

POINT DE VUE SUR LE PROBLÈME DE L'ABATTEMENT DES PLUIES

M. ROCHE

RÉSUMÉ

Le problème de l'abattement se rapporte à la répartition spatiale des précipitations tombant sur une surface donnée pendant un temps donné. Le but des investigations concernant ce problème est de fournir un moyen de passer d'une pluie ponctuelle, enregistrée à un lieu donné, à la pluie moyenne tombant sur une surface finie entourant ce lieu. Il apparaît, dès qu'on touche à ce sujet, que la notion envisagée n'a de sens que si l'on se place sur un plan à la fois statistique et probabiliste. L'étude en elle-même peut se concevoir de deux manières différentes : étude d'un «coefficient de réduction», considéré comme le rapport entre la pluie moyenne sur la surface et la valeur maximale ponctuelle de la pluie pendant la même période, ou étude directe de la répartition statistique à la fois dans l'espace et dans le temps. Si l'on se borne à la première solution, le traitement correct du problème exige de considérer le «coefficient de réduction» comme une variable dépendant d'un certain nombre de facteurs, d'une part, et de nature stochastique, d'autre part ; des difficultés assez sérieuses sont soulevées dans l'application de cette méthode. Dans la seconde solution, l'abattement n'est plus défini par un coefficient, mais par une question du type : «Etant donné que la pluie ponctuelle en un point *arbitraire* de la surface S a une probabilité donnée, quelle est la pluie moyenne de même probabilité sur cette surface ?» C'est sous cette forme que l'auteur se propose d'esquisser une solution du problème de l'abattement ; il ne prétend pas avoir définitivement résolu la question, mais peut-être avoir fait quelques pas dans cette voie.

1. EXPOSÉ GÉNÉRAL

1.1. *Position du problème, essai de définition rationnelle de l'abattement.*

C'est un fait d'observation courante que, lors d'une précipitation, chaque point d'une aire donnée ne reçoit pas la même quantité d'eau. On désigne ce phénomène par l'expression «hétérogénéité spatiale de la pluie». Si l'on veut passer du plan qualitatif au plan quantitatif, il faut définir un paramètre capable de chiffrer ce degré d'hétérogénéité ; or, la définition même de ce paramètre exige que l'on se soit fixé la durée pendant laquelle la précipitation s'est produite. Il est évident, et ceci s'explique du reste très bien par un raisonnement statistique simple, qu'une pluie journalière sera beaucoup plus hétérogène dans l'espace qu'une pluie annuelle. Pour circonscrire le problème qui nous intéresse aujourd'hui, nous en resterons au cas de précipitations tombant dans l'intervalle d'une durée relativement courte, d'une journée par exemple, sur une surface météorologiquement homogène, c'est-à-dire dont chaque point présente une égale probabilité d'occurrence d'une hauteur donnée de précipitation : dans la suite de cette communication, nous désignerons une telle propriété sous le nom d'isotropisme.

Partant de la notion d'hétérogénéité, on peut se poser la question suivante : si l'on a déterminé, à partir d'une collection de pluies journalières observées à un poste pluviométrique, la pluie journalière correspondant à une fréquence donnée, peut-on considérer que le résultat s'applique à l'averse moyenne de même fréquence tombée sur une surface S ? Intuitivement il n'en est rien. Mais comment doit-on alors procéder pour passer de l'averse ponctuelle à l'averse moyenne de même fréquence ?

Le problème s'est posé dès qu'on a commencé à vouloir exploiter les résultats des petits bassins versants expérimentaux. En effet, les solutions classiques de ce problème, telles que la méthode des surfaces-années-fréquences, se heurtaient à des lacunes insurmontables de l'information.

O.R.S.T.O.M. Fonds Documentaire

N° : 33328, ex 1

Cote : B

70969

La première idée a été de définir un coefficient K de réduction, ou d'abattement, de l'averse, comme le rapport de la hauteur moyenne provoquée par l'averse sur l'ensemble de la surface à la hauteur maximale ponctuelle enregistrée durant l'averse. On obtient ainsi un paramètre dont il est possible d'étudier la distribution statistique; l'expérience a d'ailleurs montré l'existence d'une certaine corrélation entre ce coefficient et la hauteur totale de l'averse (P), la courbe de régression $K(P)$ étant croissante et asymptotique à l'horizontale $K = 1$.

L'inconvénient majeur de cette méthode est de sous-estimer les valeurs de K , car, chaque fois qu'on en calcule une valeur expérimentale, on «va chercher» sur le terrain la hauteur maximale enregistrée: donc on calcule toujours, pour chaque averse, la valeur minimale de K , ce qui entraîne évidemment une erreur systématique par défaut. Les utilisateurs de cette méthode en avaient d'ailleurs senti le danger et prenaient en compte non pas la courbe de régression $K(P)$, mais l'enveloppe supérieure des points expérimentaux.

On pourrait améliorer la détermination de K en calculant le coefficient de réduction non pas systématiquement à partir du maximum ponctuel observé, mais à partir de la hauteur de précipitation enregistrée en un point fixe du terrain. Il faudrait alors, pour que les déterminations de K ne soient pas entachées d'erreurs systématiques, que la condition d'isotropisme soit parfaitement réalisée.

Devant ces difficultés, nous avons repris complètement à la base le problème de l'abattement, non pas tellement pour en tirer un avantage immédiat et pratique, mais surtout pour tenter de le poser en termes de statistique et de pénétrer un peu plus avant dans le mécanisme du phénomène.

Quel but se propose-t-on en réalité lorsqu'on se livre à de telles recherches? On suppose que la répartition statistique des averses ponctuelles, en un lieu donné, est à peu près bien connue et que l'on est capable de définir une averse de probabilité donnée; mais on a besoin de connaître, par exemple pour un calcul de crue exceptionnelle, la hauteur moyenne sur un bassin défini ayant même probabilité. Le problème est résolu si l'on peut répondre à la question suivante:

Etant donné que la pluie ponctuelle en un point *arbitraire* de la surface S a une probabilité donnée, quelle est la pluie moyenne de même probabilité sur cette surface?

Nous proposons de présenter sous cette forme la définition même de l'abattement. Elle implique que la condition d'isotropisme est réalisée mais, en pratique, il suffit qu'elle le soit «à peu près».

Supposons donc une surface S avec une répartition homogène de points 1, 2 ... n auxquels sont attachées les pluies $h_1, h_2 \dots h_n$. Si les points sont assez nombreux, on peut estimer la pluie moyenne h_m par:

$$h_m = \frac{h_1 + h_2 \dots + h_n}{n}$$

Les $h_1, h_2 \dots h_n$ sont des variables aléatoires obéissant, indépendamment l'une de l'autre, à la même loi de probabilité et liées entre elles. Appelons $\rho(h_1, \dots, h_n)$ la densité de probabilité de l'ensemble (h_1, \dots, h_n) ; la probabilité élémentaire est définie par:

$$\rho(h_1 \dots h_n) dh_1 dh_2 \dots dh_n.$$

La probabilité de dépassement d'une pluie journalière h moyenne sur la surface est définie par la somme des masses des points de l'ensemble probabilisé

$$\int_1 \int_2 \dots \int_n \rho(h_1, h_2 \dots h_n) dh_1 dh_2 \dots dh_n = 1 \quad (1)$$

qui répondent à la condition

$$\frac{h_1 + h_2 + \dots h_n}{n} \geq h \quad (2)$$

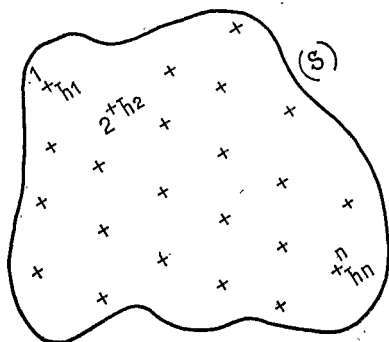


Fig. 1

L'expression exacte de la probabilité est fournie par le passage à la limite des expressions précédentes pour $n \rightarrow \infty$.

Le problème étant ainsi posé en termes précis, il est bien évident qu'on ne pourra pas se servir des relations (1) et (2) pour le résoudre. Même en conservant la forme discrète, il serait pratiquement impossible d'expliciter les liaisons multiples entre les variables h de façon à les introduire dans le calcul.

La suite de cet exposé a pour but de rechercher un mode de calcul possible moyennant certaines hypothèses qui relèvent plus souvent d'un point de vue intuitif que d'une rigoureuse analyse.

1.2. Étude d'un couple de points

Considérons deux points 1 et 2 distants de x_{12} pour lesquels les fonctions de répartition de la pluie sont respectivement F_{h_1} et F_{h_2} . Soit $\rho(h_1, h_2)$ la densité de probabilité du couple (h_1, h_2) .

Designons par $z = \frac{h_1 + h_2}{2}$ la pluie moyenne sur le couple.

La probabilité de dépassement de z est définie par les points de l'ensemble probabilisé $\iint \rho(h_1, h_2) dh_1 dh_2$ (étendu au domaine de variation de h_1 et de h_2), vérifiant l'inégalité $h_1 + h_2 \geq 2z$.

Traçons dans un plan (h_1, h_2) les courbes d'égale densité $\rho_1, \rho_2 \dots$. Notons que, par suite de l'isotropisme, ces courbes sont symétriques par rapport à la bissectrice du quadrant $h_1 Oh_2$. les axes Oh_1 et Oh_2 correspondent à des densités de probabilité non nulles : ils contiennent les points d'aboutissement des courbes d'égale densité pour lesquelles un des éléments du couple peut être nul. Toutes les courbes sont évidemment contenues dans le premier quadrant, une pluie ne pouvant être négative.

Dans l'ensemble des points du plan ainsi probabilisé, la condition $h_1 + h_2 \geq 2z$ se traduit par le fait que les couples pris en compte pour le calcul de la probabilité de dépassement doivent se trouver dans la partie du plan délimitée par les axes, la droite $h_1 + h_2 = 2z$, et ne contenant pas l'origine : ceci correspond aux courbes en traits pleins de la figure 2.

La détermination de la probabilité se fait par double intégration graphique en évaluant le volume du relief défini par les courbes d'égale densité.

En procédant ainsi pour plusieurs valeurs de z , on peut tracer la courbe $z(P)$ donnant la variation de z en fonction de la probabilité P . On a intérêt à porter en abscisse le logarithme de la probabilité pour avoir des échelles convenables (Fig. 3).

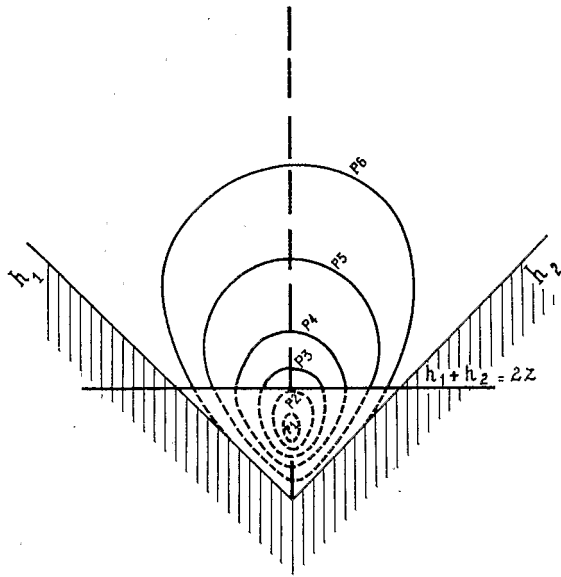


Fig. 2

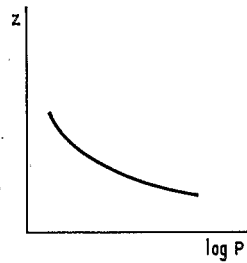


Fig. 3

On recommence les opérations précédentes pour un certain nombre de couples en faisant varier la distance x et on trace en définitive un réseau de courbes $z(x)$ graduées en probabilités (Fig. 4).

Pour un échantillon de couples donné, on pourrait envisager de calculer la fréquence de dépassement par simple décompte des couples répondant à la condition $h_1 + h_2 \geq 2z$ et en divisant le chiffre trouvé par le nombre total de jours de la période

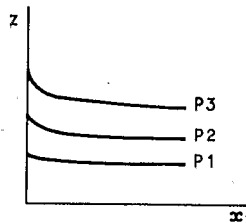


Fig. 4

d'observations. Mais, en général, le nombre d'observations portant sur des couples est faible et la fréquence trouvée constituerait une très mauvaise estimation de la

Cette valeur est également une variable aléatoire considérée par rapport à x et la moyenne sur l'ensemble de la surface sera :

$$\frac{1}{IL} \int_0^L dx \int_x^{x+l} z(y) dy \quad (4)$$

$$h_{\text{moyen}} = \frac{1}{IL} \int_0^L \left[\int_x^{x+l} z(x) dx \right] dx \quad (5)$$

ou :

$$\frac{1}{IL} \int_0^L \left[\int_0^{x+l} z(x) dx - \int_0^x z(x) dx \right] dx \quad (6)$$

Le calcul se fait à partir de la courbe $z(x)$ par double intégration graphique.

2. CAS PARTICULIER DES AVERSES TROPICALES NON CYCLONIQUES. PRÉSENTATION D'UN EXEMPLE

Les études que nous avons effectuées sur les pluies journalières tropicales d'Afrique, en dehors des zones soumises à l'influence des cyclones tropicaux, nous ont montré que leur loi de répartition statistique peut se mettre sous la forme

$$F(h) = F_0 + (1 - F_0) \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_y} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{1}{2} [(y-\bar{y})/\sigma_y]^2} dy \quad (7)$$

avec $y = \log h$

autrement dit, le logarithme naturel de la pluie journalière suit une loi normale tronquée, la fréquence tronquée étant,

$$\varphi(h) = \frac{F_h - F_0}{1 - F_0}$$

Si h_1 et h_2 représentent les pluies ponctuelles en deux points, la loi tronquée du couple peut s'écrire :

$$\psi(h_1, h_2) = \int_0^{h_1} \int_0^{h_2} \rho(h_1, h_2) dh_1 dh_2 \quad (8)$$

Si les deux points ne sont pas trop éloignés, on peut admettre que l'occurrence d'une pluie nulle avec une pluie non nulle est très rare, tout au moins pour des averses de quelque importance. La fréquence réelle du couple est alors :

$$F(h_1, h_2) = (1 - F_0) \psi(h_1, h_2) + F_0 \quad (9)$$

Il suffit donc d'étudier ψ et la probabilité cherchée est définie par les points de l'ensemble probabilisé :

$$\frac{1}{2\pi \sigma_y^2 \sqrt{1-r^2}} \iint \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\left(\frac{y_1 - \bar{y}}{\sigma_y} \right)^2 - 2r \frac{(y_1 - \bar{y})(y_2 - \bar{y})}{\sigma_y^2} + \left(\frac{y_2 - \bar{y}}{\sigma_y} \right)^2 \right] \right\} dy_1 dy_2$$

\bar{y} : moyenne commune de $\log h_1$ et $\log h_2$

y : écart-type commun de $\log h_1$ et $\log h_2$

r : coefficient de corrélation entre y_1 et y_2

répondant à la condition $h_1 + h_2 \geq 2z$ ou $y_2 \geq \log(2z - e^{y_1})$

Dans ce cas particulier, il est plus simple de tracer les courbes d'égalité de densité de probabilité dans le plan des y_1, y_2 plutôt que dans le plan des h_1, h_2 . Mais alors l'intégrale s'étend à la totalité du plan et non plus au premier quadrant, y pouvant varier de $-\infty$ à $+\infty$. La limite correspondant au domaine d'intégration relatif à une valeur donnée de z sera définie par une courbe $y_2 = \log(2z - e^{y_1})$ et non plus

La station de base utilisée pour l'estimation des paramètres relatifs à la distribution de la pluie journalière ponctuelle est celle de Ferkessédougou, On a, avec les notations adoptées ci-dessus :

$$\begin{aligned} \bar{y} &= 2,86 \\ \sigma_y &= 0,704 \\ 1 - F(0) = F_1(0) &= 0,15 \end{aligned}$$

Le paramètre de liaison choisi est le coefficient de corrélation entre les valeurs y d'un couple de pluviomètres (logarithmes naturels des pluies journalières). On a pu disposer ainsi de 32 couples d'appareils pour des distances comprises entre 1,6 et 9,9 km, ce qui a permis de tracer une courbe moyenne de r en fonction de la distance :

1 km : 0,90	4 km : 0,68	10 km : 0,52
2 km : 0,80	6 km : 0,61	14 km : 0,50
3 km : 0,73	8 km : 0,57	

Le bassin du Flakoho a une superficie de 50 km. La longueur et la largeur de son rectangle équivalent sont respectivement : $L = 9,1$ km et $l = 5,5$ km.

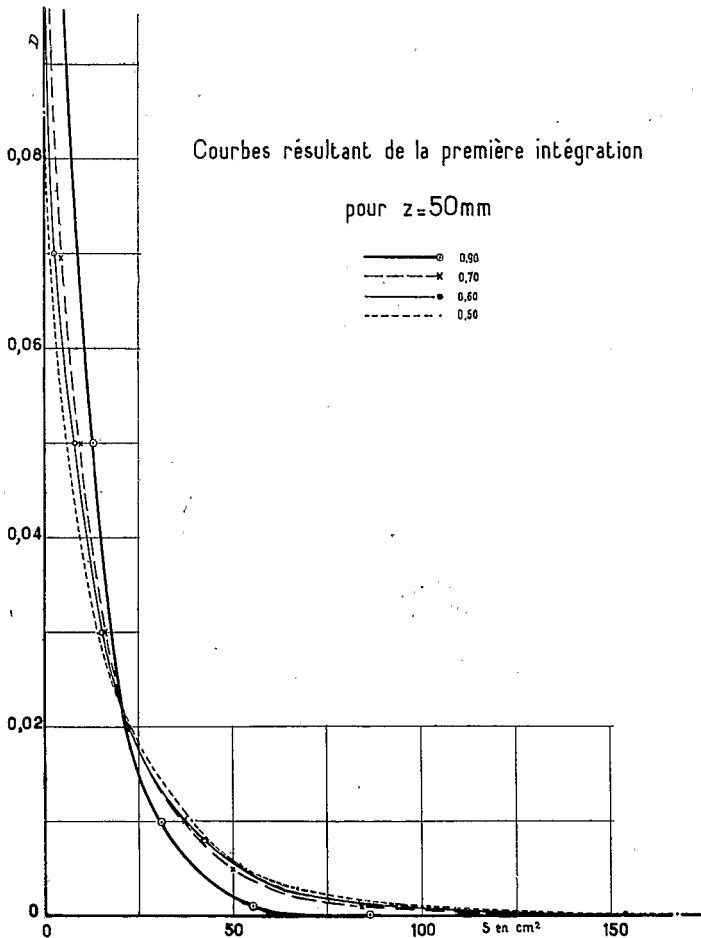


Fig. 7 — Courbes résultant de la première intégration pour $z = 50$ mm

2.1. Tracé des ellipses

$$\begin{aligned} \text{Posons } (Y_1 - \bar{Y}) &= Y_1 \\ (Y_2 - \bar{Y}) &= Y_2 \end{aligned}$$

$$- 2(1-r^2) \sigma_y^2 \log(2\pi \sigma_y^2 \sqrt{1-r^2} D) = k$$

L'équation (11) devient :

$$Y_1 = r Y_2 \pm \sqrt{k - (1-r^2) Y_2^2} \quad (12)$$

qui permet de tracer l'ellipse assez facilement point par point. Il suffit en effet de se donner quelques points remarquables :

Coordonnées des points de contact des deux tangentes horizontales :

$$Y_2 = \pm \sqrt{\frac{k}{1-r^2}} \quad Y_1 = r Y_2$$

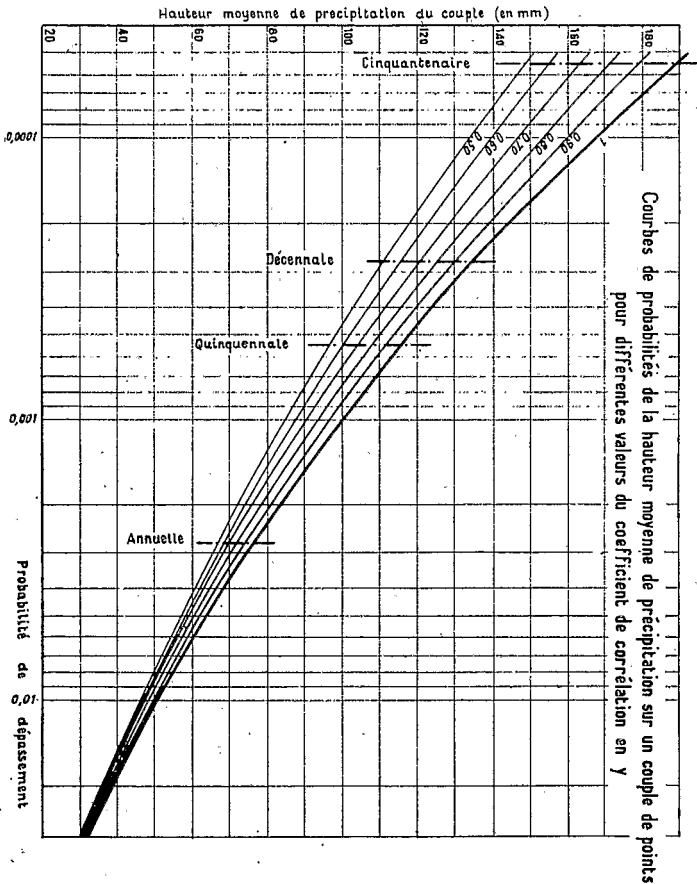


Fig. 8 — Courbes de probabilités de la hauteur moyenne de précipitation sur un couple de points pour différentes valeurs du coefficient de corrélation en y.

(Les tangentes verticales s'en déduisent par symétrie)

Coordonnées des extrémités du grand axe et du petit axe :

$$Y_1 = Y_2 = \pm \sqrt{\frac{k}{2(1-r)}} \text{ et } Y_1 = -Y_2 = \pm \sqrt{\frac{k}{2(1+r)}}$$

Intersections avec les axes de coordonnées

$$Y_2 = 0, Y_1 = \pm \sqrt{k} \text{ et } Y_1 = 0, Y_2 = \pm \sqrt{k}$$

Si l'ellipse est grande, on peut parfaire le tracé en calculant 1 ou 2 points supplémentaires (1 point calculé en donne 3 autres par symétrie par rapport aux axes).

En fait, on calcule par ce procédé quelques ellipses formant le canevas du réseau. Les autres ellipses sont tracées beaucoup plus rapidement en utilisant une formule d'interpolation basée sur l'équation de l'ellipse en coordonnées polaires. Le rayon vecteur a pour module :

$$|\rho| = \sqrt{\frac{k}{1-r \sin 2\theta}} \quad \text{Considérons deux ellipses et des rayons vecteurs colinéaires :}$$

ρ_1 et ρ_2

On a :

$$\frac{|\rho_1|}{|\rho_2|} = \sqrt{\frac{k_1}{K_2}} = \sqrt{\frac{\mu + \log D_1}{\mu + \log D_2}} \quad (13)$$

avec :

$$\mu = \log (2\pi \sigma_y^2 \sqrt{1-r^2})$$

Le calcul du rapport des modules est donc très rapide et la construction d'une ellipse à partir de l'autre se fait assez vite au moyen de la règle à calcul fixée toujours dans la même position et d'une règle pivotant autour du centre qui n'est autre que l'origine des axes Y_1 et Y_2 .

Dans la présente application, les réseaux d'ellipses ont été tracés pour $r = 0,90, 0,70, 0,60, 0,50$. Nous donnons sur la figure 6 le tracé relatif à $r = 0,60$.

2.2. Calcul des probabilités de dépassement

On a porté également sur les graphiques précédents les courbes $\exp(Y_1 + \bar{Y}) + \exp(Y_2 + \bar{Y}) = 2z$ pour $z = 20, 50, 100$ et 150 . Prenons l'exemple de la courbe $z = 50$ pour le réseau $r = 0,60$ (fig. 6). La courbe $z = 50$ est sensiblement tangente à l'ellipse $D = 0,1$. On planimètre successivement les surfaces comprises entre l'ellipse $D = 0,07$ et la courbe $z = 50$, $D = 0,05$ et la même courbe etc ... Les points correspondants sont portés sur un graphique : en abscisses les surfaces trouvées, en ordonnées les densités de probabilités. La surface donnée par la courbe ainsi définie est égale, compte tenu des échelles utilisées pour les différents graphiques, à la probabilité de dépassement d'une hauteur de précipitation moyenne de 50 mm, suivant la loi tronquée. Pour avoir la véritable probabilité, il suffit de multiplier le chiffre trouvé par 0,15.

Dans l'exemple que nous avons pris, 1 cm² de la figure 6 valait 1/25 unités [$Y_1 \times Y_2$]. L'ordonnée du graphique 7 (courbe D_s) représentait une variation de densité de 0,004 par cm, tandis que 1 cm d'abscisse représentait 10 cm² de surface S du graphique 6. La surface en cm² trouvée pour la courbe D_s doit donc être multipliée par

Courbes $z(x)$ pour différentes probabilités

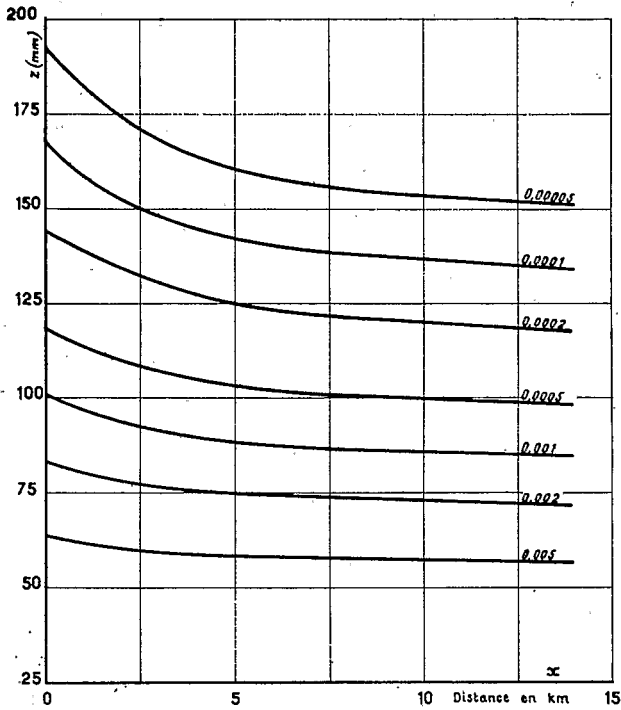


Fig. 9 — Courbes $z(x)$ pour différentes probabilités

$10/25 \times 0,004$ pour être traduite en probabilité de dépassement. La courbe (0,60) de la figure 7 donne une surface de 35 cm^2 , soit une probabilité tronquée de 0,056 et une probabilité vraie de 0,0084.

On opère ainsi pour chaque valeur de r et de z . Les résultats se traduisent par le faisceau de courbes tracé sur la figure 8 : on a rajouté la courbe $r = 1$, qui correspond à la loi de probabilité de la pluie journalière ponctuelle.

3.3. Passage à la surface

Le graphique 8 associé au graphique de variation de r en fonction de la distance permet d'établir le faisceau de courbes $z(x)$: figure 9 sur laquelle chaque courbe $z(x)$ est graduée en probabilité de dépassement de z .

Il ne reste plus qu'à appliquer à ce faisceau la double intégration :

$$\frac{1}{L} \int_0^L \left(\int_0^{x+1} z(x) dx - \int_0^x z(x) dx \right) dx$$

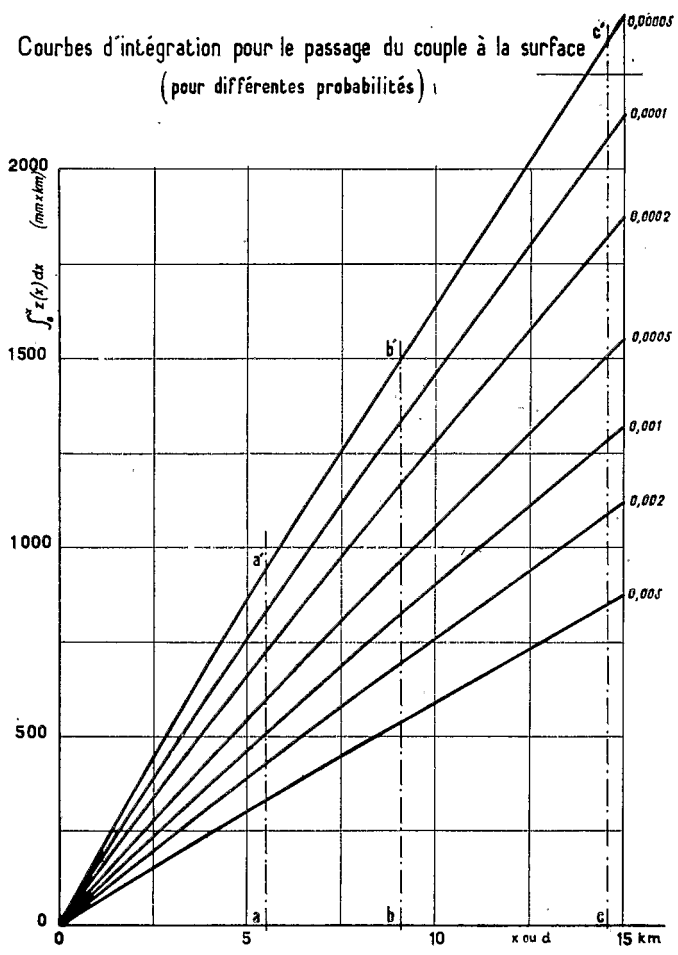


Fig. 10 — Courbes d'intégration pour le passage du couple à la surface (pour différentes probabilités).

Le faisceau des courbes intégrales $\int_0^x z(x) dx$

est tracé sur la figure 10. On a ici $L = 9,1$ km, $l = 5,5$ km $l + L = 14,6$ km. Ces longueurs sont représentées en abscisses par les points a, b, c . L'intégrale précédente, pour la probabilité 0,00005 par exemple, est donnée au facteur $1/L l$ près par la surface $a' a c c'$ moins la surface $O b b'$ ou, ce qui revient au même, par la surface $b' b c c'$ moins la surface $O a a'$.

On obtient les résultats suivants (Voir tableau page suivante).

Les écarts observés ne sont nullement significatifs. On pourra adopter un coefficient «prudent» de 0,87. Ceci montre que, pour la gamme de pluies ci-après, le coefficient de réduction est pratiquement constant. Il n'en serait pas de même pour de faibles pluies pour lesquelles on ne pourrait pas admettre que le coefficient de corrélation

Fréquence	Pluie ponctuelle (mm)	Pluie moyenne sur le bassin (mm)	Coefficient de réduction
Annuelle (0,00274)	76	69	0,87
Quinquennale (0,000548)	116	100	0,86
Décennale (0,000274)	134	116	0,86
Cinquantenaire (0,0000548)	190	159	0,83

est indépendant de la hauteur de précipitation : les calculs exposés ci-après seraient alors grossièrement inexacts. Mais en général ce genre d'études est surtout utile pour les fortes averses.

Nous espérons que le présent exposé a permis d'éclaircir en partie le point de vue dogmatique sur l'abattement des averses. Il est loin d'épuiser la question. De nombreux points restent à préciser et surtout les procédés de calculs restent lourds : c'est dans ce dernier domaine qu'il faudrait tout particulièrement s'attacher à trouver des améliorations pour que la méthode puisse entrer dans la pratique courante.