

Point de vue matriciel sur un opérateur linéaire de transformation pluies-débits

par Marcel ROCHE *

Description physique du phénomène

Bien que le cycle hydrologique fractionnel qui correspond à la transformation des pluies en débits à l'intérieur d'un bassin ait été maintes fois décrit et commenté, il ne nous semble pas inutile d'en rappeler ici les grandes lignes.

Une certaine quantité d'eau, que nous symboliserons par P, tombe sur un bassin versant sous forme de précipitation. On désignera provisoirement par surface du sol le complexe formé par le sol lui-même, la végétation et les différents accidents naturels ou non qui le recouvrent partiellement. Une partie de cette eau est évaporée presque immédiatement ou retenue par le couvert végétal et les cavités imperméables du sol en vue d'une évaporation différée. C'est une perte définitive pour le réseau de drainage aussi bien que pour les nappes.

Ce qui reste de la pluie, c'est-à-dire généralement la plus grande partie, a le choix entre deux itinéraires : elle va soit couler directement à la surface du sol (ruissellement), soit être absorbée par le sol (humectation et infiltration). Le premier de ces termes peut du reste comprendre plusieurs composantes suivant le mode de ruissellement ; quant au second, il est le plus souvent considéré dans son ensemble sous le vocable général « infiltration ».

Cette « infiltration » fait appel à des notions complexes qui ne sont pas ici dans notre propos ; elle se traduit par un transfert d'eau à travers un milieu poreux contenant, en même temps que l'eau liquide, de l'air et de la vapeur d'eau, jusqu'à la nappe, c'est-à-dire la partie complètement saturée de ce milieu poreux où ne subsiste que la phase liquide.

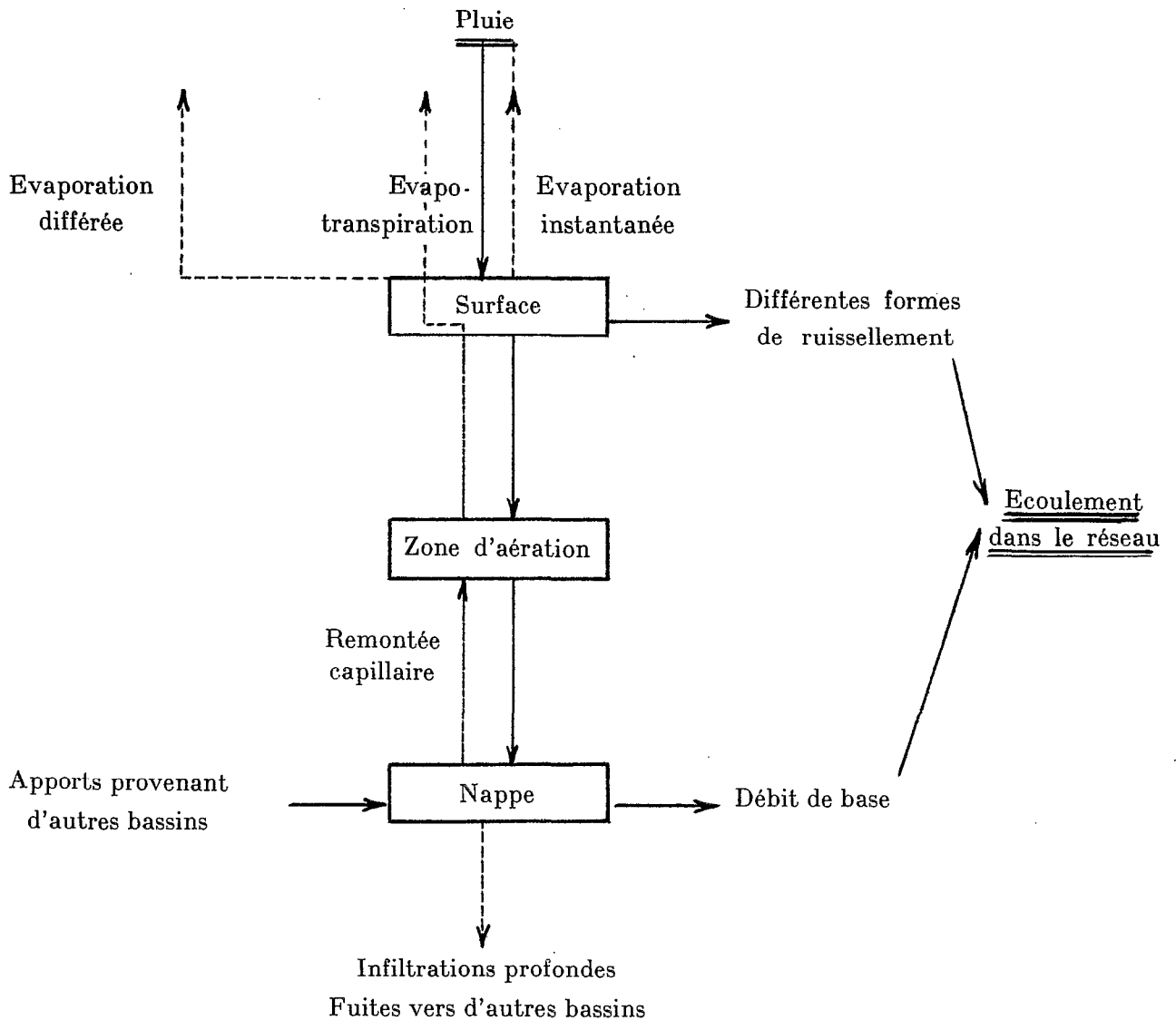
De la nappe, une partie de l'eau retourne dans la zone aérée par remontée capillaire, puis, par une série de transformations, est restituée partiellement à l'atmosphère sous forme d'évaporation du sol et de transpiration des végétaux. Le reste chemine suivant le mouvement de la nappe et peut ressortir dans le réseau de drainage, constituant ce qu'on appelle le débit de base ou débit souterrain. Le débit de base d'une rivière est en fait le débit que

*Ingénieur à l'Electricité de France.

Chargé de la direction des études au Bureau Central d'Hydrologie de l'ORSTOM.
Maître de Conférences à l'Ecole Nationale du Génie Rural.

l'on observe lorsque tout ruissellement a cessé. Il faudrait aussi faire état des apports qui peuvent parvenir à la nappe en provenance d'autres bassins et des apports provenant de la nappe à d'autres bassins ; ces termes ne prennent une certaine importance qu'en des cas bien particuliers.

L'ensemble du ruissellement et du débit de base forme le débit total de la rivière. Le schéma de la figure 1 résume ce qui précède.



Schématisation paramétrique

Le schéma de la figure 1 constitue un modèle physique du bassin, modèle du reste assez mal défini. Le passage à un modèle mathématique suppose que l'on peut définir, pour chacune des transformations mécaniques et physiques, un opérateur de passage. Toutefois, le modèle peut être simplifié si l'on ne s'intéresse qu'à un aspect du problème, par exemple si on laisse de côté, comme un sous-produit, la variation du stock souterrain. L'ensemble de la transformation s'appuie alors sur un opérateur unique dont le rôle est de faire passer d'une fonction $P(t)$, représentant la variation de la pluie dans le temps, à une fonction $Q(t)$, représentant la variation du débit dans le temps, c'est-à-dire l'hydrogramme. Cette opération peut se schématiser comme l'indique la figure 2.

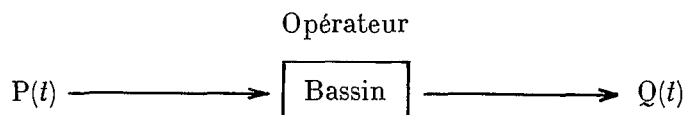


Figure 2

C'est ainsi que l'opérateur global, bien que, bien qu'unique, peut être très complexe. Si l'on se rapporte par exemple à la méthode de l'hydrogramme unitaire, l'opérateur est une courbe unique mais assortie de coefficients paramétriques permettant de tenir compte de la partie de l'averse qui a ruisselé. Or, ces coefficients, dits « de ruissellement », sont essentiellement variables ; ils dépendent en particulier des averses antécédentes et du déroulement de l'averse étudiée elle-même. L'étude en est généralement abordée en considérant un indice de précipitations antérieures d'une part et la hauteur de l'averse, moyenne sur le bassin, d'autre part, et en faisant intervenir des régressions multiples.

Le gros défaut de l'opérateur global est de ne faire intervenir que des caractéristiques moyennes, telles que la pluie moyenne sur le bassin, le coefficient moyen de ruissellement, une forme moyenne de la réaction du bassin. Ces hypothèses très simplificatrices sont souvent acceptables pour de petits bassins (de 10 à 200 km² suivant les régions) et l'hydrogramme unitaire a été et reste un outil de premier choix pour traiter de nombreux problèmes à l'échelle de ces petits bassins. Elles ne le sont plus pour des bassins d'une certaine dimension, notamment dans la gamme de 500-2 000 km² dans laquelle l'hydrologie de réseau est également souvent impuissante, ou tout au moins d'un secours réduit, par suite de la multiplicité des stations qui seraient nécessaires.

Avant de passer à une conception matricielle de l'opérateur de transformation, il est bon de dire un mot des fonctions $P(t)$ et $Q(t)$. On notera tout d'abord que, dans la réalité, ces fonctions ne sont pas de même nature. En effet, si le débit à l'exutoire d'un bassin est une caractéristique ponctuelle et si $Q(t)$ peut en conséquence être considérée comme une fonction du temps seul, il n'en est pas de même de la pluie qui intervient avec sa distribution dans l'espace. Or, ce fait est très gênant pour l'utilisation d'opérateurs globaux et des trésors d'imagination ont été dépensés pour trouver des indices permettant de tenir compte de cette distribution. Nous rappellerons la méthode de Horton pour la prise en compte de l'hétérogénéité spatiale de la pluie dans le calcul de la capacité d'infiltration, les différentes méthodes concernant le problème de l'abattement qui ont vu le jour à l'intérieur du Service Hydrologique de l'ORSTOM. C'est qu'en effet l'opérateur global suppose une pluie homogène dans l'espace et son utilisation pratique doit, ou faire abstraction de l'hétérogénéité réelle si celle-ci n'est pas particulièrement gênante dans les applications, ou faire appel à des palliatifs. En aucun cas on ne peut espérer ainsi disséquer complètement le problème.

Une autre remarque concernera les efforts de quelques chercheurs pour trouver des expressions analytiques aux fonctions $P(t)$ et $Q(t)$. T. O'Donnell a proposé une représentation sous forme de série de Fourier et, tout récemment, le professeur Dooge a introduit une fonction d'un polynôme de Laguerre. Le but de ces recherches est essentiellement de fournir un outil pratique pour condenser les données dans l'emploi de machines électroniques.

Conception matricielle d'un opérateur de transformation

Le but final d'une telle conception est d'accepter le phénomène naturel dans toute sa complexité et de définir des règles de calcul permettant de résoudre pratiquement le problème. C'est là un but qui peut paraître bien ambitieux et l'exposé qui suit ne saurait être qu'une esquisse, l'esquisse de la ligne qui sera peut-être suivie au cours des prochaines années par le programme de recherches de l'ORSTOM concernant ce problème.

Notons enfin que l'arsenal mathématique qui devra être employé, de même que l'emploi des machines électroniques dont on ne saura se passer, ne doivent pas faire illusion. La mise en place d'une méthodologie de calcul ne saurait se substituer à l'observation et à l'analyse détaillée des phénomènes physiques ; celles-ci devront être non seulement poursuivies, mais renforcées avec, nous l'espérons, des moyens accrus.

Pour l'instant, nous nous en tiendrons, dans notre modèle mathématique, au seul ruissellement. Pour cela, nous reviendrons à l'analyse de ce phénomène.

Considérons, dans un bassin versant, une surface dS sur laquelle tombe, pendant un temps dt , une pluie d'intensité $h(t)$. On aura, durant dt , un volume précipité $h(t) dt dS$. D'après le schéma général (figure 1), une partie de cette pluie va s'évaporer ou être retenue par interception ou d'une autre manière en vue d'une évaporation différée, une partie va s'infiltrer (au sens le plus général du terme) et le reste va ruisseler. On peut donc considérer que le volume ruisselé est égal au volume précipité multiplié par un coefficient de réduction que, de tout temps, on a appelé coefficient de ruissellement ; nous le désignerons par la lettre K . Mais ce coefficient est variable dans le temps à un endroit donné ; nous reviendrons

$$K(t)h(t) dt dS$$

Ce volume ne peut quitter dS que suivant la ligne de plus grande pente, compte tenu des obstacles, végétation en particulier, qui peuvent se présenter. En fait, le cheminement du ruissellement de son lieu d'apparition au réseau de drainage, ne doit pas être quelque chose de tellement simple ; le tout est de savoir si le résultat final se traduira par une manipulation simple de paramètres en hydrologie ; d'après les résultats acquis jusqu'à ce jour, il semble que l'interprétation globale du cheminement puisse être admise et c'est

heureux car, dans le cas contraire, il faudrait renoncer définitivement à toute solution des problèmes d'hydropluviométrie. De plus, l'eau de pluie destinée au ruissellement ne va pas quitter instantanément dS dès sa production au sol. Le cas présente une certaine analogie avec un réservoir que l'on emplit suivant une certaine loi et qui se vide suivant une autre ; dans le cas d'une alimentation à répartition rectangulaire pendant un intervalle dt , c'est-à-dire une « impulsion » simple (on peut toujours choisir dt assez petit pour que l'intensité de la pluie puisse être considérée comme constante durant l'intervalle) on peut définir une courbe de « laminage » du volume d'eau de ruissellement à la sortie de la surface dS , autrement dit, une impulsion de volume $h(t) dS$ se traduira à la sortie de dS par une courbe de débit $q(\tau)$ telle que $\int_0^{\tau_1} q(\tau) d\tau = h'(t) dS dt$ en notant $h'(t) = K(t) h(t)$, (voir fig. 3).

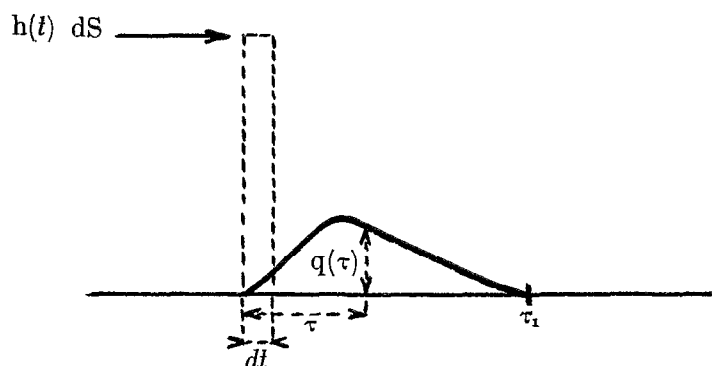


Figure 3

τ désigne un temps compté à partir du début de l'impulsion. τ_1 est la durée limite à partir de laquelle tout le ruissellement produit dans l'instant dt a quitté la surface dS ; τ_1 peut être pris égal à l'infini (cas d'une vidange exponentielle par exemple). L'opérateur de transformation permettant de passer de l'impulsion à la courbe de débit est donc une fonction $\lambda(\tau)$, telle que $\int_0^{\tau_1} \lambda(\tau) d\tau = 1$ et, dans l'hypothèse linéaire, on pourra écrire : $q(\tau) = \lambda(\tau) h'(t) dS dt$. Ce n'est pas autre chose que l'hydrogramme unitaire appliqué à la surface dS .

Il est fort peu probable que la courbe $q(\tau)$ se transporte à l'exutoire par une simple translation. De sorte que la courbe de laminage qui sera seule accessible à la mesure sera en réalité une courbe $q_1(\tau)$, transformée de $h'(t) dt dS$ par un opérateur $\lambda_1(\tau)$ différent de $\lambda(\tau)$. C'est ce nouvel opérateur que nous appellerons désormais $\lambda(\tau)$.

Enfin, le dernier facteur dont il faudra tenir compte sera le temps que mettra pour arriver à l'exutoire la première goutte d'eau issue de dS provenant de l'impulsion $h(t)$ pendant le temps dt . Nous désignerons ce temps par θ .

Nous avons vu que la fonction $h(t)$ n'est pas la même en chaque point du bassin (hétérogénéité de la pluie). Si l'on désigne par x et y les coordonnées d'un point du bassin, c'est donc en réalité une fonction $h(t, x, y)$, que nous symboliserons par $h(t, S)$. Supposons maintenant que l'on décompose la surface S en un certain nombre de surfaces partielles $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$. Il est évident que, plus le nombre de ces surfaces sera élevé, autrement dit plus la décomposition sera « fine », plus la pluie sera homogène sur chacune des surfaces prises séparément. Il serait toutefois inutile, de ce seul point de vue, de choisir un nombre de surfaces supérieur au nombre d'appareils utilisés pour la mesure de la pluie ; mais il peut se faire que, pour d'autres considérations, on soit néanmoins appelé à le faire.

D'autre part, si l'on considère une surface ΔS_i , la fonction $h_i(t)$ va varier dans le temps. La conception matricielle conduit à décomposer ce hyétogramme en intervalles finis comptés par exemple à partir du début de l'averse, ou de l'épisode pluvieux. Nous appellerons Δt_i un de ces intervalles de temps et on s'imposera de choisir tous les Δt égaux.

Il en résulte que l'ensemble de l'averse, ou plutôt toute l'information que l'on possède sur cette averse, peut être représenté exhaustivement, dans toute sa complexité, par la matrice suivante :

$$\begin{array}{l}
 \Delta S_1 \\
 \Delta S_2 \\
 \dots \\
 \Delta S_i \\
 \dots \\
 \Delta S_n \\
 \Delta t_1 \\
 \Delta t_2 \\
 \Delta t_3 \\
 \dots \\
 \Delta t_j \\
 \dots \\
 \Delta t_k
 \end{array}
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 P_{11} & P_{12} & P_{13} & \dots & P_{1j} & \dots & P_{1k} \\
 P_{21} & P_{22} & P_{23} & \dots & P_{2j} & \dots & P_{2k} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 P_{i1} & P_{i2} & P_{i3} & \dots & P_{ij} & \dots & P_{ik} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 P_{n1} & P_{n2} & P_{n3} & \dots & P_{nj} & \dots & P_{nk} \\
 \Delta t_1 & \Delta t_2 & \Delta t_3 & \dots & \Delta t_j & \dots & \Delta t_k
 \end{array} \right]$$

dans laquelle le terme P_{ij} est égal à $h_{ij}\Delta t_j$.

Nous représenterons cette matrice par le symbole M_p .

Considérons maintenant la fonction de coefficient de ruissellement K . En un point donné du bassin, cette fonction n'est pas constante puisqu'elle dépend de l'état de saturation du terrain, état qui est lui-même un chronogramme sous l'influence des précipitations ayant précédé l'instant auquel on se place. Si, au début d'une averse, le terrain est sec, c'est-à-dire ne contient pas autre chose que son eau hygroskopique, K va croître régulièrement au cours de l'averse, suivant une loi qui est à définir dans chaque cas particulier. Lorsque la pluie s'arrête, K va commencer à décroître, moins vite généralement qu'il n'a cru. C'est donc une fonction du temps mais dépendant également de la répartition des précipitations. Le problème est extrêmement complexe et c'est là sans doute que devra porter l'effort principal des prochaines années ; en particulier, l'effet des précipitations antérieures à l'averse étudiée est encore très mal connu. Toutefois, on est déjà en mesure de procéder à certaines simplifications qui permettent d'opérer des calculs et d'obtenir des résultats parfaitement utilisables. Par exemple, dans des applications qu'il nous a été donné de faire (bassin du Litani), on a pu mettre en évidence que la valeur de K décroissait deux fois moins vite en l'absence de pluie qu'elle ne croissait durant une période de pluie ; les petites pluies de 1 à 3 mm par jour étant éliminées. On avait pu admettre, dans ce cas particulier, que K , en un lieu donné, était simplement fonction du temps, les précipitations n'intervenant que par leur absence ou leur présence et non par leur abondance. Il est certain que ce modèle un peu sommaire pourrait être amélioré.

K varie de façon encore beaucoup plus spectaculaire, dès que le bassin atteint une certaine étendue, avec la position du point considéré, de sorte que, en admettant provisoirement la simplification du paragraphe précédent, on peut, avec le même découpage que pour la pluie, représenter K sous forme d'une matrice :

$$\begin{array}{l}
 \Delta S_1 \\
 \Delta S_2 \\
 \dots \\
 \Delta S_i \\
 \dots \\
 \Delta S_n \\
 \Delta t_1 \quad \Delta t_2 \quad \Delta t_3 \quad \dots \quad \Delta t_j \quad \dots \quad \Delta t_k
 \end{array}
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 K_{11} & K_{12} & K_{13} & \dots & K_{1j} & \dots & K_{1k} \\
 K_{21} & K_{22} & K_{23} & \dots & K_{2j} & \dots & K_{2k} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 K_{i1} & K_{i2} & K_{i3} & \dots & K_{ij} & \dots & K_{ik} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 K_{n1} & K_{n2} & K_{n3} & \dots & K_{nj} & \dots & K_{nk} \\
 \Delta t_1 & \Delta t_2 & \Delta t_3 & \dots & \Delta t_j & \dots & \Delta t_k
 \end{array} \right]$$

K_{ij} étant le coefficient de ruissellement durant l'intervalle de temps Δt_j sur la surface ΔS_i

Nous représenterons cette matrice par le symbole M_K .

Le volume de ruissellement qui est produit par une surface ΔS_i pendant un intervalle de temps Δt_j est donné par la quantité $K_{ij} P_{ij} \Delta S_i$. L'ensemble des volumes de ruissellement produits sur l'ensemble du bassin sera donc obtenu par une certaine forme de convolution des matrices M_P , M_K et du vecteur V_S représentant le découpage du bassin en surfaces élémentaires :

$$V_S = \left[\begin{array}{c}
 S_1 \\
 S_2 \\
 \dots \\
 S_i \\
 \dots \\
 S_n
 \end{array} \right]$$

La matrice M_V représentant ces volumes de ruissellement V sera donc définie par :

$$M_V = M_P * V_S * M_K$$

avec, pour règle de calcul :

$$V_{ij} = P_{ij} K_{ij} \Delta S_i$$

Il sera plus commode, pour la suite des opérations, d'expliciter cette matrice :

$$\left[\begin{array}{cccccccc}
 V_{11} & V_{12} & V_{13} & \dots & V_{1j} & \dots & V_{1k} \\
 V_{21} & V_{22} & V_{23} & \dots & V_{2j} & \dots & V_{2k} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 V_{i1} & V_{i2} & V_{i3} & \dots & V_{ij} & \dots & V_{ik} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 V_{n1} & V_{n2} & V_{n3} & \dots & V_{nj} & \dots & V_{nk}
 \end{array} \right]$$

La fonction d'étalement λ peut, elle aussi, et toujours avec les mêmes hypothèses, être mise sous forme de matrice M_λ :

$$\begin{array}{cccccc}
 \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1j}' & \dots & \lambda_{1m} \\
 \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2j}' & \dots & \lambda_{2m} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1j}' & \dots & \lambda_{1m} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nj}' & \dots & \lambda_{nm} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \Delta\tau_1 & \Delta\tau_2 & \dots & \Delta\tau_j' & \dots & \Delta\tau_m
 \end{array}$$

mais cette fois, la numérotation des colonnes se fait en $\Delta\tau$ et non en Δt . Cependant, pour que les opérations matricielles soient possibles, il est nécessaire d'avoir $\Delta\tau_1 = \Delta\tau_2 = \dots = \Delta t_1 = \Delta t_2 = \dots$, ce qui est toujours possible puisque le choix des intervalles est, à priori, arbitraire.

Les valeurs λ_{11} , λ_{12} , etc. sont des coefficients réducteurs permettant de calculer la portion du volume de ruissellement qui se serait écoulé à l'exutoire pendant les temps $\Delta\tau_1$, etc. abstraction faite du temps de transport. La matrice M_λ permet donc de fractionner les éléments de la matrice M_V et d'indiquer l'ordre de présentation à l'exutoire de ces volumes fractionnels, abstraction faite du temps de transport. Notons au passage que l'on a évidemment, d'après la définition de la fonction λ ,

$$\lambda_{11} + \lambda_{12} + \dots + \lambda_{1j}' + \dots + \lambda_{1m} = 1$$

etc.

La règle de convolution $M_V * M_\lambda$ est un peu plus compliquée que les précédentes. On a, en effet :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \lambda_{11} V_{11} & \lambda_{12} V_{11} & \lambda_{13} V_{11} & \dots & \lambda_{1m3} V_{11} & & \\
 \lambda_{11} V_{12} & \lambda_{12} V_{12} & \dots & \lambda_{1(m-1)} V_{12} & \lambda_{1m} V_{12} & & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\
 & & & & \lambda_{11} V_{1m} & \lambda_{12} V_{1m} & \dots
 \end{array}$$

Désignons par V' le volume « laminé ». Deux cas peuvent se présenter :

- 1) $m < k$, c'est le cas où la durée de l'étalement est plus petite que la durée de la pluie considérée. La valeur du terme général de la première ligne de la matrice M_V' , que nous désignerons par V'_{1j} sera égale à :

$$\begin{array}{l}
 \text{pour } j \leq m, \quad V'_{1j} = \lambda_{1j} V_{11} + \lambda_{1(j-1)} V_{12} + \dots + \lambda_{11} V_{1j} \\
 \text{pour } m \leq j \leq k, V'_{1j} = \lambda_{1m} V_{1(j-m+1)} + \lambda_{1(m-1)} V_{1(j-m+2)} + \dots + \lambda_{11} V_{1j} \\
 \text{pour } j \geq k \quad V'_{1j} = \lambda_{1m} V_{1(j-m+1)} + \lambda_{1(m-1)} V_{1(j-m+2)} + \dots + \lambda_{1(j-k+1)} V_{1k}
 \end{array}$$

2) $m > k$, c'est le cas où la durée de l'étalement est plus grande que la durée de la pluie. On a :

pour $j \leq k$, même valeur que précédemment,

pour $k \leq j \leq m$, $V'_{1j} = \lambda_{1j} V_{1j} + \lambda_{1(j-1)} V_{1j} + \dots + \lambda_{1(j-k+1)} V_{1k}$

pour $j \geq m$, même valeur que précédemment.

On pourra remarquer que la somme des seconds indices de λ et de V doit toujours être égale à $j + 1$.

Pour fixer les idées, citons deux cas particuliers :

1) $m = 4, k = 5$.

Le tableau de composition sera :

$$\begin{matrix} \lambda_{11} V_{11} & \lambda_{12} V_{11} & \lambda_{13} V_{11} & \lambda_{14} V_{11} & & & & & & & \\ & \lambda_{11} V_{12} & \lambda_{12} V_{12} & \lambda_{13} V_{12} & \lambda_{14} V_{12} & & & & & & \\ & & \lambda_{11} V_{13} & \lambda_{12} V_{13} & \lambda_{13} V_{13} & \lambda_{14} V_{13} & & & & & \\ & & & \lambda_{11} V_{14} & \lambda_{12} V_{14} & \lambda_{13} V_{14} & \lambda_{14} V_{14} & & & & \\ & & & & \lambda_{11} V_{15} & \lambda_{12} V_{15} & \lambda_{13} V_{15} & \lambda_{14} V_{15} & & & \end{matrix}$$

et les valeurs de V'_{1j} :

$$V'_{11} = \lambda_{11} V_{11}$$

$$V'_{12} = \lambda_{12} V_{11} + \lambda_{11} V_{12}$$

$$V'_{13} = \lambda_{13} V_{11} + \lambda_{12} V_{12} + \lambda_{11} V_{13}$$

etc.

2) $m = 5, k = 3$

$$\begin{matrix} \lambda_{11} V_{11} & \lambda_{12} V_{11} & \lambda_{13} V_{11} & \lambda_{14} V_{11} & \lambda_{15} V_{11} & & & & & & \\ & \lambda_{11} V_{12} & \lambda_{12} V_{12} & \lambda_{13} V_{12} & \lambda_{14} V_{12} & \lambda_{15} V_{12} & & & & & \\ & & \lambda_{11} V_{13} & \lambda_{12} V_{13} & \lambda_{13} V_{13} & \lambda_{14} V_{13} & \lambda_{15} V_{13} & & & & \end{matrix}$$

Le terme général de la matrice M_V' s'obtient à partir des expressions ci-dessus en changeant le premier indice 1 de λ et de V par i . Par exemple, pour $j \leq m$,

$$V'_{1j} = \lambda_{1j} V_{1j} + \lambda_{1(j-1)} V_{1j} + \dots + \lambda_{11} V_{1j}$$

L'introduction de l'opérateur τ est d'ailleurs indispensable. En fait, tout dépend des valeurs relatives de τ_1 et de l'intervalle Δt choisi.

On notera enfin que, si la matrice M_V comporte k colonnes et n lignes, la matrice M_V' m colonnes et n lignes, la matrice M_V' comportera $m + k - 1$ colonnes et n lignes.

Le dernier facteur qui intervient dans la synthèse de la crue est le temps de parcours, c'est-à-dire le temps nécessaire au volume de ruissellement pour parvenir à l'exutoire. En effet, un volume sortant de la surface ΔS_1 ne se manifestera qu'au bout d'un temps θ_1 . On désignera en pratique par θ_1 le temps moyen de parcours correspondant à la moyenne des temps mis par des entités de ruissellement provenant de tous les points de la surface ΔS_1 .

Si l'on considère le point du bassin hydrologiquement le plus éloigné de l'exutoire

par Θ . Divisons ce temps de concentration en un certain nombre d'éléments tous égaux entre eux $\Delta\theta_1 = \Delta\theta_2 = \dots = \Delta\theta_n = \frac{\Theta}{\ell} = \Delta\theta$. Si la division du bassin en surfaces élémentaires d'une part, celle du temps de concentration en intervalles de temps d'autre part, sont suffisamment fines, on pourra affecter à chaque surface élémentaire un temps de concentration qui soit un multiple entier de $\Delta\theta$. Pour que les calculs matriciels soient possibles, il faut seulement que $\Delta\theta$ soit égal à Δt et à $\Delta \tau$. La matrice va présenter un aspect un peu particulier. On aura par exemple :

$$\begin{array}{cccc}
 \Delta S_1 & 0 & 1 & 0 \dots 0 \dots 0 \\
 \Delta S_2 & 1 & 0 & 0 \dots 0 \dots 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \Delta S_i & 0 & 0 & 1 \dots 0 \dots 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \Delta S_n & 0 & 0 & 0 \dots 1 \dots 0
 \end{array}$$

$1\Delta\theta \quad 2\Delta\theta \quad 3\Delta\theta \quad \dots \quad j\Delta\theta \quad \dots \quad \ell\Delta\theta$

Le chiffre 1 signifie simplement que la surface indiquée par la ligne a bien le temps de parcours indiqué par la colonne. Le chiffre zéro veut dire qu'elle ne l'a pas.

La matrice peut parfaitement contenir plusieurs 1 dans une même colonne, à un temps de parcours pouvant correspondre plusieurs surfaces, mais évidemment une surface donnée ne peut être affectée que d'un seul temps de parcours ; il y aura donc un 1 et un seul dans chaque ligne.

Le rôle de la matrice M_θ sera de décaler sélectivement les éléments de la matrice M_v' avant la totalisation qui donnera la répartition définitive des volumes à l'exutoire. Prenons un exemple relativement simple pour lesquels on supposera que la division du bassin a été faite en 10 surfaces élémentaires ($n = 10$) et la division du temps de concentration en 5 intervalles ($\ell = 5$). Supposons de plus que la matrice M_v' comporte 6 colonnes ($m + k - 1 = 6$). On aura donc :

$$M_v' = \begin{array}{cccccc}
 V'_{11} & V'_{12} & V'_{13} & V'_{14} & V'_{15} & V'_{16} \\
 V'_{21} & V'_{22} & V'_{23} & V'_{24} & V'_{25} & V'_{26} \\
 V'_{31} & V'_{32} & V'_{33} & V'_{34} & V'_{35} & V'_{36} \\
 V'_{41} & V'_{42} & V'_{43} & V'_{44} & V'_{45} & V'_{46} \\
 V'_{51} & V'_{52} & V'_{53} & V'_{54} & V'_{55} & V'_{56} \\
 V'_{61} & V'_{62} & V'_{63} & V'_{64} & V'_{65} & V'_{66} \\
 V'_{71} & V'_{72} & V'_{73} & V'_{74} & V'_{75} & V'_{76} \\
 V'_{81} & V'_{82} & V'_{83} & V'_{84} & V'_{85} & V'_{86} \\
 V'_{91} & V'_{92} & V'_{93} & V'_{94} & V'_{95} & V'_{96} \\
 V'_{101} & V'_{102} & V'_{103} & V'_{104} & V'_{105} & V'_{106}
 \end{array}$$

On supposera que la matrice M_{θ} a la forme suivante (il est nécessaire pour l'utilisation de border cette matrice) :

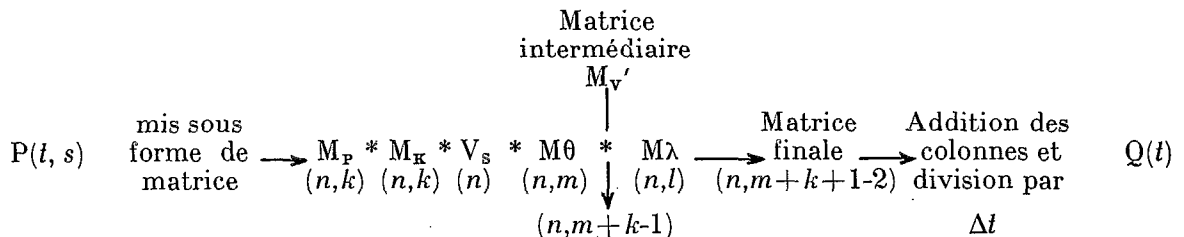
$$\begin{array}{l}
 \Delta S_1 \\
 \Delta S_2 \\
 \Delta S_3 \\
 \Delta S_4 \\
 \Delta S_5 \\
 \Delta S_6 \\
 \Delta S_7 \\
 \Delta S_8 \\
 \Delta S_9 \\
 \Delta S_{10}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{ccccc}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \Delta\theta \\
 2\Delta\theta \\
 3\Delta\theta \\
 4\Delta\theta \\
 5\Delta\theta
 \end{array}$$

L'application de la matrice M_{θ} à la matrice $M_{v'}$ consiste à écrire les termes de cette seconde matrice en suivant le décalage indiqué par M_{θ} . Dans notre exemple :

V'_{11}	V'_{12}	V'_{13}	V'_{14}	V'_{15}	V'_{16}																
	V'_{21}	V'_{22}	V'_{23}	V'_{24}	V'_{25}	V'_{26}															
V'_{31}	V'_{32}	V'_{33}	V'_{34}	V'_{35}	V'_{36}																
		V'_{41}	V'_{42}	V'_{43}	V'_{44}	V'_{45}	V'_{46}														
	V'_{51}	V'_{52}	V'_{53}	V'_{54}	V'_{55}	V'_{56}															
			V'_{61}	V'_{62}	V'_{63}	V'_{64}	V'_{65}	V'_{66}													
				V'_{71}	V'_{72}	V'_{73}	V'_{74}	V'_{75}	V'_{76}												
			V'_{81}	V'_{82}	V'_{83}	V'_{84}	V'_{85}	V'_{86}													
				V'_{91}	V'_{92}	V'_{93}	V'_{94}	V'_{95}	V'_{96}												
					V'_{101}	V'_{102}	V'_{103}	V'_{104}	V'_{105}	V'_{106}											

L'hydrogramme cherché est obtenu en sommant les colonnes de ce dernier tableau. Cet hydrogramme est donné en fait en volumes ruisselés pendant l'intervalle de base $\Delta t = \Delta\theta$. Le débit moyen correspondant durant le même intervalle est évidemment obtenu en divisant le volume par Δt . On a bien finalement opéré une série de transformations permettant de passer de la fonction $P(t)$ à la fonction $Q(t)$.

Nous rappelons la chaîne de ces transformations :



Il est entendu que chacune de ces opérations est définie successivement par les différentes règles posées plus haut.

Réglage du modèle mathématique

Jusqu'à présent, nous avons défini la forme du modèle mathématique à caractère matriciel et donné les règles d'opération. Ce modèle dépend d'un certain nombre de paramètres qu'il s'agit maintenant d'ajuster en se basant sur les résultats d'observations.

Essayons d'abord de dégager ces paramètres. La première matrice M_P n'en contient pas a priori, puisqu'elle se contente de traduire des résultats d'observation, ceux qui concernent la pluie. Cependant, elle contient déjà la division en surfaces élémentaires du bassin ; on ne peut pas dire que cette division puisse faire l'objet d'une recherche paramétrique puisqu'elle est, en principe, arbitraire. Elle demande cependant un choix et ce choix dépend en partie, ou plutôt peut dépendre, du nombre d'appareils employés pour la mesure de la pluie. Nous avons signalé que, du seul point de vue de l'exploitation des données pluviométriques, on n'avait aucun intérêt à distinguer dans le bassin un nombre de surfaces élémentaires plus grand que le nombre des appareils. Mais il faudra par la suite affecter à chaque surface élémentaire ΔS_i un temps de parcours moyen qui, pour que l'application de la méthode matricielle soit possible, doit être un multiple entier de l'intervalle de base commun choisi pour t , θ et τ . Dès lors, il n'y aura une certaine souplesse dans les possibilités de choix que si la décomposition du bassin est suffisamment fine.

C'est, nous pensons, une des difficultés de la méthode mais c'est aussi ce qui fait sa supériorité sur la méthode dite « synthétique » pour laquelle la considération de surfaces « isochrones » ne laisse pratiquement pas de latitude pour tenir compte de la répartition de la pluie et du coefficient d'écoulement sur chacune de ces surfaces. On notera d'ailleurs que la division, dans le cas de la méthode matricielle, peut se faire en fractionnant des surfaces isochrones.

Le découpage même, avec son affectation d'isochronisme, constitue donc quand même un élément de réglage. En fait, nous pensons qu'il vaut mieux opérer d'abord un découpage en surface qui ne sera plus remis en question et effectuer le réglage en jouant sur la valeur du temps de concentration Θ , c'est-à-dire finalement de l'intervalle de base $\Delta\theta$, une fois qu'on s'est fixé le nombre l d'intervalles. La mesure de cet intervalle ne correspondra pas à des chiffres ronds ; eh bien, tant pis. Nous tenons donc, avec $\Delta\theta$, notre premier élément de réglage.

C'est la matrice M_K qui nous donnera le plus de mal. En effet, si l'on peut assez rapidement se faire une bonne idée de la valeur de Θ , il est beaucoup plus délicat d'évaluer les termes de la matrice M_K dont chacun constitue un paramètre d'ajustement. Ce champ est loin d'avoir été complètement exploré. Signalons seulement que, pour des problèmes pratiques, nous avons obtenu des résultats satisfaisants en considérant une fonction $K(t, S) = \alpha(S) f(t)$.

On pourra, par exemple, admettre que l'on connaît la fonction $f(t)$ et opérer le réglage au moyen de α . Une allure de la fonction $f(t)$ peut être dégagée en considérant un certain nombre de pluies successives pour lesquelles les crues peuvent être décomposées avec une précision suffisante. On peut également chercher à mettre $f(t)$ sous forme analytique et utiliser les paramètres introduits comme éléments de réglage.

En fait, les moyens sont nombreux et la véritable difficulté est de fixer le point de départ de K au début d'une averse ou d'un épisode pluvieux. Il faut alors faire intervenir des indices de précipitations antécédentes; mais si cette opération est relativement aisée, quand tout va bien, pour l'étude du coefficient de ruissellement de toute une crue, il n'en est pas de même pour les valeurs initiales. Il faut enfin noter que, si le bassin est petit, la variation du coefficient de ruissellement risque de dépendre non seulement du temps qui s'est passé depuis le début de l'averse, mais aussi de la quantité d'eau tombée. Tout ceci fait partie des points qui devront être éclaircis dans les années à venir.

Vient enfin la matrice d'étalement M_λ . Son traitement ne pose pas de difficulté particulière, sinon qu'on n'a aucune idée au départ sur les valeurs à donner aux coefficients λ . Nous pensons que dans la majorité des cas, pour peu que le bassin ait un certain développement, on peut fort bien s'en passer et considérer directement la matrice M_v .

On notera que toutes ces matrices ne sont pas « physiquement » de même espèce. Les matrices M_p et M_k qui lui est liée, sont en fait des tronçons de chronogrammes et le nombre de leurs colonnes n'est défini que pour une averse ou un épisode pluvieux, ou tout autre tranche de temps qu'il nous plaira de considérer. Au contraire, les matrices M_λ , M_θ et le vecteur V_s ont des dimensions fixes à travers les différentes transformations : ce sont exclusivement des caractéristiques du bassin, alors que le coefficient de ruissellement allie les caractéristiques de l'averse à celles du bassin.

Supposons donc que, par toutes ces considérations et par bien d'autres encore, on ait retenu une valeur provisoire pour chacun des paramètres contenus dans les matrices de transformation. On peut utiliser le modèle mathématique ainsi constitué pour transformer en hydrogramme de ruissellement la plus longue période de pluie possible pour laquelle on ait simultanément des observations pluviométriques et des observations de débits. Reportons sur un graphique (figure 4) l'hydrogramme reconstitué (en tireté), en regard de l'hydrogramme réellement observé (trait plein).

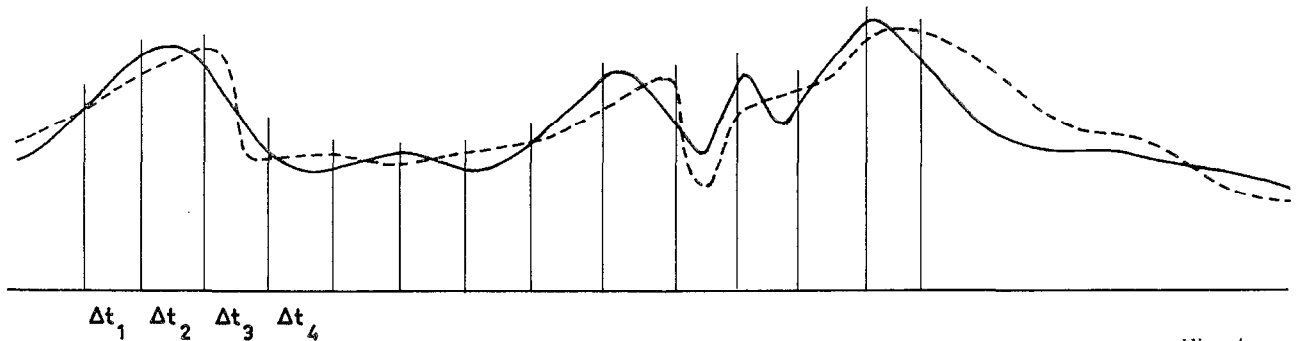


Fig. 4

On trouvera naturellement que la courbe calculée ne correspond pas à la courbe observée. Divisons la période choisie en un nombre assez grand d'intervalles égaux et calculons à chaque fin d'intervalle la différence $\varepsilon_i = Q_{\text{calc.}} - Q_{\text{obs.}}$. On voit que si l'on forme la quantité $\Sigma \varepsilon_i^2$, et que l'on cherche à minimiser ce terme en agissant sur les paramètres, on aura appliqué à l'ajustement de ces paramètres la méthode des moindres carrés.

Ayant donc obtenu cette valeur de $\Sigma \varepsilon_i^2$ on va faire varier un des paramètres, par exemple Θ . Pour une seconde valeur de Θ , on fait à nouveau la transformation, on compare à nouveau courbe observée et courbe calculée, et on calcule une nouvelle valeur de $\Sigma \varepsilon_i^2$. De même pour une troisième valeur de Θ . On admettra que la variation $\Sigma \varepsilon_i^2 = f(\Theta)$ est parabolique. Les trois points calculés suffisent à déterminer l'équation de la parabole, donc son minimum et la valeur de Θ pour laquelle ce minimum a lieu. Cette nouvelle valeur de Θ est provisoirement retenue à la place de la première.

On fait ensuite varier un autre paramètre et l'on étudie la variation de $\Sigma \varepsilon_i^2$ avec cet autre paramètre. On obtient un nouveau minimum et une nouvelle valeur, etc.

Il est bien évident que des opérations de ce type ne peuvent être menées que sur des machines électroniques.

Dans la pratique, la comparaison entre courbe réelle et courbe calculée ne se fera pas en traçant les courbes. L'hydrogramme réel sera mis sous forme d'un tableau à deux colonnes, la première indiquant la position de l'intervalle de temps dont le débit moyen, ou le volume ruisselé, sera porté dans la seconde. Le calcul de $\Sigma \varepsilon_i^2$ se fera sur les volumes obtenus dans les différents intervalles.

*
* *

Il reste encore beaucoup de points obscurs dans l'application d'une méthode de ce genre ; il reste aussi à programmer les calculs et à les utiliser dans des problèmes concrets. Nous espérons pouvoir nous attaquer à cette tâche au cours des prochaines années et lever peut-être ainsi d'autres problèmes qui n'apparaissent pas encore clairement dans l'état actuel de nos travaux. De toute manière, il serait dangereux de penser que l'opération peut être rendue entièrement automatique. En particulier, l'introduction des valeurs initiales des paramètres lors du réglage du modèle ne doit pas être faite n'importe comment, sinon on n'arriverait jamais à rien. Dès à présent, les études effectuées par ORSTOM sur ses bassins expérimentaux, même si elles n'ont pas été engagées avec l'objectif de notre méthode permettent de se faire une idée assez saine des valeurs et de l'évolution des