

La formulation de l'évapotranspiration sous forme d'une loi d'Ohm

J.P. LHOMME*, Nader KATERKI**

* INA-PG, 16 rue Claude Bernard, 75005 Paris, France

** INRA, Station de Bioclimatologie,
78850 Thiverval-Grignon, France

Résumé

Nous proposons un modèle qui permet de montrer que l'évapotranspiration d'un couvert végétal peut toujours s'exprimer sous forme d'une loi d'Ohm. Ce modèle est basé sur une discrétisation du couvert en différentes strates, chacune caractérisée par deux températures Tr_i et Ts_i , et deux résistances élémentaires ra_i et re_i (Fig. 2). Tr_i représente la température de rosée de l'air de la strate i et Ts_i la température moyenne des surfaces foliaires. ra_i caractérise la résistance à la diffusion de la vapeur d'eau au travers de la strate i et re_i la résistance moyenne à la diffusion des cavités stomatiques jusqu'au sommet de la strate (re_i englobant la résistance stomatique). Le modèle conduit à l'expression suivante du flux global de chaleur latente: $\phi = k[Te - Tr(h)]/Rv$. $Tr(h)$ est la température de rosée de l'air au sommet du couvert. Te , une température dite équivalente, qui est fonction des températures des surfaces foliaires. Rv est la résistance globale du couvert végétal, qui s'exprime mathématiquement en fonction des résistances élémentaires ra_i et re_i définies au niveau de chaque strate. Le modèle est enfin confronté à des résultats expérimentaux obtenus sur un couvert de luzerne.

Summary

Ohm's law type formulation of the evapotranspiration rate

We propose a model which allows to demonstrate that the evapotranspiration rate of a canopy can always be expressed by an Ohm's law type formula. This model is founded upon the division of the stand into different layers. Each layer is characterized by two temperatures Tr_i and Ts_i , and two elementary resistances ra_i and re_i (Fig. 2). Tr_i represents the dew point

ORSTOM Fonds Documentaire

N° : 22.098 ex1

Cote : B

temperature of the air in layer i and T_{s_i} the mean temperature of the leaves. r_{a_i} characterizes the diffusion resistance to water vapour across layer i and r_{e_i} the diffusion resistance inside the layer (r_{e_i} includes the stomatal resistance). From this model we deduce the following expression of the global latent heat flux: $\phi = k [T_e - T_r(h)] / R_v$. $T_r(h)$ is the dew point temperature of the air at the top of the canopy. T_e is an equivalent temperature which is a function of foliage temperatures. R_v is the total resistance of the canopy which has a mathematical expression as a function of the elementary resistances r_{a_i} and r_{e_i} defined for each layer. An experimental verification with data obtained from a lucerne crop shows the precision of the model.

I. Position du problème

a. Cas d'une nappe d'eau libre

On a pris l'habitude depuis longtemps de traduire le phénomène de diffusion de la vapeur d'eau dans l'air par une équation du type loi d'Ohm. Par analogie avec le courant électrique on écrit que le flux de vapeur d'eau est proportionnel à une différence de concentration en vapeur d'eau et inversement proportionnel à une résistance à la diffusion: $\phi = (C_1 - C_2) / R$. Cette écriture représente en fait l'intégration de l'équation de base de la diffusion (moléculaire ou turbulente) sur un trajet où le flux est conservatif et les grandeurs de tension aux deux bornes bien définies. Le concept de résistance à la diffusion R est indissociable de la formulation de la diffusion sous forme d'une loi d'Ohm. On écrira alors le flux de chaleur latente au-dessus d'une nappe d'eau libre de la manière suivante:

$$\phi = k \cdot [T(o) - Tr(z_r)] / Ra \quad (1)$$

$k = \rho c_p P' / \gamma$, $Tr(z_r)$ est la température de rosée de l'air à un niveau de référence z_r , $T(o)$ la température au niveau de la surface et Ra la résistance aérodynamique calculée entre la surface de l'eau et le niveau z_r .

b. Le modèle de Monteith

Monteith (1965) analysant l'évapotranspiration d'un couvert homogène suffisamment étendu, admet, par analogie avec l'évaporation d'une nappe d'eau libre, que la surface équivalente à la végétation sous l'angle des échanges avec l'air est un plan passant par la cote $D + z_0$, D étant la hauteur de déplacement du plan de référence aérodynamique et z_0 la hauteur de rugosité. Il considère que par rapport à une nappe d'eau, une nouvelle résistance s'applique au parcours de la vapeur d'eau, résistance liée au degré d'ouverture des stomates et notée R_s . Prenant comme température caractéristique de la vapeur d'eau au sein du couvert végétal (intérieur de la chambre stomatique) la température virtuelle de l'air extrapolée au niveau $D + z_0$, $T(D + z_0)$, il écrit:

$$\phi = k \cdot [T(D + z_0) - Tr(z_r)] / (Ra + R_s) \quad (2)$$

La résistance aérodynamique Ra est calculée entre le niveau de référence z_r et le plan de cote $D + z_0$. Toujours d'après Monteith (1973), lorsque le couvert est bien développé (évaporation du sol négligeable), il est possible d'obtenir R_s expérimentalement au moyen de la relation suivante:

$$R_s = \bar{r} / LAI \quad (3)$$

\bar{r} représentant la résistance stomatique moyenne des feuilles et LAI l'indice foliaire du couvert.

c. Le modèle de Perrier

Perrier (1975) propose un modèle qui peut être qualifié d'architecture par rapport au modèle plan de Monteith. Il considère que l'assimilation du couvert à une surface de résistance R_s , dans le modèle de Monteith, néglige le rôle de l'architecture du couvert sur les échanges. Prenant comme température caractéristique du couvert la température de l'air à son sommet $T(z_h)$, il écrit de flux de chaleur latente de la façon suivante:

$$\phi = k \cdot [T(z_h) - Tr(z_r)] / (Ra + R_v) \quad (4)$$

R_v est la résistance globale du couvert végétal qu'il décompose en deux résistances, l'une R_o qui traduit le frein dû à la structure du couvert et l'autre R_s représentant la résistance proprement stomatique au sens de Monteith:

$$R_v = R_o + R_s \quad (5)$$

Cette fois-ci la résistance aérodynamique Ra est calculée entre le niveau de référence et la surface du couvert (z_h).

d. Le problème posé

Le concept de résistance du couvert à la diffusion de la vapeur d'eau provient en fait de l'extrapolation au cas d'un couvert végétal d'une loi écrite à l'origine pour une nappe d'eau libre. Ce concept veut traduire globalement le frein qu'appose le couvert lui-même à la circulation de la vapeur d'eau des cavités sous-stomatiques (où la vapeur d'eau est à saturation) jusqu'à son sommet. Mais aucun des deux auteurs n'a vraiment précisé de façon rigoureuse la liaison qui pouvait exister entre la résistance du couvert ainsi définie (R_s pour Monteith, R_v pour Perrier) et ses caractéristiques biologiques ou architecturales comme le profil de résistance stomatique ou le profil de surface foliaire. Le propos que nous nous fixons ici est justement de présenter un modèle mathématique qui effectue cette liaison. Pour cela nous allons montrer, sans utiliser d'analogie, mais en recomposant les flux élémentaires qui existent au niveau de chaque strate du couvert, que l'évapotranspiration peut toujours s'exprimer sous forme d'une loi d'Ohm.

II. Le modèle proposé

a. Discrétisation du flux global de vapeur d'eau

Nous considérerons un couvert végétal homogène et horizontal que nous diviserons en un certain nombre de strates ou tranches parallèles. Chacune sera caractérisée par un indice de surface foliaire partielle LAI_i , une température moyenne de surface foliaire T_{s_i} et deux résistances stomatiques moyennes, une pour la face supérieure des feuilles r_{s_i} et l'autre pour la face inférieure r_{i_i} . L'air au niveau de la strate i sera caractérisé par une température de rosée Tr_i et une vitesse de vent U_i dont dépend le coefficient d'échange h_i . Chaque strate de végétation est en quelque sorte assimilée à

une grande feuille de surface LAI_i possédant les caractéristiques moyennes de la strate considérée.

Le modèle est basé sur une analogie électrique où le flux de vapeur d'eau remplace l'intensité du courant et la température de rosée le potentiel électrique. On peut considérer que la vapeur d'eau dans les cavités stomatiques est saturante à la température T_{s_i} et qu'elle emprunte, dans son processus de diffusion, deux voies en parallèle, correspondant aux deux faces des feuilles. Chaque voie se compose de deux résistances en série, la résistance stomatique et celle de la couche limite de la feuille. Le schéma électrique équivalent à ce processus de diffusion est donné par la figure (1). La résistance équivalente, pour chaque strate de végétation, est la suivante:

$$re_i = \left(\frac{1}{1/h_i + r_{s_i}} + \frac{1}{1/h_i + r_{i_i}} \right)^{-1} / LAI_i \quad (6)$$

Le flux élémentaire de vapeur d'eau qui lui correspond, s'écrivant:

$$\varphi_i = k \cdot (T_{s_i} - Tr_i) / re_i \quad (7)$$

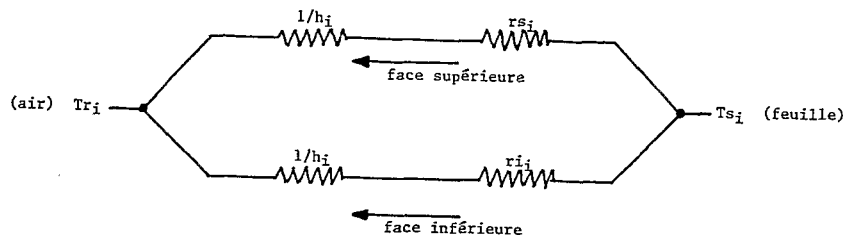


Fig. 1 - Analogie électrique équivalente au processus de diffusion de la vapeur d'eau à l'intérieur d'une strate de végétation.

Le coefficient d'échange des feuilles h est une fonction de la vitesse du vent U qui se met généralement sous la forme suivante:

$$h = h_0 \cdot U^a \quad (8)$$

où h_0 peut être considéré comme une constante en première approximation. L'exposant a varie, suivant les auteurs, entre 0,5 et 1. Perrier (1968) propose $a = 0,8$. Dans ce cas h_0 est voisin de 0,02 (pour l'une des faces de la feuille). On pourra donc écrire h_i de la façon suivante:

$$h_i = h_0 U_i^a \quad (8')$$

U_i représentant la vitesse du vent au niveau de la strate i .

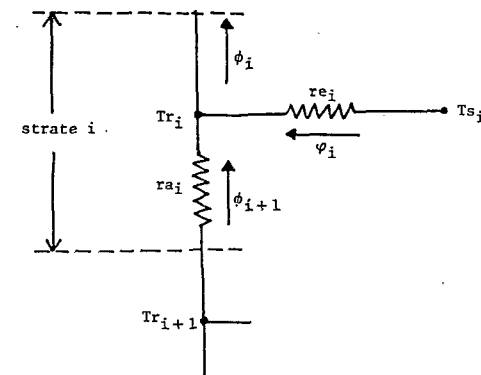


Fig. 2 - Analogie électrique équivalente au processus de diffusion de la vapeur d'eau au travers d'une strate de végétation.

Le flux élémentaire φ_i qui provient de la strate i va se mélanger au flux général qui provient des tranches de végétation inférieures et qu'on notera ϕ_{i+1} . Ce flux ϕ_{i+1} , pour traverser la tranche de végétation i , va rencontrer une résistance aérodynamique ra_i . La figure (2) présente le schéma électrique qui visualise la jonction des flux φ_i et ϕ_{i+1} et le nouveau flux ϕ_i qui en résulte. En toute rigueur le point de jonction entre le flux élémentaire φ_i et le flux général ϕ_{i+1} , de potentiel Tr_i , devrait se trouver au milieu de la résistance ra_i . Mais, pour simplifier, nous le mettrons au-dessus, considérant que l'erreur introduite est négligeable. La résistance ra_i s'exprime en fonction de l'épaisseur Δz_i de la strate i et de la diffusivité turbulente K_i au niveau de cette strate, de la manière suivante:

$$ra_i = \Delta z_i / K_i \quad (9)$$

Le schéma électrique équivalent au couvert pris dans son ensemble et divisé en n strates se présente comme une succession de n schémas élémentaires du type donné par la figure (2). Remarquons que ce schéma général (fig. 3) permet de tenir compte de l'évaporation au niveau du sol. En effet, on peut très bien assimiler la couche de sol évaporante à une strate de végétation de température caractéristique T_{s_n} (température de surface du sol) et de résistance équivalente $re_n = 1/h_n + r_s$, r_s représentant la résistance à la diffusion de la couche superficielle de sol et h_n le coefficient d'échange correspondant (Perrier, 1975). Le flux global de vapeur d'eau ϕ , ou évapotranspiration du couvert, représente la somme des flux élémentaires φ_i existant au niveau de chaque tranche du couvert:

$$\phi = \sum_{i=1}^n \varphi_i \quad (10)$$

Soit, en tenant compte de l'équation (7):

$$\phi = k \cdot \left(\sum_{i=1}^n T_{s_i} / re_i - \sum_{i=1}^n Tr_i / re_i \right) \quad (11)$$

Les grandeurs T_{s_i} et r_{e_i} sont supposées connues ou accessibles à partir de l'expérimentation. Le problème va consister maintenant à exprimer les températures de rosée Tr_i aux noeuds du réseau, à priori inconnues, en fonction de paramètres qui eux sont connus.

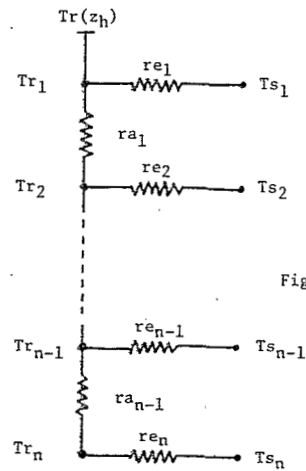


Fig. 3 - Analogie électrique équivalente au processus de diffusion de la vapeur d'eau à l'intérieur du couvert.

b. Calcul de la température de rosée aux noeuds du réseau

Au niveau de chaque noeud du réseau nous pouvons écrire:

$$\phi_i = \phi_{i+1} + \varphi_i \quad (12)$$

Soit encore:

$$\frac{Tr_i - Tr_{i-1}}{ra_{i-1}} = \frac{Tr_{i+1} - Tr_i}{ra_i} + \frac{T_{s_i} - Tr_i}{re_i} \quad (13)$$

Ce qui donne la relation de récurrence suivante:

$$Tr_{i+1} = a_i \cdot Tr_i + b_i \cdot Tr_{i-1} + c_i \cdot T_{s_i} \quad (14)$$

avec:

$$\begin{cases} a_i = 1 - b_i - c_i \\ b_i = -ra_i / ra_{i-1} \\ c_i = -ra_i / re_i \end{cases} \quad (15)$$

Le premier terme du processus récurrent Tr_1 vaut $Tr(z_h)$ qui représente la température de rosée de l'air au sommet du couvert. Le deuxième terme Tr_2 se calcule aisément:

$$Tr_2 = (1 - c_1) \cdot Tr(z_h) + c_1 \cdot T_{s_1} + ra_1 \cdot \phi / k \quad (16)$$

Les expressions successives de Tr_i (Tr_1 , Tr_2 , etc.) et la forme de la relation de récurrence (14) montrent que l'on peut mettre Tr_i sous la forme générale suivante:

$$Tr_i = a_i \cdot Tr(z_h) + \beta_i \cdot (ra_1 \cdot \phi / k) + \sum_{j=1}^{i-1} \epsilon_i^j T_{s_j} \quad (17)$$

Les coefficients a_i , β_i et ϵ_i se déduisant les uns des autres au moyen des relations de récurrence suivantes:

$$\begin{cases} a_{i+1} = a_i \cdot a_i + b_i \cdot a_{i-1} \\ \beta_{i+1} = a_i \cdot \beta_i + b_i \cdot \beta_{i-1} \\ \epsilon_{i+1}^j = a_i \cdot \epsilon_i^j + b_i \cdot \epsilon_{i-1}^j \\ \epsilon_{i+1}^i = c_i \end{cases} \quad (18)$$

les premiers coefficients s'écrivant ainsi:

$$\begin{cases} a_1 = 1 & \beta_1 = 0 \\ a_2 = 1 - c_1, & \beta_2 = 1, & \epsilon_2^1 = c_1 \end{cases} \quad (19)$$

c. Expression du flux global de vapeur d'eau

Revenant à l'expression (11) donnant le flux global de vapeur d'eau et remplaçant Tr_i par son expression (17), on obtient:

$$-\frac{\phi}{k} \cdot (1 + ra_1 \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{re_i}) = (\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{re_i}) \cdot Tr(z_h) + \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^{i-1} \frac{\epsilon_i^j}{re_i} \cdot T_{s_j} - \frac{1}{re_i} \cdot T_{s_i}) \quad (20)$$

En posant $\epsilon_i^i = -1$ et en regroupant les termes en T_{s_i} on peut écrire:

$$\sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^{i-1} \frac{\epsilon_i^j}{re_i} \cdot T_{s_j} - \frac{1}{re_i} \cdot T_{s_i}) = \sum_{i=1}^n (\sum_{j=i}^n \frac{\epsilon_j^i}{re_j}) \cdot T_{s_i} \quad (21)$$

Nous poserons également:

$$\begin{cases} A = \sum_{i=1}^n a_i / re_i \\ B = \sum_{i=1}^n \beta_i / re_i \\ E_i = \sum_{j=i}^n \epsilon_j^i / re_j \end{cases} \quad (22)$$

Le flux global de vapeur d'eau ϕ s'écrira alors:

$$\phi = k \cdot \frac{(-\sum_{i=1}^n E_i T_{s_i} / A) - Tr(z_h)}{(1 + ra_1 \cdot B) / A} \quad (23)$$

Les coefficients a_i , β_i et ϵ_i étant sans dimension, A, B et E_i seront homogènes à l'inverse d'une résistance. L'expression $(1 + ra_1 \cdot B) / A$ est alors homogène à une résistance. Nous l'appellerons résistance globale du couvert et la noterons R_v :

$$R_v = (1 + ra_1 \cdot B) / A \quad (24)$$

Quant à l'expression $(-\sum_{i=1}^n E_i \cdot Ts_i/A)$, elle représente une température de surface pondérée qu'on appellera température équivalente et notera Te :

$$Te = -\frac{\sum_{i=1}^n E_i \cdot Ts_i}{A} \quad (25)$$

L'équation (23) devient donc:

$$\phi = k \cdot [Te - Tr(z_h)] / R_v \quad (26)$$

expression qui est l'écriture stricte d'une loi d'Ohm.

d. Confrontation expérimentale

La formulation que nous venons de présenter peut être utilisée pour calculer l'évapotranspiration d'un couvert à partir de mesures ponctuelles de résistance stomatique et de température foliaire. La confrontation expérimentale a consisté à comparer les valeurs d'évapotranspiration calculées au moyen du modèle présenté à celles données par le système BEARN (Perrier et al., 1975), sur un couvert de luzerne bien couvrant, avec un pas de temps d'une heure. La culture était divisée en deux ou trois strates de 20-30 cm chacune, selon la croissance. Une vingtaine de mesures de résistance stomatique et de température foliaire étaient réalisées dans chaque strate et à chaque pas de temps. Pour calculer la vitesse du vent U_i et la diffusivité K_i à l'intérieur du couvert nous avons utilisé les profils théoriques proposés par Perrier (1967, 1976) et présentés en annexe. La figure (4) montre les résultats obtenus. La comparaison porte sur 90 couples de valeurs. La dispersion relativement importante des résultats s'explique aisément si on tient compte, d'une part de la faible précision avec laquelle sont effectuées les mesures d'ordre biologique et des erreurs d'échantillonnage qui y sont liées, et d'autre part du fait que les valeurs données par le BEARN sont, elles-aussi, entachées d'erreurs.

III. Conclusions

Le modèle présenté montre que l'écriture de l'évapotranspiration d'un couvert sous forme d'une loi d'Ohm est parfaitement justifiée physiquement mais que la température qui sert à caractériser l'état moyen de la vapeur d'eau dans les stomates (la borne de départ du trajet de la vapeur d'eau) est, du fait même, bien déterminée. Ce n'est ni la température $T(D+z_0)$ de Monteith ni $T(z_h)$ de Perrier, mais une fonction des températures des surfaces foliaires, que nous avons appelé Te (température équivalente), et qui prend en compte les différentes résistances (stomatiques et aérodynamiques) que la vapeur d'eau rencontre sur son trajet jusqu'au sommet du couvert.

La résistance du couvert à la diffusion de la vapeur d'eau R_v est également parfaitement déterminée et s'exprime mathématiquement en fonction des résistances élémentaires définies au niveau de chaque strate. Mais elle ne s'identifie pas à celles définies par Monteith et Perrier. À ce propos la figure (5) visualise sous forme de schémas les différences existant entre les trois modèles.

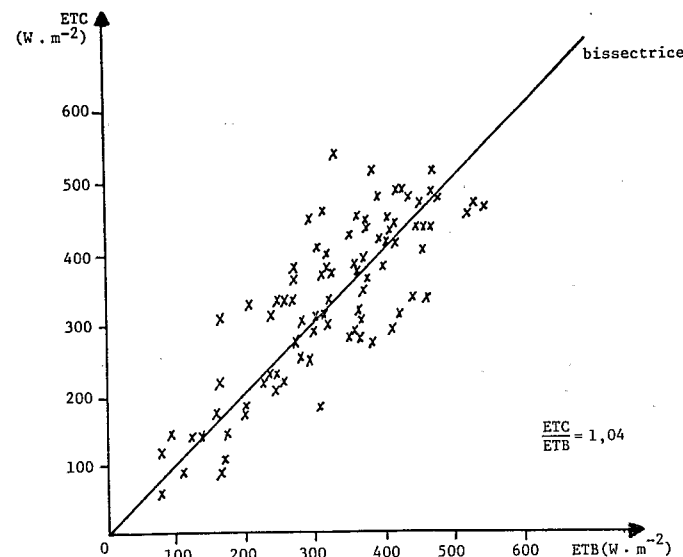


Fig. 4 - Evapotranspiration calculée à partir du modèle (ETC) en fonction de l'évapotranspiration donnée par le BEARN (ETB).

Enfin, l'intérêt que nous voyons dans ce nouveau modèle par rapport aux précédents réside dans trois choses:

- d'une part, il donne une justification théorique à l'écriture sous forme d'une loi d'Ohm de l'évapotranspiration d'un couvert.
- d'autre part, il précise mathématiquement la relation qui existe entre la résistance globale du couvert et ses caractéristiques biologiques et architecturales.
- enfin, il introduit une température caractéristique du couvert, qui bien que compliquée à première vue, ne doit pas être très éloignée de la température radiative, telle qu'elle peut être mesurée à distance par un radiothermomètre, toutes deux s'exprimant en fonction des températures des surfaces foliaires.

À ce propos il conviendrait d'examiner en détails les rapports existant entre ces deux températures et la manière de passer de l'une à l'autre.

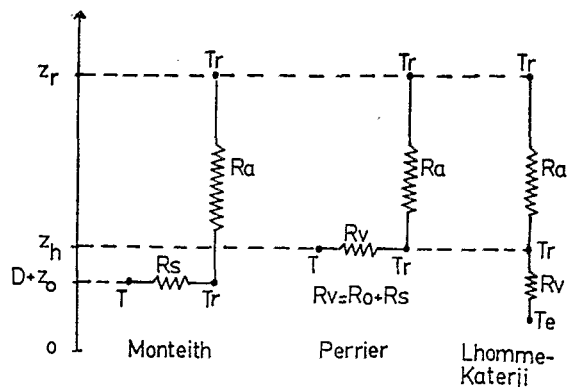


Fig. 5. Schéma montrant les différences existant au niveau des résistances entre les trois modèles (Monteith, Perrier, Lhomme-Katerji).

Références bibliographiques

- MONTEITH, J.L., 1965 - Evaporation and environment. In "The state and movement of water in living organisms". Sym. of the Soc. for Exp. Biol., XIX, 205-234. University Press, Cambridge.
- MONTEITH, J.L., 1973 - Principles of environmental physics. Arnold ed., London, 241 p.
- PERRIER, A., 1967 - Approche théorique de la microturbulence et des transferts dans les couverts végétaux en vue de l'analyse de la production végétale. La Météorologie, série 5, 4, 527-550.
- PERRIER, A., 1968 - Contribution à l'étude des échanges thermiques en biologie végétale. Revue générale de thermique, 79-80, 721-740.
- PERRIER, A., 1975 - Etude physique de l'évapotranspiration dans les conditions naturelles: II, Expressions et paramètres donnant l'évapotranspiration réelle d'une surface mince. Ann. Agron., 26 (2), 105-123. III, Evapotranspiration réelle et potentielle des couverts végétaux. Ann. Agron., 26 (3), 229-243.
- PERRIER, A., TIER, B., BERTOLINI, J.M. et BLANCO DE PABLOS, A., 1975 - Mesure automatique du bilan d'énergie d'une culture. Exemples d'application Ann. Agron., 26 (1), 19-40.
- PERRIER, A., 1976 - Etude et essai de modélisation des échanges de masse et d'énergie au niveau des couverts végétaux. Thèse de Doctorat d'Etat. Université de Paris VI. 236 p.

Annexe

La détermination de h_i et ra_i , pour une strate donnée, nécessite la connaissance de la vitesse du vent et de la diffusivité turbulente à ce même niveau. Pour cela on peut utiliser les profils théoriques qu'a proposés Perrier (1967, 1976) et qui lient la vitesse du vent et la diffusivité à un niveau z au sein du couvert à la vitesse du vent $U(h)$ au sommet du couvert:

$$\begin{cases} U(z) = U(h) \cdot \exp(-B_0 \cdot F(z)) \\ K(z) = A_0 \cdot B_0 \cdot U(z) / f(z) \end{cases}$$

$f(z)$ est la fonction densité de surface foliaire et $F(z)$ définit la surface foliaire cumulée à partir du sommet du couvert (Perrier, 1975). A_0 et B_0 sont deux coefficients théoriques voisins respectivement de 0,4 et 0,6.

Compte tenu de la discrétisation du couvert, U_i et K_i s'écrivent respectivement:

$$\begin{cases} U_i = U(h) \cdot \exp(-B_0 \cdot \Sigma LAI_i) \\ K_i = A_0 \cdot B_0 \cdot U_i / (LAI_i / \Delta z_i) \end{cases}$$

ΣLAI_i représentant la surface foliaire cumulée du sommet jusqu'à la strate i et Δz_i l'épaisseur de la strate i .

Liste des symboles

a, b, c	coefficients adimensionnés
c_p	chaleur massique de l'air
D	hauteur de déplacement du plan de référence aérodynamique
h	coefficient d'échange des surfaces foliaires
K	diffusivité turbulente
$k = \rho c_p P' / \gamma$	
LAI	indice de surface foliaire
P'	pente de la courbe de pression de vapeur saturante
Ra	résistance aérodynamique au-dessus du couvert
Rs	résistance stomatique globale du couvert
rs	résistance stomatique moyenne de la face supérieure des feuilles d'une strate
ri	résistance stomatique moyenne de la face inférieure des feuilles d'une strate
ra	résistance aérodynamique d'une strate de végétation
re	résistance équivalente d'une strate
T	température de l'air
Ts	température de surface des feuilles
Tr	température de rosée de l'air
Te	température équivalente du couvert végétal
U	vitesse du vent
z _r	niveau de référence climatique
z ₀	hauteur de rugosité
z _h	hauteur du couvert végétal
φ	flux élémentaire de vapeur d'eau au niveau d'une strate
ϕ	flux global de vapeur d'eau
i	indice rapportant la grandeur correspondante à la strate i