

# Méthode thermodynamique de mesure de l'humidité des sols

BERNARD POUYAUD  
Chargé de Recherches de l'O.R.S.T.O.M.

ROGER CHARTIER  
Hydrologue de l'O.R.S.T.O.M.

## PREMIÈRE PARTIE

### Théorie de la progression d'une perturbation thermique en milieu isotrope et homogène

par  
BERNARD POUYAUD

Nous développons dans cette première partie la théorie de la progression d'une perturbation thermique en milieu isotrope et homogène dans un certain nombre de conditions aux limites du flux calorifique induisant la perturbation (fig. 1) :

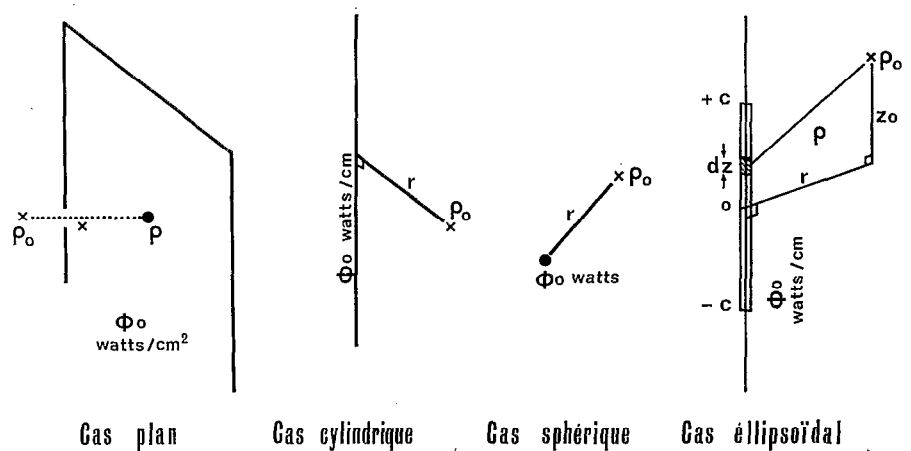
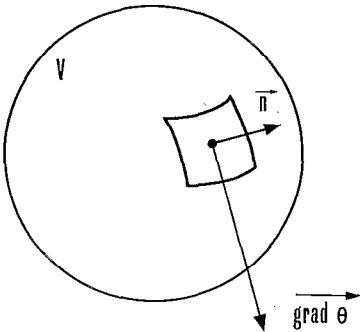


Fig. 1 — Différentes conditions aux limites traitées par le calcul

- Sur la frontière plane d'un mur semi infini : flux  $\varphi_0$  par centimètre carré ;
- Sur un axe : flux  $\varphi_0$  par centimètre ;
- En un point : flux  $\Phi_0$  ;
- Sur un segment de longueur  $2c$  : flux  $\frac{\Phi_0}{2c} = \varphi_0$  par centimètre.

Les résultats théoriques qui vont apparaître permettent de calculer la conductivité thermique  $K$ , la diffusivité thermique  $a$  et la capacité calorifique volumique  $C$ , à partir d'expérimentations simples.

### 1.1. Mise en équation du problème général



— Soit un milieu homogène et isotrope dans lequel il n'y a pas de transformation de la chaleur en une autre forme d'énergie, ni inversement.

— Soit  $C$  : la chaleur spécifique

$K$  : la conductivité thermique

$a$  : la diffusivité thermique :  $\frac{K}{C}$

— Soit  $\Theta(x, y, z, t)$  la température en un point.

— Soit  $Q$  : la quantité d'énergie calorifique présente dans une région du milieu considéré, de frontière extérieure  $F_v$  et de volume  $V$ .

— La loi de conductivité pour une quantité de chaleur élémentaire  $dQ$  traversant la surface  $F_v$ , s'écrit :

$$dQ = dt \iint_{F_v} K \text{grad } \Theta \cdot \vec{\eta} \, d\sigma$$

— La loi d'échauffement du volume  $V$  s'écrit de la façon suivante :

$$dQ = \iiint_V C \, d\Theta \, dx \, dy \, dz$$

$dx \, dy \, dz$  représentant l'élément de volume de  $V$ .

Egalons les deux valeurs de  $dQ$  et appliquons la formule d'Ostrogradsky sur la frontière  $F_v$ .

$$\iiint_V C \, d\Theta \, dx \, dy \, dz = dt \iint_{F_v} K \text{grad } \Theta \cdot \vec{\eta} \, d\sigma = dt \iiint_V K \Delta \Theta \, dx \, dy \, dz$$

Pour cela nous avons admis  $K$  constant dans tout le volume;  $\Delta \Theta$  est le laplacien de  $\Theta$ .

Il vient :

$$\iiint_V \left( K \Delta \Theta - C \frac{\partial \Theta}{\partial t} \right) dx \, dy \, dz = 0$$

Cette dernière équation doit être vérifiée dans le milieu, quel que soit le volume  $V$  choisi :

donc :

$$K \Delta \Theta - C \frac{\delta \Theta}{\delta t} = 0$$

ou, en introduisant la diffusivité  $a$  :

$$a \Delta \Theta - C \frac{\delta \Theta}{\delta t} = 0$$

équation connue sous le nom d'équation de la chaleur.

## 1.2. Propagation d'une onde thermique dans un corps homogène et isotrope

Selon la forme géométrique des conditions initiales ou aux limites imposées, nous utiliserons diverses formulations de l'équation de la chaleur.

### 1.2.1. CAS PLAN D'UN MUR SEMI-INFINI.

La modification de température initiale s'effectue sur un plan. Les isothermes seront donc toujours des plans parallèles à ce plan initial. Si  $x$  est la direction perpendiculaire à ces plans, l'équation de la chaleur s'écrit :

$$a \frac{\delta^2 \Theta}{\delta x^2} = \frac{\delta \Theta}{\delta t}$$

La résolution théorique est classique dans deux cas intéressants :

#### 1.2.1.1. Cas du mur semi-infini, initialement à la température zéro, sur la face duquel on maintient une température $O$ , pendant un temps $\Delta t$ à partir de l'origine des temps.

La température  $\Theta_{x,t}$  en un point  $x$  à l'instant  $t$  est donnée de façon approchée, d'autant plus exacte que  $t$  est grand vis-à-vis de  $\Delta t$ , par la relation :

$$\Theta_{x,t} \approx \frac{\Theta_0}{2} \frac{\Delta t}{\sqrt{\pi a}} \frac{x}{t\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4at}}$$

La température  $\Theta_{x,t}$  passe en chaque point par un maximum  $\Theta_{\max}(x)$  au temps  $t = t_{s,x}$ .

$t_{s,x}$  peut être défini comme le temps mis après la perturbation à atteindre le point  $x$  considéré.

En annulant  $\frac{d\Theta_{x,t}}{dt}$  on trouve :  $t_{s,x} = \frac{x^2}{6a}$

On peut aussi calculer l'étalement  $\Delta t_{s,x}$  de la perturbation, défini par exemple comme le temps séparant les deux inflexions de part et d'autre du maximum, il vient :

$$\Delta t_{s,x} = \frac{\sqrt{10}}{15} \frac{x^2}{a}$$

Enfin, la valeur du maximum est donnée par :

$$\Theta_{s,x}^{\max} = 3\sqrt{6} \frac{\Theta_0 \Delta t a}{\sqrt{\pi e} e \frac{1}{x^2}}$$

1.2.1.2. *Cas du mur semi-infini, initialement à la température zéro, sur la face duquel on injecte un flux calorifique  $\varphi_0$  (en watts/cm<sup>2</sup>) constant, pendant un temps  $\Delta t$  très court.*

La température  $\Theta_{x,t}$  en un point  $x$  à l'instant  $t$  est :

$$\Theta_{x,t} \neq \frac{\varphi_0 \Delta t e^{-\frac{x^2}{4at}}}{\sqrt{\pi} k^2 \sqrt{t}}$$

avec les mêmes approximations que précédemment.

On calcule de même :

$$t_{s,x} = \frac{x^2}{2a}$$

$$\Delta t_{s,x} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{x^2}{a}$$

Le maximum de température devient :

$$\Theta_{s,r}^{\max} = \frac{\varphi_0 \Delta t}{\sqrt{\frac{\pi^2}{2}} C} \frac{1}{x}$$

où l'on peut dès maintenant noter l'apparition de la capacité calorifique  $C$ .

### 1.2.2. CAS CYLINDRIQUE.

La modification initiale de température se fait uniformément sur un axe infini que nous confondrons avec l'axe des  $z$ . Les isothermes conservent donc une forme cylindrique de révolution.

L'équation de la chaleur prend dans ce cas la forme simple suivante :

$$\frac{\delta \Theta}{\delta t} = a \left( \frac{\delta^2 \Theta}{\delta r^2} + \frac{1}{r} \frac{\delta \Theta}{\delta r} \right)$$

puisque :

$$\frac{\delta \Theta}{\delta z} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\delta^2 \Theta}{\delta z^2} = 0$$

$a$  = diffusivité thermique

$\Theta_{r,t}$  = élévation de température à l'instant  $t$ , à la distance  $r$  de l'axe des  $z$

$r$  = distance du point considéré à l'axe des  $z$

1.2.2.1. *Cas de la mise en température d'un milieu, initialement à la température 0, par une source de chaleur uniformément répartie sur l'axe des z, fournissant un flux calorifique  $\phi_0$  en watts/cm.*

Nous allons intégrer l'équation de la chaleur dans ce cas particulier. Nous proposons le changement de variable classique :

$$\eta = \frac{r^2}{4at} \quad \text{d'où :} \quad d\eta = -\frac{r^2}{4at^2} dt + \frac{r}{2at} dr$$

Il vient donc :

$$\frac{\delta\Theta}{\delta t} = \frac{\delta\Theta}{\delta\eta} \cdot \frac{\delta\eta}{\delta t} = \frac{\delta\Theta}{\delta\eta} \left( -\frac{r^2}{4at^2} \right)$$

$$\frac{\delta\Theta}{\delta r} = \frac{\delta\Theta}{\delta\eta} \cdot \frac{\delta\eta}{\delta r} = \frac{\delta\Theta}{\delta\eta} \frac{r}{2at}$$

$$\frac{\delta^2\Theta}{\delta r^2} = \frac{\delta^2\Theta}{\delta\eta^2} \cdot \frac{r^2}{4a^2t^2} + \frac{\delta\Theta}{\delta\eta} \frac{1}{2at}$$

reportons ces valeurs dans l'expression de l'équation de la chaleur, il vient :

$$\frac{\delta\Theta}{\eta} \left( -\frac{r^2}{4at} \right) = \frac{\delta^2\Theta}{\delta\eta^2} \cdot \frac{r^2}{4at} + \frac{\delta\Theta}{\delta\eta}$$

soit :

$$\eta \frac{\delta^2\Theta}{\delta\eta^2} + (1 + \eta) \frac{\delta\Theta}{\delta\eta} = 0$$

équation différentielle à une variable.

Posons alors :

$$\alpha = \frac{\delta\Theta}{\delta\eta}$$

on obtient :

$$\eta \frac{d\alpha}{d\eta} + (1 + \eta) \alpha = g$$

ou :

$$\frac{d\alpha}{\alpha} = -\left(\frac{1}{\eta} + 1\right) d\eta$$

qui s'intègre en :

$$\text{Log } \alpha = -\text{Log } \eta - \eta + \text{Log } A$$

d'où l'on tire :

$$\alpha = \frac{\delta\Theta}{\delta\eta} = Ae^{-\eta/\eta}$$

$\varphi_0$  étant le flux de chaleur en calories par centimètre injecté le long de l'axe des z par la source chauffante, on a sur une surface isotherme située à un rayon r de l'axe, et à l'instant t :

$$\varphi_0 = -2\pi rK \frac{\delta\Theta(r, t)}{\delta r} = -2\pi rK \frac{\delta\Theta}{\delta\eta} \frac{\delta\eta}{\delta r}$$

où K désigne la conductibilité thermique du milieu.

$$\text{or : } \frac{\delta\Theta}{\delta\eta} = A(e^{-\eta/\eta}) \quad \frac{\delta\eta}{\delta r} = \frac{r}{2at} \quad \text{et} \quad \eta = \frac{r^2}{4at}$$

$$\text{d'où : } \varphi_0 = -A \cdot 4\pi K e^{-\eta}$$

Si r est assez petit et t assez grand,  $\eta$  est voisin de zéro et  $e^{-\eta}$  voisin de 1. On a alors :  $A = -\varphi_0 / 4\pi K$  et l'équation de transmission de la chaleur au droit du cylindre devient :

$$\frac{\delta\Theta}{\delta\eta} = -\frac{\varphi_0}{4\pi K} e^{-\eta/\eta} \neq -\frac{\varphi_0}{4\pi K} \frac{1}{\eta}$$

Pour r donné petit ( $= r_0$ ) on peut intégrer entre les temps  $t_1$  et  $t_2$  :

$$\Theta_{r_0, t_2} - \Theta_{r_0, t_1} = -\frac{\varphi_0}{4\pi K} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{d\eta}{\eta} = -\frac{\varphi_0}{4\pi K} \text{Log} \frac{\eta_2}{\eta_1}$$

$$\text{ou : } \Theta_{r_0, t_2} - \Theta_{r_0, t_1} = \frac{\varphi_0}{4\pi K} \text{Log} \frac{t_2}{t_1}$$

formule qui permettra de mesurer la conductibilité K.

On notera que la simplification ne peut être faite que si l'on intègre entre des temps  $t_1$  et  $t_2$ , et pour une valeur de r tels que  $\eta$  soit *toujours* petit dans l'intervalle  $t_1, t_2$ . S'il n'en est pas ainsi, et en particulier si on intègre depuis une origine  $t_1 = 0$ , la simplification n'est plus valable et on doit conserver l'expression entière :

$$\Theta_{r, t} = -A \int_0^{t_2} \frac{\exp(-r^2/4at)}{t} dt$$

Par contre, si  $t_2$  et r remplissent les conditions précédentes, on peut conserver la valeur adoptée pour A. En adoptant pour simplifier la même notation pour  $t_2$  et pour t, on pourra donc écrire :

$$\Theta_{r,t} = \frac{\varphi_0}{4 \pi K} \int_0^t \frac{\exp(-r^2/4 at)}{t} dt$$

### 1.2.2.2. CAS D'UNE PERTURBATION THERMIQUE.

Le flux  $\varphi_0$  est maintenu, durant l'intervalle de temps  $\Delta t$  seulement, à partir de l'origine des temps.

Pour effectuer le calcul nous allons imaginer la succession des deux états suivants :

*Premier état.*

A l'instant 0, on injecte sur l'axe des z un flux calorifique  $+\varphi_0$  (en watts/cm) qui dure indéfiniment.

La loi d'établissement de la température se traduit par une fonction  $\Theta_1(r,t)$ .

*Deuxième état.*

A l'instant  $0 + \Delta t$ , on injecte sur l'axe des z un flux calorifique  $-\varphi_0$  (en watts/cm) qui dure aussi indéfiniment.

La loi d'établissement de la température est représentée par une fonction  $\Theta_2(r,t)$ .

Si on superpose ces deux états, on se trouve en présence d'un flux  $\varphi_0$  entre l'instant 0 et l'instant  $0 + \Delta t$ , ainsi que nous le voulions.

La loi d'établissement de la température est :

$$\Theta(r,t) = \Theta_1(r,t) + \Theta_2(r,t)$$

avec :

$$\Theta_1 = \frac{\varphi_0}{4 \pi K} \int_0^t \frac{\exp(-r^2/4 at)}{t} dt \quad \text{et} \quad \Theta_2 = -\frac{\varphi_0}{4 \pi K} \int_0^{t-\Delta t} \frac{\exp(-r^2/4 at)}{t} dt$$

d'où :

$$\Theta(r,t) = \frac{\varphi_0}{4 \pi K} \int_{t-\Delta t}^t \frac{\exp(-r^2/4 at)}{t} dt$$

Dans tout ce qui précède, nous avons supposé  $\Delta t$  court. En remplaçant l'intégrale par sa valeur moyenne, il vient :

$$\Theta(r,t) = \frac{\varphi_0 \Delta t}{4 \pi K} \exp(-r^2/4 at)/t$$

Le maximum est atteint lorsque la dérivée  $\frac{d\Theta}{dt}$  s'annule ; posons :

$$\lambda = \frac{r^2}{4 a}$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\varphi_0 \Delta t}{4 \pi K} \frac{e^{-\frac{\lambda}{t}}}{t^3} (\lambda - t)$$

La dérivée s'annule pour :

$$t = 0$$

$$t = \infty$$

et  $t = \frac{r^2}{4a}$  qui correspond au maximum de l'élévation de température.

Le temps de transport de l'onde calorifique est donc :

$$t_{s,r} = \frac{r^2}{4a}$$

Il lui correspond un maximum :

$$\Theta_{\max}(s,r) = \frac{\varphi_0 \Delta t}{\pi C e} \frac{1}{r^2}$$

Les calculs qui précèdent sont d'autant plus justifiés que  $\Delta t$  est plus petit et que  $t_{s,r}$  est plus grand.

*Remarque.*

Soit :

$$\lambda = \frac{r^2}{4a}$$

Nous avons démontré que, dans certaines conditions, dans le cas cylindrique :

$$\Theta_{\text{cyl.}}(r,t) = \frac{\varphi_0 \Delta t \exp(-\lambda/t)}{4 \pi K t}$$

Etudions de plus près la fonction :  $\zeta = \exp(-\lambda/t)/t$ .

Nous allons montrer que lorsque la valeur du paramètre  $\lambda$  varie, la courbe prend des formes géométriques variables qui peuvent se réduire à une seule courbe par quelques transformations simples.

Soit  $\zeta_m$  la valeur de  $\zeta$  correspondant au maximum de température, c'est-à-dire à la valeur  $t_s$  de  $t$ .

Nous savons que :

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{e^{-\lambda/t}}{t^3} (\lambda - t)$$

qui s'annule pour :  $t = 0$

$$t = \lambda = t_s$$

$$t \rightarrow \infty$$



d'où :

$$\zeta_m = \frac{1}{\lambda e}$$

Comparons les valeurs de  $t_s$  et  $\zeta_m$  correspondant à deux valeurs  $\lambda'$  et  $\lambda''$  de  $\lambda$  :

$$\zeta'_m = \frac{1}{\lambda' e} \quad t'_s = \lambda'$$

$$\zeta''_m = \frac{1}{\lambda'' e} \quad t'' = \lambda''$$

Il apparaît immédiatement :

$$\frac{t'_s}{t''} = \frac{\lambda'}{\lambda''} \quad \text{et} \quad \frac{\zeta'_m}{\zeta''_m} = \frac{\lambda''}{\lambda'}$$

soit :

$$\frac{\zeta'_m}{\zeta''_m} = \left( \frac{t'_s}{t''} \right)^{-1}$$

$\zeta_m$  et  $t_s$  varient donc de façon inverse.

D'une façon plus générale, soit :

$$\zeta' = \exp(-\lambda'/t)/t \quad \text{et} \quad \zeta'' = \exp(-\lambda''/t'')/t''$$

Si :  $t' = \lambda' t'' / \lambda''$ , il vient :

$$\zeta' = \exp\left(-\lambda' / \frac{\lambda'}{\lambda''} t''\right) / \frac{\lambda'}{\lambda''} t'' = \frac{\lambda''}{\lambda'} \zeta''$$

On a donc bien :

$$\frac{\zeta'}{\zeta''} = \left( \frac{t'}{t''} \right)^{-1} = \frac{\lambda''}{\lambda'}$$

Il suffira donc de tracer la fonction  $\zeta = \frac{e^{-\lambda/t}}{t}$  pour une seule valeur du paramètre  $\lambda$

les autres valeurs de  $\zeta$  et  $t$  seront obtenues facilement par :

$$\zeta'' = \frac{\lambda'}{\lambda''} \zeta'$$

$$t'' = \frac{\lambda''}{\lambda'} t'$$

Nous avons calculé la fonction  $\frac{e^{-\lambda}}{t}$  pour une valeur particulière du paramètre  $\lambda$  correspondant à  $r = 1,5$  cm et  $a = 10^{-2}$  cm<sup>2</sup>/s :

soit :  $\lambda = 56,25$

Nous pouvons facilement passer à toute autre valeur de  $\lambda$  correspondant à des  $r$  et  $a$  différents ainsi que nous l'avons vu précédemment.

Le tableau de ces résultats, dont les courbes correspondantes sont représentées figure 2, est donné à la fin de la première partie.

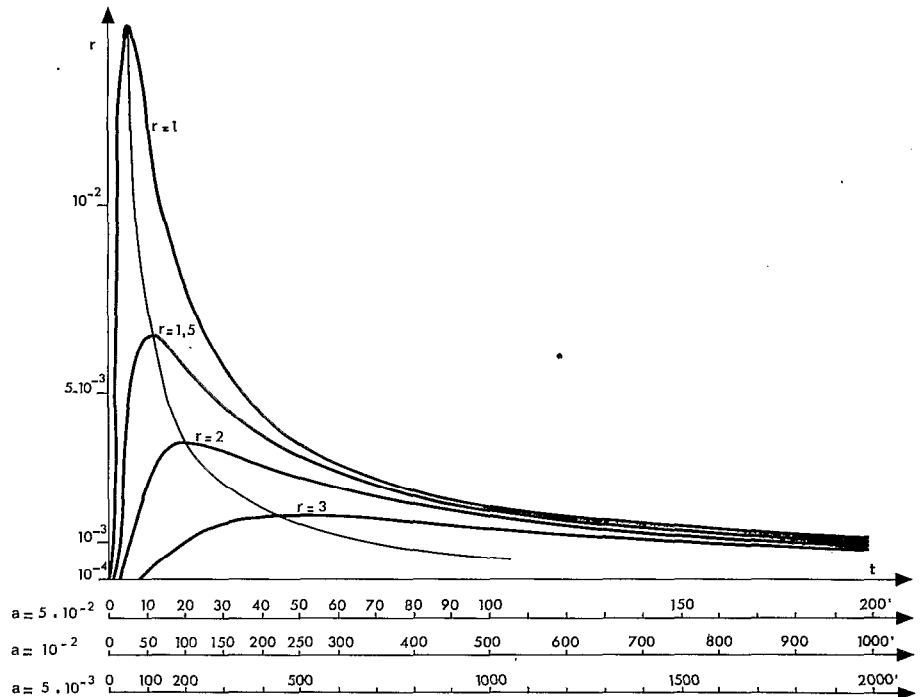


Fig. 2 — Fonction  $\frac{e^{-\lambda} t}{t}$  avec  $\lambda = \frac{r^2}{4a}$  pour diverses valeurs de  $r$ ,  $a$ , et  $t$ .

### 1.2.3. CAS SPHERIQUE.

La modification initiale de température se fait ponctuellement. Les isothermes conservent donc une forme sphérique.

L'équation de la chaleur prend dans ce cas une forme simple :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right)$$

puisque les autres dérivées partielles de  $\Theta$  sont nulles.

1.2.3.1. *Cas sphérique de la mise en température d'un milieu infini initialement à la température 0 par un flux de chaleur  $\Phi_0$  (en watts) émis ponctuellement.*

Reprenons le même changement de variable :

$$\eta = \frac{r^2}{4at}$$

L'équation de la chaleur devient :

$$\eta \frac{\delta^2 \Theta}{\delta \eta^2} + \frac{\delta \Theta}{\delta \eta} \left( \eta + \frac{3}{2} \right) = 0$$

Posons :  $\alpha = \frac{\delta \Theta}{\delta \eta}$  il vient :  $\frac{d\alpha}{\alpha} = - \left( \frac{3/2}{\eta} + 1 \right) d\eta$

d'où :

$$= \frac{d\Theta}{d\eta} = A \frac{e^{-\eta}}{\eta^{3/2}}$$

et :

$$\Theta(r,t) = A \int_{+\infty}^{\eta} \frac{e^{-\eta}}{\eta^{3/2}} d\eta + B$$

On trouve facilement que  $B = 0$ . Calculons le flux traversant une isotherme de rayon  $r$  :

$$\Phi_0 = 4 \pi r^2 K \frac{\delta \Theta}{\delta r} = 4 \pi r^2 K \frac{\delta \Theta}{\delta \eta} \frac{\delta \eta}{\delta r}$$

d'où :

$$\Phi_0 = 8 \pi r K A \frac{e^{-\eta}}{\eta^{1/2}}$$

Si  $r$  est petit et  $t$  grand,  $\eta \rightarrow 0$  et  $e^{-\eta} \rightarrow 1$ , et on a :

$$A = \frac{\Phi_0}{16\pi K \sqrt{a}} \frac{1}{\sqrt{t}}$$

La présence de  $t$  peut paraître bizarre dans la « constante »  $A$ . En fait, de nombreuses approximations ont été faites au cours de ce calcul, et seule l'expérimentation sera à même de vérifier la théorie. On aurait donc, en repassant à  $t$  :

$$\Theta(r,t) = \frac{\Phi_0}{8 \pi K r \sqrt{t}} \int_0^t \frac{\exp(-r^2/4at)}{\sqrt{t}} dt$$

On a conservé la même notation  $t$  pour la variable d'intégration et pour la limite supérieure assignée à la variation de cette variable. Le  $t$  sous le signe somme n'a donc pas la même signification que celui qui est en dehors.

### 1.2.3.2. Cas d'une perturbation thermique.

En reprenant la même superposition de deux états d'équilibre que dans le cas cylindrique, il vient :

$$\Theta_{r,t} = \frac{\Phi_0}{8 \pi K r \sqrt{t}} \int_{t-\Delta t}^t \frac{\exp(-r^2/4 at)}{\sqrt{t}} dt$$

soit, en prenant la valeur moyenne de l'intégrale :

$$\Theta(r,t) = \frac{\Phi_0 \Delta t}{8 \pi K r} \frac{\exp(-r^2/4 at)}{t}$$

Le maximum est atteint lorsque  $\frac{d\Theta}{dt}$  s'annule, soit, en posant  $\lambda = \frac{r^2}{4a}$  :

$$\frac{d\Theta}{dt} = \text{Cst} \frac{e^{-\lambda/t}}{t^3} (\lambda - t) = 0$$

En coordonnées cylindriques, compte tenu de la symétrie de révolution existante, l'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \right)$$

Cette équation n'a pas de solution simple.

Pour tourner la difficulté, nous allons utiliser les résultats de la 3<sup>e</sup> partie (cas sphérique) en imaginant le schéma de calcul suivant :

L'élévation de température  $\Theta_{z,r,t}$  est la somme d'élévations de température élémentaires  $d\Theta_{z,r,t}$ , produites par des éléments de longueur  $dz$  de la source chaude de longueur  $2c$ .

Chacun de ces éléments  $dz$  peut être assimilé à 1 point, on peut lui appliquer les relations obtenues dans le cas sphérique. Soit, en particulier, dans le cas de la perturbation thermique :

$$d\Theta_{z_0,r,t} = \frac{\varphi_0 \Delta t}{8 \pi K \rho} \frac{\exp(-\rho^2/4 at)}{t} dz$$

pour un point  $P_0$  de coordonnées  $z_0$  et  $r$ ,

où  $\rho =$  distance du point considéré  $P_0$  à l'élément  $dz$

soit  $\rho = \sqrt{r^2 + (z-z_0)^2}$  ;  $z_0$  est la cote de  $P_0$ ,  $z$  la cote de l'élément  $dz$  ;  $\varphi_0 dz$  joue le rôle du flux  $\Phi_0$  du cas sphérique.  $\varphi_0$  s'exprime en watt/cm.

On a, en  $P_0$  :

$$d\Theta_{z_0,r,t} = \frac{\varphi_0 \Delta t}{8 \pi K \sqrt{r^2 + (z-z_0)^2}} \frac{\exp\left(-\frac{r^2 + (z-z_0)^2}{4 at}\right)}{t} dz$$

d'où :  $\lambda = t_{s,r} = r^2/4 a$

et :  $\Theta_{\max}(s,r) = \frac{\Phi_0 \Delta t}{2 \pi C e} \frac{1}{r^3}$

Avec les mêmes restrictions pour l'exactitude des résultats.

*Remarques.*

Les courbes déterminées pour le cas cylindrique peuvent encore s'appliquer dans le cas sphérique. Seul, en effet, le terme constant est modifié.

On a :  $\frac{\varphi_0 \Delta t}{4 \pi K}$  dans le cas cylindrique.

et :  $\frac{\Phi_0 \Delta t}{8 \pi K r}$  dans le cas sphérique.

Il suffit donc, pour un  $r$  choisi, de rentrer dans la table avec la valeur  $\lambda$  de  $\frac{r^2}{4 a}$  ainsi déterminée et d'en déduire les variations de  $\Theta_{r,t}$  en fonction de  $t$ .

#### 1.2.4. CAS « ELLIPSOÏDAL ».

La modification de température se fait initialement sur un segment de droite de longueur  $2 c$ , que nous confondrons avec l'axe des  $z$ , le centre du segment étant pris pour origine.

$z$  variant de  $-c$  à  $+c$ , il vient :

$$\Theta_{z_0,r,t} = \frac{\varphi_0 \Delta t}{8 \pi K} \int_{-c}^{+c} \frac{\exp\left(-\frac{r^2 + (z-z_0)^2}{4 at}\right)}{t \sqrt{r^2 + (z-z_0)^2}} dz$$

Il n'est pas question d'intégrer cette équation directement. Par contre, on peut calculer le maximum en  $t$  de  $\Theta_{z_0,r,t}$ . Il suffit de calculer  $\frac{d\Theta}{dt}$  en dérivant en  $t$  sous le signe somme, soit :

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\varphi_0 \Delta t}{8 \pi K} \int_{-c}^{+c} \frac{d}{dt} \left( \frac{\exp\left(-\frac{r^2 + (z-z_0)^2}{4 at}\right)}{t \sqrt{r^2 + (z-z_0)^2}} \right) dz$$

Cette dernière s'annule pour :

$$\frac{\exp\left(-\frac{r^2 + (z-z_0)^2}{4at}\right)}{\sqrt{r^2 + (z-z_0)^2}} \left(\frac{r^2 + (z-z_0)^2 - 4at}{4at^3}\right) = 0$$

soit pour  $t = 0$

$$t = \infty$$

et  $t = \frac{r^2 + (z-z_0)^2}{4a}$  auquel correspond le maximum.

On a donc :

$$t_{s,r,z_0} = \frac{r^2 + (z-z_0)^2}{4a}$$

et :

$$\Theta_{\max(s,r,z_0)} = \frac{\varphi_0 \Delta t}{2\pi C e} \int_{-c}^{+c} \frac{dz}{(r^2 + (z-z_0)^2)^{3/2}}$$

où :

$$C = K/a$$

En intégrant, on obtient pour  $r \neq 0$  :

$$\Theta_{\max(s,r,z_0)} = \frac{\varphi_0 \Delta t}{2\pi C e} \left( \frac{c-z_0}{r^2} \frac{1}{\sqrt{r^2 + (c-z_0)^2}} + \frac{c+z_0}{r^2} \frac{1}{\sqrt{r^2 + (c+z_0)^2}} \right)$$

Si  $P_0$  est situé au milieu du segment  $2c$ ,  $z_0 = 0$  et :

$$\Theta_{\max(s,r)} = \frac{\varphi_0 \Delta t}{\pi C e} \frac{1}{r^2} \frac{c/r}{\sqrt{1 + (c/r)^2}}$$

Ou, en faisant intervenir le flux total  $\Phi_0$  :

$$\Theta_{\max(s,r)} = \frac{\Phi_0 \Delta t}{2\pi C e} \frac{1}{r^3} \frac{1}{\sqrt{1 + (c/r)^2}}$$

La méthode utilisée ne permet pas de calculer le temps auquel a lieu le maximum. En effet la valeur :

$$t_{s,r,z_0} = \frac{r^2 + (z-z_0)^2}{4a}$$

n'a pas de signification physique autre que celle de traduire le temps mis par le maximum de l'onde calorifique émise par l'élément de source  $dz$  pour atteindre  $P_0$ .

Les isothermes ne sont pas des surfaces simples. Selon les valeurs de  $r_0$  et  $z_0$  elles prennent des aspects caractéristiques différents :

— Si  $r$  ou  $z \rightarrow \infty$ , on se rapproche du cas sphérique. Les isothermes sont alors des sphères.

— Si  $r \rightarrow 0$  avec  $z \leq c$ , les isothermes se rapprochent des cylindres.

Dans tous les autres cas, les isothermes ne sont pas des courbes simples. On pourrait déterminer le lieu des points où on observe des maximums égaux ; pour cela il suffit de faire  $\Theta_{\max}(s,r,z_0) = \text{Cst}$ , mais les calculs faits ne permettent pas de savoir s'il s'agit effectivement d'isothermes, puisque rien ne prouve que ces maximums soient atteints au même moment.

Néanmoins, si les  $d\Theta_{\max}$  élémentaires étaient fonction de  $1/t$  seulement au lieu d'être fonction de  $\frac{e^{-\rho^2/4at}}{t}$ , les isothermes seraient alors des ellipsoïdes ayant pour foyer les extrémités de la partie chauffante.

Pour cela il suffirait que  $e^{-\frac{\rho^2}{4at}}$  soit approximativement constant et égal à 1, ce qui est vrai si  $\frac{\rho^2}{4at}$  reste voisin de 0 ; ce qui exige :

— soit  $\rho$  petit, cas peu intéressant,

— soit  $4at$  assez grand.

Dans le cas expérimental, nous verrons que nous sommes très près de cette dernière condition. On peut alors sensiblement assimiler les surfaces isothermes à des ellipsoïdes de foyers  $+c$  et  $-c$ .

Le calcul de  $\Theta_{\max}(r,z_0,t)$  tel que nous l'avons mené, exclut la valeur  $r = 0$ .

Nous allons le reprendre dans ce cas particulier, c'est-à-dire pour un point  $P_0$  situé sur l'axe des  $z$ , en dehors du segment chauffant bien entendu.

On a :

$$\Theta(z_0,t) = \frac{\varphi_0 \Delta t}{8 \pi K} \int_{-c}^{+c} \frac{\exp(-(z_0 - z)^2/4at)}{t(z_0 - z)} dz$$

et :

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\varphi_0 \Delta t}{8 \pi K} \int_{-c}^{+c} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\exp(-(z_0 - z)^2/4at)}{t(z_0 - z)} \right] dz$$

qui s'annule pour :  $t = (z_0 - z)^2/4a$

d'où :

$$\Theta_{\max}(s,z_0) = \frac{\varphi_0 \Delta t}{8 \pi K e} \int_{-c}^{+c} \frac{4a}{(z_0 - z)^3} dz$$

En intégrant et en faisant  $C = K/a$ , on trouve finalement :

$$\Theta_{\max}(s,z_0) = \frac{\varphi_0 \Delta t}{\pi C e} \frac{z_0 c}{(z_0^2 - c^2)^2}$$

Si  $c = 0$ , on revient au cas sphérique déjà traité.

Note.

Nous en étions arrivés, pour la température au temps  $t$ , à la distance  $r$  de la source chauffante  $2c$  à l'expression :

$$\Theta_{z_0,r,t} = \frac{\varphi_0 \Delta t}{8 \pi K} \int_{-c}^{+c} \frac{\exp\left(-\frac{r^2 + (z-z_0)^2}{4at}\right)}{t \sqrt{r^2 + (z-z_0)^2}} dz$$

Il n'existe pas de fonction solution de cette intégrale. Nous pouvons toutefois simplifier l'expression. Plaçons-nous tout d'abord dans le plan médiateur de la source chauffante ; l'expression se simplifie en :

$$\Theta_{r,t} = \frac{\varphi_0 \Delta t}{8 \pi K} \int_{-c}^{+c} \frac{\exp\left(-\frac{r^2 + z^2}{4at}\right)}{t \sqrt{r^2 + z^2}} dz$$

La fonction sous le signe somme est une fonction paire en  $z$ . Nous avons donc :

$$\Theta_{r,t} = \frac{\varphi_0 \Delta t}{4 \pi K} \int_0^c \frac{\exp\left(-\frac{r^2 + z^2}{4at}\right)}{t \sqrt{r^2 + z^2}} dz$$

Nous pouvons mettre en facteur dans l'intégrale, et l'en sortir, la fonction de  $t$ ,

$$\frac{e^{-\frac{r^2}{4at}}}{t}$$

qui est indépendante de  $z$ , soit :

$$\Theta_{r,t} = \frac{\varphi_0 \Delta t \exp(-r^2/4at)}{4 \pi K} \int_0^c \frac{\exp(-z^2/4at)}{\sqrt{r^2 + z^2}} dz$$

Dans la première partie de l'expression, nous reconnaissons le résultat trouvé dans le cas cylindrique. Soit  $\Theta_{cy1}$  cette partie de l'expression et posons :

$$\Gamma = \int_0^c \frac{\exp\left(-\frac{z^2}{4at}\right)}{\sqrt{r^2 + z^2}} dz$$

Il vient :

$$e_{11} \Theta_{r,t} = \Gamma \cdot e_{y1} \Theta_{r,t}$$

Nous avons déjà vu comment  $e_{y1} \Theta_{r,t}$  pouvait être calculé. Il reste donc à calculer  $\Gamma$ .

$\Gamma$  est une fonction de quatre paramètres :

$a$  : diffusivité thermique,

$r$  : distance à la source chauffante,



c : demi-longueur de cette source chauffante,  
t : temps.

Il n'est pas possible d'intégrer cette équation. Nous allons donc la calculer numériquement pour certaines valeurs des paramètres.

Nous avons adopté la méthode suivante :

— Nous fixons tout d'abord r ;

— On remarque que  $\Gamma$  dépend de a et t sous la forme de leur produit exclusivement.

Nous fournirons pour chaque valeur de r retenue un tableau où figurent les valeurs de  $\Gamma$  pour des valeurs données de c et de a t. Il est facile de tracer  $\Theta(t)$  lorsque les paramètres de forme (r et c), de sol (a et K) et de chauffe ( $\varphi_0$  et  $\Delta t$ ) sont fixés.

Il suffit de tracer tout d'abord  $c_{y1} \Theta(t)$  ainsi que nous l'avons montré, puis de tracer  $\Gamma(t)$  grâce aux tableaux et courbes fournies, ensuite d'effectuer le produit  $\Gamma(t) \cdot c_{y1} \Theta(t)$  point par point.

On peut alors vérifier que la valeur du maximum trouvé correspond à la valeur calculée par :

$$\Theta_{\max}(r,t) = \frac{\varphi_0 \Delta t}{\pi C e} \frac{1}{r^2} \frac{c/r}{\sqrt{1 + (c/r)^2}}$$

Nous fournissons ci-après les tableaux et les courbes utiles à ces calculs (fig. 3).

TABLEAU DE CALCUL DE  $\frac{e^{-\lambda/t}}{t}$   
POUR DIVERSES VALEURS DE at ET DE r

at	r = 1,0 cm		r = 1,5 cm		r = 2,0 cm		r = 3,0 cm	
	A	B	A	B	A	B	A	B
1	5,00	$135 \cdot 10^{-5}$	11,25	$33 \cdot 10^{-7}$	20,00	0	45,00	0
2	2,500	$821 \cdot 10^{-5}$	5,625	$36 \cdot 10^{-9}$	10,00	0	22,50	0
3	1,667	$126 \cdot 10^{-4}$	3,750	$157 \cdot 10^{-5}$	6,67	0	15,00	0
4	1,250	$143 \cdot 10^{-4}$	2,812	$301 \cdot 10^{-5}$	5,00	$34 \cdot 10^{-5}$	11,25	0
5	1,000	$147 \cdot 10^{-4}$	2,250	$422 \cdot 10^{-5}$	4,00	$73 \cdot 10^{-5}$	9,00	0
6	0,833	$145 \cdot 10^{-4}$	1,875	$510 \cdot 10^{-5}$	3,33	$120 \cdot 10^{-5}$	7,50	0
8	0,625	$134 \cdot 10^{-4}$	1,405	$613 \cdot 10^{-5}$	2,50	$205 \cdot 10^{-5}$	5,62	$905 \cdot 10^{-5}$
10	0,500	$121 \cdot 10^{-4}$	1,125	$650 \cdot 10^{-5}$	2,00	$270 \cdot 10^{-5}$	4,50	$22 \cdot 10^{-5}$
12	0,417	$110 \cdot 10^{-4}$	0,939	$652 \cdot 10^{-5}$	1,67	$314 \cdot 10^{-5}$	3,75	$39 \cdot 10^{-5}$
14	0,357	$100 \cdot 10^{-4}$	0,804	$640 \cdot 10^{-5}$	1,43	$342 \cdot 10^{-5}$	3,22	$57 \cdot 10^{-5}$
16	0,312	$92 \cdot 10^{-4}$	0,704	$618 \cdot 10^{-5}$	1,25	$358 \cdot 10^{-5}$	2,81	$75 \cdot 10^{-5}$
18	0,278	$84 \cdot 10^{-4}$	0,625	$595 \cdot 10^{-5}$	1,11	$366 \cdot 10^{-5}$	2,50	$91 \cdot 10^{-5}$
20	0,250	$78 \cdot 10^{-4}$	0,562	$570 \cdot 10^{-5}$	1,00	$368 \cdot 10^{-5}$	2,25	$105 \cdot 10^{-5}$
25	0,200	$65 \cdot 10^{-4}$	0,450	$511 \cdot 10^{-5}$	0,80	$359 \cdot 10^{-5}$	1,80	$132 \cdot 10^{-5}$
30	0,167	$56 \cdot 10^{-4}$	0,375	$460 \cdot 10^{-5}$	0,67	$341 \cdot 10^{-5}$	1,50	$149 \cdot 10^{-5}$
35	0,143	$49 \cdot 10^{-4}$	0,321	$414 \cdot 10^{-5}$	0,57	$313 \cdot 10^{-5}$	1,29	$157 \cdot 10^{-5}$
40	0,125	$44 \cdot 10^{-4}$	0,281	$380 \cdot 10^{-5}$	0,50	$303 \cdot 10^{-5}$	1,12	$163 \cdot 10^{-5}$
50	0,100	$36 \cdot 10^{-4}$	0,225	$320 \cdot 10^{-5}$	0,40	$268 \cdot 10^{-5}$	0,90	$163 \cdot 10^{-5}$
60	0,083	$31 \cdot 10^{-4}$	0,187	$280 \cdot 10^{-5}$	0,33	$239 \cdot 10^{-5}$	0,75	$156 \cdot 10^{-5}$
80	0,062	$23 \cdot 10^{-4}$	0,141	$217 \cdot 10^{-5}$	0,25	$195 \cdot 10^{-5}$	0,56	$143 \cdot 10^{-5}$
100	0,050	$19 \cdot 10^{-4}$	0,112	$180 \cdot 10^{-5}$	0,20	$164 \cdot 10^{-5}$	0,45	$128 \cdot 10^{-5}$
200	0,025	$10 \cdot 10^{-4}$	0,056	$95 \cdot 10^{-5}$	0,10	$90 \cdot 10^{-5}$	0,22	$80 \cdot 10^{-5}$

TABLEAU DES DIVERSES VALEURS DE  $\Gamma$  POUR DIVERSES VALEURS DE  $a$ , DE  $c$  ET DE  $r$

$r$ cm	$c$ cm	$a$ 0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	4,00	5,00	7,50	10,00
1,0	0,5	0,360	0,401	0,430	0,440	0,442	0,462	0,475	0,480	0,485	0,487					
	1,0	0,390	0,520	0,600	0,640	0,675	0,760	0,820	0,830	0,840	0,850					
	1,5	0,390	0,520	0,630	0,700	0,757	0,912	1,030	1,075	1,100	1,130					
	2,0	0,390	0,520	0,630	0,310	0,782	0,960	1,150	1,240	1,280	1,310					
	3,0	0,390	0,520	0,630	0,710	0,782	0,990	1,240	1,365	1,440	1,510					
	4,0	0,390	0,520	0,630	0,710	0,782	0,990	1,265	1,420	1,525	1,610					
		0,390	0,520	0,630	0,710	0,782	0,990	1,265	1,425	1,540	1,650					
1,5	0,5	0,225	0,265	0,285	0,300	0,305	0,310	0,315	0,320	0,325	0,329	0,331	0,331	0,332	0,332	0,333
	1,0	0,260	0,355	0,420	0,465	0,485	0,543	0,585	0,600	0,612	0,620	0,625	0,626	0,630	0,631	0,632
	1,5	0,260	0,355	0,440	0,502	0,543	0,660	0,760	0,800	0,825	0,840	0,850	0,855	0,860	0,865	0,870
	2,0	0,260	0,355	0,440	0,502	0,554	0,703	0,860	0,935	0,970	0,995	1,012	1,035	1,050	1,060	1,072
	3,0	0,260	0,355	0,440	0,502	0,565	0,730	0,945	1,060	1,130	1,190	1,215	1,265	1,305	1,342	1,382
	4,0	0,260	0,355	0,440	0,502	0,565	0,730	0,955	1,110	1,190	1,265	1,310	1,400	1,454	1,520	1,575
		0,260	0,355	0,440	0,502	0,565	0,730	0,955	1,110	1,210	1,307	1,400	1,510	1,605	1,770	1,910
2,0	0,5	0,180	0,210	0,220	0,230	0,232	0,240	0,243	0,245	0,246	0,247					
	1,0	0,205	0,275	0,315	0,345	0,366	0,416	0,447	0,455	0,462	0,469					
	1,5	0,205	0,280	0,335	0,380	0,416	0,514	0,595	0,625	0,640	0,650					
	2,0	0,205	0,280	0,335	0,390	0,431	0,562	0,680	0,740	0,770	0,791					
	3,0	0,205	0,280	0,335	0,390	0,431	0,578	0,750	0,850	0,910	0,961					
	4,0	0,205	0,280	0,335	0,390	0,431	0,578	0,772	0,885	0,965	1,035					
		0,205	0,280	0,335	0,390	0,431	0,578	0,770	0,900	0,990	1,073					

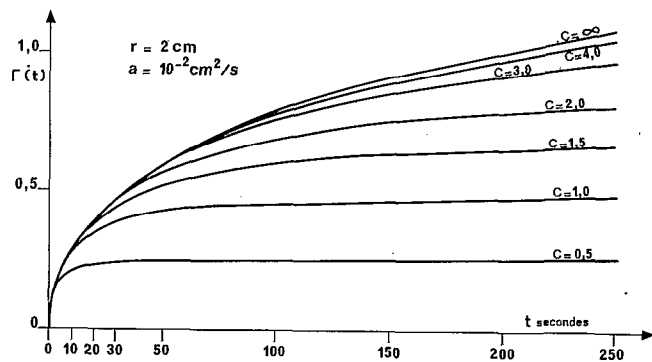
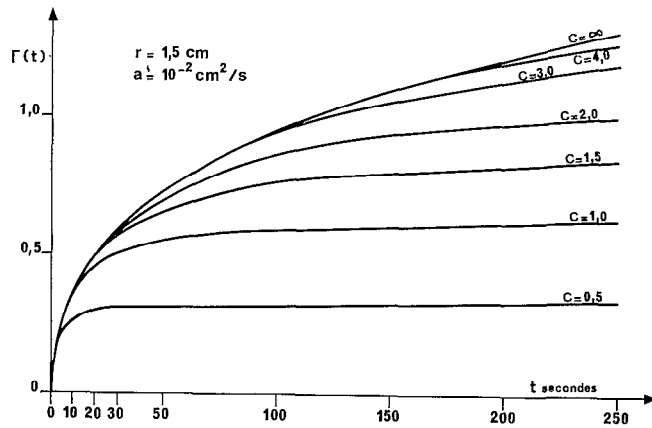
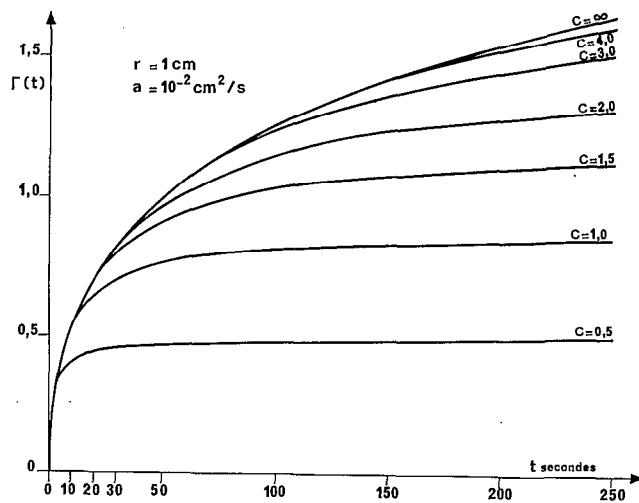


Fig. 2. — Valeur de  $\Gamma(t)$  pour plusieurs valeurs de  $C$