

Pour une théorie modifiée de l'infiltration

4^e partie : le drainage vu comme une infiltration d'air

Hubert-J. MOREL-SEYTOUX

Chargé de Recherches au CNRS,
Institut de Mécanique de Grenoble
et Professeur de Génie Civil
à l'Université d'Etat du Colorado, Fort-Collins (Colorado)

RÉSUMÉ

Si l'on traite les mouvements de l'eau et de l'air dans le sol par la formulation biphasique, on s'aperçoit rapidement que les problèmes d'infiltration et de drainage peuvent être résolus d'une manière parfaitement symétrique. L'infiltration est un problème de déplacement de l'air par l'eau. Le drainage est tout simplement un problème de déplacement de l'eau par l'air. Il n'est alors pas surprenant que la loi de drainage d'une colonne ait la même structure mathématique que la loi d'infiltration dérivée précédemment.

ABSTRACT

With the two-phase approach problems of drainage and of infiltration can be treated in a perfectly symmetric way. Infiltration is a phenomenon of displacement of air by water. Drainage is similarly a phenomenon of displacement of water by air. It is therefore not surprising that the law of drainage of a vertical column has the very same mathematical structure as the law of infiltration derived previously.

Dans les trois premiers articles de cette série, on s'est attaché à montrer qu'il était non seulement plus physique, mais aussi plus efficace de tenir compte de l'air pour décrire le mouvement de l'eau dans la zone non-saturée.

Comme les trois articles traitaient seulement du problème de l'infiltration, on peut légitimement se demander si la conclusion ci-dessus s'applique aux autres problèmes de l'écoulement de l'eau dans la zone non-saturée, en particulier au drainage. On va montrer que la conclusion s'applique également dans ce cas.

1. UN PROBLÈME DE DRAINAGE

Comme dans le cas de l'infiltration, on va traiter un cas de drainage bien particulier. Au départ la colonne est en équilibre capillaire. On suppose que cet équilibre a été atteint par drainage. On suppose aussi que cet équilibre date de longtemps et que par suite tout air résiduel a disparu de la zone saturée. La position de la nappe phréatique est suffisamment profonde pour que la teneur en eau au sommet de la colonne y soit résiduelle. Il n'y a pas d'évaporation au sommet de la colonne et la colonne est homogène. La figure 1 illustre les caractéristiques géométriques de la colonne et la distribution de la teneur en eau initiale dans la colonne. Au temps zéro, on abaisse brusquement la position du niveau d'eau à pression atmosphérique de la distance H et on l'y maintient indéfiniment. On veut prédire le débit d'eau sortant de la colonne en fonction du temps.

2. RAPPEL DE DÉFINITIONS DE BASE

La vitesse (dans le sens de Darcy) de l'écoulement de l'eau dans le sol est donnée par l'équation :

$$v_w = - \frac{k k_{rw}}{\mu_w} \frac{\partial p_w}{\partial z} + \frac{k k_{rw}}{\mu_w} \rho_w g \quad (1)$$

avec les notations habituelles (MOREL-SEYTOUX, 1973 a ; MOREL-SEYTOUX, 1973 b). L'équation correspondante pour l'air est :

$$v_a = - \frac{k k_{ra}}{\mu_a} \frac{\partial p_a}{\partial z} + \frac{k k_{ra}}{\mu_a} \rho_a g \quad (2)$$

On définit la vitesse totale, v , comme la somme algébrique de v_w et v_a . Comme précédemment (MOREL-SEYTOUX, 1973 b) on a également la relation :

$$\frac{v}{\Lambda} = - \frac{\partial p_w}{\partial z} - f_a \frac{\partial p_c}{\partial z} + \rho_w g f_w \quad (3)$$

où f_a est tout simplement $1 - f_w$. Dans l'équation (3), on a négligé les termes en ρ_a qui sont très petits par rapport aux termes en ρ_w . On désigne par θ la teneur en eau et par θ_a la teneur en air. Par définition, on a :

$$\theta + \theta_a = \varnothing \quad (4)$$

où \varnothing est la porosité. On désigne par h_c la pression capillaire exprimée en hauteur d'eau. On a donc par définition :

$$h_c = \frac{p_c}{\rho_w g} \quad (5)$$

On utilise l'indice inférieur i , pour indiquer une valeur initiale.

3. LA LOI DU DRAINAGE

Comme l'air est en contact permanent avec l'atmosphère, l'effet de compression d'air est négligeable. Par suite, la vitesse totale v est la même dans toute la colonne. La vitesse totale varie avec le temps mais ne varie pas avec la coordonnée z . Ce résultat a été prouvé dans un article précédent (MOREL-SEYTOUX, 1973 b). L'intégration de l'équation (3) par rapport à z entre le sommet et le bas de la colonne, donne le résultat :

$$v = \frac{p_{w1} - p_{w2} - \int_1^2 f_a dp_c + \rho_w g \int_1^2 f_w dz}{\int_1^2 \frac{dz}{\Lambda}} \quad (6)$$

où l'indice inférieur 1 se réfère au sommet de la colonne et l'indice 2 au bas de la colonne. Comme seule l'eau s'écoule au bas de la colonne, v représente le débit d'eau sortant de la colonne. Par contre, au sommet de la colonne, seul l'air s'écoule et par conséquent v représente également le taux d'infiltration d'air. Il est clair donc que le problème de drainage d'eau est identique à un problème d'infiltration (d'air). A ce stade on serait tenté d'appliquer la loi d'infiltration dérivée précédemment (MOREL-SEYTOUX, 1973 b) en permutant simplement les indices w et a . Cependant, si les équations sont parfaitement symétriques, les conditions initiales ne le sont pas. Il faut donc regarder le problème de plus près.

Au sommet de la colonne la pression d'air est atmosphérique de valeur p_A et par suite la pression d'eau y a la valeur $p_A - \rho_w g h_{ci}$. Au temps zéro, juste avant que l'on abaisse le manomètre, la pression d'eau, p_{w2} , au bas de la colonne, a la valeur $p_A + \rho_w g D$, puisque la colonne est en équilibre hydrostatique. Dans ce cas, le numérateur de l'équation (6) a la forme :

$$N = - \rho_w g h_{ci} - \rho_w g D - \int_1^2 f_a dp_c + \rho_w g \int_1^2 f_w dz \quad (7)$$

On peut réécrire N sous la forme :

$$N = \rho_w g \left[- h_{ci} - D - \int_1^2 dh_c + \int_1^2 f_w (dh_c + dz) \right] \quad (8)$$

Comme dans la zone saturée ($L - D \leq z \leq L$) h_c est égal à zéro et comme dans cette même zone $f_w = 1$, l'équation (8) se transforme en :

$$N = \rho_w g \left[- h_{ci} - D + \int_0^{h_{ci}} dh_c + \int_0^{L-D} f_w (dh_c + dz) + \int_{L-D}^L dz \right] \quad (9)$$

et plus précisément :

$$N = \rho_w g \left[-h_{ci} - D + h_{ci} + \int_0^{L-D} f_w (dh_c + dz) + D \right] \quad (10)$$

Ce numérateur a la valeur zéro puisque à l'équilibre on a identiquement dans la zone non-saturée $dh_c + dz = 0$. Ce résultat n'est pas surprenant. Il prouve simplement que l'équation (6) n'est probablement pas en erreur.

Après l'abaissement du manomètre, la pression d'eau p_{w2} au bas de la colonne est maintenue à la valeur $p_A + \rho_w g (D - H)$. L'équation (6) prend la forme :

$$v = \frac{\rho_w g \left[-h_{ci} - D + H - \int_0^L f_a dh_c + \int_0^L f_w dz \right]}{\int_0^L \frac{dz}{\Lambda}} \quad (11)$$

ou

$$v = \frac{K \left[H - D - h_{ci} - \int_0^L dh_c + \int_0^L f_w (dh_c + dz) \right]}{\frac{1}{\mu_w} \int_0^L \frac{dz}{\Lambda_r}} \quad (12)$$

où K est la conductivité hydraulique à saturation complète et où Λ_r est la mobilité totale relative, c'est-à-dire Λ/k . L'équation (12) se simplifie davantage et prend la forme finale :

$$v = \frac{K \left[H - D - H_c + \int_0^L f_w dz \right]}{\frac{1}{\mu_w} \int_0^L \frac{dz}{\Lambda_r}} \quad (13)$$

où H_c est défini comme précédemment par l'expression :

$$H_c = \int_0^{h_{ci}} f_w dh_c \quad (14)$$

On voit à nouveau, comme dans le cas de l'infiltration, qu'on n'a pas besoin de déterminer le profil de teneur en eau (ou en air) pour calculer le terme de résistance capillaire (et non plus de poussée capillaire comme dans le cas de l'infiltration. La détermination des profils de teneur en air n'est nécessaire que pour évaluer le terme gravitaire (l'intégrale du numérateur) et le terme de résistance visqueuse (le dénominateur). Dans les articles précédents, on n'a pas discuté en détail la base (philosophique) de la méthode de calcul utilisé pour calculer ces deux termes. Il paraît opportun d'y consacrer quelques lignes.

4. LA MÉTHODE « COHÉRENTE » DES PROFILS « INCOHÉRENTS »

Il y a une solution exacte au problème de drainage qui nous intéresse. Il existe un nombre infini de solutions approchées. Pour obtenir la solution exacte, il faudrait recourir à des méthodes numériques sur ordinateur. On peut espérer obtenir une bonne solution approchée à moindre frais. Dès l'instant où l'on accepte de faire des approximations, il n'y a pas de raison convaincante pour utiliser la même approximation pour calculer des termes de sens physique fort différent. Or, certains rédacteurs de revues scientifiques n'acceptent pas cette idée. « Comment pouvez-vous, disent-ils, inclure les effets capillaires dans l'équation pour la vitesse totale et ensuite les négliger dans la solution pour le profil de teneur en eau. Ce n'est pas cohérent. » Et de rejeter l'article sans autre forme de procès.

L'argument ne tient pas, car autant vaudrait rejeter la solution des équations d'Euler pour calculer la poussée sur une aile d'avion parce qu'on utilise la solution des équations de la couche limite pour calculer la traînée sur la même aile ! Bien sûr, il serait préférable de résoudre les équations de Navier-Stokes et d'utiliser la même solution, exacte, pour calculer la poussée et la traînée. L'expérience a montré que les deux solutions approchées donnaient d'excellents résultats. Si, par souci de « cohérence », on utilisait la solution des équations d'Euler pour calculer

également la trainée, on obtiendrait le résultat « cohérent » mais faux, que la trainée est toujours nulle (paradoxe de d'Alembert). Si, pour ce même besoin de « cohérence », on utilisait la solution des équations de Prandtl pour calculer la poussée, on ferait beaucoup de calculs pour rien. Cet exemple classique tiré de la mécanique des fluides, montre bien qu'il n'est pas du tout déraisonnable d'utiliser des approximations différentes pour calculer des quantités de sens physique très varié. L'essentiel c'est de choisir l'approximation qui convient pour chaque terme.

Dans le cas de la théorie traditionnelle (équation de la diffusivité), les effets capillaires et de résistance visqueuse sont confondus. C'est pourquoi les solutions même approchées du problème, sont compliquées, car elles doivent rendre compte simultanément avec suffisamment de précision, des effets de capillarité et de viscosité.

5. ÉVALUATION DU TERME DE RÉSISTANCE VISQUEUSE

Pour évaluer le dénominateur de l'équation (13), il n'est pas nécessaire de résoudre l'équation complète de la teneur en air. On y peut négliger les termes capillaires et gravitaires, mais il faut conserver tous les termes de viscosité. L'équation résultante est :

$$\frac{\partial \theta_a}{\partial t} + V f'_a \frac{\partial \theta_a}{\partial z} = 0 \tag{15}$$

où le prime indique la dérivation par rapport à la teneur en air. La solution de l'équation (15) s'obtient rapidement en remarquant que la vitesse de propagation d'une teneur en air donnée est obtenue par la formule :

$$\left(\frac{dz}{dt} \right)_{\theta_a} = V f'_a \tag{16}$$

Cette équation s'intègre facilement avec le résultat pour le profil de teneur en air :

$$z(\theta_a, t) = z_i(\theta_a) + f'_a W \quad \theta_a \geq \theta_a^- \tag{17}$$

où $z_i(\theta_a)$ est la coordonnée initiale de la teneur en air θ_a , W est le volume cumulé drainé (exprimé en hauteur d'eau) et θ_a^- est la valeur amont du front d'air (voir la fig. 1). W est relié à la vitesse totale par la relation :

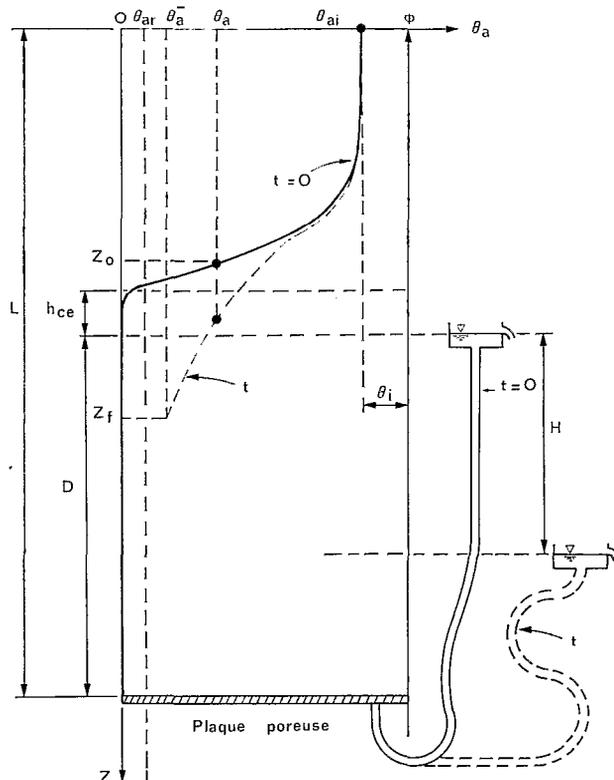


Fig. 1. — Caractéristiques géométriques du problème de drainage et profils de teneur en air

$$W = \int_0^t v(\tau) d\tau \tag{18}$$

La valeur de θ_a^- s'obtient par la construction graphique de Welge (MOREL-SEYTOUX, 1969) qui consiste à tracer une tangente à la courbe f_a de θ_a à partir du point représentant les conditions initiales de coordonnées $\theta_a = 0$, $f_a = 0$, dans le cas présent (voir la fig. 2). Sur la figure, on a aussi indiqué la construction de Welge pour déterminer la valeur amont du front d'eau dans le cas d'une infiltration d'eau, θ_f^- . Il suffit de retourner la page pour saisir visuellement la symétrie complète des problèmes d'infiltration et de drainage. Comme la taille du front d'air est beaucoup plus faible que celle du front d'eau, on en conclue que l'équation approchée (15) donnera de meilleurs résultats pour le drainage que son analogue pour l'infiltration. Or on a vu dans un article précédent (MOREL-SEYTOUX, 1973 b) que cette approximation donnait déjà des résultats excellents.

Le calcul de l'intégrale du dénominateur de l'équation (13) s'effectue comme suit :

$$\int_0^L \frac{dz}{\Lambda_r} = \int_0^{z_f} \frac{dz}{\Lambda_r} + \int_{z_f}^L \frac{dz}{\Lambda_r} = \int_0^{z_f} \frac{dz}{\Lambda_r} + \mu_w (L - z_f) \tag{19}$$

puisque dans la zone saturée $\frac{1}{\Lambda_r} = \mu_w$.

On peut écrire :

$$\int_0^L \frac{dz}{\Lambda_r} = \int_{\theta_{a1}}^0 \frac{dz_1}{\Lambda_r} + W \int_{\theta_{a1}}^{\theta_a} \frac{f_a' d\theta_a}{\Lambda_r} + \mu_w (L - z_f) \tag{20}$$

ayant différencié l'équation (17) par rapport à θ_a à un temps t fixe. Comme $z_1(\theta_a)$ représente un profil d'équilibre, $dz_1 = -dh_c$, et l'on obtient :

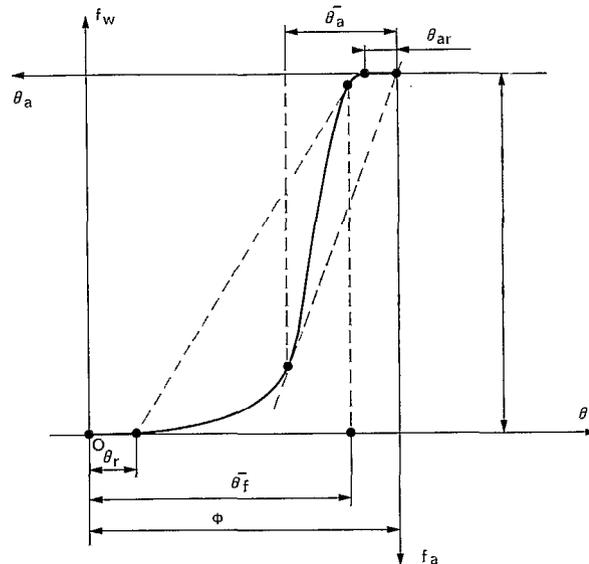


Fig. 2. — Courbes f et f_a en fonction de O et O_a . Construction graphique de Welge pour obtenir les valeurs amonts des fronts d'eau et d'air

$$\int_0^L \frac{dz}{\Lambda_r} = \int_{h_{c1}}^{h_{c0}} - \frac{dh_c}{\Lambda_r} + W \int_{\theta_a}^{\theta_{a1}} - \frac{f_a' d\theta_a}{\Lambda_r} + \mu_w (L - z_f) \tag{21}$$

Comme $z_f = \frac{W}{\theta_a} f_a + (L - D - h_{ce})$ on obtient finalement :

$$\int_0^L \frac{dz}{\Lambda_r} = \mu_w (D - \frac{W}{\theta_a} f_a) + \int_{h_{c1}}^{h_{c0}} \frac{dh_c}{\Lambda_r} + W \int_{\theta_a}^{\theta_{a1}} - \frac{f_a' d\theta_a}{\Lambda_r} \tag{22}$$

et donc

$$\frac{1}{\mu_w} \int_0^L \frac{dz}{\Lambda_r} = D + \frac{1}{\mu_w} \int_0^{h_{ce}} \frac{dh_c}{\Lambda_r} - W \left[\frac{f_a}{\theta_a} - \frac{1}{\mu_w} \int_{\theta_i}^{\theta_{a1}} \frac{f_a}{\Lambda_r} d\theta_a \right] \quad (23)$$

Pour simplifier l'écriture, on définit les quantités δ (dimension d'une longueur), D^* (longueur) et β (sans dimension) :

$$\delta = \frac{1}{\mu_w} \int_0^{h_{ce}} \frac{dh_c}{\Lambda_r} = h_{ce} + \frac{1}{\mu_w} \int_{h_{ce}}^{h_{ce1}} \frac{dh_c}{\Lambda_r} \quad (24)$$

$$D^* = D + \delta \quad (25)$$

$$\beta = \left[\frac{f_a}{\theta_a} - \frac{1}{\mu_w} \int_{\theta_i}^{\theta_{a1}} \frac{f_a}{\Lambda_r} d\theta_a \right] (\varnothing - \theta_i) \quad (26)$$

Avec ces notations le terme de résistance visqueuse s'écrit :

$$\frac{1}{\mu_w} \int_0^L \frac{dz}{\Lambda_r} = D^* - \frac{\beta W}{(\varnothing - \theta_i)} \quad (27)$$

Le calcul nécessite des intégrations numériques. De par son sens physique, on peut présumer que β sera assez nettement inférieur à 1.

6. ÉVALUATION DU TERME GRAVITAIRE

Considérons le terme P défini comme :

$$P = (D + H_c) - \int_0^L f_w dz \quad (28)$$

Ce terme représente le déficit de poids effectif (exprimé en hauteur d'eau) de la colonne par rapport à son état d'équilibre. Au temps zéro, on vérifie facilement que P est égal à zéro. On ne sait pas évaluer P dans le cas général. Dans deux cas particuliers, on peut le calculer. Si le profil se déplace par translation sans se déformer (comme c'est le cas pour un drainage lent) le profil $z(\theta_a, t)$ se déduit du profil initial $z_i(\theta_a)$ par la relation :

$$z(\theta_a, t) = z_i(\theta_a) + \frac{W}{\varnothing - \theta_i} \quad (29)$$

Dans ce cas, on a :

$$P = (D + H_c) - \int_0^{L - \frac{W}{\varnothing - \theta_i}} f_w dz_i = \int_0^L f_w dz_i - \int_0^{L - \frac{W}{\varnothing - \theta_i}} f_w dz_i = \int_{L - \frac{W}{\varnothing - \theta_i}}^L f_w dz_i = \frac{W}{\varnothing - \theta_i} \quad (30)$$

puisque dans la zone saturée du profil initial $f_w = 1$. De même, si l'on suppose que l'air déplace l'eau comme un piston (ce qui n'est pas du tout vrai) on obtient le même résultat car $f_w = 1$ en aval du front et $f_w = 0$ en amont. Dans ces deux cas on trouve que :

$$P = \frac{W}{\varnothing - \theta_i} \quad (31)$$

c'est-à-dire que le déficit de poids effectif est égal au déficit de poids tout court. Si l'on utilise le profil obtenu dans la section précédente, qui n'est pas un très bon profil, on obtient par un calcul simple que :

$$P = W \int_0^{\varnothing - \theta_i} f_a'^2 d\theta_a \quad (32)$$

On pourrait calculer ce terme à partir des données du sol. Remarquons qu'une valeur approchée de l'intégrale est obtenue en remplaçant un des f_a' par sa valeur moyenne dans l'intervalle de θ_a . Cette valeur moyenne n'est autre que $\frac{1}{\varnothing - \theta_i}$ et en remplaçant dans l'équation (32) on obtient :

$$P = \frac{W}{\varnothing - \theta_i} \int_0^{\varnothing - \theta_i} f_a' d\theta_a = = \frac{W}{\varnothing - \theta_i} f_a \int_0^{\varnothing - \theta_i} \frac{W}{\varnothing - \theta_i} \quad (33)$$

c'est-à-dire le même résultat. Au vu de cette évidence, on peut admettre que l'équation (31) fournit une approximation suffisante pour P.

7. FORME FINALE DE LA LOI DE DRAINAGE

Utilisant les résultats des sections précédentes, on obtient pour le débit de drainage :

$$V = \frac{K \left[H - \frac{W}{\varnothing - \theta_i} \right]}{D^* - \beta \frac{W}{\varnothing - \theta_i}} = \frac{dW}{dt} \quad (34)$$

Cette équation s'intègre avec le résultat :

$$\frac{Kt}{\beta} = W - \left(\frac{D^*}{\beta} - H \right) (\varnothing - \theta_i) \ln \left\{ 1 - \frac{W}{H (\varnothing - \theta_i)} \right\} \quad (35)$$

Cette équation a la même structure que la loi de l'infiltration dérivée dans un article antérieur (MOREL-SEYTOUX, 1973 b), ce qui ne surprend pas outre mesure, puisque le drainage n'est après tout qu'une infiltration d'air. On peut vérifier que W tend vers la valeur H (ϕ - θ_i) quand t tend vers l'infini. Au temps zéro, v a la valeur $\frac{KH}{D^*}$ d'après l'équation (34). L'expansion en série de l'équation (35) pour W petit, donne le même résultat. Dans le cas où D* est largement supérieur à β H, on peut négliger W dans le second membre et l'on obtient alors :

$$W = H (\varnothing - \theta_i) \left[1 - e^{-\frac{Kt}{(D^* - \beta H) (\varnothing - \theta_i)}} \right] \quad (36)$$

Dans le cas d'une colonne entièrement saturée au départ, les formules dérivées précédemment s'appliquent ; il suffit de remplacer D* par L, hauteur de la colonne. Dans ce cas, il faut aussi remplacer K par \tilde{K} , conductivité hydraulique à saturation sauf pour la teneur en air résiduelle, car la saturation complète de la colonne est obtenue par imbibition. Si de plus, on abaisse le niveau de la nappe de la hauteur de la colonne, l'équation (36) devient :

$$W = L (\varnothing - \theta_i) \left[1 - e^{-\frac{\tilde{K}t}{L (\varnothing - \theta_i) (1 - \beta)}} \right] \quad (37)$$

On retrouve la formule de Youngs (WHISLER et BOUWER, 1970) dérivée pour ce cas particulier à l'exception du terme β. Dans la formule de Youngs β = 0, WHISLER et BOUWER ont montré par comparaison avec des résultats d'expérience, que de toutes les formules (simples) proposées pour le drainage, la formule de Youngs donnait les meilleurs résultats. Cependant, la formule de Youngs tend à prédire le débit de drainage par excès pour des temps longs. Comme l'équation (37) correspond à la formule de Youngs et est un cas particulier de l'équation (36), elle-même une forme approchée de l'équation (35), cette équation de drainage (35) devrait permettre d'obtenir des résultats supérieurs à ceux obtenus par la formule de Youngs.

8. CONCLUSIONS

On a démontré dans cet article comment la symétrie de la formulation biphasique permettait de résoudre les problèmes du drainage et de l'infiltration d'une manière unifiée. Par la même occasion, on a dérivé une formule simple du drainage d'une colonne, soit en équilibre capillaire, soit complètement saturée au départ.

REMERCIEMENTS

Les bases théoriques de cet article ont pu être développées grâce à un contact avec l'agence OWRR (Office of Water Resources Research) des Etats-Unis d'Amérique, projet B-070 - Colorado (contrat 14-31-0001-3566). Elles ont pu être approfondies grâce au soutien financier du Centre National de la Recherche Scientifique, pendant le congé sabbatique de l'auteur et grâce à la collaboration active du Groupe d'Hydrologie de l'Institut de Mécanique de Grenoble, en particulier MM. VACHAUD, KHANJI et GAUDET.

BIBLIOGRAPHIE

- MOREL-SEYTOUX (H. J.) - 1969 - Introduction to Flow of Immiscible Liquids in Porous Media, dans *Flow through porous media*, Academic Press, Chapitre XI, pp. 455-516.
- MOREL-SEYTOUX (H. J.) - 1973 a - Pour une théorie modifiée de l'infiltration. I^{re} Partie : Pourquoi ?, *Cah. ORSTOM sér. Hydrologie*, vol. X, n° 2, pp. 185-194.
- MOREL-SEYTOUX (H. J.) - 1973 b - Pour une théorie modifiée de l'infiltration. II^e Partie : Comment ?, *Cah. ORSTOM, Sér. Hydrologie*, vol. X, n° 3, pp. 199-209.
- MOREL-SEYTOUX (H. J.) - 1974 - Pour une théorie modifiée de l'infiltration. III^e Partie : Effets de compression et de contrecourant, *Cah. ORSTOM, Sér. Hydrol.*, vol. XI, n° 1, pp. 51-59.
- WHISLER (F. D.) et BOUWER (H.) - 1970 - Comparison of methods for calculating vertical drainage and infiltration for soils. *Journ. of Hydrology*, North Holland Publishing Company, January, pp. 1-19.