

## LA COMPLEXITE ET L'HYDROLOGIE

BOCQUILLON Claude, Laboratoire d'Hydrologie et Modélisation  
Professeur à l'Université de MONTPELLIER II  
Directeur du Département EAU.

### 1. MILIEU PHYSIQUE - MILIEU COMPLEXE

Ma génération a vu naître l'avion à réaction, les satellites et les surgelés. Elle a vu aussi (et subi) deux révolutions mathématiques, qui ont marqué des ruptures nettes dans l'évolution des mathématiques depuis la Grèce antique jusqu'à EULER et LAGRANGE. Une première fois, on nous a expliqué que MONGE, FOURIER et autres CAUCHY étaient des bricoleurs dont les théorèmes ressemblaient aux recettes de Tante MARIE (1). Place à la nouvelle cuisine, place à la nouvelle mathématique. Ce grand nettoyage a donné un édifice dont la beauté formelle rappelle le Sacré de Napoléon par DAVID (1806). Bannie la géométrie, bannies les techniques projectives, rejetés les points cycliques, etc... ; Tout ce qui enchantait l'imagination.

Dans les années 80 est apparue, sur une idée géniale de Benoit MANDELBROT (6), une nouvelle génération de mathématiciens, iconoclastes et un peu farceurs, qui nous a replongé dans un monde féérique, où l'image et l'imaginaire se rejoignent dans une géométrie réhabilitée.

L'observation par Benoît MANDELBROT (7) de l'existence d'une Géométrie de la nature a ouvert des perspectives qui renouvellent notre perception du milieu physique. L'univers apparaît depuis d'une extrême complexité. Les nuages, les feuillés des arbres, les étoiles dégagent une harmonie liée à quelques règles sous jacentes dans la construction de ces paysages.

Fractal, Désordre, Chaos, tous ces termes qui visent à décrire la complexité du milieu, et celle de son évolution sont à la mode. Triade, Tamis de SIRPINSKI, Escalier du Diable, autant de curiosités excitantes (LE MEHAUTE), (4).

Je vais essayer de montrer en quoi ces nouvelles approches peuvent résoudre des problèmes hydrologiques opérationnels pas ou mal résolus, ou poser des interrogations nouvelles sur le milieu ou les processus.

### 2. LA DESAGREGATION DE LA PLUIE

La pluie constitue l'entrée très généralement unique de l'hydrologie de surface. Mais sa structure est extrêmement complexe. Plus on l'observe à pas fin, plus elle est variable. Son accroissement n'existe qu'à pas de temps défini. Il s'agit d'un fractal.

Quel problème pose à l'hydrologue ce comportement ? Il dispose en général de séries journalières ponctuelles, qu'il va tenter d'introduire dans une modélisation du transfert pluie-débit sur un bassin versant.

La variabilité de la pluie durant l'intervalle de mesure (journée) a un effet important sur le résultat : 50 mm de pluie en un jour répartis uniformément sur 24 h ont un effet très différent d'une averse de 50 mm en 1 heure.

L'hydrologue tourne cette difficulté par de mauvaises astuces : "Courbes IDF" et "pluie de projet", ce qui correspond à une désagrégation de la pluie en respectant le total journalier, plus quelques propriétés statistiques du signal mesuré à pas fin.

Ce problème peut être traité de façon plus pertinente par les méthodes d'interpolation fractale. L'interpolation consiste à faire passer une courbe "au mieux" d'un ensemble de points donnés. La figure 1 représente trois types d'interpolation : Interpolation linéaire et polynomiale bien connues, dont tous les hydrologues savent que l'application à la pluie conduit à des résultats aberrants, et interpolation fractale, qui construit une fractale passant par des points donnés, dont la caractéristique dimensionnelle peut être mesurée par la saucisse de MINKOWSKY, qui enveloppe les points du graphe. Cette saucisse s'amincit au fur et à mesure qu'on l'observe de plus près.

La méthode de BARNESLEY (1) de construction d'une fractale s'inspire de l'évolution de cette saucisse.

Considérons la transformation affine du plan Euclidien ( $R^2 \rightarrow R^2$ ) de la forme :

$$w(M) = w \begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ d & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ g \end{pmatrix}$$

Elle transforme un parallélépipède de hauteur h suivant y et de pas l suivant t en un parallélépipède de hauteur dh et de pas al :

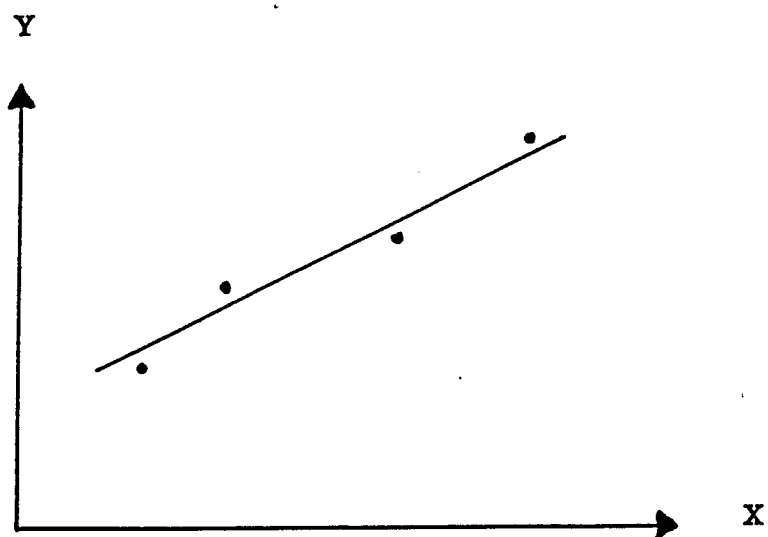
$$w(\text{⊗}) \implies \text{⊗}$$

La figure 2 montre comment utiliser cette transformation pour construire par segment une saucisse de MINKOWSKY. Sur cette figure, le segment de base est découpé en 3 et les 5 coefficients  $a(n)$ ,  $c(n)$ ,  $d(n)$ ,  $c(n)$ ,  $f(n)$  sont choisis pour que les trois segments recouvrent le segment initial.

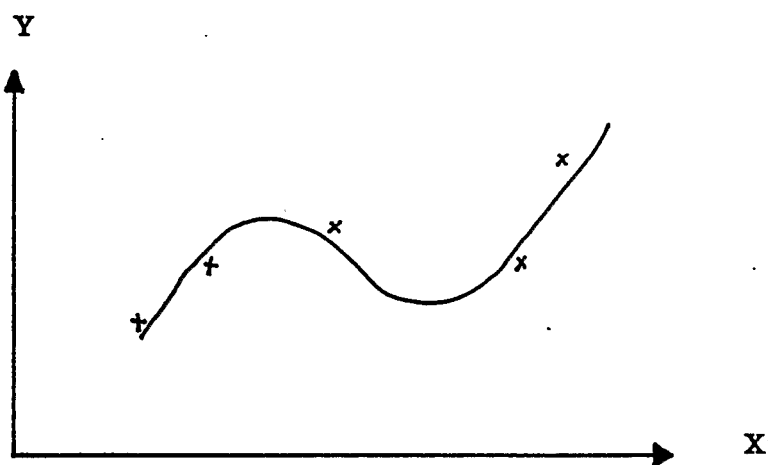
La transformation  $W = \bigcup_{n=1}^N w_n$  transforme le parallélépipède initial en trois parallélépipèdes jointifs de hauteurs  $d_1h$ ,  $d_2h$ ,  $d_3h$ . Le paramètre d gère l'évolution de l'amplitude verticale avec le pas de découpage. La transformation  $w_n$  dépend de cinq coefficients qui sont liés pour assurer la continuité par quatre relations. Un des coefficients peut être arbitraire. On choisit  $d_n$  pour pouvoir régler les caractéristiques fractales de la courbe.

Un processus itératif aléatoire fractal (PIAF) est défini par itération sur W. Il conduit à la génération d'une courbe fractale passant au travers des N pts ayant servi à l'initialiser (fig. 3). Cette courbe est évidemment aléatoire ; la fig. 4 montre quelques fractales construites avec les mêmes paramètres et les mêmes points d'interpolation, et la fig. 5 des fractales de dimensions diverses passant par ces points (BARNESLEY), (2), (3).

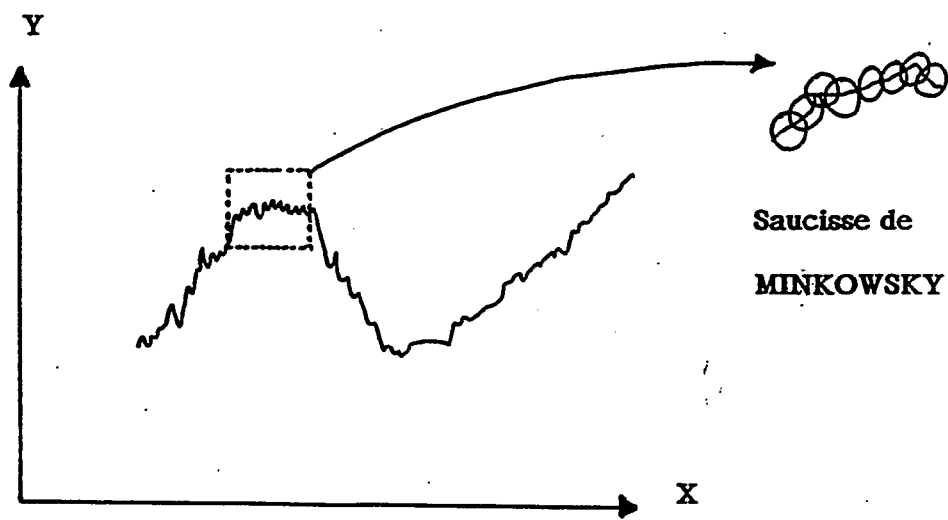
**Interpolation  
linéaire**



**Interpolation  
polynomiale**

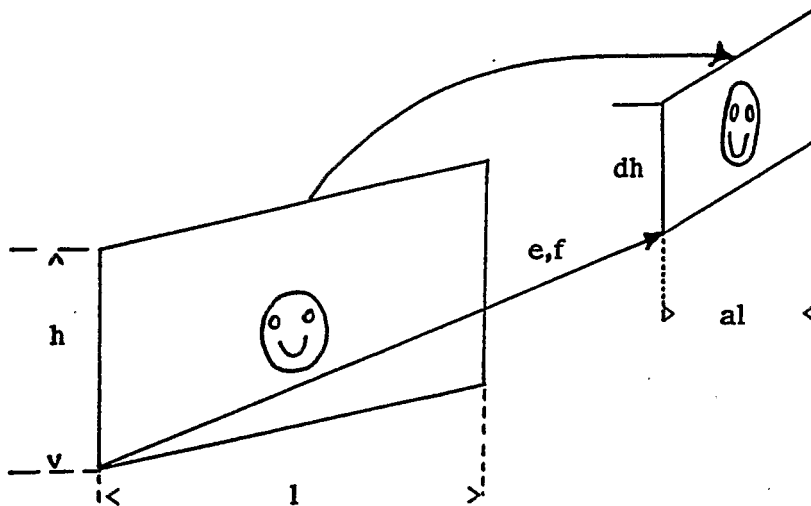


**Interpolation  
fractale**



**FIG. 1 : DIVERS PROCEDES D'INTERPOLATION**

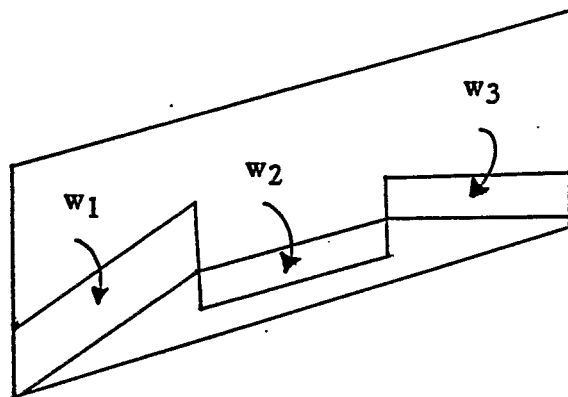
Transformation  
de base  
élémentaire



$$w(M) = w\left(\begin{matrix} y \\ t \end{matrix}\right) = \begin{pmatrix} a & c \\ d & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

$$S_0 \Rightarrow |ad| \cdot S_0$$

Transformation  
itérée



$$S = \sum_{1, N} |a_n d_n|$$

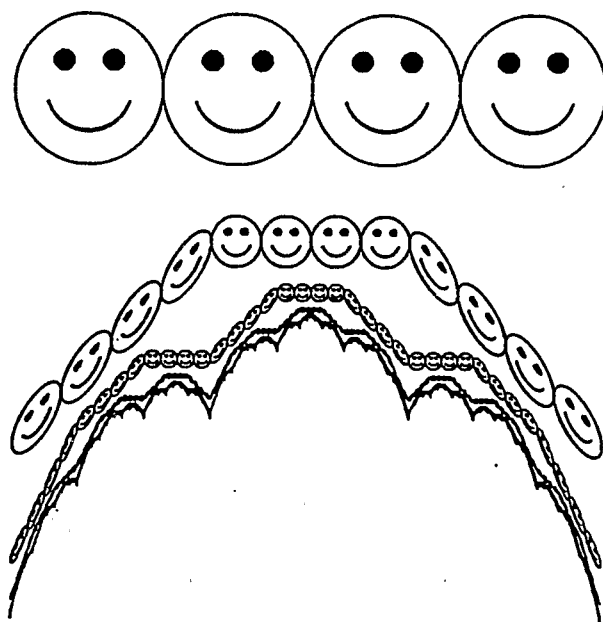
avec :

$$\begin{cases} a_n = (t_n - t_{n-1}) / (t_N - t_0) \\ e_n = (t_N t_{n-1} - t_0 t_n) / (t_N - t_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_n = (Y_n - Y_{n-1}) / (t_N - t_0) - d_n (Y_N - Y_0) / (t_N - t_0) \\ f_n = (x_{N n-1}^F - x_{0 n}^F) / (t_N - t_0) - d_n (t_N Y_0 - t_0 Y_N) / (t_N - t_0) \end{cases}$$

$$S \rightarrow \sum_{1, N} |a_n d_n| S$$

FIG. 2 : QU'EST CE QU'UN PIAF ?



**FIG. 3 : CONVERGENCE D'UN P I A F VERS UNE FRACTALE  
(BARNSELY)**

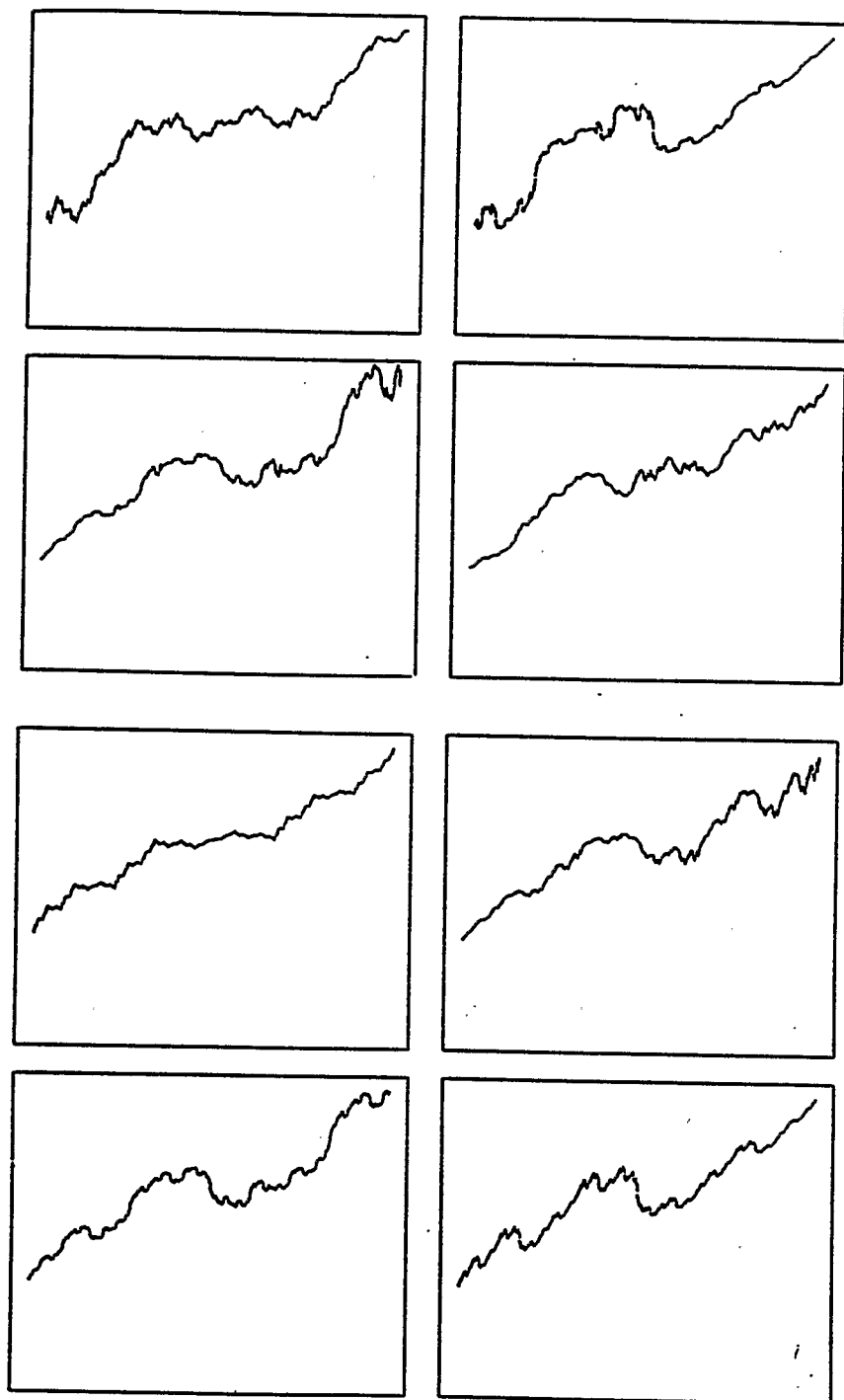
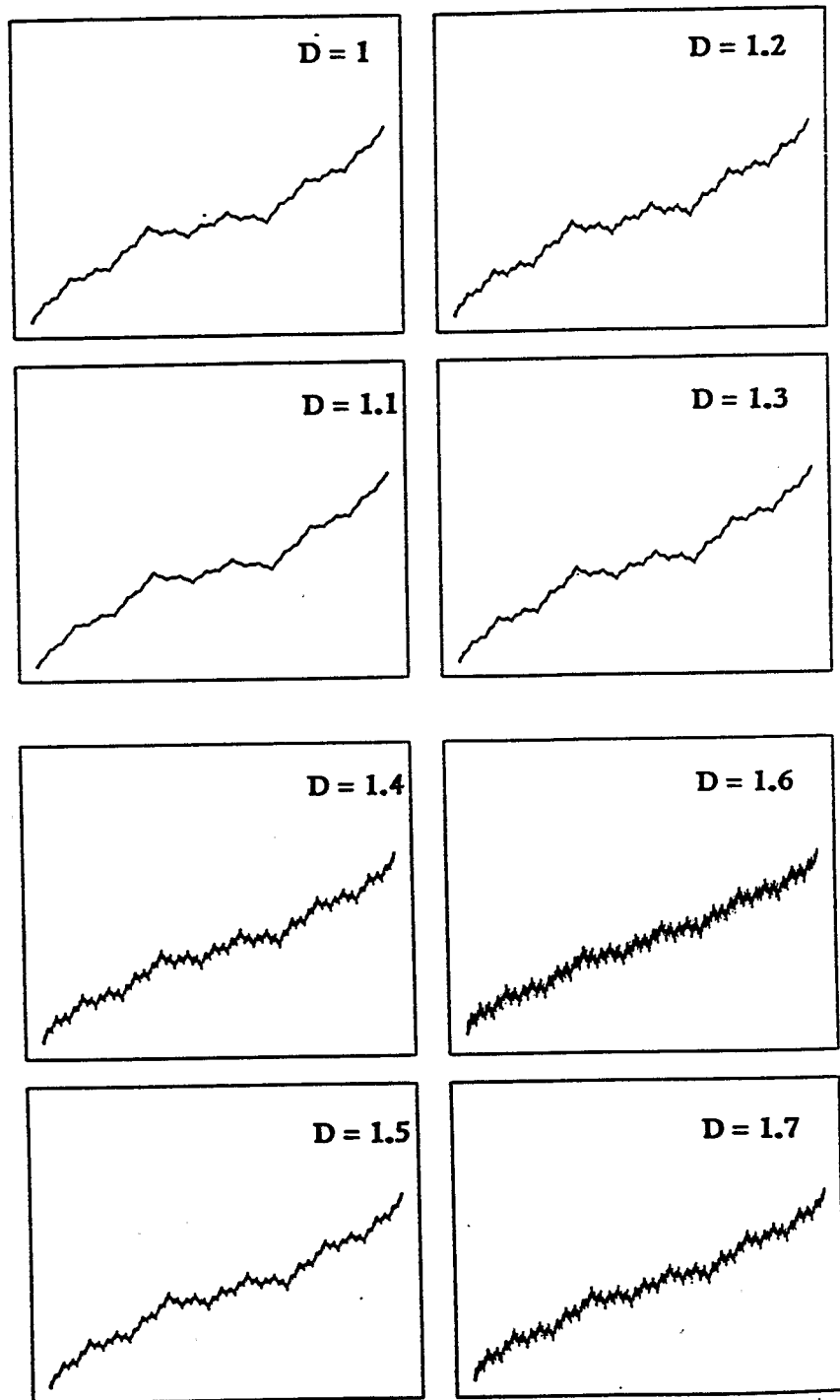


FIG. 4 : JEU DE GRAPHES D'INTERPOLATION FRACTALE  $D = 1,3$  PASSANT PAR LES  
 COUPLES  $\{(0,0), (1,1), (2,1), (3,2)\}$  [BARNSELY]



**FIG. 5 : COURBES D'INTERPOLATION FRACTALES DE DIMENSIONS DIVERSES  
PASSANT PAR LES COUPLES  $\{(0,0),(1,1),(2,1),(3,2)\}$   
(BARNSLEY)**

Cette fonction d'interpolation fractale (FIF) possède des propriétés remarquables:

. Il s'agit d'une fractale de dimension D telle que :

$$\sum |d_n| a^{D-1} = 1$$

. Avec des intervalles de temps égaux :  $a_n = \frac{1}{N}$

$$D = 1 + \frac{\text{Log} \sum_{n=1, N} |d_n|}{\text{Log} N}$$

. Avec des  $d_n$  égaux

$$D = 2 + \frac{\text{Log} d}{\text{Log} N}$$

Formule que Michael BARNESLEY trouve "délicieuse" pour deux raisons :

- . la fractale engendrée a une dimension réglable entre 1 et 2
- . le résultat est indépendant des points d'interpolation.

Nous y verrons une troisième raison :

. son intégrale sur un pas de mesure est donnée simplement :

$$\int_i f(t) dt = \beta_i / (1-\alpha)$$

$\beta_i$  étant l'intégrale fournie par l'interpolation linéaire et :

$$\alpha = \sum_{n=1, N} a_n d_n.$$

Cette formule est particulièrement intéressante pour le problème d'interpolation de la pluie. Les valeurs d'intensité de pluie à pas régulier sont inconnues, seule l'intégrale de cette variable sur les pas successifs est disponible.

En choisissant des intensités telles que :

$$P_i + P_{i+1} = \frac{2(1-\alpha)}{\Delta t} P_i,$$

on peut créer un ensemble de  $p_i$ , tel que les intégrales soient ajustées au mieux par une fractale de dimension donnée.

Une procédure de nature semblable devrait permettre une interpolation fractale d'un champ spatial de pluie, qui représentera une réalisation avec des valeurs imposées aux noeuds d'un réseau de mesure, et des surfaces d'intensités données de probabilité donnée. En normalisant les variables temps-espace pour rendre le phénomène isotrope dans l'espace temps cette procédure peut permettre une représentation spatio-temporelle de la pluie.



### 3. "L'EFFET D'ECHELLE"

Ce premier problème a conduit à une réalisation opérationnelle. Le second plus complexe, ne sera l'objet que de considérations générales. Essayons d'analyser le contenu de l'expression "l'effet d'échelle".

Dès qu'un modèle bien vérifié fonctionne mal hors du contexte physique de sa mise au point, on invoque l'effet d'échelle, tarte à la crème hydrologique. L'idée sous jacente est que les transformations fonctionnelles hydrologiques, (essentiellement la transformation pluie-débit) est fonction de la taille du bassin considéré ; ceci n'est guère étonnant vu la double complexité du système :

- . complexité du milieu physique
- . complexité fonctionnelle des dynamiques non linéaires.

La réflexion va porter sur la complexité du transfert via le réseau de drainage. Le réseau de drainage est lié au caractère fractal du relief physique qui accumule le ruissellement suivant des lignes particulières où la densité de quantité d'eau devient infinie. Ce réseau peut être vu de façon différente suivant la nature de l'analyste: géomorphologue, hydrologue ou géographe. Pour l'hydrologue, les grandeurs essentielles sont : le débit en un point du réseau, le temps mis par ce débit pour atteindre l'exutoire.

Ces deux notions doivent être précisées, car leur définition exacte pose quelques problèmes.

- . le temps mis pour atteindre l'exutoire, mesuré en unité de temps sera considéré comme une représentation paramétrique du réseau de drainage, représentation non injective, qui conduit à la notion classique de courbes isochrones.

- . le débit est une notion difficile à cerner. Pour éliminer le "temps qui s'écoule", nous choisirons un débit caractéristique quelconque dont le premier facteur explicatif est la surface drainée, ce qui fournit une représentation paramétrique de  $Q$  :  $Q = Q(S)$ .

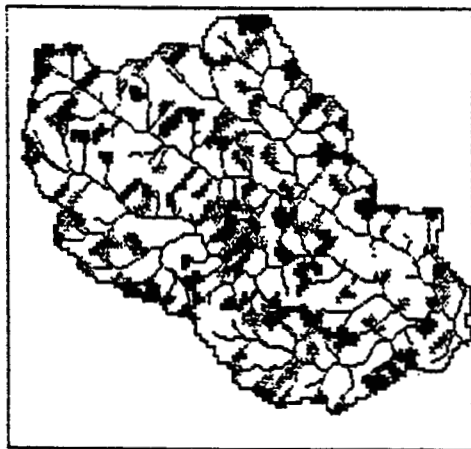
Le transfert est donc représenté par une relation  $\{S, t\}$ .

Comment décrire le réseau de drainage d'un bassin versant au travers de l'échelle surfacique ?

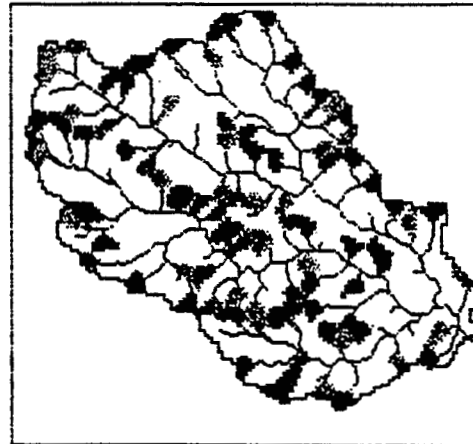
Dans un bassin versant de surface  $S_0$ , on peut rechercher les sous bassins de surface  $\lambda S_0$ ,  $\lambda$  étant le pas de description.

D'où un découpage itératif  $[\lambda]^m$  (fig. 6) qui définit un graphe arborescent (fig. 7) dans lequel une génération est définie non seulement par la génération précédente, mais aussi par les générations antérieures.

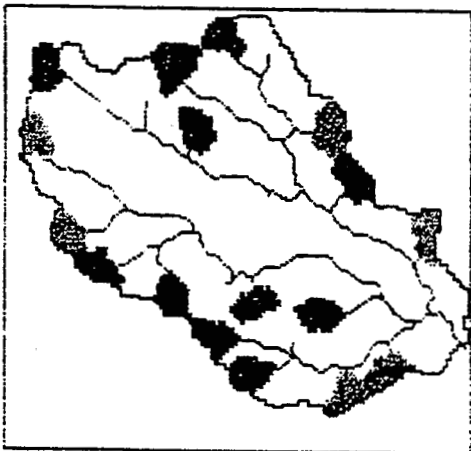
Le premier problème qui se pose concerne l'effet d'échelle sur ce graphe. La première idée est l'auto-similarité, c'est-à-dire l'invariance de la structure du graphe lorsque  $S_0$  change (fig. 8) (Il est entendu qu'il s'agit d'une structure aléatoire et que son invariance est celle du processus).



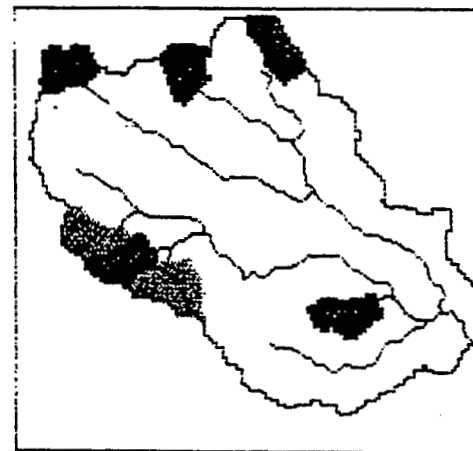
$S = 0.5 \text{ km}^2$   
 $N = 188 ; L = 357 \text{ km} ; \Omega = 40 \text{ km}$



$S = 1 \text{ km}^2$   
 $N = 120 ; L = 271 \text{ km} ; \Omega = 39 \text{ km}$



$S = 5 \text{ km}^2$   
 $N = 22 ; L = 136 \text{ km} ; \Omega = 37 \text{ km}$



$S = 10 \text{ km}^2$   
 $N = 10 ; L = 108 \text{ km} ; \Omega = 36 \text{ km}$

ÉVOLUTION du RÉSEAU HYDROGRAPHIQUE avec  $S$ .

FIG. 6 : DECOUPAGE ITERATIF ISO SURFACE

(R. MOUSSA, 1991)

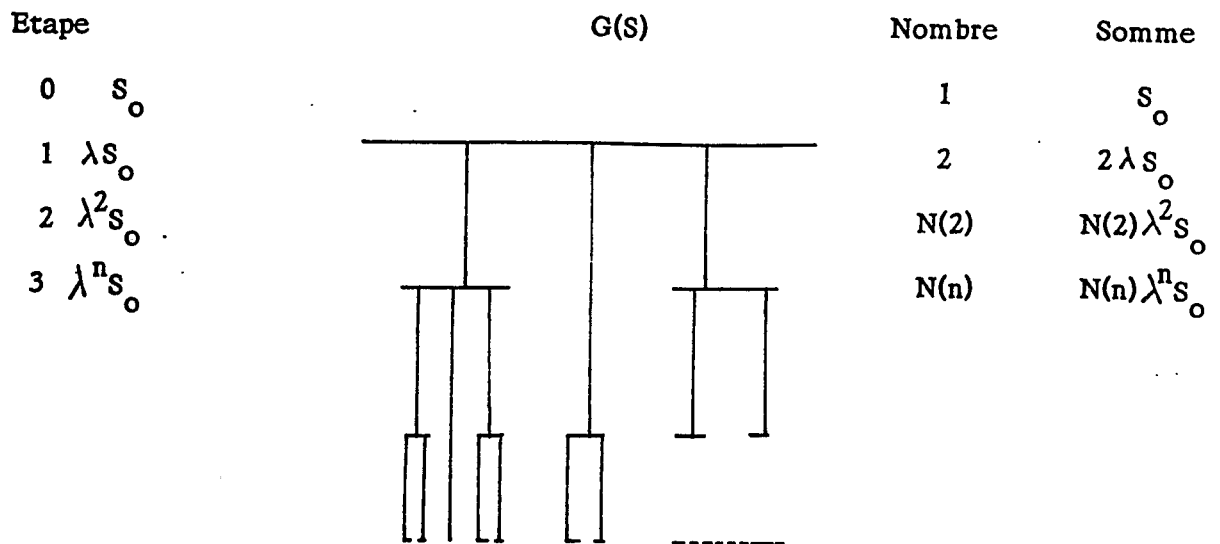
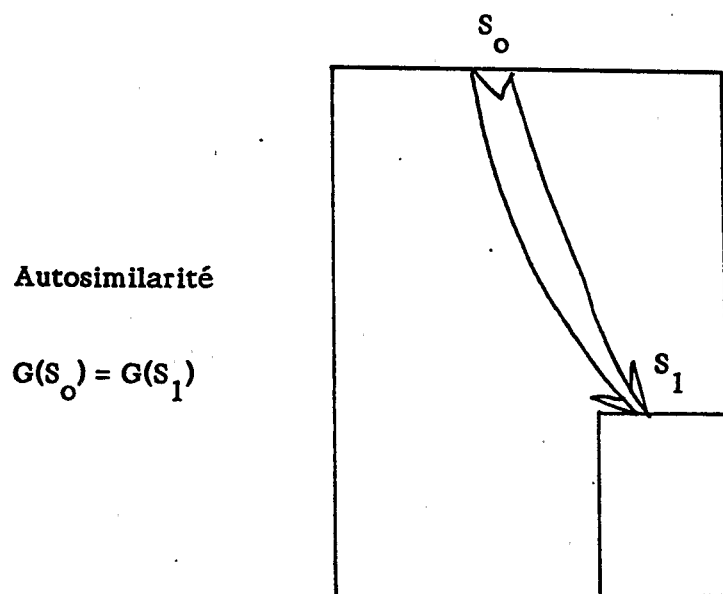


FIG. 7 : GRAPHE ARBORESCENT DE DRAINAGE



$$N = N\left(\frac{s_1}{s_0}\right) \quad \text{avec} \quad s_1 = \lambda^n s_0$$

FIG. 8 : AUTOSIMILARITE DU GRAPHE

Si ce graphe est stationnaire et la structure auto semblable, il possède des propriétés intéressantes :

. Un tel graphe d'arborescence est représenté par un algorithme itératif généré à partir d'une matrice de ramification qui comporte un petit nombre de paramètres, et condense de façon remarquable l'ensemble des ramifications. Le nombre d'éléments  $N(n)$  va tendre vers une répartition exponentielle.

Ces propriétés ont été vérifiées sur le Gardon d'Anduze (540 km<sup>2</sup>) à des échelles allant de 100 km<sup>2</sup> à 0,5 km<sup>2</sup>. La structure reste auto semblable dans cette gamme d'échelles. (Thèse R. MOUSSA), (8).

Quelles réflexions hydrologiques peut-on en tirer sur la représentativité d'un transfert d'échelle par une seule échelle de découpage, par exemple faisant passer de 1 km<sup>2</sup> à 100 km<sup>2</sup>. Les éléments de 1 km<sup>2</sup> ne représentent qu'une fraction de l'ordre de 30 % du bassin de 100 km<sup>2</sup>. Ces éléments sont assez bien répartis sur l'ensemble du bassin pour représenter la "fonction de production", ce qui explique le fonctionnement raisonnable de modèles globaux décomposant la fonction pluie débit en séquence Production-Transfert.

Par contre, ce type de décomposition s'adaptera mal à une représentation de la spatialisation du bassin versant, car elle va négliger les effets des bassins ne se trouvant pas aux extrémités. Ce problème est particulièrement marqué pour le mécanisme du débit solide, avec les effets antagonistes érosion-dépôt des bassins amont-aval. L'effet d'échelle devient alors considérable.

Il est nécessaire pour comprendre l'effet d'échelle de représenter l'ensemble du processus d'agrégation des bassins d'échelles différentes. On peut, par exemple, empiler les étapes de la décomposition surfacique. La figure 9 représente cette procédure sous forme d'un tamis qui retient les sous bassins de taille donnée. A la sortie du tamis, il ne reste qu'une poussière fractale de masse tendant vers zéro. Les fractions retenues dans les éléments du tamis sont représentées par un graphe de type courbe granulométrique qui définit le processus d'agrégation des bassins. Vouloir représenter un bassin à partir d'un effet d'échelle unique est la même gageure que vouloir définir le comportement d'un sol, par un seul point de sa courbe granulométrique.

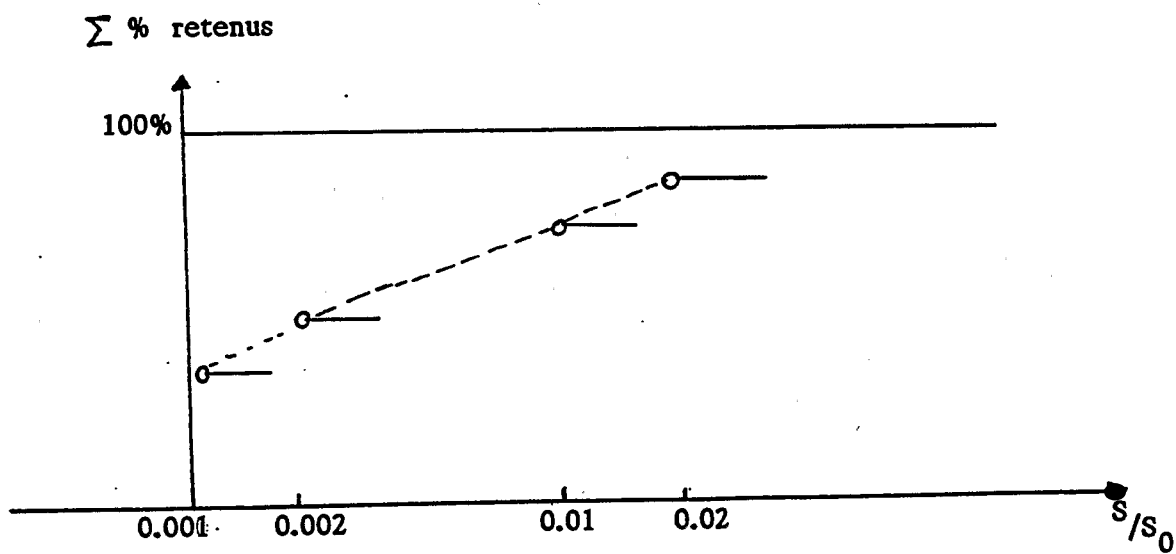
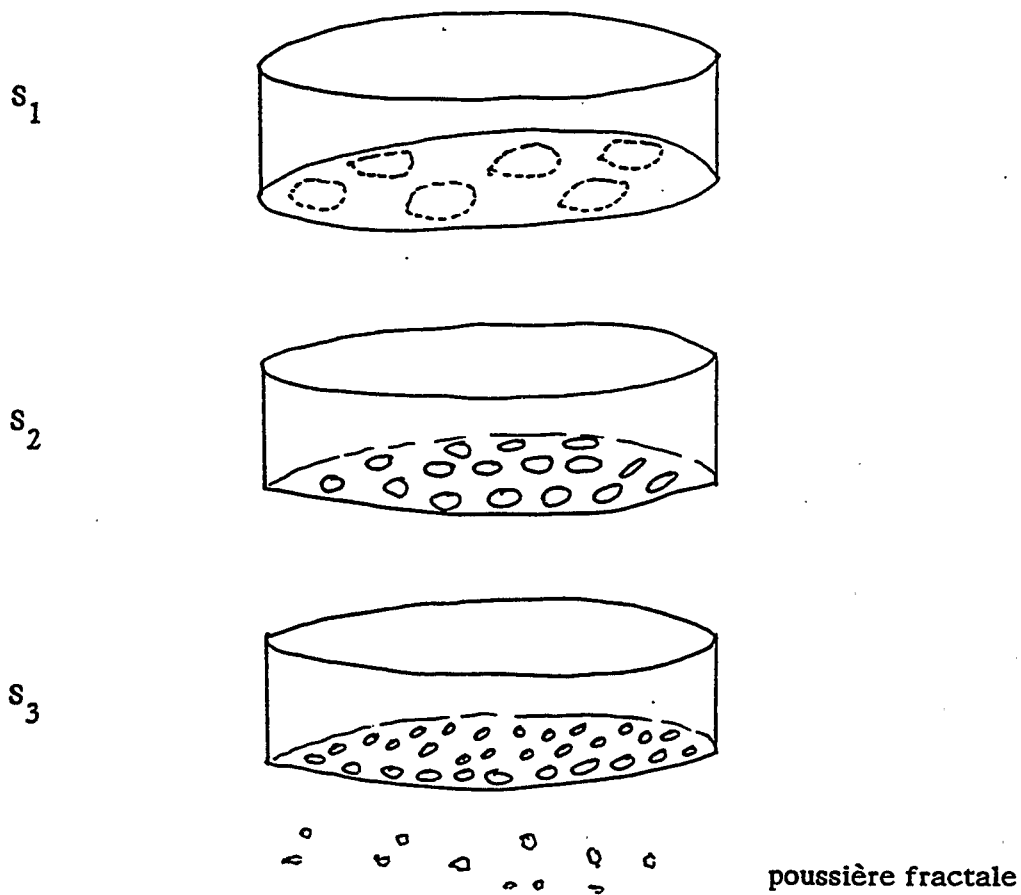
Ce tamis hydrologique appliqué au bassin des Gardons transforme celui-ci en un tapis qui se remplit progressivement, à la façon du tapis de SIERPINSKY (fig. 10).

#### 4. SYSTEME D'INFORMATION HYDROLOGIQUE

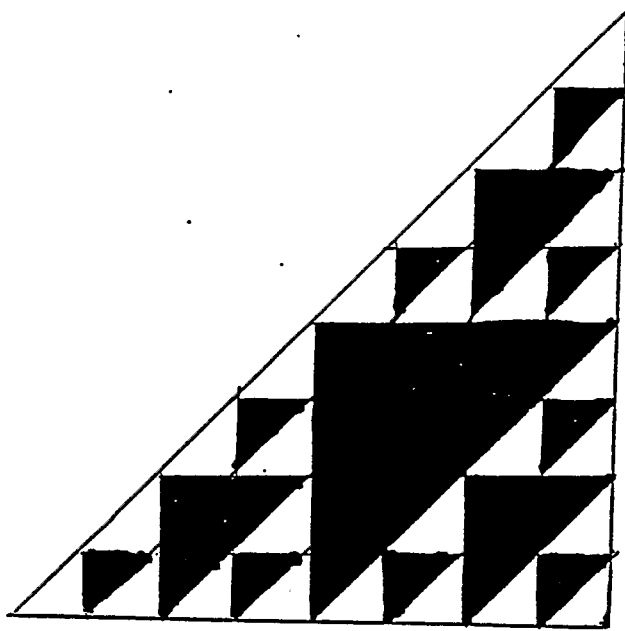
Comment structurer des données spatialisées diverses (occupation du sol, imagerie...) pour rendre leur utilisation adaptée à l'hydrologie de surface? Les transferts, les devenir des polluants s'effectuent en suivant le réseau hydrographique. C'est donc ce réseau qui doit constituer l'élément structurant de l'espace du bassin versant. Il s'agit de représenter l'espace à deux dimensions par un espace métrique à une dimension définie par le réseau de drainage.

Considérons sur la fig. 11, la saucisse de MINKOWSKY associée au réseau tronqué à une surface S. Une paramétrisation du périmètre de cette saucisse à partir de l'exutoire fournit l'axe de description du système. Cette saucisse hydrologique étirable distingue sur chaque bief une rive gauche et une rive droite ; elle permet d'estimer une distance entre deux points du réseau. Elle va s'étirer comme une bande élastique lorsque la description sera plus fine. Elle peut passer par toute maille de l'espace aussi fine soit-elle.

FIG. 9 : TAMIS HYDROLOGIQUE



GRANULOMETRIE HYDROLOGIQUE



TAPIS DE SIERPINSKY



FIG. 10 : TAPIS HYDROLOGIQUE

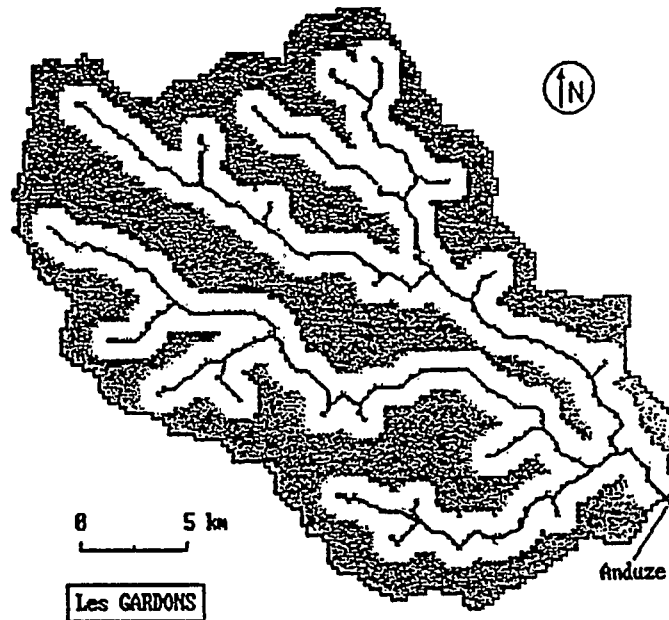


FIG. 11 : SAUCISSE HYDROLOGIQUE ETIRABLE

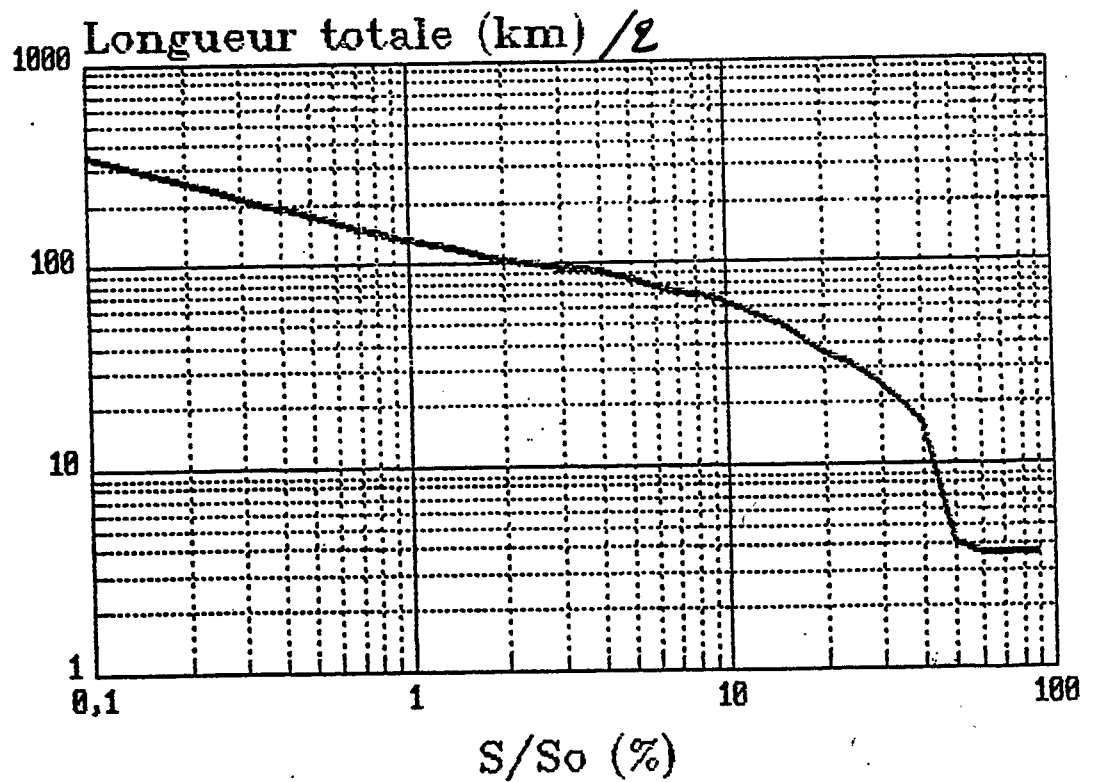


FIG. 12 : DIMENSION FRACTALE DE LA SAUCISSE HYDROLOGIQUE

Cette représentation constitue le support idéal de stockage de l'information hydrologique. En effet, on peut stocker l'information suivant la paramétrisation de la saucisse. Cette information, qu'elle que soit sa nature (numérique, factuelle...) aura sa place dans le réseau de drainage. Elle n'a pas besoin d'être uniforme dans l'espace (on peut avoir des informations sur un sous bassin, et pas sur ses voisins).

Les avantages de cette représentation hydrologique sont multiples :

- . stockage de compacité maxima
- . représentation par bassin et sous bassin
- . décomposition et assemblage de bassins immédiat
- . structure préparée pour effectuer des opérations hydrologiques (produit de distribution).

Cette saucisse définit bien évidemment une courbe fractale. La longueur de son périmètre tend vers l'infini, par ramifications successives, lorsque S diminue. La dimension fractale de ce périmètre a été évaluée pour les Gardons d'Anduze (fig. 12). Elle est de l'ordre de 1,70. On l'appellera dimension du réseau de drainage.

De nombreuses interrogations subsistent :

a. la dimension fractale du réseau de drainage est-elle variable avec l'échelle d'observation ? Son invariance entre 100 et 1 km<sup>2</sup>, est-elle conservée entre 1 km<sup>2</sup> et 1 m<sup>2</sup> ?

b. la dimension fractale du réseau de drainage est-elle une caractéristique :

- . du BV
- . de la morphogénèse terrestre
- . de processus plus généraux.

On peut être frappé de retrouver des coefficients du même ordre, dans les réseaux d'évacuation des eaux urbaines ou dans les digitalisations visqueuses hydrodynamiques.

## 5. CONCLUSIONS

L'hydrologie est un domaine scientifique privilégié qui a grandement servi à l'émergence de la notion de complexité dans la nature. Les difficultés à décrire le milieu hydrologique, et son comportement ont amené les hydrologues à traduire de façon plus ou moins arbitraire les termes de cette complexité.

HORTON, STRAHLER, MANDELBROT (lorsqu'il s'intéressait à l'hydrologie), ont révélé les notions d'arborescence, d'effet NOE, d'effet de HURST ; Le transfert de ces notions vers d'autres disciplines a montré leur généralité. Mais leur conceptualisation postérieure ne doit pas nous faire oublier que les meilleures découvertes résultent souvent des échanges entre disciplines et que le moteur de la science est la curiosité des chercheurs.



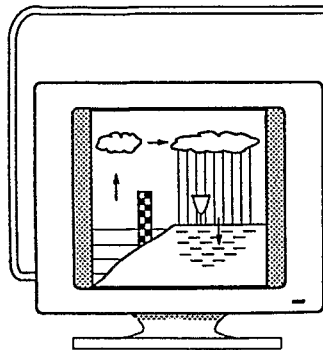
## BIBLIOGRAPHIE

- (1) Barnsley M.F. (1986), Fractal functions and Interpolation Constructive approximation, 2 : 303-329.
- (2) Barnsley M.F. (1988), Fractal Everywhere - Academic Press, Inc. N.Y.
- (3) Barnsley M.F., DEMKO S. (1985), Iterated Function Systems and the global construction of fractals. Proceeding of the Royal Society of LONDON, A.399 : 243-275.
- (4) Le Mehaute A. (1990), Les Géométries fractales HERMES, PARIS.
- (5) Massoput P., Ph. D. (1986), Thèse Geogio Inst. of Tech.
- (6) Mandelbrot B. (1975), Les objets fractals - Flammarion, PARIS.
- (7) Mandelbrot B. (1982), The fractal géometry of Nature Freeman and Co, SAN FRANCISCO.
- (8) Moussa R. (1991), Thèse Doctorat - Université MONTPELLIER II.
- (9) Tante Marie (1920), Dunod, épuisé.

# La Gazette

Numéro 19  
Janvier 1992

journal quasi-périodique des derniers potinformatiques du laboratoire d'hydrologie



**Brief News**

*par F. Delclaux*

**Logiciel de calcul de l'E.T.P.**

*par J. M. Lapetite*

**C.R. de réunion avec CISI Ingénierie**

*par F. Delclaux*

**La Complexité et l'Hydrologie**

*par C. Bocquillon*

**Le projet CARTOVL**

*par F. Delclaux  
et A. Crespy*

**DEMIURGE 2.0**

*par C. Depraetère*

**ORSTOM**

28 FEV. 1992

ORSTOM Fonds Documentaire

N° 35.030 ex 1

Cote :

B

M

43