Distribution gausso-logarithmique

Y. BRUNET-MORET
Ingénieur Hydrologue de l'ORSTOM

RÉSUMÉ

Etude de la distribution gausso-logarithmique (loi log-normale, de Galton, de Gibrat-Gauss) spécialement axée sur les méthodes de détermination des valeurs des paramètres d'après un échantillon observé, supposé tiré au hasard d'une population-mère répartie suivant une distribution gausso-logarithmique : méthodes graphiques, méthodes par les moments, méthodes du maximum de vraisemblance (avec sous-programmes FORTRAN).

ABSTRACT

Study of the lognormal-distribution (law of Galton, Gibrat-Gauss) specially focussed on the determination methods of parameters values of existent sample, extracted by random sampling from a parent population in accordance with a lognormal distribution : graphical methods, moments methods, maximum likelihood methods (with FORTRAN subprograms).

SOMMAIRE

Introduction

1. *Expressions mathématiques*
   - 1.1. Fonction de répartition
   - 1.2. Fonction de densité
   - 1.3. Cas particulier $\sigma \to 0$
   - 1.4. Distributions tronquées
2. *Moments, cumulants, valeurs centrales*
   - 2.1. Moments non centrés
   - 2.2. Cumulants
   - 2.3. Asymétrie, aplatissement
   - 2.4. Valeurs centrales
   - 2.5. Compléments
3. *Estimations des paramètres par les moments*
   - 3.1. Généralités
   - 3.2. Trois paramètres calculés
   - 3.3. Paramètre de position connu à l'avance
   - 3.4. Paramètre de forme connu à l'avance
   - 3.5. Paramètres de forme et de position connus à l'avance
   - 3.6. Répartitions tronquées

4. *Estimations des paramètres par le maximum de vraisemblance*

4.1. Généralités
4.2. Trois paramètres calculés
4.3. Paramètre de position connu à l'avance
4.4. Paramètre de forme connu à l'avance
4.5. Paramètre de position et de forme connus à l'avance
4.6. Répartitions tronquées
4.7. Taille d'échantillon inconnue

5. *Compléments divers*

5.1. Comportement asymptotique
5.2. Répartition asymptotique des valeurs extrêmes
5.3. Répartition de l'inverse
5.4. Répartition d'un quotient
5.5. Intervalles de confiance
5.6. Méthodes graphiques de détermination des paramètres

6. *Sous-programmes en FORTRAN*

6.1. Fonctions de distribution et inversions
6.2. Calcul des paramètres, échantillons sans troncature
6.3. Calcul des paramètres, échantillons à seuil de troncature
6.4. Calcul des intervalles de confiance
6.5. Utilisation des sous-programmes

Annexe 1. Exemple d'ajustement par les moments
Distribution non tronquée, sans troncature

Annexe 2. Exemple d'ajustement graphique
Distribution non tronquée, sans troncature

Annexe 3. Exemple d'ajustement graphique
Distribution tronquée avec troncature des observations

Annexe 4. Exemple d'ajustement par le maximum de vraisemblance
Distribution non tronquée, échantillon sans troncature, trois paramètres calculés

Annexe 5. Exemple d'ajustement par le maximum de vraisemblance
Taille d'échantillon inconnue, troncature des observations

Table A. Fonction de distribution

Table B. Inversion de la fonction de distribution

Table C. Valeurs pour ajustement par les moments

Liste D. Sous-programmes en FORTRAN

INTRODUCTION

Nous étudions ci-après la distribution gausso-logarithmique dont l'utilisation est fréquente. Dans cette étude quasi exhaustive, nous insistons particulièrement sur les déterminations des valeurs des paramètres car ce point est important dans la pratique.

Ayant un échantillon homogène de valeurs observées (supposées sans erreurs systématiques), nous choisissons une forme mathématique que nous supposons a priori être la forme mathématique de la distribution de la population-mère d'où provient l'échantillon, d'après lequel nous déterminons les valeurs des paramètres qui ajustent à l'échantillon la forme mathématique choisie pour la population-mère. Les valeurs des paramètres résument

(pour la forme mathématique choisie, avec des conditions et des possibilités imposées par cette forme) l'information contenue dans l'échantillon, et un point très important est de ne perdre que le moins possible de cette information.

En hydrologie, comme dans beaucoup d'autres disciplines, nous n'en sommes pas encore à concevoir des formes mathématiques incluant tous les phénomènes naturels et les conditions de leurs inter-actions, puis à déduire de ces formes des fonctions de distribution. Pour un échantillon de valeurs données, par exemple modules annuels, dont on doit étudier la répartition, on cherchera la forme mathématique qui s'adapte le mieux à l'échantillon, sous certaines conditions (ce choix est un problème que nous ne traiterons pas ici, non plus que les « conditions »). Il se peut que l'on adopte une distribution gausso-logarithmique à paramètre de position négatif, ce qui entraîne que l'ensemble des modules négatifs n'ait pas une probabilité nulle, résultat inconcevable, si l'on prétend que les modules annuels suivent une distribution gausso-logarithmique. Mais si la probabilité totale des modules négatifs est petite, de récurrence grande par rapport à la durée que l'on peut concevoir de la stabilité des phénomènes climatiques de l'atmosphère et morphologiques du bassin, on peut parfaitement, à notre sens, garder cette distribution à paramètre de position négatif comme représentation de l'échantillon (et par extension, de la population-mère).

1. EXPRESSIONS MATHÉMATIQUES

1.1. Fonction de répartition

Nous l'écrivons :

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^u \frac{1}{u} \exp\left[-\frac{(\text{Log } u)^2}{2\sigma^2}\right] du \qquad \text{avec} \qquad u = \frac{x - x_0}{s}$$

F(x) fréquence au non-dépassement : lorsque u croît de 0 à $+\infty$, F(u) croît de 0 à 1, c'est-à-dire lorsque x croît de x_0 à $+\infty$, s et σ étant positifs, F(x) croît de 0 à 1.

1.1.1. *Paramètres*

x_0 est le paramètre de position : borne inférieure de l'intervalle de définition de la variate.
s est le paramètre d'échelle, positif, différent de zéro, ayant les mêmes dimensions que x_0 et x.
σ est le paramètre de forme, positif et différent de zéro.

Nota 1. — On n'utilise pas d'habitude cette distribution avec un paramètre d'échelle négatif, mais on peut très bien le concevoir. Le paramètre de position x_0 serait alors borne supérieure et la fonction de répartition :

$$F(x) = 1 - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^u \frac{1}{u} \exp\left[-\frac{(\log u)^2}{2\sigma^2}\right] du$$

Nota 2. — Il est inutile de concevoir un paramètre de forme négatif : prendre un paramètre de forme négatif revient à considérer la distribution de $v = \frac{1}{u}$, v et u ont la même distribution au non-dépassement.

1.1.2. *Calculs de la probabilité et de son inversion*

Nous donnons, en annexes, une table A des valeurs des fréquences au dépassement, pour des valeurs de la variable normale $t' = \frac{\log u}{\sigma}$ allant de 0 à 2,5 avec incrément de 0,005 ; et nous donnons une table B des valeurs de la variable normale t' pour des fréquences au dépassement allant de 0 à 0,5 avec incrément de 0,0005 avec exemples d'utilisation pour les calculs de probabilité et de son inversion.

1.2. Fonction de densité

Elle s'écrit :

$$f(x) = \frac{1}{s\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{1}{u} \exp\left[-\frac{(\log u)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Le dérivée première de la fonction de densité est :

$$f'(x) = \frac{-1}{s^2\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{1}{u^2} \exp\left[-\frac{(\log u)^2}{2\sigma^2}\right]\left(1 + \frac{\log u}{\sigma^2}\right)$$

qui s'annule pour $u = e^{-\sigma^2}$.

La dérivée seconde est :

$$f''(x) = \frac{1}{s^3\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{1}{u^3} \exp\left[-\frac{(\log u)^2}{2\sigma^2}\right]\left(\frac{(\log u)^2}{\sigma^4} + 3\frac{\log u}{\sigma^2} + 2 - \frac{1}{\sigma^2}\right)$$

qui s'annule pour :

$$\text{Log } u = -\frac{\sigma^2}{2}(3 \pm \sqrt{1 + 4/\sigma^2})$$

d'où la forme de la représentation graphique de la fonction de densité (fig. 1) : c'est toujours une courbe en cloche asymétrique avec mode réel en $u = e^{-\sigma^2}$, deux points d'inflexion en $u = \exp\left[-\frac{\sigma^2}{2}(3 + \sqrt{1 + 4/\sigma^2})\right]$ et $u = \exp\left[-\frac{\sigma^2}{2}(3 - \sqrt{1 + 4/\sigma^2})\right]$ et étalée sur la droite. La tangente en $u = 0$ est toujours nulle. Quel que soit u, les valeurs u et $e^{-2\sigma^2}/u$ ont la même densité de probabilité.

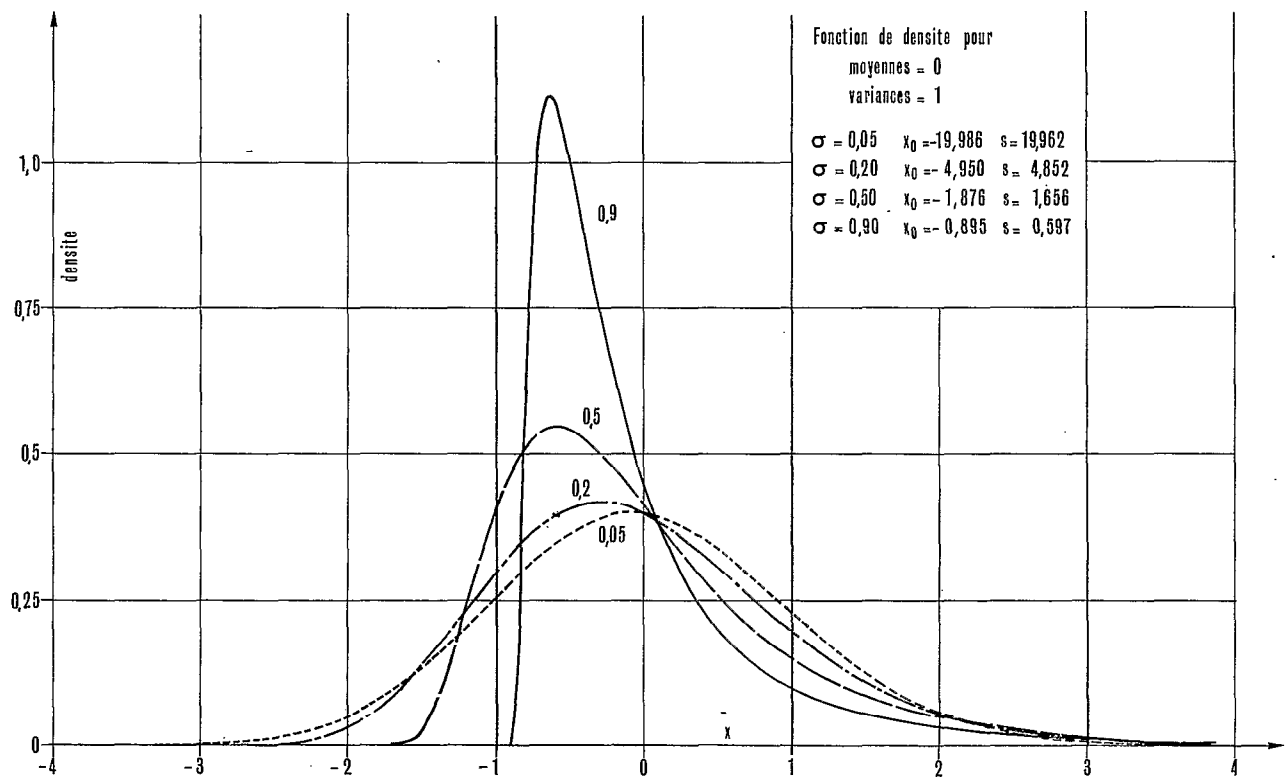

Fig. 1 — Fonction de densité

1.3. Cas particulier $\sigma \to 0$

Si la valeur du paramètre de forme σ tend vers zéro en même temps que la valeur du paramètre d'échelle, s croît de façon que le produit σs tende vers une limite finie s' différente de zéro, et si la valeur de x_0 décroît de façon que la somme $x_0 + s$ tende vers une valeur finie y_0 (pouvant être nulle), la distribution logarithmique tend vers une distribution normale de moyenne y_0 et d'écart-type s'.

Si la valeur du paramètre de forme σ tend vers zéro, s et x_0 restant finis, la valeur de la fonction de densité tend vers zéro quel que soit x, sauf pour la valeur modale $(x_0 + s)$ pour laquelle la valeur de la fonction de densité tend vers l'infini (variable « certaine »).

1.4. Distributions tronquées en fréquence

Nous ne nous intéresserons qu'aux distributions tronquées inférieurement en fréquence au non-dépassement (et à paramètre d'échelle positif). Ce tronquage correspond au cas où la borne inférieure x_0 (paramètre de position) est connue à l'avance, et où la variate peut prendre cette valeur exacte avec une probabilité non nulle F_0 : paramètre de tronquage.

La fonction de répartition s'écrit alors, au non-dépassement :

$$F(x) = F_0 + (1 - F_0) \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_0^u \frac{1}{u} \exp\left[- \frac{(\log u)^2}{2\sigma^2} \right] du$$

avec

$$u = \frac{x - x_0}{s}$$

Les distributions tronquées ne s'utilisent guère que dans le cas où il est difficile de départager les observations pour lesquelles x est vraiment égal à x_0 d'avec les observations en nombre relatif non négligeable, pour lesquelles x est peu différent de x_0 mais non discerné comme différent : inférieur à un seuil de troncature x_h. Dans un échantillon tiré au hasard d'une distribution tronquée, le nombre exact de valeurs strictement égales à x_0 est inconnu.

1.4.1. Dans la pratique, on utilise une distribution tronquée avec un échantillon pour lequel la répartition des valeurs supérieures au seuil de troncature a une forme « en J ». Dans le cas de la distribution gausso-logarithmique, la fonction de densité n'a cette allure « en J » que pour les valeurs de u supérieures ou égales à u_i : abscisse du point d'inflexion de plus grande abscisse

$$u_i = \exp\left[- \frac{\sigma^2}{2} (3 - \sqrt{1 + 4/\sigma^2}) \right]$$

Pour fixer les idées, le tableau ci-dessous donne quelques valeurs de u_i :

σ	u *moyen*	u_i	$F(u_i)$ *pour* $F_0 = 0$
0,5	1,133	1,151	0,611
0,7	1,278	1,007	0,504
0,9	1,499	0,796	0,400
1,1	1,831	0,571	0,305
1,3	2,328	0,374	0,224
1,5	3,080	0,223	0,159

1.4.2. *Calculs de la probabilité et de son inversion*

Si G(u) est la fréquence au non-dépassement de la variable $t' = \frac{\log u}{\sigma}$ calculée d'après la table A, la fréquence au non-dépassement de la variable x est :

$$F(x) = F_0 + (1 - F_0)\, G(u)$$

et la fréquence au dépassement :

$$F_1(x) = 1 - F(x) = (1 - F_0)\,(1 - G(u))$$

Si t' est la variable normale calculée d'après la table B pour la fréquence au non-dépassement $\frac{F(x) - F_0}{1 - F_0}$, la variable x est donnée par :

$$x = x_0 + s \exp(\sigma t'/\log e)$$

c'est-à-dire en logarithmes décimaux :

$$\log \frac{x - x_0}{s} = \sigma t'$$

Dans l'annexe 3 nous donnons un exemple de ce calcul.

2. MOMENTS, CUMULANTS, VALEURS CENTRALES

2.1. Moments non centrés de la distribution

Le moment non centré d'ordre i de la variable réduite u est $m_i = \exp\left(\frac{i^2\sigma^2}{2}\right)$ quel que soit i positif ou négatif.

De la formule précédente, on peut déduire le moment non centré d'ordre i de la variable non réduite en faisant la transformation $u = \frac{x - x_0}{s}$. Si le paramètre de position est nul, $m_{si} = s^i\, m_i(u)$.

2.2. Cumulants de la distribution

Les moments centrés et les cumulants de la distribution gausso-logarithmique ne peuvent qu'être calculés d'après les formules générales en partant des moments non centrés.

La variance, en cumulant d'ordre 2 est avec $A = e^{\sigma^2/2}$:

$$K_2 = s^2\, A^2\, (A^2 - 1)$$

— le cumulant d'ordre 3 :

$$K_3 = s^3\, A^3\, (A^2 - 1)^2\, (A^2 + 2)$$

— le cumulant d'ordre 4 :

$$K_4 = s^4\, A^4\, (A^2 - 1)^3\, (A^6 + 3\, A^4 + 6\, A^2 + 6)$$

2.3. Asymétrie aplatissement de la distribution (fig. 2)

Le coefficient d'asymétrie $\gamma_1 = K_3/K_2^{3/2}$ est $(A^2 + 2)\sqrt{A^2 - 1}$.

L'asymétrie est toujours positive (distribution étalée sur la droite) et augmente rapidement avec σ.

Le coefficient d'aplatissement $\gamma_2 = K_4/K_2^2$ est $(A^2 - 1)\,(A^6 + 3\, A^4 + 6\, A^2 + 6)$.

Il est toujours positif (distribution moins aplatie que la distribution normale) et augmente rapidement avec σ.

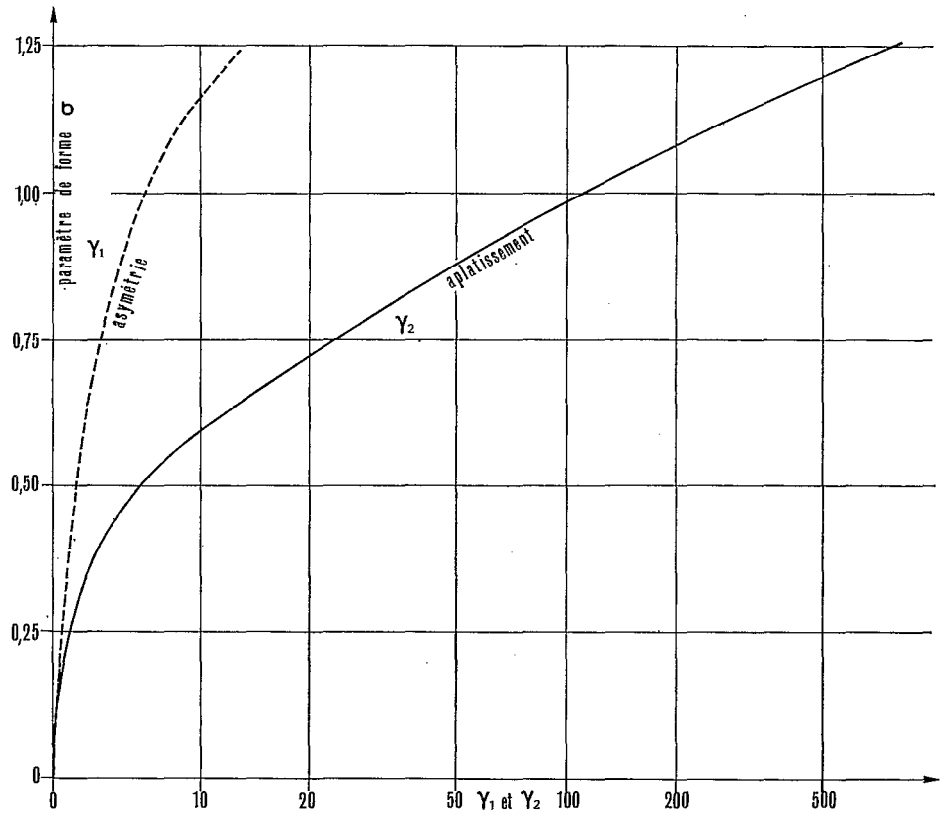

Fig. 2 — Asymétrie, aplatissement

2.4. Valeurs centrales de la distribution

L'espérance mathématique (moyenne) est $x_0 + sA$ avec $A = e^{\sigma^2/2}$.

La médiane est $x_0 + s$.

Le mode est $x_0 + s/A^2$ et sa fréquence est celle de la variable normale réduite de valeur $-\sigma^2/2$.

2.4.1. Leurs positions relatives sont toujours (fig. 3) :

$$\text{mode} < \text{médiane} < \text{moyenne}$$

2.4.2. La distribution exacte de la moyenne d'un échantillon de taille n tiré d'une population-mère répartie suivant une distribution gausso-logarithmique dont les valeurs numériques des paramètres sont exactement connues ne peut être écrite que par l'intermédiaire d'une distribution en développement limité, en partant des cumulants de la distribution de la moyenne qui sont ceux de la population-mère divisés par n^{i-1}, i étant l'ordre du cumulant.

2.5. Compléments (fig. 3)

La moyenne harmonique de la variable réduite est $e^{-\sigma^2/2}$. L'inverse de la moyenne harmonique est le moment d'ordre — 1 qui a même valeur et même variance que la moyenne : valeur $e^{\sigma^2/2}$, variance $e^{\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$. Si le paramètre de position est nul, la valeur de la moyenne harmonique de la variable non réduite est $s\, e^{-\sigma^2/2}$.

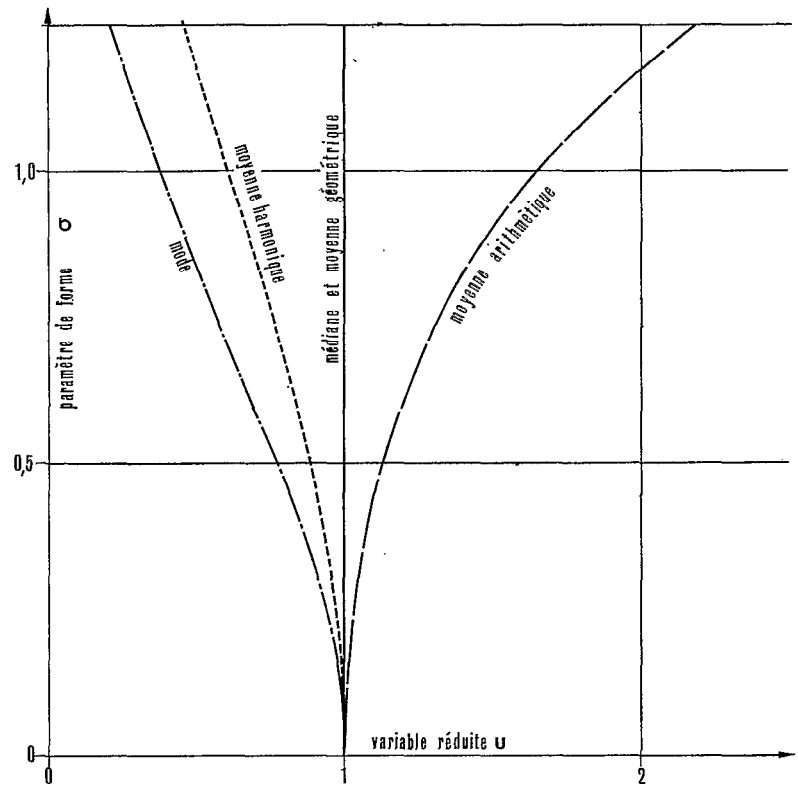

Fig. 3 — Valeurs centrales

La moyenne logarithmique de la variable réduite est nulle (la moyenne géométrique est égale à 1 quel que soit σ), la variance de la moyenne logarithmique est σ^2. Si le paramètre de position est nul, la valeur de la moyenne géométrique est s.

3. ESTIMATION DES PARAMÈTRES PAR MOMENTS (OU CUMULANTS) D'APRÈS UN ÉCHANTILLON DE TAILLE n

3.1. Généralités

3.1.1. Nous allons examiner différents cas de calculs des valeurs des paramètres par la méthode des moments ou des cumulants, sans épuiser tous les cas possibles. Nous rechercherons dans certains de ces cas l'efficacité globale de cette méthode par rapport à celle du maximum de vraisemblance.

Cette efficacité se mesure par le rapport des variances généralisées asymptotiques (pour n tendant vers l'infini) : au numérateur la variance généralisée déduite de la méthode du maximum de vraisemblance (valeur du déterminant de la matrice des variances et covariances, calculée par cette méthode) au dénominateur la variance généralisée déduite de la méthode des moments (valeur du déterminant de la matrice des variances et covariances des paramètres déduites de cette méthode).

Ce calcul ne sera pleinement développé que dans le cas le plus compliqué, où tous les paramètres sont à calculer.

3.1.2. Nous n'avons pas recherché si les déterminations des paramètres par la méthode des moments étaient biaisées. Elles le sont probablement. Le principe de cette recherche de biais est simple : nous l'emploierons dans la méthode du maximum de vraisemblance. Nous avons pensé que l'application de cette recherche dans le cas présent aurait été trop coûteuse en temps d'ordinateur étant données les fortes variances des estimations des paramètres.

3.1.3. En utilisant la méthode des moments, nous faisons l'hypothèse de base suivante :

Les valeurs observées correspondent à des variables aléatoires, indépendantes, connues sans erreurs d'observation. L'échantillon observé est représentatif d'une population-mère distribuée suivant une loi gausso-logarithmique (dont il est possible que l'on connaisse a priori les valeurs de certains paramètres).

Si les variables observées ne sont pas strictement indépendantes, on suppose que la taille de l'échantillon est suffisamment grande — suivant le degré de dépendance — pour qu'il reste représentatif de la population-mère.

Si les variables observées sont entachées d'erreurs d'observation, on suppose que ces erreurs sont aléatoires, indépendantes entre elles, indépendantes des valeurs numériques des observations, distribuées avec une moyenne nulle, un moment centré d'ordre 3 nul, une variance constante (homoscedasticité) petite par rapport à la variance de l'échantillon.

Soient x'_i les valeurs que l'on aurait dû observer sans erreur et x_i les valeurs observées avec les erreurs ε_i :

— La moyenne (moment non centré et cumulant d'ordre 1) s'écrit :

$$\frac{1}{n}\sum x_i = \frac{1}{n}\sum (x'_i + \varepsilon_i) = \frac{1}{n}\sum x'_i$$

La moyenne calculée sur l'échantillon est connue sans erreur si l'hypothèse $\Sigma\, \varepsilon_i = 0$ est strictement respectée dans l'échantillon.

— Le moment non centré d'ordre 2 s'écrit :

$$\frac{1}{n}\sum x_i^2 = \frac{1}{n}\sum (x'_i + \varepsilon_i)^2 = \frac{1}{n}\sum x_i'^2 + \sigma_\varepsilon^2$$

Le moment non centré d'ordre 2 calculé sur les valeurs observées « erronées » est entaché d'une erreur σ_ε^2 (variance des erreurs d'observation) si l'hypothèse $\Sigma\, \varepsilon_i\, x'_i = 0$ est strictement respectée dans l'échantillon.

— Le cumulant d'ordre 2 (variance) s'écrit :

$$\frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x'_i + \varepsilon_i - \bar{x}')^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x'_i - \bar{x})^2 + \frac{n}{n-1}\sigma_\varepsilon^2$$

Le cumulant d'ordre 2, calculé sur les valeurs observées « erronées » est entaché d'une erreur $\frac{n}{n-1}\sigma_\varepsilon^2$ si les hypothèses $\Sigma\, \varepsilon_i = 0$ et $\Sigma \varepsilon_i x'_i = 0$ sont strictement respectées dans l'échantillon.

— Le moment non centré d'ordre 3 s'écrit :

$$\frac{1}{n}\sum x_i^3 = \frac{1}{n}\sum (x'_i + \varepsilon_i)^3 = \frac{1}{n}\sum x_i^3 + 3\,\bar{x}\,\sigma_\varepsilon^2$$

Le moment non centré d'ordre 3, calculé sur les valeurs observées « erronées » est entaché d'une erreur $3\,\bar{x}\,\sigma_\varepsilon^2$ si les hypothèses $\Sigma x_i'^2\, \varepsilon_i = 0$ et $\Sigma \varepsilon_i^3 = 0$ sont strictement respectées dans l'échantillon.

— Le cumulant d'ordre 3 s'écrit :

$$\frac{n}{(n-1)\,(n-2)}\sum (x_i - \bar{x})^3 = \frac{n}{(n-1)\,(n-2)}\sum (x'_i + \varepsilon_i - \bar{x}')^3 = \frac{n}{(n-1)\,(n-2)}\sum (x'_i - \bar{x})^3$$

Le cumulant d'ordre 3 est connu sans erreur si les hypothèses $\Sigma \varepsilon_i = 0$, $\Sigma \varepsilon_i^3 = 0$ et $\Sigma \varepsilon_i (x'_i - \bar{x}')^2 = 0$ sont strictement respectées dans l'échantillon.

Si les valeurs observées sont entachées d'erreurs systématiques, ces erreurs se répercuteront sur le paramètre de position et/ou le paramètre d'échelle.

3.2. Trois paramètres calculés

Nous n'allons considérer que le cas des paramètres d'échelle positif, paramètre de position x_0 borne inférieure, coefficient d'asymétrie positif. Ce qui suit peut facilement s'étendre au cas où le paramètre d'échelle est négatif : x_0 borne supérieure, coefficient d'asymétrie négatif.

3.2.1. En utilisant les trois premiers moments de l'échantillon $x_1 \ldots x_i \ldots x_n$:

$$S_1 = \frac{1}{n}\sum x_i \qquad S_2 = \frac{1}{n}\sum x_i^2 \qquad S_3 = \frac{1}{n}\sum x_i^3$$

nous obtenons le système d'équations provenant de l'écriture des cumulants, après avoir posé $A = e^{\sigma^2/2}$

$$s\,A = S_1 - x_0$$

$$s^2\,A^2\,(A^2-1) = \frac{n}{n-1}\,(S_2 - S_1^2) = C_2$$

$$s^3\,A^3\,(A^2-1)^2\,(A^2+2) = \frac{n^2}{(n-1)(n-2)}\,(S_3 - 3\,S_2\,S_1 + 2\,S_1^3) = C_3$$

on élimine d'abord le paramètre d'échelle en passant par le carré du coefficient d'asymétrie γ_1 : $\gamma_1^2 = 2\,B$

$$\frac{K_3^2}{K_2^3} = (A^2-1)\,(A^2+2)^2 = \frac{n(n-1)}{(n-2)^2}\,\frac{(S_3 - 3S_2\,S_1 + 2\,S_1^3)^2}{(S_2 - S_1^2)^3} = 2\ B \text{ avec } B > 0$$

L'équation du 3e degré en A^2 admet une seule racine réelle qui est positive :

$$A^2 = (1 + B + \sqrt{2\,B + B^2})^{1/3} + (1 + B - \sqrt{2\,B + B^2})^{1/3} - 1$$

d'où :

$$\sigma = \sqrt{2 \log A}$$

$$s = \frac{1}{A}\sqrt{\frac{S_2 - S_1^2}{A^2 - 1}\,\frac{n}{n-1}}$$

$$x_0 = S_1 - s\,A$$

Le tableau C donne, pour des valeurs de γ_1 comprises entre 0 et 33, de σ comprises entre 0 et 1,5 les valeurs de $A = e^{\sigma^2/2}$ et de $A\sqrt{A^2-1}$.

Un exemple (annexe 1) montre la suite des calculs.

3.2.2. *Efficacité* (cf. 3.1)

En posant $c_1 = S_1$

$c_2 = S_2 - S_1^2$

$c_3 = S_3 - 3\,S_2\,S_1 + 2\,S_1^3$

c_1, c_2 et c_3 étant les trois premiers cumulants calculés d'après un échantillon de grande taille, nous réécrivons les équations du paragraphe précédent sous la forme :

(1) $$-c_1 + x_0 + s\,e^{\sigma^2/2} = 0$$

(2) $$-c_2 + s^2\,[e^{\sigma^2} - 1]\,e^{\sigma^2} = 0$$

(3) $$-c_3^2 + c_2^3\,(e^{\sigma^2} + 2)^2\,[e^{\sigma^2} - 1] = 0$$

et nous posons pour simplifier l'écriture : $e^{\sigma^2/2} = A$.

En dérivant chacune des équations (1), (2) et (3) par rapport à c_1, c_2, et c_3 :

— dérivée de (1) par rapport à c_1 :

$$\frac{\partial x_0}{\partial c_1} + \frac{\partial s}{\partial c_1} A + \frac{\partial \sigma}{\partial c_1} s\,\sigma\,A = 1$$

— dérivée de (1) par rapport à c_2 :

$$\frac{\partial x_0}{\partial c_2} + \frac{\partial s}{\partial c_2} A + \frac{\partial \sigma}{\partial c_2} s\,\sigma\,A = 0$$

— dérivée de (1) par rapport à c_3 :

$$\frac{\partial x_0}{\partial c_3} + \frac{\partial s}{\partial c_3} A + \frac{\partial \sigma}{\partial c_3} s\,\sigma\,A = 0$$

— dérivée de (2) par rapport à c_1 :

$$\frac{\partial s}{\partial c_1} 2\,s\,A^2\,(A^2 - 1) + \frac{\partial \sigma}{\partial c_1} 2\,s^2\,\sigma\,A^2\,(2\,A^2 - 1) = 0$$

— dérivée de (2) par rapport à c_2 :

$$\frac{\partial s}{\partial c_2} 2\,s\,A^2\,(A^2 - 1) + \frac{\partial \sigma}{\partial c_2} 2\,s^2\,\sigma\,A^2\,(2\,A^2 - 1) = 1$$

— dérivée de (2) par rapport à c_3 :

$$\frac{\partial s}{\partial c_3} 2\,s\,A^2\,(A^2 - 1) + \frac{\partial \sigma}{\partial c_3} 2\,s^2\,\sigma\,A^2\,(2\,A^2 - 1) = 0$$

— dérivée de (3) par rapport à c_1 :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial c_1} c_2^3\,6\,\sigma\,A^4\,(A^2 + 2) = 0$$

— dérivée de (3) par rapport à c_2 :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial c_2} c_2^3\,6\,\sigma\,A^4\,(A^2 + 2) = -3\,c_2^2\,(A^2 + 2)^2\,(A^2 - 1)$$

— dérivée de (3) par rapport à c_3 :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial c_3} c_2^3\,6\,\sigma\,A^4\,(A^2 + 2) = 2\,c_3$$

comme, d'après le système d'équations (2) et (3) :

$$c_2 = s^2\,A^2\,(A^2 - 1) \qquad\qquad c_3 = s^3\,A^3\,(A^2 - 1)^2\,(A^2 + 2)$$

on obtient les solutions du système des 3 équations aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial c_1} = 0 \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial c_2} = -\,(A^2 + 2) \,/\, (2\,s^2\,\sigma\,A^6) \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial c_3} = 1 \,/\, [3\,s^3\,\sigma\,A^7\,(A^2 - 1)]$$

$$\frac{\partial s}{\partial c_1} = 0 \qquad \frac{\partial s}{\partial c_2} = (3\,A^4 + 3\,A^2 - 2) \,/\, (2\,s\,A^6\,(A^4 - 1)] \qquad \frac{\partial s}{\partial c_3} = -\,(2\,A^2 - 1) \,/\, [3\,s^2\,A^7\,(A^2 - 1)^2]$$

$$\frac{\partial x_0}{\partial c_1} = 1 \qquad \frac{\partial x_0}{\partial c_2} = -\,(A^2 + 1) \,/\, [s\,A^3\,(A^2 - 1)] \qquad \frac{\partial x_0}{\partial c_3} = 1 \,/\, [3\,s^2\,A^4\,(A^2 - 1)^2]$$

Les variances et covariances asymptotiques pour n tendant vers l'infini se calculent par les expressions générales :

$$\text{var}\ (\sigma) = \left|\frac{\partial\sigma}{\partial c_1}\right|^2 \text{var}\ (c_1) + \left|\frac{\partial\sigma}{\partial c_2}\right|^2 \text{var}\ (c_2) + \left|\frac{\partial\sigma}{\partial c_3}\right|^2 \text{var}\ (c_3) + 2\,\frac{\partial\sigma}{\partial c_1}\frac{\partial\sigma}{\partial c_2}\,\text{covar}\ (c_1, c_2)$$
$$+ 2\,\frac{\partial\sigma}{\partial c_2}\frac{\partial\sigma}{\partial c_3}\,\text{covar}\ (c_2, c_3) + 2\,\frac{\partial\sigma}{\partial c_1}\frac{\partial\sigma}{\partial c_3}\,\text{covar}\ (c_1, c_3)$$

$$\text{covar}\ (s, \sigma) = \frac{\partial s}{\partial c_1}\frac{\partial\sigma}{\partial c_1}\,\text{var}\ (c_1) + \frac{\partial s}{\partial c_2}\frac{\partial\sigma}{\partial c_2}\,\text{var}\ (c_2) + \frac{\partial s}{\partial c_3}\frac{\partial\sigma}{\partial c_3}\,\text{var}\ (c_3) + \left(\frac{\partial s}{\partial c_1}\frac{\partial\sigma}{\partial c_2} + \frac{\partial s}{\partial c_2}\frac{\partial\sigma}{\partial c_1}\right)\text{covar}\ (c_1, c_2)$$
$$+ \left(\frac{\partial s}{\partial c_2}\frac{\partial\sigma}{\partial c_3} + \frac{\partial s}{\partial c_3}\frac{\partial\sigma}{\partial c_2}\right)\text{covar}\ (c_2, c_3) + \left(\frac{\partial s}{\partial c_1}\frac{\partial\sigma}{\partial c_3} + \frac{\partial s}{\partial c_3}\frac{\partial\sigma}{\partial c_1}\right)\text{covar}\ (c_1, c_3)$$

$K_1 \ldots K_2 \ldots K_i$ étant les cumulants de la distribution gausso-logarithmique réduite ($x_0 = 0$, $s = 1$) la valeur de c_i est $s_i K_i$ (pour $i \neq 1$) et le déterminant de la matrice des variances et covariances des paramètres s'écrit :

$$D = \frac{s^4}{36\,\sigma^2\,A^{18}\,(A^2-1)^4}\Big[\text{var}\ (K_1)\ \text{var}\ (K_2)\ \text{var}\ (K_3) - \text{var}\ (K_1)\ [\text{covar}\ (K_2, K_3)]^2 - \text{var}\ (K_2)\ [\text{covar}\ (K_1, K_3)]^2$$
$$- \text{var}\ (K_3)\ [\text{covar}\ (K_1, K_2)]^2 + 2\ \text{covar}\ (K_1, K_2)\ \text{covar}\ (K_2, K_3)\ \text{covar}\ (K_1, K_3)\Big]$$

avec :

$\text{var}\ (K_1) = K_2/n$
$\text{var}\ (K_2) = (K_4 + 2\,K_2^2)/n$
$\text{var}\ (K_3) = (K_6 + 9\,K_4\,K_2 + 9\,K_3^2 + 6\,K_2^3)/n$
$\text{covar}\ (K_1, K_2) = K_3/n$
$\text{covar}\ (K_1, K_3) = K_4/n$
$\text{covar}\ (K_2, K_3) = (K_5 + 6\,K_2\,K_3)/n$

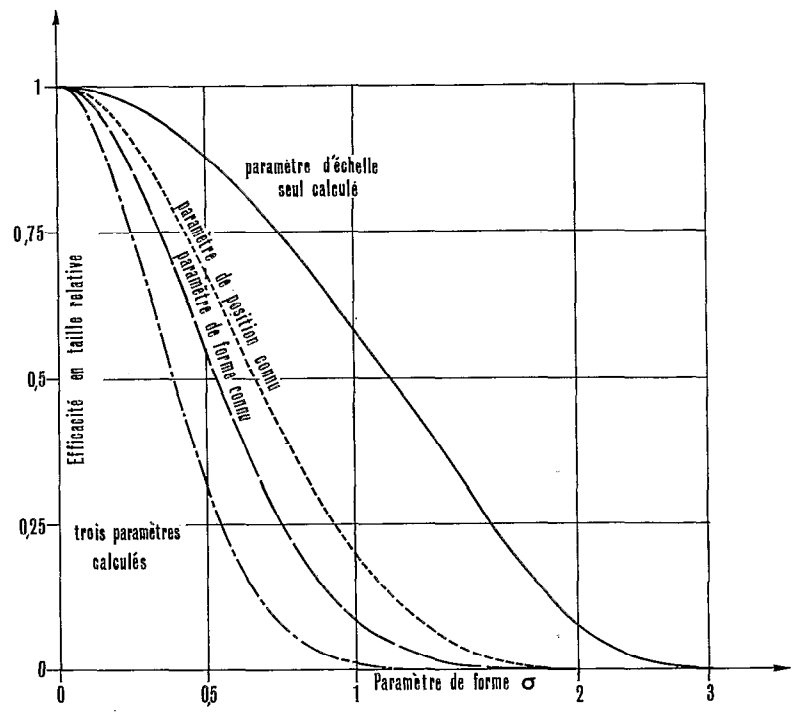

Fig. 4 — Efficacité par la méthode des moments

et :

$K_2 = A^2 (A^2 - 1)$

$K_3 = A^3 (A^2 - 1)^2 (A^2 + 2)$

$K_4 = A^4 (A^2 - 1)^3 (A^6 + 3 A^4 + 6 A^2 + 6)$

$K_5 = A^5 (A^2 - 1)^4 (A^{12} + 4 A^{10} + 10 A^8 + 20 A^6 + 30 A^4 + 36 A^2 + 24)$

$K_6 = A^6 (A^2 - 1)^5 (A^{20} + 5 A^{18} + 15 A^{16} + 35 A^{14} + 70 A^{12} + 120 A^{10} + 180 A^8 + 240 A^6 + 270 A^4 + 240 A^2 + 120)$

La variance généralisée (asymptotique) du système des trois paramètres calculés par la méthode du maximum de vraisemblance est (4.1).

$$\Delta = \frac{s^4 \sigma^6}{2 n^3 A^2} \Big/ \left[(1 + \sigma^2) A^2 - 1 - 2\sigma^2 \right]$$

Sur la figure 4 nous avons représenté, en fonction de σ l'efficacité en taille relative $\sqrt[3]{\Delta / D}$ qui représente le rapport des tailles d'échantillons nécessaires pour arriver à la même variance généralisée (asymptotique) : au numérateur taille dans le cas de détermination par le maximum de vraisemblance, au dénominateur taille dans le cas de détermination par la méthode des moments.

3.2.3. *Conclusion*

Au point de vue efficacité, la méthode des moments pour déterminer les trois paramètres de forme, d'échelle et de position devient médiocre lorsque la valeur du paramètre de forme σ est supérieure à 0,2, et franchement mauvaise lorsque σ est supérieure à 0,5 : on risque alors de trouver une valeur x_0 du paramètre de position supérieure à la plus petite valeur observée.

L'exemple donné en annexe montre que, pour des échantillons de petites tailles, il est inutile d'interpoler entre les valeurs de σ de la table C suivant les valeurs de γ_1 : la représentation de la distribution varie peu lorsque σ varie, compte tenu du fait que x_0 et s ne sont déterminés qu'après σ.

3.3. Paramètre de position connu a l'avance

Le signe du paramètre d'échelle est alors fixé positif si le paramètre de position x_0 est borne inférieure, négatif s'il est borne supérieure. Nous ne considérerons que le premier cas, mais ce qui suit s'étend facilement au cas du paramètre d'échelle négatif.

3.3.1. Il est plus simple, pour le calcul des paramètres de forme et d'échelle, de passer par les rapports des moments non centrés :

$$R_1 = \frac{\Sigma (x_i - x_0)}{n} = s\, e^{\sigma^2/2} = S_1$$

$$R_2 = \frac{\Sigma (x_i - x_0)^2}{\Sigma (x_i - x_0)} = s\, e^{3\sigma^2/2} = S_2/S_1$$

d'où :

$$e^{\sigma^2} = R_2/R_1 = A^2 \qquad \sigma = \sqrt{2 \log A}$$

$$S = R_1/A$$

Le tableau C donne pour des valeurs de A^2 comprises entre 1 et 9,5 les valeurs de σ comprises entre 0 et 1,5 et les valeurs de A.

3.3.2. *Efficacité*

Nous réécrivons les équations du paragraphe précédent sous la forme :

(1) $$s\ e^{\sigma^2/2} - S_1 = 0$$

(2) $$s\ S_1\ e^{3\sigma^2/2} - S_2 = 0$$

En dérivant chacune de ces équations par rapport à S_1 et S_2, on obtient le système d'équations donnant, avec

$$A = e^{\sigma^2/2}$$

$$\frac{\partial s}{\partial S_1} = 2/A \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial S_1} = -\ 1/[S\ \sigma\ A]$$

$$\frac{\partial s}{\partial S_2} = -\ 1/[2\ s\ A^4] \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial S_2} = 1/[2\ S^2\ \sigma\ A^4]$$

d'où les variances et covariances des paramètres (cf. 3.2.2.) et le déterminant de la matrice de ces variances et covariances :

$$D = \frac{1}{4\ S^4\ \sigma^2\ A^{10}}\ [\text{var}\ (S_1)\ \text{var}\ (S_2) - (\text{covar}\ (S_1, S_2))^2]$$

que représente la variance généralisée (asymptotique) du système des deux paramètres calculés par la méthode des moments :

$$D = \frac{s^2\ A^2}{4\ n^2\ \sigma^2}\ (A^2 + 1)\ (A^2 - 1)^3$$

La variance généralisée (asymptotique) du système des deux paramètres calculés par la méthode du maximum de vraisemblance est (4.1) :

$$\Delta = \frac{s^2\ \sigma^4}{2\ n^2}$$

Sur la figure 4 nous avons représenté en fonction de σ l'efficacité en taille relative $^2\sqrt{\Delta/D}$ qui représente le rapport des tailles d'échantillons nécessaires pour obtenir la même variance généralisée (asymptotique) : au numérateur taille dans le cas de détermination par le maximum de vraisemblance, au dénominateur taille dans le cas de détermination par la méthode des moments.

3.3.3. *Conclusion*

Au point de vue efficacité, la méthode des moments est acceptable pour déterminer les paramètres d'échelle et de forme (le paramètre de position étant connu) lorsque la valeur du paramètre de forme de la population-mère est inférieure à 0,4.

Pour des échantillons de petites tailles, il est inutile d'interpoler entre les valeurs de σ de la table C suivant les valeurs de $R_2/R_1 = A^2$: la représentation de la distribution varie peu lorsque σ varie, compte tenu du fait que s n'est déterminé qu'après σ.

3.3.4. *Autre méthode, préférable, de détermination des deux paramètres*

On peut faire la transformation logarithmique :

$$y_i = \text{Log}\ (x_i - x_0)$$

et les variables y sont réparties suivant une distribution normale de moyenne Log s (logarithme népérien du paramètre d'échelle de la distribution gausso-logarithmique des X) et de variance σ^2 (carré du paramètre de forme de la distribution gausso-logarithmique des X) d'où :

$$\text{Log}\ s = \frac{1}{n} \sum \text{Log}\ (x_i - x_0)$$

$$\sigma^2 = \frac{n}{n-1} \left[\frac{1}{n} \sum (\text{Log}\ (x_i - x_0))^2 - (\text{Log}\ s)^2 \right]$$

On reconnaît, à peu de choses près (au facteur près de $\frac{n}{n-1}$ pour l'expression de σ^2) les expressions obtenues en 4.3 pour la détermination de ces paramètres par la méthode du maximum de vraisemblance.

L'efficacité (asymptotique) de cette méthode de détermination logarithmique est donc 1.

3.4. Paramètre de forme connu a l'avance

Nous ne considérons que le cas du paramètre d'échelle positif: paramètre de position x_0 borne inférieure, coefficient d'asymétrie positif. Ce qui suit peut facilement s'étendre au cas du paramètre d'échelle négatif (x_0 borne supérieure, coefficient d'asymétrie négatif).

3.4.1. En utilisant les deux premiers moments de l'échantillon :

$$S_1 = \frac{1}{n}\sum x_i \qquad\qquad S_2 = \frac{1}{n}\sum x_i^2$$

nous obtenons le système d'équations provenant de l'écriture des cumulants :

$$s\, e^{\sigma^2/2} = S_1 - x_0$$

$$s\,\sqrt{e^{2\sigma^2} - e^{\sigma^2}} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\sqrt{S_2 - S_1^2} = \sqrt{c_2}$$

d'où : $s = \dfrac{\sqrt{c_2}}{A\sqrt{A^2-1}}$ en posant $A = e^{\sigma^2/2}$

et : $x_0 = S_1 - s\,A$

A et $A\sqrt{A^2-1}$ sont donnés en fonction de σ dans le tableau C.

3.4.2. *Efficacité*

Nous réécrivons les équations du paragraphe précédent sous la forme :

(1) $$x_0 + s\,A - S_1 = 0$$

(2) $$s\,A\sqrt{A^2-1} - \sqrt{c_2} = 0$$

En dérivant chacune de ces équations par rapport à S_1 et C_2 on obtient le système d'équation donnant :

$$\frac{\partial x_0}{\partial S_1} = 1 \qquad\qquad \frac{\partial s}{\partial S_1} = 0$$

$$\frac{\partial x_0}{\partial c_2} = -1 \Big/ \left[2\,S\,A\,(A^2-1)\right] \qquad\qquad \frac{\partial s}{\partial c_2} = 1 \Big/ \left[2\,s\,A^2\,(A^2-1)\right]$$

d'où les variances et covariances des paramètres (cf. 3.2.2) et le déterminant de la matrice des variances et covariances :

$$D = \frac{1}{4\,s^2\,A^4\,(A^2-1)^2}\left[\text{var}\,(S_1)\,\text{var}\,(C_2) - (\text{covar}\,(S_1, C_2))^2\right]$$

qui représente la variance généralisée (asymptotique) du système des deux paramètres calculés par la méthode des moments :

$$D = \frac{s^4\,A^8}{4\,n^2}\,(A^4-1)$$

La variance généralisée (asymptotique) du système des deux paramètres calculés par la méthode des maximums de vraisemblance est (4.1) :

$$\Delta = \frac{s^4 \sigma^4}{n^2 A^2} \Big/ \left[(1 + \sigma^2) A^2 - 1 \right]$$

Sur la figure 4, nous avons représenté, en fonction de σ, l'efficacité en taille relative $\sqrt[2]{\Delta/D}$ qui représente le rapport des tailles d'échantillons nécessaires pour obtenir la même variance généralisée (asymptotique) : au numérateur taille dans le cas de détermination par le maximum de vraisemblance, au dénominateur taille dans le cas de détermination par la méthode des moments.

3.4.3. *Conclusion*

Au point de vue efficacité la méthode des moments pour calculer les valeurs des paramètres de position et d'échelle (le paramètre de forme étant connu) devient médiocre lorsque la valeur du paramètre de forme est supérieure à 0,3, puis franchement mauvaise lorsque cette valeur croît.

Pour des échantillons de petites tailles, il est inutile d'interpoler dans le tableau C et il vaut mieux arrondir la valeur de σ, car la représentation de la distribution varie peu lorsque σ varie, étant donné que s et x_0 dépendent de cette valeur choisie pour σ.

3.5. Paramètres de position et de forme connus a l'avance

3.5.1. Nous ne considérons que le cas du paramètre d'échelle positif : le paramètre de position x_0 est borne inférieure, coefficient d'asymétrie positif. Le cas du paramètre d'échelle négatif s'en déduit facilement.

En utilisant le premier moment de l'échantillon :

$$S_1 = \frac{1}{n} \sum x_i$$

on calcule :

$$s = (S_1 - x_0) / e^{\sigma^2/2}$$

$e^{\sigma^2/2} = A$ est donné dans la table C en fonction de σ.

La dérivée de s par rapport à S_1 est :

$$\frac{\partial s}{\partial S_1} = \frac{1}{A}$$

et la variance du paramètre d'échelle est :

$$D = \left(\frac{\partial s}{\partial S_1} \right)^2 \text{var } S_1 = \frac{S^2}{n} (A^2 - 1)$$

La variance du paramètre d'échelle calculé par la méthode du maximum de vraisemblance est (4.1) :

$$\Delta = \frac{s^2 \sigma^2}{n}$$

Sur la figure 4, nous avons représenté en fonction de σ l'efficacité Δ/D qui représente le rapport des tailles d'échantillons nécessaires pour obtenir la même variance du paramètre, au numérateur taille dans le cas de détermination par le maximum de vraisemblance, au dénominateur taille dans le cas de détermination par la méthode des moments.

3.5.2. *Autre méthode, préférable, de détermination du paramètre d'échelle*

On peut faire la transformation logarithmique :

$$y_i = \text{Log } (x_i - x_0)$$

et les variables Y sont réparties suivant une distribution normale de moyenne Log s (logarithme népérien du para-

mètre d'échelle de la distribution gausso-logarithmique des X) et de variance connue σ^2 (carré du paramètre de forme de la distribution gausso-logarithmique des X) d'où :

$$\text{Log } s = \frac{1}{n} \sum \text{Log } (x_i - x_0)$$

Cette expression est identique à celle que l'on obtient par la méthode du maximum de vraisemblance. L'efficacité de la détermination du paramètre d'échelle par la transformation logarithmique est donc 1.

3.6. Répartitions tronquées avec troncature

N étant le nombre total d'observations égales à ou différentes de x_0, paramètre de position (borne inférieure connue a priori) nous posons :

$$S_1 = \Sigma (x_i - x_0) \qquad S_2 = \Sigma (x_i - x_0)^2 \qquad S_3 = \Sigma (x_i - x_0)^3$$

On ne peut utiliser la méthode des moments que s'il est possible de se servir de toutes les observations disponibles sans faire de troncature à un seuil supérieur à celui qui est imposé par la sensibilité de l'appareil de mesure ou de la méthode. Si ce seuil x_h est suffisamment bas les erreurs commises sur S_1, S_2, et S_3 en remplaçant par x_0 les valeurs x_i, inférieures à x_h, qui auraient dû être observées, sont négligeables.

3.6.1. En partant de :

$$R_2 = S_2/S_1 = s\ e^{3\sigma^2/2} = s\ A^3$$

$$R_3 = S_3/S_2 = s\ e^{5\sigma^2/2} = s\ A^5$$

d'où :

$$R_3/R_2 = e^{\sigma^2} = A^2$$

La table C permet de déterminer σ en fonction de A^2 et s est calculé par :

$$s = R_2/A^3$$

Le nombre théorique M d'observations différentes de x_0 qui auraient dû être faites est donné par :

$$S_1 = M\ s\ e^{\sigma^2/2} = M\ s\ A$$

et le paramètre de tronquage F_0 par :

$$F_0 = \frac{N - M}{N}$$

3.6.2. *Si la taille de l'échantillon est inconnue* (voir le paragraphe 4.7. pour la définition exacte de ce cas) la méthode des moments nous semble inutilisable.

4. ESTIMATION DES PARAMÈTRES PAR LE MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE D'APRÈS UN ÉCHANTILLON DE TAILLE n

4.1. Equations et expressions

Pour une valeur x_i de la variable, la fonction de densité s'écrit, en posant :

$$u = \frac{x_i - x_0}{s}$$

$$f(x_i) = \frac{1}{s\ \sigma\ \sqrt{2\pi}}\ u^{-1}\ \exp\left[-\frac{(\text{Log } u)^2}{2\ \sigma^2}\right]$$

et son logarithme :

$$\mathcal{L} = -\text{Log}\, s - \text{Log}\, \sigma - \text{Log}\, \sqrt{2\pi} - \frac{1}{2\sigma^2} (\text{Log}\, u)^2$$

4.1.1. Les dérivées premières de $\mathcal{L}$ sont :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_0} = \frac{1}{su} + \frac{1}{\sigma^2} \frac{\text{Log}\, u + \text{Log}\, s}{s\, u} - \frac{1}{\sigma^2} \frac{\text{Log}\, s}{s\, u}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = -\frac{1}{\sigma^2} \frac{\text{Log}\, s}{s} + \frac{1}{\sigma^2} \frac{\text{Log}\, u + \text{Log}\, s}{s}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma} = -\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} (\text{Log}\, u)^2$$

4.1.2. Les dérivées partielles secondes de $\mathcal{L}$ s'écrivent :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_0^2} = \frac{1}{s^2 u^2} - \frac{1}{\sigma^2} \frac{1}{s^2 u^2} + \frac{1}{\sigma^2} \frac{\text{Log}\, u + \text{Log}\, s}{s^2 u^2} - \frac{1}{\sigma^2} \frac{\text{Log}\, s}{s^2 u^2}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial s^2} = -\frac{1}{s^2 \sigma^2} + \frac{\text{Log}\, s}{s^2 \sigma^2} - \frac{\text{Log}\, u + \text{Log}\, s}{s^2 \sigma^2}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} - \frac{3}{\sigma^4} (\text{Log}\, u)^2$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_0 \partial s} = -\frac{1}{\sigma^2\, s^2\, u}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_0 \partial \sigma} = -\frac{2}{\sigma^3} \frac{\text{Log}\, u + \text{Log}\, s}{su} + \frac{2}{\sigma^3} \frac{\text{Log}\, s}{su}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial s \partial \sigma} = \frac{2}{\sigma^3} \frac{\text{Log}\, s}{s} - \frac{2}{\sigma^3} \frac{\text{Log}\, u + \text{Log}\, s}{s}$$

Les espérances mathématiques sont :

$$\mathrm{E}\, \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_0^2} = \frac{-1}{s^2} \left(1 + \frac{1}{\sigma^2} \right) e^{2\sigma^2}$$

$$\mathrm{E}\, \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial s^2} = \frac{-1}{s^2 \sigma^2}$$

$$\mathrm{E}\, \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \sigma^2} = \frac{-2}{\sigma^2}$$

$$\mathrm{E}\, \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_0 \partial s} = \frac{-1}{\sigma^2 s^2} e^{\sigma^2/2}$$

$$\mathrm{E}\, \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_0 \partial \sigma} = \frac{2}{\sigma\, s} e^{\sigma^2/2}$$

$$\mathrm{E}\, \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial s\, \partial \sigma} = 0$$

4.1.3. La matrice d'information s'écrit :

$$\frac{1}{s^2\,\sigma^2}\begin{bmatrix} (1+\sigma^2)\,e^{2\sigma^2} & e^{\sigma^2/2} & -2\,s\,\sigma\,e^{\sigma^2/2} \\ e^{\sigma^2/2} & 1 & 0 \\ -2\,s\,\sigma\,e^{\sigma^2/2} & 0 & 2\,s^2 \end{bmatrix}$$

La matrice des variances et covariances des paramètres a pour termes ceux de l'inverse de cette matrice, divisée par n.

Le déterminant de la matrice des variances et covariances qui représente la variance généralisée (asymptotique) du système des paramètres calculés par la méthode du maximum de vraisemblance a pour valeur :
les trois paramètres, x_0, s et σ calculés :

$$\Delta = \frac{s^4\,\sigma^6}{2\,n^3}\,e^{-\sigma^2} \Big/ \left[(1+\sigma^2)\,e^{\sigma^2} - 1 - 2\,\sigma^2\right]$$

paramètre de position connu, s et σ calculés :

$$\Delta = \frac{s^2\,\sigma^4}{2\,n^2}$$

paramètre de forme connu, x_0 et s calculés :

$$\Delta = \frac{s^4\,\sigma^4}{n^2}\,e^{-\sigma^2} \Big/ \left[(1+\sigma^2)\,e^{\sigma^2} - 1\right]$$

paramètre de position et de forme connus s calculé :

$$\Delta = \frac{s^2\,\sigma^2}{n}$$

4.1.4. En utilisant la méthode du maximum de vraisemblance, nous faisons l'hypothèse de base suivante :

Les valeurs observées correspondent à des variables aléatoires indépendantes, connues sans erreurs d'observation. L'échantillon observé est représentatif d'une population-mère distribuée suivant une loi gausso-logarithmique (dont il est possible que l'on connaisse a priori les valeurs de certains paramètres).

Si les variables observées ne sont pas strictement indépendantes, on n'a pas le droit, en principe, d'écrire l'expression du maximum de vraisemblance. Cependant on peut utiliser la méthode si la taille de l'échantillon est suffisamment grande et si la dépendance séquentielle est suffisamment petite pour que l'échantillon soit représentatif de la population-mère.

Si les variables observées sont entachées d'erreurs d'observation (erreurs non systématiques qui, elles, se répercuteront sur le paramètre de position et/ou le paramètre d'échelle) la méthode peut être utilisée :

— soit lorsque l'erreur à craindre sur les valeurs observées est répartie avec une moyenne nulle et une variance indépendante de la valeur qui aurait dû être observée ;

— soit lorsqu'elle est répartie avec une moyenne nulle et un écart-type proportionnel à la valeur qui aurait dû être observée.

Dans ces deux cas, on ne suppose pas que la fonction de répartition de l'erreur soit gaussienne, mais qu'elle conserve la même formulation mathématique avec les mêmes valeurs des paramètres de forme quelle que soit la valeur observée.

4.2. Trois paramètres calculés

Le système d'équations déterminant x_0, s et σ s'écrit (cf. 4.1.1) après simplifications (paramètre d'échelle positif) :

— dérivée par rapport à x_0 :

$$\sigma^2 \sum \frac{1}{x_i - x_0} + \sum \frac{\mathrm{Log}\,(x_i - x_0)}{x_i - x_0} - \mathrm{Log}\,s \sum \frac{1}{x_i - x_0} = 0$$

— dérivée par rapport à s :

$$n \text{ Log } s - \Sigma \text{ Log } (x_i - x_0) = 0$$

— dérivée par rapport à σ :

$$-n\sigma^2 + \Sigma [\text{Log } (x_i - x_0)]^2 + n [\text{Log } s]^2 - 2 \text{ Log } s \; \Sigma \text{ Log } (x_i - x_0) = 0$$

4.2.1. En posant :

$$SH = \frac{1}{n} \sum \frac{1}{x_i - x_0} \qquad SL = \frac{1}{n} \sum \text{Log } (x_i - x_0)$$

$$SM = \frac{1}{n} \sum \frac{\text{Log } (x_i - x_0)}{x_i - x_0} \qquad SN = \frac{1}{n} \sum [\text{Log } (x_i - x_0)]^2$$

le système d'équation s'écrit :

$$\text{Log } s = SL$$

$$\sigma^2 = SN - SL^2$$

$$\sigma^2 = SL - SM/SH$$

Ces deux dernières équations, implicites et transcendantes, ne contiennent que x_0 et σ comme inconnues. La méthode qui semble la plus rapide pour trouver la solution consiste à choisir une valeur de x_0, calculer :

$$SP = SL - SM/SH \qquad \text{et} \qquad SQ = SN - SL^2$$

et la comparaison de SP et de SQ permet de savoir dans quel sens faire varier x_0. Si $\sqrt{SP/SQ} - 1$ est négatif, la valeur choisie pour x_0 est trop petite, sinon elle est trop grande. On choisit une nouvelle valeur de x_0 et on continue les itérations jusqu'à trouver $\sqrt{SP/SQ} = 1$ avec l'erreur relative acceptée.

x_0 déterminé, on obtient :

$$\sigma = SP$$

$$s = \exp (SL)$$

4.2.2. Si le signe du paramètre d'échelle avait été choisi négatif, SH, SL, SM, SN doivent être calculés avec les valeurs absolues de $(x_i - x_0)$, la marche à suivre est semblable, mais si $\frac{SP}{SQ} - 1$ est négatif, la valeur choisie pour x_0 est trop grande, sinon elle est trop petite... La valeur de s est $-\exp (SL)$ une fois x_0 déterminé.

Il semble bien que la solution du système des équations du maximum de vraisemblance soit unique.

En annexe 4, nous donnons un exemple de traitement par le maximum de vraisemblance avec calcul d'intervalle de confiance, des mêmes données qui ont fait l'objet de l'exemple de traitement par la méthode des moments.

4.2.3. *Biais*

Nous avons fait quelques tirages au hasard pour rechercher les biais (même démarche qu'en 4.3.3) sans pouvoir les déterminer complètement car cela aurait pris trop de temps d'ordinateur. Il semble que les biais soient de l'ordre de α/n^2 sur le paramètre de forme, de $s\,\beta/n^2$ sur le paramètre d'échelle et de $s\,\gamma/n^2$ sur le paramètre de position : α, β et γ étant des fonctions du paramètre de forme σ.

4.3. Paramètre de position connu a l'avance

Le système d'équation déterminant s et σ s'écrit (cf. 4.1.1) après simplifications (paramètre d'échelle positif) :

— dérivée par rapport à s :

$$n \text{ Log } s - \Sigma \text{ Log } (x_i - x_0) = 0$$

— dérivée par rapport à σ :

$$-n\sigma^2 + \sum \left[\text{Log}\,(x_i - x_0)\right]^2 - \frac{1}{n}\left[\sum \text{Log}\,(x_i - x_0)\right]^2 = 0$$

4.3.1. En posant :

$$SL = \frac{1}{n}\sum \text{Log}\,(x_i - x_0) \qquad SN = \frac{1}{n}\sum \left[\text{Log}\,(x_i - x_0)\right]^2$$

la solution est :

$$\sigma = \sqrt{SN - SL^2}$$

$$s = \exp\,(SL)$$

4.3.2. La solution du système des équations du maximum de vraisemblance est unique.

4.3.3. *Biais*

Nous avons recherché les biais des déterminations des paramètres de forme et d'échelle par la méthode générale de comparaison des estimations obtenues sur l'échantillon de taille n et des moyennes des n estimations obtenues sur les n sous-échantillons créés en supprimant l'une après l'autre une valeur de l'échantillon de taille n. L'étude a été faite en prenant 36 échantillons de taille 10 et 36 échantillons de taille 20 tirés au hasard (méthode de Monte-Carlo) dans chacune des populations-mères de paramètres de forme :

$$\sigma = 0{,}03\,;\ 0{,}07\,;\ 0{,}13\,;\ 0{,}25\,;\ 0{,}50\,;\ 0{,}75\,;\ 1{,}00\,;\ 1{,}25.$$

Le biais sur le paramètre d'échelle s est de l'ordre de $1/n^2$. Plus exactement, il semble que l'on puisse écrire :

— estimation améliorée de s =

$$\text{(estimation de s d'après l'échantillon de taille n)}.\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{\sigma^2}{(n-1)\ (n-2)}\right)$$

Le biais sur le paramètre de forme σ est également de l'ordre de $1/n^2$. Plus exactement, il semble que l'on puisse écrire :

— Estimation améliorée de σ =

$$\text{(estimation de } \sigma \text{ d'après l'échantillon de taille n)}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{(n-1)\ (n-2)}\right)$$

4.4. Paramètre de forme connu a l'avance

Le système d'équations déterminant x_0 et s s'écrit (cf. 4.1.1) après simplifications (paramètre d'échelle positif) :

— dérivée par rapport à x_0 :

$$\sigma^2 \sum \frac{1}{x_i - x_0} + \sum \frac{\text{Log}\,(x_i - x_0)}{x_i - x_0} - \text{Log}\,s \sum \frac{1}{x_i - x_0} = 0$$

— dérivée par rapport à s :

$$n\ \text{Log}\,s - \Sigma\ \text{Log}\,(x_i - x_0) = 0$$

4.4.1. En posant :

$$SH = \frac{1}{n}\sum \frac{1}{x_i - x_0} \qquad SL = \frac{1}{n}\sum \text{Log}\,(x_i - x_0)$$

$$SM = \frac{1}{n}\sum \frac{\text{Log}\,(x_i - x_0)}{x_i - x_0}$$

Le système d'équations s'écrit :

$$\text{Log } s = SL$$

$$\sigma^2 = SL - SM/SH$$

Cette dernière équation ne contient que x_0 comme inconnue. La méthode qui semble la plus simple pour la résoudre consiste à choisir une valeur pour x_0, à calculer :

$$SP = SL - SM/SH$$

et à comparer SP et σ^2 valeur connue. Si SP est inférieur à σ^2, la valeur choisie est trop petite, sinon elle est trop grande. On choisit une nouvelle valeur de x_0 et on continue les itérations jusqu'à trouver $SP/\sigma^2 = 1$ avec l'erreur relative acceptée. x_0 déterminé, on obtient :

$$s = \exp (SL)$$

4.4.2. Il semble bien que la solution du système des équations du maximum de vraisemblance soit unique.

4.4.3. *Biais*

Nous avons recherché les biais des déterminations des paramètres de position et d'échelle par la méthode générale (voir paragraphe 4.3.3).

Les biais sont de l'ordre de $1/n^2$. On peut écrire approximativement, sans précision car l'étude n'a pas été poussée assez loin (échantillonnage insuffisant).

$$\text{Estimation améliorée de s} = (\text{estimation de s d'après l'échantillon de taille n}) \cdot \left(1 - \frac{3}{4\,(n-1)\,(n-2)}\right)$$

$$\text{Estimation améliorée de } x_0 = (\text{estimation de } x_0 \text{ d'après l'échantillon de taille n}) + \frac{s}{(n-1)\,(n-2)}\left(\frac{3}{4} + \frac{\sigma}{5}\right)$$

4.5. Paramètre de position et de forme connus a l'avance

Seul le paramètre d'échelle est à déterminer :

$$s = \exp\left[\frac{1}{n}\sum \text{Log}\,(x_i - x_0)\right]$$

L'étude du biais par la méthode générale de comparaison (4.3.3) conduit à écrire :

$$\text{Estimation améliorée de s} = (\text{estimation de s d'après l'échantillon de taille n}) \cdot \left(1 + \frac{4}{\pi^2}\frac{\sigma^2}{(n-1)(n-2)}\right)$$

4.6. Répartitions tronquées

Nous nous plaçons dans le cas où le paramètre de position est connu, borne inférieure, paramètre d'échelle $s > 0$ à déterminer, ainsi que le paramètre de forme $\sigma > 0$ et le paramètre de tronquage F_0.

N est le nombre total d'observations égales à ou différentes de x_0.

x_h est le seuil de troncature, soit choisi en fonction du peu de confiance que l'on a dans les valeurs observées inférieures à x_h et dans leur nombre observé, soit déterminé par la sensibilité de l'appareil de mesure ou de la méthode.

n est le nombre d'observations supérieures ou égales à x_h.

4.6.1. On applique la méthode du maximum de vraisemblance aux n observations conservées, dont la probabilité totale est :

$$(1 - F_0)\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{x_h}^{\infty}\frac{1}{x - x_0}\exp\left[-\frac{\left(\mathrm{Log}\left(\frac{x - x_0}{s}\right)\right)^2}{2\sigma^2}\right]dx$$

Le logarithme naturel du maximum de vraisemblance s'écrit :

$$-n\,\mathrm{Log}\,\sigma - n\,\mathrm{Log}\,\sqrt{2\pi} - \sum \mathrm{Log}(x_i - x_0) - \frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum(\mathrm{Log}(x_i - x_0))^2 - 2\,\mathrm{Log}\,s\sum\mathrm{Log}(x_i - x_0) + n\,(\mathrm{Log}\,s)^2\right]$$

$$-n\,\mathrm{Log}\left[1 - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{x_0}^{x_h}\frac{1}{x - x_0}\exp\left[-\frac{\left(\mathrm{Log}\left(\frac{x - x_0}{s}\right)\right)^2}{2\sigma^2}\right]dx\right]$$

En annulant les dérivées par rapport à s et σ après avoir posé :

$$SL = \frac{1}{n}\sum \mathrm{Log}(x_i - x_0) \qquad SM = \frac{1}{n}\sum(\mathrm{Log}(x_i - x_0))^2$$

$$u_h = \frac{x_h - x_0}{s} \qquad P_h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{x_0}^{x_h}\frac{1}{u}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{Log}\,u}{\sigma}\right)^2\right]du$$

il vient :

$$\frac{1}{\sigma}(SL - \mathrm{Log}\,s) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{Log}\,u_h}{\sigma}\right)^2\right] \Big/ \left[\sqrt{2\pi}\,(1 - P_h)\right]$$

$$\frac{1}{\sigma^2}\left[SM - 2\,SL\,\mathrm{Log}\,s + (\mathrm{Log}\,s)^2\right] = 1 + \frac{\mathrm{Log}\,u_h}{\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{Log}\,u_h}{\sigma}\right)^2\right] \Big/ \left[\sqrt{2\pi}\,(1 - P_h)\right]$$

système que nous pouvons écrire :

$$\mathrm{Log}\,s = [SM - SL\,\mathrm{Log}\,(x_h - x_0) - \sigma^2] \,/\, [SL - \mathrm{Log}\,(x_h - x_0)]$$

$$SL = \mathrm{Log}\,s + \sigma\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{Log}\,u_h}{\sigma}\right)^2\right] \Big/ \left[\sqrt{2\pi}\,(1 - P_h)\right]$$

La méthode qui semble la plus simple pour résoudre ce système consiste à choisir une valeur de σ, d'où une valeur de s d'après la première équation, puis à calculer :

$$SK = \mathrm{Log}\,s + \sigma\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{Log}\,u_h}{\sigma}\right)^2\right] \Big/ \left[\sqrt{2\pi}\,(1 - P_h)\right]$$

en y portant les valeurs de σ et de s. On compare ensuite SK et SL : si SK est inférieur à SL, il faut faire décroître σ, sinon il faut faire croître σ. On choisit une nouvelle valeur de σ, calcule une nouvelle valeur de s, puis de SK que l'on compare à SL... On continue les itérations jusqu'à avoir $\frac{SK}{SL} = 1$ avec l'erreur relative acceptée.

Le paramètre de tronquage se calcule par :

$$F_0 = 1 - \frac{n}{N(1 - P_h)}$$

4.6.2. La fréquence calculée, une fois les valeurs des paramètres connus, est celle qui correspond à la définition de l'événement. Si on a adopté, par exemple, une répartition tronquée sur la somme des précipitations de J jours consécutifs, cette somme X de fréquence Φ_1 au dépassement d'une fois en T années sera définie par :

$$\Phi_1 = 1/T$$

$$F_1 = \frac{J}{365{,}25\ T} = (1 - F_0)\left(1 - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{x_0}^{x} \frac{1}{x - x_0} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{Log}\left(\frac{x - x_0}{s}\right)}{\sigma}\right)^2\right] dx\right)$$

4.6.3. Lorsqu'on veut appliquer cette méthode à des observations dont la répartition est « en J » (étude de pluviométries journalières par exemple) on sera conduit à chercher par tâtonnements un seuil de troncature suffisamment élevé pour ne conserver que les observations se trouvant dans la partie « en J » de la fonction de densité (1.4.1).

4.7. Taille d'échantillon inconnue

On peut assimiler au cas des distributions tronquées un cas particulier où la taille de l'échantillon doit être considérée comme inconnue. Par exemple, on désire étudier les débits maximaux de crues à une station : les observations dont on dispose couvrent quatre années hydrologiques complètes dans lesquelles on a trouvé n = 37 crues considérées comme indépendantes dont les débits maximaux, connus, x_i sont supérieurs ou égaux à un seuil de troncature : $x_n = 20$ m³/s.

On ne connaît pas le nombre total dans ces quatre années des événements « crues indépendantes ».

4.7.1. Le maximum de vraisemblance s'écrit dans ce cas :

$$\mathscr{L} = \prod_1^n f(x_i) / [1 - F(x_h)]^n$$

et dans le cas des distributions tronquées :

$$\mathscr{L} = \prod_1^n (1 - F_0)\, f(x_i) / [(1 - F_0)\,(1 - F(x_h)]^n$$

On retombe sur les mêmes expressions que précédemment du logarithme du maximum de vraisemblance, et, si la valeur du paramètre de position x_0 est connue a priori, sur les mêmes méthodes de solution (dans l'exemple ci-dessus on pourrait prendre $x_0 = 0$, car le débit de base est négligeable, bien inférieur au m³/s, par rapport aux débits de pointe).

4.7.2. Les valeurs des paramètres x_0, s et σ une fois connus on peut déterminer le nombre total N' d'événements que l'on aurait dû observer.

$$N' = n / (1 - F(x_h))$$

ce qui permet de calculer la valeur de la variable correspondant à une probabilité donnée, en remarquant que N' peut très bien ne pas être un nombre entier.

La fréquence F(x) pour une valeur de x, calculée avec les valeurs des paramètres est celle qui correspond à la définition de l'événement. Pour reprendre l'exemple ci-dessus, le débit de pointe X de fréquence au dépassement une fois en T années (défini par $\Phi_1(X) = 1/T$), c'est-à-dire une fois sur $\frac{N'T}{A}$ événements (A nombre d'années d'observations) est calculé par inversion de :

$$F(X) = 1 - \frac{A}{N'T} = 1 - \frac{A}{N'}\,\Phi_1(X)$$

F(X) étant, nous le répétons, la probabilité au non-dépassement dans la loi gausso-logarithmique dont les valeurs des paramètres sont x_0, s et σ.

En annexe 5, nous donnons un exemple de traitement avec calcul d'intervalles de confiance.

5. COMPLÉMENTS DIVERS

5.1. Comportement asymptotique

Si la fréquence F au non-dépassement tend vers 1, en posant T (récurrence) $= \frac{1}{1 - F}$, la variable réduite $u = \frac{x - x_0}{s}$ tend vers :

$$\exp\left[\sigma\sqrt{2\,\mathrm{Log}\,T - 2\,\mathrm{Log}\,(\sigma\sqrt{2\pi})}\right]$$

Si la fréquence F tend vers zéro, en posant T (récurrence) $= \frac{1}{F}$, la variable réduite u tend vers :

$$\exp\left[-\sigma\sqrt{2\,\mathrm{Log}\,T - 2\,\mathrm{Log}\,(\sigma\sqrt{2\pi})}\right]$$

Il n'y a pas d'asymptote à proprement parler, mais on peut dire que u tend vers exp $[\pm\sigma\sqrt{2\,\mathrm{Log}\,T}]$ d'une façon parabolique.

5.2. Répartition asymptotique des valeurs extrêmes

Lorsque la variable réduite u tend vers $+\infty$, définie, avec une approximation suffisante dans la population-mère par la récurrence T :

$$u = \exp(\sigma\sqrt{2\,\mathrm{Log}\,T})$$

Pour T fixé, la distribution de la plus forte valeur u d'échantillons de taille $n = T$ tirés d'une population-mère de paramètres connus, tend vers une distribution de Fréchet de paramètres de position zéro, d'échelle exp $(\sigma\sqrt{2\,\mathrm{Log}\,n})$, et de forme $-\sigma\sqrt{2\pi}$.

5.3. Répartition de l'inverse

La répartition de $y = \frac{1}{x}$ est la même que celle de x si le paramètre de position de cette répartition est nul. y suit une distribution gausso-logarithmique de mêmes paramètres de forme, d'échelle et de position (nul) que x.

5.4. Répartition d'un quotient

Si deux variables aléatoires indépendantes x et y sont réparties suivant des lois gausso-logarithmiques de mêmes paramètres de position nuls, de mêmes paramètres d'échelle s et de paramètres de forme σ_x et σ_y, la répartition du quotient y/x ou du quotient x/y est celle d'une loi gausso-logarithmique de paramètre de position nul, de paramètre d'échelle s^2 et de paramètre de forme $\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$.

5.5. Intervalles de confiance

Nous ne nous intéresserons ici qu'aux intervalles de confiance liés à une valeur de la variable calculée pour une probabilité connue, avec les valeurs des paramètres déterminés d'après l'échantillon : par exemple, nous désirons connaître l'intervalle de confiance (centré) à 80% du module décennal fort (de fréquence au non dépassement 0,9). Par définition, il y aura 10% de chances que le véritable module décennal (étant donné l'échantillon)

soit inférieur à la valeur limite inférieure de l'intervalle de confiance, également 10% de chances qu'il soit supérieur à la valeur limite supérieure de l'intervalle et 80% de chances qu'il soit compris entre ces deux valeurs.

Cet intervalle de confiance dépend :

— de la forme mathématique choisie pour la fonction de répartition ;
— de la taille de l'échantillon observé ;
— des valeurs numériques des paramètres d'ajustement de la fonction de répartition à l'échantillon.

Il dépend également du mode de calcul des paramètres : pratiquement, il faut toujours utiliser la méthode la plus efficace, celle du maximum de vraisemblance.

Dans le cas de la distribution gausso-logarithmique, la seule méthode de détermination d'intervalle de confiance est la méthode générale, on considère qu'une fois choisie la forme mathématique de la fonction de répartition, et calculées les valeurs numériques des paramètres d'ajustement, la loi de distribution ainsi déterminée est celle de la population-mère d'où provient l'échantillon observé de taille n. On tire au hasard dans cette population-mère un grand nombre d'échantillons de taille n — mettons 100 000 échantillons — ; on calcule pour chaque échantillon : les valeurs numériques des paramètres d'ajustement de la forme mathématique de la distribution, puis le module décennal d'après ces valeurs numériques. Ces 100 000 valeurs de modules décennaux sont rangées en ordre croissant et l'intervalle de confiance à 80% est défini, avec une très bonne approximation, entre la 10 000e et la 90 000e valeur.

5.5.1. Il serait possible de construire des abaques donnant en variables réduites u, les valeurs des intervalles de confiance. Cette construction serait très onéreuse malgré les possibilités des ordinateurs étant donné qu'il y a quatre grandeurs variables :

— taille de l'échantillon ;
— paramètre de forme de la loi gausso-logarithmique ;
— fréquence au non-dépassement à laquelle on s'intéresse ;
— étendue en probabilité de l'intervalle de confiance.

Il nous a semblé préférable d'écrire des sous-programmes permettant d'effectuer dans chaque cas particulier un calcul, suffisamment précis pour les besoins courants, de l'intervalle de confiance : en tirant m échantillons de taille n de la population-mère. Une fois rangées, en ordre croissant, les m valeurs de la variable de fréquence au non-dépassement choisie à l'avance, déduites de ces m échantillons (cf. ci-dessus), la valeur de rang i a pour « probabilité observée» dans l'échantillon de taille m : $\frac{i - 0{,}5}{m}$ et celle de rang $(m + 1 - i)$: $\frac{m - i + 0{,}5}{m}$

Après essais, nous pensons que les valeurs de rang $i = 10$ et de rang $(m - 9)$ représentent avec une approximation suffisante les bornes de l'intervalle de confiance d'étendue en probabilité $\frac{m + 1 - 2i}{m} = \frac{m - 19}{m}$. Les valeurs intéressantes de m sont :

m	38	57	76	95	190	380	950	1900
étendue	0,5	2/3	3/4	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99

5.5.2. *Cas des échantillons sans troncature ni tronquage*

Il ne se pose aucun problème de tirage des m échantillons, tous de taille n.

5.5.3. *Cas des échantillons de taille connue à seuil de troncature, en distribution tronquée*

Il ne se pose pas plus de problème : les m échantillons sont de taille n, mais les nombres de valeurs supérieures au seuil de troncature sont variables suivant les échantillons.

5.5.4. *Cas des échantillons de taille « inconnue», à seuil de troncature*

On a calculé, au premier ajustement sur l'échantillon « observé», une taille fictive n' (4.7.2.) qui n'est pas forcément un nombre entier, et on est obligé de prendre comme taille de chacun des m échantillons le nombre entier le plus proche de n'. Les nombres de valeurs supérieures au seuil de troncature sont variables suivant les échantillons.

5.6. Méthodes graphiques de détermination des paramètres

Il est possible d'utiliser des méthodes graphiques pour déterminer approximativement les valeurs des paramètres.

Si on n'a pas d'ordinateur à sa disposition (ce qui élimine en fait la possibilité d'utilisation du maximum de vraisemblance) la détermination par la méthode des moments est préférable à la détermination graphique dans le cas de répartitions non tronquées ; la méthode graphique est la seule utilisable dans le cas de répartition expérimentale « en J » tronquée avec laquelle on veut adapter une loi gausso-logarithmique avec seuil de troncature à déterminer, ou dans le cas de distribution à taille d'échantillon inconnue.

Bien que les méthodes graphiques que nous allons décrire reposent sur une liaison linéaire, il ne faut pas, en principe, (non homoscedasticité) en déduire une méthode de calcul des paramètres par les moindres carrés.

5.6.1. *Observations sans troncature ni tronquage*

Paramètres de position, d'échelle, de forme, à déterminer.

Les n observations x_i étant rangées en ordre croissant, nous associons à chacune d'elle la probabilité au non-dépassement $F_i = \frac{i - 0{,}5}{n}$ et la valeur t_i de la variable réduite de gauss correspondant à cette probabilité F_i. Comme la distribution gausso-logarithmique s'obtient en faisant dans la distribution normale réduite le changement de variable :

$$\frac{\text{Log}\left(\frac{x - x_0}{s}\right)}{\sigma} = t$$

qui s'écrit en logarithmes décimaux :

$$\log (x - x_0) - \log s = \sigma\, t \,.\, 0{,}4343 = \sigma\, t'$$

La méthode consiste à porter sur un graphique gausso-logarithmique les points de coordonnées F_i et $(x_i - x_0)$ en faisant varier x_0 de façon à obtenir le meilleur alignement possible. Un exemple donné en annexe 2 explicite la marche à suivre.

Une fois la valeur de x_0 choisie, celle de s est $(x - x_0)$ qui, sur la droite de l'alignement, correspond à $F = 0{,}5$ ($t' = 0$). La valeur de σ est celle de la pente de la droite, compte tenu des unités du graphique.

5.6.2. *Observations avec tronquage et troncature*

La valeur du paramètre de position est connue a priori. Il faut déterminer les valeurs des paramètres d'échelle, de forme et de tronquage, et le seuil de troncature qui fournit le meilleur alignement.

N étant le nombre total d'observations possibles, supérieures ou égales à x_0 (la probabilité F_0 d'observations égales à x_0, borne inférieure, n'est pas nulle), les observations sont rangées en ordre décroissant, et à l'observation de rang R_i nous associons la probabilité au dépassement $F_{1i} = \frac{R_i - 0{,}5}{N\,(1 - F_0)}$ et la valeur t_i de la variable réduite de gauss correspondant à cette probabilité F_{1i}. Comme la distribution gausso-logarithmique s'obtient en faisant dans la distribution normale réduite, le changement de variable :

$$\frac{\text{Log}\left(\frac{x - x_0}{s}\right)}{\sigma} = t$$

qui s'écrit en logarithmes décimaux :

$$\log (x - x_0) - \log s = \sigma\, t \quad \log e = \sigma\, t'$$

la méthode consiste à porter sur un graphique gausso-logarithmique les points de coordonnées $(x_i - x_0)$ et $F_{1i} = \frac{R_i - 0{,}5}{N\,(1 - F_0)}$ en faisant varier F_0 de façon à obtenir le meilleur alignement possible pour les points $x_i \geqslant x_h$, x_h étant le seuil de troncature que l'on choisira, en principe, le plus bas possible. Un exemple donné en annexe 3 explicite la marche à suivre.

Une fois la valeur de F_0 choisie, celle de s est $(x - x_0)$ qui, sur la droite de l'alignement, correspond à $F = 0{,}5$ ($t' = 0$). La valeur de σ est celle de la pente de la droite, compte tenu des unités du graphique.

Lorsque le nombre d'observations $x_i \geqslant x_h$ est grand, on peut, sans faire d'erreur notable, associer à l'observation de rang R_i la probabilité au dépassement

$$\frac{R_i}{N\ (1 - F_0)}$$

5.6.3. *Observations avec troncature, taille d'échantillon inconnue*

Un exemple d'échantillon correspondant à cette définition est donné au paragraphe 4.7.

On suppose le paramètre de position connu x_0 et en partant d'un échantillon de n valeurs $x_i \geqslant x_h$ seuil de troncature, rangées en ordre décroissant, on veut déterminer les valeurs des paramètres de forme et d'échelle.

En appelant N' le nombre total $\geqslant$ n d'événements que l'on aurait dû observer, nous associons à l'observation de rang R_i la probabilité au dépassement

$$F_{1i} = \frac{R_i - 0{,}5}{N'}$$

et nous sommes ramenés au cas du paragraphe 5.5.2 où le produit $N\ (1 - F_0)$ joue le même rôle que N'.

5.6.4. Dans ce qui précède, nous n'avons considéré que des cas où il y avait trois paramètres à déterminer. Il est facile d'utiliser une méthode graphique si on n'a qu'un ou deux paramètres non connus a priori.

On peut même s'étendre au cas de quatre paramètres à déterminer: observations avec troncature, taille d'échantillon inconnue, paramètres de position, d'échelle et de forme inconnus.

6. SOUS-PROGRAMMES EN FORTRAN

6.1. Fonction de distribution et inversion

6.1.1. *FUNCTION FLØGN (X, SI, S, XØ) simple précision*

Calcul de la probabilité au non dépassement FLØGN correspondant à la valeur x de la variate.

Aucun autre sous-programme n'est à adjoindre.

Arguments à fournir : valeur X de la variable, paramètre de forme SI positif, paramètre d'échelle S positif paramètre de position XØ (borne inférieure).

Conditions : X doit être supérieur et différent de XØ, SI et S ne doivent pas être nuls.

Fonctionnement : le sous-programme utilise les fonctions de bibliothèque DERF et DLØG. FLØGN compris entre 0 et 1 est calculé avec au moins 7 chiffres derrière la virgule. Le sous-programme est si court qu'il peut facilement être intégré dans le programme principal.

6.1.2. *FUNCTION VLØGN (F, SI, S, XØ) simple précision*

Calcul de la valeur VLØGN de la variable correspondant à la probabilité F au non-dépassement.

Aucun autre sous-programme n'est à adjoindre.

Arguments à fournir : probabilité F au non-dépassement, paramètre de forme SI positif, paramètre d'échelle S positif, paramètre de position XØ (borne inférieure).

Conditions : $0 < F < 1$, SI et S ne doivent pas être nuls.

Fonctionnement : le sous-programme utilise la fonction de bibliothèque EXP. VLØGN supérieur à XØ est donné avec une précision correspondant à une erreur de $\pm\ 1/10^6$ sur la probabilité. Le sous-programme est si court qu'il peut facilement être intégré dans le programme principal.

6.1.3. *FUNCTION FLØGNT (X, SI, S, XØ, FØ) simple précision*

Calcul de la probabilité au non-dépassement (distribution tronquée) FLØGNT correspondant à la valeur X de la variable.

Aucun autre sous-programme n'est à adjoindre.

Arguments à fournir : valeur X de la variable, paramètre de forme SI positif, paramètre d'échelle S positif, paramètre de position XØ, paramètre de tronquage FØ.

Conditions : SI et S ne doivent pas être nuls, $0 \leqslant FØ \leqslant 1$.

Fonctionnement : le sous-programme utilise les fonctions de bibliothèque EXP, DERF et DLØG. Si (X—XØ)/S est inférieur à exp (—4,8 SI) la fréquence fournie est FØ. FLØGNT compris entre FØ et 1 est donné avec au moins 7 chiffres derrière la virgule. Le sous-programme est si court qu'il peut facilement être intégré dans le programme principal.

6.1.4. *FUNCTION VLØGNT (F, SI, S, XØ, FØ) simple précision*

Calcul de la valeur VLØGNT de la variable correspondant à la probabilité F au non-dépassement (distribution tronquée).

Aucun autre sous-programme n'est à adjoindre.

Arguments à fournir : probabilité F au non-dépassement, paramètre de forme SI positif, paramètre d'échelle S positif, paramètre de position XØ (borne inférieure), paramètre de tronquage FØ.

Conditions : $0 < F < 1$, SI et S ne doivent pas être nuls, $0 \leqslant FØ \leqslant 1$.

Fonctionnement : le sous-programme utilise les fonctions de bibliothèque ERF et EXP. Si F est inférieur à $FØ + 10^{-7}$, la valeur de la variable est pratiquement XØ. VLØGNT supérieur ou égal à XØ est donné avec une précision correspondant à une erreur inférieure à $\pm 1/10^6$ sur la probabilité. Le sous-programme est assez court pour être facilement intégré dans le programme principal.

6.2. Détermination des paramètres par le maximum de vraisemblance Echantillons sans troncature

6.2.1. *SUBRØUTINE PLØGNS (X, SI, S, XØ, XM, N)*

Calcul de la moyenne XM de l'échantillon et de la valeur du paramètre d'échelle S positif.

Aucun autre sous-programme n'est à adjoindre.

Arguments à fournir : la taille N de l'échantillon et les valeurs X de l'échantillon en vecteur X(N), les valeurs des paramètres de forme SI (positif) et de position XØ (borne inférieure).

Conditions : SI ne doit pas être nul, XØ < toutes valeurs X.

Fonctionnement : le sous-programme suit la marche indiquée en 4.5. Le paramètre d'échelle est donné avec probablement 6 chiffres significatifs. Le sous-programme est assez court pour être facilement intégré dans le programme principal.

6.2.2. *SUBRØUTINE PLØGNF (X, SI, S, XØ, XM, N, XI)*

Calcul de la moyenne XM de l'échantillon et des valeurs des paramètres d'échelle S (positif) et de position XØ (borne inférieure).

Aucun autre sous-programme n'est à adjoindre.

Arguments à fournir : la taille N de l'échantillon et les valeurs X de l'échantillon en vecteur X(N), la valeur du paramètre de forme SI positif et la valeur limite XI que l'on admet pour le paramètre de position : par exemple si XI = 0, la valeur de XØ sera supérieure ou égale à 0 et inférieure à la plus petite valeur des X, supposés tous positifs. Si on ne veut pas limiter le champ des déterminations de XØ, il faut donner à XI une valeur raisonnable d'après l'échantillon sans poser, par exagération, XI = — 10.**75.

Conditions : SI ne doit pas être nul, XI doit être inférieur à toutes les valeurs de l'échantillon.

Fonctionnement : le sous-programme utilise la fonction de bibliothèque DLØG. Il suit la marche indiquée en 4.4.1. Les itérations sont arrêtées lorsque $\frac{SP}{\sigma^2} = 1 \pm 1/10^5$ ou lorsque XØ est pratiquement égal à XI ou à la plus petite valeur X. S et XØ sont donnés avec 4 ou 5 chiffres significatifs.

6.2.3. *SUBRØUTINE PLØGNP (X, SI, S, XØ, XM, N)*

Calcul de la moyenne XM de l'échantillon et des valeurs des paramètres de forme SI positif et d'échelle S positif.

Aucun autre sous-programme n'est à adjoindre.

Arguments à fournir : la taille N de l'échantillon et les valeurs X de l'échantillon en vecteur X(N), la valeur du paramètre de position XØ (borne inférieure).

Conditions : XØ doit être inférieur à toutes les valeurs X.

Fonctionnement : le sous-programme utilise les fonctions de bibliothèque ALØG et SQRT. Il suit la marche indiquée en 4.3. SI et S sont donnés avec 6 ou 7 chiffres significatifs. Le sous-programme est court et peut facilement être intégré dans le programme principal.

6.2.4. *SUBRØUTINE PLØGN (X, SI, S, XØ, XM, N, XI)*

Calcul de la moyenne XM de l'échantillon et des valeurs des paramètres de forme SI positif, d'échelle S positif et de position XØ (borne inférieure).

Aucun autre sous-programme n'est à adjoindre.

Arguments à fournir : la taille N de l'échantillon et les valeurs X de l'échantillon en vecteur X(N) et la valeur limite inférieure XI que l'on admet pour le paramètre de position : par exemple, si XI = 0, la valeur de XØ sera supérieure ou égale à zéro et inférieure à la plus petite valeur des X, supposés tous positifs. Si on ne veut pas limiter le champ de détermination de XØ il faut donner à XI une valeur raisonnable d'après l'échantillon sans poser, par exagération XI = — 10.**75.

Condition : XI doit être inférieur à toutes les valeurs de l'échantillon.

Fonctionnement : le sous-programme utilise les fonctions de bibliothèque DLØG/, DEXP et SQRT. Il suit la marche indiquée en 4.2.1. Les itérations de déterminations de SI sont arrêtées lorsque :

$$\frac{SP}{SQ} = 1 \pm 1/10^5$$

XØ, S et SI sont donnés avec 4 ou 5 chiffres significatifs.

6.3. Détermination des paramètres par le maximum de vraisemblance Echantillons a seuil de troncature

6.3.1. *SUBRØUTINE PLØGNT (X, SI, S, XØ, FØ, N, XH)*

Calcul des valeurs des paramètres de forme SI positif, d'échelle S positif et de tronquage FØ.

Aucun autre sous-programme n'est à adjoindre.

Arguments à fournir : la taille N de l'échantillon (qui comprend les valeurs inférieures à XH et les valeurs égales à XØ) et les valeurs X de l'échantillon en vecteur X(N), le seuil de troncature XH et le paramètre de position XØ (borne inférieure).

Conditions : XH supérieur à XØ et différent de XØ.

Fonctionnement : le sous-programme utilise les fonctions de bibliothèque DLØG, ALØG, EXP et ERF. Il suit la marche indiquée en 4.6.1. Nous y imposons $0 < SI \leqslant 2$, ce qui est bien suffisant dans la pratique. Les itérations de détermination de SI sont arrêtées lorsque :

$$\frac{SK}{SL} = 1 \pm 1/10^5$$

SI, S et FØ sont donnés avec environ 4 chiffres significatifs.

Si la valeur donnée par FØ est négative, cela veut dire qu'au seuil de troncature choisi il n'est pas possible d'adapter à l'échantillon une distribution gausso-logarithmique tronquée.

6.3.2. *SUBRØUTINE PLØGNV (X, SI, S, XØ, VN, N, XH)*

Calcul des valeurs des paramètres de forme SI positif, d'échelle S positif et du nombre VN d'événements qui auraient dû être observés.

Aucun autre sous-programme n'est à adjoindre.

Arguments à fournir : la taille N de l'échantillon observé et les valeurs X de l'échantillon en vecteur X(N), le seuil de troncature XH et le paramètre de position XØ (borne inférieure).

Conditions : XH supérieur à XØ, toutes les valeurs X supérieures ou égales à XH.

Fonctionnement : le sous-programme utilise les fonctions de bibliothèque DLØG, ALØG, EXP et ERF. Il suit la marche indiquée en 4.7 et 4.6.1. Nous y imposons $0 < SI \leqslant 2$, ce qui est bien suffisant dans la pratique. Les itérations de détermination de SI sont arrêtées lorsque :

$$\frac{SK}{SL} = 1 \pm 1/10^5$$

SI, S et VN sont donnés avec environ 4 chiffres significatifs.

6.4. Calcul des intervalles de confiance

Les sous-programmes effectuant ce calcul sont basés sur le principe du paragraphe 5.5.1 et présentent peu de différences entre eux.

6.4.1. *Arguments en sortie, communs à tous les sous-programmes*

Valeurs de la variable pour la borne inférieure BC(1) et pour la borne supérieure BC(2) de l'intervalle de confiance. La variable qui, dans l'appel, correspond à la variable muette BC des sous-programmes, doit être dimensionnée à 2 dans le programme principal.

6.4.2. *Arguments à fournir, communs à tous les sous-programmes*

Valeurs des paramètres de forme SI, d'échelle S, de position XØ, qui sont soit (en partie) connus à l'avance, soit (tous ou en partie) calculés d'après une des sous-routines des paragraphes 6.2 et 6.3.

Valeur F de la fréquence au non-dépassement pour laquelle on demande l'intervalle de confiance d'étendue, centrée, en probabilité CØ, valeur XF de la variate correspondant à la fréquence F et aux valeurs SI, S et XØ des paramètres dans la répartition gausso-logarithmique (et de plus à la valeur FØ du paramètre de tronquage dans le cas de distributions tronquées).

6.4.3. *Conditions générales* $0 < F < 1$

Il est recommandé de choisir pour CØ l'une des valeurs : 0,5 ; 2/3 ; 0,75 ; 0,8 ; 0,9 ; 0,95.

6.4.4. *Spécifications propres à chaque sous-programme*

6.4.4.1. SUBRØUTINE CLØGNS

A utiliser dans le cas où seule la valeur du paramètre d'échelle est calculée par le maximum de vraisemblance.

Adjoindre la FUNCTION VLØGN.

Argument supplémentaire à fournir : taille N de l'échantillon qui a servi à calculer le paramètre d'échelle.

6.4.4.2. SUBRØUTINE CLØGNF

A utiliser dans le cas où les valeurs des paramètres d'échelle et de position ont été calculées par le maximum de vraisemblance.

Adjoindre la FUNCTIØN VLØGN,
la SUBRØUTINE PLØGNF.

Arguments supplémentaires à fournir : taille N de l'échantillon qui a servi à calculer les paramètres d'échelle et de position ; BJ valeur limite admise pour le paramètre de position (valeur utilisée dans la sous-routine FLØGNF).

y, la variable qui correspond dans l'appel à la variable muette y de la sous-routine doit être dimensionnée à N (ou plus grand) dans le programme principal. On peut utiliser (pour cette variable) dans l'appel le vecteur dimensionné N des valeurs de l'échantillon, mais la sous-routine détruira ces valeurs.

6.4.4.3. SUBRØUTINE CLØGNP

A utiliser dans le cas où les valeurs des paramètres d'échelle et de forme ont été calculées par le maximum de vraisemblance.

Adjoindre la FUNCTION VLOGN,
la SUBRØUTINE PLØGNP.

Arguments supplémentaires à fournir : taille N de l'échantillon qui a servi à calculer les paramètres d'échelle et de forme.

y : voir ci-dessus 6.4.4.2.

6.4.4.4. SUBRØUTINE CLØGN

A utiliser dans le cas où les valeurs des paramètres d'échelle de position et de forme ont été calculées par le maximum de vraisemblance.

Adjoindre la FUNCTIØN VLØGN,
la SUBRØUTINE PLØGN.

Arguments supplémentaires à fournir : taille N de l'échantillon qui a servi à calculer les trois paramètres : BJ valeur limite admise pour le paramètre de position (valeur utilisée dans la sous-routine PLØGN).

y : voir ci-dessus 6.4.4.2.

6.4.4.5. SUBRØUTINE CLØGNT

A utiliser dans le cas où les valeurs des paramètres d'échelle (positif) de forme et de tronquage ont été calculés par le maximum de vraisemblance.

Adjoindre la FUNCTIØN VLØGNT,
la SUBRØUTINE PLØGNT.

Arguments supplémentaires à fournir : seuil de troncature XH, taille N de l'échantillon (voir sous-routine PLØGNT), valeur calculée du paramètre de tronquage FØ.

y : voir ci-dessus 6.4.4.2.

F : ne pas oublier que la fréquence au non-dépassement à fournir est celle qui correspond à la définition de l'événement (4.6.3).

6.4.4.6. SUBRØUTINE CLØGNV

A utiliser dans le cas où les valeurs des paramètres d'échelle (positif) de forme et la taille « vraie » de l'échantillon (4.7) ont été calculées par le maximum de vraisemblance.

Adjoindre la FUNCTIØN VLØGN,
la SUBRØUTINE PLØGNV.

Arguments supplémentaires à fournir : seuil de troncature XH, taille « vraie » de l'échantillon, c'est-à-dire entier NV le plus proche du nombre VN (6.3.2).

F : ne pas oublier que la fréquence au non-dépassement à fournir est celle qui correspond à la définition de l'événement (4.7.2).

Nota. — La variable y utilisée dans la sous-routine ne figure pas en argument. Elle doit être dimensionnée dans le sous-programme à un nombre égal (ou supérieur) à NV.

6.4.4.7. Remarque importante : le calcul des intervalles de confiance est long à l'ordinateur et d'autant plus long que cet intervalle est plus grand, 10 fois plus long pour l'intervalle à 95% que pour l'intervalle à 50%.

Pour fixer les idées, le traitement de l'annexe 4 a pris 12,43 s sur IBM 370-167 dont environ 12 s pour le calcul de l'intervalle de confiance à 50%, le traitement de l'annexe 5 a pris 3,93 s, dont plus de 3,6 s pour le calcul de l'intervalle de confiance à 50%.

6.5. Utilisation des sous-programmes

6.5.1. Les sous-programmes sont écrits en FORTRAN IV niveau G (ou H) utilisé sur les ordinateurs IBM 360 et 370. Il peut être nécessaire de leur changer quelques instructions si on utilise d'autres ordinateurs.

6.5.2. Les fonctions FLØGN et VLØGN s'utilisent avec les paramètres déterminés par les sous-routines PLØGNS, PLØGNP, PLØGNF et PLØGN ainsi que par la sous-routine PLØGNV. Il ne faut pas oublier que dans ce dernier cas PLØGN et VLØGN correspondent à des probabilités de l'événement compte tenu de la taille d'échantillon calculée : si on utilise une probabilité définie par une autre référence voir paragraphe 4.7.2.

6.5.3. Les fonctions FLØGNT et VLØGNT s'utilisent avec les paramètres déterminés par la sous-routine PLØGNT. Il ne faut pas oublier que dans ce cas de distribution tronquée, les fonctions correspondent à des probabilités d'événements compte tenu de la taille de l'échantillon : si on utilise une probabilité définie par une autre référence, voir paragraphe 4.6.3.

6.5.4. *Nota.* — Les sous-programmes ont été écrits pour des valeurs de grandeur raisonnable. Si besoin, il faut faire un changement d'origine et/ou d'échelle sur les valeurs de l'échantillon de façon que la valeur absolue de la moyenne soit inférieure à 1 000 et que la variance soit inférieure à 100 000.

ANNEXE 1

EXEMPLE D'AJUSTEMENT A UNE LOI GAUSSO-LOGARITHMIQUE

PRÉCIPITATIONS ANNUELLES (ANNÉES CALENDAIRES) A BOUAFLE (COTE D'IVOIRE)
(Taille de l'échantillon n = 50, en mm)

1920		1930	1 061	1940	1 224	1950	1 271	1960	1 469	1970	1 193
1921		1931	1 429	1941	1 144	1951	1 376	1961	1 027	1971	1 447
1922		1932	1 027	1942	1 203	1952	1 325	1962	1 398	1972	1 523
1923		1933	1 487	1943	1 358	1953	1 340	1963	1 930	1973	1 076
1924	1 694	1934	1 255	1944	1 089	1954	1 464	1964	1 341		
1925	1 613	1935	1 300	1945	1 221	1955	1 704	1965	1 252		
1926	1 223	1936	1 180	1946	1 101	1956	1 283	1966	1 537		
1927	1 236	1937	1 332	1947	1 263	1957	1 720	1967	995		
1928	1 609	1938	1 525	1948	1 340	1958	1 000	1968	1 913		
1929	1 514	1939	1 094	1949	1 898	1959	1 600	1969	1 118		

RANGEMENT DES OBSERVATIONS

Rang i	x_i	*Récurrence observée* n/(i − 0,5) 1/	x_i
1	995	100,0	1 930
2	1 000	33,3	1 913
3	1 027	20,0	1 898
4	1 027	14,3	1 720
5	1 061	11,1	1 704
6	1 076	9,1	1 694
7	1 089	7,7	1 613
8	1 094	6,7	1 609
9	1 101	5,9	1 600
10	1 118	5,26	1 537
11	1 144	4,76	1 525
12	1 180	4,35	1 523
13	1 193	4,00	1 514
14	1 203	3,70	1 487
15	1 221	3,45	1 469
16	1 223	3,23	1 464
17	1 224	3,03	1 447
18	1 236	2,86	1 429
19	1 252	2,70	1 398
20	1 255	2,56	1 376
21	1 263	2,44	1 358
22	1 271	2,33	1 341
23	1 283	2,22	1 340
24	1 300	2,13	1 340
25	1 325	2,04	1 332

Calcul direct

$50 \cdot S_1 = \Sigma x_i = 67722$

$50 \cdot S_2 = \Sigma x_i^2 = 94529570$

$50 \cdot S_3 = \Sigma x_i^3 = 136053298900$

Moyenne

$S_1 = 1\,354{,}44$

Variance

$$C_2 = \frac{n}{n-1}(S_2 - S_1^2)$$

$C_2 = 57228251 \qquad \sqrt{C_2} = 239{,}224$

Cumulant d'ordre 3

$$C_3 = \frac{n^2}{(n-1)(n-2)}\left[S_3 - 3\,S_2S_1 + 2\,S_1^3\right]$$

$C_3 = 8981066{,}115$

Coefficient d'asymétrie

$\gamma_1 = C_3/C_2^{3/2} = +\,0{,}656013$

DÉTERMINATION DES PARAMÈTRES

En interpolant dans la table C, la valeur de γ_1 correspond à $\sigma = 0{,}2129$.

Nous choisissons la valeur ronde : $\sigma = 0{,}21$.

Pour cette valeur de σ la table fournit $\sqrt{K_2} = A\sqrt{A^2 - 1} = 0{,}21707$, d'où :

$$s = \sqrt{C_2} / \sqrt{K_2} = 1\,102{,}06$$

La table fournit également $A = 1{,}022\,29$, d'où :

$$x_0 = S_1 - s \qquad A = +\,227{,}83 \quad \text{(borne inférieure)}$$

Avec ces valeurs de paramètres, nous calculons quelques points de la distribution ajustée :

$$\log (x - x_0) - \log s = t'\,\sigma$$

Récurrence	*Fréquence*	*Hauteur mm*	*Fréquence*	*Hauteur mm*
1/100	.01	904,0	.99	2 024,1
50	.02	943,8	.98	1 924,2
20	.05	1 008,0	.95	1 784,6
10	.1	1 069,9	.9	1 670,2
8	.125	1 093,4	.875	1 631,0
6,25	.16	1 122,2	.84	1 585,8
5	.2	1 151,4	.8	1 542,9
4	.25	1 184,3	.75	1 497,6
3,33	.3	1 215,0	.7	1 458,2
2,50	.4	1 272,8	.6	1 390,1
2	.5	1 329,9	médiane	mode 1 282,4
1/100	.001	803,7	.999	2 336,7

La figure 5 montre l'ajustement.

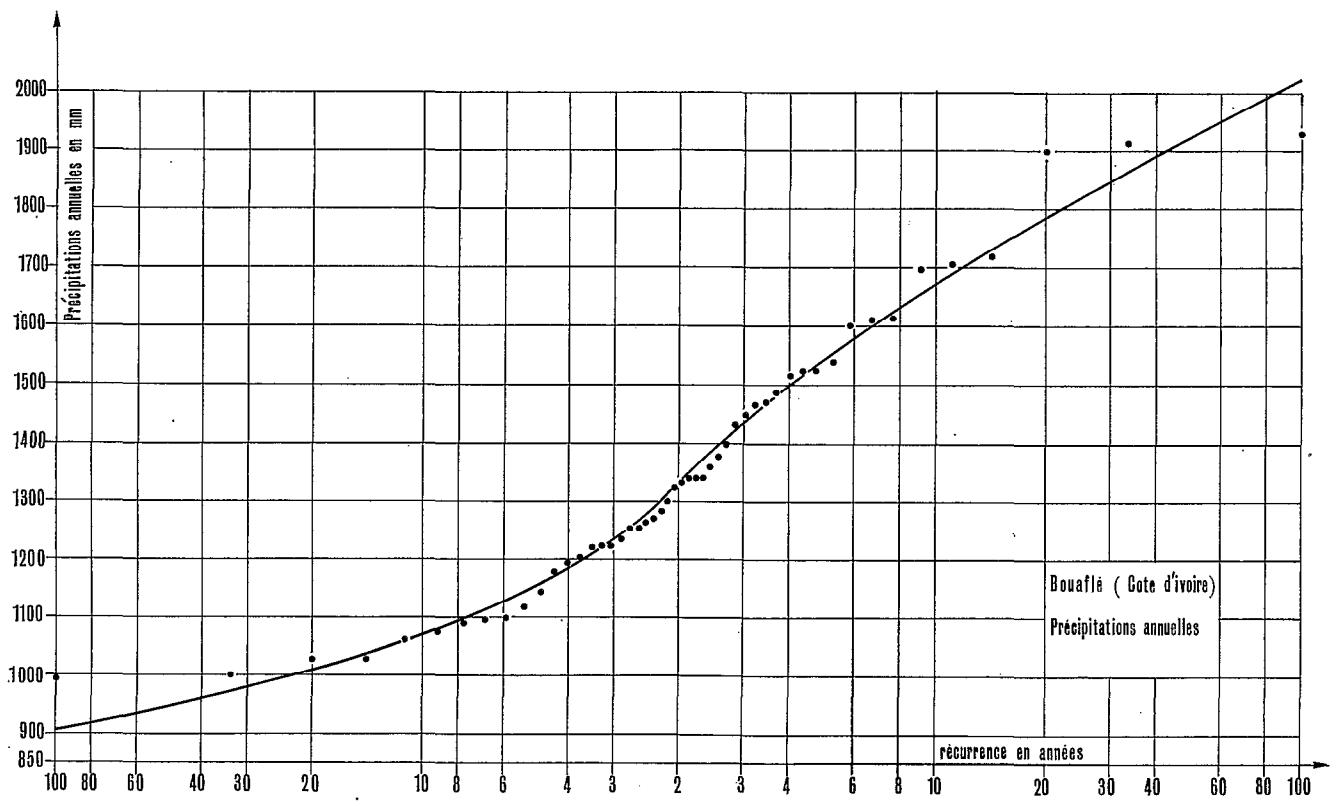

Fig. 5

Remarques. — Si nous avions choisi $\sigma = 0{,}22$ la table nous aurait conduit à $s = 1\,048{,}58$ et $x_0 = +\,280{,}17$, d'où les hauteurs de fréquence :

0,001 : 811,5 mm
0,999 : 2 349,7 mm

peu différentes des hauteurs de mêmes fréquences avec $\sigma = 0{,}21$.

Nous allons calculer les valeurs de χ^2 pour différents nombres de classes d'égales probabilités. Le graphique facilite le décompte du nombre d'observations par classe. Ainsi, pour 11 classes d'égales probabilités, il suffit de compter le nombre de points observés entre les ordonnées définies par les points de la courbe représentative d'abscisses 11 ans, $\frac{11}{2}$ ans, $\frac{11}{3}$ ans, $\frac{11}{4}$ ans, $\frac{11}{5}$ ans.

11 classes. Observations par classes 4 6 3 5 6 5 3 4 5 3 6 :

$\chi^2 = 3{,}24$ pour $11 - 3 - 1 = 7$ degrés de liberté (trois paramètres calculés, égalité des effectifs observés et théoriques). Cette valeur de χ^2 a une probabilité de $0{,}86 = 86\%$ d'être dépassée par le simple fait du hasard si l'échantillon provient d'une population-mère répartie suivant une loi gausso-logarithmique.

10 classes. Observations par classes 5 6 3 8 3 6 3 7 3 6 :

$\chi^2 = 6{,}40$ pour $10 - 4 = 6$ degrés de liberté. Probabilité 0,38.

9 classes. Observations par classes 6 5 6 6 7 3 5 6 6 :

$\chi^2 = 1{,}84$ pour $9 - 4 = 5$ degrés de liberté. Probabilité 0,87.

8 classes. Observations par classes 7 5 8 5 7 5 7 6 :

$\chi^2 = 1{,}52$ pour $8 - 4 = 4$ degrés de liberté. Probabilité 0,82.

7 classes. Observations par classes 9 5 9 7 6 6 8 :

$\chi^2 = 2{,}08$ pour $7 - 4 = 3$ degrés de liberté. Probabilité 0,56.

6 classes. Observations par classes 10 7 8 8 8 9 :

$\chi^2 = 0{,}64$ pour $6 - 4 = 2$ degrés de liberté. Probabilité 0,72.

En faisant un autre découpage en 10 classes presque égales de bornes en probabilités au non-dépassement 0, 0,108, 0,190, 0,308, 0,396, 0,504, 0,612, 0,706, 0,796, 0,912 et 1, on obtient un χ^2 de 11,05 qui, avec 6 degrés de liberté correspond à une probabilité de 0,09.

ANNEXE 2

EXEMPLE D'AJUSTEMENT GRAPHIQUE A UNE LOI GAUSSO-LOGARITHMIQUE

PRÉCIPITATIONS ANNUELLES (ANNÉES CALENDAIRES) A ABIDJAN VILLE (COTE D'IVOIRE)
(Taille de l'échantillon n = 42, en mm)

1930		1940	1 731	1950	1 702	1960	1 979	1970	1 628
1931		1941	1 890	1951	1 969	1961	2 228	1971	1 669
1932	1 964	1942	1 539	1952	1 934	1962	2 203	1972	1 653
1933	2 144	1943	2 371	1953	1 822	1963	2 548	1973	1 810
1934	1 920	1944	2 257	1954	3 314	1964	1 480		
1935	2 767	1945	1 593	1955	2 765	1965	2 238		
1936	1 486	1946	1 738	1956	3 062	1966	1 569		
1937	1 495	1947	1 944	1957	2 096	1967	1 653		
1938	2 069	1948	2 040	1958	1 731	1968	1 823		
1939	2 003	1949	1 810	1959	2 177	1969	2 132		

RANGEMENT DES OBSERVATIONS

Rang i	F_i $(1 - 0{,}5)/n$	x_i	$x_0 = 1\,100$ $x_i - x_0$	*Rang* i	F_i $(i - 0{,}5)/n$	x_i	$x_0 = 1\,100$ $x_i - x_0$
1	0,012	1 480	380	42	0,988	3 314	2 214
2	0,036	1 486	386	41	0,964	3 062	1 962
3	0,060	1 495	395	40	0,940	2 767	1 667
4	0,083	1 539	439	39	0,917	2 765	1 665
5	0,107	1 569	469	38	0,893	2 548	1 448
6	0,131	1 593	493	37	0,869	2 371	1 271
7	0,155	1 628	518	36	0,845	2 257	1 157
8	0,179	1 653	553	35	0,821	2 238	1 138
9	0,202	1 653	553	34	0,798	2 228	1 128
10	0,226	1 669	569	33	0,774	2 203	1 103
11	0,250	1 702	602	32	0,750	2 177	1 077
12	0,274	1 731	631	31	0,726	2 144	1 044
13	0,298	1 731	631	30	0,701	2 132	1 032
14	0,321	1 738	638	29	0,679	2 096	996
15	0,345	1 810	710	28	0,655	2 069	969
16	0,369	1 810	710	27	0,631	2 040	940
17	0,393	1 822	722	26	0,607	2 003	903
18	0,417	1 823	723	25	0,583	1 979	879
19	0,440	1 890	790	24	0,560	1 969	869
20	0,464	1 920	820	23	0,536	1 964	864
21	0,488	1 934	834	22	0,512	1 944	844

DÉTERMINATION DES PARAMÈTRES

Nous avons fait un premier essai avec $x_0 = 0$ (fig. 6) sur un graphique gausso-logarithmique en portant en ordonnées $F_i = \frac{1 - 0{,}5}{n}$ et en abscisses la précipitation correspondant au rang i. La figure montre que pour $x_0 = 0$, l'alignement n'est pas satisfaisant : le sens de la courbure de la courbe dessinée par les points représentatifs montre qu'il faut faire croître x_0 pour améliorer l'alignement.

Nous avons fait divers autres essais et retenu la valeur 1 100 mm pour x_0 en prenant comme critère de choix de la droite représentative de chercher celle qui recoupe le plus souvent la ligne brisée joignant les points « observés » et répondant aux conditions suivantes : nous cherchons à tracer deux droites à peu près parallèles s'appuyant sur des points représentatifs, les moins distantes l'une de l'autre dans leurs parties correspondant à ces points et à enfermer entre ces deux droites la majeure partie de ces points représentatifs des observations. La droite représentative (qui doit répondre au premier critère de choix ci-dessus) est à peu près parallèle à la bissectrice de ces deux droites et laisse de part et d'autre le même nombre de points « observés ». Ce procédé n'a pas de fondement mathématique, il revient, en gros, à estimer que l'erreur d'échantillonnage sur une valeur de rang i est proportionnelle à $(x_i - x_0)$

— Comme la droite correspond à l'équation :

$$\log (x - x_0) - \log s = 0{,}4343\ \sigma\ t$$

t : variable réduite de gauss,

pour $t = 0$:

$s = x_i - x_0$ d'où : $s = 810$ mm sur le graphique

pour la probabilité 0,99 :

$t' = t \log e = + 1{,}010\ 33$ $\quad x - x_0 = 2\ 170$

pour la probabilité 0,01 :

$t' = t \log e = - 1{,}010\ 33$ $\quad x - x_0 = 300$

d'où :

$$\sigma\ .\ 2{,}020\ 7 = \log \frac{2\ 170}{300} \qquad \sigma = 0{,}425$$

— La fonction de répartition au non-dépassement s'écrit :

$$F(x) = \frac{1}{0{,}425\ \sqrt{2\pi}} \int_{1100}^{x} \frac{1}{x - 1\ 100} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\text{Log} \dfrac{x - 1\ 100}{810}}{0{,}425} \right)^2 \right] dx$$

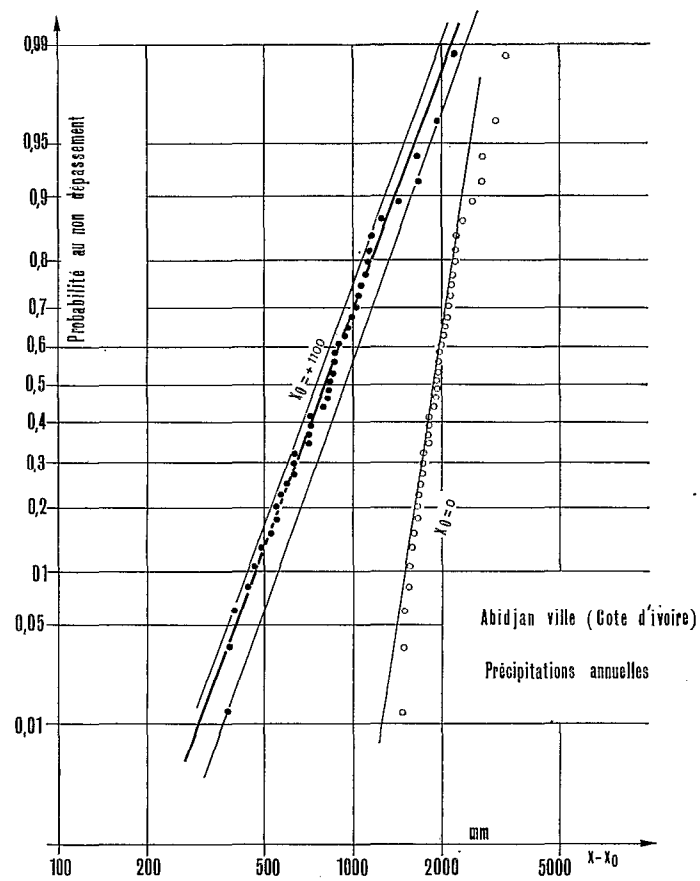

Fig. 6

A titre de vérification, calculons la précipitation annuelle moyenne :

$$\bar{x} = x_0 + s\, e^{\sigma^2/2} = 1\,986{,}5 \text{ mm}$$

(la moyenne observée sur les 42 années étant de 1 998,7 mm).

La précipitation annuelle médiane $x_0 + s = 1\,910$ mm (médiane observée entre 1934 et 1944 mm).

La fonction de répartition nous permet de calculer, d'après la table A, les fréquences au non-dépassement correspondant par exemple aux valeurs extrêmes observées :

— pour 1 480 mm :

$F = 0{,}037436$ (récurrence 1 fois en 26,7 ans)

— pour 3 314 mm :

$F = 0{,}991\,006$ (récurrence 1 fois en 111 ans)

La table B permet de calculer les précipitations annuelles d'après la fonction de répartition pour des fréquences choisies :

récurrence 1 fois en 10 ans pour 0,1 $t' = \pm 0{,}556\,57$

$$\log (x - x_0) = t' + \log s$$

— pour $F = 0{,}9$:

$x = 2\,496{,}5$

— pour $F = 0{,}1$:

$x = 1\,569{,}8$

ANNEXE 3

EXEMPLE D'AJUSTEMENT GRAPHIQUE A UNE LOI GAUSSO-LOGARITHMIQUE TRONQUÉE

PRÉCIPITATIONS JOURNALIÈRES A ABIDJAN-VILLE (COTE D'IVOIRE)

33 années de relevés 1932-1964, soit 12 054 jours = N.

Moyenne annuelle des précipitations : 2052,3 mm.

PRÉCIPITATIONS HORS CLASSES
(arrondies au mm)

Rang R	*Hauteur mm*	F_1 (R — 0,5)/N	$F_0 = 0{,}8$ $F_1/(1 - F_0)$	$F_0 = 0{,}86$ $F_1/(1 - F_0)$
1	275	0,0000415	0,000208	0,00030
2	247	0,0001244	0,00062	0,00089
3	241	0,0002074	0,00104	0,00148
4	232	0,0002904	0,00145	0,0021
5	231	0,0003733	0,00187	0,0027
6	229	0,0004563	0,00228	0,0033
7	224	0,0005392	0,00270	0,0039
8	221	0,0006222	0,00311	0,0044
9	218	0,0007052	0,00353	0,0050

PRÉCIPITATIONS CLASSÉES

R	*mm*			
10	< 200	0,0007881		0,0056
12	⩾ 190	0,0009540	0,00477	0,0068
13	< 190	0,001037		0,0074
13	⩾ 180	0,001037	0,00519	0,0074
14	< 170	0,001120		0,0080
17	⩾ 160	0,001369	0,00685	0,0098
18	< 160	0,001452		0,0104
21	⩾ 150	0,001701	0,0085	0,0122
22	< 150	0,001784		0,0127
24	⩾ 140	0,001950	0,0098	0,0139
25	< 140	0,002033		0,0145
31	⩾ 130	0,002530	0,0127	0,0181
32	< 130	0,002613		0,0187
46	⩾ 120	0,003775	0,0189	0,027
47	< 120	0,003858		0,028
69	⩾ 110	0,005683	0,0284	0,041
70	< 110	0,005766		0,041
87	⩾ 100	0,007176	0,0359	0,051
88	< 100	0,007259		0,052
112	⩾ 90	0,009250	0,0463	0,066
136	⩾ 80	0,01124	0,0562	0,080
168	⩾ 70	0,01390	0,0695	0,099
216	⩾ 60	0,01788	0,0894	0,128
319	⩾ 50	0,02642	0,132	0,189
449	⩾ 40	0,03721	0,186	0,266
639	⩾ 30	0,05297	0,265	0,378
1019	⩾ 20	0,08449	0,422	0,604
1689	⩾ 10	0,14008	0,700	> 1
4993	⩾ 0,1	0,41418	> 1	

DÉTERMINATION DES PARAMÈTRES

La valeur des paramètres de position x_0 a été choisie, évidemment égale à zéro.

Nous avons fait un premier essai avec $F_0 = 0{,}8$ en portant sur un graphique gausso-logarithmique, en ordonnée : $\frac{R - 0{,}5}{N\ (1 - F_0)}$; en abscisse : la précipitation correspondant au rang R ; N étant le nombre total de jours de la période d'observation. Cette valeur de F_0 correspond à un seuil de troncature inférieur à 10 mm.

La figure montre que l'alignement des points n'est pas satisfaisant : le sens de la courbure de la courbe qu'ils dessinent grossièrement montre qu'il faut faire croître F_0.

Nous avons fait d'autres essais avec d'autres valeurs de F_0 et choisi la valeur $F_0 = 0{,}86$, car il nous a semblé que cette valeur fournissait l'alignement le moins mauvais, et nous avons tracé à l'œil la droite représentative.

— Comme la droite correspond à l'équation :

$$\log (x - x_0) - \log s = 0{,}4343\ \sigma\ t$$

t variable réduite de gauss,

pour $t = 0$:

$s = x - x_0$ d'où : $s = 23{,}8$ mm sur le graphique

pour $t = 3{,}090\ 23$:

$t' = t \log e = 1{,}342\ 1$ (probabilité 0,001) $x - x_0 = 310{,}5$ sur le graphe

d'où :

$$\sigma\ .\ 1{,}342\ 1 = \log \frac{310{,}5}{23{,}8}\ ,\ \sigma = 0{,}831$$

— La fonction de répartition s'écrit :

— au non-dépassement :

$$F(x) = 0{,}86 + (1 - 0{,}86)\ \frac{1}{0{,}831\ \sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{1}{x} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{Log}\frac{x}{23{,}8}}{0{,}831}\right)^2\right] dx$$

— et au dépassement :

$$F_1(x) = (1 - 0{,}86)\ G_1(t') \qquad \text{où :} \qquad t' = \frac{1}{\sigma} \log \frac{x}{s}$$

et :

$$G_1(t') = \int_{t'}^{\infty} \frac{1}{\log e\ \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t'}{\log e}\right)^2\right] dt'$$

La précipitation journalière de probabilité une fois par an correspond à :

$$F_1 = \frac{1}{365{,}25} \qquad G_1 = \frac{F_1}{1 - F_0} = 0{,}01956 \qquad t' = 0{,}895\ 91 \quad \text{(table B)}$$

$$\log x = \sigma\ t' + \log s = 2{,}121\ 08 \qquad x = 132{,}2 \text{ mm}$$

La précipitation journalière de probabilité une fois en 10 ans correspond à :

$$F_1 = \frac{1}{365{,}25 \times 10} \qquad G_1 = \frac{F_1}{1 - F_0} = 0{,}001\ 956 \qquad t' = 1{,}253\ 39 \quad \text{(table B)}$$

$$\log x = \sigma\ t' + \log s = 2{,}418\ 14 \qquad x = 261{,}9 \text{ mm}$$

La précipitation journalière de probabilité une fois en 100 ans correspond à :

$$F_1 = \frac{1}{365{,}25 \times 100} \qquad G_1 = \frac{F_1}{1 - F_0} = 0{,}000\ 195\ 6$$

La B table est inutilisable pour de si faibles valeurs et en utilisant la table A :

$t' = 1{,}540\ 0$ $x = 453{,}2$ mm

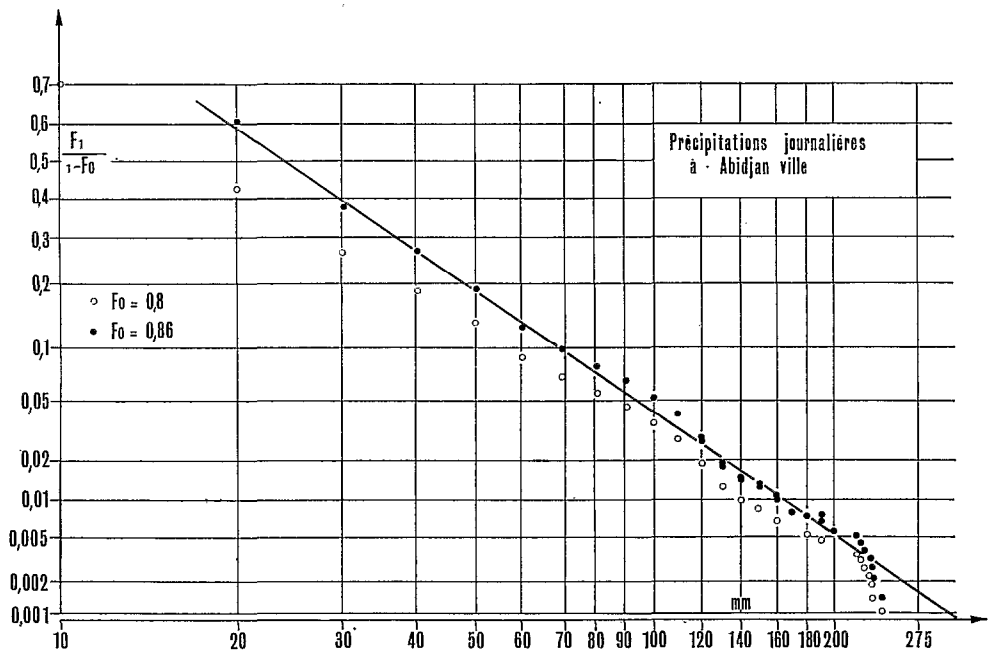
0,7
0,6
F1
1-Fo
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,05
0,02
0,01
0,005
0,002
0,001
Fo = 0,8
Fo = 0,86
Précipitations journalières
à · Abidjan ville
mm
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
120
140
160
180
200
275

Fig. 7

ANNEXE 4

EXEMPLE D'AJUSTEMENT PAR LE MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

DISTRIBUTION NON TRONQUÉE, ÉCHANTILLON SANS TRONCATURE, TROIS PARAMÈTRES CALCULÉS

Nous avons repris les données de l'annexe 1, précipitations annuelles à Bouaflé (Côte d'Ivoire) pour les traiter par la méthode du maximum de vraisemblance en utilisant le sous-programme PLØGN et le sous-programme CLØGN pour calculer des intervalles de confiance.

Le programme principal, ci-joint, est court et donne en sortie, ci-jointe,
- pour faciliter la représentation graphique des observations, leurs récurrences en fonction des précipitations rangées,
- la valeur de la précipitation moyenne observée et les valeurs des paramètres d'ajustement,
- les valeurs des précipitations calculées pour certaines récurrences d'après les valeurs des paramètres pour faciliter la représentation graphique,
- les intervalles de confiance à 50% pour certaines fréquences au non-dépassement.

PRÉCIPITATIONS ANNUELLES (en mm) A BOUAFLE (CÔTE D'IVOIRE), 1924-1973

Echantillon de taille N = 50, traité en distribution gausso-logarithmique

PRÉCIPITATIONS OBSERVÉES RANGÉES

Rang	*Hauteur*	*Récurrence observée*	*Hauteur*	*Rang*	*Hauteur*	*Récurrence observée*	*Hauteur*
1	995	100,00	1 930	14	1 203	3,70	1 487
2	1 000	33,33	1 913	15	1 221	3,45	1 469
3	1 027	20,00	1 898	16	1 223	3,23	1 464
4	1 027	14,29	1 720	17	1 224	3,03	1 447
5	1 061	11,11	1 704	18	1 236	2,86	1 429
6	1 076	9,09	1 694	19	1 252	2,70	1 398
7	1 089	7,69	1 613	20	1 255	2,56	1 376
8	1 094	6,67	1 609	21	1 263	2,44	1 358
9	1 101	5,88	1 600	22	1 271	2,33	1 341
10	1 118	5,26	1 537	23	1 283	2,22	1 340
11	1 144	4,76	1 525	24	1 300	2,13	1 340
12	1 180	4,35	1 523	25	1 325	2,04	1 332
13	1 193	4,00	1,514				

Moyenne observée : 1 354,4

VALEURS DES PARAMÈTRES PAR MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

Paramètre de forme	0,3549
d'échelle	631,35
de position	682,73

PRÉCIPITATIONS CALCULÉES

Fréquence	*Hauteur*	*Récurrence observée*	*Hauteur*
.01	959,2	100,00	2 124,4
.02	987,3	50,00	1 991,4
.05	1 034,9	20,00	1 814,6
.10	1 083,3	10,00	1 677,7
.20	1 151,0	5,00	1 533,9
.25	1 179,7	4,00	1 474,8
.30	1 206,9	3,33	1 443,2
.40	1 259,8	2,50	1 373,5
.50	1 314,1	2,00	1 314,1

INTERVALLES DE CONFIANCE A 0,50

Fréquence	*Hauteur*	*Borne inférieure*	*Borne supérieure*
.100	1 083,3	1 074,6	1 108,9
.900	1 677,7	1 620,9	1 720,3
.010	959,2	946,5	998,2
.990	2 124,4	1 991,0	2 234,5
.001	893,6	846,3	940,8
.999	2 573,1	2 295,4	3 038,9

```
 1 FORMAT(≠1≠,20X,≠PRECIPITATIONS ANNUELLES EN MM  A BOUAFLE (CI) 192
  24-73≠//20X,≠ECHANTILLON DE TAILLE N≠,I3,≠  TRAITE EN DISTRIBUTION
  3GAUSSO-LOG ≠//20X,≠  PRECIPITATIONS OBSERVEES RANGEES≠/20X,≠RANG
  4     HAUTEUR      RECUR OBS      HAUTEUR≠)
 2 FORMAT(20X,I3,F13.0,F14.2,F12.0)
 3 FORMAT(/20X,≠ MOYENNE OBSERVEE≠,F9.1//20X,≠VALEURS DES PARAMETRES
  2PAR MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE≠/20X,≠  PARAMETRE DE FORME    ≠,F10.4/
  332X,≠D ECHELLE  ≠,F8.2/32X,≠DE POSITION≠,F8.2//20X,≠  PRECIPITATIO
  4NS CALCULEES≠/20X,≠FREQ       HAUTEUR      RECURRENCE     HAUTEUR≠)
 4 FORMAT(21X,F3.2,F13.1,F13.2,F13.1)
 5 FORMAT(/20X,≠INTERVALLES DE CONFIANCE A≠,F6.2/20X,≠FREQ        HAUTE
  2UR      BORNE INF     BORNE SUP≠)
 6 FORMAT(20X,F4.3,3(F13.1))
   DIMENSION X(50),BC(2),F(9)
   DATA X/995.,1000.,1027.,1027.,1061.,1076.,1089.,1094.,1101.,1118.,
  21144.,1180.,1193.,1203.,1221.,1223.,1224.,1236.,1252.,1255.,1263.,
  31271.,1283.,1300.,1325.,1332.,1340.,1340.,1341.,1358.,1376.,1398.,
  41429.,1447.,1464.,1469.,1487.,1514.,1523.,1525.,1537.,1600.,1609.,
  51613.,1694.,1704.,1720.,1898.,1913.,1930./
   DATA F/.01,.02,.05,.1,.2,.25,.3,.4,.5/,BJ/0./,DS/1./,CO/.5/,R/1./
   N=50
   WRITE(6,1)N
   M=N/2
   DO 10 I=1,M
   T=N/(I-.5)
10 WRITE(6,2)I,X(I),T,X(N+1-I)
   CALL PLOGN(X,DE,S,XO,XM,N,BJ)
   WRITE(6,3)XM,DE,S,XO
   DO 12 I=1,9
   T=1./F(I)
   A=VLOGN(F(I),DE,S,XO)
   B=VLOGN((1.-F(I)),DE,S,XO)
12 WRITE(6,4)F(I),A,T,B
   WRITE(6,5)CO
   DO 14 K=1,3
   R=R/10.
   T=3.*R-1.
   DO 14 J=1,2
   T=T+1.-2.*R
   XF=VLOGN(T,DE,S,XO)
   CALL CLOGN(DE,S,XO,N,BJ,T,XF,CO,BC,X)
14 WRITE(6,6)T,XF,BC
   STOP
   END
```

ANNEXE 5

EXEMPLE D'AJUSTEMENT PAR LE MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

TAILLE D'ÉCHANTILLON INCONNUE

Cet exemple traite les débits maximaux de 37 crues, complexes ou non, considérées comme indépendantes, supérieures à 20 m^3/s, observées pendant quatre années consécutives à la station du Rocher des Pigeons (Algérie), par la méthode du maximum de vraisemblance en utilisant le sous-programme PLØGNV et le sous-programme CLØGNV pour calculer des intervalles de confiance.

Le programme principal, ci-joint, est court, et donne en sortie, ci-jointe :

— pour faciliter la représentation graphique des observations (fig. 8) leurs récurrences en annexe en fonction de la taille « calculée» de l'échantillon,

— les valeurs des paramètres d'ajustement, dont le paramètre de position choisi égal à zéro a priori,

— les valeurs de débits maximaux calculés d'après les valeurs des paramètres et certaines récurrences en années pour faciliter la représentation graphique (fig. 8). Les intervalles de confiance ont été calculés pour certaines récurrences.

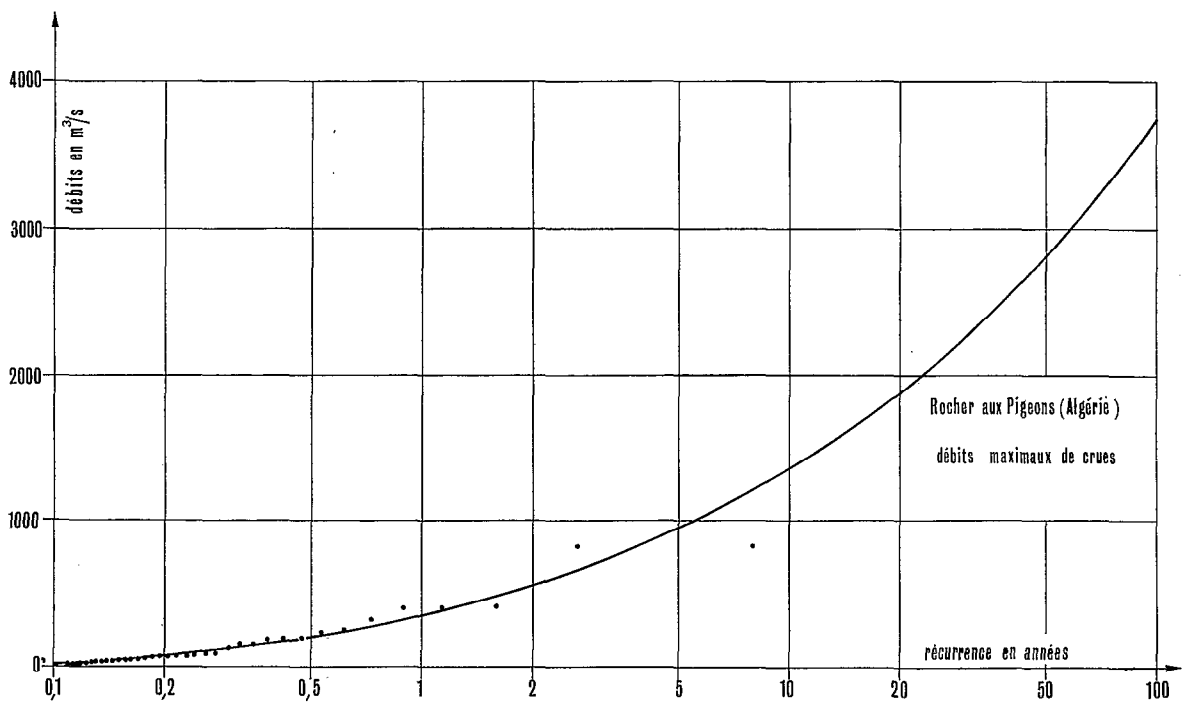

Fig. 8

DÉBITS MAXIMAUX DE CRUES AU ROCHER DES PIGEONS (Algérie)

Echantillon (en m^3/s) de taille 37 sur 4 années, traité en distribution gausso-logarithmique

DÉBITS OBSERVÉS RANGÉS

Rang	*Fréquence VN*	*Récurrence annuelle*	*Débit*	*Rang*	*Fréquence VN*	*Récurrence annuelle*	*Débit*
1	0,0103	8,000	824,0	20	0,4032	0,205	71,7
2	0,0310	2,667	819,0	21	0,4239	0,195	68,9
3	0,0517	1,600	411,0	22	0,4446	0,186	63,3
4	0,0724	1,143	403,0	23	0,4653	0,178	57,8
5	0,0931	0,889	403,0	24	0,4860	0,170	47,3
6	0,1137	0,727	324,0	25	0,5066	0,163	47,3
7	0,1344	0,615	250,0	26	0,5273	0,157	43,8
8	0,1551	0,533	229,0	27	0,5480	0,151	42,2
9	0,1758	0,471	198,0	28	0,5687	0,145	39,6
10	0,1965	0,421	189,0	29	0,5894	0,140	38,7
11	0,2171	0,381	182,0	30	0,6100	0,136	37,0
12	0,2378	0,348	156,0	31	0,6307	0,131	37,0
13	0,2585	0,320	153,0	32	0,6514	0,127	30,9
14	0,2792	0,296	136,0	33	0,6721	0,123	29,4
15	0,2998	0,276	89,0	34	0,6927	0,119	29,0
16	0,3205	0,258	89,0	35	0,7134	0,116	27,5
17	0,3412	0,242	77,4	36	0,7341	0,113	23,1
18	0,3619	0,229	76,0	37	0,7548	0,110	21,2
19	0,3826	0,216	71,7				

VALEURS DES PARAMÈTRES PAR MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

Paramètre de forme	1,3503
d'échelle	53,08
choisi de position	0,0
taille calculée	48,36

DÉBITS CALCULÉS DE RÉCURRENCE		INTERVALLES DE CONFIANCE A . 50	
		Borne inférieure	*Borne supérieure*
10 fois par an	14,86		
5 fois par an	71,29		
2 fois par an	197,34		
1 fois par an	345,45		
1 fois en 2 ans	553	436	697
1 fois en 5 ans	943	816	1 341
1 fois en 10 ans	1 350	1 042	1 681
1 fois en 20 ans	1 878	1 065	2 338
1 fois en 50 ans	2 803	1 523	3 383
1 fois en 100 ans	3 714	2 137	5 756

```
    1 FORMAT(≠1≠,20X,≠DEBITS MAXIMAUX DE CRUES AU ROCHER DES PIGEONS (AL
     2G)≠//20X,≠ECHANTILLON EN M3S DE TAILLE 37 SUR 4 ANNEES  TRAITE EN
     3DISTRIBUTION≠/76X,≠GAUSSO-LOG ≠/20X,≠ DEBITS OBSERVES RANGES≠/20X,
     4≠RANG  FREQ/VN  RECURRENCE/AN  DEBIT≠)
    2 FORMAT(20X,I3,F9.4,F11.3,F13.1)
    3 FORMAT(/20X,≠VALEURS DES PARAMETRES PAR MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE≠/
     220X,≠  PARAMETRE DE FORME   ≠,F10.4/32X,≠D ECHELLE  ≠,F8.2/25X,≠CH
     3OISI DE POSITION≠,F8.2/27X,≠TAILLE CALCULEE≠,F7.2//20X,≠ DEBITS CA
     4LCULES DE RECURRENCE≠)
    4 FORMAT(20X,I2,≠ FOIS PAR AN≠,F12.2)
    5 FORMAT(20X,≠1 FOIS EN≠,I4,≠ ANS≠,F7.0,9X,F7.0,5X,F7.0)
    6 FORMAT(20X,≠INTERVALLES DE CONFIANCE A .50  BORNE INF   BORNE SU≠)
      DIMENSION X(37),BC(2),IT(10)
      DATA X/824.,819.,411.,403.,403.,324.,250.,229.,198.,189.,182.,156.
     2,153.,136.,89.,89.,77.4,76.,71.7,71.7,68.9,63.3,57.8,47.3,47.3,43.
     38,42.2,39.6,38.7,37.0,37.0,30.9,29.4,29.0,27.5,23.1,21.2/,XO/0./
      DATA AN/4./,XH/20./,N/37/,CO/.5/,IT/10,5,2,1,2,5,10,20,50,100/
      WRITE(6,1)
      CALL PLOGNV(X,DE,S,XO,VN,N,XH)
      DO 10 I=1,N
      F=(I-.5)/VN
      R=AN/(I-.5)
   10 WRITE(6,2)I,F,R,X(I)
      WRITE(6,3)DE,S,XO,VN
      DO 12 I=1,4
      XF=VLOGN((1.-AN*IT(I)/VN),DE,S,XO)
   12 WRITE(6,4)II(I),XF
      NV=VN+.5
      DO 14 I=5,10
      F=1.-AN/VN/IT(I)
      XF=VLOGN(F,DE,S,XO)
      CALL CLOGNV(DE,S,XO,NV,XH,F,XF,CO,BC)
   14 WRITE(6,5)IT(I),XF,BC
      WRITE(6,6)
      STOP
      END
```

TABLE A

La table donne la probabilité au dépassement de la variable de gauss, $t' = t \log e$, t étant la variable normale centrée réduite.

La probabilité est donnée avec 5 chiffres significatifs, le chiffre entre parenthèses étant le nombre de zéros à ajouter immédiatement à droite de la virgule, ainsi, pour $t' = 1{,}50$, la probabilité au dépassement est 0,000 276 30 et la probabilité au non-dépassement 0,999 723 70.

Par suite de la symétrie de la loi normale, la probabilité au non-dépassement de $t' = -1{,}5$ est 0,000 276 30 et au dépassement 0,999 723 70.

Pour calculer une probabilité correspondant à une valeur d'une variable gausso-logarithmique, il faut calculer

$$t' = \frac{1}{\sigma} \log \frac{x - x_0}{s}$$

Ainsi (annexe 2), pour :

$$x = 3\,314 \qquad x_0 = 1\,100 \qquad s = 810 \qquad \sigma = 0{,}464$$

$$\log (x - x_0) - \log s = 3{,}345\,18 - 2{,}908\,49 = 0{,}436\,69$$

$$t' = 0{,}436\,69 \;/\; 0{,}464 = 0{,}941$$

probabilité au dépassement :

$$0{,}015\,216 - 0{,}000\,436 + \frac{1}{5} = 0{,}015\,13$$

La table peut évidemment servir à déterminer la valeur de t' correspondant à une probabilité choisie, d'où la valeur de x.

Si on veut avoir au moins 4 chiffres significatifs exacts sur la probabilité, il faut utiliser la table avec une interpolation de Lagrange à trois points. Par exemple, soit à calculer la probabilité au dépassement pour $t' = 1{,}342\,07$, la table donne :

— point -1 :
$t'_{-1} = 1{,}335$ $\quad F_1(-1) = 0{,}001\,056\,2$ $\quad$ dif. $- 0{,}000\,040\,0 = \Delta(-1)$

— point 0 :
$t'_0 = 1{,}340$ $\quad F_1(0) = 0{,}001\,016\,2$ $\quad$ dif. $- 0{,}000\,0386 = \Delta(+1)$

— point $+1$:
$t'_{+1} = 1{,}345$ $\quad F_1(+1) = 0{,}000\,977\,5$

(le point 0 correspond à la valeur de t' tabulée la plus proche en plus ou en moins de la valeur de t' à transformer)

$$\Delta x = 1{,}342\,07 - 1{,}340 = + 0{,}002\,07$$

$$p = \frac{\Delta x}{0{,}005} = + 0{,}414$$

$$F_1(t') = p^2 \frac{\Delta(+1) - \Delta(-1)}{2} + p \frac{\Delta(+1) + \Delta(-1)}{2} + F_1(0)$$

$$= + 0{,}000\,000\,12 - 0{,}000\,016\,27 + 0{,}001\,016\,2 = 0{,}001\,000\,05$$

L'interpolation linéaire donne $F_1(t') = 0{,}001\,000\,2$ et la valeur exacte est 0,001 000 00.

DISTRIBUTION GAUSSO-LOGARITHMIQUE

	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	
.0	(0).50000	(0).40895	(0).32257	(0).24485	(0).17852	.0
DIF	.00459	.00447	.00412	.00360	.00299	
.005	(0).49541	(0).40448	(0).31845	(0).24125	(0).17553	.005
DIF	.00459	.00445	.00410	.00357	.00296	
.010	(0).49081	(0).40002	(0).31436	(0).23768	(0).17257	.010
DIF	.00459	.00444	.00407	.00355	.00293	
.015	(0).48622	(0).39558	(0).31028	(0).23413	(0).16964	.015
DIF	.00459	.00443	.00405	.00352	.00289	
.020	(0).48163	(0).39115	(0).30623	(0).23061	(0).16675	.020
DIF	.00459	.00441	.00403	.00349	.00286	
.025	(0).47705	(0).38674	(0).30220	(0).22713	(0).16389	.025
DIF	.00458	.00440	.00400	.00346	.00283	
.030	(0).47246	(0).38234	(0).29820	(0).22367	(0).16106	.030
DIF	.00458	.00438	.00398	.00343	.00280	
.035	(0).46788	(0).37796	(0).29422	(0).22025	(0).15826	.035
DIF	.00458	.00437	.00396	.00340	.00277	
.040	(0).46331	(0).37359	(0).29026	(0).21685	(0).15550	.040
DIF	.00457	.00435	.00393	.00337	.00273	
.045	(0).45874	(0).36924	(0).28633	(0).21348	(0).15276	.045
DIF	.00457	.00434	.00390	.00333	.00270	
.050	(0).45417	(0).36490	(0).28243	(0).21015	(0).15006	.050
DIF	.00456	.00432	.00388	.00330	.00267	
.055	(0).44961	(0).36058	(0).27855	(0).20684	(0).14739	.055
DIF	.00455	.00430	.00385	.00327	.00264	
.060	(0).44506	(0).35628	(0).27470	(0).20357	(0).14476	.060
DIF	.00455	.00428	.00383	.00324	.00261	
.065	(0).44051	(0).35200	(0).27087	(0).20033	(0).14215	.065
DIF	.00454	.00426	.00380	.00321	.00257	
.070	(0).43598	(0).34774	(0).26707	(0).19712	(0).13958	.070
DIF	.00453	.00424	.00377	.00318	.00254	
.075	(0).43145	(0).34349	(0).26330	(0).19394	(0).13704	.075
DIF	.00452	.00422	.00374	.00315	.00251	
.080	(0).42693	(0).33927	(0).25955	(0).19079	(0).13453	.080
DIF	.00451	.00420	.00372	.00312	.00248	
.085	(0).42241	(0).33506	(0).25584	(0).18768	(0).13205	.085
DIF	.00450	.00418	.00369	.00308	.00245	
.090	(0).41791	(0).33088	(0).25215	(0).18459	(0).12960	.090
DIF	.00449	.00416	.00366	.00305	.00241	
.095	(0).41342	(0).32671	(0).24849	(0).18154	(0).12719	.095
DIF	.00448	.00414	.00363	.00302	.00238	
.100	(0).40895	(0).32257	(0).24485	(0).17852	(0).12481	.100

DISTRIBUTION GAUSSO-LOGARITHMIQUE

	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	
.0	(0).12481	(1).83555	(1).53502	(1).32733	(1).19118	.0
DIF	.00235	.01755	.01241	.00833	.00530	
.005	(0).12245	(1).81800	(1).52260	(1).31900	(1).18587	.005
DIF	.00232	.01727	.01218	.00815	.00518	
.010	(0).12013	(1).80074	(1).51042	(1).31084	(1).18070	.010
DIF	.00229	.01699	.01196	.00798	.00505	
.015	(0).11784	(1).78375	(1).49846	(1).30286	(1).17565	.015
DIF	.00226	.01671	.01173	.00781	.00493	
.020	(0).11559	(1).76703	(1).48673	(1).29505	(1).17072	.020
DIF	.00223	.01644	.01151	.00764	.00481	
.025	(0).11336	(1).75059	(1).47522	(1).28741	(1).16590	.025
DIF	.00220	.01617	.01129	.00748	.00470	
.030	(0).11116	(1).73442	(1).46392	(1).27993	(1).16121	.030
DIF	.00217	.01590	.01108	.00731	.00458	
.035	(0).10900	(1).71851	(1).45285	(1).27261	(1).15663	.035
DIF	.00214	.01564	.01086	.00715	.00447	
.040	(0).10686	(1).70287	(1).44199	(1).26546	(1).15216	.040
DIF	.00211	.01538	.01065	.00700	.00436	
.045	(0).10476	(1).68750	(1).43134	(1).25846	(1).14780	.045
DIF	.00207	.01512	.01044	.00684	.00425	
.050	(0).10268	(1).67238	(1).42089	(1).25162	(1).14355	.050
DIF	.00204	.01486	.01024	.00669	.00415	
.055	(0).10064	(1).65753	(1).41066	(1).24493	(1).13940	.055
DIF	.02015	.01460	.01003	.00654	.00404	
.060	(1).98621	(1).64292	(1).40062	(1).23839	(1).13536	.060
DIF	.01985	.01435	.00983	.00639	.00394	
.065	(1).96636	(1).62858	(1).39079	(1).23200	(1).13142	.065
DIF	.01956	.01410	.00964	.00625	.00384	
.070	(1).94680	(1).61448	(1).38115	(1).22575	(1).12758	.070
DIF	.01926	.01385	.00944	.00610	.00374	
.075	(1).92754	(1).60063	(1).37171	(1).21965	(1).12383	.075
DIF	.01897	.01360	.00925	.00596	.00365	
.080	(1).90857	(1).58703	(1).36246	(1).21368	(1).12019	.080
DIF	.01868	.01336	.00906	.00583	.00355	
.085	(1).88988	(1).57367	(1).35340	(1).20786	(1).11663	.085
DIF	.01840	.01312	.00887	.00569	.00346	
.090	(1).87149	(1).56055	(1).34453	(1).20216	(1).11317	.090
DIF	.01811	.01288	.00869	.00556	.00337	
.095	(1).85338	(1).54766	(1).33584	(1).19660	(1).10980	.095
DIF	.01783	.01265	.00851	.00543	.00329	
.100	(1).83555	(1).53502	(1).32733	(1).19118	(1).10651	.100

DISTRIBUTION GAUSSO-LOGARITHMIQUE

	1.00	1.10	1.20	1.30	1.40	
.0	(1).10651	(2).56571	(2).28627	(2).13796	(3).63291	.0
DIF	.00320	.01831	.00994	.00512	.02497	
.005	(1).10331	(2).54740	(2).27634	(2).13285	(3).60794	.005
DIF	.00312	.01778	.00963	.00494	.02406	
.010	(1).10020	(2).52962	(2).26671	(2).12790	(3).58387	.010
DIF	.03033	.01727	.00932	.00477	.02318	
.015	(2).97164	(2).51235	(2).25739	(2).12313	(3).56069	.015
DIF	.02952	.01676	.00903	.00461	.02233	
.020	(2).94212	(2).49559	(2).24836	(2).11852	(3).53837	.020
DIF	.02874	.01627	.00874	.00445	.02150	
.025	(2).91338	(2).47931	(2).23962	(2).11407	(3).51687	.025
DIF	.02797	.01580	.00846	.00430	.02071	
.030	(2).88541	(2).46352	(2).23116	(2).10977	(3).49616	.030
DIF	.02721	.01533	.00819	.00415	.01993	
.035	(2).85820	(2).44819	(2).22297	(2).10562	(3).47623	.035
DIF	.02647	.01487	.00793	.00400	.01919	
.040	(2).83173	(2).43331	(2).21505	(2).10162	(3).45703	.040
DIF	.02576	.01443	.00767	.03864	.01847	
.045	(2).80597	(2).41888	(2).20738	(3).97754	(3).43857	.045
DIF	.02505	.01400	.00742	.03730	.01778	
.050	(2).78092	(2).40488	(2).19996	(3).94024	(3).42079	.050
DIF	.02437	.01358	.00718	.03599	.01711	
.055	(2).75656	(2).39130	(2).19278	(3).90426	(3).40368	.055
DIF	.02369	.01317	.00694	.03472	.01646	
.060	(2).73286	(2).37813	(2).18584	(3).86954	(3).38722	.060
DIF	.02304	.01277	.00672	.03349	.01584	
.065	(2).70983	(2).36536	(2).17912	(3).83606	(3).37138	.065
DIF	.02240	.01238	.00649	.03230	.01523	
.070	(2).68743	(2).35298	(2).17263	(3).80376	(3).35615	.070
DIF	.02177	.01201	.00628	.03114	.01465	
.075	(2).66566	(2).34097	(2).16635	(3).77262	(3).34150	.075
DIF	.02116	.01164	.00607	.03003	.01409	
.080	(2).64450	(2).32933	(2).16028	(3).74259	(3).32741	.080
DIF	.02056	.01128	.00587	.02895	.01354	
.085	(2).62395	(2).31806	(2).15441	(3).71364	(3).31387	.085
DIF	.01998	.01093	.00567	.02791	.01302	
.090	(2).60397	(2).30713	(2).14874	(3).68573	(3).30085	.090
DIF	.01941	.01059	.00548	.02690	.01252	
.095	(2).58456	(2).29654	(2).14326	(3).65884	(3).28833	.095
DIF	.01885	.01026	.00530	.02592	.01203	
.100	(2).56571	(2).28628	(2).13796	(3).63291	(3).27630	.100

DISTRIBUTION GAUSSO-LOGARITHMIQUE

	1.50	1.60	1.70	1.80	1.90	
.0	(3).27630	(3).11474	(4).45316	(4).17017	(5).60741	.0
DIF	.01156	.00508	.02114	.00835	.03126	
.005	(3).26474	(3).10966	(4).43202	(4).16182	(5).57615	.005
DIF	.01111	.00487	.02021	.00796	.02972	
.010	(3).25362	(3).10480	(4).41182	(4).15386	(5).54643	.010
DIF	.01068	.00466	.01931	.00759	.02826	
.015	(3).24295	(3).10014	(4).39251	(4).14628	(5).51817	.015
DIF	.01025	.04467	.01845	.00723	.02686	
.020	(3).23269	(4).95669	(4).37405	(4).13905	(5).49131	.020
DIF	.00985	.04279	.01763	.00689	.02553	
.025	(3).22284	(4).91390	(4).35642	(4).13216	(5).46579	.025
DIF	.00946	.04099	.01684	.00656	.02426	
.030	(3).21338	(4).87292	(4).33958	(4).12559	(5).44153	.030
DIF	.00908	.03925	.01609	.00625	.02305	
.035	(3).20430	(4).83366	(4).32350	(4).11934	(5).41849	.035
DIF	.00872	.03759	.01536	.00596	.02189	
.040	(3).19558	(4).79607	(4).30813	(4).11339	(5).39659	.040
DIF	.00837	.03598	.01467	.00567	.02079	
.045	(3).18721	(4).76009	(4).29346	(4).10772	(5).37580	.045
DIF	.00804	.03445	.01401	.00540	.01975	
.050	(3).17917	(4).72564	(4).27945	(4).10231	(5).35605	.050
DIF	.00771	.03298	.01337	.05143	.01876	
.055	(3).17146	(4).69266	(4).26608	(5).97172	(5).33730	.055
DIF	.00740	.03156	.01277	.04896	.01781	
.060	(3).16406	(4).66109	(4).25332	(5).92276	(5).31949	.060
DIF	.00710	.03020	.01218	.04660	.01691	
.065	(3).15695	(4).63089	(4).24113	(5).87615	(5).30258	.065
DIF	.00681	.02890	.01163	.04436	.01605	
.070	(3).15014	(4).60199	(4).22951	(5).83180	(5).28653	.070
DIF	.00654	.02765	.01109	.04221	.01523	
.075	(3).14361	(4).57434	(4).21841	(5).78959	(5).27130	.075
DIF	.00627	.02645	.01058	.04016	.01446	
.080	(3).13734	(4).54789	(4).20783	(5).74942	(5).25685	.080
DIF	.00601	.02529	.01009	.03820	.01371	
.085	(3).13133	(4).52260	(4).19774	(5).71122	(5).24313	.085
DIF	.00576	.02419	.00963	.03635	.01301	
.090	(3).12556	(4).49841	(4).18811	(5).67487	(5).23012	.090
DIF	.00553	.02313	.00918	.03457	.01234	
.095	(3).12004	(4).47528	(4).17892	(5).64030	(5).21777	.095
DIF	.00530	.02212	.00876	.03288	.01171	
.100	(3).11474	(4).45316	(4).17017	(5).60742	(5).20607	.100

DISTRIBUTION GAUSSO-LOGARITHMIQUE

	2.00	2.10	2.20	2.30	2.40	
.0	(5).20607	(6).66430	(6).20347	(7).59202	(7).16362	.0
DIF	.01110	.03739	.01194	.03618	.01040	
.005	(5).19496	(6).62691	(6).19152	(7).55583	(7).15322	.005
DIF	.01053	.03537	.01127	.03405	.00975	
.010	(5).18444	(6).59154	(6).18025	(7).52179	(7).14347	.010
DIF	.00998	.03345	.01063	.03202	.00915	
.015	(5).17445	(6).55809	(6).16963	(7).48976	(7).13432	.015
DIF	.00946	.03162	.01002	.03012	.00858	
.020	(5).16499	(6).52647	(6).15961	(7).45965	(7).12573	.020
DIF	.00897	.02989	.00945	.02832	.00805	
.025	(5).15602	(6).49657	(6).15016	(7).43133	(7).11768	.025
DIF	.00850	.02826	.00891	.02663	.00755	
.030	(5).14752	(6).46832	(6).14125	(7).40470	(7).11013	.030
DIF	.00806	.02671	.00840	.02503	.00708	
.035	(5).13946	(6).44161	(6).13286	(7).37967	(7).10305	.035
DIF	.00763	.02524	.00791	.02353	.06636	
.040	(5).13183	(6).41638	(6).12494	(7).35614	(8).96419	.040
DIF	.00723	.02384	.00746	.02211	.06219	
.045	(5).12460	(6).39254	(6).11749	(7).33403	(8).90200	.045
DIF	.00685	.02253	.00703	.02078	.05830	
.050	(5).11775	(6).37001	(6).11046	(7).31324	(8).84370	.050
DIF	.00649	.02128	.00662	.01953	.05463	
.055	(5).11126	(6).34873	(6).10384	(7).29372	(8).78907	.055
DIF	.00614	.02010	.06235	.01835	.05119	
.060	(5).10512	(6).32864	(7).97607	(7).27537	(8).73788	.060
DIF	.05817	.01898	.05872	.01723	.04796	
.065	(6).99304	(6).30966	(7).91734	(7).25814	(8).68993	.065
DIF	.05507	.01792	.05530	.01619	.04492	
.070	(6).93797	(6).29174	(7).86204	(7).24195	(8).64500	.070
DIF	.05213	.01692	.05207	.01520	.04208	
.075	(6).88585	(6).27482	(7).80997	(7).22675	(8).60293	.075
DIF	.04934	.01597	.04902	.01427	.03940	
.080	(6).83651	(6).25885	(7).76095	(7).21248	(8).56352	.080
DIF	.04668	.01507	.04614	.01340	.03689	
.085	(6).78983	(6).24378	(7).71480	(7).19908	(8).52663	.085
DIF	.04418	.01423	.04344	.01258	.03455	
.090	(6).74565	(6).22955	(7).67137	(7).18651	(8).49209	.090
DIF	.04180	.01342	.04088	.01181	.03234	
.095	(6).70385	(6).21613	(7).63049	(7).17470	(8).45975	.095
DIF	.03954	.01266	.03847	.01108	.03027	
.100	(6).66431	(6).20347	(7).59202	(7).16362	(8).42948	.100

TABLE B

La table donne pour des probabilités au dépassement comprises entre 0 et 0,5, les valeurs de la variable de gauss $t' = t \log e$, t étant la variable centrée normale réduite.

Par suite de la symétrie de la loi normale, les valeurs de la variable de gauss (t log e) correspondant à des valeurs de la probabilité au non-dépassement comprises entre 0 et 0,5 sont celles de la table mais avec un signe négatif.

Pour calculer une variable x gausso-logarithmique correspondant à une fréquence donnée, une fois t' trouvée dans la table, par interpolation si nécessaire, la valeur de x se déduit de (logarithmes décimaux) :

$$\log (x - x_0) = \sigma\, t' + \log s$$

COMPLÉMENT DE LA TABLE

Fréquence au dépassement		
	0,0005	t' = 1,42906
	0,0002	1,53744
1/10 000	0,0001	1,61515
	0,00005	1,68966
	0,00002	1,78387
1/1 00 000	0,00001	1,85222
	0,000005	1,91837
	0,000002	2,00272
1/1 000 000	0,000001	2,06438
	0,0000005	2,12441
	0,0000002	2,20143
1/10 000 000	0,0000001	2,25804
	0,00000005	2,31338
	0,00000002	2,38464
1/100 000 000	0,00000001	2,43726

Si on veut avoir au moins 4 chiffres significatifs exacts sur la valeur de t', il faut utiliser la table avec une interpolation de Lagrange à trois points.

Par exemple, soit à calculer t' pour $F_1 = 0{,}0023116$ (la valeur exacte de t' est 1,2300), la table donne :

point -1 :

$F_{1_{-1}} = 0{,}0020$ $\quad t'(-1) = 1{,}24997$ $\quad$ dif. $-0{,}03089 = \Delta(-1)$

point 0 :

$F_{1_0} = 0{,}0025$ $\quad t'(0) = 1{,}21908$ $\quad$ dif. $-0{,}02573 = \Delta(+1)$

point $+1$:

$F_{1_{+1}} = 0{,}0030$ $\quad t'(+1) = 1{,}19335$

$$\Delta x = 0{,}0023116 - 0{,}0025 = -0{,}0001884 \qquad p = \frac{\Delta x}{0{,}0005} = 0{,}3768$$

$$t'(F_1) = p^2 \frac{\Delta(+1) - \Delta(-1)}{2} + p \frac{\Delta(+1) + \Delta(-1)}{2} + t'(0)$$

$$= 0{,}000366 + 0{,}010669 + 1{,}21908 = 1{,}2301$$

L'erreur maximale commise avec cette interpolation à trois points est de l'ordre de : en valeur absolue,

$$\frac{2}{30}\left[\Delta(+1) - 2\,\Delta(-1) + \Delta(-2)\right]$$

dans le cas présent où F_1 est inférieur à $F_{1(0)}$

avec : $\Delta(-2) = F_1[t'(-1)] - F_1[t'(-2)]$

d'où la valeur maximale de l'erreur :

$$\frac{2}{30}\left|0{,}02573 - 2 \times 0{,}03089 + 0{,}03890\right| = 0{,}0002$$

Si F_1 était supérieur à F_{10}, l'erreur maximale serait de l'ordre de :

$$\frac{2}{30}\left|\Delta(+2) - 2\,\Delta(+1) + \Delta(-1)\right|$$

Dans le cas d'interpolation linéaire entre t' (0) et t' (+ 1), l'erreur maximale commise est de l'ordre de :

$$\frac{1}{8}\left|\Delta(+1)-\Delta(-1)\right|$$

si F_1 est plus proche de F_{1_0} que de $F_{1_{+1}}$;
ou de :

$$\frac{1}{8}\left|\Delta(+2)-\Delta(+1)\right|$$

si F_1 est plus proche de $F_{1_{+1}}$ que de F_{1_0}.

Elle est donc de 0,0001 sur t' pour $F_1 \geqslant 0{,}0065$ et de 0,00001 sur t' pour $F_1 \geqslant 0{,}02$.

DISTRIBUTION GAUSSO-LOGARITHMIQUE

	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	
.0	*********	0.55657	0.36551	0.22774	0.11003	.0
DIF	******	.00124	.00077	.00062	.00056	
.0005	1.42906	0.55534	0.36474	0.22712	0.10947	.0005
DIF	.08699	.00123	.00077	.00062	.00056	
.0010	1.34207	0.55411	0.36396	0.22650	0.10890	.0010
DIF	.05320	.00123	.00077	.00062	.00056	
.0015	1.28887	0.55288	0.36319	0.22587	0.10834	.0015
DIF	.03890	.00122	.00077	.00062	.00056	
.0020	1.24997	0.55166	0.36242	0.22525	0.10778	.0020
DIF	.03089	.00122	.00077	.00062	.00056	
.0025	1.21908	0.55044	0.36165	0.22463	0.10722	.0025
DIF	.02573	.00121	.00077	.00062	.00056	
.0030	1.19335	0.54923	0.36088	0.22401	0.10666	.0030
DIF	.02212	.00121	.00077	.00062	.00056	
.0035	1.17122	0.54802	0.36011	0.22338	0.10610	.0035
DIF	.01945	.00120	.00077	.00062	.00056	
.0040	1.15178	0.54681	0.35934	0.22276	0.10554	.0040
DIF	.01738	.00120	.00077	.00062	.00056	
.0045	1.13440	0.54561	0.35858	0.22214	0.10498	.0045
DIF	.01573	.00120	.00076	.00062	.00056	
.0050	1.11867	0.54442	0.35781	0.22152	0.10442	.0050
DIF	.01439	.00119	.00076	.00062	.00056	
.0055	1.10428	0.54322	0.35705	0.22090	0.10386	.0055
DIF	.01327	.00119	.00076	.00062	.00056	
.0060	1.09101	0.54204	0.35629	0.22028	0.10330	.0060
DIF	.01232	.00118	.00076	.00062	.00056	
.0065	1.07869	0.54085	0.35552	0.21966	0.10274	.0065
DIF	.01151	.00118	.00076	.00062	.00056	
.0070	1.06718	0.53967	0.35476	0.21905	0.10218	.0070
DIF	.01081	.00118	.00076	.00062	.00056	
.0075	1.05637	0.53850	0.35400	0.21843	0.10162	.0075
DIF	.01019	.00117	.00076	.00062	.00056	
.0080	1.04618	0.53732	0.35325	0.21781	0.10106	.0080
DIF	.00964	.00117	.00076	.00062	.00056	
.0085	1.03653	0.53616	0.35249	0.21719	0.10050	.0085
DIF	.00916	.00116	.00076	.00062	.00056	
.0090	1.02737	0.53499	0.35173	0.21658	0.09994	.0090
DIF	.00872	.00116	.00076	.00062	.00056	
.0095	1.01865	0.53383	0.35098	0.21596	0.09938	.0095
DIF	.00833	.00116	.00075	.00062	.00056	
.0100	1.01032	0.53267	0.35022	0.21535	0.09882	.0100
DIF	.00798	.00115	.00075	.00062	.00056	
.0105	1.00234	0.53152	0.34947	0.21473	0.09826	.0105
DIF	.00765	.00115	.00075	.00061	.00056	
.0110	0.99469	0.53037	0.34872	0.21411	0.09770	.0110
DIF	.00735	.00115	.00075	.00061	.00056	
.0115	0.98734	0.52923	0.34797	0.21350	0.09715	.0115
DIF	.00708	.00114	.00075	.00061	.00056	
.0120	0.98026	0.52808	0.34722	0.21289	0.09659	.0120
DIF	.00683	.00114	.00075	.00061	.00056	
.0125	0.97343	0.52695	0.34647	0.21227	0.09603	.0125

crreur d'interpolation linéaire inférieure à 0,0001 sur t′ pour $F_1 \geqslant 0{,}0365$

	0,00001	$\geqslant 0{,}02$
3 points	0,0001	$\geqslant 0{,}0030$
	0,00001	$\geqslant 0{,}0055$

DISTRIBUTION GAUSSO-LOGARITHMIQUE

	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	
.0125	0.97343	0.52695	0.34647	0.21227	0.09603	.0125
DIF	.00660	.00113	.00075	.00061	.00056	
.0130	0.96683	0.52581	0.34572	0.21166	0.09547	.0130
DIF	.00638	.00113	.00075	.00061	.00056	
.0135	0.96045	0.52468	0.34498	0.21105	0.09492	.0135
DIF	.00618	.00113	.00075	.00061	.00056	
.0140	0.95427	0.52355	0.34423	0.21043	0.09436	.0140
DIF	.00599	.00112	.00074	.00061	.00056	
.0145	0.94828	0.52243	0.34349	0.20982	0.09380	.0145
DIF	.00582	.00112	.00074	.00061	.00056	
.0150	0.94246	0.52131	0.34274	0.20921	0.09324	.0150
DIF	.00565	.00112	.00074	.00061	.00056	
.0155	0.93680	0.52019	0.34200	0.20860	0.09269	.0155
DIF	.00550	.00111	.00074	.00061	.00056	
.0160	0.93131	0.51908	0.34126	0.20799	0.09213	.0160
DIF	.00535	.00111	.00074	.00061	.00056	
.0165	0.92595	0.51797	0.34052	0.20738	0.09157	.0165
DIF	.00522	.00111	.00074	.00061	.00056	
.0170	0.92074	0.51686	0.33978	0.20677	0.09102	.0170
DIF	.00509	.00110	.00074	.00061	.00056	
.0175	0.91565	0.51576	0.33904	0.20616	0.09046	.0175
DIF	.00496	.00110	.00074	.00061	.00056	
.0180	0.91068	0.51466	0.33830	0.20555	0.08990	.0180
DIF	.00485	.00110	.00074	.00061	.00056	
.0185	0.90584	0.51356	0.33756	0.20494	0.08935	.0185
DIF	.00474	.00109	.00074	.00061	.00056	
.0190	0.90110	0.51247	0.33683	0.20433	0.08879	.0190
DIF	.00463	.00109	.00073	.00061	.00056	
.0195	0.89646	0.51138	0.33609	0.20373	0.08824	.0195
DIF	.00453	.00109	.00073	.00061	.00056	
.0200	0.89193	0.51029	0.33536	0.20312	0.08768	.0200
DIF	.00444	.00108	.00073	.00061	.00056	
.0205	0.88749	0.50921	0.33463	0.20251	0.08713	.0205
DIF	.00435	.00108	.00073	.00061	.00056	
.0210	0.88315	0.50813	0.33389	0.20191	0.08657	.0210
DIF	.00426	.00108	.00073	.00061	.00056	
.0215	0.87889	0.50705	0.33316	0.20130	0.08602	.0215
DIF	.00418	.00107	.00073	.00061	.00056	
.0220	0.87471	0.50597	0.33243	0.20069	0.08546	.0220
DIF	.00410	.00107	.00073	.00061	.00055	
.0225	0.87061	0.50490	0.33170	0.20009	0.08491	.0225
DIF	.00402	.00107	.00073	.00061	.00055	
.0230	0.86659	0.50383	0.33098	0.19948	0.08435	.0230
DIF	.00395	.00107	.00073	.00060	.00055	
.0235	0.86264	0.50277	0.33025	0.19888	0.08380	.0235
DIF	.00388	.00106	.00073	.00060	.00055	
.0240	0.85876	0.50171	0.32952	0.19827	0.08324	.0240
DIF	.00381	.00106	.00073	.00060	.00055	
.0245	0.85495	0.50065	0.32880	0.19767	0.08269	.0245
DIF	.00375	.00106	.00072	.00060	.00055	
.0250	0.85120	0.49959	0.32807	0.19707	0.08213	.0250

DISTRIBUTION GAUSSO-LOGARITHMIQUE

	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	
.0250	0.85120	0.49959	0.32807	0.19707	0.08213	.0250
DIF	.00368	.00105	.00072	.00060	.00055	
.0255	0.84752	0.49854	0.32735	0.19646	0.08158	.0255
DIF	.00362	.00105	.00072	.00060	.00055	
.0260	0.84389	0.49749	0.32663	0.19586	0.08103	.0260
DIF	.00357	.00105	.00072	.00060	.00055	
.0265	0.84033	0.49644	0.32590	0.19526	0.08047	.0265
DIF	.00351	.00104	.00072	.00060	.00055	
.0270	0.83681	0.49539	0.32518	0.19466	0.07992	.0270
DIF	.00346	.00104	.00072	.00060	.00055	
.0275	0.83336	0.49435	0.32446	0.19405	0.07936	.0275
DIF	.00341	.00104	.00072	.00060	.00055	
.0280	0.82995	0.49331	0.32374	0.19345	0.07881	.0280
DIF	.00335	.00104	.00072	.00060	.00055	
.0285	0.82660	0.49228	0.32303	0.19285	0.07826	.0285
DIF	.00331	.00103	.00072	.00060	.00055	
.0290	0.82329	0.49124	0.32231	0.19225	0.07770	.0290
DIF	.00326	.00103	.00072	.00060	.00055	
.0295	0.82003	0.49021	0.32159	0.19165	0.07715	.0295
DIF	.00321	.00103	.00072	.00060	.00055	
.0300	0.81682	0.48919	0.32088	0.19105	0.07660	.0300
DIF	.00317	.00103	.00071	.00060	.00055	
.0305	0.81365	0.48816	0.32016	0.19045	0.07605	.0305
DIF	.00313	.00102	.00071	.00060	.00055	
.0310	0.81052	0.48714	0.31945	0.18985	0.07549	.0310
DIF	.00309	.00102	.00071	.00060	.00055	
.0315	0.80744	0.48612	0.31874	0.18925	0.07494	.0315
DIF	.00305	.00102	.00071	.00060	.00055	
.0320	0.80439	0.48510	0.31802	0.18866	0.07439	.0320
DIF	.00301	.00101	.00071	.00060	.00055	
.0325	0.80139	0.48409	0.31731	0.18806	0.07384	.0325
DIF	.00297	.00101	.00071	.00060	.00055	
.0330	0.79842	0.48308	0.31660	0.18746	0.07328	.0330
DIF	.00293	.00101	.00071	.00060	.00055	
.0335	0.79549	0.48207	0.31589	0.18686	0.07273	.0335
DIF	.00290	.00101	.00071	.00060	.00055	
.0340	0.79259	0.48106	0.31518	0.18627	0.07218	.0340
DIF	.00286	.00100	.00071	.00060	.00055	
.0345	0.78973	0.48006	0.31448	0.18567	0.07163	.0345
DIF	.00283	.00100	.00071	.00060	.00055	
.0350	0.78690	0.47905	0.31377	0.18507	0.07108	.0350
DIF	.00279	.00100	.00071	.00060	.00055	
.0355	0.78411	0.47806	0.31306	0.18448	0.07052	.0355
DIF	.00276	.00100	.00071	.00060	.00055	
.0360	0.78135	0.47706	0.31236	0.18388	0.06997	.0360
DIF	.00273	.00099	.00070	.00060	.00055	
.0365	0.77862	0.47606	0.31165	0.18329	0.06942	.0365
DIF	.00270	.00099	.00070	.00059	.00055	
.0370	0.77592	0.47507	0.31095	0.18269	0.06887	.0370
DIF	.00267	.00099	.00070	.00059	.00055	
.0375	0.77325	0.47408	0.31025	0.18210	0.06832	.0375

DISTRIBUTION GAUSSO-LOGARITHMIQUE

	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	
.0375	0.77325	0.47408	0.31025	0.18210	0.06832	.0375
DIF	.00264	.00099	.00070	.00059	.00055	
.0380	0.77060	0.47310	0.30954	0.18150	0.06777	.0380
DIF	.00261	.00098	.00070	.00059	.00055	
.0385	0.76799	0.47211	0.30884	0.18091	0.06722	.0385
DIF	.00259	.00098	.00070	.00059	.00055	
.0390	0.76541	0.47113	0.30814	0.18032	0.06667	.0390
DIF	.00256	.00098	.00070	.00059	.00055	
.0395	0.76285	0.47015	0.30744	0.17972	0.06612	.0395
DIF	.00253	.00098	.00070	.00059	.00055	
.0400	0.76031	0.46918	0.30674	0.17913	0.06557	.0400
DIF	.00251	.00097	.00070	.00059	.00055	
.0405	0.75781	0.46820	0.30605	0.17854	0.06501	.0405
DIF	.00248	.00097	.00070	.00059	.00055	
.0410	0.75532	0.46723	0.30535	0.17795	0.06446	.0410
DIF	.00246	.00097	.00070	.00059	.00055	
.0415	0.75287	0.46626	0.30465	0.17735	0.06391	.0415
DIF	.00243	.00097	.00070	.00059	.00055	
.0420	0.75043	0.46529	0.30396	0.17676	0.06336	.0420
DIF	.00241	.00097	.00069	.00059	.00055	
.0425	0.74802	0.46433	0.30326	0.17617	0.06281	.0425
DIF	.00239	.00096	.00069	.00059	.00055	
.0430	0.74563	0.46337	0.30257	0.17558	0.06226	.0430
DIF	.00237	.00096	.00069	.00059	.00055	
.0435	0.74327	0.46240	0.30187	0.17499	0.06171	.0435
DIF	.00234	.00096	.00069	.00059	.00055	
.0440	0.74093	0.46145	0.30118	0.17440	0.06116	.0440
DIF	.00232	.00096	.00069	.00059	.00055	
.0445	0.73860	0.46049	0.30049	0.17381	0.06061	.0445
DIF	.00230	.00095	.00069	.00059	.00055	
.0450	0.73630	0.45954	0.29980	0.17322	0.06006	.0450
DIF	.00228	.00095	.00069	.00059	.00055	
.0455	0.73402	0.45858	0.29911	0.17263	0.05952	.0455
DIF	.00226	.00095	.00069	.00059	.00055	
.0460	0.73176	0.45764	0.29842	0.17204	0.05897	.0460
DIF	.00224	.00095	.00069	.00059	.00055	
.0465	0.72952	0.45669	0.29773	0.17145	0.05842	.0465
DIF	.00222	.00095	.00069	.00059	.00055	
.0470	0.72730	0.45574	0.29704	0.17087	0.05787	.0470
DIF	.00220	.00094	.00069	.00059	.00055	
.0475	0.72509	0.45480	0.29635	0.17028	0.05732	.0475
DIF	.00218	.00094	.00069	.00059	.00055	
.0480	0.72291	0.45386	0.29567	0.16969	0.05677	.0480
DIF	.00217	.00094	.00069	.00059	.00055	
.0485	0.72074	0.45292	0.29498	0.16910	0.05622	.0485
DIF	.00215	.00094	.00069	.00059	.00055	
.0490	0.71860	0.45198	0.29430	0.16852	0.05567	.0490
DIF	.00213	.00093	.00068	.00059	.00055	
.0495	0.71646	0.45105	0.29361	0.16793	0.05512	.0495
DIF	.00211	.00093	.00068	.00059	.00055	
.0500	0.71435	0.45012	0.29293	0.16734	0.05457	.0500

DISTRIBUTION GAUSSO-LOGARITHMIQUE

	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	
.0500	0.71435	0.45012	0.29293	0.16734	0.05457	.0500
DIF	.00210	.00093	.00068	.00059	.00055	
.0505	0.71225	0.44919	0.29224	0.16676	0.05403	.0505
DIF	.00208	.00093	.00068	.00059	.00055	
.0510	0.71017	0.44826	0.29156	0.16617	0.05348	.0510
DIF	.00206	.00093	.00068	.00059	.00055	
.0515	0.70811	0.44733	0.29088	0.16559	0.05293	.0515
DIF	.00205	.00092	.00068	.00059	.00055	
.0520	0.70606	0.44641	0.29020	0.16500	0.05238	.0520
DIF	.00203	.00092	.00068	.00058	.00055	
.0525	0.70403	0.44549	0.28952	0.16442	0.05183	.0525
DIF	.00202	.00092	.00068	.00058	.00055	
.0530	0.70201	0.44457	0.28884	0.16383	0.05128	.0530
DIF	.00200	.00092	.00068	.00058	.00055	
.0535	0.70001	0.44365	0.28816	0.16325	0.05074	.0535
DIF	.00199	.00092	.00068	.00058	.00055	
.0540	0.69802	0.44273	0.28748	0.16266	0.05019	.0540
DIF	.00197	.00091	.00068	.00058	.00055	
.0545	0.69605	0.44182	0.28681	0.16208	0.04964	.0545
DIF	.00196	.00091	.00068	.00058	.00055	
.0550	0.69409	0.44091	0.28613	0.16150	0.04909	.0550
DIF	.00195	.00091	.00068	.00058	.00055	
.0555	0.69214	0.44000	0.28545	0.16091	0.04854	.0555
DIF	.00193	.00091	.00068	.00058	.00055	
.0560	0.69021	0.43909	0.28478	0.16033	0.04800	.0560
DIF	.00192	.00091	.00067	.00058	.00055	
.0565	0.68829	0.43818	0.28410	0.15975	0.04745	.0565
DIF	.00190	.00090	.00067	.00058	.00055	
.0570	0.68639	0.43728	0.28343	0.15916	0.04690	.0570
DIF	.00189	.00090	.00067	.00058	.00055	
.0575	0.68450	0.43637	0.28276	0.15858	0.04635	.0575
DIF	.00188	.00090	.00067	.00058	.00055	
.0580	0.68262	0.43547	0.28208	0.15800	0.04581	.0580
DIF	.00187	.00090	.00067	.00058	.00055	
.0585	0.68075	0.43457	0.28141	0.15742	0.04526	.0585
DIF	.00185	.00090	.00067	.00058	.00055	
.0590	0.67890	0.43368	0.28074	0.15684	0.04471	.0590
DIF	.00184	.00090	.00067	.00058	.00055	
.0595	0.67706	0.43278	0.28007	0.15626	0.04416	.0595
DIF	.00183	.00089	.00067	.00058	.00055	
.0600	0.67523	0.43189	0.27940	0.15568	0.04362	.0600
DIF	.00182	.00089	.00067	.00058	.00055	
.0605	0.67341	0.43100	0.27873	0.15510	0.04307	.0605
DIF	.00181	.00089	.00067	.00058	.00055	
.0610	0.67161	0.43011	0.27806	0.15452	0.04252	.0610
DIF	.00179	.00089	.00067	.00058	.00055	
.0615	0.66981	0.42922	0.27740	0.15394	0.04198	.0615
DIF	.00178	.00089	.00067	.00058	.00055	
.0620	0.66803	0.42833	0.27673	0.15336	0.04143	.0620
DIF	.00177	.00088	.00067	.00058	.00055	
.0625	0.66626	0.42745	0.27606	0.15278	0.04088	.0625

DISTRIBUTION GAUSSO-LOGARITHMIQUE

	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	
.0625	0.66626	0.42745	0.27606	0.15278	0.04088	.0625
DIF	.00176	.00088	.00067	.00058	.00055	
.0630	0.66450	0.42657	0.27540	0.15220	0.04034	.0630
DIF	.00175	.00088	.00067	.00058	.00055	
.0635	0.66275	0.42568	0.27473	0.15162	0.03979	.0635
DIF	.00174	.00088	.00066	.00058	.00055	
.0640	0.66101	0.42481	0.27407	0.15104	0.03924	.0640
DIF	.00173	.00088	.00066	.00058	.00055	
.0645	0.65928	0.42393	0.27340	0.15046	0.03870	.0645
DIF	.00172	.00088	.00066	.00058	.00055	
.0650	0.65757	0.42305	0.27274	0.14989	0.03815	.0650
DIF	.00171	.00087	.00066	.00058	.00055	
.0655	0.65586	0.42218	0.27208	0.14931	0.03760	.0655
DIF	.00170	.00087	.00066	.00058	.00055	
.0660	0.65416	0.42131	0.27141	0.14873	0.03706	.0660
DIF	.00169	.00087	.00066	.00058	.00055	
.0665	0.65247	0.42044	0.27075	0.14815	0.03651	.0665
DIF	.00168	.00087	.00066	.00058	.00055	
.0670	0.65080	0.41957	0.27009	0.14758	0.03597	.0670
DIF	.00167	.00087	.00066	.00058	.00055	
.0675	0.64913	0.41870	0.26943	0.14700	0.03542	.0675
DIF	.00166	.00087	.00066	.00058	.00055	
.0680	0.64747	0.41783	0.26877	0.14642	0.03487	.0680
DIF	.00165	.00086	.00066	.00058	.00055	
.0685	0.64582	0.41697	0.26811	0.14585	0.03433	.0685
DIF	.00164	.00086	.00066	.00058	.00055	
.0690	0.64418	0.41611	0.26746	0.14527	0.03378	.0690
DIF	.00163	.00086	.00066	.00058	.00055	
.0695	0.64255	0.41525	0.26680	0.14470	0.03324	.0695
DIF	.00162	.00086	.00066	.00058	.00055	
.0700	0.64093	0.41439	0.26614	0.14412	0.03269	.0700
DIF	.00161	.00086	.00066	.00057	.00055	
.0705	0.63932	0.41353	0.26548	0.14355	0.03214	.0705
DIF	.00160	.00086	.00066	.00057	.00055	
.0710	0.63771	0.41268	0.26483	0.14297	0.03160	.0710
DIF	.00160	.00085	.00066	.00057	.00055	
.0715	0.63612	0.41182	0.26417	0.14240	0.03105	.0715
DIF	.00159	.00085	.00065	.00057	.00055	
.0720	0.63453	0.41097	0.26352	0.14182	0.03051	.0720
DIF	.00158	.00085	.00065	.00057	.00055	
.0725	0.63295	0.41012	0.26287	0.14125	0.02996	.0725
DIF	.00157	.00085	.00065	.00057	.00055	
.0730	0.63138	0.40927	0.26221	0.14068	0.02942	.0730
DIF	.00156	.00085	.00065	.00057	.00055	
.0735	0.62982	0.40842	0.26156	0.14010	0.02887	.0735
DIF	.00155	.00085	.00065	.00057	.00055	
.0740	0.62826	0.40757	0.26091	0.13953	0.02832	.0740
DIF	.00155	.00084	.00065	.00057	.00055	
.0745	0.62672	0.40673	0.26025	0.13896	0.02778	.0745
DIF	.00154	.00084	.00065	.00057	.00055	
.0750	0.62518	0.40589	0.25960	0.13838	0.02723	.0750

DISTRIBUTION GAUSSO-LOGARITHMIQUE

	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	
.0750	0.62518	0.40589	0.25960	0.13838	0.02723	.0750
DIF	.00153	.00084	.00065	.00057	.00055	
.0755	0.62365	0.40505	0.25895	0.13781	0.02669	.0755
DIF	.00152	.00084	.00065	.00057	.00055	
.0760	0.62213	0.40421	0.25830	0.13724	0.02614	.0760
DIF	.00151	.00084	.00065	.00057	.00055	
.0765	0.62061	0.40337	0.25765	0.13667	0.02560	.0765
DIF	.00151	.00084	.00065	.00057	.00055	
.0770	0.61911	0.40253	0.25701	0.13609	0.02505	.0770
DIF	.00150	.00084	.00065	.00057	.00055	
.0775	0.61761	0.40169	0.25636	0.13552	0.02451	.0775
DIF	.00149	.00083	.00065	.00057	.00055	
.0780	0.61611	0.40086	0.25571	0.13495	0.02396	.0780
DIF	.00149	.00083	.00065	.00057	.00055	
.0785	0.61463	0.40003	0.25506	0.13438	0.02342	.0785
DIF	.00148	.00083	.00065	.00057	.00055	
.0790	0.61315	0.39920	0.25442	0.13381	0.02287	.0790
DIF	.00147	.00083	.00065	.00057	.00055	
.0795	0.61168	0.39837	0.25377	0.13324	0.02233	.0795
DIF	.00146	.00083	.00065	.00057	.00055	
.0800	0.61021	0.39754	0.25312	0.13267	0.02178	.0800
DIF	.00146	.00083	.00064	.00057	.00054	
.0805	0.60876	0.39671	0.25248	0.13210	0.02124	.0805
DIF	.00145	.00083	.00064	.00057	.00054	
.0810	0.60731	0.39589	0.25184	0.13153	0.02069	.0810
DIF	.00144	.00082	.00064	.00057	.00054	
.0815	0.60586	0.39506	0.25119	0.13096	0.02015	.0815
DIF	.00144	.00082	.00064	.00057	.00054	
.0820	0.60443	0.39424	0.25055	0.13039	0.01960	.0820
DIF	.00143	.00082	.00064	.00057	.00054	
.0825	0.60300	0.39342	0.24991	0.12982	0.01906	.0825
DIF	.00142	.00082	.00064	.00057	.00054	
.0830	0.60157	0.39260	0.24926	0.12925	0.01851	.0830
DIF	.00142	.00082	.00064	.00057	.00054	
.0835	0.60015	0.39178	0.24862	0.12868	0.01797	.0835
DIF	.00141	.00082	.00064	.00057	.00054	
.0840	0.59874	0.39096	0.24798	0.12811	0.01742	.0840
DIF	.00140	.00082	.00064	.00057	.00054	
.0845	0.59734	0.39015	0.24734	0.12754	0.01688	.0845
DIF	.00140	.00081	.00064	.00057	.00054	
.0850	0.59594	0.38933	0.24670	0.12698	0.01633	.0850
DIF	.00139	.00081	.00064	.00057	.00054	
.0855	0.59455	0.38852	0.24606	0.12641	0.01579	.0855
DIF	.00139	.00081	.00064	.00057	.00054	
.0860	0.59316	0.38771	0.24542	0.12584	0.01524	.0860
DIF	.00138	.00081	.00064	.00057	.00054	
.0865	0.59178	0.38690	0.24479	0.12527	0.01470	.0865
DIF	.00137	.00081	.00064	.00057	.00054	
.0870	0.59041	0.38609	0.24415	0.12471	0.01415	.0870
DIF	.00137	.00081	.00064	.00057	.00054	
.0875	0.58904	0.38528	0.24351	0.12414	0.01361	.0875

DISTRIBUTION GAUSSO-LOGARITHMIQUE

	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	
.0875	0.58904	0.38528	0.24351	0.12414	0.01361	.0875
DIF	.00136	.00081	.00064	.00057	.00054	
.0880	0.58768	0.38448	0.24287	0.12357	0.01307	.0880
DIF	.00136	.00080	.00064	.00057	.00054	
.0885	0.58632	0.38367	0.24224	0.12301	0.01252	.0885
DIF	.00135	.00080	.00064	.00057	.00054	
.0890	0.58497	0.38287	0.24160	0.12244	0.01198	.0890
DIF	.00135	.00080	.00064	.00057	.00054	
.0895	0.58362	0.38207	0.24097	0.12187	0.01143	.0895
DIF	.00134	.00080	.00063	.00057	.00054	
.0900	0.58228	0.38127	0.24033	0.12131	0.01089	.0900
DIF	.00133	.00080	.00063	.00057	.00054	
.0905	0.58095	0.38047	0.23970	0.12074	0.01034	.0905
DIF	.00133	.00080	.00063	.00057	.00054	
.0910	0.57962	0.37967	0.23906	0.12018	0.00980	.0910
DIF	.00132	.00080	.00063	.00057	.00054	
.0915	0.57830	0.37887	0.23843	0.11961	0.00925	.0915
DIF	.00132	.00080	.00063	.00057	.00054	
.0920	0.57698	0.37807	0.23780	0.11904	0.00871	.0920
DIF	.00131	.00079	.00063	.00057	.00054	
.0925	0.57566	0.37728	0.23717	0.11848	0.00817	.0925
DIF	.00131	.00079	.00063	.00056	.00054	
.0930	0.57436	0.37649	0.23653	0.11791	0.00762	.0930
DIF	.00130	.00079	.00063	.00056	.00054	
.0935	0.57305	0.37570	0.23590	0.11735	0.00708	.0935
DIF	.00130	.00079	.00063	.00056	.00054	
.0940	0.57176	0.37490	0.23527	0.11679	0.00653	.0940
DIF	.00129	.00079	.00063	.00056	.00054	
.0945	0.57046	0.37412	0.23464	0.11622	0.00599	.0945
DIF	.00129	.00079	.00063	.00056	.00054	
.0950	0.56918	0.37333	0.23401	0.11566	0.00544	.0950
DIF	.00128	.00079	.00063	.00056	.00054	
.0955	0.56790	0.37254	0.23338	0.11509	0.00490	.0955
DIF	.00128	.00079	.00063	.00056	.00054	
.0960	0.56662	0.37175	0.23276	0.11453	0.00435	.0960
DIF	.00127	.00078	.00063	.00056	.00054	
.0965	0.56535	0.37097	0.23213	0.11397	0.00381	.0965
DIF	.00127	.00078	.00063	.00056	.00054	
.0970	0.56408	0.37019	0.23150	0.11340	0.00327	.0970
DIF	.00126	.00078	.00063	.00056	.00054	
.0975	0.56281	0.36940	0.23087	0.11284	0.00272	.0975
DIF	.00126	.00078	.00063	.00056	.00054	
.0980	0.56156	0.36862	0.23025	0.11228	0.00218	.0980
DIF	.00125	.00078	.00063	.00056	.00054	
.0985	0.56030	0.36784	0.22962	0.11171	0.00163	.0985
DIF	.00125	.00078	.00063	.00056	.00054	
.0990	0.55905	0.36707	0.22899	0.11115	0.00109	.0990
DIF	.00124	.00078	.00063	.00056	.00054	
.0995	0.55781	0.36629	0.22837	0.11059	0.00054	.0995
DIF	.00124	.00078	.00062	.00056	.00054	
.1000	0.55657	0.36551	0.22774	0.11003	0.00000	.1000

TABLE C

Colonne 1 valeurs de σ de 0 à 1,50 par incréments de 0,01.
Colonne 2 valeurs de γ_1.
Colonne 3 valeurs de $A = e\sigma^{2/2}$.
Colonne 4 valeurs de $A\sqrt{A^2 - 1}$.
Colonne 5 valeurs de A^2.
Colonne 6 valeurs de A^3.
Les différences sont calculées de façon à faciliter les interpolations.

DISTRIBUTION GAUSSO-LOGARITHMIQUE

SIGMA	2	3	4	5	6
0.0	0.0	1.00000	0.0	1.00000	1.00000
DIF	.02988	.00005	.00996	.00010	.00015
0.01	0.02988	1.00005	0.00996	1.00010	1.00015
DIF	.03017	.00015	.01006	.00030	.00045
0.02	0.06005	1.00020	0.02002	1.00040	1.00060
DIF	.02999	.00025	.01000	.00050	.00075
0.03	0.09004	1.00045	0.03002	1.00090	1.00135
DIF	.03003	.00035	.01002	.00070	.00105
0.04	0.12007	1.00080	0.04004	1.00160	1.00240
DIF	.03015	.00045	.01006	.00090	.00136
0.05	0.15023	1.00125	0.05010	1.00250	1.00376
DIF	.03014	.00055	.01006	.00110	.00166
0.06	0.18036	1.00180	0.06016	1.00361	1.00541
DIF	.03023	.00065	.01010	.00131	.00196
0.07	0.21059	1.00245	0.07025	1.00491	1.00738
DIF	.03030	.00075	.01013	.00151	.00227
0.08	0.24089	1.00321	0.08038	1.00642	1.00965
DIF	.03037	.00085	.01016	.00171	.00258
0.09	0.27127	1.00406	0.09054	1.00813	1.01222
DIF	.03049	.00095	.01021	.00192	.00289
0.10	0.30175	1.00501	0.10075	1.01005	1.01511
DIF	.03058	.00106	.01025	.00212	.00320
0.11	0.33233	1.00607	0.11100	1.01217	1.01831
DIF	.03071	.00116	.01030	.00233	.00352
0.12	0.36304	1.00723	0.12130	1.01450	1.02183
DIF	.03083	.00126	.01036	.00254	.00384
0.13	0.39387	1.00849	0.13166	1.01704	1.02567
DIF	.03098	.00136	.01042	.00275	.00416
0.14	0.42485	1.00985	0.14208	1.01979	1.02984
DIF	.03112	.00146	.01048	.00296	.00449
0.15	0.45597	1.01131	0.15255	1.02275	1.03432
DIF	.03129	.00157	.01055	.00318	.00482
0.16	0.48726	1.01288	0.16310	1.02593	1.03915
DIF	.03146	.00167	.01062	.00339	.00516
0.17	0.51873	1.01455	0.17373	1.02932	1.04430
DIF	.03164	.00178	.01070	.00361	.00550
0.18	0.55037	1.01633	0.18443	1.03293	1.04980
DIF	.03186	.00188	.01079	.00383	.00585
0.19	0.58223	1.01821	0.19522	1.03676	1.05564
DIF	.03206	.00199	.01088	.00405	.00619
0.20	0.61429	1.02020	0.20610	1.04081	1.06184
DIF	.03229	.00209	.01097	.00428	.00655
0.21	0.64658	1.02229	0.21707	1.04509	1.06839
DIF	.03252	.00220	.01107	.00450	.00691
0.22	0.67911	1.02450	0.22814	1.04959	1.07530
DIF	.03278	.00231	.01118	.00473	.00728
0.23	0.71189	1.02680	0.23932	1.05432	1.08258
DIF	.03304	.00242	.01129	.00497	.00766
0.24	0.74493	1.02922	0.25061	1.05929	1.09024
DIF	.03331	.00252	.01140	.00520	.00804
0.25	0.77824	1.03174	0.26202	1.06449	1.09828

DISTRIBUTION GAUSSO-LOGARITHMIQUE

	2	3	4	5	6
SIGMA					
0.25	0.77824	1.03174	0.26202	1.06449	1.09828
DIF	.03362	.00264	.01153	.00544	.00844
0.26	0.81187	1.03438	0.27355	1.06994	1.10672
DIF	.03392	.00274	.01166	.00569	.00883
0.27	0.84579	1.03712	0.28521	1.07562	1.11555
DIF	.03423	.00286	.01179	.00593	.00924
0.28	0.88002	1.03998	0.29699	1.08155	1.12479
DIF	.03459	.00297	.01193	.00618	.00966
0.29	0.91461	1.04295	0.30893	1.08774	1.13445
DIF	.03493	.00308	.01208	.00644	.01008
0.30	0.94954	1.04603	0.32100	1.09417	1.14454
DIF	.03529	.00319	.01223	.00669	.01052
0.31	0.98483	1.04922	0.33323	1.10087	1.15506
DIF	.03568	.00331	.01239	.00696	.01097
0.32	1.02051	1.05253	0.34562	1.10783	1.16602
DIF	.03609	.00343	.01255	.00723	.01143
0.33	1.05660	1.05596	0.35817	1.11505	1.17745
DIF	.03650	.00354	.01272	.00749	.01189
0.34	1.09309	1.05950	0.37089	1.12255	1.18934
DIF	.03694	.00366	.01290	.00777	.01238
0.35	1.13003	1.06316	0.38380	1.13032	1.20171
DIF	.03740	.00378	.01309	.00805	.01287
0.36	1.16743	1.06695	0.39689	1.13837	1.21458
DIF	.03786	.00390	.01328	.00834	.01337
0.37	1.20529	1.07085	0.41017	1.14671	1.22796
DIF	.03835	.00402	.01348	.00863	.01389
0.38	1.24364	1.07487	0.42365	1.15534	1.24185
DIF	.03887	.00415	.01369	.00893	.01443
0.39	1.28251	1.07902	0.43734	1.16428	1.25627
DIF	.03940	.00427	.01390	.00923	.01498
0.40	1.32191	1.08329	0.45124	1.17351	1.27125
DIF	.03995	.00440	.01413	.00954	.01554
0.41	1.36187	1.08768	0.46536	1.18305	1.28679
DIF	.04053	.00452	.01436	.00986	.01612
0.42	1.40240	1.09221	0.47972	1.19292	1.30291
DIF	.04112	.00465	.01459	.01018	.01672
0.43	1.44352	1.09686	0.49431	1.20310	1.31963
DIF	.04175	.00478	.01484	.01051	.01733
0.44	1.48526	1.10164	0.50916	1.21361	1.33696
DIF	.04239	.00491	.01510	.01085	.01797
0.45	1.52766	1.10655	0.52425	1.22446	1.35493
DIF	.04306	.00505	.01536	.01119	.01862
0.46	1.57072	1.11160	0.53962	1.23565	1.37355
DIF	.04375	.00518	.01564	.01154	.01929
0.47	1.61447	1.11678	0.55525	1.24720	1.39285
DIF	.04448	.00532	.01592	.01191	.01999
0.48	1.65896	1.12210	0.57117	1.25910	1.41284
DIF	.04522	.00546	.01621	.01227	.02071
0.49	1.70418	1.12755	0.58738	1.27138	1.43354
DIF	.04600	.00560	.01651	.01265	.02145
0.50	1.75019	1.13315	0.60390	1.28402	1.45499

DISTRIBUTION GAUSSO-LOGARITHMIQUE

	2	3	4	5	6
SIGMA					
0.50	1.75019	1.13315	0.60390	1.28402	1.45499
DIF	.04682	.00574	.01683	.01304	.02221
0.51	1.79700	1.13889	0.62073	1.29706	1.47720
DIF	.04765	.00588	.01715	.01343	.02300
0.52	1.84465	1.14477	0.63788	1.31049	1.50020
DIF	.04852	.00603	.01748	.01383	.02381
0.53	1.89317	1.15079	0.65536	1.32432	1.52402
DIF	.04942	.00617	.01783	.01425	.02466
0.54	1.94259	1.15696	0.67320	1.33857	1.54867
DIF	.05036	.00632	.01819	.01467	.02553
0.55	1.99295	1.16329	0.69138	1.35324	1.57420
DIF	.05133	.00647	.01856	.01511	.02643
0.56	2.04428	1.16976	0.70994	1.36834	1.60063
DIF	.05234	.00663	.01894	.01555	.02736
0.57	2.09663	1.17639	0.72888	1.38389	1.62800
DIF	.05338	.00678	.01933	.01601	.02833
0.58	2.15001	1.18317	0.74821	1.39990	1.65632
DIF	.05447	.00694	.01974	.01647	.02933
0.59	2.20448	1.19011	0.76795	1.41637	1.68565
DIF	.05560	.00710	.02015	.01695	.03036
0.60	2.26008	1.19722	0.78810	1.43333	1.71600
DIF	.05677	.00727	.02059	.01745	.03143
0.61	2.31685	1.20448	0.80869	1.45078	1.74743
DIF	.05799	.00743	.02104	.01796	.03254
0.62	2.37484	1.21191	0.82972	1.46873	1.77998
DIF	.05924	.00760	.02150	.01847	.03369
0.63	2.43408	1.21951	0.85122	1.48721	1.81366
DIF	.06055	.00777	.02197	.01901	.03488
0.64	2.49463	1.22728	0.87319	1.50622	1.84855
DIF	.06191	.00794	.02246	.01956	.03612
0.65	2.55654	1.23522	0.89566	1.52577	1.88466
DIF	.06332	.00812	.02297	.02012	.03740
0.66	2.61986	1.24334	0.91863	1.54589	1.92206
DIF	.06478	.00830	.02350	.02070	.03873
0.67	2.68464	1.25163	0.94213	1.56659	1.96079
DIF	.06631	.00848	.02404	.02129	.04011
0.68	2.75094	1.26011	0.96617	1.58788	2.00090
DIF	.06789	.00866	.02460	.02191	.04155
0.69	2.81884	1.26877	0.99077	1.60979	2.04245
DIF	.06952	.00885	.02517	.02253	.04303
0.70	2.88835	1.27762	1.01594	1.63232	2.08548
DIF	.07123	.00904	.02577	.02318	.04458
0.71	2.95958	1.28666	1.04171	1.65549	2.13006
DIF	.07300	.00923	.02639	.02384	.04618
0.72	3.03258	1.29589	1.06810	1.67934	2.17624
DIF	.07484	.00943	.02702	.02453	.04785
0.73	3.10742	1.30532	1.09512	1.70387	2.22410
DIF	.07675	.00963	.02768	.02523	.04959
0.74	3.18417	1.31495	1.12280	1.72910	2.27368
DIF	.07874	.00983	.02836	.02596	.05139
0.75	3.26291	1.32479	1.15116	1.75506	2.32507

DISTRIBUTION GAUSSO-LOGARITHMIQUE

	2	3	4	5	6
SIGMA					
0.75	3.26291	1.32479	1.15116	1.75506	2.32507
DIF	.08080	.01004	.02905	.02670	.05326
0.76	3.34371	1.33482	1.18021	1.78176	2.37833
DIF	.08296	.01025	.02978	.02747	.05522
0.77	3.42667	1.34508	1.20999	1.80923	2.43355
DIF	.08519	.01046	.03052	.02826	.05724
0.78	3.51186	1.35554	1.24051	1.83749	2.49079
DIF	.08751	.01068	.03130	.02908	.05935
0.79	3.59937	1.36622	1.27181	1.86657	2.55015
DIF	.08992	.01090	.03209	.02991	.06155
0.80	3.68929	1.37713	1.30390	1.89648	2.61169
DIF	.09244	.01113	.03291	.03078	.06384
0.81	3.78173	1.38826	1.33681	1.92726	2.67553
DIF	.09506	.01136	.03376	.03167	.06623
0.82	3.87679	1.39962	1.37058	1.95893	2.74176
DIF	.09778	.01159	.03464	.03259	.06871
0.83	3.97457	1.41121	1.40522	1.99152	2.81047
DIF	.10061	.01183	.03555	.03354	.07129
0.84	4.07518	1.42305	1.44077	2.02506	2.88175
DIF	.10357	.01208	.03649	.03452	.07399
0.85	4.17875	1.43512	1.47725	2.05958	2.95574
DIF	.10664	.01232	.03745	.03552	.07679
0.86	4.28539	1.44744	1.51471	2.09510	3.03254
DIF	.10984	.01258	.03846	.03656	.07973
0.87	4.39523	1.46002	1.55316	2.13166	3.11226
DIF	.11317	.01283	.03949	.03763	.08277
0.88	4.50841	1.47285	1.59265	2.16929	3.19504
DIF	.11665	.01309	.04056	.03874	.08597
0.89	4.62506	1.48594	1.63321	2.20803	3.28101
DIF	.12027	.01336	.04166	.03988	.08929
0.90	4.74533	1.49930	1.67487	2.24791	3.37030
DIF	.12405	.01363	.04280	.04106	.09275
0.91	4.86938	1.51293	1.71767	2.28897	3.46305
DIF	.12797	.01391	.04398	.04227	.09638
0.92	4.99735	1.52684	1.76165	2.33124	3.55943
DIF	.13208	.01419	.04521	.04353	.10016
0.93	5.12943	1.54103	1.80686	2.37477	3.65958
DIF	.13637	.01448	.04647	.04483	.10411
0.94	5.26580	1.55550	1.85333	2.41959	3.76369
DIF	.14082	.01477	.04777	.04616	.10822
0.95	5.40662	1.57027	1.90111	2.46576	3.87191
DIF	.14549	.01507	.04913	.04755	.11253
0.96	5.55211	1.58534	1.95023	2.51331	3.98445
DIF	.15036	.01537	.05053	.04898	.11704
0.97	5.70247	1.60071	2.00076	2.56229	4.10149
DIF	.15542	.01568	.05197	.05045	.12174
0.98	5.85789	1.61640	2.05272	2.61274	4.22323
DIF	.16072	.01600	.05346	.05198	.12666
0.99	6.01862	1.63240	2.10619	2.66472	4.34988
DIF	.16626	.01632	.05501	.05356	.13181
1.00	6.18488	1.64872	2.16120	2.71828	4.48169

DISTRIBUTION GAUSSO-LOGARITHMIQUE

SIGMA	2	3	4	5	6
1.00	6.18488	1.64872	2.16120	2.71828	4.48169
DIF	.17202	.01665	.05660	.05518	.13716
1.01	6.35690	1.66537	2.21780	2.77347	4.61885
DIF	.17808	.01699	.05827	.05688	.14281
1.02	6.53498	1.68236	2.27607	2.83034	4.76166
DIF	.18440	.01733	.05998	.05862	.14870
1.03	6.71937	1.69970	2.33605	2.88896	4.91036
DIF	.19100	.01768	.06176	.06043	.15487
1.04	6.91037	1.71738	2.39782	2.94939	5.06523
DIF	.19788	.01804	.06359	.06229	.16130
1.05	7.10825	1.73542	2.46141	3.01168	5.22653
DIF	.20510	.01841	.06550	.06422	.16807
1.06	7.31335	1.75383	2.52691	3.07590	5.39459
DIF	.21265	.01878	.06747	.06622	.17514
1.07	7.52600	1.77260	2.59438	3.14212	5.56973
DIF	.22055	.01916	.06951	.06829	.18256
1.08	7.74656	1.79176	2.66389	3.21041	5.75229
DIF	.22879	.01955	.07162	.07042	.19031
1.09	7.97535	1.81131	2.73552	3.28084	5.94260
DIF	.23744	.01994	.07381	.07264	.19845
1.10	8.21279	1.83125	2.80933	3.35348	6.14105
DIF	.24652	.02035	.07609	.07494	.20700
1.11	8.45931	1.85160	2.88542	3.42842	6.34805
DIF	.25599	.02076	.07844	.07732	.21594
1.12	8.71530	1.87236	2.96385	3.50573	6.56399
DIF	.26589	.02118	.08086	.07977	.22529
1.13	8.98119	1.89354	3.04472	3.58550	6.78929
DIF	.27632	.02161	.08340	.08232	.23516
1.14	9.25751	1.91516	3.12811	3.66782	7.02444
DIF	.28723	.02206	.08602	.08497	.24549
1.15	9.54475	1.93721	3.21413	3.75279	7.26994
DIF	.29866	.02250	.08873	.08770	.25632
1.16	9.84340	1.95972	3.30285	3.84049	7.52626
DIF	.31061	.02296	.09153	.09053	.26767
1.17	10.15401	1.98268	3.39438	3.93101	7.79393
DIF	.32321	.02343	.09446	.09348	.27964
1.18	10.47723	2.00611	3.48884	4.02449	8.07358
DIF	.33638	.02391	.09748	.09652	.29218
1.19	10.81361	2.03003	3.58632	4.12101	8.36576
DIF	.35022	.02440	.10062	.09968	.30536
1.20	11.16382	2.05443	3.68694	4.22069	8.67112
DIF	.36470	.02490	.10386	.10295	.31918
1.21	11.52853	2.07934	3.79081	4.32364	8.99030
DIF	.37996	.02542	.10725	.10635	.33375
1.22	11.90849	2.10475	3.89805	4.42999	9.32404
DIF	.39598	.02594	.11076	.10988	.34905
1.23	12.30447	2.13070	4.00881	4.53987	9.67309
DIF	.41277	.02648	.11439	.11353	.36512
1.24	12.71724	2.15718	4.12320	4.65340	10.03821
DIF	.43043	.02703	.11817	.11733	.38204
1.25	13.14767	2.18420	4.24137	4.77073	10.42024

DISTRIBUTION GAUSSO-LOGARITHMIQUE

SIGMA	2	3	4	5	6
1.25	13.14767	2.18420	4.24137	4.77073	10.42024
DIF	.44890	.02758	.12206	.12125	.39975
1.26	13.59657	2.21178	4.36343	4.89198	10.82000
DIF	.46845	.02815	.12614	.12535	.41852
1.27	14.06503	2.23994	4.48957	5.01733	11.23851
DIF	.48897	.02874	.13037	.12959	.43823
1.28	14.55399	2.26868	4.61995	5.14692	11.67674
DIF	.51049	.02934	.13475	.13399	.45893
1.29	15.06448	2.29802	4.75470	5.28091	12.13567
DIF	.53311	.02995	.13929	.13855	.48072
1.30	15.59760	2.32798	4.89399	5.41947	12.61639
DIF	.55699	.03058	.14404	.14331	.50374
1.31	16.15459	2.35855	5.03803	5.56278	13.12012
DIF	.58211	.03122	.14895	.14824	.52794
1.32	16.73669	2.38978	5.18698	5.71103	13.64807
DIF	.60851	.03188	.15406	.15337	.55344
1.33	17.34520	2.42165	5.34104	5.86439	14.20151
DIF	.63626	.03254	.15935	.15868	.58027
1.34	17.98146	2.45419	5.50039	6.02307	14.78178
DIF	.66562	.03323	.16489	.16423	.60867
1.35	18.64708	2.48743	5.66528	6.18730	15.39045
DIF	.69646	.03393	.17061	.16997	.63851
1.36	19.34354	2.52136	5.83589	6.35727	16.02896
DIF	.72894	.03465	.17657	.17595	.67001
1.37	20.07248	2.55602	6.01246	6.53321	16.69897
DIF	.76315	.03539	.18276	.18215	.70320
1.38	20.83563	2.59140	6.19521	6.71536	17.40218
DIF	.79932	.03614	.18921	.18862	.73830
1.39	21.63495	2.62754	6.38443	6.90397	18.14047
DIF	.83742	.03691	.19592	.19534	.77530
1.40	22.47237	2.66445	6.58034	7.09931	18.91577
DIF	.87761	.03770	.20290	.20233	.81439
1.41	23.34998	2.70216	6.78324	7.30164	19.73016
DIF	.91986	.03850	.21012	.20957	.85551
1.42	24.26984	2.74066	6.99336	7.51122	20.58568
DIF	.96463	.03933	.21768	.21715	.89911
1.43	25.23447	2.77999	7.21105	7.72836	21.48479
DIF	******	.04018	.22554	.22502	.94510
1.44	26.24631	2.82017	7.43659	7.95338	22.42989
DIF	******	.04105	.23374	.23323	.99382
1.45	27.30807	2.86122	7.67032	8.18660	23.42371
DIF	******	.04193	.24220	.24170	******
1.46	28.42224	2.90315	7.91252	8.42830	24.46866
DIF	******	.04284	.25109	.25061	******
1.47	29.59216	2.94600	8.16361	8.67891	25.56805
DIF	******	.04378	.26032	.25985	******
1.48	30.82085	2.98978	8.42394	8.93876	26.72490
DIF	******	.04473	.26993	.26947	******
1.49	32.11160	3.03451	8.69387	9.20824	27.94246
DIF	******	.04571	.27994	.27950	******
1.50	33.46802	3.08022	8.97381	9.48773	29.22426

LISTE D

SOUS-PROGRAMMES EN FORTRAN

```
      FUNCTION FLOGN(X,SI,S,XO)                                          F   1

      FLOGN=.5+.5*DERF(DLOG((X-XO)/S*1.D0)/SI/1.41421356237731)          F   2
      RETURN                                                             F   3
      END                                                                F   4


      FUNCTION VLOGN(F,SI,S,XO)                                          V   1

      U=0.                                                               V   2
    1 P=ERF(U)-2.*F+1.                                                   V   3
      U=U-P*EXP(U*U)*.886226925                                          V   4
      IF(AINT(P*1.E6)*SIGN(1.,U).LT.0.)GO TO 1                           V   5
      VLOGN=XO+S*EXP(SI*U*1.4142136)                                     V   6
      RETURN                                                             V   7
      END                                                                V   8


      SUBROUTINE PLOGN(X,SI,S,XO,XM,N,XI)                                P   1

      REAL*8 SM(4),A,C,X*4(N),B*4(2)                                     P   2
      XO=XI                                                              P   3
      B(2)=X(1)                                                          P   4
      XM=X(1)/N                                                          P   5
      DO 1 I=2,N                                                         P   6
      B(2)=AMIN1(X(I),B(2))                                              P   7
    1 XM=XM+X(I)/N                                                       P   8
      SQ=-1.                                                             P   9
    2 B((3+IFIX(SIGN(1.,SQ)))/2)=XO                                      P  10
      XO=(1.+B(1)+B(2)-1.)/2.                                            P  11
      IF((B(1)-XO)*(B(2)-XO).GE.0.)GO TO 5                               P  12
      DO 3 I=1,4                                                         P  13
    3 SM(I)=0.D0                                                         P  14
      DO 4 I=1,N                                                         P  15
      A=1.D0/(X(I)-XO)                                                   P  16
      C=-DLOG(A)                                                         P  17
      SM(1)=SM(1)+A/N                                                    P  18
      SM(2)=SM(2)+C/N                                                    P  19
      SM(3)=SM(3)+C*C/N                                                  P  20
    4 SM(4)=SM(4)+A*C/N                                                  P  21
      SI=SM(2)-SM(4)/SM(1)                                               P  22
      SQ=SI/(SM(3)-SM(2)*SM(2))-1.                                       P  23
      IF(AINT(SQ*1.E5).NE.0.)GO TO 2                                     P  24
    5 S=DEXP(SM(2))                                                      P  25
      SI=SQRT(SI)                                                        P  26
      RETURN                                                             P  27
      END                                                                P  28
```

```
      SUBROUTINE CLOGN(SI,S,XO,N,XI,F,XF,CO,BC,Y)                       C   1

      DIMENSION BC(2),B(11,2),Y(N)                                      C   2
      IX=5+IABS((INT(S/(XF-XO)/F+(XF-XO)/(1.-F)/S)*819+IX)              C   3
      M=19.001/(1.-CO)                                                  C   4
      DO 1 K=1,2                                                        C   5
      DO 1 L=1,10                                                       C   6
    1 B(L,K)=(1.5-K)*10.E70                                             C   7
      DO 5 J=1,M                                                        C   8
      DO 2 I=1,N                                                        C   9
      IX=IX*65539                                                       C  10
      IF(IX.LT.0)IX=IX+2147483647+1                                     C  11
    2 Y(I)=VLOGN(SNGL(DFLOAT(IX)/2147483653.D0),SI,S,XO)                C  12
      CALL PLOGN(Y,SY,SA,XA,XU,N,XI)                                    C  13
      A=VLOGN(F,SY,SA,XA)                                               C  14
      K=1.6+SIGN(.5,A-XF)                                               C  15
      DO 4 L=1,10                                                       C  16
      IF(A*(1.5-K).GT.(1.5-K)*B(L,K))GO TO 4                            C  17
      DO 3 I=L,10                                                       C  18
    3 B(11+L-I,K)=B(10+L-I,K)                                           C  19
      B(L,K)=A                                                          C  20
      GO TO 5                                                           C  21
    4 CONTINUE                                                          C  22
    5 BC(K)=B(10,K)                                                     C  23
      RETURN                                                            C  24
      END                                                               C  25
```

```
      SUBROUTINE PLOGNP(X,SI,S,XO,XM,N)                                 PP  1

      REAL*4 X(N)                                                       PP  2
      XM=0.                                                             PP  3
      S=1.                                                              PP  4
      SM=0.                                                             PP  5
      DO 1 I=1,N                                                        PP  6
      XM=XM+X(I)/N                                                      PP  7
      S=S*(X(I)-XO)**(1./N)                                             PP  8
    1 SM=SM+ALOG(X(I)-XO)*ALOG(X(I)-XO)/N                               PP  9
      SI=SQRT(SM-ALOG(S)*ALOG(S))                                       PP 10
      RETURN                                                            PP 11
      END                                                               PP 12
```

```
      SUBROUTINE CLOGNP(SI,S,XO,N,F,XF,CO,BC,Y)                          CP  1

      DIMENSION BC(2),B(11,2),Y(N)                                       CP  2
      IX=5+IABS((INT(S/(XF-XO)/F+(XF-XO)/(1.-F)/S)*819+IX)*8)            CP  3
      M=19.001/(1.-CO)                                                   CP  4
      DO 1 K=1,2                                                         CP  5
      DO 1 L=1,10                                                        CP  6
    1 B(L,K)=(1.5-K)*10.E70                                              CP  7
      DO 5 J=1,M                                                         CP  8
      DO 2 I=1,N                                                         CP  9
      IX=IX*65539                                                        CP 10
      IF(IX.LT.0)IX=IX+2147483647+1                                      CP 11
    2 Y(I)=VLOGN(SNGL(DFLOAT(IX)/2147483653.D0),SI,S,XO)                 CP 12
      CALL PLOGNP(Y,SY,SA,XO,XU,N)                                       CP 13
      A=VLOGN(F,SY,SA,XO)                                                CP 14
      K=1.6+SIGN(.5,A-XF)                                                CP 15
      DO 4 L=1,10                                                        CP 16
      IF(A*(1.5-K).GT.(1.5-K)*B(L,K))GO TO 4                             CP 17
      DO 3 I=L,10                                                        CP 18
    3 B(11+L-I,K)=B(10+L-I,K)                                            CP 19
      B(L,K)=A                                                           CP 20
      GO TO 5                                                            CP 21
    4 CONTINUE                                                           CP 22
    5 BC(K)=B(10,K)                                                      CP 23
      RETURN                                                             CP 24
      END                                                                CP 25
```

```
      SUBROUTINE PLOGNF(X,SI,S,XO,XM,N,XI)                               PF  1

      REAL*8 SM(3),A,C,X*4(N),B*4(2)                                     PF  2
      XO=XI                                                              PF  3
      B(2)=X(1)                                                          PF  4
      XM=X(1)/N                                                          PF  5
      DO 1 I=2,N                                                         PF  6
      B(2)=AMIN1(X(I),B(2))                                              PF  7
    1 XM=XM+X(I)/N                                                       PF  8
      SP=-1.                                                             PF  9
    2 B((3+IFIX(SIGN(1.,SP)))/2)=XO                                      PF 10
      XO=(SI+B(1)+B(2)-SI)/2.                                            PF 11
      IF((B(1)-XO)*(B(2)-XO).GE.0.)GO TO 5                               PF 12
      DO 3 I=1,3                                                         PF 13
    3 SM(I)=0.D0                                                         PF 14
      DO 4 I=1,N                                                         PF 15
      A=DLOG((X(I)-XO)*1.D0)                                             PF 16
      SM(1)=SM(1)+1.D0/N/(X(I)-XO)                                       PF 17
      SM(2)=SM(2)+A/N                                                    PF 18
    4 SM(3)=SM(3)+A/N/(X(I)-XO)                                          PF 19
      SP=(SM(2)-SM(3)/SM(1))/SI/SI-1.                                    PF 20
      IF(AINT(SP*1.E5).NE.0.)GO TO 2                                     PF 21
    5 S=DEXP(SM(2))                                                      PF 22
      RETURN                                                             PF 23
      END                                                                PF 24
```

```
      SUBROUTINE CLOGNF(SI,S,XO,N,XI,F,XF,CO,BC,Y)                      CF  1

      DIMENSION BC(2),B(11,2),Y(N)                                      CF  2
      IX=5+IABS((INT(S/(XF-XO)/F+(XF-XO)/(1.-F)/S)*819+IX)*8)           CF  3
      M=19.001/(1.-CO)                                                  CF  4
      DO 1 K=1,2                                                        CF  5
      DO 1 L=1,10                                                       CF  6
    1 B(L,K)=(1.5-K)*10.E70                                             CF  7
      DO 5 J=1,M                                                        CF  8
      DO 2 I=1,N                                                        CF  9
      IX=IX*65539                                                       CF 10
      IF(IX.LT.0)IX=IX+2147483647+1                                     CF 11
    2 Y(I)=VLOGN(SNGL(DFLOAT(IX)/2147483653.D0),SI,S,XO)                CF 12
      CALL PLOGNF(Y,SI,SA,XA,XU,N,XI)                                   CF 13
      A=VLOGN(F,SI,SA,XA)                                               CF 14
      K=1.6+SIGN(.5,A-XF)                                               CF 15
      DO 4 L=1,10                                                       CF 16
      IF(A*(1.5-K).GT.(1.5-K)*B(L,K))GO TO 4                            CF 17
      DO 3 I=L,10                                                       CF 18
    3 B(11+L-I,K)=B(10+L-I,K)                                           CF 19
      B(L,K)=A                                                          CF 20
      GO TO 5                                                           CF 21
    4 CONTINUE                                                          CF 22
    5 BC(K)=B(10,K)                                                     CF 23
      RETURN                                                            CF 24
      END                                                               CF 25
```

```
      SUBROUTINE PLOGNS(X,SI,S,XO,XM,N)                                 PS  1

      REAL*4 X(N)                                                       PS  2
      XM=0.                                                             PS  3
      S=1.                                                              PS  4
      DO 1 I=1,N                                                        PS  5
      XM=XM+X(I)/N                                                      PS  6
    1 S=S*(X(I)-XO)**(1./N)                                             PS  7
      RETURN                                                            PS  8
      END                                                               PS  9
```

```
      SUBROUTINE CLOGNS(SI,S,XO,N,F,XF,CO,BC)                          CS  1

      DIMENSION BC(2),B(11,2)                                          CS  2
      IX=5+IABS((INT(S/(XF-XO)/F+(XF-XO)/(1.-F)/S)*819+IX)*8)          CS  3
      M=19.001/(1.-CO)                                                 CS  4
      DO 1 K=1,2                                                       CS  5
      DO 1 L=1,10                                                      CS  6
    1 B(L,K)=(1.5-K)*10.E70                                            CS  7
      DO 5 J=1,M                                                       CS  8
      SA=1.                                                            CS  9
      DO 2 I=1,N                                                       CS 10
      IX=IX*65539                                                      CS 11
      IF(IX.LT.0)IX=IX+2147483647+1                                    CS 12
    2 SA=SA*(VLOGN(SNGL(DFLOAT(IX)/2147483653.D0),SI,S,XO)-XO)**(1./N) CS 13
      A=VLOGN(F,SI,SA,XO)                                              CS 14
      K=1.6+SIGN(.5,A-XF)                                              CS 15
      DO 4 L=1,10                                                      CS 16
      IF(A*(1.5-K).GT.(1.5-K)*B(L,K))GO TO 4                           CS 17
      DO 3 I=L,10                                                      CS 18
    3 B(11+L-I,K)=B(10+L-I,K)                                          CS 19
      B(L,K)=A                                                         CS 20
      GO TO 5                                                          CS 21
    4 CONTINUE                                                         CS 22
    5 BC(K)=B(10,K)                                                    CS 23
      RETURN                                                           CS 24
      END                                                              CS 25
```

```
      SUBROUTINE PLOGNV(X,SI,S,XO,VN,N,XH)                             PV  1

      REAL*8 SL,SM,T,X*4(N),D*4(2)                                     PV  2
      SL=0.D0                                                          PV  3
      SM=0.D0                                                          PV  4
      DO 1 I=1,N                                                       PV  5
      T=DLOG((X(I)-XO)*1.D0)                                           PV  6
      SL=SL+T/N                                                        PV  7
    1 SM=SM+T*T/N                                                      PV  8
      UL=ALOG(XH-XO)                                                   PV  9
      SI=0.                                                            PV 10
      D(2)=2.                                                          PV 11
      SK=1.                                                            PV 12
    2 D((3-IFIX(SIGN(1.,SK)))/2)=SI                                    PV 13
      SI=(1.+D(1)+D(2)-1.)/2.                                          PV 14
      IF((D(2)-SI)*(SI-D(1)).LE.0.)GO TO 3                             PV 15
      SS=(SM-SL*UL-SI*SI)/(SL-UL)                                      PV 16
      S=EXP(SS)                                                        PV 17
      CC=(UL-SS)/SI*.7071068                                           PV 18
      PH=.5-.5*ERF(CC)                                                 PV 19
      SK=(SS+SI*EXP(-CC*CC)/PH/2.506628)/SL-1.                         PV 20
      IF(AINT(SK*1.E5).NE.0.)GO TO 2                                   PV 21
    3 VN=N/PH                                                          PV 22
      RETURN                                                           PV 23
      END                                                              PV 24
```

```
      SUBROUTINE CLOGNV(SI,S,XO,NV,XH,F,XF,CO,BC)                       CV  1

      DIMENSION BC(2),B(11,2),Y(500)                                    CV  2
      IX=5+IABS((INT(S/(XF-XO)/F+(XF-XO)/(1.-F)/S)*819+IX)*8)           CV  3
      M=19.001/(1.-CO)                                                  CV  4
      DO 1 K=1,2                                                        CV  5
      DO 1 L=1,10                                                       CV  6
    1 B(L,K)=(1.5-K)*10.E70                                             CV  7
      DO 5 J=1,M                                                        CV  8
      N=0                                                               CV  9
      DO 2 I=1,NV                                                       CV 10
      IX=IX*65539                                                       CV 11
      IF(IX.LT.0)IX=IX+2147483647+1                                     CV 12
      Y(N+1)=VLOGN(SNGL(DFLOAT(IX)/2147483653.D0),SI,S,XO)              CV 13
      IF(Y(N+1).LT.XH)N=N-1                                             CV 14
    2 N=N+1                                                             CV 15
      CALL PLOGNV(Y,SY,SA,XO,VY,N,XH)                                   CV 16
      A=VLOGN((1.-NV*(1.-F)/VY),SY,SA,XO)                               CV 17
      K=1.6+SIGN(.5,A-XF)                                               CV 18
      DO 4 L=1,10                                                       CV 19
      IF(A*(1.5-K).GT.(1.5-K)*B(L,K))GO TO 4                            CV 20
      DO 3 I=L,10                                                       CV 21
    3 B(11+L-I,K)=B(10+L-I,K)                                           CV 22
      B(L,K)=A                                                          CV 23
      GO TO 5                                                           CV 24
    4 CONTINUE                                                          CV 25
    5 BC(K)=B(10,K)                                                     CV 26
      RETURN                                                            CV 27
      END                                                               CV 28
```

```
      FUNCTION FLOGNT(X,SI,S,XO,FO)                                      FT  1

      FLOGNT=FO                                                          FT  2
      IF((X-XO)/S.LT.EXP(-SI*4.8))RETURN                                 FT  3
      FLOGNT=FO+(1.-FO)*(.5+.5*DERF(DLOG((X-XO)/S*1.D0)/SI/1.41421356))  FT  4
      RETURN                                                             FT  5
      END                                                                FT  6


      FUNCTION VLOGNT(F,SI,S,XO,FO)                                      VT  1

      VLOGNT=XO                                                          VT  2
      IF((F-FO)/(1.-FO).LT.1.E-7)RETURN                                  VT  3
      U=0.                                                               VT  4
    1 P=ERF(U)-2.*(F-FO)/(1.-FO)+1.                                      VT  5
      U=U-P*EXP(U*U)*.886226925                                          VT  6
      IF(AINT(P*1.E6)*SIGN(1.,U).LT.0.)GO TO 1                           VT  7
      VLOGNT=XO+S*EXP(SI*U*1.4142136)                                    VT  8
      RETURN                                                             VT  9
      END                                                                VT 10


      SUBROUTINE PLOGNT(X,SI,S,XO,FO,N,XH)                               PT  1

      REAL*8 TL,TM,T,X*4(N),D*4(2)                                       PT  2
      TL=0.D0                                                            PT  3
      TM=0.D0                                                            PT  4
      HN=0.                                                              PT  5
      DO 1 I=1,N                                                         PT  6
      IF(X(I).LT.XH)GO TO 1                                              PT  7
      HN=HN+1.                                                           PT  8
      T=DLOG((X(I)-XO)*1.D0)                                             PT  9
      TL=TL+T                                                            PT 10
      TM=TM+T*T                                                          PT 11
    1 CONTINUE                                                           PT 12
      SL=TL/HN                                                           PT 13
      SM=TM/HN                                                           PT 14
      UL=ALOG(XH-XO)                                                     PT 15
      SI=0.                                                              PT 16
      D(2)=2.                                                            PT 17
      SK=1.                                                              PT 18
    2 D((3-IFIX(SIGN(1.,SK)))/2)=SI                                      PT 19
      SI=(1.+D(1)+D(2)-1.)/2.                                            PT 20
      IF((D(2)-SI)*(SI-D(1)).LE.0.)GO TO 3                               PT 21
      SS=(SM-SL*UL-SI*SI)/(SL-UL)                                        PT 22
      S=EXP(SS)                                                          PT 23
      CC=(UL-SS)/SI*.7071068                                             PT 24
      PH=.5-.5*ERF(CC)                                                   PT 25
      SK=(SS+SI*EXP(-CC*CC)/PH/2.506628)/SL-1.                           PT 26
      IF(AINT(SK*1.E5).NE.0.)GO TO 2                                     PT 27
    3 FO=1.-HN/N/PH                                                      PT 28
      RETURN                                                             PT 29
      END                                                                PT 30
```

```
      SUBROUTINE CLOGNT(SI,S,XO,FO,N,XH,F,XF,CO,BC,Y)                    CT  1

      DIMENSION BC(2),B(11,2),Y(N)                                       CT  2
      IX=5+IABS((INT(S/(XF-XO)/F+(XF-XO)/(1.-F)/S)*819+IX)*8)            CT  3
      M=19.001/(1.-CO)                                                   CT  4
      DO 1 K=1,2                                                         CT  5
      DO 1 L=1,10                                                        CT  6
    1 B(L,K)=(1.5-K)*10.E70                                              CT  7
      DO 5 J=1,M                                                         CT  8
      DO 2 I=1,N                                                         CT  9
      IX=IX*65539                                                        CT 10
      IF(IX.LT.0)IX=IX+2147483647+1                                      CT 11
    2 Y(I)=VLOGNT(SNGL(DFLOAT(IX)/2147483653.D0),SI,S,XO,FO)             CT 12
      CALL PLOGNT(Y,SY,SA,XO,FA,N,XH)                                    CT 13
      A=VLOGNT(F,SY,SA,XO,FA)                                            CT 14
      K=1.6+SIGN(.5,A-XF)                                                CT 15
      DO 4 L=1,10                                                        CT 16
      IF(A*(1.5-K).GT.(1.5-K)*B(L,K))GO TO 4                             CT 17
      DO 3 I=L,10                                                        CT 18
    3 B(11+L-I,K)=B(10+L-I,K)                                            CT 19
      B(L,K)=A                                                           CT 20
      GO TO 5                                                            CT 21
    4 CONTINUE                                                           CT 22
    5 BC(K)=B(10,K)                                                      CT 23
      RETURN                                                             CT 24
      END                                                                CT 25
```