

MODELISATION DE L'INFILTRATION DANS LES SOLS NON SATURES

Jaoudat TOUMA,

I RÉSUMÉ

On présente un modèle pour simuler l'infiltration verticale isotherme de l'eau pure dans un sol non saturé. La loi mathématique qui décrit le phénomène est une équation différentielle aux dérivées partielles qui exprime la variation de la pression de l'eau du sol dans le temps et dans l'espace.

L'équation de l'écoulement est intégrée numériquement par la méthode des différences finies. Sa résolution nécessite la connaissance d'une condition initiale et de deux conditions aux limites. En outre, elle suppose connues deux propriétés du sol : la relation entre la pression de l'eau du sol et son humidité, et celle entre l'humidité et la conductivité hydraulique du sol.

Lorsque la connaissance de ces deux relations est approximative, le modèle peut être utilisé pour les affiner : on ajuste les paramètres de ces relations jusqu'à obtenir un accord satisfaisant entre l'expérience et le calcul. Lorsque ces relations sont connues avec une précision acceptable, le modèle peut être utilisé en prévision : quelle sera la cinétique du phénomène pour un état initial d'humidité différent et/ou pour d'autres conditions aux limites.

II INTRODUCTION

Il est évident que la simulation numérique d'un processus quelconque en général, et physique en particulier, n'est pas une fin en soi. Elle représente plutôt un moyen rapide, économique et efficace pour l'étude dudit processus, dès lors que les lois qui décrivent son évolution sont connues.

Lorsqu'on étudie les écoulements dans les sols non saturés, la complexité des phénomènes et/ou la limitation des senseurs de mesure, notamment sur le terrain, sont telles qu'il est nécessaire d'admettre certaines hypothèses simplificatrices afin que la description mathématique des phénomènes physiques et/ou l'interprétation des observations expérimentales soient possibles.

Le modèle présenté ici est fondé sur la physique des transferts dans les sols non saturés. Etant destiné à des fins de prévision (à l'échelle ponctuelle au sens des mesures de terrain), après une validation préalable par comparaison à des observations expérimentales, il était nécessaire d'adopter dans le modèle les hypothèses communément admises dans la pratique et qui délimitent ainsi ses domaines de validité et d'application. Celles-ci sont les suivantes :

- l'écoulement est isotherme vertical, induit uniquement par le champ de la charge hydraulique (pression et gravité),
- lorsque le sol est stratifié, chaque couche est considérée homogène, isotrope et indéformable. Dans chacune d'elles, la relation qui lie la teneur en eau volumique q à la pression de l'eau du sol h ($h(q)$), et celle qui lie la teneur en eau volumique à la conductivité hydraulique du sol K ($K(q)$) sont connues et uniques. En outre, les éventuelles réactions entre l'eau et le sol ne sont pas prises en compte,
- l'air du sol est en tout point et à chaque instant à la pression atmosphérique et l'eau est considérée pure et incompressible.

III EQUATION DE L'ÉCOULEMENT

Elle est obtenue en combinant l'équation dynamique, qui est la loi de Darcy écrite dans le cas non saturé, avec la loi de conservation de la masse. Théoriquement, la loi de Darcy dans le cas saturé peut être déduite des équations générales de Navier-Stokes de l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible moyennant deux approximations : forces d'inertie négligeables devant les forces visqueuses et vitesse d'écoulement très faible.

En tout point, la loi de Darcy s'écrit dans le cas général:

$$\vec{q} = - K \cdot \text{grad } H \quad (1)$$

où \vec{q} est la densité de flux volumique au point considéré ($L \cdot T^{-1}$); K est la conductivité hydraulique du sol au point considéré ($L \cdot T^{-1}$) qui est un tenseur du second ordre dans le cas général et qui se ramène à un scalaire lorsque le sol est isotrope; $H = h - z$ (L) est la charge hydraulique au point considéré, h étant la pression de l'eau mesurée relativement à la pression atmosphérique et exprimée en hauteur de colonne d'eau et z la cote du point considéré mesurée positivement vers le bas avec l'origine prise à la surface du sol; grad est l'opérateur gradient.

En l'absence de source ou puits, la loi de conservation de la masse s'écrit en tout point dans le cas général :

$$\frac{\partial(\rho \cdot q)}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \vec{q}) = 0 \quad (2)$$

où ρ est la masse volumique de l'eau ($M \cdot L^{-3}$), q est la teneur en eau volumique ($L^3 \cdot L^{-3}$) au point considéré (volume d'eau par unité de volume du sol), t est le temps (T) et div l'opérateur divergence. La combinaison des deux équations donne :

$$\frac{\partial(\rho \cdot q)}{\partial t} - \text{div}(\rho \cdot K \cdot \text{grad } H) = 0 \quad (3)$$

Pour un écoulement vertical d'eau incompressible cette équation devient:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K \left[\frac{\partial h}{\partial z} - 1 \right] \right] \quad (4)$$

Elle contient deux variables dépendantes q et h . La relation $q(h)$ étant supposée connue et unique permet d'écrire :

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{dq}{dh} \frac{\partial h}{\partial t} = C(h) \frac{\partial h}{\partial t} \quad (5)$$

où $C(h) = \frac{dq}{dh}$ est la capacité capillaire (L^{-1}). L'équation de l'écoulement devient finalement :

$$C(h) \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K \left[\frac{\partial h}{\partial z} - 1 \right] \right] \quad (6)$$

Elle suppose que la variable dépendante soit continue et dérivable, ce qui est physiquement le cas quelle que soit la configuration du profil (stratifié ou non). De plus, elle décrit l'écoulement aussi bien dans une zone non saturée que dans une zone saturée. En effet, dans ce dernier cas et dans le cadre de nos hypothèses, la teneur en eau et la conductivité hydraulique deviennent constantes, ce qui implique $C(h)=0$, et (6) se ramène à un Laplacien nul.

Il serait possible d'écrire l'équation de l'écoulement avec q comme variable dépendante en développant le second membre de (4) :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[K \left[\frac{\partial h}{\partial z} - 1 \right] \right] = \frac{\partial}{\partial z} \left[K \frac{dh}{dq} \frac{\partial q}{\partial z} \right] - \frac{\partial K}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[D \frac{\partial q}{\partial z} \right] - \frac{\partial K}{\partial z} \quad (7)$$

où $D = K \frac{dh}{dq} = \frac{K}{C}$ est la diffusivité capillaire ($L^2.T^{-1}$). Dans ce cas (4) devient :

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[D \frac{\partial q}{\partial z} \right] - \frac{\partial K}{\partial z} \quad (8)$$

Il apparaît clairement que cette équation ne peut pas décrire l'écoulement dans une zone saturée. En effet, la teneur en eau constante dans ce cas implique $\frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial q}{\partial h} = 0$. De plus, $D = \frac{K}{C}$ et $C=0$, (8) devient donc indéterminée et il est impossible d'en obtenir la solution. De même, elle est inapte à décrire l'écoulement dans un sol stratifié puisque la variable dépendante peut exhiber des discontinuités dans de tels sols, notamment au voisinage des interfaces de séparation entre les différentes couches. Pour ces raisons, seule l'équation (6) est considérée dans le modèle. Celle-ci étant du premier ordre en fonction du temps et du second ordre en fonction de l'espace, sa résolution nécessite la connaissance d'une condition initiale (à $t=0$) et de deux conditions aux frontières : charge (variable dépendante) ou flux (dérivée de la variable dépendante) connus en fonction du temps à chacune des deux frontières. L'exploitation du modèle suppose connues ces conditions.

IV. RÉOLUTION NUMÉRIQUE

Le domaine physique de l'écoulement est l'axe vertical dont on connaît les relations $q(h)$ et $K(q)$, la valeur de la pression en chaque point à l'instant $t=0$ ainsi que les conditions qui règnent à la surface du sol ($z=0$) et à une certaine profondeur ($z=P$) en fonction du temps. Numérique-

ment il est remplacé par N points discrets numérotés $i=1,2,\dots,N$. Connaissant la valeur de la pression en chaque point à l'instant $t=k.Dt$ ($k=0,1,2,\dots$), le problème se ramène à chercher cette valeur à l'instant $t=(k+1).Dt$ avec les conditions données aux points $i=1$ et $i=N$. La méthode de résolution est celle des différences finies. Elle consiste à remplacer les dérivées partielles figurant dans l'équation (6) par leurs expressions en différences finies obtenues par développements limités en série de Taylor. Désignant par i l'indice de l'espace et par k celui du temps, l'équation (6) est discrétisée avec les considérations suivantes :

- la dérivée temporelle est exprimée en "différence avant" dont l'erreur est de l'ordre du pas de temps Dt ;
- les dérivées spatiales sont exprimées en "différences centrées" dont l'erreur est de l'ordre de Dz^2 , Dz étant le pas de l'espace (considéré constant);
- la quantité $K\left(\frac{\partial h}{\partial z} - 1\right)$ est évaluée au centre du pas d'espace Dz qui sépare deux points de calcul successifs;
- les quantités K et C sont considérées constantes pendant le pas de temps entre t et $t+Dt$, leurs valeurs correspondent à celles de l'instant t (linéarisation explicite);
- les pressions dans les dérivées spatiales sont exprimées au temps $t+Dt$ et sont donc inconnues (résolution implicite). Avec ces considérations l'équation (6) devient :

$$C_i^k \frac{h_i^{k+1} - h_i^k}{Dt} = \frac{1}{Dz} \left[K_{i+\frac{1}{2}}^k \left[\frac{h_{i+1}^{k+1} - h_i^{k+1}}{Dz} - 1 \right] - K_{i-\frac{1}{2}}^k \left[\frac{h_i^{k+1} - h_{i-1}^{k+1}}{Dz} - 1 \right] \right] \quad (9)$$

Cette écriture ne saurait être justifiée que si les pas de temps et de l'espace sont suffisamment petits pour que les variations de la pression entre deux points adjacents à un instant donné et entre deux instants successifs en un même point puissent être considérées comme linéaires.

En regroupant les termes de l'équation (9) on obtient :

$$A_i^k \cdot h_{i-1}^{k+1} + B_i^k \cdot h_i^{k+1} + D_i^k \cdot h_{i+1}^{k+1} = E_i^k \quad (10)$$

Les coefficients $A_i^k, B_i^k, D_i^k, E_i^k$ sont connus puisqu'ils ne dépendent que des valeurs connues h_i^k . L'application de l'équation (10) aux diffé-

rents points $i=1,2,\dots,N$ en tenant compte des conditions aux frontières $i=1$ et $i=N$, résulte en un système linéaire tridiagonal de N (ou $N-1$ ou $N-2$) équations à N (ou $N-1$ ou $N-2$) inconnues, suivant que les conditions aux frontières soient des flux connus (ou charge connue à l'une ou aux deux frontières respectivement) en fonction du temps. La résolution de ce système fournit la distribution de la pression au nouveau pas de temps h_i^{k+1} . Vue la structure tridiagonale du système résultant, sa résolution par la méthode d'élimination directe est très performante. Elle consiste à remplacer la matrice des coefficients par un produit de deux matrices triangulaires, l'une inférieure (L), et l'autre supérieure (U), dont les éléments sont déterminés par identification. On a donc :

$$(L).(U).(h) = (E)$$

et

$$(U).(h) = (Y)$$

On détermine donc les éléments du vecteur (Y) par résolution "avant" du système $(L).(Y)=(E)$, puis le vecteur des inconnues (h) par résolution "arrière" du système $(U).(h)=(Y)$.

Lors de la discrétisation de l'équation (6) il aurait été possible d'exprimer les pressions dans les dérivées spatiales au temps t et non $t+Dt$. De cette façon on aurait en chaque point une seule inconnue h_i^{k+1} donnée par :

$$h_i^{k+1} = h_i^k + \frac{Dt}{Dz} \frac{1}{C_i^k} \left[K_{i+1}^k \left[\frac{h_{i+1}^k - h_i^k}{Dz} - 1 \right] - K_{i-1}^k \left[\frac{h_i^k - h_{i-1}^k}{Dz} - 1 \right] \right]$$

Bien que cette écriture soit plus simple que celle présentée plus haut, puisqu'elle ne nécessite pas la résolution d'un système linéaire à chaque pas de temps, elle ne peut pas s'appliquer à une zone saturée puisqu'elle nécessite la division par la capacité capillaire qui s'annule dans ce cas.

V. APPLICATIONS DU MODELE

L'exploitation du modèle suppose connues les relations $q(h)$ et $K(q)$ de chaque couche du profil. Pratiquement, elles sont déterminées à partir du suivi de la cinétique de redistribution de l'humidité et des pressions dans le profil de sol préalablement humidifié par apport d'eau à la surface. Les mesures effectuées sont la teneur en eau et la charge hydraulique à des cotes fixes (et donc la pression de l'eau) en fonction du

temps. Cependant, la limitation des moyens de mesure, et surtout les erreurs inhérentes à l'exploitation des mesures, sont telles que la connaissance de ces relations est souvent très approximative. Même lorsqu'elles sont connues avec une précision satisfaisante, leur seule connaissance ne permet pas de prédire le comportement du sol dans une situation différente, et c'est justement l'avantage de la modélisation que de permettre cette prédiction.

Le modèle peut donc être utilisé dans un premier temps comme un complément de l'étude expérimentale afin d'améliorer la connaissance des relations caractéristiques du sol. Pour cela, on peut simuler l'essai qui a servi à déterminer les relations $q(h)$ et $K(q)$. Les paramètres de ces relations seront affinés jusqu'à obtention d'un accord satisfaisant entre l'observation et le calcul. Par la suite, le modèle peut être utilisé en prévision. Parmi les utilisations possibles, on peut citer :

- Quel sera le comportement du sol pour d'autres conditions de l'expérience?
- Etant donné un épisode pluvieux, y aura-t-il ruissellement, et le cas échéant, quand commencera-t-il et quelle sera la lame ruisselée?
- Dans un périmètre irrigué, quelle sera la profondeur humidifiée suite à un apport donné en eaux d'irrigation?

On conçoit aisément les implications pratiques des informations ainsi tirées puisqu'elles servent à la gestion des ressources en eau.

Comme illustration de l'utilisation du modèle nous l'avons utilisé pour prédire le ruissellement conséquent à un épisode pluvieux sur un site de la région de Bambey (Sénégal).

Les relations $q(h)$ et $K(q)$ du sol, déterminées expérimentalement, sont montrées figure 1.

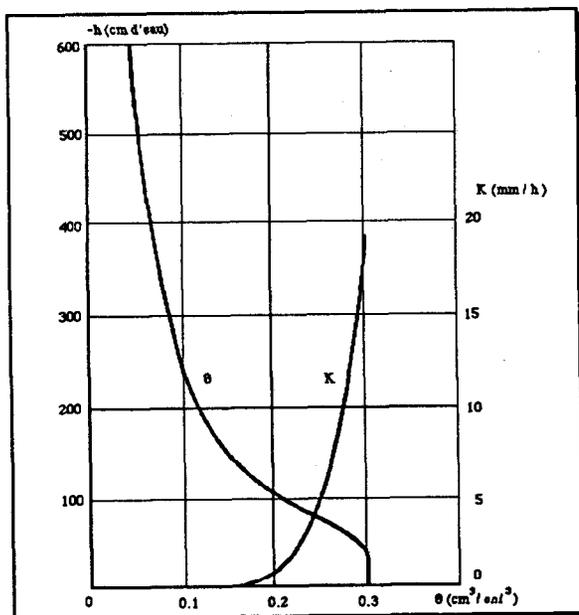
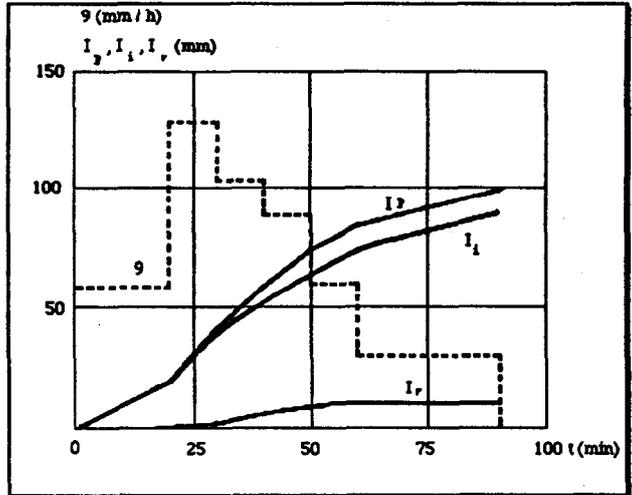


Figure 1

Le sol est relativement sec avant la pluie (humidité initiale uniforme de $0.05 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$).

La figure 2 montre le hyétogramme de l'épisode pluvieux (courbe q en pointillé), représentatif de la pluie décennale dans la région, ainsi que les lames précipitée I_p , infiltrée I_i et ruisselée I_f .

Figure 2



Cette information tirée en quelques minutes par voie numérique nécessiterait quelques jours par voie expérimentale.