Les Crues et leur évaluation, vol. I, AIHS Publication n° 84, 1969.

Modèle mathématique pour une crue de fonte de neige

M. Roche, Office de la Recherche Scientifique et Technique Outre-Mer
Paris, France
M. Slivitzky, Ministère des Richesses Naturelles
Québec, Canada

SUMMARY: The authors, reiterate the basic equations controlling snow melt in the system of matrix representation previously proposed by M. Roche and perform the successive analysis of the different phases of the transformation; they then propose a mathematical model which enables a close reconstruction of the flood, using only climatological data. A definite example shows the theoretical development and the mathematical construction of the model.

RÉSUMÉ : Après avoir rappelé les équations de base régissant la fonte de la neige, les auteurs, adoptant le système de représentation matricielle déjà proposé par M. Roche en d'autres occasions, analysent successivement les différentes phases de la transformation, puis ils proposent un modèle mathématique permettant une reconstitution assez fidèle de la crue et n'utilisant que des données climatologiques très courantes. Un exemple concret vient illustrer le développement théorique et la construction mathématique du modèle.

1. ASPECT PHYSIQUE DU PROBLÈME

La génération d'une crue de fonte de neige comporte trois phases principales :

— l'accumulation et l'évolution du stock de neige avant le début de la fonte;

— la fonte du stock, transformant la neige en eau disponible pour le ruissellement;

— l'acheminement de l'eau de ruissellement du lieu de stockage vers l'exutoire.

Des études très poussées ont été faites sur ces différents phénomènes, mais leur interprétation complète demande la mesure de quantité de facteurs climatologiques rarement disponibles en pratique. Nous avons essayé d'obtenir une reproduction satisfaisante d'une crue de fonte de neige à partir des seuls facteurs suivants :

— températures journalières au plus grand nombre possible de postes;

— précipitations neigeuses et pluvieuses,

auxquels il faut ajouter, bien entendu, les caractéristiques physiques du bassin.

1.1. ACCUMULATION ET ÉVOLUTION DU STOCK DE NEIGE

En un point donné, matérialisé par un poste d'observation, on mesure la hauteur de neige tombée chaque jour au moyen d'une table à neige et on calcule l'équivalent en eau qui est souvent à peu près égal au 1/10 de la hauteur de neige. L'équivalent en eau peut être également déterminé directement en faisant fondre la neige recueillie dans un pluviomètre ou en utilisant un pluviographe à entonnoir chauffant. L'essentiel est que la méthode de mesure soit toujours la même à tous les postes d'observation.

Le stock, ainsi évalué en équivalent en eau de neige fraîche se modifie avec le temps et perd une partie de son eau par sublimation. On désignera la hauteur d'eau équivalente au stock de neige fraîche en un point donné par $(SN)'$. On peut admettre que la perte subie par le stock par sublimation dépend de la durée d'exposition de la neige entre les premières chutes importantes et le début de la fonte. Si l'on voulait raffiner le modèle, on pourrait dire que la perte journalière est fonction de la température et de l'humidité du jour pour laquelle elle est calculée. Soit SN la hauteur du stock disponible au début de la fonte et TE la durée d'exposition :

$$SN = (SN)' - \alpha TE. \tag{1}$$

Variante : On peut supposer aussi que la perte subie est proportionnelle au volume du stock, ce qui n'est pas très aisé de justifier physiquement, mais qui peut conduire à un réglage satisfaisant du modèle :

$$SN = \alpha (SN)' \tag{2}$$

SN peut aussi être estimé directement par des campagnes systématiques de sondage de la neige, avec mesure de l'équivalent en eau, juste avant de début de la fonte. Quand cette opération peut être menée dans de bonnes conditions, l'estimation ainsi obtenue est bien meilleure et plus sûre que l'estimation indirecte à partir des chutes de neige.

1.2. Fonte du stock neigeux

Nous n'énumérerons pas tous les facteurs physiques régissant la fonte de la neige; il sont fort nombreux et font appel à des données météorologiques rarement disponibles. Dans l'optique du modèle de crue, on peut synthétiser ces facteurs dans des indices représentant globalement leur influence.

Les travaux conjoints du Corps of Engineers de l'U.S. Army, du Weather Bureau et du Geological Survey, ont permis de dégager les paramètres complexes régissant la fonte de la neige et de les simplifier efficacement sous une forme indicielle. La fonte est régie par des apports extérieurs d'énergie qui, sous une forme extrêmement simplifiée, peuvent se ramener :

— aux échanges thermiques avec l'air environnant et aux apports du rayonnement, ce qui peut se traduire par une relation de la forme : fonte journalière $A = (T - T_0)$. T désignant une caractéristique de la température de l'air et T_0 un seuil de température;

— aux apports thermiques de la pluie, s'il pleut, apports qui se traduiront par une fonte de la forme a $AP(T - T_0)$, P étant la hauteur de la pluie.

En prenant T_M, température maximale journalière, comme indice, on peut donc écrire la fonte journalière totale sous la forme paramétrique :

$$F = A(1 + aP)(T_M - T_0). \tag{3}$$

En fait, après une période de gel, la température du stock neigeux est en dessous du point de fonte et les premières températures excédentaires observées devront compenser le déficit calorique du stock avant de provoquer la fonte. D'autre part, l'eau de fonte commencera par saturer la neige avant d'être disponible pour le ruissellement. Ces deux phénomènes sont proportionnels à la fois au stock SN et à l'excédent de température.

1.3. Effet de la réduction progressive du couvert neigeux

La disparition du couvert neigeux est progressive. On peut dire que, dès le lendemain du premier jour de fonte, vont commencer à apparaître des lambeaux de sol nu; puis les surfaces découvertes vont augmenter de jour en jour, jusqu'à la fonte de la dernière plaque de neige.

On peut traduire le phénomène en affectant à la surface intéressée par la fonte un coefficient dégressif, tenant compte de la fonte déjà effectuée, exprimée en fraction du stock initial. Un tel coefficient peut être de la forme :

$$c = 1 - \left(\frac{\overset{i}{\Sigma} F_{i-1}}{SN}\right)^n. \tag{4}$$

On peut également, ce qui revient au même du point de vue des résultats, appliquer ce même coefficient à la hauteur ponctuelle fondue, ce qui revient à écrire $(cF_i)S$ au lieu de $F_i(cS)$.

On notera que l'effet du coefficient c est d'autant plus marqué que n est plus petit. Lorsqu'on ne voudra pas introduire l'effet de réduction, il suffira de donner à n n'importe quelle valeur suffisamment grande, par exemple 15 à 20, pour neutraliser c.

1.4. Intervention de la pluie

On a vu comment la pluie intervient pour augmenter les calories disponibles pour la fonte de la neige. Son action en tant qu'apports est différente suivant que le couvert neigeux a disparu ou pas.

Tant que le sol est couvert de neige, la pluie ne peut ruisseler pour son propre compte. Outre les apports thermiques dont il a été question, son rôle est d'augmenter l'équivalent en eau du stock neigeux, donc de retarder l'épuisement de ce stock. On a donc, du point de vue évolution du stock, deux actions contraires de la pluie :

— une action thermique qui tend à accélérer la destruction du stock;
— une action d'apport d'eau qui tend à reconstituer l'équivalent en eau du stock.

Lorsque le stock neigeux a disparu, les apports d'eau de pluie sont immédiatement disponibles pour le ruissellement. La prise en compte de la pluie dans un modèle de crue de fonte de neige, après disparition du stock neigeux se fera en complétant la matrice des fontes par les hauteurs de pluie obtenues aux différents postes.

1.5. Transport des eaux a l'exutoire du bassin

La matrice des fontes, complétée par les pluies ultérieures à l'épuisement du stock neigeux constitue la matière première du ruissellement, matière première qui va subir trois opérations essentielles avant de fournir l'hydrogramme de crue :

— une réduction de volume;
— un étalement dû à la libération progressive de l'eau libre;
— un transport de la zone de production à l'exutoire.

1.5.1. La première opération se rapporte aux pertes subies par les eaux de fonte avant ou pendant le transport de la zone de fonte à l'exutoire. Ces pertes comportent essentiellement :

— l'infiltration;
— l'évapotranspiration;
— la rétention de surface.

Les pertes par évapotranspiration sont très faibles pendant la période de l'année qui se rapporte à la crue de fonte de neige. Les pertes réellement importantes seront dues à l'infiltration et surtout à la rétention de surface. Il semblerait raisonnable, pour les pertes par infiltration, d'admettre un taux journalier relativement constant, ce qui se traduirait par une opération du type $F_i - I$. Par contre, il est assez logique de penser que la rétention de surface sera croissante avec F_i, ce qui donnerait lieu à une opération $RF_i (R < 1)$. Autrement dit, la hauteur d'eau réellement transformée en ruissellement pendant l'unité de temps (par exemple la journée) serait représentée par $RF_i - I$. En fait, l'expérience montre que dans la plupart des cas [1], on a tout intérêt à utiliser une relation de type RF_i, appelant R : coefficient de ruissellement.

R peut être soit pris constant dans l'ensemble du bassin, soit considéré comme matriciel et variable suivant chaque portion du bassin. De même, R varie généralement dans le temps. Cependant, pour une crue de fonte de neige, de même que pour les crues pluviales qui peuvent suivre immédiatement une telle crue, on peut admettre que le sol est pratiquement saturé et que R est constant dans le temps. En général, on ne gagne pas non plus grand-chose en précision dans le réglage du modèle en le considérant comme variable dans l'espace.

1.5.2. Supposons que les pertes dont il a été question au paragraphe précédent soient subies sur place par la masse d'eau de fonte (ou d'eau de pluie). La libération de l'eau en excédent, qui produira le ruissellement, se fait progressivement, suivant un opérateur fonctionnel λ que nous appelons «fonction d'étalement». Si l'intervalle de temps est la

1. Il s'agit de cas se rapportant au QUÉBEC, pour lesquels la rétention de surface est nettement prédominante.

journée par exemple, et que l'on dispose, une journée j, d'un volume V_j ou d'une hauteur H_j de ruissellement, ce volume V_j se transformera en un vecteur λV_j. Supposons par exemple que les intégrales successives de $\lambda(t)$ prises entre les intervalles (0,1) à (3,4) soient :

$$\lambda_1 = 0{,}2, \ \lambda_2 = 0{,}5, \ \lambda_3 = 0{,}2, \ \lambda_4 = 0{,}1, \ (\Sigma\lambda_i = 1)$$

le volume V_j se transformera en un vecteur :

$$(0{,}2\, V_j)_j, \ (0{,}5\, V_j)_{j+1}, \ (0{,}2\, V_j)_{j+2}, \ (0{,}1\, V_j)_{j+3}.$$

λ transforme la matrice des fontes $[F]$, ou la matrice des hauteurs ruisselées $R[F]$, en une matrice des fontes étalées ou une matrice des hauteurs ruisselées étalées.

1.5.3. *Transport de la zone de production à l'exutoire*

Nous supposons que le lecteur est familiarisé avec la notion et le tracé des courbes isochrones d'un bassin. Si Θ est le temps de base du ruissellement, on divisera le bassin en autant de surfaces isochrones. D'autre part, si K est le nombre total de stations de mesure (température, neige et pluie), on peut diviser le bassin en K zones d'influence, par exemple par le modèle de Thiessen. Chaque point du bassin appartient alors à la fois à une zone d'influence (K) et à une zone isochrone (θ). Tous les points appartenant à la fois à K et à θ forment une surface $S\theta_k$. La matrice $[S]$ d'ordre (ΘK), groupant toutes les surfaces $S\theta_k$ est appelée «matrice caractéristique du bassin».

Par définition de l'isochronisme, une hauteur de ruissellement $RF_i(K)$ produite dans la zone $S\theta_k$ le jour i, va fournir un volume ruisselé $RF_i(K)S\theta_k$ qui étalé par la fonction λ va se manifester à l'exutoire à partir du jour $i + \theta - 1$, si on adopte le jour comme unité de base pour le temps. Le même jour $i + \theta - 1$ on commencera également à recevoir le jour $i - 1$ de la surface isochrone $\theta + 1$ etc. De même, on recevra, toujours le même jour, le résultat de l'étalement sur le 2e jour $i - 1$ sur la surface isochrone θ.

Autrement dit, pour obtenir le volume passé chaque jour à l'exutoire, il faut additionner les vecteurs «volumes étalés» correspondant à chacune des zones d'isochronisme, en décalant ceux-ci dans le temps conformément à leur numéro θ. Le passage des volumes ruisselés journellement aux débits n'est qu'une affaire de facteur de conversion à déterminer suivant les unités choisies.

1.6. Debit de base

Les développements précédents supposent que l'on opère sur les débits de ruissellement, donc qu'on a négligé le débit de base. Juste avant le début de la fonte, la rivière étudiée a un débit généralement non nul Q_0 provenant de la vidange des réserves du bassin. Lorsque la fonte est terminée, et en l'absence de pluies, le débit se trouve être d'autant supérieur à Q_0 que les possibilités de réserves du bassin sont plus considérables et que le volume de fonte aura été plus grand : la première circonstance dérive d'une caractéristique du bassin, la seconde de l'abondance des précipitations nivales durant l'hiver précédant la fonte.

Pour un bassin donné, on peut donc poser que le débit de base en fin de fonte dépend de la totalité du volume d'eau fondu; on peut même admettre, comme une approximation, que la différence entre le débit de base en fin de fonte et le débit de base en début de fonte est proportionnelle au volume d'eau fondu. En généralisant, on posera que le débit de base à un instant quelconque de la fonte est égal à Q_0 + un débit proportionnel à la hauteur totale de l'équivalent en eau déjà fondu à cet instant ou plutôt au volume de ruissellement déjà passé à l'exutoire à cet instant. Soit, pour le jour i :

$$Q_{Bi} = Q_0 + T_Q \sum_{1}^{i} V_{Rj}. \tag{5}$$

T_Q est le taux d'augmentation du débit de base rapporté au volume de ruissellement cumulé depuis le début de la fonte.

1.7. Retour sur le coefficient de ruissellement

Le réglage d'un modèle de crue se fait sur une crue particulière, puis se contrôle sur le plus grand nombre de crues possible. On a admis (1.5.1) que le coefficient de ruissellement restait constant durant toute la durée de la crue de fonte de neige.

On n'a pas spécifié s'il était constant d'une année sur l'autre.

Or il semble bien qu'un même volume de neige donnera une crue plus ou moins forte suivant l'état de remplissage des réserves juste avant la fonte. C'est d'ailleurs tout à fait naturel, compte tenu du rôle que nous avons fait jouer à ce coefficient.

L'état des réserves est en corrélation étroite avec le débit de base. Il faut donc s'attendre à ce que R soit une fonction croissante de Q_0, fonction qui peut être établie expérimentalement en appliquant le modèle à une série de crues différentes et en déterminant dans chaque cas la meilleure valeur à donner à R pour reproduire au mieux la crue enregistrée. Si l'on veut s'affranchir de Q_0, donnée hydrologique, pour n'introduire dans le modèle que des données météorologiques, on peut chercher les régressions liant Q_0 aux précipitations antérieures ainsi qu'éventuellement à d'autres facteurs météorologiques.

2. CONSTRUCTION MATHÉMATIQUE DU MODÈLE

2.1. Présentation des données

2.1.1. *Données climatologiques*

La première de ces données concerne le stock de neige disponible à chacune des stations utilisées. Suivant que l'on dispose ou non d'un relevé régulier du stock de neige jusqu'au début de la fonte (équivalent en eau mesuré par campagnes de sondages), ou non, on pourra utiliser directement SN, ou on devra passer par l'équivalent en eau $(SN)'$ de la somme des chutes de neige fraîche mesurées aux stations. On devra alors introduire un coefficient α tel que $SN = \alpha(SN)'$; α sera un paramètre du modèle. Les données sur le stock de neige seront donc un vecteur $(SN)'_k$ $(k = 1, K)$; k désignant le numéro de l'une des stations et K étant le nombre total de stations. On désignera ce vecteur par $\{SN'\}$, d'ordre K.

Nous choisissons, comme indices de températures, les maximums journaliers désignés par T_M. L'emploi d'un intervalle de temps autre que la journée exigerait un autre choix de la variable «température». On doit de plus se fixer la longueur de la période sur laquelle on veut travailler. Il est recommandé, pour un bassin donné, de faire commencer et finir cette période de travail toujours aux mêmes dates : ces dates seront choisies de manière à encadrer suffisamment la crue de fonte de neige, mais sans exagération pour ne pas introduire des matrices d'un format inutilement envahissant. Désignons par N le nombre total de jours de cette période. L'information adéquate sur les températures est donc groupée dans une matrice $[T_M]$ d'ordre (K, N).

Pour les pluies, afin de ne pas compliquer les choses, nous ferons l'hypothèse suivante, généralement bien vérifiée dans les régions à régime vraiment nival, celles pour lesquelles notre étude présente un intérêt : il ne peut y avoir reconstitution même partielle du stock neigeux après sa fonte totale. Cette hypothèse permet de ne pas se soucier de la date des chutes de neige, même si celles-ci sont imbriquées avec des chutes de pluies; ceci est une conséquence du paragraphe 1.4. L'ensemble des données concernant les pluies durant la même période de N jours utilisée pour les températures, peuvent être groupées dans une matrice $[P]$ d'ordre (K, N).

Il est entendu que les formats des deux matrices $[T]$ et $[P]$ sont exactement superposables, et que les indices k et j désignant un jour j de la station k dans la matrice des températures, désigne le même jour de la même station dans la matrice des pluies.

2.1.2. *Données sur le bassin*

Ce sont les données concernant :

— la durée de ruissellement et le tracé des courbes isochrones;

— la répartition des zones d'influence des différentes stations.

Le problème a été déjà soulevé au paragraphe 1.5.3. On a vu qu'il débouche sur la formation d'une «matrice caractéristique du bassin» : $[S]$ d'ordre (Θ, K) dont l'élément $S\theta_K$ désigne la superficie couverte à la fois par la zone d'influence de la station k et la zone isochrone θ. Une remarque cependant; bien que relativement facile à établir, le temps de ruissellement Θ n'en est pas moins un paramètre de réglage du modèle et, bien qu'assez rarement, l'opérateur est susceptible de le faire varier. Il est donc recommandé de construire une première matrice d'ordre (Θ', K), Θ' étant à coup sûr plus grand que Θ, sans se soucier de connaître la vraie valeur de Θ. Dans la programmation du modèle mathématique, il suffira d'introduire un processus d'interpolation permettant de faire dériver (Θ, K) de (Θ', K), simplement en fixant la valeur de Θ. Signalons qu'une interpolation linéaire est largement suffisante dans tous les cas.

Notons enfin que, si le départage en zones d'influence peut souvent se faire par la méthode de Thiessen, il se peut aussi que l'application intégrale de cette méthode ne soit pas le meilleur procédé. On peut en effet être amené à modifier la répartition de Thiessen par des considérations géographiques, comme celle de l'existence d'un plateau par exemple. De même, l'interpolation des zones isochrones, de distance uniforme dans la matrice en Θ', peut être tronçonnée en deux ou même trois parties pour aboutir à la matrice Θ, la distance d'isochronisme n'étant alors uniforme que dans chaque tronçon.

2.2. Opérations de transformation

2.2.1. *Détermination du stock de neige disponible pour la fonte*

Si la somme des chutes de neige fraîche aux K stations s'exprime par le vecteur «S, N'», le stock de neige disponible pour la fonte, en admettant des pertes proportionnelles, sera donné par :

$$\{SN\} = \alpha\{SN'\} \tag{2}$$

2.2.2. *Établissement de la matrice des fontes*

Compte tenu des phénomènes décrits aux paragraphes 1.2., 1.3. et 1.4., l'équation générale de la fonte est :

$$F_i = A(1+aP_i)\,(T_{M_i}-T_0)\left[1-\left(\frac{\Sigma F_{i-1}}{SN}\right)^n\right] \tag{6}$$

répondant aux conditions :

$$\text{Si} \quad T_{M_i} \leqslant T_0, \quad F_i = 0 \tag{7}$$

$$\text{Si} \quad \sum_{j=1}^{i} A(1+aP_j)(T_{Mj}-T_0) < bSN, \quad F_i = 0. \tag{8}$$

b est le «taux de perte initiale».

On pose $i = m$ lorsque $\sum_{j=1}^{m} = bSN$

ou lorsque $$\sum_{j=1}^{m-1} < bSN \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{m} > bSN.$$

$$\text{Si} \quad \sum_{j=m}^{i} A(1+aP_j)(T_{mj}-T_0)\left[1-\left(\frac{\Sigma F_{i-1}}{SN}\right)^n\right] \geqslant SN + \sum_{j=1}^{i} P_j, \quad F_i = P_i. \tag{9}$$

On pose $i = h$ lorsque $\sum_{j=m}^{h} = SN+\Sigma P_j$,

ou lorsque $$\sum_{j=m}^{h-1} < SN+\Sigma P_j \quad \text{et} \quad \sum_{j=m}^{h} > SN+\Sigma P_j.$$

Faisons les opérations :

$$[P'] = [1]^{(1)}+a[P] \tag{10}$$

et

$$[T'] = [T_M]-T_0[1] \tag{11}$$

dans lesquelles on sait que a et T_0 sont des scalaires. Les matrices $[P]$ et $[T_M]$ ont été construites de manière que leurs formats soient parfaitement superposables. Il en est donc de même pour $[P']$ et $[T']$, les opérations (10) et (11) ne modifiant en rien le format des matrices. On peut donc effectuer l'opération :

$$[T''] = [P']_*[T'] \tag{12}$$

ayant pour règle :

$$T''_{ki} = P'_{ki} \cdot T'_{ki} \tag{13}$$

et multiplier T'' par le scalaire A.

En l'absence de l'opération de réduction $c_i = 1-(\Sigma F_{i-1}/SN)^n$, la matrice de fonte pourrait être construite à partir des opérations suivantes :

$$[F] = A\{[T_M]-T_0[1]-aT_0[P]+a[P]_*[T_M]\} \tag{14}$$

avec, pour le signe $_*$, la même convention que dans l'égalité (12).

L'opérateur de réduction a également un caractère matriciel, et peut être représenté par une matrice $[c]$ de même ordre que $[p]$ ou $[T_M]$. On remarquera toutefois que la matrice $[c]$ ne peut pas être connue d'emblée au début de l'opération puisque chacune de ses valeurs c_{ki} contient une valeur $F_{k,i-1}$. $[c]$ ne peut donc être construite que

1. $[^1]$ désigne ici une matrice dont chaque terme est égal à 1.

progressivement, à mesure que les valeurs de $[F]$ sont connues. Cette remarque étant faite, on peut appliquer à $[c]$ le même mode de composition qu'aux autres matrices. En définitive, la matrice fonte se déduira de la série d'opérations suivantes :

$$[P'] = [1]+a[P] \tag{15}$$

$$[T'] = [T_M]-T_0[1] \tag{16}$$

$$[T''] = [P']_*[T'] \tag{17}$$

$$[F] = A[c]_*[T''] \tag{18}$$

le signe $_*$ signifiant ici que la matrice résultant de l'opération qu'il désigne est telle que son terme de ligne k et de colonne i soit égal au produit des termes de ligne k et de colonne i des deux matrices composantes. De plus, les termes de $[F]$ sont soumis à des astreintes définies par les inégalités (7) à (9).

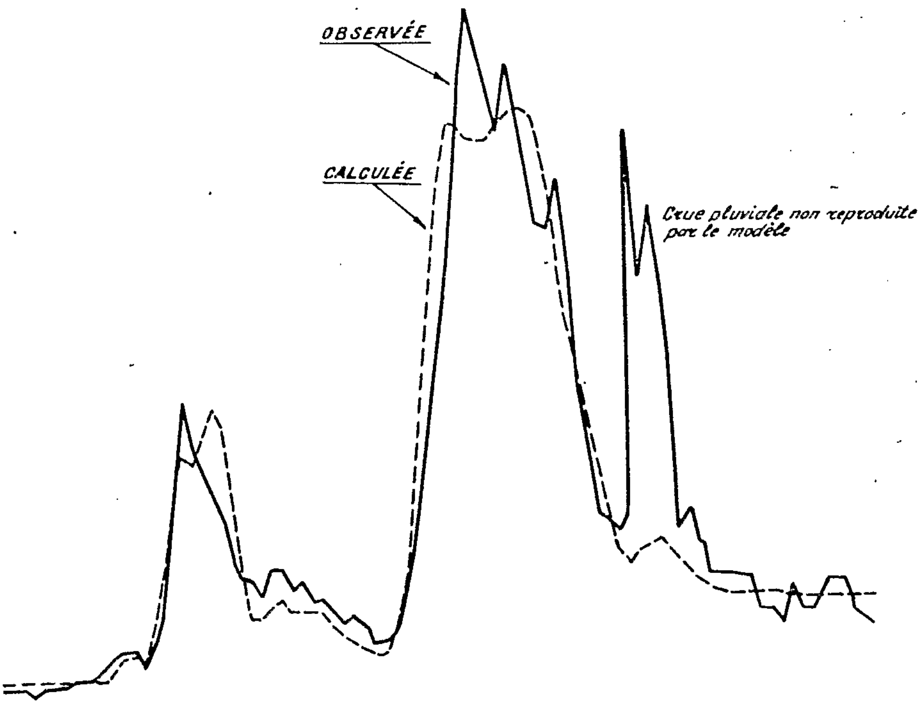

FIGURE 1. *Reconstitution de la crue de fonte de neige du Kenogami en 1966*

2.2.3. *Coefficient de ruissellement*

L'introduction de ce coefficient se traduit par la multiplication de la matrice des fontes par un scalaire :

$$[H] = R[F]. \tag{19}$$

Le résultat est une matrice des «hauteurs ruisselées», que l'on peut imprimer à la place de la matrice des fontes au cours des opérations.

2.2.4. *Matrice des volumes ruisselés*

Une hauteur H_{ki} de la matrice $[H]$ des hauteurs ruisselées se rapporte au pluviomètre k pour le jour i. Considérons une zone isochrone θ; le volume ruisselé le jour i sur la surface S_{θ_k}, correspondant à la fois à la zone θ et au pluviomètre k, est égal à $S_{\theta_k}H_{ki}$ et le volume ruisselé total pour la zone le jour i est égal à :

$$V_{\theta_k} = \sum_{k=1}^{K} S_{\theta_k} H_{ki}. \tag{20}$$

La matrice des volumes ruisselés $[V]$ se déduit donc de $[H]$ en la prémultipliant par $[S]$:

$$\underset{(\Theta\, N)}{[V]} = \underset{(\Theta\, K)}{[S]}\,\underset{(K\, N)}{[H]} \tag{21}$$

2.2.5. *Opération d'étalement*

Elle s'effectue sur la matrice $[V]$ au moyen d'un opérateur fonctionnel $\lambda(t) > 0$ pour tout t, nul pour $t = 0$ et $t = \infty$ tel que :

$$\int_0^\infty \lambda(t)\,\mathrm{d}t = 1 \tag{22}$$

et comportant un paramètre de réglage permettant de rendre l'étalement plus ou moins efficace.

Nous préconisons l'emploi de la fonction suivante qui répond aux conditions ci-dessus :

$$\lambda(t) = 2\,\mu t\, \mathrm{e}^{-\mu t^2} \tag{23}$$

Dans notre modèle matriciel, λ intervient sous forme d'un vecteur dont les composantes sont les intégrales $\int \lambda \mathrm{d}t$ prises dans chaque intervalle de temps successif, de valeur égale au temps de base choisi pour le modèle. Dans la forme (23) l'intégrale correspondant au ν-ième intervalle de temps a pour valeur :

$$\lambda_\nu = \mathrm{e}^{-(\nu-1)^2\mu} - \mathrm{e}^{-\nu^2\mu}. \tag{24}$$

La matrice d'étalement, établie à partir des composantes du vecteur $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_j)$, se présente sous la forme :

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \ldots & \lambda_\nu & 0 \ldots 0 \\ 0 & \lambda_1 \ldots & \lambda_{\nu-1} & \lambda_\nu \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots \lambda_\nu \end{bmatrix} \tag{25}$$

et sa dimension est $(N, N+v-1)$.

L'étalement de la matrice $[V]$ s'obtient en postmultipliant $[V]$ par $[\lambda]$. Si on désigne par $[V']$ la matrice des volumes ruisselés étalés, on a donc :

$$[V'] = [V]\,[\lambda] \tag{26}$$

d'ordre $(\Theta, N+\nu-1)$.

2.2.6. *Transport des volumes étalés, hydrogramme de ruissellement*

La matrice $[V']$ contient — lignes, classées par ordre d'isochronisme θ, et $N+\nu-1$ colonnes correspondant, pour chaque zone isochrone, à autant de jours de ruissellement: θ désignant le nombre d'unités de base (par exemple de jours) que met le ruissellement de la zone θ pour parvenir à l'exutoire, il est clair que les volumes totaux s'écoulant à l'exutoire pendant chaque intervalle de temps seront obtenus :

— en constituant un tableau composé de chaque ligne θ de la matrice $[V']$ décalée vers la droite de $\theta-1$ unités de bases (donc de $\theta-1$ colonnes);

— en totalisant les colonnes du tableau ainsi obtenu.

Autrement dit, si la matrice $[V']$ est représentée comme suit :

$$[V'] = \begin{bmatrix} V'_{11} & V'_{12} & \dots & V'_{1,N+\nu-1} \\ V'_{21} & V'_{22} & \dots & V'_{2,N+\nu-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ V'_{\Theta 1} & V'_{\Theta 2} & \dots & V'_{\Theta,N+\nu-1} \end{bmatrix} \tag{27}$$

l'hydrogramme de ruissellement, exprimé en volume par unité de base, disons par jour pour fixer les idées, sera un vecteur $[V]$ dont les composantes seront les suivantes :

$$\text{jour } 1 : V'_{11}$$

$$\text{jour } 2 : V'_{12}+V'_{21}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\text{jour} \quad N+\nu-1 : V'_{1,N+\nu-1}+V'_{2,N+\nu-2}+\dots+V'_{\Theta,N+\nu-\Theta} \tag{28}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\text{jour} \quad N+\nu+\Theta-2 : V'_{\Theta,N+\nu-1}$$

C'est un vecteur d'ordre $(N+\nu+\Theta-2)$.

La transformation en débits exprimés en unités courantes se fait par l'intermédiaire du facteur de conversion approprié; on obtient un vecteur $\{Q\}$.

2.2.7. *Introduction du débit de base*

Elle découle immédiatement de l'exposé du paragraphe 1.6. Il suffit d'ajouter à Q_i élément pour le jour i du vecteur $\{Q\}$ un débit $Q_{Bi} = Q_0+T_Q \sum_{j=1}^{i} V_j$, relation (5) où $V_j = V_{Rj}$, tant que le ruissellement de fonte n'est pas terminé. Si f est le dernier jour où de l'eau de fonte de neige passe à l'exutoire, le débit de base maximal en fin de fonte sera donc :

$$Q_{Bf} = Q_0+T_Q \sum_{j=1}^{f} V_j. \tag{29}$$

3. RÉGLAGE DU MODÈLE

3.1. Les paramètres du réglage

Ils découlent des différentes opérations qui ont été indiquées au chapitre 2. Ce sont :

Θ durée du ruissellement (compte non tenu de l'étalement). Elle conditionne la structure de la matrice $[S]$.

α coefficient de passage de l'équivalent en eau de neige fraîche à l'équivalent en eau disponible au début de la fonte.
T_0 seuil de température.
A taux de fonte.
a coefficient de la pluie.
n paramètre du coefficient de réduction du couvert de neige.
b taux de perte initiale.
R coefficient de ruissellement.
μ paramètre de la fonction d'étalement.
T_Q taux d'accroissement du débit de base.

Parmi ces paramètres, certains varieront peu ou pas au cours du réglage, soit parce qu'ils se rapprochent de constantes physiques, comme a, soit parce que leur détermination a priori est assez facile, comme Θ. Pour a, on se contentera de prendre une valeur de 0,0035 si la pluie est donnée en mm, ou de 0,09 si la pluie est exprimée en pouces.

3.2. Préréglage et réglage contrôlé

La première estimation de Θ est faite en considérant la durée qui s'écoule de la fin supputée de la fonte des neiges à la fin du ruissellement dû à cette fonte; en considérant plusieurs crues relatives à des années différentes on se fait généralement une idée assez nette de Θ. De toute manière, si la valeur trouvée n'est pas correcte, on peut la rectifier dès les premiers essais.

α varie d'un bassin à l'autre suivant la durée moyenne de l'enneigement. Dans un modèle simplifié, on peut ne pas introduire ce paramètre et raisonner directement à partir de $(SN)'$ cela conduira à augmenter A et à diminuer R. Si on conserve ce paramètre, on pourra commencer le réglage avec $\alpha = 0{,}50$ [1].

T_0 serait une constante physique si les températures introduites étaient les vraies températures en chaque point du bassin. En fait les T_M considérés sont plutôt des indices; néanmoins, on ne touchera guère à T_0 au cours du préréglage du modèle qu'on peut démarrer avec $T_0 = 7°C$ ou 44°F.

Pour le taux de fonte journalier A, on commencera avec $A = 2$ si la fonte et le stock neigeux sont exprimés en mm et les températures en °C, avec $A = 0{,}05$ si les unités employées sont le pouce et le °F.

n sera pris assez fort au départ (15 à 20); on ne le fera varier qu'après coup, pour voir si son intervention améliore le réglage.

b sera pris au départ égal à 0,20 et R à 0,80.

Pour μ on commencera avec 0,2 ou 0,3 suivant la physionomie du bassin (relief et pourcentage de lacs).

Les valeurs initiales conseillées pour A, B et R supposent l'introduction du coefficient α. Sinon, il faudrait diviser R et multiplier A et b par 2.

T_Q se détermine assez facilement en considérant le débit atteint à la fin de la fonte, Q_0 est le volume ruisselé total dont on peut se faire une idée à peu près satisfaisante. La variation de T_Q relève du fignolage.

En fait, les paramètres sur lesquels va porter principalement l'effort durant la phase préliminaire de la mise en place du modèle sont A, b et R. Une fois le modèle à peu près mis en place, on le contrôlera sur d'autres crues pour voir s'il n'y a pas de trop grands écarts d'une année sur l'autre, écarts qui pourraient mettre en cause la qualité de certains relevés. Si les contrôles s'avèrent satisfaisants, on cherchera à améliorer l'ajustement en jouant sur les paramètres moins essentiels.

Un réglage automatique destiné à «fignoler l'ajustement» est actuellement à l'étude.

1. Si la pluie n'est pas prise en considération, l'introduction de α est inutile.