

Pour une théorie modifiée de l'infiltration

2^e partie : comment ?

Hubert J. MOREL-SEYTOUX

Chargé de Recherches au CNRS

Université Scientifique et Médicale de Grenoble
et

Professeur de Génie Civil

à l'Université d'État du Colorado, Fort-Collins (Colorado)

RÉSUMÉ.

On formule le problème de l'infiltration de l'eau dans le sol pour ce qu'il est, c'est-à-dire un problème d'écoulement simultané de deux fluides (essentiellement) immiscibles. On montre que dans le cas d'une imbibition telle que la compression d'air est a priori négligeable, la solution du problème biphasique est malgré tout plus simple que celle du problème traditionnel. Dans le cas d'une infiltration, à nouveau sans effet de compression d'air, on montre que même dans ce cas la théorie traditionnelle ne peut rendre compte du phénomène d'interaction visqueuse entre les deux fluides en mouvement. On conclut qu'il y a tout à gagner, non seulement pour la prise en compte correcte des phénomènes mais aussi pour l'efficacité du calcul, à utiliser systématiquement la formulation biphasique.

ABSTRACT.

The problem of infiltration is treated as a two-phase flow problem, which obviously it is. It is shown on a problem of imbibition without air compression effects that even then the two-phase solution is computationally simpler than the usual solution. It is also shown on a problem of infiltration, again without compression effects, that the customary solution fails to account properly for the phenomenon of viscous interaction between two moving fluids. On either ground of better modeling of the physical phenomena or of greater computational efficiency, the two-phase formulation is superior to the traditional one.

Dans le premier article d'une série sur la théorie de l'infiltration et d'une manière générale sur la théorie de l'écoulement en milieu poreux non saturé, on a passé en revue l'ensemble des résultats de laboratoire et de terrain, sur l'influence de l'air dans l'infiltration (MOREL-SEYTOUX, 1973). En conclusion de ce premier article il est dit clairement qu'une théorie réaliste de l'infiltration (ou du drainage) doit tenir compte des effets d'air. Dans le deuxième article on va s'attacher à montrer que la formulation plus complète et, donc, plus satisfaisante du problème, ne complique pas tellement sa solution mathématique. Bien au contraire, sous certaines hypothèses très légitimes, on va pouvoir obtenir une solution très simple à un problème jusque-là sans solution. Ce résultat, un peu surprenant, est d'autant plus probant qu'il est obtenu dans un cas où l'on sait a priori que l'effet d'air est pratiquement négligeable. Si la mise en œuvre de la méthode biphasique, déjà plus physique, est finalement plus simple, on se demande alors quelle raison on peut avancer pour ne pas l'utiliser systématiquement.

1. DÉFINITIONS DE BASE.

Avec les mêmes notations que dans le premier article, la loi de Darcy généralisée à l'écoulement non saturé, s'écrit pour le fluide :

$$v_i = -\frac{k_i}{\mu_i} \nabla p_i + \frac{k_i}{\mu_i} \rho_i g \quad (1)$$

Pour un système eau-air, la pression capillaire est par définition :

$$p_c = p_a - p_w \quad (2)$$

On appelle degré de saturation S_w , ou plus brièvement saturation, S , la fraction du volume des vides occupée par l'eau. Entre la saturation, la teneur en eau θ et la porosité ϕ , on a la relation :

$$S_w = \frac{\theta}{\phi} \quad (3)$$

On définit de même la saturation en air, S_a , et, par définition, on a toujours l'identité :

$$S + S_a = 1 \tag{4}$$

On appelle perméabilité relative au fluide i le rapport de la perméabilité effective sur la perméabilité intrinsèque :

$$kr_i = \frac{k_i}{k} \tag{5}$$

Cette perméabilité relative est fonction de la saturation. La figure 1 montre des courbes de perméabilité relative à l'eau et à l'air en fonction de la saturation (en eau) effectivement mesurée pour un sable du lit de l'Isère (VAUCLIN, 1971 ; GAUDET, 1972) par des méthodes décrites précédemment (SMILES et al., 1971). Pour des raisons d'écriture, on définit également la mobilité du fluide i , λ_i :

$$\lambda_i = \frac{kr_i}{\mu_i} \tag{6}$$

et la mobilité relative du fluide i , λ_{r_i} :

$$\lambda_{r_i} = \frac{kr_i}{\mu_i} \tag{7}$$

Les équations de conservation de masse pour l'eau (incompressible) et pour l'air, dans un écoulement unidimensionnel vertical, sont respectivement :

$$\frac{\partial (\phi S)}{\partial t} - \frac{\partial (v_w)}{\partial z} = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial (\phi \rho_a S_a)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_a v_a)}{\partial z} = 0 \tag{9}$$

Du point de vue pédagogique, comme du point de vue de l'efficacité, il n'est pas fructueux de s'attaquer à ces équations générales de prime abord. Il est plus instructif de considérer le cas simple suivant.

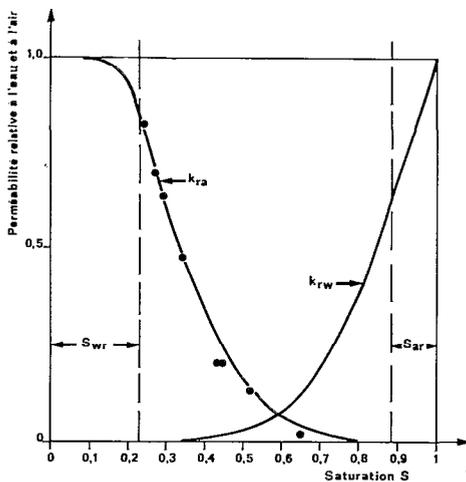


Fig. 1. — Courbes de perméabilités relatives à l'eau et à l'air en fonction de la saturation (en eau) d'après Vauclin (1971) et Gaudet (1972).

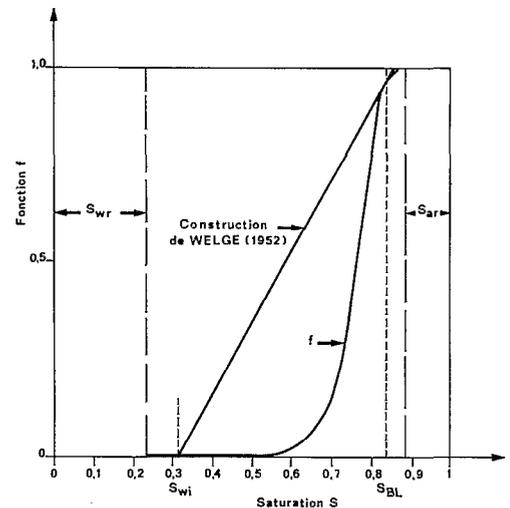


Fig. 2. — Courbe de « petit f » en fonction de S correspondant aux perméabilités relatives de la figure 1, et la construction graphique de Welge.

2. IMBIBITION DANS UNE COLONNE HORIZONTALE

Il s'agit de la prédiction du débit d'imbibition d'eau dans une colonne horizontale. A l'entrée la colonne est saturée. Avant d'entrer dans le sol l'eau traverse une plaque poreuse saturée d'eau. A la sortie la colonne est à la pression atmosphérique. Initialement, la teneur en eau dans la colonne est uniforme, de valeur θ_i . Par ailleurs, il

y a des trous tout le long de la colonne qui permettent à l'air de s'échapper non seulement en bout de colonne, mais encore latéralement. A priori, voilà bien un cas où l'effet d'air devrait être négligeable. On veut prédire le débit d'imbibition.

Dans ce cas particulier, les vitesses de Darcy pour l'eau et l'air sont :

$$v_w = -\lambda_w \frac{\partial P_w}{\partial x} \tag{10}$$

$$v_a = -\lambda_a \frac{\partial P_a}{\partial x} \tag{11}$$

où x est l'abscisse dans la direction horizontale orientée positivement vers l'aval. Il est utile d'introduire quelques définitions supplémentaires, notamment la vitesse «totale» (algébrique) :

$$v = v_w + v_a \tag{12}$$

la fonction d'écoulement fractionnel, qui, comme son nom l'indique, se définit par la relation :

$$f_w = \frac{v_w}{v} \tag{13}$$

et la fonction f_w (ou f) dite «petit f» :

$$f_w = \frac{\lambda_w}{\lambda_w + \lambda_a} = \frac{1}{1 + \frac{k r_a}{\mu_a} \frac{\mu_w}{k r}} = \frac{1}{1 + \frac{\mu_w}{\mu_a} \frac{k r_a}{k r_w}} \tag{14}$$

La fonction f correspondant aux perméabilités relatives de la figure 1 est tracée sur la figure 2. Sur cette figure est également indiquée la construction de Welge (1952) qui consiste à tirer une tangente à la courbe du point de coordonnées (S_{wi}, f_{wi}) qui caractérise la condition initiale du milieu poreux.

Si l'on ajoute l'équation (10) et l'équation (11) on obtient :

$$v = -\lambda_w \frac{\partial p_w}{\partial x} - \frac{\partial p_a}{\partial x} = -(\lambda_w + \lambda_a) \frac{\partial p_w}{\partial x} - \lambda_a \frac{\partial p_c}{\partial x} \tag{15}$$

ayant utilisé l'équation (2). Définissant la mobilité totale :

$$\Lambda = \lambda_w + \lambda_a \tag{16}$$

et divisant l'équation (15) par Λ , on obtient un premier résultat :

$$\frac{v}{\Lambda} = -\frac{\partial p_w}{\partial x} - (1 - f_w) \frac{\partial p_c}{\partial x} = -\frac{\partial p_a}{\partial x} + f_w \frac{\partial p_c}{\partial x} \tag{17}$$

A noter que ce résultat, dont l'importance apparaîtra plus tard, est exact.

Si maintenant l'on suppose que le milieu est indéformable et que la compressibilité de l'air est négligeable (hypothèse très plausible dans le cas étudié ici) on obtient en ajoutant l'équation (8) et l'équation (9) le deuxième résultat :

$$\frac{\partial}{\partial t} [\varnothing(S_w + S_a)] + \frac{\partial}{\partial x} (v_w + v_a) = \frac{d_v}{d_x} = 0 \tag{18}$$

autrement dit la vitesse totale est fonction du temps mais non de x, la coordonnée spatiale (résultat valable même si le milieu est hétérogène). Si l'on intègre l'équation (17) entre deux positions quelconques X_1 et X_2 on obtient :

$$v = \frac{p_{a1} - p_{a2} + \int_{x_1}^{x_2} f_w dp_c}{\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\Lambda}} \tag{19}$$

Il est remarquable que la valeur de v soit la même quels que soient X_1 et X_2 . Bien sûr, pour évaluer v , on choisira les positions X_1 et X_2 les plus propices, là où soit la pression d'eau, soit la pression d'air sont connues par les conditions aux limites. Dans le cas particulier étudié où la pression d'air du sol est maintenue par des trous fréquents à la pression atmosphérique, l'équation (19) devient :

$$v = \frac{\rho_w g \int_{H_c}^{h_{c1}} f_w dh_c}{\int_0^{x_2} \frac{dx}{\Lambda}} = \frac{\Delta\Phi}{R} \tag{20}$$

où H_c est la pression capillaire à l'entrée de la colonne ($X = 0$) et X_2 est une ordonnée, juste en aval du front d'humectation, c'est-à-dire dans la zone où la saturation est encore la saturation initiale, S_1 . Il est bon de noter que l'équation (20) a la forme élémentaire de la loi de Darcy en écoulement saturé, $\Delta\Phi$ étant la chute de potentiel (instantanée) et R la résistance visqueuse (instantanée). Si la pression (tension) de l'eau à l'entrée de la colonne est maintenue constante, l'équation (20) montre alors que la poussée capillaire motrice est invariable dans le temps et que le ralentissement de l'écoulement est dû uniquement à l'augmentation de la résistance (visqueuse). Pour le sable de l'Isère considéré plus haut la poussée motrice capillaire (à $\rho_w g$ près) est donnée par l'aire hachurée de la figure 3, la pression capillaire à l'entrée étant de 15 cm. Comme à l'entrée de la colonne seule l'eau s'écoule, il s'ensuit que $I = v$ et donc que le débit d'imbibition est donné par l'expression :

$$I = \frac{\Delta\Phi}{\int_{1-S_{ar}}^{S_1} \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial x}{\partial S} dS} \tag{21}$$

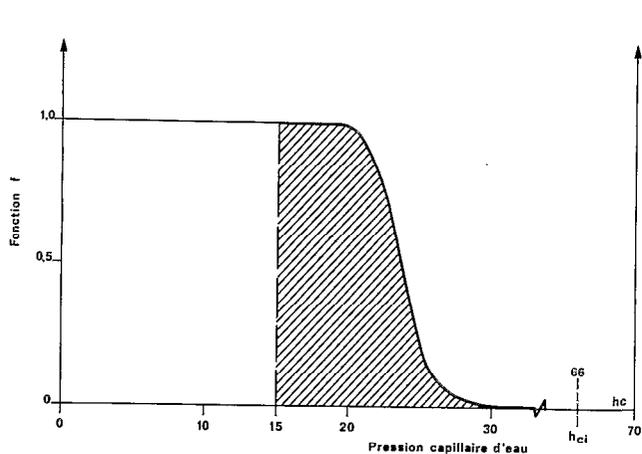


Fig. 3. — Courbe de f en fonction de la pression capillaire, exprimée en hauteur d'eau.

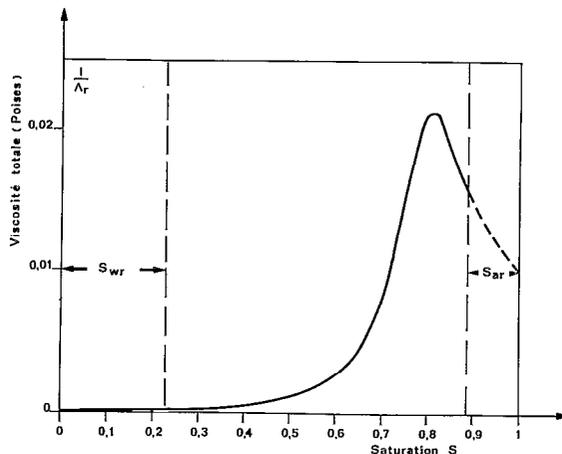


Fig. 4. — Courbe de la viscosité totale en fonction de la saturation.

Comme la poussée capillaire ($\Delta\Phi$) est connue, on voit d'après l'équation (21) que la détermination du profil de saturation à un temps donné n'est nécessaire que pour calculer le terme de résistance visqueuse. La forme de la courbe $1/\Lambda_r$ est donnée sur la figure 4. La mobilité totale relative, Λ_r , est tout simplement Λ/k et $1/\Lambda_r$ a la dimension d'une viscosité, d'où son nom sur la figure. Il est à remarquer que cette viscosité totale passe par un maximum pour une saturation inférieure à la saturation naturelle et que la valeur du maximum est plus de deux fois la viscosité de l'eau.

Il n'est plus possible de procéder avec fruit sans déterminer le profil de saturation. A ce sujet, on peut se poser deux questions. La détermination exacte du profil est-elle nécessaire ? Est-elle difficile ?

Pour bien se rendre compte de la difficulté du problème, nous le formulerons avec l'aide de la fonction \mathcal{F}_w . L'équation de la saturation s'écrit, de par la définition même de \mathcal{F}_w :

$$\varnothing \frac{\partial S}{\partial t} + V \frac{\partial \mathcal{F}_w}{\partial x} = \varnothing \frac{\partial S}{\partial t} + V \mathcal{F} \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \tag{22}$$

d'où l'on déduit la vitesse de propagation d'une saturation donnée :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_S = \frac{V}{\emptyset} \mathcal{F}' \quad (23)$$

où la notation \mathcal{F}' indique la dérivée de \mathcal{F} par rapport à S à un temps donné. On peut obtenir une expression pour \mathcal{F} à partir des équations de définition de v_w et v . Comme :

$$\frac{v_w}{\lambda_w} = - \frac{\partial p_w}{\partial x} \quad (24)$$

L'élimination de $\frac{\partial p_w}{\partial x}$ entre les équations (24) et (17) donne :

$$\frac{v}{\Lambda} = \frac{v_w}{\lambda_w} - (1 - f_w) \frac{\partial p_c}{\partial x} \quad (25)$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{v_w}{v} = \mathcal{F} = f \left(1 + \frac{\lambda_a p'_c}{v} \frac{\partial S}{\partial x} \right) = f - \frac{E}{v} \frac{\partial S}{\partial x} \quad (26)$$

ayant utilisé la relation $f_w + f_a = 1$ et la symétrie des définitions qui donne $\lambda_w f_a = \lambda_a f_w$. A partir de l'équation (26) on obtient aisément la forme explicite de l'équation (23).

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_S = \frac{v \mathcal{F}'}{\emptyset} = \frac{v f'}{\emptyset} - \frac{E'}{\emptyset} \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{E}{\emptyset} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} / \frac{\partial S}{\partial x} \quad (27)$$

où E est la fonction des courbes caractéristiques du sol définie par équivalence dans l'équation (26) :

$$E = - f_w \lambda_a p'_c \quad (28)$$

L'équation (27) montre que la vitesse de propagation d'une saturation donnée à un temps donné est non seulement une fonction de cette saturation (présence des fonctions f' , E' et E) et de la vitesse totale, mais encore de la pente du profil (deuxième terme) et de la courbure du profil (troisième terme). Il est difficile de savoir a priori lequel de ces termes domine et dans quel domaine de saturation. Il est possible de résoudre le problème en dépit de sa difficulté par des méthodes analytiques (NOBLANC et MOREL-SEYTOUX, 1972) ou numériques (PÉUC et MOREL-SEYTOUX, 1972).

Ces méthodes sont particulièrement intéressantes si l'on désire connaître la forme du profil de saturation per se. Par contre, si l'on s'intéresse seulement au débit d'imbibition et c'est généralement le cas de l'hydrologue, ces méthodes représentent beaucoup de travail et de détail presque pour rien puisque dans l'expression de R le profil des saturations est intégré. Peut-on éviter tout ce travail ?

Puisqu'il s'agit d'évaluer la résistance visqueuse de l'écoulement des deux fluides il semble légitime d'utiliser une équation qui décrit bien les effets visqueux mais qui néglige les effets capillaires. Ces effets ont peut-être un effet sensible sur la forme du profil mais inappréciable sur la résistance visqueuse. Cette équation approchée est l'équation bien connue des pétroliers (SMITH, 1966) dite équation de Buckley-Leverett :

$$\emptyset \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{v}{\emptyset} f' \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \quad (29)$$

dont la solution, obtenue initialement par BUCKLEY et LEVERETT (1942) pour un v constant, est, dans le cas général d'un v variable, donnée par :

$$X = \frac{W f'}{\emptyset} \quad \text{pour} \quad S \geq S_{BL} \quad (30)$$

et

$$X_{BL} = \frac{W f'_{BL}}{\emptyset} \quad \text{pour} \quad S_{BL} \geq S \geq S_i \quad (31)$$

où X_{BL} est la coordonnée d'un front de valeur supérieur S_{BL} et où W est le volume imbibé cumulé (exprimé en hauteur d'eau) précisément :

$$W = \int_0^t v(\tau) d\tau \quad (32)$$

L'article de BUCKLEY et LEVERETT est maintenant un classique de la littérature pétrolière et beaucoup de livres discutent leur méthode en détail (SMITH, 1966, DE WIEST, 1969). La position du front est obtenue par conservation de masse ou par la construction graphique de WELGE (1952) si le profil de saturation initial est uniforme (le cas présent). La construction de Welge (DE WIEST, 1969) a déjà été discutée ici et est illustrée sur la figure 2.

Remarquons en passant que la solution donnée par l'équation (30) s'obtient aisément à partir de l'équation (27) quand on néglige les termes où la fonction E apparaît. Dans ce cas, la vitesse de propagation d'une saturation donnée ne dépend que de la valeur de cette saturation et non des pentes et courbures du profil en ce point. On conçoit bien, dans ce cas, qu'une solution analytique puisse exister.

À partir des équations (30) et (31) on déduit la formule finale pour le débit d'imbibition :

$$I = \frac{k \rho_w g \int_H^{h_{ci}} f dh_c}{\frac{W}{\emptyset} \int_{S_{BL}}^{1-S_{ar}} \frac{f'' dS}{\Lambda_R}} = \frac{k \Delta \Phi}{\frac{W}{\emptyset} M} \tag{33}$$

où M est l'intégrale du dénominateur, ou explicitement en fonction du temps :

$$I = \left(\frac{k \emptyset \Delta \Phi}{2 M_t} \right)^{1/2} \tag{34}$$

On retrouve la dépendance bien connue du débit d'imbibition avec l'inverse de la racine carrée du temps. Il est important de remarquer que la solution requiert seulement une construction graphique (tracé d'une tangente pour déterminer la saturation S_{BL} et deux intégrations graphiques des courbes de f , de h_c et de $-f''/\Lambda_R$ de S . La figure 5 montre la courbe $-f''/\Lambda_R$ dans l'intervalle de saturation d'intérêt. Il n'est jamais nécessaire d'intégrer numériquement et itérativement une équation différentielle ordinaire comme c'est le cas avec la méthode de Philip (1955). La méthode de calcul présentée dans cette section pour le calcul de la « sorptivité » (biphasique) c'est-à-dire :

$$\Sigma = \left(\frac{2 k \emptyset \Delta \Phi}{M} \right)^{1/2} \tag{35}$$

est plus simple et la formule pour la sorptivité, équation (35) est très parlante. Au contraire, la sorptivité obtenue par la méthode de Philip (1955) est muette car elle est obtenue comme l'intégrale de la solution de l'équation bien connue :

$$\frac{u}{2} \frac{d\theta}{du} + \frac{d}{du} \left(D \frac{d\theta}{du} \right) = 0 \tag{36}$$

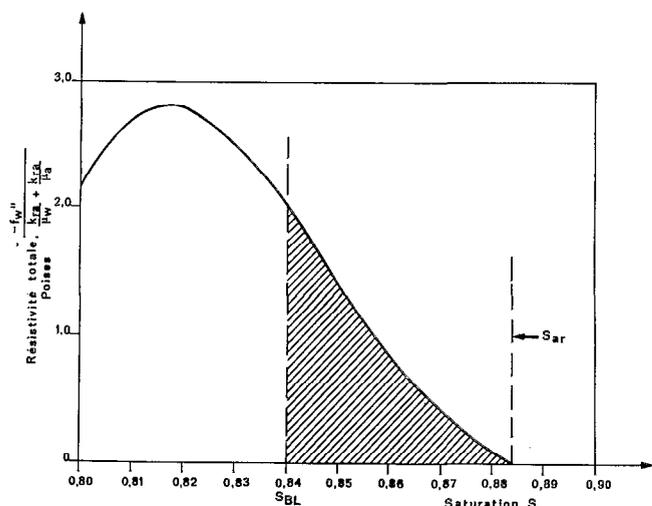


Fig. 5. — Courbe de résistivité totale en fonction de la saturation.

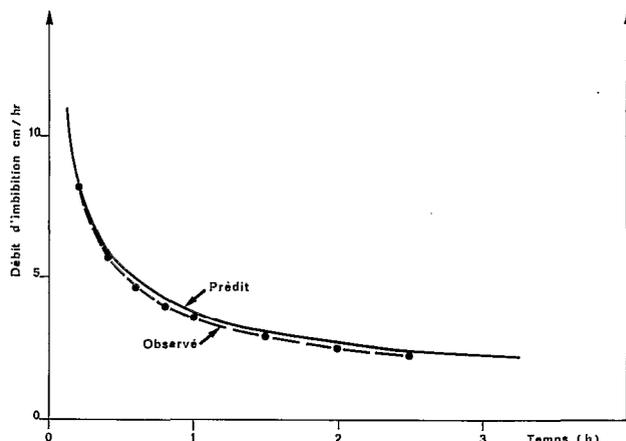


Fig. 6. — Comparaison des débits d'imbibition calculés et observés (Vauclin, 1971).

soit :

$$\sigma = \int_{\theta_1}^{\bar{\theta}} u(\theta) d\theta \quad (37)$$

où u est la variable de Boltzmann et $\bar{\theta}$ est la teneur en eau à saturation naturelle. En plus l'utilisation de la formule (34) donne des résultats très précis comme le montre clairement la comparaison des débits calculés et observés sur la figure 6.

Dans la théorie présentée ici, on n'a pas discuté l'effet de la plaque poreuse à l'entrée de la colonne. Dans les prédictions indiquées sur la figure 6, on a tenu compte de cet effet. La prise en compte de cet effet n'offre pas de grandes difficultés en détail dans un autre article (MOREL-SEYTOUX et al., 1973a). Dans cet article, on montre que l'erreur relative sur le débit d'imbibition est inférieure à 1% au-delà des 20 premières minutes, si on néglige l'effet d'impédance de la plaque poreuse.

En résumé, on a montré que grâce à la formulation biphasique du problème, on peut prédire précisément et simplement les débits d'imbibition. Le terme de poussée capillaire est évalué exactement. Par contre, le terme de résistance visqueuse est calculé de manière approchée, mais la comparaison avec des résultats expérimentaux montre que l'approximation est très bonne. En plus, les formules obtenues indiquent explicitement l'effet des divers facteurs sur le débit (équat. (35) et équat. (33)).

Dans la section suivante, on va montrer que les paramètres de la loi d'infiltration de Green et Ampt (1911) considérés jusqu'ici comme empiriques (CHILDS, 1969, p. 276 ; HILLEL, 1971, p. 143), peuvent en fait, être déduits simplement des courbes caractéristiques du sol et ont un sens physique très précis.

3. LOI D'INFILTRATION DANS UNE COLONNE VERTICALE

On entend par «loi d'infiltration» la relation entre le débit d'eau qui entre dans une colonne de sol homogène de profondeur illimitée et de teneur en eau initiale uniforme, lorsqu'elle est soumise à une submersion superficielle. En supposant l'existence d'un front séparant une zone saturée de la zone à teneur en eau initiale et en appliquant la loi de Darcy, GREEN et AMPT obtinrent la relation :

$$I = \frac{\tilde{K} (H + z_f + H_f)}{z_f} = \tilde{K} + \frac{\tilde{K} (H + H_f)}{z_f} = A + \frac{B}{z_f} \quad (38)$$

où I est le débit d'infiltration (par unité de surface), \tilde{K} la conductivité hydraulique à saturation naturelle, H la hauteur d'eau au-dessus du sol, z_f la profondeur de pénétration du front et H_f une hauteur capillaire effective. Une forme de l'équation (38) liant le débit instantané au volume cumulé est :

$$I = A + \frac{A C}{W} = A + \frac{B (\bar{\theta} - \theta_i)}{W} \quad (39)$$

qui se déduit de l'équation (38), puisque :

$$W = z_f (\bar{\theta} - \theta_i).$$

Si au lieu du modèle de GREEN et AMPT, on prend comme point de départ, la loi de Darcy généralisée (équat. (10) et (11)) pour les deux phases eau-air, procédant comme précédemment pour obtenir l'équation (17), on a :

$$\frac{v}{\Lambda} = - \frac{\partial p_a}{\partial z} + f_w \frac{\partial p_c}{\partial z} + f_w (\rho_w - \rho_a) g + \rho_a g \quad (40)$$

Dans la zone envahie par l'eau, la résistance visqueuse à l'écoulement de l'air n'est pas entièrement négligeable, c'est-à-dire que les gradients de pression d'air peuvent y être assez importants sans toutefois que la pression d'air soit grande en valeur absolue. Négligeant la compressibilité de l'air, on obtient pour le débit d'infiltration par intégration de (40) à un temps donné, puisque en surface $I = V$:

$$I = \frac{p_A + \rho_w g H + \int_0^{p_{ci}} f_w dp_c - p_{a2} + \Delta \rho g \int_0^{z_2} f_w dz + \rho_a g z_2}{\int_0^{z_2} \frac{dz}{\Lambda}} \quad (41)$$

où l'indice inférieur 2 indique une position dans la zone à teneur initiale uniforme, juste en aval du front. Comme la pression d'air de cette zone est sensiblement atmosphérique et que, sur la majeure partie de la zone humidifiée, f_w est sensiblement égal à 1, (41) devient avec une très bonne approximation :

$$I = \frac{\rho_w g H + \int_0^{p_{ci}} f_w dp_c + \rho_w g z_2}{\int_0^{z_2} \frac{dz}{\Lambda}} = \frac{\Delta \Phi}{R} \quad (42)$$

L'équation (42) montre que la chute de potentiel effective peut être évaluée pratiquement avec précision, sans déterminer le profil des teneurs en eau. La détermination du profil des teneurs en eau n'est nécessaire que pour évaluer la résistance visqueuse. Une approximation même grossière, de ce profil, est sans doute, suffisante pour calculer R. Par exemple, avec le profil de GREEN et AMPT, on obtient :

$$I = \frac{\tilde{K}(H + z_f + \int_0^{h_{ci}} f_w dh_c)}{z_f} \quad (43)$$

d'où le résultat cherché par identification avec l'équation (38) :

$$H_f = \int_0^{h_{ci}} f dh_c \quad (44)$$

où h_c est la pression capillaire exprimée en hauteur d'eau, et h_{ci} la pression capillaire à la teneur en eau initiale. La figure 3 montre une courbe typique de f en fonction de h_c . H_f n'est pas comme dans le cas de l'imbibition, l'aire hachurée sur la figure 3, mais l'aire de la courbe dans l'intervalle de h_c de 0 à h_{ci} (66 cm).

En résumé, on a trouvé le sens physique très précis du paramètre empirique indéterminé H_f (ou B) de GREEN et AMPT. H_f est lié aux courbes caractéristiques du sol (pression capillaire, perméabilité relatives) et ce qui est très important, on connaît la dépendance fonctionnelle entre H_f et la teneur en eau initiale. Grâce à la formulation biphasique, on a pu obtenir très simplement (en quelques lignes) un résultat d'autant plus remarquable, qu'il fallut attendre aussi longtemps pour l'obtenir.

Cependant l'intérêt de la formulation biphasique ne s'arrête pas là, car il se peut que le profil de GREEN et AMPT soit malgré tout, trop grossier pour évaluer le terme de résistance visqueuse. Dans le chapitre suivant, on va montrer que c'est effectivement le cas.

4. CORRECTION A LA LOI D'INFILTRATION DE GREEN ET AMPT

Dans les chapitres antérieurs, on a montré que le débit d'infiltration ($\varepsilon = 1$) ou d'imbibition ($\varepsilon = 0$) pouvait s'écrire :

$$I = \frac{\tilde{K}(H + H_f + \varepsilon \int_0^{z_2} f dz)}{\frac{1}{\mu_w} \int_0^{z_2} \frac{dz}{\Lambda r}} = \frac{\tilde{K} \Delta H}{L_f} = \frac{\tilde{K} \Delta H}{\beta z_f} \quad (45)$$

où ΔH est la perte de charge hydraulique et L_f caractérise la résistance visqueuse à l'écoulement de l'eau et de l'air ou, plus brièvement, la résistance totale.

La détermination du profil de teneur en eau est nécessaire pour calculer la résistance et le terme gravitaire. Comme une solution exacte n'est pas possible sans faire appel aux méthodes numériques sur ordinateur, on cherche une bonne approximation. Pour bien évaluer le terme de résistance visqueuse, il paraît naturel de résoudre l'équation aux dérivées partielles de la teneur en eau en y négligeant tout ou partie (juste ce qu'il faut pour pouvoir intégrer) des termes capillaires et gravitaires, mais en y conservant tous les termes visqueux. Comme on l'a déjà vu dans le chapitre sur l'imbibition, cette équation, équation (29), est bien connue des pétroliers et sa solution par la construction de Welge (1952) a été abondamment décrite (DE WIEST, 1969, p. 490). On en déduit :

$$L_f = \frac{W}{\mu_w} \int_{\theta_f}^{\hat{\theta}} \frac{f'' d\theta}{\Delta r} \quad (46)$$

et par suite :

$$\beta = \frac{(\hat{\theta} - \theta_i)}{\mu_w} \int_{\hat{\theta}}^{\theta} \frac{f'' d\theta}{\Delta r} \quad (47)$$

où θ_f indique la teneur en eau juste en amont du front de Buckley-Leverett. Le calcul de β se fait donc simplement par intégration numérique en fonction des caractéristiques du sol et des fluides. La figure 4 montre une courbe de $1/\Delta r$ en fonction du degré de saturation, basée sur des données expérimentales. Il est clair d'après cette figure, qu'il existe derrière le front, une zone d'écoulement simultané de l'air et de l'eau, de viscosité totale supérieure à la viscosité de l'eau. Si l'on suppose avec GREEN et AMPT que l'eau déplace l'air à la manière d'un piston, on a : $\beta = 1$, mais on a mal représenté le phénomène d'interaction visqueuse des deux phases qui n'est pas négligeable comme l'atteste la figure 4. Pour ce sol, on a trouvé $\beta = 1,36$.

La comparaison du calcul avec les résultats expérimentaux d'imbibition indiquée sur la figure 6, montre un accord satisfaisant à 4%. Sans correction, la prévision par la formule de GREEN et AMPT, aurait donné les résultats avec une erreur par excès, de 36%.

Des valeurs de β ont été calculées pour différents sols. Cependant, comme les perméabilités relatives à l'air de ces sols n'étaient pas connues, sauf pour le sable de l'Isère, elles ont été estimées par application de la relation :

$$K_{ra} = \left(1 - \frac{0}{\hat{\theta}} \right)^3 \quad (48)$$

Les valeurs calculées de β ne fournissent donc que des ordres de grandeur. Les résultats sont rassemblés dans le Tableau I.

TABLEAU I

Sol	Sable de l'Isère	Sable de Plainfield	Sable limoneux de Colombie	Limon de Guelph	Limon argileux d'Idaho	Argile léger de Yolo
Données d'après :	Vauclin-1971	Mein & Lorson-1973	ib.	ib.	ib.	ib.
β	1,36	1,40	1,45	1,30	1,10	1,70
$\frac{1}{\beta}$	0,73	0,7	0,7	0,8	0,9	0,6

En résumé, on a établi une expression liant le terme de résistance visqueuse aux propriétés du sol et des fluides. On connaît en particulier la dépendance fonctionnelle entre le facteur correctif β et la teneur en eau initiale. La formule de GREEN et AMPT est trop imprécise sans correction, pour être utile en pratique. Comme on l'avait vu dans le cas de l'imbibition, il suffit de deux intégrations graphiques pour déterminer la chute de potentiel capillaire effective, H_f , et pour calculer le facteur de correction, β , et ainsi pouvoir prédire avec précision et sans grand effort, les débits d'infiltration.

5. CONCLUSIONS

Dans un premier article publié dans le Cahier vol. X, n° 2, 1973, on s'était attaché à expliquer pourquoi il était nécessaire de développer une nouvelle théorie de l'infiltration qui puisse tenir compte des effets d'air. En gros, on avait montré que la théorie traditionnelle ne peut représenter ces effets et que ces effets sont souvent importants. Ces faits étant acquis, il fallait alors se demander comment on pouvait prendre en compte les effets d'air.

La réponse à cette deuxième question : Comment ? est facile. Il suffit de formuler le problème correctement tel qu'il est, c'est-à-dire comme un problème biphasique. La vraie question, c'est comment formuler le problème sans trop compliquer sa résolution. A cette nouvelle question, s'ajoute une autre : comment mesurer le degré de

complication ? Quand les effets d'air sont importants, le coût du calcul par la méthode traditionnelle est peut-être faible, mais quelle est la valeur de cette prédiction puisqu'on sait à priori, qu'elle est fautive ? Une comparaison n'est possible que dans le cas où les deux méthodes sont valables, c'est-à-dire quand on sait, ou croit savoir, a priori, que l'effet d'air est pratiquement négligeable. Il est coutumier de supposer que l'on est dans ce cas, quand la colonne est ouverte à son extrémité et percée de trous sur les côtés. Dans ce deuxième article, on s'est toujours placé dans ce cas, ce qui a permis de comparer la simplicité relative de la solution traditionnelle avec la solution biphasique proposée.

Dans le cas de l'imbibition dans une colonne horizontale, on a trouvé que la formulation biphasique (mathématiquement plus compliquée mais plus physique) se prête naturellement à une solution approchée précise et plus simple que la solution traditionnelle. Rappelons que pour obtenir la solution du problème biphasique, on a supposé que l'air se comportait comme un fluide incompressible (hypothèse faite implicitement dans la solution traditionnelle) et que l'on pouvait négliger certains termes capillaires dans la détermination du profil de teneur en eau afin de calculer la résistance visqueuse à l'écoulement total. La comparaison avec des résultats expérimentaux montre que la solution approchée est très précise. En fait, par la méthode traditionnelle, on n'a pas pu obtenir des résultats plus précis, bien au contraire, parce que la diffusivité est singulière à la saturation naturelle et qu'il n'existe pas de méthode objective d'extrapolation à l'infini. Cette difficulté supplémentaire de la théorie traditionnelle, est discutée en détail dans un autre article (MOREL-SEYTOUX et al., 1973b).

Contrairement à ce qu'on aurait pu penser au départ, la formulation biphasique conduit à une solution mathématique plus simple dans le cas même où la théorie traditionnelle devrait suffire. Il n'y a donc jamais intérêt à utiliser la théorie traditionnelle car où les effets d'air sont importants et elle n'est pas valable, ou ils ne le sont pas et elle est plus compliquée.

Dans le cas de l'infiltration dans une colonne verticale, la supériorité de la méthode biphasique est démontrée une fois de plus, car elle a permis de résoudre simplement le problème de GREEN et AMPT, sans solution depuis 1911.

En plus, l'étude de l'infiltration a montré que l'effet d'air n'est pas négligeable même lorsque l'effet de compression d'air est négligeable. Le phénomène d'interaction visqueuse entre les deux fluides qui se meuvent, ne peut être rendu correctement par la théorie traditionnelle qui suppose un air statique.

En résumé, puisque la théorie biphasique est plus complète et plus simple, qu'en plus on ne sait pas a priori si l'effet d'air sera ou non négligeable, il n'y a aucune raison de ne pas l'utiliser systématiquement. Si l'on a répondu à la question Comment ?, dans le cas où l'effet d'air est peu important, l'on n'a pas dans cet article, répondu à la même question quand l'effet d'air est important. Dans ce cas, il n'est plus possible de supposer que l'air se conduit comme un fluide incompressible et par suite, la vitesse totale est non seulement une fonction du temps, mais aussi une fonction de la coordonnée spatiale. L'équation (17) reste valable, mais l'équation (19) ne l'est plus. L'équation (19) fournit au plus, une valeur moyenne (dans l'espace) de v . Enfin, quand la compression d'air est significative la pression p_{a2} dans l'équation (41) ne peut plus être considérée comme atmosphérique. Elle varie dans le temps et il faut la calculer en tenant compte des conditions dynamiques de l'écoulement et de la loi d'état du gaz air. L'étude détaillée de ce nouveau problème est le sujet du troisième article.

REMERCIEMENTS

Les bases théoriques de cet article ont pu être développées grâce à un contrat avec l'Agence OWRR (Office of Water Resources Research) des Etats-Unis d'Amérique, projet B-070 - Colorado (contrat 14-31-0001-3566). Elles ont pu être approfondies grâce au soutien financier du Centre National de la Recherche Scientifique, pendant le congé sabbatique de l'auteur et grâce à la collaboration active du Groupe d'Hydrologie de l'Institut de Mécanique de Grenoble. Je tiens à remercier particulièrement M. VACHAUD pour de nombreuses discussions sur le sujet, M. SANTON pour ses commentaires, M. GAUDET pour l'analyse des données expérimentales et M. KHANJI pour son aide efficace dans l'analyse et dans tous les calculs.

BIBLIOGRAPHIE

- BUCKLEY (S. E.), LEVERETT (M. C.) - 1942 - Mechanism of fluid displacements in sands. *Trans. A.I.M.E.*, vol. 146, p. 107-116.
- CHILDS (E. C.) - 1969 - An introduction to the Physical Basis of Soil Water Phenomena. John Wiley and Sons Ltd 1969, Londres, 493 p..
- GAUDET (J. P.) - 1972 - Effet de l'écoulement de l'air sur une infiltration d'eau dans une colonne de sol verticale. Rapport de D.E.A., Université Scientifique et Médicale de Grenoble.

- GREEN (W. H.), AMPT (C. A.) – 1911 – Studies on soil physics : I. Flow of air and water through soils. *J. Agr. Sci.*, vol. 4, pp. 1-24.
- HILLEL (D.) – 1971 – Soil and Water. Physical principles and processes. Academic Press Inc., New York, 288 p.
- MEIN (R. G.), LARSON (C. L.) – 1973 – Modeling Infiltration during a Steady Rain, *Water Resources Research J.*, vol. 9, n° 2, pp. 384-394.
- MOREL-SEYTOUX (H. J.) – 1973 – Pour une théorie modifiée de l'infiltration. 1^{re} partie : Pourquoi ?, *Cah. ORSTOM, sér. Hydrol.*, vol. X, n° 2, pp. 185-194.
- MOREL-SEYTOUX (H. J.), KHANJI (J.), VACHAUD (G.) – 1973a – Prediction of Imbibition in a Horizontal Column, soumis pour publication en mai 1973, au journal *Soil Science Society of America Proceedings*.
- MOREL-SEYTOUX (H. J.), KHANJI (J.), VACHAUD (G.) – 1973b – Prediction Errors due to Uncertainties in the Determination and Extrapolation of the Diffusivity function, soumis en juillet 1973 au journal *Soil Science Society of America Proceedings*.
- NOBLANC (A.), MOREL-SEYTOUX (H. J.) – 1972 – Perturbation Analysis of two phase infiltration, *Journal of the Hydraulics Division, A.S.C.E.*, vol. 98, n° HY 9, septembre 1972, pp. 1527-1541.
- PHILIP (J. R.) – 1955 – Numerical solution of equations of the diffusion type with diffusivity concentration dependent, transactions Faraday Society, vol. 51, pp. 885-892.
- PHUC (L. V.), MOREL-SEYTOUX (H. J.) – 1972 – Effect of soil air movement and compressibility on infiltration rates, *Soil Science Society of America Proceedings*, vol. 36, n° 2, mars-avril, pp. 237-241.
- SMILES (D. E.), VACHAUD (G.), VAUCLIN (M.) – 1971 – A test of the uniqueness of the soil moisture characteristic during transient, nonhysteretic flow of water in a rigid soil, *Soil Science Society of America Proceedings*, vol. 35, pp. 534-539.
- SMITH (C. R.) – 1966 – Mechanics of Secondary Oil Recovery, Reinhold, New York, 154 p.
- VAUCLIN (M.) – 1971 – Effets dynamiques sur la relation succion-teneur en eau lors d'écoulement en milieu non saturé, Thèse de Docteur-Ingénieur, Université Scientifique et Médicale de Grenoble, 113 p.
- WELGE (H. J.) – 1952 – A simplified method for computing oil recovery by gas or water drive, *Trans. A.I.M.E.*, vol. 195, pp. 91-98.
- WIEST (R. J. M. de) (éditeur) – 1969 – Flow through Porous Media, Academic Press Inc., New York, 530 p.