

OFFICE DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
ET TECHNIQUE OUTRE-MER

—
CENTRE DE BRAZZAVILLE
—

THEORIE DE LA PROGRESSION D'UNE PERTURBATION
THERMIQUE EN MILIEU ISOTROPE ET HOMOGENE

—
par

Bernard POUYAUD

SERVICE HYDROLOGIQUE

28 NOV 1972

O. R. S. T. O. M.

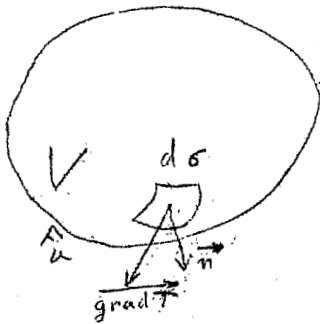
Collection des Publications
AVRIL 1970

no B5764

INTRODUCTION

MISE EN EQUATION DU PROBLEME GENERAL

Soit un milieu homogène et isotrope dans lequel il n'y a pas de transformation de la chaleur en une autre forme d'énergie, ni inversement.



Soit C : la chaleur spécifique
 K : la conductibilité thermique
 a : la diffusivité thermique = $\frac{K}{C}$

Soit $T(x,y,z,t)$ la température en un point

Soit Q : la quantité d'énergie calorifique présente dans une région du milieu considéré de frontière extérieure F_v et de volume V .

- La loi de conductibilité pour une quantité de chaleur élémentaire dQ traversant la surface F_v , s'écrit :

$$dQ = dt \iint_{F_v} K \cdot \overrightarrow{\text{grad } T} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma$$

- La loi d'échauffement du volume V s'écrit de la façon suivante :

$$dQ = \iiint_V C \cdot dT \cdot dx dy dz$$

$dx dy dz$ représentant l'élément de volume de V .

Egalons les deux valeurs de dQ et appliquons la formule de STOCKES sur la frontière Fv.

$$\begin{aligned} \iiint_V C. dT. dx dy dz &= dt \iint_{Fv} \overrightarrow{\text{grad}} T. \vec{n} d\sigma \\ &= \iiint_V K. \Delta T dx dy dz \end{aligned}$$

Pour cela nous avons admis K constant dans tout le volume; ΔT est le laplacien de T.

$$\text{Il vient } \iiint_V (K \Delta T - C \frac{\partial T}{\partial t}) dx dy dz = 0$$

Cette dernière équation doit être vérifiée dans le milieu, quelque soit le volume V choisi :

$$\text{soit : } K. \Delta T - C. \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

et en introduisant la diffusivité a :

$$a \Delta T - \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

équation connue sous le nom d'équation de la chaleur.

PROPAGATION D'UNE ONDE THERMIQUE DANS UN CORPS HOMOGENE ET ISOTROPE

Selon la forme géométrique des conditions initiales ou aux limites imposées, nous utiliserons diverses formulations de l'équation de la chaleur.

1ère PARTIE - Cas plan du mur semi-infini.

La modification de température initiale s'effectue sur un plan. Les isothermes seront donc toujours des plans parallèles à ce plan initial. Si x est la direction perpendiculaire à ces plans, l'équation de la chaleur s'écrit :

$$a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

La résolution théorique est classique dans deux cas intéressants :

- A) - Cas du mur semi-infini, initialement à la température zéro, sur la face duquel on maintient une température θ_0 , pendant un temps Δt à partir de l'origine des temps.

La température $\theta_{x,t}$ en un point x à l'instant t est donnée de façon approchée, d'autant plus exacte que t est grand vis-à-vis de Δt par la relation :

$$\theta_{x,t} \approx \frac{\theta_0}{2} \frac{\Delta t}{\sqrt{\pi a}} \frac{x}{t \sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4at}}$$

La température $\theta_{x,t}$ passe en chaque point par un maximum $\theta_{\max,t_{s,x}}$ au temps $t = t_{s,x}$

$t_{s,x}$ peut être défini comme le temps mis par la perturbation à atteindre le point x considéré.

En annulant $\frac{d\sigma_{x,t}}{dt}$ on trouve aisément :

$$t_{s,x} = \frac{x^2}{6a}$$

On peut aussi calculer l'étalement $\Delta t_{s,x}$ de la perturbation, défini par exemple comme le temps séparant les deux inflexions de part et d'autre du maximum, il vient :

$$\Delta t_{s,x} = \frac{\sqrt{10}}{15} \frac{x^2}{a}$$

Enfin, la valeur du maximum est donnée par :

$$\sigma_{\max,t_{s,r}} = \frac{300 \cdot \Delta t \cdot a}{\sqrt{\pi e}} \frac{1}{x^2}$$

B) - Cas du mur semi-infini, initialement à la température zéro, sur la face duquel on injecte un flux calorifique ψ_0 (en watts/cm²) pendant un temps Δt très court.

La température $\sigma_{x,t}$ en un point x à l'instant t est :

$$\sigma_{x,t} \sim \frac{\psi_0 \cdot \Delta t}{\sqrt{\pi k^2 a}} \frac{\frac{x^2}{e^{4at}}}{\sqrt{t}}$$

avec les mêmes approximations que précédemment.

On calcule de même :

$$t_{s,x} = \frac{x^2}{2a}$$

$$\Delta t_{s,x} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{x^2}{a}$$

Le maximum de température devient :

$$\sigma_{\max, t_{s,x}} = \frac{q_0 \cdot t}{\sqrt{\frac{m_e}{2}} \cdot C} \cdot \frac{1}{x}$$

où l'on peut dès maintenant noter l'apparition de la capacité calorifique C.

Il vient donc :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} \cdot \left(\frac{-r^2}{4at^2} \right)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial r} = \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial r} = \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} \cdot \frac{r}{2at}$$

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \eta^2} \cdot \frac{r^2}{4a^2 t^2} + \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} \cdot \frac{1}{2at}$$

reportons ces valeurs dans l'expression de l'équation de la chaleur, il vient :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \eta} \left(- \frac{r^2}{4at^2} \right) = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \eta^2} \cdot \frac{r^2}{4a^2 t^2} + \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} \cdot \frac{1}{2r} + \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} \cdot \frac{1}{2r}$$

soit :

$$\eta \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \eta^2} + (1 + \eta) \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} = 0$$

équation différentielle à une variable.

Posons alors : $\chi = \frac{d\sigma}{d\eta}$

soit : $\eta \frac{d\chi}{d\eta} + (1 + \eta) \chi = 0$

$$\frac{d\chi}{\chi} = - \left(\frac{1}{\eta} + 1 \right) d\eta$$

qui s'intègre en :

$$\log \chi = - \log \eta - \eta + \log A$$

soit :

$$\chi = A \frac{e^{-\eta}}{\eta}$$

et

$$\sigma = A \int \frac{e^{-\eta}}{\eta} d\eta + B$$

la fonction $\frac{e^{-\eta}}{\eta}$ sous le signe somme est connue sous le nom d'exponentielle intégrale et tabulée sous la forme :

$$E_1(-\eta) = - \int_{-\infty}^{-\eta} \frac{e^{-\eta}}{\eta} d\eta$$

soit pour nous :

$$\sigma_{s,t} = A \int_{+\infty}^{+} \frac{r^2}{4at} \frac{e^{-\eta}}{\eta} d\eta + B$$

CALCUL DES CONSTANTES A et B

Conditions aux limites :

Calcul de B

$t = 0$ et $\sigma = 0$ dans l'ensemble du milieu.

pour $r \neq 0$, on a alors $\eta = \frac{r^2}{4at} = \infty$

$$\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\eta}}{\eta} d\eta = 0$$

soit $B = 0$

Calcul de A

ψ_0 est le flux de chaleur injecté par cm de l'axe des z par la source chauffante.

Sur la surface de la source de chaleur de rayon r_0 , nous avons :

$$\psi_0 = 2\pi r_0 \cdot K \cdot \left(\frac{d\sigma}{dr} \right) r_0$$

K est la conductibilité thermique

$$\text{soit } \varphi_0 = 2\pi r_0 \cdot K \left(\frac{d\theta}{d\eta} \right)_{r_0} \left(\frac{d\eta}{dr} \right)_{r_0}$$

$$\text{mais } \left(\frac{d\theta}{d\eta} \right)_{r_0} = \alpha = A \left(\frac{e^{-\eta}}{\eta} \right)_{r_0} ; \left(\frac{d\eta}{dr} \right)_{r_0} = \frac{r_0}{2at} ; (\eta)_{r_0} = \frac{r_0^2}{4at}$$

$$\text{d'où } \varphi_0 = A \cdot 4\pi \cdot K \cdot (e^{-\eta})_{r_0}$$

si r_0 est assez petit, t assez grand, $\eta \rightarrow 0$

$$\text{alors } e^{-\eta} \rightarrow 1. \text{ et } \varphi_0 = A \cdot 4\pi \cdot K \text{ soit } A = \frac{\varphi_0}{4\pi K}$$

L'équation d'établissement de la température est alors :

$$\sigma_{r,t} = \frac{\varphi_0}{4\pi K} \int_{+\infty}^{\frac{r^2}{4at}} \frac{e^{-\eta}}{\eta} d\eta$$

et en revenant à une expression en t en nous plaçant à r constant :

$$\sigma_{r,t} = \frac{\varphi_0}{4\pi K} \int_0^t \frac{e^{-\frac{r^2}{4at}}}{t} dt$$

B) - Cas d'une perturbation thermique

Le flux φ_0 est maintenu durant l'intervalle de temps Δt seulement à partir de l'origine des temps.

Pour effectuer le calcul nous allons imaginer la succession des deux états suivants :

1er Etat

A l'instant 0, on injecte sur l'axe des z un flux calorifique $+\varphi_0$ (en watts/cm) qui dure infiniment.

La loi d'établissement de la température est $\sigma_1(r,t)$

2ème Etat

A l'instant $0 + \Delta t$, on injecte sur l'axe des z un flux calorifique

Le maximum est atteint lorsque la dérivée $\frac{d\theta}{dt}$ s'annule;

posons $\lambda = \frac{r^2}{4a}$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{U_0 \Delta t}{4\pi K} e^{-\frac{\lambda}{t}} \left(\frac{1}{t} - \frac{\lambda}{t^2} - \frac{1}{t^2} \right)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{U_0 \Delta t}{4\pi K} e^{-\frac{\lambda}{t}} (t - \lambda)$$

La dérivée s'annule pour :

$$t = 0$$

$$t = \infty$$

et $t = \lambda = \frac{r^2}{4a}$ qui correspond au maximum

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)$$

puisque les autres dérivées partielles de θ sont nulles.

A) - Cas sphérique de la mise en température d'un milieu infini initialement à la température 0 par un flux de chaleur ϕ_0 (en watts/cm) émis ponctuellement.

Reprenons le même changement variable $\eta = \frac{r^2}{4at}$

l'équation de la chaleur devient :

$$\eta \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \left(\eta + \frac{3}{2} \right) = 0$$

Posons $\alpha = \frac{d\theta}{d\eta}$ il vient $\frac{d\alpha}{d\eta} = - \left(\frac{3/2}{\eta} + 1 \right) \alpha$

d'où
$$\frac{d\theta}{d\eta} = A \frac{e^{-\eta}}{\eta^{3/2}}$$

et
$$\theta_{r,t} = A \int_{\infty}^{\eta} \frac{e^{-\eta}}{\eta^{3/2}} d\eta + B$$

Calcul des constantes

Calcul de B

Les conditions limites conduisent là aussi à prendre $B = 0$

Calcul de A

Calculons le flux traversant la frontière de la source chaude de rayon r_0 , on a :

$$\phi_0 = 4\pi r_0^2 \cdot K \cdot \left(\frac{d\theta}{dr} \right)_{r_0} = 4\pi r_0^2 \cdot K \cdot \left(\frac{d\theta}{d\eta} \right)_{r_0} \left(\frac{d\eta}{dr} \right)_{r_0}$$

or,
$$\left(\frac{d\theta}{d\eta}\right)_{r_0} = A \left(\frac{e^{-\eta}}{\eta^{3/2}}\right)_{r_0} ; \left(\frac{d\eta}{dr}\right)_{r_0} = \frac{r_0}{2at}$$

soit :
$$\phi_0 = 8\pi r_0 \cdot K \cdot A \cdot \left(\frac{e^{-\eta}}{\sqrt{\eta}}\right)_{r_0}$$

si r_0 est assez petit et t assez grand, on a $\eta \rightarrow 0$ et $e^{-\eta} \rightarrow 1$. soit :

$$A = \frac{\phi_0}{16\pi \sqrt{a} K} \frac{1}{\sqrt{t}}$$

La présence de t peut paraître bizarre dans la "constante" A . En fait, de nombreuses approximations ont été faites au cours de ce calcul, et seule l'expérimentation sera à même de vérifier la théorie.

Donc :

$$\begin{aligned} \sigma_{r,t} &= A \int_{\infty}^{\eta} \frac{e^{-\eta}}{\eta^{3/2}} d\eta + B \\ &= A \int_0^t e^{-\frac{r^2}{4at}} \frac{2\sqrt{a}}{r\sqrt{t}} dt + B \end{aligned}$$

soit :

$$\sigma_{r,t} \sim \frac{\phi_0}{8\pi K \cdot r \cdot \sqrt{t}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{r^2}{4at}}}{\sqrt{t}} dt$$

B) - Cas d'une perturbation thermique

En reprenant la même superposition de deux états d'équilibre que dans le cas cylindrique, il vient :

$$\sigma_{r,t} \sim \frac{\phi_0}{8\pi K \cdot r \cdot \sqrt{t}} \int_{t-\Delta t}^t \frac{e^{-\frac{r^2}{4at}}}{\sqrt{t}} dt$$

soit en prenant la valeur moyenne de l'intégrale

$$\theta_{r,t} \approx \frac{\phi_0 \Delta t}{8 \pi K.r.} e^{-\frac{r^2}{4at}}$$

Le maximum est atteint lorsque $\frac{d\theta}{dt}$ s'annule, soit en posant

$$\lambda = \frac{r^2}{4a}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \text{Cst.} \cdot e^{-\frac{\lambda}{t}} \left(\frac{1}{t} \cdot \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2} \right) = \text{Cst.} \frac{e^{-\frac{\lambda}{t}}}{t^3} (\lambda - t)$$

Le maximum s'obtient donc pour $\lambda = t_{s,r} = \frac{r^2}{4a}$

$$t_{s,r} = \frac{r^2}{4a}$$

la valeur du maximum est :

$$\theta_{\text{max},s,r} = \frac{\phi_0 \cdot \Delta t}{2 \pi C e} \cdot \frac{1}{r^3}$$

Avec les mêmes restrictions sur l'exactitude des résultats.

4ème PARTIE - "Cas " Ellipsoïdal "

La modification de température se fait initialement sur un segment de droite de longueur $2c$, que nous confondrons avec l'axe des z , le centre du segment étant pris pour origine.

En coordonnées cylindriques, compte-tenu de la symétrie de révolution existante, l'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right)$$

cette équation n'a pas de solution simple.

Pour tourner cette difficulté, nous allons utiliser les résultats de la 3ème partie (cas sphérique) en imaginant le schéma de calcul suivant :

L'élévation de température $\theta_{z,r,t}$ est la somme d'élévations de température élémentaires $d\theta_{z,r,t}$, produites par des éléments de longueur dz de la source chaude de longueur Q .

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\varphi_0 \Delta t}{8 \pi K} \int_{-c}^{+c} \frac{d}{dt} \left(\frac{e^{-\frac{ro^2 + (z-z_0)^2}{4at}}}{t \sqrt{ro^2 + (z-z_0)^2}} \right) dz$$

cette dernière s'annule pour :

$$\frac{\frac{ro^2 + (z-z_0)^2}{4at}}{\sqrt{ro^2 + (z-z_0)^2}} \left(\frac{ro^2 + (z-z_0)^2 - 4at}{4at^3} \right) = 0$$

soit pour $t = 0$

$t = \infty$

et $t = \frac{ro^2 + (z-z_0)^2}{4a}$ auquel correspond le maximum,

donc :

$$t_{s,ro,z_0} = \frac{ro^2 + (z-z_0)^2}{4a}$$

La valeur du maximum est :

$$\theta_{\max, ro, z_0, t} = \frac{\varphi_0 \cdot \Delta t \cdot 4a}{8 \pi K} \int_{-c}^{+c} \frac{e^{-1}}{ro^2 + (z-z_0)^2} \cdot \frac{3}{2} dz$$

en introduisant $C = \frac{K}{a}$ il vient :

Nous allons considérer le cas particulier où P_0 est situé dans le plan médiateur du segment de droite $2c$, c'est-à-dire le cas où $z_0 = 0$.

L'expression de σ_{\max} s'allège alors considérablement.

Il vient :

$$\sigma_{\max. ro, t} = \frac{\varphi_0 \cdot t}{\Gamma C e} \cdot \frac{1}{ro^2} \cdot \frac{c/ro}{\sqrt{1+(c/ro)^2}}$$

REMARQUE 1.-

Cette expression permet de retrouver les expressions de σ_{\max} obtenues dans les cas cylindriques et sphériques. En effet :

Cas cylindrique

$$C \rightarrow \infty \quad \text{alors} \quad \frac{C/r}{1+(c/r)^2} \rightarrow \frac{Cr}{c/r)^2} \rightarrow 1$$

on retrouve bien $\sigma_{\max} = \frac{\varphi_0 \Delta t}{\Gamma C e} \cdot \frac{1}{r^2}$

Cas sphérique

$$C \rightarrow 0$$

Nous allons tout d'abord faire apparaître le flux total émis :

$$\phi_0 = 2 c \cdot \varphi_0$$

soit $\sigma_{\max. ro, t} = \frac{\phi_0 \Delta t}{2 C e} \cdot \frac{1}{ro^2} \cdot \frac{1/ro}{\sqrt{1+(c/ro)^2}}$

où $c/ro \rightarrow 0 \implies \frac{1/ro}{\sqrt{1+(c/ro)^2}} \rightarrow \frac{1}{ro}$

et nous retrouvons $\sigma_{\max.} = \frac{\phi_0 \cdot t}{2 C e} \cdot \frac{1}{r^3}$

REMARQUE 2.-

La méthode utilisée ne permet pas de calculer le temps auquel a lieu le maximum.

En effet la valeur $t_{s, r_0, z_0} = \frac{r_0^2 + (z-z_0)^2}{4a}$ n'a pas de signification physique autre que celle de traduire le temps mis par l'onde calorifique émise par l'élément de source dz pour atteindre P_0 .

REMARQUE 3.- Surfaces isothermes.

Les isothermes ne sont pas des surfaces simples dans les cas précédents.

Selon les valeurs de r_0 et z_0 ces surfaces prennent des aspects caractéristiques :

- si, r ou $z \rightarrow \infty$, on se rapproche du cas sphérique. Les isothermes sont alors des sphères.
- si, $r \rightarrow 0$ avec $(z) < c$, les isothermes se rapprochent des cylindres.

Dans tous les autres cas, les isothermes ne sont pas des courbes simples. On pourrait déterminer le lieu des points où on observe des maximums égaux, pour cela il suffit de faire $\theta_{\max.}(r_0, z_0, t) = Cst$, mais les calculs faits ne permettent pas de savoir s'il s'agit effectivement d'isothermes, puisque rien ne prouve que ces maximums soient atteints au même moment.

Néanmoins, si les $d\theta_{\max}$ élémentaires étaient fonction de $\frac{1}{t}$ seulement au lieu d'être fonction de $\frac{e}{4at}$ les isothermes seraient alors des ellipsoïdes ayant pour foyer les extrémités de la partie chauffante.

Pour cela il suffirait que $e - \frac{\rho^2}{4at}$ soit approximativement constant, ce qui est vrai si $\frac{\rho^2}{4at}$ reste voisin de 0, ce qui exige :

ou ρ petit, cas peu intéressant
ou $4at$ assez grand.

Dans le cas expérimental, nous verrons que nous sommes très près de cette condition. On peut alors sensiblement assimiler les surfaces isothermes à des ellipsoïdes de foyers $+c$ et $-c$.

REMARQUE 4.-

Le calcul de $\sigma_{\max. r_0, z_0, t}$ tel que nous l'avons mené, exclue la valeur $r_0 = 0$.

Nous allons le reprendre dans ce cas particulier. c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\varphi_0 \cdot \Delta t}{2\pi C e} \left[\frac{(z_0 - z)^{-2}}{2} \right]_{-c}^{+c} \\
 &= \frac{\varphi_0 \cdot \Delta t}{4\pi C e} \left[\frac{1}{(z_0 - c)^2} + \frac{1}{(z_0 + c)^2} \right] \\
 &= \frac{\varphi_0 \cdot \Delta t}{4\pi C e} \frac{-(z_0 - c)^2 + (z_0 + c)^2}{(z_0^2 - c^2)^2}
 \end{aligned}$$

soit finalement $\sigma_{\max, z_0, t} = \frac{\varphi_0 \cdot \Delta t}{\pi C e} \frac{z_0 c}{(z_0^2 - c^2)^2}$

Si $c \rightarrow 0$, on revient au cas sphérique :

faisons apparaître $\phi_0 = 2 c \varphi_0$

$$\sigma_{\max, z_0, t} = \frac{\phi_0 \cdot \Delta t}{2\pi C e} \frac{z_0}{(z_0^2 - c^2)^2}$$

lorsque $c \rightarrow 0$, $\frac{z_0}{(z_0^2 - c^2)^2}$ tend vers $\frac{1}{z_0^3}$

$$\text{soit } \sigma_{\max, z_0, t} = \frac{\phi_0 \cdot \Delta t}{2\pi C e} \frac{1}{z_0^3}$$

où l'on retrouve l'expression sphérique en remplaçant z_0 par r .