1970

J.C. KLEIN

— non trouvé en Bque
— " en CR.

Note du 28-12-69

REMARQUE sur les LIENS EXISTANT entre les RAPPORTS de CONFLUENCE et de LONGUEURS DEFINIS à PARTIR des CLASSIFICATIONS de HORTON et de SCHUMM

L'examen d'un cas particulier (bassin DU PLESSIS à la GUADELOUPE) a conduit à se demander comment varient les rapports de confluence et de longueurs selon qu'on adopte la classification des affluents retenue par HORTON ou celle proposée par SCHUMM. D'où les quelques réflexions qui suivent.

1. RELATION entre le CLASSEMENT des AFFLUENTS selon HORTON et SCHUMM

Sur un bassin où l'ordre le plus élevé est x, désignons par h_1, h_2... h_x le nombre d'affluents d'ordre 1, 2 ... x, définis selon HORTON et s_1, s_2..., s_x celui défini par la classification de SCHUMM.

On vérifie aisément que

$$s_x = h_x \ (= 1)$$
$$s_{x-1} = h_{x-1} + h_x$$
$$s_2 = h_2 + h_3 + \dots + h_x$$
$$s_1 = h_1 + h_2 + \dots + h_x$$

La suite des affluents classés selon S s'obtient simplement en cumulant les termes de la suite des affluents classés selon H, en partant de l'affluent d'ordre le plus élevé.

Cette relation stricte permet de vérifier que le décompte, effectué indépendamment selon H, puis selon S ne comporte pas d'erreurs (surtout des oublis), ou bien permet lorsqu'un premier décompte a été minutieusement fait de passer directement au décompte de la seconde classification.

2. RAPPORT de CONFLUENCE

2.1. Valeur du rapport

Dans le cas idéal où la suite h_x, h_{x-1}, ... h_z, h_1 constitue une progression géométrique le rapport de confluence $\frac{h_i}{h_{i+1}}$, raison de la progression est constant. Compte tenu de la relation ci-dessus on montre aisément que : $\frac{s_i}{s_{i+1}} > \frac{h_i}{h_{i+1}}$.

Cela reste exceptionnel. Et dans le cas général, on n'est pas certain a priori que la classification de SCHUMM conduise à un rapport de confluence supérieur à celui de HORTON, car si les affluents d'ordre 1 et 2 sont plus nombreux dans la classification de SCHUMM c'est vrai! également des affluents d'ordre plus élevé.

On peut chercher à éclaircir ce point expérimentalement, sur une gamme variée de bassins, en déterminant le rapport de confluence, R_h ou R_s, par ajustement graphique des couples de points (h,x), puis (s,x) ; mais on voit assez mal ainsi pourquoi R_s est tantôt supérieur à R_h, tantôt inférieur.

On peut également chercher à voir ce qui se passe à l'aide des relations ci-dessus. Par exemple, en adoptant pour R la moyenne arithmétique des x-1 rapports $\frac{h_i}{h_{i+1}}$ ou $\frac{s_i}{s_{i+1}}$ on a :

$$R_h = \frac{1}{x-1}\left(\frac{h_1}{h_x} + \frac{h_2}{h_3} + \dots + \frac{h_{x-1}}{h_x}\right)$$

$$R_s = \frac{1}{x-1}\left(\frac{s_1}{s_2} + \dots + \frac{s_{x-1}}{s_x}\right) = \frac{1}{x-1}\left(\frac{h_1 + h_2 + \dots + h_x}{h_2 + \dots\dots\dots + h_x} + \frac{h_2 + h_3 + \dots h_x}{h_3 + \dots\dots + h_x} + \dots + \frac{h_{x-1} + h_x}{h_x}\right.$$

On peut exprimer la différence $R_s - R_h$ en fonction des seules valeurs h_1, h_2 ..., h_x. On montre facilement que $R_s - R_h$ peut s'écrire également :

$$R_s - R_h = 1 - \frac{1}{x-1}\left(\frac{\frac{h_1}{h_2}}{\frac{s_2}{s_3}} + \frac{\frac{h_2}{h_3}}{\frac{s_3}{s_4}} + \dots + \frac{\frac{h_{x-2}}{h_{x-1}}}{\frac{s_{x-1}}{s_x}}\right)$$

Dans le cas assez fréquent où le thalweg à l'exutoire est d'ordre 4 on a :

$$R_s - R_h = 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\frac{h_1}{h_2}}{\frac{s_2}{s_2}} + \frac{\frac{h_2}{h_3}}{\frac{s_3}{s_4}}\right) \text{ avec } s_4 = 1$$

On voit bien que si $\frac{h_1}{h_2}$, $\frac{h_2}{h_3}$, $\frac{h_3}{h_4}$ sont à peu près égaux c'est s_3, c'est-à-dire le nombre d'affluents d'ordre 3 qui va être déterminant :

- si s_3 est assez élevé : $R_s > R_h$
- si s_3 est faible (2, 3 parfois) : $R_s < R_h$

<u>Exemple</u> : le Bassin DU PLESSIS

<u>Réseau "Photo"</u>		<u>Réseau "Carte au 1/20 000"</u>	
$\frac{h_1}{h_2} = \frac{137}{20} = 6,85$	$\frac{s_1}{s_2} = \frac{162}{25} = 6,48$	$\frac{h_1}{h_2} = \frac{19}{5} = 3,8$	$\frac{s_1}{s_2} = \frac{26}{7} = 3,72$

$$\frac{h_2}{h_3} = \frac{20}{4} = 5{,}0 \quad \frac{s_2}{s_3} = \frac{25}{5} = 5{,}0 \qquad \frac{h_2}{h_3} = \frac{5}{1} = 5 \quad \frac{s_2}{s_3} = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

$$\frac{h_3}{h_4} = \frac{4}{1} = 4{,}0 \quad \frac{s_3}{s_4} = \frac{5}{1} = 5{,}0 \qquad \frac{h_3}{h_4} = \frac{1}{1} = 1 \quad \frac{s_3}{s_4} = \frac{2}{1} = 2$$

$$R_s - R_h = 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{6{,}85}{5{,}0} + \frac{5{,}0}{5{,}0}\right) = + 0{,}21 \qquad R_s - R_h = 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{3{,}8}{3{,}5} + \frac{5{,}0}{2{,}0}\right) = - 0{,}20$$

Dans l'ajustement graphique, on évite de s'appuyer sur le point (1, x). Si l'on fait de même ici, en ne prenant pas en compte, dans la moyenne, les rapports $\frac{h_{x-1}}{h_x}$ et $\frac{s_{x-1}}{s_x}$, on aura pour l'ordre 4 :

$$R_s - R_h = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{\frac{h_1}{h_2}}{\frac{s_2}{s_3}} + \frac{\frac{h_2}{h_3}}{\frac{s_3}{s_4}}\right)$$

Le cas $R_s > R_h$ sera encore moins souvent réalisé, ce qui se comprend aisément si l'on remarque que l'on a toujours $\frac{s_{x-1}}{s_x} = \frac{h_{x-1}}{h_x} + 1$ (x étant l'ordre le plus élevé).

Et si l'on veut s'affranchir également du point $(h_1, 1)$ ou $(s_1, 1)$ pareeque h_1 ou s_1 peuvent être mal connus, cela revient (pour l'ordre 4 toujours) à comparer $R_s = \frac{s_2}{s_3}$ et $R_h = \frac{h_2}{h_3}$.

La différence $R_s - R_h$ est égale à $\frac{h_2 + h_3 + h_4}{h_3 + h_4} - \frac{h_2}{h_3}$ et varie comme $h_3(h_3 + 1) - h_2$.

Elle sera positive si $h_2 < h_3 (h_3 + 1)$ ou $\frac{h_2}{h_3} < h_3 + 1$

Si $h_3 = 2$ Cela impose que h_2 soit inférieur à 6
Si $h_3 = 3$ " " " à 12
Si $h_3 = 4$ " " " à 20

Cela tend bien à montrer que R_s n'est supérieur à R_h que s'il y a bonne hiérarchisation des affluents sur le bassin.

2.2 Dispersion des valeurs successives du rapport de confluence sur un bassin

Les relations du paragraphe 1 indiquant que les s_i sont les valeurs cumulées des h_i en partant de l'affluent d'ordre le plus élevé, on peut prévoir que la classification de SCHUMM atténuera la dispersion des rapports de confluence.

On peut le montrer simplement après avoir commencé par établir que :

$$\frac{s_i}{s_{i+1}} - \frac{h_i}{h_{i+1}} = \frac{\frac{s_{i+1}}{s_{i+2}} - \frac{h_i}{h_{i+1}}}{\frac{s_{i+1}}{s_{i+2}}}, \text{ avec } \frac{s_{i+1}}{s_{i+2}} > 1$$

Si l'on compare les suites de rapports de confluence comptés à partir de l'affluent d'ordre le plus élevé cette expression indique que chaque terme $\frac{s_i}{s_{i+1}}$ dérive de son homologue $\frac{h_i}{h_{i+1}}$ en minorant ou majorant ce dernier selon qu'il est supérieur ou inférieur au terme immédiatement antérieur $\frac{s_{i+1}}{s_{i+2}}$ (le premier rapport majore $\frac{h_{x-1}}{h_x}$ de 1).

<u>La variabilité des rapports de confluence établis en utilisant la classification de SCHUMM est donc inférieure à celle entraînée par la classification de HORTON.</u>

La classification de SCHUMM facilite donc le calcul d'un rapport moyen de confluence. Corrélativement il convient de ne pas perdre de vue qu'avec la classification de HORTON la conservation de ce rapport d'un ordre au suivant serait moins bien assurée.

<u>Exemple</u> : le bassin de DJAJIBINE (GHORFA) - Note technique n°19, tableau 1. On lève la petite contradiction entre les décomptes des affluents classés selon HORTON et SCHUMM en admettant que c'est le décompte selon HORTON qui est juste. On aurait ainsi le décompte rectifié :

$h_1 = 407$ et $s_1 = 564$ (au lieu de 571)
$h_2 = 122$ et $s_2 = 157$ (au lieu de 145)
$h_3 = 27$ et $s_3 = 35$ (au lieu de 27)
$h_4 = 6$ et $s_4 = 8$ (au lieu de 7)
$h_5 = 1$ et $s_5 = 2$
$h_6 = 1$ et $s_6 = 1$

On en déduit : $\frac{h_1}{h_2} = 3,34$ $\quad \frac{s_1}{s_2} = 3,60$

$\frac{h_2}{h_3} = 4,52$ $\quad \frac{s_2}{s_3} = 4,48$

$\frac{h_3}{h_4} = 4,50$ $\quad \frac{s_3}{s_4} = 4,37$

$\frac{h_4}{h_5} = 6,0$ $\quad \frac{s_4}{s_5} = 4,0$

$\frac{h_5}{h_6} = 1$ $\quad \frac{s_5}{s_6} = 2$

On vérifie bien que $\frac{h_4}{h_5}$ étant supérieur à $\frac{s_5}{s_6}$, $\frac{s_4}{s_5}$ est également supérieur à $\frac{s_5}{s_6}$, mais inférieur à $\frac{h_4}{h_5}$ (c'est le cas aussi, et mutatis mutandis, de $\frac{s_3}{s_4}$ et $\frac{s_2}{s_3}$). Inversement $\frac{h_1}{h_2}$ étant inférieur à $\frac{s_2}{s_3}$, $\frac{s_1}{s_2}$ le sera également, mais restera supérieur à $\frac{h_1}{h_2}$. (On peut vérifier de façon plus précise que l'on a bien : $\frac{s_4}{s_5} = \frac{h_4}{h_5} + \frac{\frac{s_5}{s_6} - \frac{h_4}{h_5}}{\frac{s_5}{s_6}}$ etc ...).

3. RAPPORT de LONGUEURS

Il n'est plus possible, comme dans le décompte des affluents de divers ordres, d'établir des relations strictes, entre SCHUMM et HORTON, puisqu'ici chaque affluent est pondéré par sa longueur et qué certains d'entre eux jouent un rôle privilégié précisément du fait de leur longueur (classification de HORTON).

On peut faire cependant les remarques suivantes :

Si l'on pose : $$\frac{\bar{l}_{si}}{\bar{l}_{si-1}} = \frac{\bar{l}_{hi}}{\bar{l}_{hi-1}} \cdot \frac{f_1(\bar{l}_{hi-1}, \dots, \bar{l}_{h2}, \bar{l}_{h1})}{f_2(\bar{l}_{hi-2}, \dots, \bar{l}_{h2}, \bar{l}_{h1})}$$

On voit qu'on pourrait prendre ~~la~~ en première approximation :

$$f_1(\bar{L}_{hi-1}, \ldots, \bar{L}_{h2}, \bar{L}_{h1}) = \bar{L}_{hi-1} + \ldots + \bar{L}_{h2} + \bar{L}_{h1}$$

$$f_2(\bar{L}_{hi-2}, \ldots, \bar{L}_{h2}, \bar{L}_{h1}) = \bar{L}_{hi-2} + \ldots + \bar{L}_{h2} + \bar{L}_{h1}$$

A l'inverse du cas précédent on est amené, dans la classification de SCHUMM, à examiner des rapports de longueurs qui sont assimilables non plus à des rapports de sommes, mais à des rapports de différences. On en déduit que la dispersion des rapports de longueurs va être sensiblement plus grande dans la classification de SCHUMM que dans celle de HORTON.

Considérons en particulier les affluents d'ordre 1 et 2 : ceux des affluents d'ordre 1 de la classification de SCHUMM qui dans la classification de HORTON constitueraient les tronçons supérieurs des affluents d'ordre 2, ne sont pas plus longs en moyenne que pour l'ensemble du bassin. On peut écrire avec une assez bonne approximation (une excellente approximation lorsque les affluents d'ordre 1 sont très nombreux) :

$$\frac{\bar{L}_{s2}}{\bar{L}_{s1}} \sim \frac{\bar{L}_{h2} - \bar{L}_{h1}}{\bar{L}_{h1}} \quad \text{ou } R_{s1,2} = R_{h1,2} - 1$$

Cette forte amputation du $R_{s1,2}$ entraînera souvent l'augmentation de $R_{2,3}$ et l'on aura $R_{s2,3} > R_{h2,3}$.

De même si l'on remarque qu'en passant de HORTON à SCHUMM l'affluent d'ordre le plus élevé x est très généralement amputé d'un des plus longs sinon du plus long des affluents d'ordre x - 1, on verra $\bar{L}_{x-1}$ croître relativement et l_x diminuer très sensiblement, ce qui entraînera $R_{sx-1,x} \ll R_{hx-1,x}$. Et alors que pour le rapport de confluence le minimum $R_{hx-1,x}$ était 1, ici $R_{sx-1,x}$ peut descendre à zéro.

Cette forte distorsion pressentie des différentes valeurs du rapport de longueurs par rapport à celles obtenues avec la classification de HORTON n'a aucune importance en soi. Mais une fois constatée elle conduit à se demander si la hiérarchisation des longueurs moyennes au sens d'HORTON (progression géométrique croissante) est bien le schéma le mieux approprié dans la classification de SCHUMM. L'application de la règle graphique d'ajustement semi-logarithmique n'amènera-t-elle pas par exemple à conclure à une mauvaise hiérarchisation alors que la classification d'HORTON inciterait au contraire à déceler une hiérarchisation assez nette, en particulier pour les bassins d'ordre 4 ou 5?

Il est tout à fait possible d'ailleurs que même dans le cas d'HORTON la hiérarchisation apparaît rarement satisfaisante.

Pour préciser cette double éventualité on peut proposer pour chaque bassin qu'après avoir essayé l'ajustement $(\overline{L}_{x},x)$ on essaie $(\sum_{i=1}^{i=x} \overline{L}_{x},x)$ qui fournit très rapidement une assez bonne approximation de ce qu'on obtiendrait avec le schéma d'HORTON.

Exemple : Bassin DU PLESSIS

Estimation d'HORTON d'après SCHUMM		HORTON	
$\overline{L}_1 = 0{,}096$	$\sum^{1} \overline{L} = 0{,}096$	$\overline{L}_1 = 0{,}092$	$\delta = +\ 0{,}004$ soit + 4%
$\overline{L}_2 = 0{,}162$	$\sum^{2} \overline{L} = 0{,}258$	$\overline{L}_2 = 0{,}249$	$\delta = +\ 0{,}009$ soit + 4%
$\overline{L}_3 = 0{,}852$	$\sum^{3} \overline{L} = 1{,}11$	$\overline{L}_3 = 1{,}16$	$\delta = -\ 0{,}05$ soit - 4%
$\overline{L}_4 = 1{,}83$	$\sum_{1}^{4} \overline{L} = 2{,}94$	$\overline{L}_4 = 3{,}37$	$\delta = -\ 0{,}43$ soit - 12%