

124  
MINISTÈRE de l'AGRICULTURE

Direction de l'Équipement  
et de l'Hydraulique

Stage d'interprétation hydrologique  
STRASBOURG - 2-7 Octobre 1967

77  
DOCUMENTATION

L'ANALYSE du RÉGIME des DÉBITS des COURS d'EAU

Corrigés des exercices d'application numérique

par

Pierre DUBREUIL

Directeur de Recherches à l'ORSTOM  
Chef du Département de la Recherche Appliquée  
au Service Hydrologique de l'ORSTOM

16 JUIL. 1992

ORSTOM  
HYDROLOGIE  
DOCUMENTATION

71001

ORSTOM Fonds Documentaire

N° : 33 430

Cote : B

## S O M M A I R E

	Page
- <u>CORRIGE de l'EXERCICE d'APPLICATION de la METHODE des RESIDUS : Corrélation hydropluviométrique sur les débits de Novembre de la ZORN à WALTENHEIM</u>	1
- <u>CORRIGE du 1er EXERCICE d'APPLICATION du TRAITEMENT STATISTIQUE de l'INFORMATION</u> Echantillon suivant une loi normale : les modules de l'AVEYRON à RODEZ	2
- <u>CORRIGE du 2ème EXERCICE d'APPLICATION du TRAITEMENT STATISTIQUE de l'INFORMATION : échantillon dissymétrique des débits de Novembre de l'AVEYRON à RODEZ</u>	7

CORRIGE de l'EXERCICE d'APPLICATION de la METHODE des RESIDUS :  
CORRELATION HYDROPLUVIOMETRIQUE sur les DEBITS de NOVEMBRE  
de la ZORN à WALTENHEIM

---

Les graphiques n° 1 et 2 montrent les corrélations principale et secondaire obtenues après 2 approximations. La modification du tracé est très faible car la stabilisation des points avec un écart absolu moyen minimal est très vite atteinte.

La courbe de correction  $\Delta Q = f(\Sigma P_5^{11})$  est nulle pour  $\Sigma P_5^{11} = 510$  mm, ce qui signifie que la courbe de corrélation principale est tracée pour cette valeur du facteur secondaire.

L'examen de ces graphiques appelle 2 remarques :

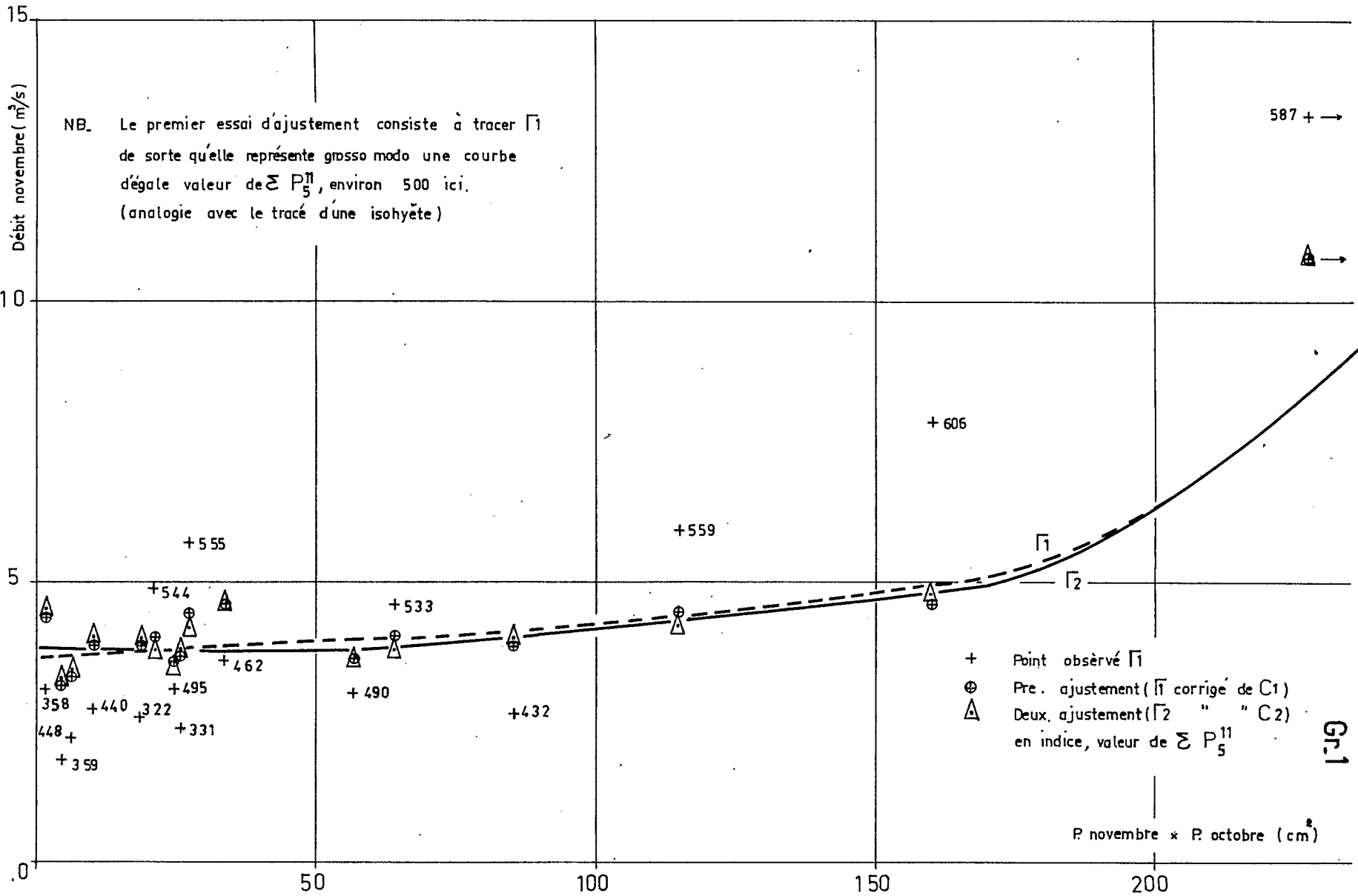
- a) le débit de Novembre est très lentement influencé par la croissance de  $P_{\text{oct}} \cdot P_{\text{nov}}$  jusqu'à un seuil, voisin de 150 à 200 mm, à partir duquel il se met à augmenter fortement : influence des pluies abondantes d'automne.
- b) le débit de Novembre est beaucoup plus sensible à la variation de  $\Sigma P_5^{11}$ , c'est-à-dire à l'état des réserves en eau des terrains du bassin.

Le graphique 3 compare les débits observés aux débits calculés à l'aide des 2 courbes : la droite à 45° montre l'inexistence d'une distorsion de l'ajustement et la précision de celui-ci.

L'introduction de données pluviométriques dans ce jeu de courbes permet la création d'une information débit non observée pour étendre la série des 16 années observées ; cette extension serait très fructueuse, au vu de la qualité des corrélations.

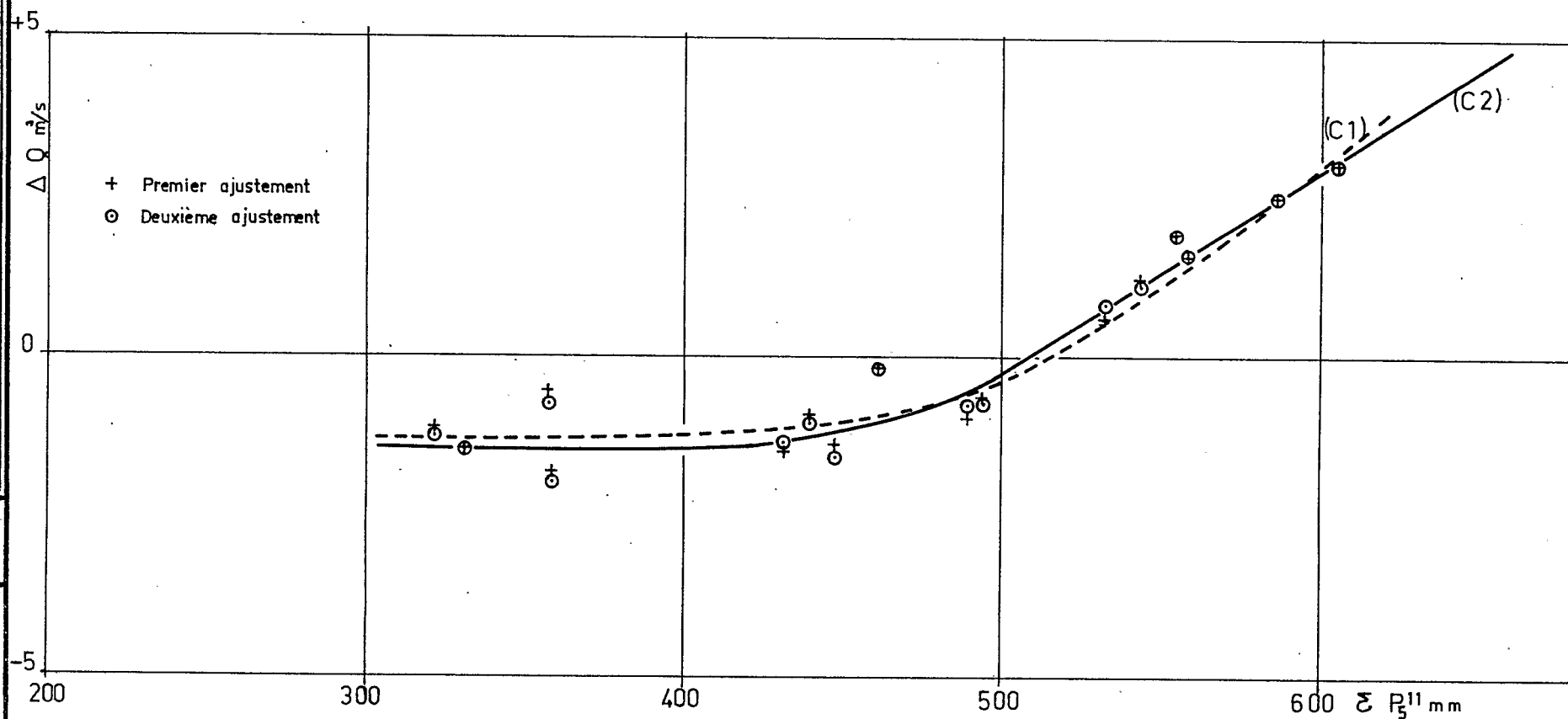
## CORRELATION PRINCIPALE

### " Débit de novembre - Pluie d'octobre x Pluie de novembre "



## CORRELATION SECONDAIRE

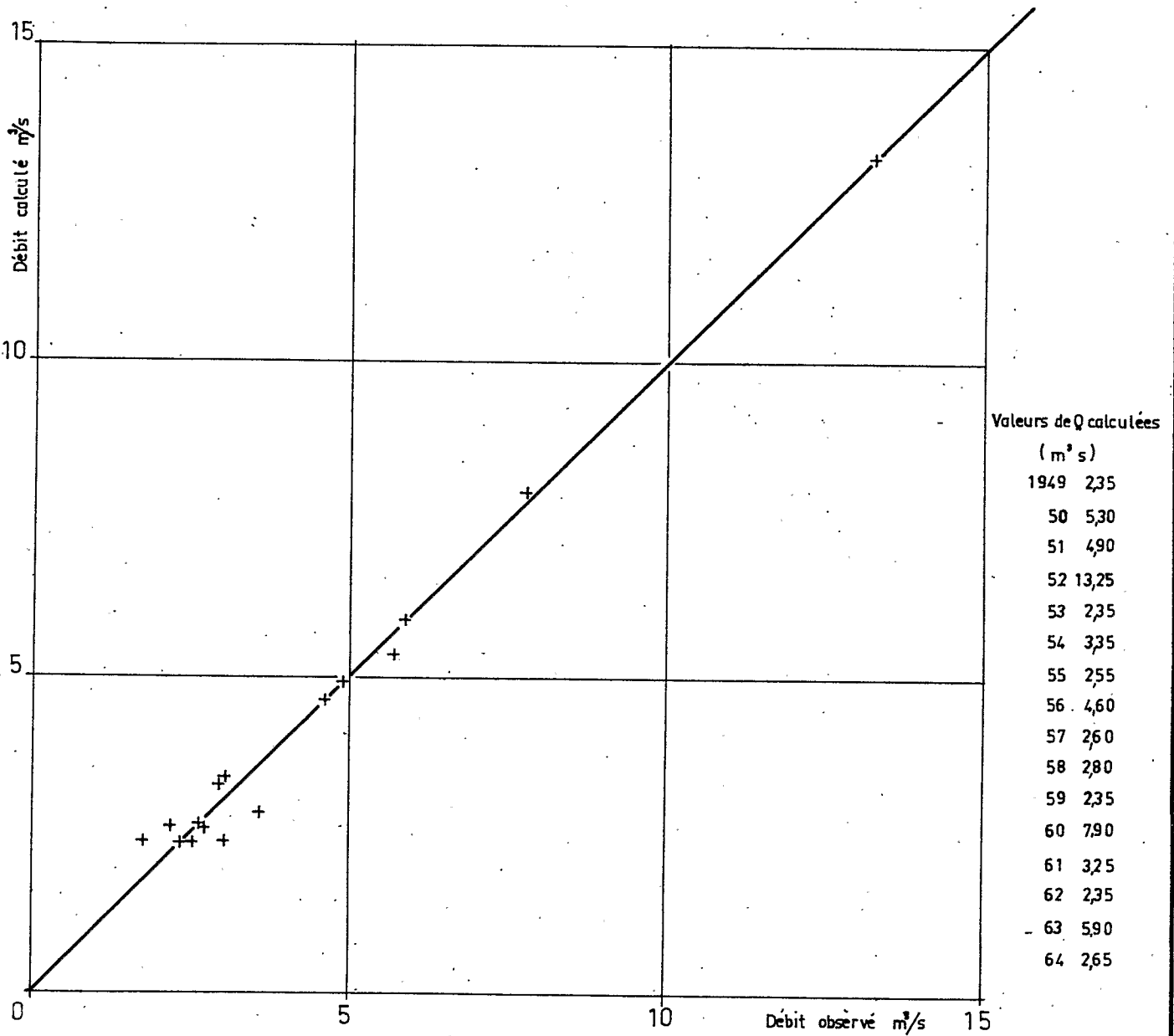
### Résidu du débit - Pluie de mai à novembre



NB. Le tracé de C1 (premier ajustement) et de C2 (deuxième ajustement) est tel que l'écart absolu moyen soit minimal, en s'interdisant tout changement de concavité.

## VÉRIFICATION DE LA CORRELATION

Débit calculé = (ordonnée du point de  $\sqrt{2}$ ) + (ordonnée du point de  $C_2$ )



CORRIGE du 1er EXERCICE d'APPLICATION du TRAITEMENT  
STATISTIQUE de l'INFORMATION

ECHANTILLON SUIVANT une LOI NORMALE : les MODULES de l'AVEYRON à RODEZ

---

- A. Le tableau 1 présente les modules observés de l'AVEYRON à RODEZ, entre 1921 et 1965 soit sur 45 ans. Leurs valeurs sont classées en ordre décroissant.

Les caractéristiques empiriques de cet échantillon sont :

Moyenne  $\bar{Q} = \frac{\sum Q_i}{45} = 6,90 \text{ m}^3/\text{s}$

Variance  $s^2 = \frac{1}{44} \sum Q_i^2 - 45 \cdot \bar{Q}^2 = 5,414$

Ecart-type  $s = 2,327$

Coefficient de variation  $\frac{s}{\bar{Q}} = 0,337$

- B. Le graphique n° 4 sur papier à échelle d'abscisse gaussique montre la disposition des 45 points des modules en face de leurs fréquences expérimentales  $F = \frac{r}{46}$  (tableau n° 1). L'alignement des points est satisfaisant et permet d'augurer un bon ajustement d'une loi normale à cet échantillon de modules.

La droite (de HENRI) d'ajustement est tracée après report de 3 points :

- la moyenne  $Q = 6,9$  et  $F = 0,50$

- 2 valeurs quelconques par exemples pour  $F = 0,10$  et  $0,90$  pour lesquelles  $u = 1,28$  (table de GAUSS) :  $6,90 \pm 1,28 \cdot 2,327$  soit  $3,92$  et  $9,88 \text{ m}^3/\text{s}$ .

Elle se place bien au milieu des points, preuve d'un calcul exact des caractéristiques empiriques.

TABLEAU 1

MODULES ANNUELS CLASSES de l'AVEYRON à RODEZ  
(Période 1921-1965)

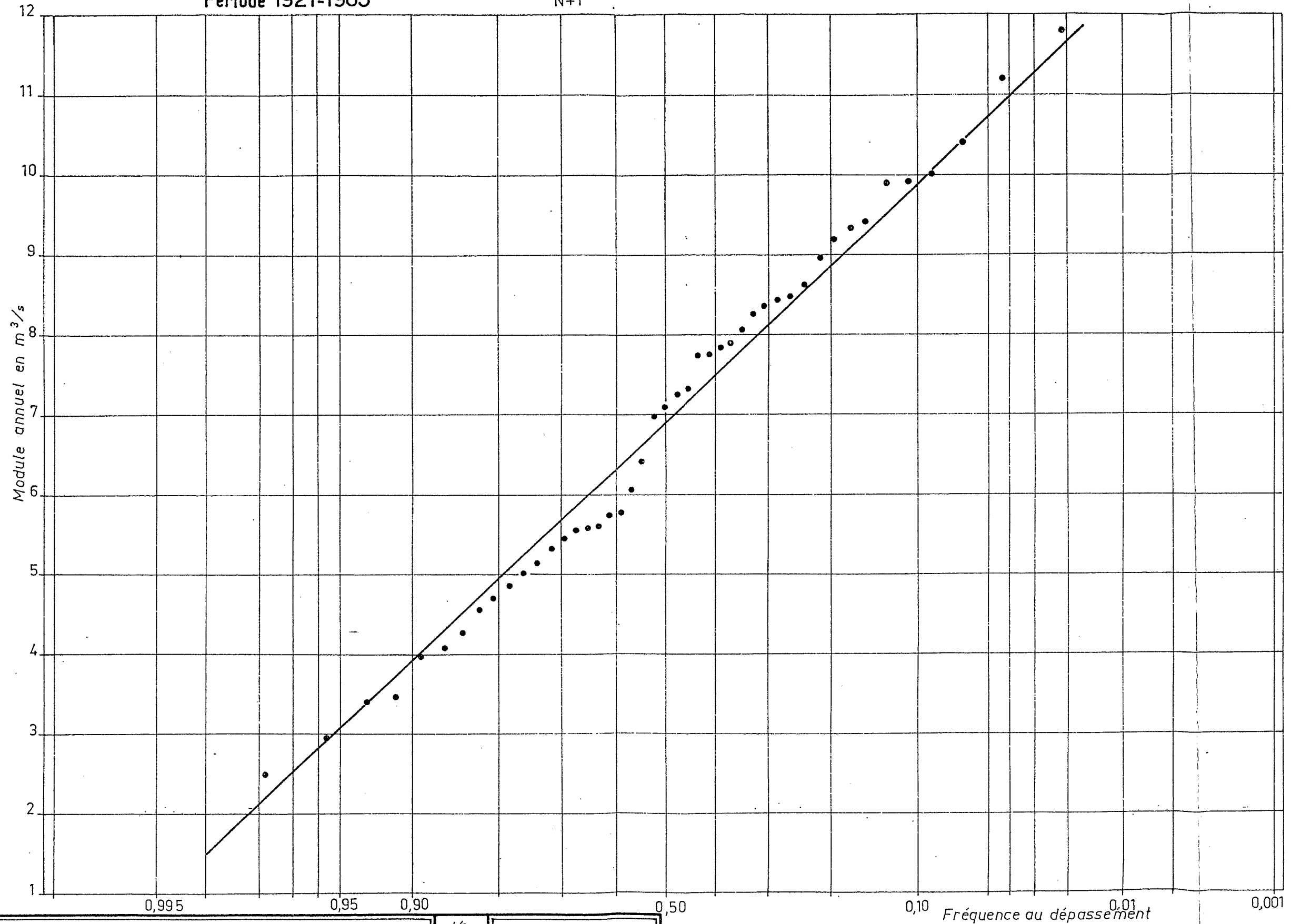
Rang	Module (m <sup>3</sup> /s)	Année	Rang	Module (m <sup>3</sup> /s)	Année
1	11,80	1935	24	6,99	1928
2	11,20	1951	25	6,41	1957
3	10,40	1930	26	6,05	1962
4	10,00	1965	27	5,77	1961
5	9,91	1937	28	5,75	1964
6	9,90	1941	29	5,60	1933
7	9,40	1940	30	5,59	1950
8	9,34	1944	31	5,57	1942
9	9,20	1923	32	5,44	1943
10	8,95	1963	33	5,31	1948
11	8,62	1922	34	5,12	1947
12	8,48	1926	35	5,03	1945
13	8,44	1954	36	4,83	1958
14	8,37	1952	37	4,68	1938
15	8,27	1955	38	4,56	1929
16	8,05	1959	39	4,27	1946
17	7,87	1931	40	4,08	1956
18	7,83	1939	41	3,97	1924
19	7,76	1934	42	3,46	1953
20	7,73	1960	43	3,40	1925
21	7,30	1927	44	2,95	1921
22	7,25	1932	45	2,49	1949
23	7,12	1936			

a)  $\Sigma Q_i = 310,51$       b)  $\bar{Q} = 6,90 \text{ m}^3/\text{s}$   
c)  $\Sigma Q_i^2 = 2380,8035$       d)  $\sigma^2 Q = 5,414$   
e)  $\sigma Q = 2,327$       f)  $Cv = \frac{2,327}{6,90} = 0,337$



Distribution des modules annuels  
Période 1921-1965

$$F(x) = \frac{x}{N+1}$$



Le tableau 2 présente le test de  $\chi^2$  qui permet de conclure à une bonne adéquation de la loi normale à l'échantillon.

C. L'échantillon de 45 valeurs est assez grand pour que moyenne et variance puissent être considérées comme des variables aléatoires normales.

$$\text{L'erreur-type sur la moyenne est de } \frac{s}{\sqrt{45}} \text{ soit } \frac{2,327}{\sqrt{45}}$$

$$\text{L'erreur-type sur l'écart-type est de } \frac{s}{\sqrt{90}} \text{ soit } \frac{2,327}{\sqrt{90}}$$

Avec un choix d'intervalle de confiance à 95 %, on a les estimations suivantes de la moyenne et de l'écart-type, sachant que l'intervalle est le double de l'erreur-type (1,96 fois, exactement),

$$\bar{Q} = 6,90 \pm 0,68 \quad \text{ou} \quad 6,22 \leq \bar{Q} \leq 7,58 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\sigma = 2,327 \pm 0,48 \quad \text{ou} \quad 1,85 \leq \sigma \leq 2,81$$

Avec 45 ans de relevés, le module moyen est connu à  $\pm 10$  % et la variance à  $\pm 20$  % près.

Si l'on retient un intervalle de confiance à 90 %, ce qui est moins sévère mais encore non négligeable, on peut voir les variations conséquentes sur les estimations des paramètres puisque l'on prend seulement 1,645 fois l'erreur-type :

$$\bar{Q} = 6,90 \pm 0,57 \quad \text{ou} \quad 6,33 \leq \bar{Q} \leq 7,47 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\sigma = 2,33 \pm 0,40 \quad \text{ou} \quad 1,93 \leq \sigma \leq 2,73$$

Dans ce cas, la moyenne est cernée à  $\pm 8$  % et l'écart-type à  $\pm 17$  % près.

D. Le module décennal sec correspond à une fréquence au dépassement de 0,90, à laquelle correspond une valeur de  $u = 1,28$  pour la variable réduite de GAUSS.

$$\text{On obtient : } Q_{0,9} = 6,90 - 1,28 \times 2,327 = 3,92 \text{ m}^3/\text{s}$$

TABEAU 2

TEST d'ADEQUATION du  $\chi^2$

On choisit de retenir 7 classes d'égale probabilité théorique, donc comprenant chacune  $\frac{45}{7} = 6,43$  valeurs théoriques  $v_i$ .

Les limites de classes découlent de ce choix.

Dans ces limites, on relève sur le tableau n° 3, les valeurs expérimentales contenues  $n_i$ .

Le tableau suivant donne le détail du calcul.

N° de classes	Limites de classes	$n_i$	$v_i$	$n_i - v_i$	$(n_i - v_i)^2$	$\frac{(n_i - v_i)^2}{v_i}$
1	< 4,41	7	6,43	0,57	0,3249	0,0505
2	4,41 - 5,58	8	"	1,57	2,4649	0,3833
3	5,58 - 6,48	6	"	-0,43	0,1849	0,0287
4	6,48 - 7,32	4	"	-2,43	5,9049	0,9182
5	7,32 - 8,22	5	"	-1,43	2,0449	0,3180
6	8,22 - 9,39	8	"	1,57	2,4649	0,3833
7	> 9,39	7	"	0,57	0,3249	0,0505
Total						2,1325

On a :  $7 - (2 + 1) = 4$  degrés de liberté

$$P(\chi^2) = P(2,13) \quad 0,90 < P(\chi^2) < 0,10$$

Adéquation très satisfaisante

L'intervalle de confiance approximatif à 95 % pour ce module décennal est de :

$$1,96 \times 2,327 \times \frac{1}{\sqrt{90}} \sqrt{1,28^2 + 2} \quad \text{soit} \quad 0,915$$

Le module décennal sec fait l'objet de l'estimation suivante :

$$Q_{0,9} = 3,92 \pm 0,92 \quad \text{ou} \quad \underline{3,00 \leq Q_{0,9} < 4,84} \text{ m}^3/\text{s}$$

Evidemment la précision décroît fortement par rapport à celle qui affecte la connaissance des caractéristiques de la distribution, puisque ce quantile n'est connu qu'à  $\pm 23$  % près.

La plus faible valeur observée, en 1949, est un module de  $2,49 \text{ m}^3/\text{s}$ . Sa fréquence expérimentale de 0,978 est très peu précise.

En s'appuyant sur l'analyse précédente, on voit de suite que ce module est encore plus sévère que le module décennal sec estimé. On calcule la valeur de la variable réduite de GAUSS lui correspondant :

$$2,49 = 6,90 - 2,327 \cdot u_p$$
$$\text{d'où } u_p = \frac{6,90 - 2,49}{2,327} = 1,895$$

A  $u_p = 1,895$  correspond une fréquence théorique  $F(u)$  donc une probabilité d'apparition de 0,971. La période de retour moyenne d'un tel évènement est de 1 année sur 35 environ. On note que cette estimation est moins pessimiste que celle de l'échantillon qui correspond à 1 sur 45.

CORRIGE du 2ème EXERCICE d'APPLICATION du TRAITEMENT STATISTIQUE  
de l'INFORMATION : ECHANTILLON DISSYMETRIQUE des DEBITS de  
NOVEMBRE de l'AVEYRON à RODEZ

---

- A. Les caractéristiques empiriques de l'échantillon des 45 débits de Novembre observés sont les suivantes :

$$\text{Moyenne} \quad \bar{Q} = \frac{\sum Q_i}{45} = 6,91 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\text{Variance} \quad s^2 = \frac{1}{44} \left[ \sum Q_i^2 - 45 \cdot \bar{Q}^2 \right] = 30,653$$

$$\text{Ecart-type} \quad s = 5,54 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\text{Coefficient de variation} \quad Cv = \frac{s}{\bar{Q}} = 0,80$$

La dispersion de l'échantillon est mise en lumière par le fort coefficient de variation. On peut également comparer sa variance à celle des 45 modules de l'AVEYRON, qui admettent une moyenne équivalente : 30,6 contre 5,41. L'échantillon est certainement dissymétrique.

- B. La dissymétrie de l'échantillon peut être montrée en portant les points représentatifs des débits en face de leur fréquence expérimentale sur un papier à échelle d'abscisse gaussique (forte concavité vers le haut de la série alignée). La dissymétrie subsiste sur un papier équivalent mais à échelle d'ordonnée logarithmique pour les débits : la concavité des points prononcée vers les faibles valeurs est caractéristique d'un échantillon hypergaussique (graphique n° 5). Une loi de GALTON doit très bien s'ajuster. Après essai, on retient une valeur de 1 m<sup>3</sup>/s à ajouter aux débits pour obtenir un bon alignement des points sur le graphique 5. L'équation de GALTON s'écrit alors :

$$u = a \log (Q + 1) + b$$

Afin de montrer ce que l'on peut attendre des 2 méthodes de calcul des paramètres a et b (formules 14 et 14 ter de la note), on a procédé aux deux estimations sur le graphique 5 (courbes 1 et 2) : il apparaît clairement que l'estimation par les formules 14 ter établies à partir des

logarithmes de  $(Q_i + 1)$  est meilleure (courbe 1), ce qui est souvent le cas. L'écart est négligeable avec l'autre estimation (formule 14 et courbe 2) qui est généralement employée car plus rapide.

A titre de curiosité, le graphique 5 montre également le résultat d'un ajustement par l'estimateur  $\frac{s^4}{u_3}$ , rapport du carré de la variance au moment de 3<sup>o</sup> ordre. La valeur de  $Q_0$  n'est plus 1 mais  $6,5 \text{ m}^3/\text{s}$ .

L'ajustement retenu est celui de la courbe 1 :

$$u = 3,647 \log (Q + 1) - 2,960$$

Le test d'adéquation du  $\chi^2$  est effectué sur le tableau n° 3 à partir de cette relation d'ajustement : le résultat est positif.

- C. Le calcul de l'intervalle de confiance sur l'estimation de la moyenne des débits de Novembre s'effectue en passant aux logarithmes (variable normale).

On cherche la valeur de la variable réduite de GAUSS  $u = \frac{y_i - \bar{y}}{s_y}$  sachant que  $y_i$  est le logarithme de la moyenne des débits et  $\bar{y}$  la moyenne des logarithmes, et  $s_y$  l'écart-type des logarithmes.

$$y_i = \log (6,91 + 1) = 0,89818$$

$$\text{sachant que } \bar{y} = \overline{\log (Q_i + 1)} = 0,79950 \text{ et } s_y = 0,096$$

on obtient :  $u = 1,027$ .

La formule de l'intervalle de confiance à 95 % est :

$$1,96 \times \frac{s_y}{\sqrt{2N}} \sqrt{u^2 + 2}$$

$$\text{soit } 1,96 \times \frac{0,096}{\sqrt{90}} \sqrt{1,027^2 + 2} = 0,03465$$

Les bornes de l'intervalle des logarithmes sont :

$$0,89818 \pm 0,03465$$

Ajustement d'une loi de Galton  
aux  
débits de novembre de l'Aveyron à Rodez

Gr. 5

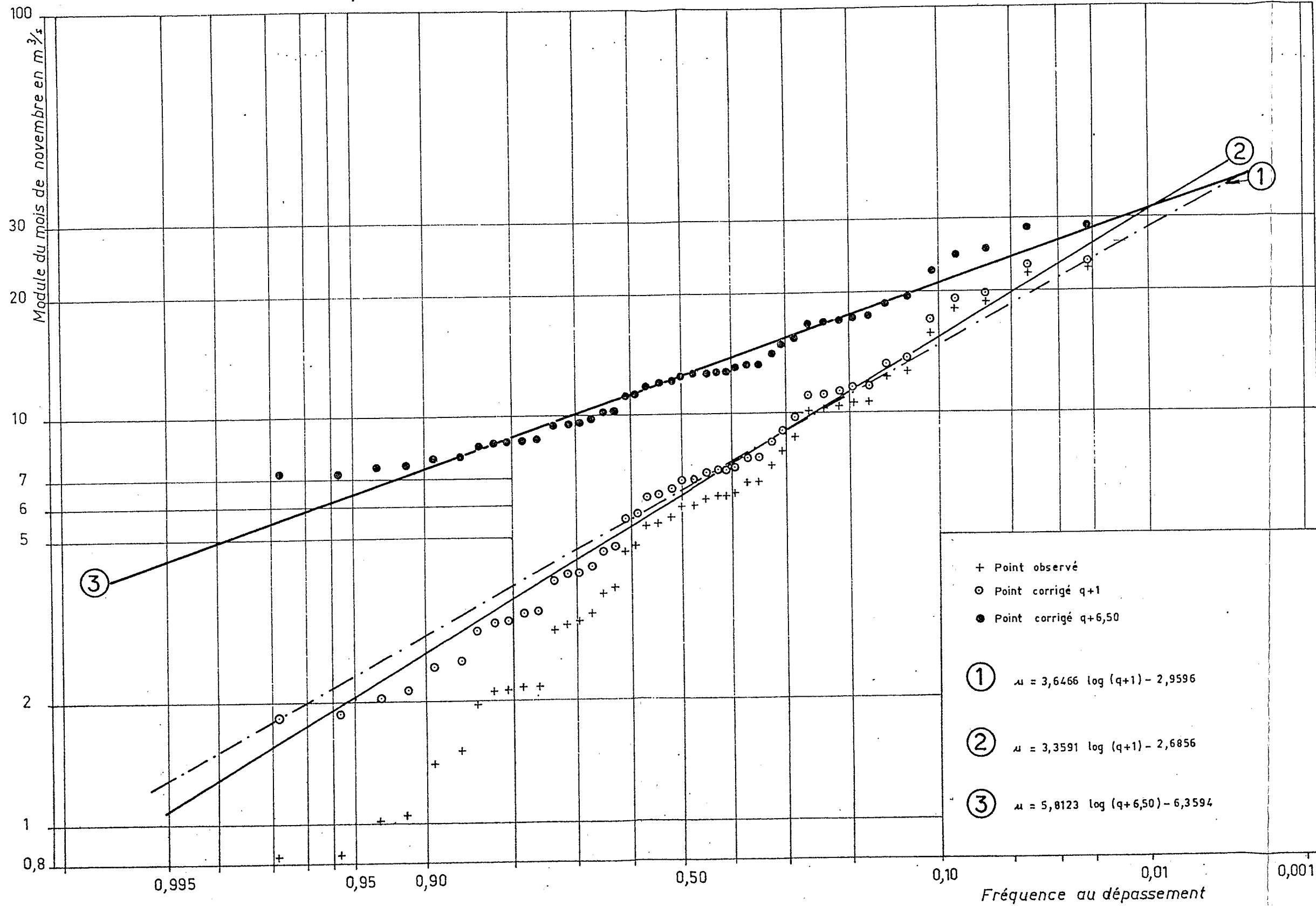


TABLEAU 3

TEST d'ADEQUATION du  $\chi^2$

On choisit de retenir 8 classes d'égalé probabilité théorique, comprenant chacune  $\frac{45}{8}$  soit 5,625 effectif théorique  $v_i$ .

Les limites de classe découlent de ce choix et permettent le calcul des effectifs expérimentaux  $n_i$  par classe, à l'aide du tableau n° 5.

Détail du calcul du  $\chi^2$

N° de classe	Limites de classes	Effectif théorique	Effectif expérim.	$n_i - v_i$	$(n_i - v_i)^2$	$\frac{(n_i - v_i)^2}{v_i}$
1	> 12,44	5,625	6	0,375	0,1406	0,025
2	8,91 - 12,44	"	6	0,375	0,1406	0,025
3	6,94 - 8,91	"	3	2,625	6,8906	1,227
4	5,50 - 6,94	"	9	3,375	11,3906	2,110
5	4,31 - 5,50	"	4	1,625	2,6406	0,470
6	3,24 - 4,31	"	3	2,625	6,8906	1,227
7	2,13 - 3,24	"	5	0,625	0,3906	0,694
8	< 2,13	"	9	3,375	11,3906	2,110
Total						7,888

Nombre de degrés de liberté  $k - p - 1 = 8 - 3 - 1 = 4$

$p(\chi^2) = P(7,888)$  à 4 degrés

$P(\chi^2) \neq 0,09$



En repassant aux débits et en retranchant  $Q_0 = 1$ , on obtient les bornes de l'intervalle pour  $\bar{Q}$  à savoir 6,30 et 7,57.

$$\text{Donc : } \underline{6,30 \leq \bar{Q} \leq 7,57 \text{ m}^3/\text{s}} \quad (\text{IC } 95 \%)$$

L'intervalle est peu dissymétrique et accorde une précision de  $\pm 10 \%$  sur la connaissance de la moyenne exacte, dont la valeur empirique est 6,91 m<sup>3</sup>/s.

- D. Au débit moyen mensuel de récurrence 20 ans recherché, correspond une fréquence théorique de 0,05 au non dépassement, pour laquelle la variable réduite de GAUSS vaut - 1,645. On introduit cette valeur dans l'équation d'ajustement de la loi de GALTON :

$$u = 3,647 \log (Q + 1) - 2,960$$

$$\text{On a } \log (Q_{0,05} + 1) = \frac{2,960 - 1,645}{3,647} = 0,361$$

$$Q_{0,05} = \underline{1,29 \text{ m}^3/\text{s}}$$

Le débit de 1,29 m<sup>3</sup>/s a été dépassé en sévérité 4 fois au cours de la période étudiée de 45 ans. Ceci confirme les remarques relatives à l'ajustement retenu et qu'illustre le graphique n° 5 : la courbe 1 est trop optimiste pour les basses eaux et le débit de probabilité 0,95 calculé est surestimé. Sur le graphique 5, l'ajustement de la courbe 2 reconnu meilleur, donne  $Q_{0,05} = 1,00 \text{ m}^3/\text{s}$ , ce qui est beaucoup plus près des observations (2 valeurs expérimentales seulement sont plus sévères en 45 ans).

L'absence de précision et d'intérêt de l'ajustement par les estimateurs (courbe 3 du graphique n° 5) peut être mise clairement en évidence sur ce même sujet. La courbe 3 donne pour  $P = 0,95$  un débit de 6,5 m<sup>3</sup>/s. Comme  $Q_0 = 6,5 \text{ m}^3/\text{s}$ , cela revient à dire que le débit de Novembre s'annule tous les 20 ans. La sévérité exagérée et l'absence de précision de cet ajustement sont très nettes en ce qui concerne les valeurs déficitaires ; il doit être rejeté, tandis qu'il pourrait être conservé pour les estimations des valeurs excédentaires pour lesquelles il fait jeu égal avec les courbes 1 et 2.

La période de retour moyenne théorique du débit observé le plus faible : 0,83 m<sup>3</sup>/s en Novembre 1957 doit être supérieure à 20 ans.

$$\text{On a : } \log (0,83 + 1) = 0,26245$$

L'équation de GALTON permet de calculer u :

$$u = 3,647 \times 0,26245 - 2,960 = - 2,003$$

La table de GAUSS indique pour  $u = - 2,003$  une probabilité de 0,9775 à laquelle correspond une récurrence de 45 ans environ qui se trouve être égale à la récurrence expérimentale.