

# Pour une théorie modifiée de l'infiltration

## 3<sup>e</sup> partie : effets de compression et de contre-courant

Hubert J. MOREL-SEYTOUX

Chargé de Recherches au CNRS,  
Institut de Mécanique de Grenoble  
et Professeur de Génie Civil

à l'Université d'État du Colorado, Fort-Collins, Colorado

### RÉSUMÉ

*Dans le cas de l'infiltration dans une colonne fermée, l'effet de compression d'air n'est pas négligeable. Pour des colonnes longues on montre qu'on peut déterminer le taux d'infiltration par une loi analogue à la loi de Green et Ampt sans avoir à calculer de manière précise le profil de teneur en eau. Pour des colonnes courtes le phénomène de contre-courant se manifeste rapidement et il doit être pris en compte. Même dans ce cas, on peut calculer le taux d'infiltration par une formule assez simple. Par contre la structure de cette équation n'est plus la même que celle de Green et Ampt.*

### ABSTRACT

*Air compression effects are no longer negligible in the case of infiltration into a closed column. Nevertheless a formula for prediction of infiltration was derived for long columns. The formula has the same mathematical structure as the law of infiltration of Green and Ampt. For short columns the phenomenon of air counterflow occurs early and affects the infiltration rate. A formula was derived to account for this new effect. The new equation, though still relatively simple, no longer has the same structure as the law of Green and Ampt.*

Dans le deuxième article de cette série sur la théorie de l'infiltration, et d'une manière générale sur la théorie de l'écoulement en milieu poreux non saturé, on a montré que même quand on sait ou croit savoir a priori que l'effet d'air est pratiquement négligeable, il est tout de même avantageux de formuler le problème comme un problème d'écoulement biphasique. La solution est en effet plus aisément obtenue de cette façon. On a montré par ailleurs sur un cas précis, où traditionnellement, l'on s'accorde à penser que l'effet d'air est négligeable, qu'en fait il ne l'est pas. Même quand l'air n'est pas comprimé il existe une résistance visqueuse à l'écoulement simultané des deux fluides qui est loin d'être négligeable.

Il est faux de parler « d'effet d'air ». Il serait plus juste de parler « des effets » d'air. Il y a l'effet de résistance visqueuse, l'effet de compression, l'effet de poussée d'Archimède, l'effet d'écoulement à contre-courant, l'effet d'hystérésis et d'autres encore (NOBLANC et MOREL-SEYTOUX, 1974). Bien que tous ces effets existent simultanément on peut dans une deuxième étape considérer seulement les effets combinés de viscosité (déjà discutés dans le deuxième article) et de compression. De manière à ne pas masquer les aspects physiques par trop de détails mathématiques, on illustrera la méthode de solution sur un cas simple, le cas de l'infiltration dans une colonne de sol homogène, fermée en bout et de teneur en eau initiale uniforme résiduelle, lorsqu'elle est soumise à une submersion superficielle. Autrement dit, on va chercher la « loi d'infiltration » (MOREL-SEYTOUX, 1973 b) dans une colonne verticale fermée en bout.

### 1. LOI D'INFILTRATION DANS UNE LONGUE COLONNE VERTICALE FERMÉE EN BOUT

L'équation dérivée dans l'article précédent (MOREL-SEYTOUX, 1973 b) pour la vitesse totale,  $v$ , reste valable :

$$\frac{v}{\Lambda} = -\frac{\partial p_a}{\partial z} + f_w \frac{\partial p_c}{\partial z} + \Delta \rho g f_w + \rho_a g \quad (1)$$

Par contre, comme la colonne est fermée par le bas il n'est plus possible de supposer que la compressibilité de l'air est négligeable. En conséquence, il n'est plus vrai que  $v$  soit seulement une fonction du temps et non de  $z$ . Comme le bas de la colonne est fermé,  $v_w$  et  $v_a$  y ont la valeur zéro. Par contre au sommet de la colonne le flux d'air est nul (au moins au début de l'infiltration) et  $v$  y est égal au taux d'infiltration  $I$ . Donc de toute évidence  $v$  ne peut être constant dans la colonne puisqu'il prend la valeur  $I$  au sommet de la colonne et la valeur zéro en bas de la colonne. On peut se demander toutefois s'il n'existe pas des zones où  $v$  est essentiellement uniforme. Comme le déplacement de l'air par l'eau est pratiquement complet dans la zone en amont du front d'humectation on peut prévoir que  $v$  y change très peu avec l'élévation.

Si donc on intègre l'équation (1) par rapport à  $z$  entre le sommet ( $z = 0$ ) et la position  $z_2$  du front, on obtient pour la moyenne (dans l'espace) de  $v$  dans cette région, dénotée  $\bar{v}$  :

$$\bar{v} = \frac{p_{a1} - p_{a2} + \int_0^{z_2} f_w dp_c + \Delta\rho g \int_0^{z_2} f_w dz + \rho_a g z_2}{\int_0^{z_2} \frac{dz}{\Lambda}} \quad (2)$$

Tant que la surface du sol reste à la saturation naturelle (c'est-à-dire tant que la pression de l'air,  $p_{a1}$ , juste au-dessous de la surface, n'excède pas la pression de l'eau par la pression capillaire d'entrée  $p_{ce}$ , en drainage) on peut écrire :

$$\begin{aligned} p_{a1} + \int_0^{z_2} f_w dp_e &= (p_a + \rho_w g H + \tilde{p}_e) + \int_{p_c}^{p_{ce}} dp_c + \int_{p_{ce}}^{p_{e1}} f_w dp_c = p_a + \rho_w g H + \int_0^{p_{ce}} dp_c + \int_{p_{ce}}^{p_{e1}} f_w dp_c \\ &= p_a + \rho_w g H + \int_0^{p_{e1}} f_w dp_c = p_A + \rho_w g (H + H_f) \end{aligned} \quad (3)$$

puisque  $f_w = 1$  quand  $p_c$  reste dans l'intervalle  $(0, p_{ce})$  c'est-à-dire dans la frange capillaire.

L'équation (2) peut s'écrire :

$$\bar{v} = \frac{p_A + \rho_w g (H + H_f) + \Delta\rho g \int_0^{z_2} f_w dz + \rho_a g z_2 - p_{a2}}{\int_0^{z_2} \frac{dz}{\Lambda}} \quad (4)$$

Comme sur la majeure partie de la zone humidifiée  $f_w$  est sensiblement égal à 1, (4) devient avec une très bonne approximation (tout au moins au début de la période d'infiltration) :

$$\bar{v} = \frac{\rho_w g (H + H_f + Z_f) - (p_{a2} - p_A)}{\int_0^{z_2} \frac{dz}{\Lambda}} \quad (5)$$

On est ramené au problème étudié dans l'article précédent (MOREL-SEYTOUX, 1973 b) à l'exception près du terme  $(p_{a2} - p_A)$ . Comme dans la zone en aval du front l'air se meut aisément puisque la teneur en eau  $y$  est résiduelle, la pression d'air  $y$  est essentiellement uniforme et l'on peut assimiler  $p_{a2}$  à la pression moyenne,  $\bar{p}_a$ , dans la colonne. On obtient aisément cette pression par la loi de Mariotte :

$$\bar{p}_a = p_A \frac{D}{D - \frac{W}{\varnothing (\tilde{S} - S_i)}} = p_A \frac{D}{D - Z_f} \quad (6)$$

où  $D$  représente la profondeur de la colonne.

Après substitution dans l'équation (5) on obtient :

$$\bar{v} = \frac{\tilde{K} \left[ H + H_f + Z_f - \frac{H_A Z_f}{D - Z_f} \right]}{\beta Z_f} \quad (7)$$

où tous les termes ont été définis précédemment (MOREL-SEYTOUX, 1973 b) sauf  $H_A$  qui est la pression atmosphérique exprimée en hauteur d'eau.

On voit d'après l'équation (7) que l'on atteindra le taux d'infiltration  $\frac{\tilde{K}}{B}$  quand le front aura pénétré le sol d'une profondeur égale à  $\frac{D(H + H_f)}{H_A}$ . Pour une hauteur au-dessus du sol de 1 cm, pour le sable de l'Isère (donc  $H_f = 24$  cm) et pour une colonne de 10 m, il suffira que le front pénètre le sol de 25 cm pour que le taux d'infiltration tombe à la valeur limite d'infiltration pour une colonne ouverte. En fait, l'équation (7) ne sera plus valable avant que le front ait atteint la profondeur de 25 cm à cause du phénomène de contre-courant qui débute au moment où le taux d'infiltration atteint la valeur  $K$ , c'est-à-dire pour une distance de pénétration du front égale à

$$\frac{D(H + H_f)}{H_A + D(\beta - 1)}$$

de l'ordre de 18 cm avec les données précédentes. Il est bon de remarquer toutefois que cette valeur de 18 cm pour la pénétration du front correspond à l'infiltration d'une pluie de l'ordre de 4-5 cm, ce qui est énorme. On pourra donc utiliser avec confiance l'équation :

$$I = \frac{\tilde{K} \left[ H_f + Z_f \left( 1 - \frac{H_A}{D} \right) \right]}{\beta Z_f} \quad (8)$$

ou sa forme équivalente intégrée pour l'infiltration cumulée  $W$  :

$$\frac{\tilde{K}t}{\beta \varnothing (\tilde{S} - S_i)} = \frac{W}{\varnothing (\tilde{S} - S_i) \left( 1 - \frac{H_A}{D} \right)} - \frac{H_f}{\left( 1 - \frac{H_A}{D} \right)^2} \ln \left[ \frac{H_f + \left( 1 - \frac{H_A}{D} \right) \frac{W}{\varnothing (S - S_i)}}{H_f} \right] \quad (9)$$

tant que  $W$  n'excède pas la valeur

$$D H_f \varnothing (\tilde{S} - S_i) / [H_A + D(\beta - 1)]$$

pour le calcul de l'infiltration dans le cas d'une pluie intense saturant le sol en surface. L'équation (9) a la forme de l'équation de Green et Ampt avec en plus deux termes correctifs,  $\beta$  le terme correctif de résistance visqueuse dû à l'écoulement simultané de l'eau et de l'air (négligé dans l'équation originale de Green et Ampt) et  $\left( 1 - \frac{H_A}{D} \right)$  le terme correctif de compression dû à la présence d'une barrière imperméable (ou une nappe phréatique) à la profondeur  $D$ .

## 2. L'EFFET DE CONTRE-COURANT

Dans la zone envahie par l'eau,  $v$  est essentiellement uniforme de valeur moyenne  $\bar{v}$ ,  $f_w$  est essentiellement égal à 1 et le gradient de pression capillaire est négligeable. On peut alors réécrire l'équation (1) sous la forme :

$$\bar{v} = \frac{\rho_w g - \frac{\partial p_w}{\partial z} - (1 - f_w) \frac{\partial p_c}{\partial z}}{\left( \frac{1}{\Lambda} \right)} \quad (10)$$

et comme à la fois

$$f_w \simeq 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial p_c}{\partial z} \simeq 0$$

on obtient avec une très bonne approximation :

$$\bar{v} = \frac{\rho_w g - \frac{\partial p_w}{\partial z}}{\frac{1}{\Lambda}} = \frac{k \rho_w g}{\mu_T} \left( 1 - \frac{\partial h_w}{\partial z} \right) = K_T \left( 1 - \frac{\partial h_w}{\partial z} \right) \quad (11)$$

où :

$h_w$  est la pression d'eau exprimée en hauteur d'eau

et  $\mu_T = \frac{1}{\Lambda r}$  est la viscosité totale.

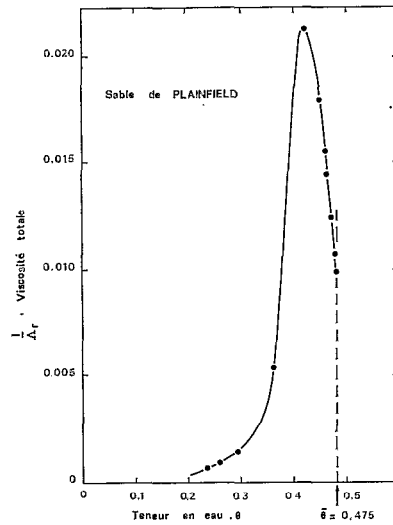


Fig. 1. — Variation de la viscosité totale avec la teneur en eau pour le sable de Plainfield

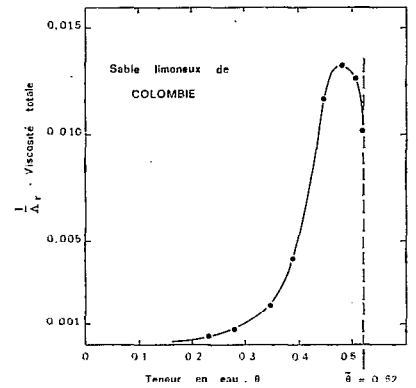


Fig. 2. — Variation de la viscosité totale en fonction de la teneur en eau (d'après les données de Mein et Larson, Water Resources Research, 1973)

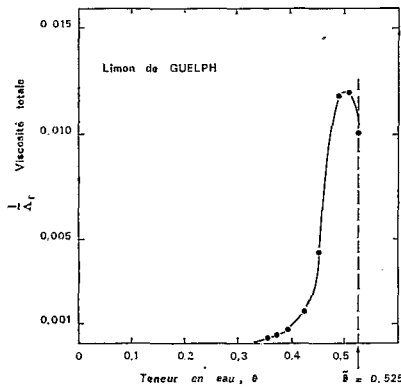


Fig. 3. — Variation de la viscosité totale en fonction de la teneur en eau (d'après les données de Mein et Larson, 1973)

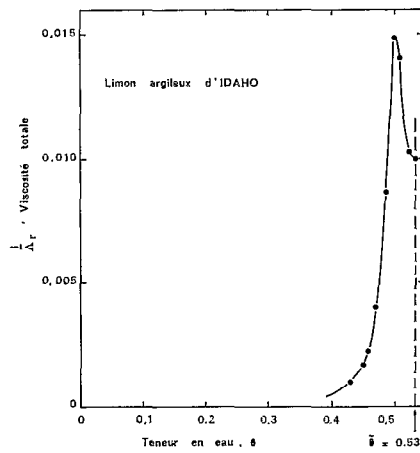


Fig. 4. — Variation de la viscosité totale en fonction de la teneur en eau (d'après les données de Mein et Larson, 1973)

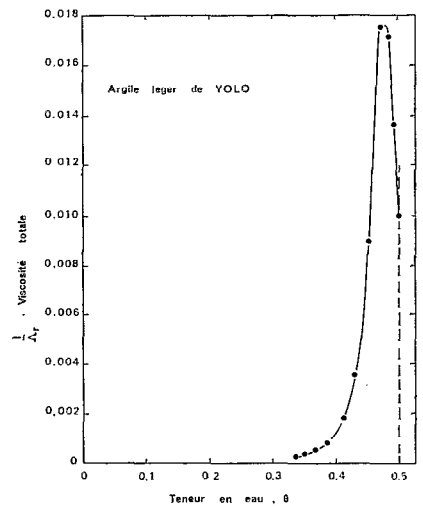


Fig. 5. — Variation de la viscosité totale en fonction de la teneur en eau (d'après les données de Mein et Larson, 1973)

On peut interpréter l'équation (11) comme donnant la vitesse d'écoulement instantanée dans le sens de Darcy en milieu saturé pour un fluide fictif (le fluide « total ») dans une colonne hétérogène de conductivité  $K_T(z)$  qui varie avec  $z$  puisque  $\mu_T$  varie avec  $S$  (voir fig. 1-5 qui donnent des exemples de variation de la viscosité totale en fonction de  $S$ ). Supposons donc qu'à un moment donné  $\bar{v}$  prenne la valeur  $\tilde{K}$ . Comme à la surface  $S = \tilde{S}$ , il s'en suit que  $K_T(0) = \tilde{K}$  et donc qu'en surface

$$\frac{\partial h_w}{\partial z} = 0.$$

La courbe  $K_T(z)$  passe par un minimum puisque la courbe  $\mu_T$  passe par un maximum, pour une valeur de  $Z$ ,  $Z_c$ .

En ce point  $\frac{\partial h_w}{\partial z}$  passera par un minimum (algébrique) pour que le flux  $\bar{v}$  puisse être transmis en dépit de l'accroissement de résistance à l'écoulement. Supposons maintenant que  $\bar{v}$  tombe en-dessous de la valeur  $\tilde{K}$ , ce qui est inévitable tôt ou tard même dans le cas d'une colonne infinie (équation (7) ou (8) pour le cas  $D = \infty$ ) puisque  $\beta > 1$ . Dès que  $\bar{v}$  est inférieur à  $\tilde{K}$ , il s'ensuit qu'à la surface  $\frac{\partial h_w}{\partial z}$  est positif. Le gradient de pression d'eau s'annulera en profondeur à la cote  $Z_c$  pour laquelle  $K_T(Z_c) = I$ . Dans la zone entre la surface et le point de cote  $Z_c$  la pression de l'eau croît vers le bas. L'eau continue de s'écouler vers le bas en dépit de ce fait à cause de son poids. Par contre dans cette même zone l'accroissement de la pression de l'air (sensiblement égale à celle de l'eau puisque le gradient de pression capillaire y est négligeable) vers le bas ne peut être compensé par le poids de l'air. En conséquence dans cette zone la direction de l'écoulement de l'air est vers le haut. On a dans cette zone mouvement de l'eau et de l'air dans des sens opposés, par conséquent à contre-courant. L'eau ne peut imposer à l'air sa direction d'écoulement que si la perte de charge hydraulique excède la poussée d'Archimède. Sinon l'air reprend sa direction favorite vers le haut.

La profondeur de la zone dans laquelle se manifeste le contre-courant ira en grandissant au fur et à mesure que  $\bar{v}$  diminuera. Comme le mouvement de l'air est vers le haut et qu'il ne peut s'échapper au sommet à travers la zone saturée (tout au moins tant que l'excès de la pression d'air par rapport à la pression de l'eau ne dépasse pas la pression capillaire d'entrée en drainage) il va de soi que la saturation en eau dans la zone supérieure de la colonne va décroître. Par conséquent, le phénomène d'hystérésis va se manifester bien que la colonne reste saturée au sommet et qu'elle ne cesse d'imbiber de l'eau. Il est clair donc que l'effet de contre-courant et l'effet d'hystérésis sont intimement associés. Néanmoins tant que la zone de contre-courant n'affecte qu'une région de teneur en eau élevée et de gradient de teneur en eau faible cet effet d'hystérésis ne sera pas important. C'est pourquoi il ne sera pas discuté ici mais sera le sujet d'un autre article.

Dans cet article nous allons nous préoccuper de la question : comment traiter aussi simplement que possible cet effet de contre-courant induit par la compression d'air et comment calculer son effet sur le taux d'infiltration? La solution à ce problème a déjà fait le sujet de plusieurs études (BRUSTKERN et MOREL-SEYTOUX, 1970 ; PHUC et MOREL-SEYTOUX, 1972 ; NOBLANC et MOREL-SEYTOUX, 1972).

### 3. ÉQUATIONS SIMPLIFIÉES DE L'ÉCOULEMENT

Comme discutée précédemment (MOREL-SEYTOUX, 1973 b) l'équation de la saturation pour l'eau peut s'écrire en fonction de la vitesse totale et de la fonction d'écoulement fractionnel sous la forme :

$$\varnothing \frac{\partial S}{\partial t} + v \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} = \varnothing \frac{\partial S}{\partial t} + v \mathcal{F}' \frac{\partial S}{\partial z} = 0 \quad (12)$$

On obtient à partir des équations de Darcy pour l'eau et l'air en ajoutant  $v_w$  et  $v_a$  l'expression suivante pour la vitesse totale :

$$\frac{v}{\Lambda} = - \frac{\partial p_a}{\partial z} + f_w \frac{\partial p_c}{\partial z} + f_w \Delta \rho g + \rho_a g \quad (13)$$

A partir de la loi de Darcy pour l'air on peut remplacer les termes de pression et de masse spécifique de l'air dans l'équation (13) en fonction de  $v_a$  avec le résultat :

$$\frac{v}{\Lambda} = \frac{v_a}{\lambda_a} + f_w \frac{\partial p_c}{\partial z} + f_w \Delta \rho g = \frac{v - v_w}{\lambda_a} + f_w \frac{\partial p_c}{\partial z} + f_w \Delta \rho g \quad (14)$$

Multipliant les deux membres de l'équation (14) par  $\frac{\lambda_a}{v}$  et utilisant le fait que  $f + f_a = 1$  on obtient :

$$\frac{v_w}{v} = \mathcal{F} = f \left\{ 1 + \frac{\lambda_a p_c'}{v} \frac{\partial S}{\partial z} + \frac{\lambda_a \Delta \rho g}{v} \right\} \quad (15)$$

ou encore :

$$\mathcal{F} = f - \frac{E}{v} \frac{\partial S}{\partial z} + \frac{G}{v} \quad (16)$$

ou bien encore

$$\mathcal{F} = f \left\{ 1 + \frac{\lambda_a \Delta \rho g}{v} \right\} - \frac{E}{v} \frac{\partial S}{\partial z} = F - \frac{E}{v} \frac{\partial S}{\partial z} \quad (17)$$

où l'on a défini deux fonctions non négatives de la saturation, E et G :

$$E = -f_w \lambda_a p'_e \quad (18)$$

$$G = f \lambda_a \Delta \rho g \quad (19)$$

et la fonction d'écoulement fractionnel si l'on néglige l'effet capillaire mais non l'effet gravitaire, F :

$$F = f \left\{ 1 + \frac{\lambda_a \Delta \rho g}{v} \right\} = f + \frac{G}{v} \quad (20)$$

Comme dans le chapitre 1 on peut calculer la vitesse totale moyenne  $\bar{v}$ , par l'équation (2) en général, par l'équation (4) ou même par l'équation (5) tant que le sommet de la colonne reste saturé. La détermination du profil de teneur en eau n'est, à nouveau, nécessaire que pour évaluer l'intégrale du dénominateur dans l'équation (5).

Dans le cas d'une colonne ouverte (MOREL-SEYTOUX, 1973 b) comme l'effet de compression est négligeable on a supposé que pour déterminer ce dénominateur il suffisait de calculer un profil de saturation approché. On a donc choisi de résoudre non pas l'équation (12) mais l'équation suivante :

$$\emptyset \frac{\partial S}{\partial t} + v f' \frac{\partial S}{\partial z} = 0 \quad (21)$$

qui rend compte du phénomène d'interaction visqueuse des deux fluides mais non plus de l'effet de poussée d'Archimède. Pour décrire l'effet de contre-courant induit par la compression de l'air il faut maintenant résoudre l'équation :

$$\emptyset \frac{\partial S}{\partial t} + \bar{v} F' \frac{\partial S}{\partial z} = 0 \quad (22)$$

dont la solution est obtenue comme pour le cas de la colonne ouverte en calculant la vitesse de propagation d'une saturation donnée :

$$\left( \frac{dz}{dt} \right)_s = \frac{\bar{v}}{\emptyset} F' = \frac{\bar{v}}{\emptyset} f' + \frac{G'}{\emptyset} \quad (23)$$

d'où l'on déduit par intégration par rapport au temps :

$$Z_s = Z_0 + f' \frac{W}{\emptyset} + \frac{G'}{\emptyset} t \quad (24)$$

où  $Z_0$  est la position initiale de la saturation S, qui dans le cas étudié ici d'un profil initial uniforme est zéro pour toutes les saturations supérieures à  $S_i$ . Le problème est compliqué par le fait que l'exploitation directe de l'équation (24) conduit à plusieurs valeurs de S pour une même valeur de Z, ce qui n'a pas de sens physique. On tourne la difficulté en introduisant un front dans le profil de teneur en eau (MOREL-SEYTOUX 1967 ; MOREL-SEYTOUX, 1969 ; BRUSTKERN et MOREL-SEYTOUX, 1970). La position et la taille du front sont choisies de manière à satisfaire la condition de conservation de masse et à minimiser la taille du front.

#### 4. MÉTHODE DE CALCUL

Supposons qu'à un instant donné  $t_1$ , le profil de saturation ait l'allure indiquée sur la figure 6a et qu'il ait été obtenu à partir d'une vitesse totale de valeur  $v_1 = \bar{v}(t_1)$ , pour laquelle la courbe  $F(S, \bar{v}_1) = F_1(S)$  a l'allure indiquée sur la figure 6b. Comme l'on connaît le profil  $S(z, t_1) = S_1(z)$  on peut calculer une nouvelle valeur de  $\bar{v}$ ,  $\bar{v}_2$  directement numériquement à partir de l'équation :

$$\bar{v}_2 = \frac{\rho_w g (H + H_f) + \Delta \rho g \int_0^{z_{BL1}} f_w dz - \frac{H_A W_1 \rho_w g}{\emptyset D (\bar{S} - S_i) - W_1}}{\int_0^{z_{BL1}} \frac{dz}{V}} \quad (25)$$

où  $W_1$  est la hauteur cumulée de la lame d'eau infiltrée depuis le temps 0 jusqu'au temps  $t_1$ . Une fois connu  $\bar{v}_2$  et en supposant que  $\bar{v}_2$  reste sensiblement constant, dans l'intervalle de temps  $t_2 - t_1$  (court), on peut calculer la courbe  $F_2$  (équation 20) et déplacer le point courant a de saturation  $S_a$  (voir fig. 6a) d'une distance  $aa'$  proportionnelle à la pente de la courbe  $F_2$  au point a' (voir fig. 6b). On détermine ainsi le nouveau profil par points. Il est bon de remarquer que les points correspondant aux teneurs en eau élevées (arc  $ed_1 d_2$ ) se sont déplacés vers le haut,

formant l'arc  $ed'd_2$ . En effet, la pente de  $F_2$  est négative sur l'arc  $ed'd_2$ . Le point  $d_2$  n'a pas bougé car la pente de  $F_2$  est nulle à ce point comme d'ailleurs au point  $e$ . Les points  $d_1$  et  $d_2$  aux temps respectifs  $t_1$  et  $t_2$  séparent les profils en deux zones : une zone d'imbibition et une zone de drainage. Il ne faut pas confondre la zone de drainage avec la zone de contre-courant. Ce sont les points  $c_1$  et  $c_2$  aux temps respectifs  $t_1$  et  $t_2$  qui marquent la position inférieure de la zone de contre-courant. En effet tout le long de l'arc  $ed_2a'c_2$  la valeur de  $F_2$  est supérieure à 1. Autrement dit dans cette zone  $v_w > \bar{v}$  et donc  $v_a < 0$ . Il est intéressant de remarquer que la saturation  $S_a$  qui se propage vers le bas pendant l'intervalle de temps  $t_1, t_2$ , et qui n'était pas au temps  $t_1$  dans la zone de contre-courant, se trouve dans cette zone au temps  $t_2$ .

On voit que l'onde de contre-courant se propage plus vite vers le bas que la zone de drainage.

Une fois déterminé le profil de saturation au temps  $t_2$  on est ramené au problème précédent. On calcule  $\bar{v}_3$  à partir de l'équation (25) en utilisant le profil  $S(z, t_2) = \bar{S}_2(z)$ . Ensuite on calcule  $F(S, \bar{v}_3) = F_3(S)$ . A partir de  $F_3$  on peut calculer le déplacement de chaque point du profil  $S_2(z)$  pour l'intervalle de temps  $t_2, t_3$ . Procédant ainsi de proche en proche on peut calculer l'évolution du profil de saturation aussi longtemps que l'on désire. La hauteur d'eau infiltrée pendant le temps  $(t_2 - t_1)$  est calculée à partir des profils de saturation par l'expression :

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \varnothing \left( \int_0^{z_{BL2}} S_2(z) dz - \int_0^{z_{BL1}} S_1(z) dz \right) \tag{26}$$

La quantité  $\frac{\Delta W}{\Delta t}$  représente la valeur moyenne du taux d'infiltration pendant la période  $t_1, t_2$ . Pendant la période de décroissance de l'infiltration, et tant que le sol reste saturé en surface, on aura l'inégalité :

$$\bar{v}_t > \frac{\Delta W}{\Delta t} > \bar{v}_{t+\Delta t}$$

Comme dans le cas d'une colonne ouverte on aimerait pouvoir calculer l'infiltration sans calculer une succession de profils de saturation. On peut effectivement obtenir une équation pour  $I$  à partir de l'équation (25) en exprimant la différentielle de  $z$  obtenue à partir de l'équation (24) à un temps donné. On a en effet :

$$dz = \left( f'' \frac{W}{\varnothing} + \frac{G''}{\varnothing} t \right) dS \tag{27}$$

Après substitution dans l'équation (25) on obtient :

$$I = \frac{\rho_w g (H + H_f) + \Delta \rho g \int_0^{z_{BL}} f_w dz - \frac{H_A W \rho_w g}{\varnothing D (\tilde{S} - S_f) - W}}{\frac{W}{\varnothing} \int_{\tilde{S}}^{S_{BL}} f'' \frac{dS}{\Lambda} + \frac{t}{\varnothing} \int_{\tilde{S}}^{S_{BL}} \frac{G''}{\Lambda} dS} \tag{28}$$

Le problème principal vient de ce que  $S_{BL}$  varie dans le temps. Mais  $S_{BL}$  varie peu et, ce qui est mieux, la valeur de  $\frac{f''}{\Lambda}$  est faible autour de la valeur de  $S_{BL}$ .

On pourra donc évaluer la première intégrale dans l'équation (28) pour la valeur de  $S_{BL}$  correspondant à la courbe  $f$ . Finalement on obtient pour  $I$  l'expression :

$$I = \frac{\tilde{K} \left[ H_f + H - \left( \frac{H_A}{D} - 1 \right) Z_f \right]}{\beta Z_f - \gamma \frac{\tilde{K} t}{\varnothing (\tilde{S} - S_f)}} \tag{29}$$

où  $\gamma$ , un nombre sans dimension, est donné par la relation :

$$\gamma = (\tilde{S} - S_f) \int_{S_{BL}}^{\tilde{S}} \frac{g''}{\varnothing \Lambda} dS \tag{30}$$

où  $g(S)$  est une forme sans dimension de  $G$ , précisément :

$$g(S) = (1 - f_w) k_{tw} \tag{31}$$

L'équation (29) peut s'intégrer avec le résultat :

$$\ln \left\{ 1 - \frac{\gamma W}{\varnothing (\tilde{S} - S_i) H_f} + \frac{\gamma \tilde{K}}{\varnothing (\tilde{S} - S_i) H_f \beta} \left[ \gamma - \left( \frac{H_A}{D} - 1 \right) t \right] \right\} = \frac{\gamma}{\left( \frac{H_A}{D} - 1 \right)} \ln \left\{ 1 - \frac{\left( \frac{H_A}{D} - 1 \right) W}{\varnothing (\tilde{S} - S_i) H_f} \right\} \quad (32)$$

On peut vérifier que l'équation (32) satisfait bien la condition initiale  $W = 0$  à  $t = 0$ . Si  $H$  n'est pas nulle il suffit de remplacer  $H_f$  par  $(H_f + H)$  partout ou  $H_f$  apparaît. Le deuxième membre de l'équation (32) tend vers moins l'infini pour

$$W = \frac{\varnothing (\tilde{S} - S_i) H_f}{\left( \frac{H_A}{D} - 1 \right)}$$

c'est-à-dire quand  $I$  s'annule. L'infiltration s'arrête au temps  $t_c$  donné par l'expression :

$$t_c = \frac{\varnothing (\tilde{S} - S_i) (H_f + H)}{\gamma \frac{\tilde{K}}{\beta} \left( \frac{H_A}{D} - 1 \right)} \quad (33)$$

L'infiltration ne s'arrêtera pas si  $D$  est supérieur à  $H$ . Pour de courtes colonnes, l'infiltration s'arrêtera au temps  $t_c$ .

### 5. L'ÉCHAPPÉE D'AIR

Il est apparent au regard de la figure 6 que tôt ou tard les saturations élevées qui se propagent vers le haut voudront sortir de la colonne.

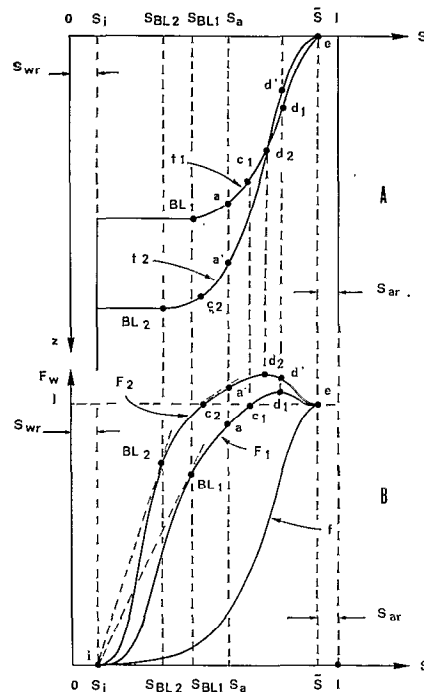


Fig. 6. — Evolution du profil de saturation et de la fonction F avec le temps



Physiquement cela veut dire, parlant de manière imagée, que « l'air aura fait son trou ». La méthode de calcul décrite dans le chapitre précédent permet de calculer le moment précis de cette échappée d'air à travers la surface. A partir de ce moment les équations dérivées pour le calcul du taux d'infiltration dans les chapitres précédents ne sont plus valables. La description de ce nouveau phénomène et de son effet sur le taux d'infiltration ainsi que la description du phénomène d'hystérésis formeront le sujet de l'article suivant.

## 6. CONCLUSIONS

On a montré dans cet article l'importance relative de la compression de l'air sur l'infiltration. Moyennant certaines hypothèses on a pu dériver une loi d'infiltration qui tient compte de cet effet (équations (8) et (9)) et qui est valable pour de longues colonnes. On a mis en évidence le phénomène de contre-courant. Ce phénomène se manifestera d'autant plus vite que la colonne est plus courte, mais il apparaîtra même si la colonne est infinie. On a pu tenir compte de cet effet et dériver une loi d'infiltration approchée (équations (29) et (32)) valable même pour des colonnes courtes. La limite de validité de cette loi d'infiltration correspond au moment précis où l'air s'échappe de la colonne par le sommet. L'étude combinée de ce phénomène et de l'effet d'hystérésis est le sujet du prochain article.

## REMERCIEMENTS

Les bases théoriques de cet article ont pu être développées grâce à un contrat avec l'Agence OWRR (Office of Water Resources Research) des Etats-Unis d'Amérique, projet B-070 - Colorado. Elles ont pu être approfondies grâce au soutien financier du Centre National de la Recherche Scientifique pendant le congé sabbatique de l'auteur et grâce à la collaboration active du Groupe d'Hydrologie de l'Institut de Mécanique de Grenoble. Je tiens à remercier tous mes collègues de Grenoble pour de nombreuses discussions et particulièrement M. KHANJI pour son aide efficace dans tous les calculs et M. TEHEL pour la suggestion de la méthode d'intégration de l'équation (29).

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] BRUSTKERN, (R. L.) et MOREL-SEYTOUX (H. J.) - 1970 - Analytical treatment of Two-Phase Infiltration. *Journal of the Hydraulics Division*, ASCE, vol. 96, n° HY 12, décembre 1970, pp. 2535-2548.
- [2] BUCKLEY, (S. E.) et LEVERETT (M. C.) - 1942 - Mechanism of fluid displacements in Sands. *Trans. AIME*, vol. 146, 1942, p. 107-116.
- [3] MEIN, (R. G.) et LARSON (C. L.) - 1973 - Modeling infiltration during a steady rain. *Water Resources Research Journal*, vol 9, n° 2, avril 1973, p. 384-394.
- [4] MOREL-SEYTOUX (H. J.) - 1967 - A study of Quasi-Linear Non Capillary Two-Phase Flow in Porous Media. *Development in Mechanics*, vol. 4, Proceedings of the 10th Midwestern Mechanics Conference, Colorado State University, August 1967, Johnson Publishing Company, p. 1324-1335.
- [5] MOREL-SEYTOUX (H. J.) - 1969 - Introduction to Flow of Immiscible Liquids in Porous Media, chapitre XI dans « Flow through Porous Media », Academic Press, 1969, p. 455-516.
- [6] MOREL-SEYTOUX (H. J.) - 1973 a - Pour une théorie réformée de l'infiltration 1<sup>re</sup> partie : Pourquoi? *Cah. Hydrologie de l'ORSTOM*, vol. X, n° 2, 1973, p. 185-194.
- [7] MOREL-SEYTOUX (H. J.) - 1973 b - Pour une théorie réformée de l'infiltration 2<sup>e</sup> partie : Comment? *Cah. Hydrologie de l'ORSTOM*, vol. X, n° 3, 1973, p. 197-209.
- [8] MOREL-SEYTOUX (H. J.) - 1973 c - Two-Phase Flows in Porous Media. Chapitre dans *Advances in Hydrosciences*, V.T. CHOW, éditeur, vol. 9, 1973, Academic Press, p. 119-202.
- [9] NOBLANC (A.) et MOREL-SEYTOUX (H. J.) - 1972 - A perturbation Analysis of Two-Phase Infiltration. *Journal of Hydraulics Division*, ASCE, vol. 98, n° HY 9, septembre 1972, p. 1527-1541.
- [10] NOBLANC (A.) et MOREL-SEYTOUX (H. J.) - 1974 - Closure for above reference, *Journal of Hydraulics Division*, ASCE, vol. 100, 1974.
- [11] PHUC, LE VAN and MOREL-SEYTOUX (H. J.) - 1972 - Effect of Soil Air movement and Compressibility on Infiltration Rates. *Proceedings of the Soil Science Society of America*, vol. 36, n° 2, mars-avril 1972, p. 237-241.