

MARÉE DE L'ÉCORCE: L'EFFET DU DEPHASAGE DANS L'ANALYSE DES OBSERVATIONS.

par J. METZGER (*)

Résumé — L'amplitude relative A de la marée de l'écorce se déduit du rapport entre les variations de pesanteur théorique et observée. La comparaison directe de leurs valeurs horaires permet de déterminer ce rapport, mais cette méthode néglige le déphasage éventuel de la marée de l'écorce par rapport aux forces génératrices. L'erreur (négative) qui en résulte sur les valeurs habituelles de A est d'environ 11 % (en supposant un déphasage de 1 h), si l'on compare uniquement les amplitudes extrêmes; elle atteint 14 % si l'on tient compte de l'ensemble des valeurs horaires.

Si l'effet du déphasage se fait peu ressentir aux heures où la marée est importante, on conçoit qu'il introduise une erreur relative considérable sur les valeurs horaires correspondant à une marée faible. Le calcul montre cependant qu'on n'améliore guère le résultat global en éliminant systématiquement ces dernières.

Summary — The relative amplitude A of the earth tide is deduced from the ratio of the theoretical variations of gravity to the observed. The direct comparison of their hourly values allows the determination of this ratio, but this method neglects the eventual dephasing of the earth tide over the generating forces. The resulting (negative) error on the usual values of A is about 11 % (supposing a dephasing of 1 hour), if only extreme amplitudes are compared; it reaches 14 % if the totality of the hourly values is taken into account.

If the effect of the dephasing is slight at the hours when the tide has a great value, it is conceivable that it introduces a noticeable relative error on the hourly readings corresponding to a low value. The computation shows nevertheless that the total result is little improved by systematic elimination of the latter.

Introduction — La superposition directe des courbes expérimentale et théorique de la marée gravimétrique permet généralement de conclure à l'absence de déphasage entre l'attraction luni-solaire et la marée observée et on admet ainsi que la variation de déformation est en phase avec la variation théorique. Certaines séries d'observations font cependant exception à cette règle; l'analyse harmonique montre d'ailleurs, dans la plupart des cas, l'existence d'un tel déphasage, généralement faible, il est vrai.

Dans le dépouillement d'une série de mesures, nous avons été amené, par

(*) J. METZGER, Géophysicien à l'Institut Français d'Océanie, *Nouméa (Nouvelle-Calédonie)*.

suite d'une dérive capricieuse du gravimètre, à déterminer directement les rapports entre les valeurs horaires de la marée théorique et celles de la marée observée; celles-ci ont été mesurées à partir d'une ligne de base, rejoignant les points de marée nulle et obtenue par comparaison des sommets des courbes théorique et observée. Mais cette méthode de calcul présente précisément l'inconvénient de supposer la marée de l'écorce en phase avec l'attraction luni-solaire. Désignons par A le rapport de la variation de déformation à la variation théorique; si elles sont en phase, nous avons

$$(1) \quad A + 1 = a,$$

a étant le rapport de la marée observée à la variation théorique; c'est ce dernier rapport qui est directement accessible par l'expérience. Mais dans l'hypothèse d'un déphasage, la valeur A ne vérifie plus l'égalité (1); suivant l'importance du déphasage (que nous supposerons faible) cette relation sera plus ou moins approchée; nous dirons que la valeur de A est affectée d'une certaine erreur que nous nous proposons de calculer.

Cherchons d'abord dans quelle mesure la simple superposition des courbes de l'attraction théorique et de la gravité observée permettrait, par la comparaison des abscisses des maxima, de mettre en évidence un tel déphasage. Négligeant le facteur constant, nous mettrons la variation théorique sous la forme:

$$y_1 = 3 \cos^2 Z - 1 = \frac{3}{2} \cos 2Z + \frac{1}{2}$$

et nous supposerons Z variant linéairement avec le temps de 0 à 360°, pour nous placer dans le cas d'une variation sinusoidale de y_1 . En posant:

$$2Z = z$$

nous écrirons:

$$2y_1 = 3 \cos z + 1.$$

La variation de déformation y_2 aura, par définition, une amplitude relative A et nous supposerons qu'elle présente un certain retard sur y_1 , défini par un déphasage α en z :

$$2y_2 = A [3 \cos (z - \alpha) + 1].$$

La variation de gravité observée y_α sera donc représentée par:

$$2y_\alpha = 2y_1 + 2y_2 = 3(1 + A \cos \alpha) \cos z + 3A \sin \alpha \sin z + (1 + A).$$

Rappelons qu'en l'absence de déphasage elle s'écrit:

$$2y_0 = (1 + A)(3 \cos z + 1)$$

et présente ses valeurs extrêmes pour $z = 0, \pi, \dots$. Nous avons maintenant:

$$2 \frac{dy_\alpha}{dz} = -3(1 + A \cos \alpha) \sin z + 3A \sin \alpha \cos z.$$

Les maxima et minima se produisent donc pour $z = \beta, \beta + \pi, \dots$ tel que:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{A \sin \alpha}{1 + A \cos \alpha}.$$

Nous envisageons des valeurs faibles de σ , inférieures à 1 radian, p. ex. En limitant les développements des lignes trigonométriques aux 2 premiers termes, et en effectuant le quotient du 2ème membre, nous écrivons:

$$\beta + \frac{1}{3} \beta^3 + \dots = \frac{A}{1+A} \alpha + \frac{A(2A-1)}{6(1+A)^2} \alpha^3 \dots$$

d'où, en utilisant la méthode des coefficients indéterminés:

$$\beta = \frac{A}{1+A} \alpha \left[1 - \frac{1-A}{6(1+A)^2} \alpha^2 \dots \right].$$

Supposons, p. ex. un retard de la variation de déformation de 1 h. La variation de Z , en 24 h est de 2π , celle de z est de 4π ; 1 h correspond donc à un déphasage en z de:

$$\alpha = \frac{4\pi}{24} = 30^\circ = 0.524 \text{ rad.}$$

le 2ème terme du crochet devient ainsi égal à

$$\begin{array}{l} 0.019 \text{ pour } A = 0.30 \\ 0.029 \quad \quad \quad 0.15 \end{array}$$

valeurs faibles devant 1. Nous nous contenterons donc d'écrire:

$$(2) \quad \beta = \frac{A}{1+A} \alpha.$$

Un retard de 1 h de y_2 se traduira par un décalage des extréma de la courbe résultante de:

$$\begin{array}{l} 0.23 \text{ h pour } A = 0.30 \text{ c\`ad. } a \neq 1.30 \\ 0.13 \quad \quad \quad 0.15 \quad \quad \quad 1.15 \end{array}$$

Ce décalage sera difficile à mettre en évidence sur une courbe expérimentale, surtout si a est faible.

La comparaison des courbes de la marée observée et de la marée théorique ne nous donnera donc, d'une façon générale, que des renseignements très incertains sur l'existence éventuelle d'un déphasage de la variation de déformation.

Calculons maintenant l'erreur systématique que ce déphasage α peut introduire dans la valeur des rapport a et A . Nous envisageons, pour la détermination de a , les deux modes de calcul suivants: comparaison des amplitudes complètes des courbes théoriques et expérimentales, comparaison des valeurs horaires de ces mêmes courbes.

a) *Comparaison des amplitudes complètes* — En l'absence de déphasage, l'amplitude complète de la variation de gravité, c. à d. de la courbe expérimentale est:

$$Y_0 = 3(1+A)$$

et celle de la variation théorique:

$$Y_1 = 3$$

leur rapport donnait $1+A$ c. à d. a . L'erreur absolue sur a sera donc égale, au

facteur 3 près, à celle que présentera l'amplitude complète Y_α de la courbe expérimentale; son maximum est donné par $z = \beta$, son minimum par $z = \pi + \beta$, d'où:

$$Y_\alpha = 3[(1 + A \cos \alpha) \cos \beta - A \sin \alpha \sin \beta].$$

En limitant les développements, puis les produits, aux termes de puissance 2, cette expression s'écrit:

$$Y_\alpha = 3 \left[(1 + A) - \frac{1}{2} (\beta^2 + A (\alpha - \beta)^2) \right]$$

soit en remplaçant β par sa valeur (2):

$$Y_\alpha = 3 \left[(1 + A) - \frac{1}{2} \frac{A}{1 + A} \alpha^2 \right].$$

L'erreur absolue sur $1 + A$, c. à d. sur a , est donc:

$$(3) \quad \varepsilon_a = -\frac{1}{2} \frac{A}{1 + A} \alpha^2$$

et l'erreur relative

$$\varepsilon_r = -\frac{1}{2} \frac{A}{(1 + A)^2} \alpha^2.$$

Elles sont proportionnelles à α^2 .

Toujours pour $\alpha = 30^\circ = 0.524$ rad., soit 1 h nous aurons:

$$\begin{array}{lll} \text{sur } a = 1.30 & \varepsilon_a = -0.031 & \varepsilon_r = -0.024 \\ a = 1.15 & -0.018 & -0.016. \end{array}$$

On voit que cette erreur peut porter sur la 2ème décimale de l'expression numérique de a ; notons que moyennant la relation (1) nous aurons sur A la même erreur absolue que sur a , d'où pour l'erreur relative de A :

$$(4) \quad \varepsilon_A = \frac{\varepsilon_a}{A} = -\frac{1}{2(1 + A)} \alpha^2$$

soit:

$$\begin{array}{ll} \text{pour } A = 0.30 & \varepsilon_A = -0.10 \\ & 0.15 \quad -0.12 \end{array}$$

b) *Comparaison des valeurs horaires* — L'expression du rapport a fourni par l'une quelconque des observations, effectuée à l'instant défini par Z , est par définition

$$a(z) = \frac{y_\alpha(z)}{y_1(z)}$$

$2y_\alpha(z)$ peut se mettre sous la forme:

$$2y_\alpha(z) = (1 + A)(3 \cos z + 1) - 3A(1 - \cos \alpha) \cos z + 3A \sin \alpha \sin z,$$

d'où

$$a(z) = (1 + A) - A(1 - \cos \alpha) \frac{3 \cos z}{3 \cos z + 1} + A \sin \alpha \frac{3 \sin z}{3 \cos z + 1}.$$

Nous poserons

$$f(z) = \frac{3 \cos z}{3 \cos z + 1} \quad g(z) = \frac{3 \sin z}{3 \cos z + 1}.$$

L'erreur absolue sur a , fonction de z ,

$$\Delta a(z) = a(z) - (1 + A)$$

s'écrit ainsi

$$(5) \quad \Delta a(z) = A [-(1 - \cos \alpha) \cdot f(z) + \sin \alpha \cdot g(z)].$$

En désignant par $e(z)$ l'expression entre crochets, l'erreur provenant d'une observation s'écrit finalement:

$$(6) \quad \Delta a(z) = A \cdot e(z).$$

L'erreur moyenne sur $2N$ observations est alors

$$A \frac{1}{2N} \Sigma e(z).$$

$2N$ sera le nombre d'observations pendant la période 2π , qui ramène z donc $e(z)$ aux mêmes valeurs. Nous avons ainsi:

$$2N \cdot \Delta z = 2\pi,$$

Δz étant l'intervalle séparant deux observations consécutives. Admettons que N augmente indéfiniment; nous pourrions alors écrire:

$$2N \cdot dz = 2\pi$$

et mettre l'erreur moyenne sous la forme

$$A \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e(z) dz = A \cdot \bar{E},$$

en désignant par \bar{E} la moyenne de $e(z)$. \bar{F} et \bar{G} représenteront, de même, les moyennes de $f(z)$ et $g(z)$; nous sommes ainsi conduit en vertu de (5) et (6) au calcul des intégrales F et G de ces fonctions.

Rappelons que les valeurs $0, 2\pi, \dots$ de z correspondent aux maxima, les valeurs $\pi, 3\pi, \dots$ aux minima de la marée théorique. Nous envisagerons donc, provisoirement, l'erreur moyenne résultant des observations effectuées entre deux maxima consécutifs de la marée théorique. En fait, $2N$ est toujours très faible ($2N = 12$ dans le cas d'observations horaires). L'erreur cherchée ne peut donc, en toute rigueur, être définie comme une intégrale, que pour un nombre infini de demi-journées d'observation. Nous dirons néanmoins que, pour une série d'observations s'étendant sur quelques jours seulement, ces moyennes représentent l'erreur probable, résultant du déphasage α .

Calcul des moyennes \bar{F} et \bar{G} — Les figures 1 et 2 représentent les fonctions $f(z)$ et $g(z)$. Les symétries de ces deux courbes permettent de limiter l'intervalle d'intégration à $(0, \pi)$, en précisant toutefois que G changera de signe dans l'intervalle suivant $(\pi, 2\pi)$. Ces courbes présentent des branches infinies, pour la valeur de z annulant le dénominateur des fractions f et g . On a alors:

$$\cos z = -\frac{1}{3}$$

soit

$$z = p \neq 109^{\circ}28' = 1.9106 \text{ rad.}$$

De part et d'autre de p , les valeurs f et g tendent respectivement vers $+\infty$ et $-\infty$. Cette valeur p correspond à l'intersection de la courbe $y_1(z)$ avec l'axe des z ; y_1 tendant vers 0, le rapport $|y_0/y_1|$ tend vers ∞ ; l'erreur devient donc infinie.

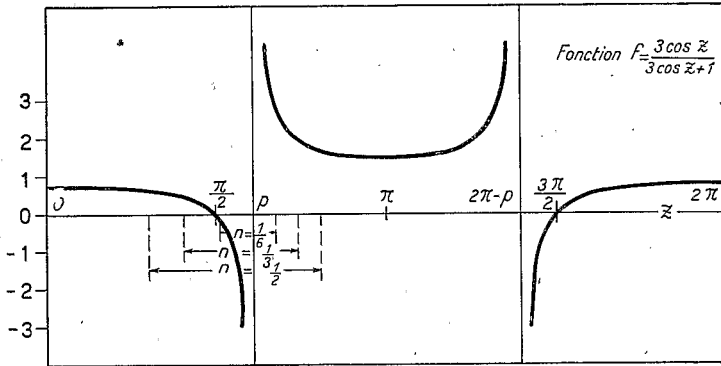


Fig. 1

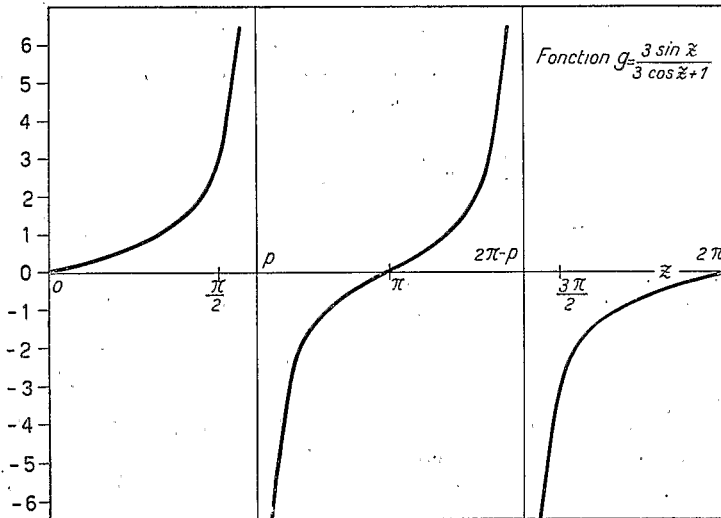


Fig. 2

Pour nous rendre compte dans quelle mesure les observations correspondant à des valeurs très faibles de y_1 , c. à d. à des valeurs de z voisines de p , modifiaient l'erreur moyenne nous sommes amenés à éliminer, de part et d'autre de l'axe $z = p$, une fraction n des intervalles $(0, p)$ et (p, π) , $0 < n < 1$. Nous conserverons ainsi les intervalles

$$\begin{array}{ll} 0 & \text{à } z_1 = p - np \\ z_2 = p + n(\pi - p) & \text{à } \pi. \end{array}$$

On peut aussi écrire

$$\begin{aligned} z_1 &= p(1-n) \\ z_2 &= p(1-n) + n\pi \end{aligned}$$

z_1 et z_2 limitent l'intervalle éliminé qui est égal à

$$z_2 - z_1 = n\pi$$

et l'étendue d'intégration ne sera donc plus que

$$\pi - n\pi = \pi(1-n).$$

L'erreur moyenne, sur les observations ainsi retenues, est fonction de z_1 et z_2 , c. à d. de n , et s'écrit alors

$$(7) \quad A \cdot \bar{E}(n) = A \frac{1}{\pi(1-n)} \left[\int_0^{z_1} e(z) dz + \int_{z_2}^{\pi} e(z) dz \right].$$

Il conviendra donc de calculer les moyennes $\bar{F}(n)$ et $\bar{G}(n)$ pour ces mêmes intervalles. Sur la Fig. 1 nous avons délimité en pointillé l'intervalle éliminé pour quelques valeurs de n .

Voyons ce que représente $A \cdot \bar{E} \cdot (n)$ pour différentes valeurs de n .

a) Si $n = 0$, $z_1 = z_2 = p$, l'intégrale est étendue à tout l'intervalle $(0, \pi)$; $A \cdot \bar{E}(0)$ sera l'erreur résultant de l'utilisation de toutes les valeurs d'observation.

b) Si $n = 1$, $z_1 = z_2 = 0$, l'intervalle conservé et la valeur de l'intégrale deviennent nuls et l'expression $\bar{E}(1)$ est de la forme $0/0$. Le calcul nous montre qu'elle conserve une valeur finie, non nulle (ceci est d'ailleurs visible sur la courbe e qui prend une telle valeur pour $z = 0, \pi, \dots$). $A \cdot \bar{E}(1)$ est l'erreur résultant de la comparaison des seules ordonnées correspondant à $z = 0, \pi, \dots$, c. à d. aux extrema de la courbe théorique y_1 . Ceci suppose toutefois une restriction, imposée par la méthode d'intégration: la proportion des nombres de maxima et de minima devra être de p à $\pi - p$, en effet les intervalles d'intégration de part et d'autre de $z = p$ sont égaux à $(n-1)p$ et $(n-1)(\pi-p)$; le premier correspond à des valeurs positives de y_1 , le second à des valeurs négatives. Cette restriction était implicitement contenue dans le cas précédent, où intervenaient toutes les valeurs: la courbe y_1 est positive pendant un intervalle égal à p , puis négative pendant un intervalle égal à $\pi - p$.

c) Les cas intermédiaires $0 < n < 1$ seraient ceux de l'exploitation d'une fraction n des valeurs d'observations, savoir celles dont l'amplitude est la plus grande, à l'exclusion de celles dont l'amplitude est faible. Nous sous-entendons évidemment la même restriction que précédemment.

Dans la pratique cette restriction est toute artificielle dans les deux derniers cas. Ce calcul aura toutefois l'avantage de nous montrer, si l'exploitation des vas leurs faibles de y_α ou y_1 augmente considérablement l'erreur systématique cherchée, comme on peut s'y attendre en considérant les fonctions f et g . D'ailleurs on est amené tout naturellement à négliger l'une ou l'autre de ces observations, qui, entachées de la moindre erreur accidentelle, donnent des valeurs aberrantes de a ,

Le cas envisagé en b) est tout différent de celui étudié plus haut; nous ne considérons plus les amplitudes extrêmes de la courbe expérimentale (données par

$z = \beta, \pi + \beta$), mais les ordonnées définies par $z = 0, \pi$; en outre, il s'agit maintenant d'une somme pondérée des erreurs sur ces 2 ordonnées et non plus de l'erreur sur l'amplitude complète.

1) Calcul de $\bar{F}(n)$ — Moyennant le changement de variable $t = \operatorname{tg} z/2$, l'intégrale indéfinie de

$$f(z) = \frac{3 \cos z}{3 \cos z + 1}$$

s'écrit

$$F = \int f(z) dz = \int \frac{2}{1+t^2} dt - \int \frac{1}{2-t^2} dt = F_1 + F_2$$

en désignant par F_1 et $-F_2$ les deux intégrales du 3ème membre.

a) La lère intégrale nous donne

$$F_1 = \int \frac{2}{1+t^2} dt = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} t = z;$$

prise entre les limites que nous avons précisées plus haut, l'intégrale définie devient:

$$z_1 + \pi - z_2 = \pi(1-n)$$

d'où pour l'expression de la moyenne:

$$\bar{F}_1(n) = \frac{1}{\pi(1-n)} \cdot \pi(1-n) = 1$$

cette valeur est constante, quel que soit n

$$\bar{F}_1(n) = \bar{F}_1(0) = \bar{F}_1(1) = 1.$$

b) La deuxième intégrale s'écrit:

$$F_2 = - \int \frac{dt}{2-t^2} = - \frac{\sqrt{2}}{4} L \left| \frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t} \right| = \frac{\sqrt{2}}{4} L \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{z}{2} - \sqrt{2}}{\operatorname{tg} \frac{z}{2} + \sqrt{2}} \right|$$

le logarithme ne devient infini que pour

$$\operatorname{tg} \frac{z}{2} = \pm \sqrt{2}$$

relation identique à

$$3 \cos z = -1$$

et si $\operatorname{tg} z/2 \rightarrow \infty$, le logarithme tend vers 0.

L'expression de la moyenne s'écrira:

$$(8) \quad \bar{F}_2(n) = \frac{1}{\pi(1-n)} \frac{\sqrt{2}}{4} L \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{z_1}{2} - \sqrt{2}}{\operatorname{tg} \frac{z_1}{2} + \sqrt{2}} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{z_2}{2} + \sqrt{2}}{\operatorname{tg} \frac{z_2}{2} - \sqrt{2}} \right|$$

moyennant l'égalité $\operatorname{tg} p/2 = \sqrt{2}$, l'argument du logarithme devient

$$\frac{\sin \frac{1}{2} (z_1 - p)}{\sin \frac{1}{2} (z_1 + p)} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} (z_2 + p)}{\sin \frac{1}{2} (z_2 - p)}$$

Les relations

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (z_1 - p) &= -\frac{n}{2} p \\ \frac{1}{2} (z_1 + p) &= p \left(1 - \frac{n}{2}\right) \\ \frac{1}{2} (z_2 + p) &= \frac{n}{2} (\pi - p) + p \\ \frac{1}{2} (z_2 - p) &= \frac{n}{2} (\pi - p) \end{aligned}$$

permettront de l'écrire:

$$\frac{\cot \frac{n}{2} (\pi - p) + \cot p}{\cot \frac{n}{2} p - \cot p}$$

ou enfin, sachant que $\cot p = -\sqrt{2}/4$

$$\frac{4 \cot \frac{n}{2} (\pi - p) - \sqrt{2}}{4 \cot \frac{n}{2} p + \sqrt{2}} = P(n)$$

soit

$$\bar{F}_2(n) = \frac{1}{\pi(1-n)} \frac{\sqrt{2}}{4} L |P(n)|$$

Si $n = \varepsilon \rightarrow 0$

$$P(n) \rightarrow \frac{p}{\pi - p} = \frac{1.9106}{1.2310} = 1.552$$

d'où

$$\bar{F}_2(0) = \frac{\sqrt{2}}{4\pi} L 1.552 = 0.0496$$

Si $n = 1 - \varepsilon \rightarrow 1$ le produit des 2 quotients de l'expression (8) mise sous la forme:

$$\frac{\sqrt{2} - \operatorname{tg} \frac{z_1}{2}}{\sqrt{2} + \operatorname{tg} \frac{z_1}{2}} \cdot \frac{1 + \sqrt{2} \cot \frac{z_2}{2}}{1 - \sqrt{2} \cot \frac{z_2}{2}}$$

devient

$$\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} p \varepsilon\right) [1 + \sqrt{2} (\pi - p) \varepsilon] = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} (2\pi - 3p) \varepsilon$$

dont le logarithme est $\frac{\sqrt{2}}{2} (2\pi - 3p) \varepsilon$, la moyenne cherchée sera enfin

$$\bar{F}_2(1) = \frac{1}{\pi \varepsilon} \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{\sqrt{2}}{2} (2\pi - 3p) \varepsilon = \frac{2\pi - 3p}{4\pi} = \frac{0.5515}{4\pi} = 0.044.$$

2) Calcul de $\bar{G}(n)$ — L'intégrale indéfinie de

$$g(z) = \frac{3 \sin z}{3 \cos z + 1}$$

s'obtient immédiatement

$$G = \int g(z) dz = -L |3 \cos z + 1|$$

d'où pour l'expression de la moyenne

$$(9) \quad \bar{G}(n) = \frac{1}{\pi(1-n)} L \left| 2 \frac{3 \cos z_2 + 1}{3 \cos z_1 + 1} \right|.$$

L'égalité $1 = -3 \cos p$ et des transformations analogues à celles de \bar{F}_2 donneront

$$\bar{G}(n) = \frac{1}{\pi(1-n)} L \left[2 \cdot P(n) \cdot \left[\frac{\sin \frac{n}{2} (\pi - p)}{\sin \frac{n}{2} p} \right]^2 \right].$$

Si $n = \varepsilon \rightarrow 0$, l'argument du logarithme tend vers

$$2 \cdot \frac{p}{\pi - p} \cdot \left(\frac{\pi - p}{p} \right)^2 = 2 \cdot \frac{\pi - p}{p} = 2 \frac{1.2310}{1.9106} = 1.289$$

soit

$$\bar{G}(0) = \frac{1}{\pi} L 1.289 = 0.081.$$

Si $n = 1 - \varepsilon \rightarrow 1$, le logarithme de l'expression (9) s'écrit:

$$L |1 + \lambda \varepsilon^2| = \lambda \varepsilon^2$$

où λ est une fonction de p et de $\pi - p$. En divisant par $\pi \varepsilon$, la moyenne devient $\lambda/\pi \varepsilon$ qui tend vers 0 avec ε . Donc

$$\bar{G}(1) = 0.$$

Résultats — L'erreur moyenne, pour l'intervalle $0, \pi$ (c. à d. séparant un maximum de la marée théorique du minimum suivant) s'écrit donc, en nous reportant aux relations (5) (6) et (7)

$$(10) \quad A \cdot \bar{E}(n) = A [-(1 - \cos \alpha) \bar{F}(n) + \sin \alpha \cdot \bar{G}(n)].$$

Nous avons souligné que \bar{G} , dont la valeur a été trouvée positive, changeait de signe pour l'intervalle suivant $\pi, 2\pi$ (séparant un minimum du maximum suivant); l'erreur moyenne, pour cet intervalle, s'obtient donc en changeant le signe du 2ème terme dans le crochet de (10). Ainsi l'erreur est différente pour ces deux intervalles; ceci ne doit pas nous surprendre: les droites $y = 0, \pi, 2\pi, \dots$ ne sont plus, en effet, axes de symétrie de l'ensemble des 2 courbes $y_\alpha(z)$ et $y_1(z)$. L'erreur est plus grande, en valeur absolue, pour l'intervalle $(\pi, 2\pi)$, que pour $(0, \pi)$. Les valeurs $E(1)$ ne présenteront évidemment pas de différence, car $G(1)$ est nul.

Nous avons effectué les calculs, en prenant pour valeurs de n les multiples de $1/6$ et pour α les valeurs 30° et 15° .

TABLEAU: *Eléments de calcul des erreurs moyennes*

n	\bar{F}	\bar{G}	$\alpha = 30^\circ$		$\alpha = 15^\circ$	
			+	-	+	-
0	1.050	0.081	-0.101	-0.181	-0.015	-0.057
1/6	48	65	108	172	019	053
1/3	47	51	115	165	023	049
1/2	46	38	121	159	026	046
2/3	45	25	128	152	030	042
5/6	44	12	134	146	033	039
1	1.044	0.000	-0.140	-0.140	-0.036	-0.036

Le Tableau résume les résultats: y figurent les valeurs $\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$ et \bar{G} (rappelons que $\bar{F}_1 \equiv 1$); nous avons porté sur 2 colonnes les valeurs, pour $\alpha = 30^\circ$, du crochet de (10), la 1ère correspondant au signe + de \bar{G} (intervalle $0, \pi$), la 2ème au signe - (intervalle $\pi, 2\pi$); les deux dernières colonnes donnent les valeurs des mêmes expressions pour $\alpha = 15^\circ$. Remarquons simplement que la variation relative de ces valeurs en fonction de n est importante, mais qu'elle est sensiblement linéaire. Il suffit, pour obtenir l'erreur absolue sur a , de multiplier ces valeurs par A .

Comme la valeur totale de $G(n)$ est nulle pour l'intervalle $0, 2\pi$, (c. à d. celui séparant 2 maxima consécutifs de la marée théorique), l'erreur moyenne, pour cet intervalle devient:

$$A[-(1 - \cos \alpha) \bar{F}(n)].$$

Notons, en outre, que $\bar{F}(n)$ est sensiblement constant (son terme variable \bar{F}_2 est en effet très faible devant le terme constant \bar{F}_1). L'erreur moyenne, sur des intervalles $0, 2\pi$, est donc pratiquement constante, quel que soit n .

Nous la désignerons par $\bar{\Delta a}$

$$\bar{\Delta a} = -A(1 - \cos \alpha) \bar{F} \quad \text{avec} \quad \bar{F} \neq 1.05.$$

La seule condition qui subsiste, concernant les limites, sera que les observations s'étendent sur un intervalle égal à 2π (ou à un multiple entier de 2π).

Pour $\alpha = 30^\circ$, les erreurs absolues ($\overline{\Delta a}$) et relatives ($\overline{\Delta a}/a$) auront ainsi les valeurs numériques suivantes:

$$\begin{array}{ccc} \text{pour } a = 1.30 & \overline{\Delta a} = -0.042 & \overline{\Delta a}/a = -0.032 \\ & 1.15 & -0.021 & -0.018 \end{array}$$

Ces erreurs sont supérieures à celles obtenues par la comparaison des amplitudes extrêmes. En mettant $\overline{\Delta a}$ sous la forme

$$\overline{\Delta a} = -1.05 \cdot A \cdot \frac{\alpha^2}{2}$$

et en faisant le rapport r de cette expression à celle ε_a trouvée plus haut (3), nous aurons

$$(11) \quad r = \frac{\overline{\Delta a}}{\varepsilon_a} = 1.05 (1 + A)$$

soit pour

$$\begin{array}{cc} a = 1.30 & r = 1.36 \\ & 1.15 & 1.21 \end{array}$$

Enfin, l'erreur absolue $\overline{\Delta a}$ se traduira, sur A , par une erreur relative

$$\begin{aligned} \frac{\Delta A}{A} &= \frac{\Delta a}{A} = -1.05 (1 - \cos \alpha) \\ &= -0.14 \text{ (pour } \alpha = 30^\circ) \end{aligned}$$

Elle est la même, quel que soit A , et le facteur de proportionnalité avec l'erreur ε_A , trouvée dans le cas étudié plus haut (4), est encore donné par la valeur r de l'expression (11).

Conclusions — La faible amplitude de la variation de déformation ne nous permet pas, même avec les gravimètres les plus modernes, de déterminer avec une bonne précision les caractéristiques de ce phénomène. Les observations effectuées jusqu'à présent ne donnent qu'une indication très imprécise sur son déphasage par rapport à la marée théorique, et nous voyons en outre que la précision sur l'amplitude de cette variation est diminuée, d'une façon notable, par un tel déphasage.

Signalons que les hypothèses que nous avons faites au début de ce calcul, concernant la variation de Z ne permettent pas une application générale de ces résultats. La courbe de la marée théorique ne peut être assimilée à une sinusoïde que dans le cas de marées diurnes ou semi-diurnes; même alors, l'amplitude de Z n'est généralement pas celle que nous avons supposée (les conditions d'observation les plus favorables sont d'ailleurs celles où elle s'en approche le plus). Ce calcul nous aura néanmoins montré, dans un cas simple, l'effet sur la précision des résultats, du déphasage de la variation de déformation.

BIBLIOGRAPHIE

R. BOLLO & A. GOUGENHEIM: *Variation périodique de la gravité en un lieu*. Annales de Géophysique, 1949, Tome 5, fasc. 2 (pp. 176-180). — R. BOLLO & A. GOUGENHEIM:

Sur la variation périodique de la gravité en un lieu. Comptes-rendus de l'Académie des Sciences, 1949, t. 229 (p. 983-984). — R. BOLLO & A. GOUGENHEIM: *Au sujet de la variation périodique de la gravité.* Annales de Géophysique, 1950, t. 6, fasc. 2 (pp. 133-135). — A. GOUGENHEIM: *Recherche du déphasage dans la variation périodique de la gravité.* Bureau des Recherches Géologiques et Géophysiques, août 1950. — A. GOUGENHEIM: *Etude pratique de la marée gravimétrique.* Bulletin Géodésique, 1951, N. 20 (pp. 170-187). — *Earth Tides-Observatory*, 1952, 72, N. 866 (pp. 16-21). — C. MORELLI: *Variatione diurna della gravità in Europa.* Ann. Geofis., 1953, t. 6, N. 1 (pp. 113-124). — J. T. PETIT, L. B. SLICHTER, L. LACOSTE: *Earth Tides.* Trans. Amer. Geophys., 1953, t. 34, N. 2 (pp. 174-184).

géoph

J. METZGER

**MARÉE DE L'ÉCORCE:
L'EFFET DU DÉPHASAGE DANS
L'ANALYSE DES OBSERVATIONS**

Extrait de la Revue
GEOFISICA PURA E APPLICATA - MILANO
Vol. 28, p. 71-83 (1954)

O. R. S. T. O. M.

Collection de Référence

n° 11879

18 MAR 1957