \text{div}[\theta C K(\theta)\nabla H(\theta) + \theta D\nabla C] = 0 \quad (2.11)$$

Récapitulation :

Le modèle physique défini plus haut sera donc gouverné par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \text{div}(K(\theta)\nabla H(\theta)) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\theta C) - \text{div}[\theta C K(\theta)\nabla H(\theta) + \theta D\nabla C] = 0 \\ -C.B. \end{cases}$$

En posant  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 =$  surface extérieure du cylindre ;

avec  $\Gamma_1 =$  surface du disque supérieur du cylindre,

$\Gamma_2 =$  surface latérale du cylindre,

$\Gamma_3 =$  surface du disque intérieure

et  $\vec{Q}(x, t)$  étant le débit de la source extérieure, on obtient :

$$\vec{q}(x, t) = \vec{Q}(x, t) \text{ sur } \Gamma_1; \quad (2.12)$$

$$\vec{q}(x, 0) = \vec{0} \forall x \in \Omega. \quad (2.13)$$

On sait que

$$\Theta = \frac{V_{liq}}{V_s} = \frac{V_{liq}}{V_t} \frac{V_t}{V_s} = \theta \frac{V_t}{m_s} \frac{m_s}{V_s} = \theta \frac{\rho_s}{\rho_d}$$

d'où  $\theta = \frac{\Theta \rho_d}{\rho_s}$ .

Le milieu étant supposé rigide, donc  $V_t = cste$  ce qui implique que  $\rho_d = cste$ . La densité de l'eau aussi est une constante, ce qui fait que (2.2) peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\rho_d}{\rho_s} \frac{\partial \Theta}{\partial t} - \text{div} \left( K \left( \frac{\Theta \rho_d}{\rho_s} \right) \nabla H \left( \frac{\Theta \rho_d}{\rho_s} \right) \right) = 0.$$

Posons :  $K_1(\Theta) = \frac{\rho_s}{\rho_d} K \left( \frac{\Theta \rho_d}{\rho_s} \right)$

$H_1(\Theta) = H \left( \frac{\Theta \rho_d}{\rho_s} \right)$  Ainsi, l'équation (2.2) devient :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} - \text{div} (K_1(\Theta) \nabla H_1(\Theta)) = 0.$$

L'équation (2.11) est équivalente à :

$$\frac{\rho_d}{\rho_s} \frac{\partial \Theta C}{\partial t} - \frac{\rho_d}{\rho_s} \text{div} (\Theta C K \left( \frac{\Theta \rho_d}{\rho_s} \right) \nabla H \left( \frac{\Theta \rho_d}{\rho_s} \right) + \Theta D \nabla C) = 0.$$

On pose :

$$K_2(\Theta) = K \left( \frac{\Theta \rho_d}{\rho_s} \right)$$

$H_2(\Theta) = H \left( \frac{\Theta \rho_d}{\rho_s} \right) = H_1(\Theta)$ ; Ce qui fait que (2.11) peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Theta C) - \text{div} (\Theta C K_2(\Theta) \nabla H_2(\Theta) + \Theta D \nabla C) = 0.$$

D'où le problème à résoudre est le problème (P) suivant : Trouver  $\Theta, C$  tel que :

$$(P) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \Theta - \text{div} (K_1(\Theta) \nabla H_1(\Theta)) & = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\Theta C) - \text{div} (\Theta C K_2(\Theta) \nabla H_2(\Theta) + \Theta D \nabla C) & = 0 \\ +C.B.. & \end{cases}$$

## 12 CHAPITRE 2. MODÈLE DE TRANSFERT EN MILIEU POREUX RIGIDE

Explicitons les conditions de bord : à  $t = 0$  puisqu'il n'y a pas d'infiltration, on a :

$$C(x, 0) = C_0(x);$$

$$\Theta(x, 0) = \Theta_r. = \text{le taux d'humidité résiduel.}$$

Sur  $\Gamma_1$  :

$$C(x, t) = C_{ext} \quad \forall t \in [0, T], \Theta(x, t) = \Theta_s \quad \forall t \in [0, T]. \text{ avec } \Theta_s = \text{taux d'humidité à saturation.}$$

On a :

$$C_0(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

$$\Theta_r \leq \Theta \leq \Theta_s.$$

## Chapitre 3

# Modèle de transfert en milieu poreux déformable

On conserve le même modèle physique que dans le chapitre I sauf que dans ce cas on tient compte de la déformation (le sol utilisé est un vertisol).

Pour les sols déformables, les équations qui gouvernent le modèle de transport de soluté dans les milieux supposés rigides ne sont pas très appropriées. Ceci est lié aux effets de la déformation sur les caractéristiques hydrodynamiques du sol.

Ainsi, en plus des propriétés du sol qui sont la conductivité hydraulique, la teneur en eau et le potentiel, on a comme caractéristique additionnelle l'indice de vide qui est représenté par la courbe de retrait du sol ( $e = e(\theta)$ ) ou la densité apparente.

## Element de mécanique des milieux continus

### Point matériel ou particules du squelette et du fluide

Soit  $V$  un volume délimitant un milieu poreux et  $dV$  un volume élémentaire entourant un point  $M$  repéré par sa position  $x$  dans un repère donné.

On appelle particule du squelette la partie matérielle du squelette et l'espace poreux connecté qui coïncide à l'instant considéré avec le point  $M$  repéré par  $x$ .

Une particule fluide est représentée par le fluide se trouvant dans l'espace poreux connecté du même volume élémentaire coïncidant au même instant avec le point  $M$ .

On appelle point matériel une particule fluide ou particule de squelette d'un volume élémentaire entourant  $M$ .

## Continuité du milieu poreux

Le sol vu microscopiquement est un milieu hétérogène où subsistent trois phases : une liquide, une solide et une gazeuse.

Cependant, on supposera que le milieu poreux est continu. Cette hypothèse est possible puisque l'on se placera à une échelle macroscopique pour l'observation des phénomènes et la quantification des grandeurs physiques. Par exemple pour définir la porosité en un point, on définit un volume élémentaire entourant le point et intégrant suffisamment de matières pour être représentatif du phénomène étudié. L'existence de l'échelle est du ressort de la théorie microscopique fondée sur des méthodes d'homogénéisation.

La continuité des transformations affectant le squelette est supposée c'est à dire que deux points matériels du squelette infiniment voisins à un instant donné proviennent de deux points infiniment voisins dans le temps et le restent ultérieurement.

## Description de la transformation du squelette

La déformation observable est en fait celle du squelette sous l'action de l'infiltration.

## Gradient de la transformation

Soit un état de référence  $r$  du milieu poreux où un point matériel du squelette est repéré par sa position  $M$  de coordonnées cartésiennes  $(X_i)_{i=\overline{1,3}}$  dans un repère orthonormé d'origine  $O$  et de vecteurs de base  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ .

On a ainsi :

$$\overrightarrow{OM} = X_1 \vec{e}_1 + X_2 \vec{e}_2 + X_3 \vec{e}_3 \quad (3.1)$$

A un instant ultérieur  $t$  (instant actuel), après déformation, le squelette acquiert une nouvelle configuration dite configuration actuelle.

Le point matériel qui était à la position  $M$  dans l'état de référence se trouve maintenant à l'instant  $t$  à la position  $m$  dans  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ .

Les nouvelles coordonnées cartésiennes du point matériel étant  $(x_i)_{i=\overline{1,3}}$ ; ce qui fait que

$$\overrightarrow{Om} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3. \quad (3.2)$$

Ainsi  $\overrightarrow{Om} = \overrightarrow{Om}(M, t) \quad x_i = x_i(X_1, X_2, X_3; t)$

On définit le gradient de la transformation par

$$F = \text{Grad}(\overrightarrow{Om}) = \left( \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right)_{i=\overline{1,3}, j=\overline{1,3}} = (F_{ij})_{i=\overline{1,3}, j=\overline{1,3}}.$$

NB :Le majuscule des opérateurs “Grad” et “Div” signifie qu’il est relatif à la configuration  $r$ .

On définit l’inverse de  $F$  par  $F^{-1}$  et sa transposée par  ${}^tF$ .

$$(F^{-1})_{ji} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i}$$

$$({}^tF)_{ij} = F_{ji}$$

Le jacobien de la transformation sera  $J = \det(F)$ .

## Formule de transport

Considérons dans la configuration de référence 2 points matériels infiniment voisins repérés par leur position  $M$  et  $M'$ .

On définit le vecteur matériel  $\overrightarrow{dM}$  attaché au squelette par la relation :

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{dM}$$

Le vecteur  $\overrightarrow{dM}$  relie les points matériels repérés par  $M$  et  $M'$  dans la configuration  $r$ .

Posons :  $\overrightarrow{dM} = dX_1 \overrightarrow{e_1} + dX_2 \overrightarrow{e_2} + dX_3 \overrightarrow{e_3}$ .

Dans la configuration actuelle, le vecteur  $\overrightarrow{dM}$  devient  $dm$  reliant les points  $m$  et  $m'$ .

Par définition de  $F$ , on a

$$\overrightarrow{dm} = F \overrightarrow{dM} \text{ avec } \overrightarrow{dm} = (dx_i)_{i=\overline{1,3}}.$$

Soit  $dV$  le volume élémentaire matériel.

$$dV = dX_1 dX_2 dX_3.$$

On peut l’écrire comme produit mixte de trois vecteurs ; ce qui donne :

$$dV = (dX_1 \overrightarrow{e_1}, dX_2 \overrightarrow{e_2}, dX_3 \overrightarrow{e_3}).$$

Après transformation, le vecteur  $dX_1 \overrightarrow{e_1}$  donne  $\overrightarrow{dm}_i$   $i = \overline{1,3}$  avec

$$\overrightarrow{dm}_i = F.(dX_i \overrightarrow{e_i}) = dX_i (F. \overrightarrow{e_i}).$$

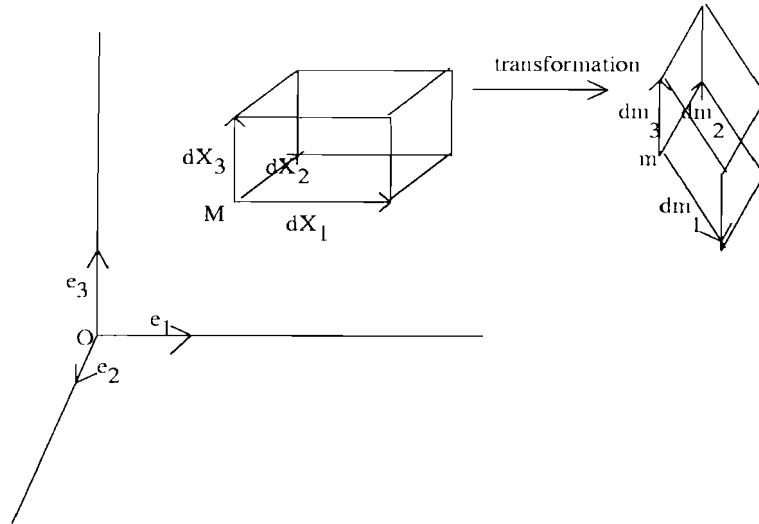


FIG. 3.1 – Volume élémentaire  $dV$

Ainsi  $dV$  se transforme en

$$dV_t = (\overrightarrow{dm_1}, \overrightarrow{dm_2}, \overrightarrow{dm_3})$$

En remplaçant  $dm_i$  par sa valeur, on obtient :

$$\begin{aligned} dV_t &= (dX_1(F \cdot \vec{e}_1), dX_2(F \cdot \vec{e}_2), dX_3(F \cdot \vec{e}_3)) \\ &= (F \cdot \vec{e}_1, F \cdot \vec{e}_2, F \cdot \vec{e}_3) dX_1 dX_2 dX_3 \\ &= JdV \end{aligned}$$

D'où

$$dV_t = JdV.$$

Donc il faut que  $0 < J < +\infty$  car le volume d'un élément de matière n'est jamais nul. Ce qui fait que la transformation  $F$  est inversible.

Soit une facette matérielle de surface infinitésimale  $dA$  orientée vers  $\vec{N}$  (normale unitaire).

$dA \rightarrow da$  avec  $da$  orienté vers  $\vec{n}$  (normale unitaire). on a pas  $\vec{N} \rightarrow \vec{n}$  par la transformation.

On considère le cylindre formé par la surface  $\vec{N} dA$  et le vecteur quelconque  $\vec{U}$ .

Dans la configuration actuelle,  $\vec{N} dA$  donne  $\vec{n} da$  et  $\vec{U}$  donne  $\vec{u} = F\vec{U}$ .

Ce qui fait que le volume

$$\vec{N} \cdot \vec{U} dA \rightarrow \vec{n} \cdot \vec{u} da.$$



D'où

$$\vec{\pi} \cdot \vec{u} da = J \vec{N} \cdot \vec{U} dA.$$

En remplaçant  $\vec{u}$  par sa valeur, on obtient

$$\vec{\pi} F \cdot \vec{U} da = J \vec{N} \cdot \vec{U} dA \quad \forall \vec{U}.$$

Ce qui implique

$$\langle \vec{\pi}; F \vec{U} \rangle da = J \langle \vec{N}; \vec{U} \rangle dA;$$

On obtient ainsi la relation suivante pour tout  $\vec{U}$

$$\langle {}^t F \vec{\pi} da - J \vec{N} dA; \vec{U} \rangle = 0 \quad \forall \vec{U}.$$

d'où

$${}^t F \vec{\pi} da = J \vec{N} dA.$$

Ainsi la surface transformée donne :

$$\vec{\pi} da = J ({}^t F)^{-1} \vec{N} dA.$$

## Tenseur des déformations de Green-Lagrange

Considérons les transformations vectorielles suivantes :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{dM} &\rightarrow \overrightarrow{dm} \\ \overrightarrow{\delta M} &\rightarrow \overrightarrow{\delta m}. \end{aligned}$$

Alors en posant :

$$\overrightarrow{dM} = (dX_i)_{i=1,3}, \quad \overrightarrow{\delta M} = (\delta X_i)_{i=1,3}, \quad \overrightarrow{dm} = (dx_i)_{i=1,3}, \quad \overrightarrow{\delta m} = (\delta x_i)_{i=1,3},$$

on a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{dm} \cdot \overrightarrow{\delta m} - \overrightarrow{dM} \cdot \overrightarrow{\delta M} &= (F \cdot \overrightarrow{dM}) \cdot (F \cdot \overrightarrow{\delta M} - \overrightarrow{dM} \cdot \overrightarrow{\delta M}) \\ &= \overrightarrow{dM} {}^t F F \overrightarrow{\delta M} - \overrightarrow{dM} \cdot \overrightarrow{\delta M} \\ &= \overrightarrow{dM} ({}^t F F - 1) \overrightarrow{\delta M}. \end{aligned}$$

On pose :  $C = {}^t F F$ .

On voit que le tenseur  $C$  dit tenseur de dilatation est symétrique.

Le tenseur de déformation de Green-Lagrange noté  $\Delta$  avec

$$2\Delta = C - 1$$

est aussi symétrique.

Notons par  $\vec{u} = \overrightarrow{Om} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Mm}$  le vecteur déplacement.

Pour  $\vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3$  essayons de déterminer l'expression de  $Grad(\vec{u})$

en fonction de  $F$ .

On voit que  $u_i = x_i - X_i \quad i = \overline{1,3}$

$$\text{Grad} \vec{u} = \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right)_{i,j=\overline{1,3}}$$

$$(\text{Grad} \vec{u})_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} - \frac{\partial X_i}{\partial X_j} = \begin{cases} \frac{\partial x_i}{\partial X_j} & i \neq j \\ \frac{\partial x_i}{\partial X_i} - 1 & i = j \end{cases}$$

Ainsi,

$$(\text{Grad} \vec{u})_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} - \delta_{ij} = F_{ij} - \delta_{ij}.$$

Ce qui fait que

$$\text{Grad} \vec{u} = F - I.$$

On a aussi la relation

$$\begin{aligned} \text{Grad} \vec{u} + {}^t \text{Grad} \vec{u} + {}^t \text{Grad} \vec{u} \text{Grad} \vec{u} &= F - I + {}^t F - I + {}^t (F - I)(F - I) \\ &= F + {}^t F - 2I - {}^t F - F + {}^t FF + I \\ &= C - I \\ &= 2\Delta. \end{aligned}$$

On a ainsi

$$2\Delta_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \frac{\partial u_k}{\partial X_i}.$$

### Transformation infinitésimale, tenseur des déformations linéarisé, tenseur de déformation plane

Les mouvements étudiés sont souvent considérés comme des transformations infinitésimales qui sont définies par

$$\forall \vec{u} \quad \|\text{Grad} \vec{u}\| \ll 1.$$

La norme est celle d'un vecteur appartenant à un espace vectoriel de dimension finie où toutes les normes sont équivalents.

On appelle tenseur des déformations linéarisés la quantité notée  $\varepsilon$  avec

$$2\varepsilon = \text{Grad} \vec{u} + {}^t \text{Grad} \vec{u}$$

Ainsi pour une transformation infinitésimale on a

$$\Delta \simeq \varepsilon.$$

Remarque :

On pourra donc confondre la configuration de référence et la configuration actuelle ; car par hypothèse  $\|Grad\xi\| \ll 1$  entraîne que

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

Preuve de la remarque :

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \sum_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_j}$$

Or,

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} &= \frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial X_k}{\partial X_j} \\ &= \frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \delta_{kj}; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial X_j} &= \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \sum_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \\ &\simeq \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

La dernière égalité est obtenue en négligeant le terme somme qui est un infiniment petit vu l'hypothèse de la transformation infinitésimale.

Toujours sous cette hypothèse, on a

**Proposition 3.0.1**  $J = 1 + \operatorname{div} \vec{u}$  .

preuve :

$$\begin{aligned} J &= \det(F) \\ &= \left( \left( \frac{\partial x_i}{\partial X_1} \right)_{i=\overline{1,3}}; \left( \frac{\partial x_i}{\partial X_2} \right)_{i=\overline{1,3}}; \left( \frac{\partial x_i}{\partial X_3} \right)_{i=\overline{1,3}} \right) \\ &= \left( \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_1} + \delta_{i1} \right)_{i=\overline{1,3}}; \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_2} + \delta_{i2} \right)_{i=\overline{1,3}}; \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_3} + \delta_{i3} \right)_{i=\overline{1,3}} \right) \\ &= \left( \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_1} + \delta_{i1} \right) e_i; \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_2} + \delta_{i2} \right) e_i; \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_3} + \delta_{i3} \right) e_i \right) \\ &= \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + 1 \right) \left( \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + 1 \right) \left( \frac{\partial u_3}{\partial X_3} + 1 \right) + \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + 1 \right) \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ &\quad + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial X_3} + 1 \right) + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ &\quad + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \left( \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + 1 \right) \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \end{aligned}$$

20 CHAPITRE 3. MODÈLE DE TRANSFERT EN MILIEU POREUX DÉFORMABLE

L'hypothèse de la transformation infinitésimale nous permet de négliger les termes :

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_j} \frac{\partial u_k}{\partial X_l}, \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \frac{\partial u_k}{\partial X_l} \frac{\partial u_p}{\partial X_q}.$$

Ainsi on obtient

$$\begin{aligned} J &= \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} + 1 \\ &= 1 + \text{Div } \vec{u} \\ &= 1 + \text{div } \vec{u}. \end{aligned}$$

**Proposition 3.0.2** Soit  $\Omega$  le volume délimitant une quantité de matière poreux à l'état de référence et  $\Omega_t$  le volume occupé à la configuration actuelle. Alors on a

$$\frac{d\Omega_t - d\Omega}{d\Omega} = \text{div } \vec{u} = \text{tr}(\varepsilon) = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ii}.$$

Preuve :

$$\frac{d\Omega_t - d\Omega}{d\Omega} = \frac{Jd\Omega - d\Omega}{d\Omega} = \text{div } \vec{u} = \text{tr}(\varepsilon).$$

Donc, pour une transformation infinitésimale la dilatation volumique est égale à la trace du tenseur des déformations linéarisées.

La dilatation observable du squelette ( $\text{tr}(\varepsilon)$ ) est due d'une part à la variation de volume de l'espace poreux connecté et d'autre part à la dilatation moyenne des éléments matériels constitutifs du squelette. Soient  $\phi_0$  la porosité dans la configuration de référence et  $\phi$  celle dans la configuration actuelle.

La dilatation volumique moyenne de la matrice est donnée par

$$\varepsilon_s = \frac{d\Omega_t^s - d\Omega^s}{d\Omega^s};$$

$d\Omega^s$  étant le volume occupé par la matrice à l'état initial.

On a les égalités suivantes :

$$d\Omega^s = (1 - \phi_0)d\Omega$$

$$d\Omega_t^s = (1 - \phi)d\Omega_t.$$

D'où

$$\varepsilon_s = \frac{(1 - \phi)Jd\Omega - (1 - \phi_0)d\Omega}{(1 - \phi_0)d\Omega}$$

Ce qui implique que

$$(1 - \phi_0)\varepsilon_s = (1 - \phi)tr(\varepsilon) - (\phi - \phi_0).$$

Ce qui est accessible à l'expérience directe est  $tr(\varepsilon)$  et non  $\varepsilon_s$ . La mesure de  $(\phi - \phi_0)$  et de  $\phi_0$  permet de calculer  $\varepsilon_s$ .

## Cinématique de la déformation du squelette

### Description lagrangienne et eulerienne de la cinématique de la déformation

Le gradient de la déformation  $F$  est en fait l'outil principal qui nous permet de décrire la déformation.

La description de la déformation est lagrangienne au sens où les grandeurs dépendent de  $M$  et  $t$  et sont considérées comme attachées à la particule de squelette repérée par son vecteur position  $\overrightarrow{OM}$  dans la configuration de référence.

Dans cette description, la cinématique de la déformation se déduit directement par simple dérivation partielle par rapport au temps des différentes grandeurs.

La variable  $\overrightarrow{OM}$  étant constante, cette dérivation est en fait une dérivée totale.

La description eulerienne quant à elle s'effectue à partir de la donnée dans la configuration actuelle et à chaque instant  $t$  de la vitesse  $\overrightarrow{V}(x_1, x_2, x_3; t)$  de la particule du squelette, coïncidant à l'instant  $t$  avec le point géométrique repéré par sa position  $m$ .

### Tenseur taux de déformation lagrangienne

On le note :  $\frac{d\Delta}{dt}$

On a la relation suivante qui donne la variation temporelle du produit scalaire de deux vecteurs dans la configuration actuelle en fonction de leur position dans la configuration de référence :

$$\frac{d}{dt} \langle \overrightarrow{dm} ; \overrightarrow{\delta m} \rangle = 2\overrightarrow{dM} \cdot \frac{d\Delta}{dt} \cdot \overrightarrow{\delta M}.$$

### Tenseur taux de déformation eulerienne

Cette description est indépendante de toute configuration de référence. La cinématique y est décrite à partir de la donnée de la vitesse  $\overrightarrow{V}(x_1, x_2, x_3; t)$  de la particule du squelette coïncidant avec le point géométrique repéré par sa position  $m$ .

$$\forall t \text{ et } m \quad \frac{d\overrightarrow{Om}}{dt} = \overrightarrow{V}(x_1, x_2, x_3; t).$$

**Proposition 3.0.3** On a les égalités suivantes :

(i)  $Grad(\phi) = {}^t(grad(\phi)).F$   $\phi$  tenseur ;

(ii)  $grad(\vec{V}) = \frac{dF}{dt}.F^{-1}$  ;

(iii)  $\frac{d}{dt}\vec{dm} = grad(\vec{V}).\vec{dm}$  ;

(iV)  $\frac{d}{dt} \langle \vec{dm} ; \vec{\delta m} \rangle = 2\vec{dm}.d.\vec{\delta m}$  avec

$d = \frac{1}{2}(grad(\vec{V}) + {}^t grad(\vec{V})) =$  taux de déformation eulerienne ou tenseur des vitesses de déformation.

(V)  $d = {}^t F^{-1} \cdot \frac{d\Delta}{dt} \cdot F^{-1}$  (formule de transport)

**preuve**

(i) :  $\frac{\partial \phi}{\partial X_i} = \sum_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial X_i}$

D'où

$$\begin{aligned} Grad(\phi) &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \phi}{\partial X_i} e_i \\ &= \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial X_i} \right) e_i \\ &= {}^t(grad\phi).F. \end{aligned}$$

On a ainsi l'égalité permettant de faire le transfert de l'opérateur gradient de la configuration actuelle à celle de référence.

$$grad(\quad) = Grad(\quad).F^{-1}.$$

(ii) :  $grad(\vec{V}).F = Grad(\vec{V}) = Grad\left(\frac{d\vec{Om}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(Grad(\vec{Om})) = \frac{dF}{dt}$  ;

d'où

$$grad(\vec{V}) = \frac{dF}{dt}.F^{-1}$$

(iii) :  $grad(\vec{V}).\vec{dm} = \frac{dF}{dt}.F^{-1}\vec{dm} = \frac{dF}{dt}.d\vec{M} = \frac{d}{dt}(F.d\vec{M}) = \frac{d}{dt}\vec{dm}$ .

(iV) :  $\frac{d}{dt} \langle \vec{dm} ; \vec{\delta m} \rangle = \left\langle \frac{d}{dt}\vec{dm} ; \vec{\delta m} \right\rangle + \left\langle \vec{dm} ; \frac{d}{dt}\vec{\delta m} \right\rangle$

$$\begin{aligned}
 &= \langle \text{grad}(\vec{V}).\vec{d}\vec{m} ; \vec{\delta}\vec{m} \rangle + \langle \vec{d}\vec{m} ; \text{grad}(\vec{V})\vec{\delta}\vec{m} \rangle \\
 &= \langle \vec{d}\vec{m} ; {}^t\text{grad}(\vec{V}).\vec{\delta}\vec{m} \rangle + \langle \vec{d}\vec{m} ; \text{grad}(\vec{V}).\vec{\delta}\vec{m} \rangle \\
 &= \langle \vec{d}\vec{m} ; (\text{grad}(\vec{V}) + {}^t\text{grad}(\vec{V})).\vec{\delta}\vec{m} \rangle \\
 &= 2\vec{d}\vec{m}.d.\vec{\delta}\vec{m}.
 \end{aligned}$$

(V) : Avec les deux relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \langle \vec{d}\vec{m} ; \vec{\delta}\vec{m} \rangle &= 2\vec{d}\vec{M}.\frac{d\Delta}{dt}.\vec{\delta}\vec{M} \\
 \text{et } \frac{d}{dt} \langle \vec{d}\vec{m} ; \vec{\delta}\vec{m} \rangle &= 2\vec{d}\vec{m}.d.\vec{\delta}\vec{m};
 \end{aligned}$$

on en déduit que

$$\vec{d}\vec{M}.\frac{d\Delta}{dt}.\vec{d}\vec{M} = \vec{d}\vec{m}.d.\vec{\delta}\vec{m}.$$

Ce qui equivaut à

$$F^{-1}\vec{d}\vec{m}.\frac{d\Delta}{dt}F^{-1}\vec{\delta}\vec{m} = \vec{d}\vec{m}.d.\vec{\delta}\vec{m};$$

d'où

$$\vec{d}\vec{m}.\frac{d\Delta}{dt}F^{-1}\vec{\delta}\vec{m} = \vec{d}\vec{m}.d.\vec{\delta}\vec{m} \text{ pour tout vecteur } \vec{d}\vec{m} \text{ et } \vec{\delta}\vec{m}.$$

Et on obtient ainsi l'équation de transport

$${}^tF^{-1}\frac{d\Delta}{dt}F^{-1} = d.$$

## Modélisation

On considère le même modèle physique que dans le chapitre I sauf que dans ce cas on tient compte de la déformation : le sol utilisé est un vertisol.

Les équations du problème (P), définies dans le système d'Euler bien que applicables pour les milieux déformables ne sont pas cependant très appropriées.

Cela provient de la nécessité de prendre en compte les effets de la déformation sur la dépendance spatio-temporelle de  $K(\theta)$  et de  $h(\theta)$ .

D'autre part, les conditions aux limites sont plus faciles à exprimer sur des surfaces fixes par rapport à la phase solide (ref [2]).

Ainsi l'utilisation d'un référentiel de Lagrange (référentiel matériel) attaché à la phase solide est préféré.

## Équation d'écoulement

Truesdell et Toupin établissent en 1960 le résultat suivant : Soit  $\Omega$  un milieu supposé continu où on est en présence de  $n$  phase. Si  $\phi$  est tenseur, sa dérivée

particulaire par rapport à la phase  $\alpha$  sera

$$\frac{D\phi}{D^\alpha t} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{v}^\alpha \cdot \nabla\phi$$

avec  $\vec{v}^\alpha$  étant la vitesse de la phase  $\alpha$ .

Si on note  $\rho^\alpha$  la masse volumique apparente de la phase  $\alpha$ , l'équation de conservation de la masse donne :

$$\frac{\partial\rho^\alpha}{\partial t} + \text{div}(\rho^\alpha \vec{v}^\alpha) = f_\alpha. \quad (3.3)$$

Ce qui équivaut à

$$\frac{D\rho^\alpha}{D^\alpha t} + \rho^\alpha \text{div}(\vec{v}^\alpha) = f_\alpha$$

Soit  $F$  une phase de  $\Omega$ ; sa masse volumique apparente sera  $\rho^F$  et la dérivée particulaire par rapport à la phase solide de  $\rho^F$  sera

$$\frac{D\rho^F}{D^s t} = \frac{\partial\rho^F}{\partial t} + \vec{v}^s \cdot \nabla\rho^F.$$

En remplaçant dans (3.3) l'expression de  $\frac{\partial\rho^\alpha}{\partial t}$ , on aura

$$\frac{D\rho^F}{D^s t} - \vec{v}^s \cdot \nabla\rho^F + \text{div}(\rho^F \vec{v}^F) = f_F.$$

Ce qui implique que

$$\frac{D\rho^F}{D^s t} + \rho^F \nabla \cdot \vec{v}^s + \text{div}(\rho^F (\vec{v}^F - \vec{v}^s)) = f_F.$$

Or la divergence de  $\vec{v}^s$  est donnée par l'équation de conservation de la masse (on suppose qu'il n'y a pas d'apport de matière solide extérieure; ce qui se traduit par  $f_s = 0$ ) :

$$\text{div}(\vec{v}^s) = -\frac{1}{\rho_d} \frac{D\rho_d}{D^s t}.$$

On obtient ainsi en utilisant aussi le (i) de la proposition (3.0.3)

$$\frac{D\rho^F}{D^s t} - \frac{\rho^F}{\rho_d} \frac{D\rho_d}{D^s t} + \text{div}_s(\{\rho^F (\vec{v}^F - \vec{v}^s)\} : F^{-1}) = f_F;$$

ce qui équivaut à

$$\rho_d \frac{D(\frac{\rho^F}{\rho_d})}{D^s t} + \text{div}_s(\{\rho^F (\vec{v}^F - \vec{v}^s)\} : F^{-1}) = f_F.$$



En posant  $\vec{v}_{F/s}$  la vitesse relative de  $F$  par rapport à  $s$ , l'équation ci-dessus devient

$$\rho_d \frac{D(\rho^F)}{D^s t} + \text{div}_s(\{\rho^F(\vec{v}_{F/s}) : F^{-1}\}) = f_F. \quad (3.4)$$

Dans notre modèle physique, on a  $\rho^F = \rho\theta$   
 $\theta \vec{v}_{F/s} = \vec{q}_s$  qui est la vitesse de filtration du fluide par rapport à la phase solide donnée par la loi de Darcy généralisée :

$$\vec{q}_s = -K_{/s}(\theta) \nabla H(\theta)$$

l'équation d'écoulement sera de la forme

$$\rho_d \frac{D(\rho\theta)}{D^s t} + \text{div}_s([- \rho K_{/s}(\theta) \nabla_s H_{/s}(\theta) \cdot F^{-1} ] \cdot F^{-1}) = f_1.$$

$$\text{Or } \Theta = \theta \frac{\rho_s}{\rho_d}$$

$$e = \frac{\rho_s}{\rho_d} - 1 \text{ et } \rho = 1$$

L'équation d'écoulement devient

$$\frac{1}{1+e} \frac{D\Theta}{D^s t} - \text{div}([K_{/s}(\Theta) \nabla_s (H_{/s}) \cdot F^{-1}] \cdot F^{-1}) = f_1 \quad (3.5)$$

avec

$$H_{/s} = h - z + \Omega_p;$$

$h$  = potentiel matriciel donné par Van Genuchten ;

$z$  = potentiel gravitationnel ;

$\Omega_p$  = potentiel de surcharge donné en coordonnée matérielle ;

$K_{/s}(\Theta)$  = conductivité hydraulique relative à la phase solide donnée par Van Genuchten ;

$e = e(\Theta)$  donné par E. Braudeau.

## Équation de transport de soluté

On avait établi dans le cas rigide que

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\theta C) - \text{div}[\rho\theta C K(\theta) \nabla H(\theta) + \rho\theta D \nabla C] = f_C.$$

Dans ce cas, on a

$$\rho^F = \text{densité du nombre de mole} = \rho\theta C$$

On obtient d'après (3.4)

$$\frac{1}{1+e} \frac{D}{D^s t} (\Theta C) - \operatorname{div}_s [CK_{/s}(\Theta) \nabla_s h_{/s}(\Theta) \cdot F^{-1} + \left( \frac{\rho_d \Theta}{\rho_s} D \nabla_s C \cdot F^{-1} \right) \cdot F^{-1}] = f_2$$

Notre problème peut être formulé de la manière suivante :

Trouver  $\theta$  et  $C$  vérifiant :

$$(Pb) \begin{cases} \frac{1}{1+e} \frac{D\Theta}{D^s t} - \operatorname{div} ([K_{/s}(\Theta) \nabla_s (H_{/s}) \cdot F^{-1}] \cdot F^{-1}) & = f_1 \\ \frac{1}{1+e} \frac{D}{D^s t} (\Theta C) - \operatorname{div}_s \left( CK_{/s}(\Theta) \nabla_s h_{/s}(\Theta) \cdot F^{-1} + \frac{\rho_d \Theta}{\rho_s} D \nabla_s C \cdot F^{-1} \cdot F^{-1} \right) & = f_2 \\ + C.B. & \end{cases}$$

Pour une déformation et un écoulement monodirectionnels Baveye établit en 1992 l'expression de  $F$  :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho_r}{\rho_d} \end{pmatrix}$$

$\rho_r$  étant la masse volumique du sol à l'état de référence.

En général  $\rho_r = \rho_{d_0}$  = la masse volumique initiale sèche du sol.

## Modèle de retrait de vertisol

Cette caractéristique hydrodynamique du sol est matérialisée par l'indice de vide en fonction du taux d'humidité. Le modèle le plus complet est celui de **Braudeau** (ref[2]). Il utilise dans son expression mathématique 8 paramètres. Ceci est lié au fait que la courbe de retrait présente quatre points critiques qui sont SL, AE, LM, MS chacun possédant deux coordonnées.

SL représente la limite de retrait, AE est le point d'entrée de l'air dans les micro-aggrégats, LM est la limite de contribution de la macro-porosité au retrait du sol et en MS le sol atteint son maximum de gonflement.

La courbe de retrait présente trois parties : il y a d'abord la phase de retrait résiduel où la courbe présente une pente nulle puis une partie curviligne (du début à AE), ensuite la phase de retrait principale de AE à LM (la courbe est linéaire dans cette partie) et enfin la phase de retrait structural qui va de LM à la saturation du sol (la courbe y est curviligne puis linéaire).

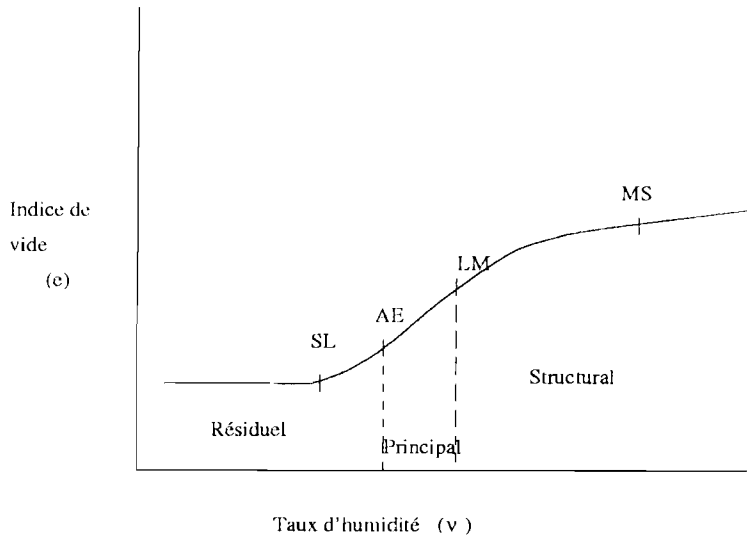


FIG. 3.2 · Courbe de retrait  $e(v)$  : Modèle de Braudeau (1988).

Phase de déformation	Equation du modèle de Braudeau
Avant SL	$e = e_{SL}$
Phase SL-AE	$e = e_{SL} + K_r \left[ \frac{\Theta_{AE} - \Theta_{SL}}{\exp(1) - 1} (\exp(V_n) - 1 - V_n) \right]$ $V_n = \frac{\Theta - \Theta_{SL}}{\Theta_{AE} - \Theta_{SL}}$
Phase AE-LM	$e = K_r(\Theta - \Theta_{AE}) + e_{AE}$
Phase LM-MS	$e = e_{LM} + \frac{\Theta_{LM} - \Theta_{MS}}{\exp(1) - 1} [(K_r - K_0)(\exp(V_m) - \exp(1)) - V_p(K_r - K_0 \exp(1))]$ $V_m = \frac{\Theta - \Theta_{MS}}{\Theta_{LM} - \Theta_{MS}} \quad V_p = \frac{\Theta - \Theta_{LM}}{\Theta_{LM} - \Theta_{MS}}$
Après MS	$e = K_0(\Theta - \Theta_{MS}) + e_{MS}$

Expression mathématique du retrait d'un échantillon de sol selon Braudeau

### Écoulement monodirectionnel et déformation tridimensionnelle anisotrope

Hypothèse :

Nous supposons une déformation tridimensionnelle du sol telle que la déformation soit isotrope dans la direction orthogonale à l'axe vertical  $z$  : c'est une déformation tridimensionnelle avec symétrie axiale.

28 CHAPITRE 3. MODÈLE DE TRANSFERT EN MILIEU POREUX DÉFORMABLE

$$dV = dXdYdZ \longrightarrow dv = dxdydz$$

Soit :

$e$  l'indice des vides associé à  $dv$ ,  
 $e_r$  l'indice des vides associé à  $dV$ .

Si l'on considère que la déformation se fait sans variation de masse sèche, on a :

$$e = \frac{dv_v}{dV_s}$$

$$e_r = \frac{dV_v}{dV_s}$$

d'où

$$1 + e = \frac{dv_v + dV_s}{dV_s} = \frac{dv}{dV_s}$$

$$1 + e_r = \frac{dV_v + dV_s}{dV_s} = \frac{dV}{dV_s};$$

ce qui nous permet d'écrire la relation entre  $dV$  et  $dv$  :

$$dV = \frac{1 + e_r}{1 + e} dv$$

Le changement de volume décrit dans cette équation peut être associé à un changement de volume dans trois directions principales  $x, y, z$  en utilisant le facteur de Bronswijk (ref[2]) défini par exemple par la direction  $z$  par :

$$1 - \frac{dV - dv}{dV} = \left(1 - \frac{dZ - dz}{dZ}\right)^{r_s}$$

Si la déformation se fait uniquement suivant la verticale,  $r_s = 1$  ;

si la déformation est isotrope alors  $r_s = 3$  ;

si la déformation verticale est prédominante alors  $1 < r_s < 3$ , sinon  $r_s > 3$ .

Posons  $\lambda = \frac{1 + e_r}{1 + e}$

alors on a

$$1 - \frac{dV - dv}{dV} = 1 - \frac{\lambda dv - dv}{\lambda - 1}$$

$$= 1 - \frac{1}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{\lambda}$$

d'où

$$\left(1 - \frac{dZ - dz}{dZ}\right)^{r_s} = \frac{1}{\lambda};$$

ce qui équivaut à

$$dz = dZ \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{r_s}};$$

d'où

$$dz = dZ \left(\frac{1 + e}{1 + e_r}\right)^{\frac{1}{r_s}}.$$

De l'égalité

$$1 - \frac{dV - dv}{dV} = \frac{1}{\lambda}$$

on tire :

$$\frac{dv}{dV} = \frac{1}{\lambda};$$

ce qui équivaut à

$$\left(\frac{dx dy dz}{dX dY dz \lambda}\right)^{\frac{1}{r_s}} = \frac{1}{\lambda};$$

ainsi on obtient l'égalité

$$dx dy = dX dY \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{1 - \frac{1}{r_s}}.$$

Avec l'hypothèse faite sur l'anisotropie, on a ainsi les formules de changement de

$$\text{coordonnées spatiales : } \begin{cases} dx = dX \left(\frac{1 + e}{1 + e_r}\right)^{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{r_s})} \\ dy = dY \left(\frac{1 + e}{1 + e_r}\right)^{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{r_s})} \\ dz = dZ \left(\frac{1 + e}{1 + e_r}\right)^{\frac{1}{r_s}} \end{cases}.$$

Ce qui fait que le tenseur gradient de transformation  $F$  devient :

$$F = \begin{pmatrix} \left(\frac{1 + e}{1 + e_r}\right)^{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{r_s})} & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1 + e}{1 + e_r}\right)^{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{r_s})} & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1 + e}{1 + e_r}\right)^{\frac{1}{r_s}} \end{pmatrix}.$$

L'état de référence peut être choisi en fonction des données expérimentales disponibles. Par exemple, il peut être choisi comme l'état initial du sol ou la limite de retrait.

# Bibliographie

- [1] Crolet J.M. *Computational method in porous media; Journée Numerique de Besançon 1994*
- [2] Garnier P *Détermination des caractéristiques hydrodynamiques des sols déformables par la méthode inverse; Thèse 1996; ORSTOM*
- [3] Coussy O. *Mécanique des milieux poreux*;Edition Technip;1991
- [4] Kane S. *Modèle de diffusion de polluants dans les milieux poreux; Mémoire de D.E.A. Analyse Numérique;UGBS,Saint-Louis,Sénégal;Janv 1998.*