

PROPOSITION ET ANALYSEDE QUELQUES CRITERES ADIMENSIONNELS D'OPTIMISATIONJ.P. Fortin <sup>1</sup>, R. Charbonneau <sup>1</sup>, J. Lefèvre <sup>2</sup>, G. Girard <sup>3</sup>RESUME

Les critères dimensionnels comme l'erreur type ou toute formule dérivée ou analogue donnent des valeurs différentes pour une même précision relative selon l'ordre de grandeur des débits utilisés. Les auteurs suggèrent donc un certain nombre de critères adimensionnels dans le but non seulement de juger la qualité de la simulation, mais aussi en vue d'une optimisation automatique. Ils ont analysé la sensibilité de ces critères dans quelques cas susceptibles de se présenter dans la réalité. Même si le paramètre à optimiser demeure l'élément essentiel déterminant le choix du critère, il semble d'après les résultats que l'un des critères s'adapte bien dans tous les cas rencontrés et est relativement sensible et fidèle, que ce soit en période d'étiage ou en période de crue.

ABSTRACT

Criteria which are dimensional such as the standard error of estimate or any derived or analogous formula, lead to different values for a similar relative precision according to the order of

1. Professeur, Centre Québécois des Sciences de l'Eau, Université du Québec.
2. Assistant de recherche, Centre Québécois des Sciences de l'Eau, Université du Québec.
3. Directeur de recherche, ORSTOM, France.

BENTON  
FRANCO  
REPRODUCTION

80618

O.R.S.T.O.M. Fonds Documentaire

N° : 39630

Cote : B

13 JUIN 1994

magnitude of the flow. Thus, the authors suggest a certain number of non-dimensional criteria in order not only to judge the quality of the simulation but also with a view to the choice of an automatic optimization criterion. They have analysed the sensitivity of those criteria in a few cases which could occur in reality. Even if the parameter being optimized remains the essential element determining the choice of a criterion, it seems, from our results, one of these criteria behaves well in all known cases and is relatively sensitive and reliable both in periods of low flow and in periods of high flow.

#### INTRODUCTION

Le développement de modèles mathématiques visant à simuler les processus hydrologiques a fait l'objet, depuis plus de dix ans, d'études approfondies. Mais, dès qu'il s'agit de juger de la qualité de la simulation, des obstacles surgissent. En effet, il arrive souvent que nous "sentions" qu'une reproduction est relativement satisfaisante alors que le critère employé suggère un résultat plutôt décevant. L'idéal serait un critère qui puisse à la fois être une interprétation quantitative de notre appréciation du résultat et se prêter à une optimisation automatique.

Il est probable qu'aucun critère ne pourra répondre complètement à toutes les questions que fera naître dans notre esprit la comparaison de deux hydrogrammes. Il y aurait même lieu de penser à choisir le ou les critères utilisés en fonction des paramètres à

optimiser. Dans cet article, nous comparons divers critères et vérifions leur sensibilité face à des "simulations".

### CRITERES UTILISES

Le critère le plus répandu et probablement le premier auquel nous pensons lorsque nous désirons apprécier un résultat quantitativement est l'erreur type  $E_t$ .

$$E_t = \left( \frac{1}{N} \sum (Q_o - Q_c)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

où:  $Q_o$  = débit observé au temps  $t$

$Q_c$  = débit calculé au temps  $t$

$N$  = nombre d'observations

En ce qui concerne les erreurs de mesure, ce dernier est un excellent moyen de chiffrer la précision. Notre désir étant toutefois de parvenir, si possible à définir un critère dont les valeurs puissent être indépendantes de l'ordre de grandeur des débits comparés, nous avons éliminé arbitrairement ce critère de notre article.

L'erreur type en effet, est fonction, en partie du moins, de l'ordre de grandeur des valeurs comparées. Il en est de même de critères définis à partir de la variance résiduelle ou de formules similaires (Mandeville, 1970; O'Connell, 1970; Dawdy, 1968; Lichty, 1968).

Nash (1969) a proposé un critère adimensionnel de la forme suivante:

$$C_1 = 1 - \frac{\sum (Q_o - Q_c)^2}{\sum (Q_o - \bar{Q}_o)^2} \quad (2)$$

où:  $Q_o$  et  $Q_c$  sont respectivement les débits observés et calculés et  $\bar{Q}_o$  le débit observé moyen.

Nous remarquons immédiatement que la valeur  $1 - C_1$  est égale au rapport de la variance résiduelle et de la variance des débits observés. Ceci veut dire que pour une même variance résiduelle,  $C_1$  sera d'autant meilleur que les écarts des débits  $Q_o$  par rapport à la moyenne  $\bar{Q}_o$  seront importants. Nous verrons plus loin comment cette caractéristique affecte la sensibilité de ce critère.

Nous savons que l'erreur  $E_r$  relative est définie ainsi:

$$E_r = \frac{Q_o - Q_c}{Q_o} \quad (3)$$

Il nous a paru intéressant de l'utiliser comme base de différents critères, puisqu'elle est par définition adimensionnelle et se prête très bien à la formulation de critères dont la valeur maximale est l'unité. Autre point important à noter, les trois critères suivants sont symétriques par rapport à  $Q_c = Q_o$  entre les limites  $Q_c = 0$  et  $Q_c = 2Q_o$ .

$$C_2 = 1 - \frac{1}{N} \sum \left( \frac{Q_o - Q_c}{Q_o} \right)^2 \quad (4)$$

$$C_3 = 1 - \frac{1}{N} \sum \left( \frac{|Q_o - Q_c|}{Q_o} \right) \quad (5)$$

$$C_4 = 1 - \frac{1}{N} \sum \left( \frac{|Q_o - Q_c|}{Q_o} \right) \quad (6)$$

L'emploi de  $Q_0$  plutôt que  $\bar{Q}_0$  au dénominateur du critère  $C_4$  n'affecte les résultats que très faiblement. Le critère  $C_2$  variant de façon parabolique à l'intérieur des mêmes limites que  $C_3$  et  $C_4$  ces derniers étant linéaires, les valeurs prises par  $C_2$  seront en général supérieures à celles de  $C_3$  et  $C_4$ .

Un modèle peut être considéré comme satisfaisant s'il réussit à la fois à bien simuler les débits de pointe et les étiages. Dans le but de tenir compte de cette exigence, nous avons sensibilisé le critère  $C_4$  en le modifiant de manière à ce que les valeurs observées  $Q_0$  aient d'autant plus de poids qu'elles sont éloignées de la moyenne  $\bar{Q}_0$ . Nous définissons le critère  $C_5$ :

$$C_5 = 1 - \frac{1}{N} \sum \left| \left( \frac{Q_c - Q_0}{Q_0} \right) \left( \frac{\bar{Q}_0 + |\bar{Q}_0 - Q_0|}{\bar{Q}_0} \right) \right| \quad (7)$$

D'autre part nous pouvons aussi calculer la surface comprise entre l'hydrogramme observé et l'hydrogramme simulé en supposant que la variation de débit du temps  $t$  au temps  $t + 1$  est linéaire. Cette hypothèse permet d'effectuer le calcul par la somme des différences des surfaces des trapèzes élémentaires de hauteur identique  $(t + 1) - t$  et de bases  $Q_0(t)$  et  $Q_0(t + 1)$  d'une part et  $Q_c(t)$  et  $Q_c(t + 1)$  d'autre part. Cette surface répond à l'équation 8.

$$S = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{N-1} \left| (Q_0(t) + Q_0(t + 1)) - (Q_c(t) + Q_c(t + 1)) \right| \quad (8)$$

Dans le but d'obtenir un critère dont la valeur maximale est l'unité, nous avons intégré le membre de droite de l'équation 8 à deux critères  $C_6$  et  $C_7$  qui ne sont différents que par l'ordre suivant lequel se font les opérations.

$$C_6 = \frac{\sum_{t=1}^{N-1} q_o(t) - \sum_{t=1}^{N-1} |q_o(t) - q_c(t)|}{\sum_{t=1}^{N-1} q_o(t)} \quad (9)$$

$$C_7 = \frac{1}{N-1} \sum_{t=1}^{N-1} \left( \frac{q_o(t) - |q_o(t) - q_c(t)|}{q_o(t)} \right) \quad (10)$$

$$\text{où: } q_o(t) = Q_o(t) + Q_o(t+1)$$

$$q_c(t) = Q_c(t) + Q_c(t+1)$$

L'utilisation de la méthode des rectangles plutôt que de celle des trapèzes pourrait, elle, nous amener exactement à l'un des critères définis plus haut, soit  $C_4$ .

#### ANALYSE DU COMPORTEMENT DES CRITERES

##### 1) Hydrogramme simulé proportionnel à l'hydrogramme observé

Supposons tout d'abord qu'un modèle puisse fournir un hydrogramme calculé dont tous les débits soient proportionnels aux débits observés. Cette hypothèse implique un synchronisme parfait des deux hydrogrammes.

En général, pour une période relativement longue, une série de débits simulés proportionnelle à une série observée peut correspondre à des valeurs inexactes de paramètres comme l'évapotranspiration ou l'interception. Par contre, sur une période de quelques jours ou même de quelques semaines, la cause pourrait être une valeur erronée de l'humidité initiale du sol ou dans le cas de la fonte des neiges, une mauvaise évaluation du stock de neige initial.

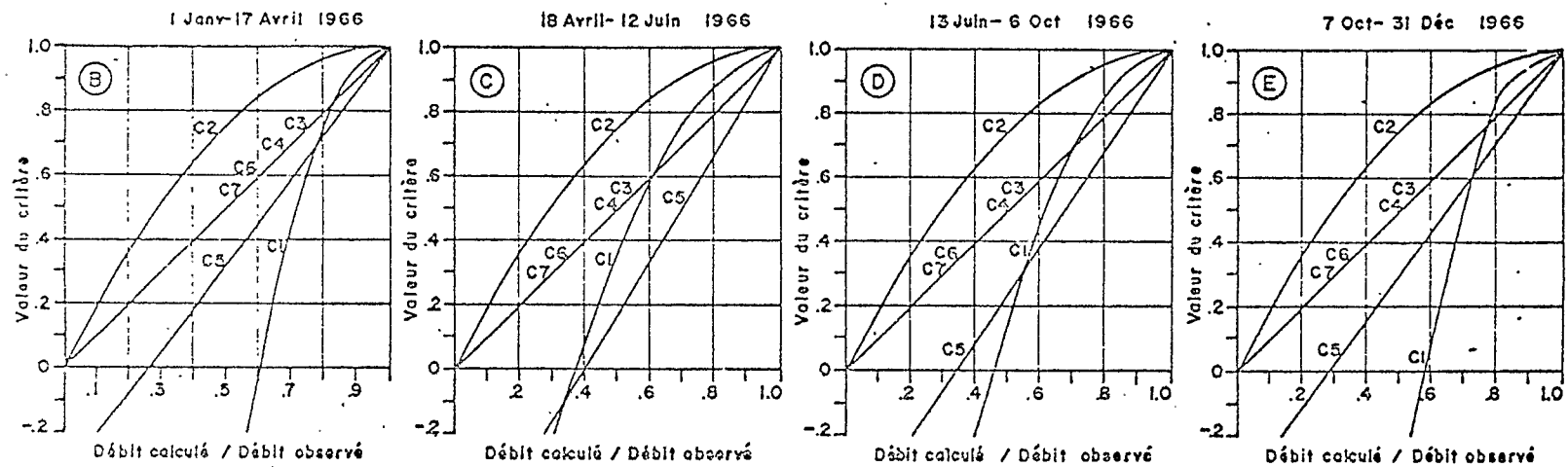


Fig 1B à 1E : Sensibilité des critères selon les périodes.

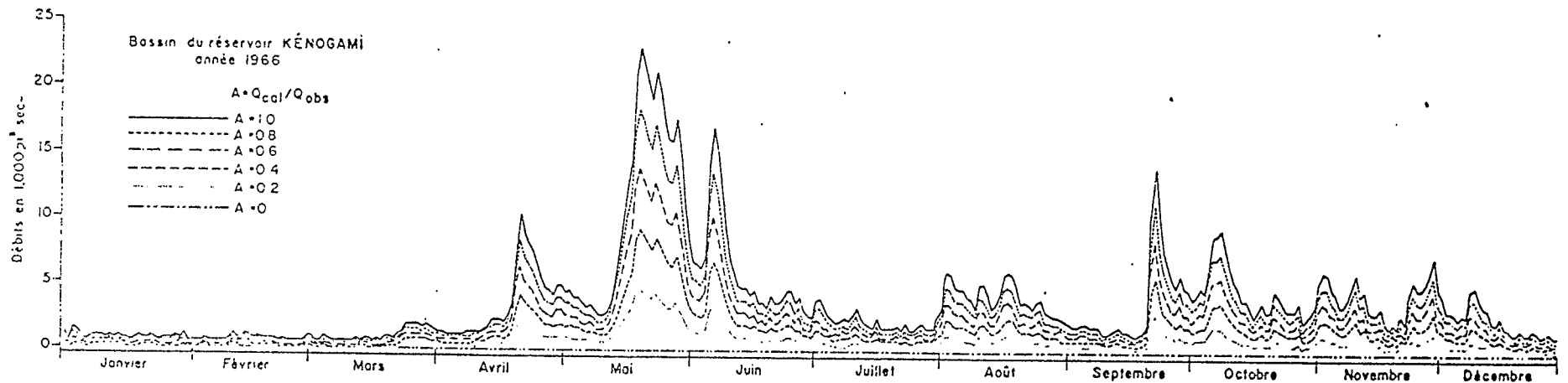


Fig 1. Hydrogramme simulé proportionnel à l'hydrogramme observé

Afin de vérifier la sensibilité des critères, nous avons choisi les débits moyens quotidiens du bassin du réservoir Kénogami au Québec pour l'année 1966. Ce bassin a une superficie de 1270 milles carrés. Les débits simulés ont été obtenus en multipliant chacun des débits observés par un facteur A, variant de 0 à 2.

Si nous nous reportons à la figure 1, nous constatons que les critères  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$ ,  $C_6$  et  $C_7$  ne varient pas en fonction de la période étudiée. Que nous soyons en étiage (figure 1-b) ou en période de fortes crues (figure 1-c) ces critères ne sont donc fonction que du rapport des débits de cette période. Comme ce rapport demeure le même toute l'année, les valeurs des critères ne varient pas.

Le critère  $C_5$  est légèrement affecté par le changement de régime, sa valeur ayant tendance à diminuer plus rapidement en fonction de la précision de la reproduction en crue qu'en étiage.

Quant au critère  $C_1$ , il est facile de voir que c'est le plus sensible de tous, mais aussi celui qui varie le plus d'une période à l'autre. Ces caractéristiques jouent à la fois à l'avantage et au désavantage de ce critère, lorsqu'il s'agit d'optimiser sur le volume.

En effet, dans une simulation s'étendant sur une durée d'une année, considérons une période d'étiage et cherchons à calculer la précision de la reproduction de cette période. Selon que le débit moyen choisi  $\bar{Q}_0$  sera celui de la seule période d'étiage ou par exemple, le débit moyen annuel, l'écart type ne sera pas le même et par conséquent la valeur du critère changera. Ce critère pourrait



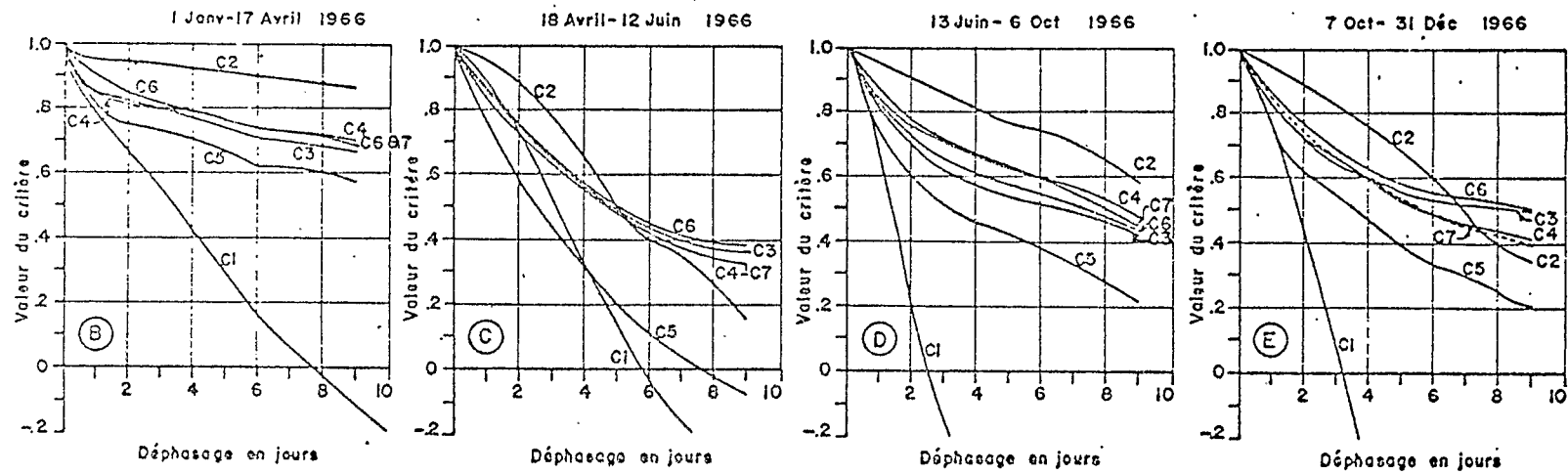


Fig 4B à 4E : Sensibilité des critères selon les périodes.

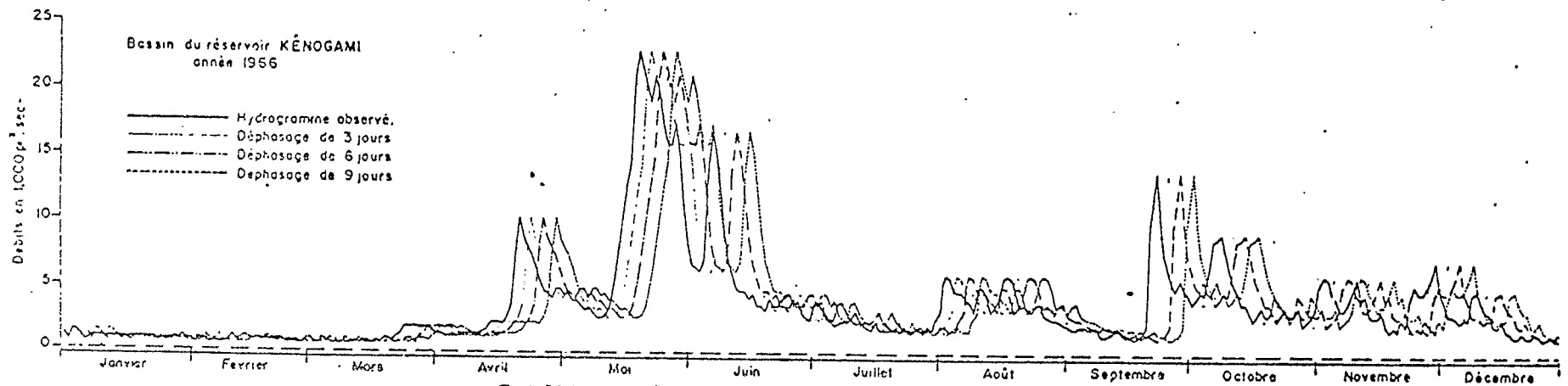


Fig 4. Déphasage de l'hydrogramme simulé par rapport à l'hydrogramme observé.

même passer d'une valeur fortement négative à une valeur près de l'unité.

Il semble donc que si nous désirons un critère qui puisse quantifier nos observations visuelles, les critères  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$ ,  $C_6$  ou  $C_7$  seraient préférables aux deux autres. Le critère  $C_5$  par contre aurait plus de sensibilité tout en donnant des valeurs s'accordant de façon satisfaisante à une observation visuelle.

## 2) Addition de variations aléatoires à l'hydrogramme observé

Si un jour on peut arriver à un modèle parfait, les hydrogrammes observés ne seront pas nécessairement reproduits exactement. Les données, précipitation, température et autres comporteront sans doute encore une part d'incertitude (Charbonneau, 1970).

Nous avons voulu vérifier comment les critères suggérés réagissaient à des variations aléatoires de ce type. Aussi, nous avons imposé à notre série de débits observés des variations aléatoires maximales de  $\pm 10$ ,  $\pm 20$ ,  $\pm 30$ , ...  $\pm 100\%$ . Une comparaison des débits "simulés" et des débits observés, figure 2-a, démontre que le synchronisme des débits peut être affecté de même que la forme générale des courbes, le volume demeurant essentiellement le même.

En pratique, des variations aléatoires qui produiraient des variations de débit de 100% devraient être moins fréquentes que celles qui donnent lieu à des variations du débit de 10 à 20%. Les figures 2-b à 2-e permettent de constater que les critères  $C_1$  et  $C_2$  réagissent

très peu à ces faibles variations. Les autres critères, particulièrement  $C_5$  variant à peu près linéairement semblent plus aptes à les détecter. Notons encore que  $C_1$  peu sensible aux faibles variations le devient dès que ces dernières atteignent plus de 20% du débit observé. Cette sensibilité est plus grande en période d'étiage qu'en période de crue, comme il fallait s'y attendre.

Par conséquent, si nous désirons un critère qui réagisse bien aux faibles variations et quantifie nos observations, il y aurait lieu d'éliminer les critères  $C_1$  et  $C_2$  au profit des autres et surtout de  $C_5$ . Autrement, le critère  $C_1$  pourrait être le critère à adopter.

### 3 - Addition de variations aléatoires

#### à un hydrogramme simulé proportionnel à l'hydrogramme observé

Les modèles ne sont pas parfaits et les données non plus. Nous avons donc ajouté des variations aléatoires d'amplitude maximale égales à  $\pm 20\%$  à des séries de débits "simulés" proportionnels à la série observée (figure 3-A) de façon à combiner les effets de ces deux sources d'erreur. Toutefois, nous avons supposé qu'à part un faible déphasage créé par ces variations, le modèle donnait lieu à des temps de concentration exacts.

Comparons la figure 3 avec la figure 1, et plus particulièrement les parties qui décrivent la sensibilité des critères selon les périodes. Nous constatons que tant que le rapport des débits est inférieur à environ .7 ou .8 (supérieur à 1.2 ou 1.3) les critères prennent des valeurs sensiblement identiques. Dans cette gamme de reproduction, les critères sont donc beaucoup plus sensibles au rapport des débits simulés qu'à des variations aléatoires allant jusqu'à  $\pm 20\%$ .

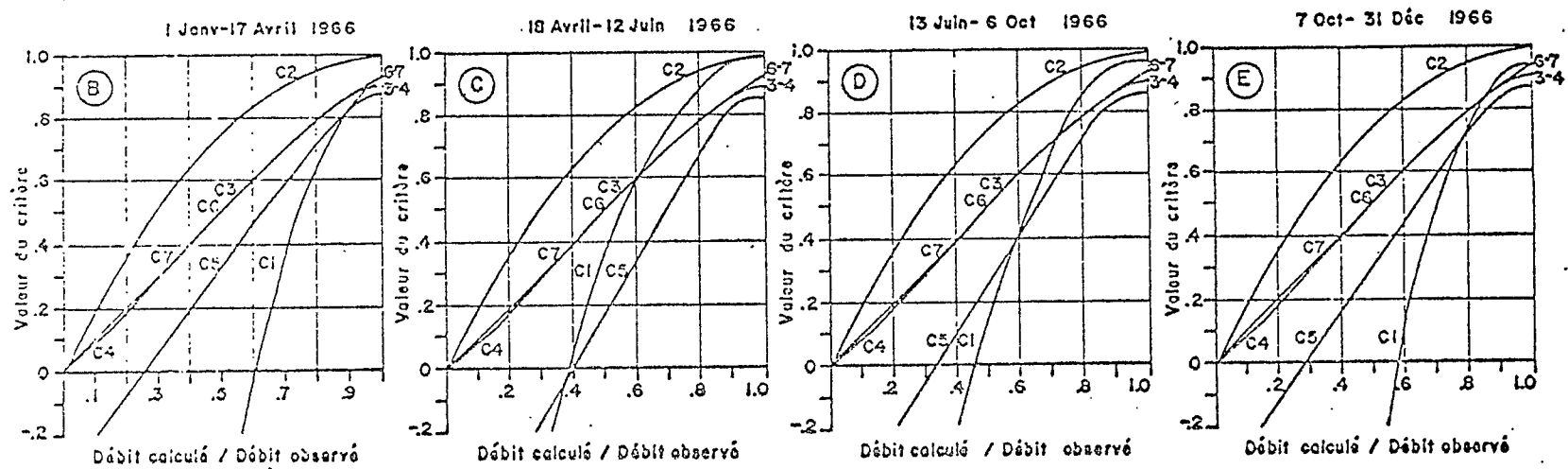


Fig 3B à 3E : Sensibilité des critères selon les périodes.

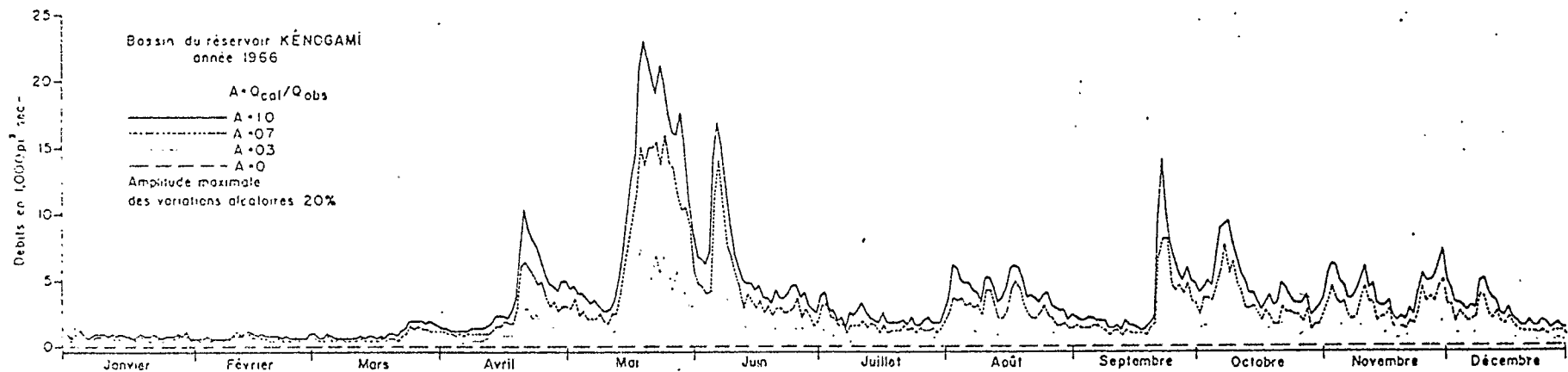


Fig 3. Addition de variations aléatoires à un hydrogramme simulé proportionnel à l'hydrogramme observé.

Pour des rapports de débits supérieur à .7 ou .8 c'est au contraire les variations aléatoires qui prennent le pas et les valeurs des critères ne sont plus les mêmes d'un cas à l'autre.

Notons encore que pour un rapport égal à un, les critères  $C_1$  et  $C_2$  détectent moins la présence de variations aléatoires que les autres critères.

Selon les buts poursuivis on aura donc avantage à choisir ou rejeter  $C_1$  ou  $C_2$  par rapport aux autres critères.

#### 4 - Déphasage de l'hydrogramme simulé par rapport à l'hydrogramme observé

En plus des autres erreurs qu'ils peuvent commettre, les modèles n'arrivent pas toujours à bien synchroniser les pointes de crues simulées avec les pointes observées, le temps de concentration réel n'étant pas toujours le même. Nous avons voulu étudier dans quelle mesure ce déphasage affecte la valeur des critères. Pour ce faire nous avons produit des hydrogrammes "simulés" en décalant l'hydrogramme observé de 1 à 9 jours vers la droite (figure 4-a) Nous considérons donc que la seule erreur commise est due au déphasage.

Si nous nous reportons aux figures 4-b à 4-c, nous remarquons la grande sensibilité de  $C_1$  qui varie très fortement même en période d'étiage. Dans le cas où notre seul but serait d'optimiser le temps de concentration, ce critère pourrait être conseillé. Toutefois, surtout en période d'étiage, les valeurs prises par ce paramètre ne seraient

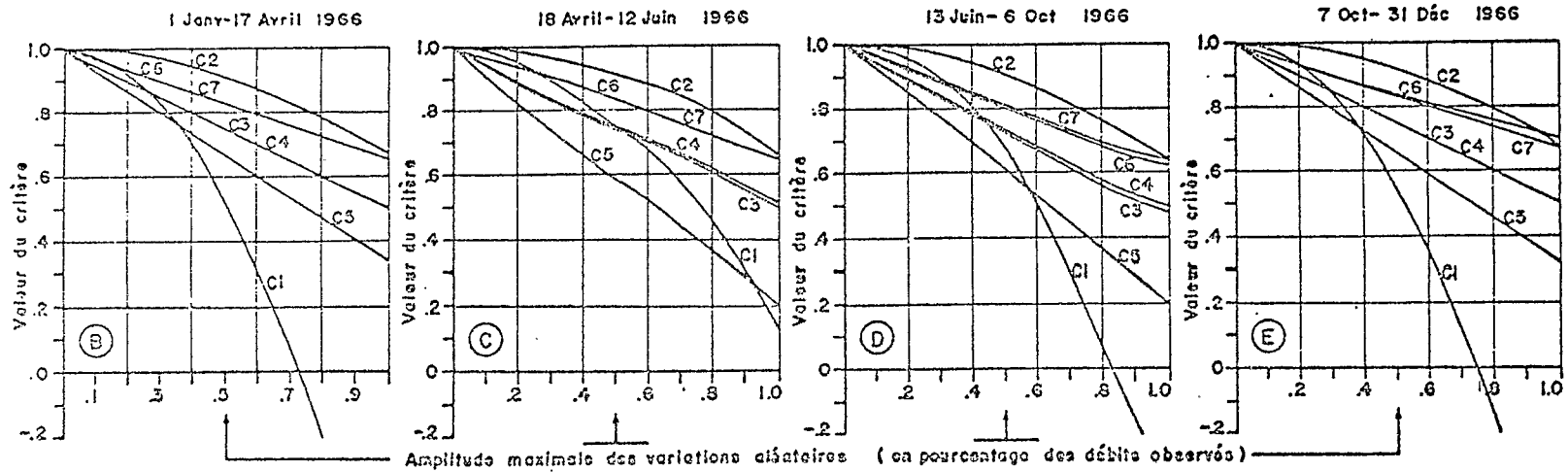


Fig 2B à 2E : Sensibilité des critères selon les périodes.

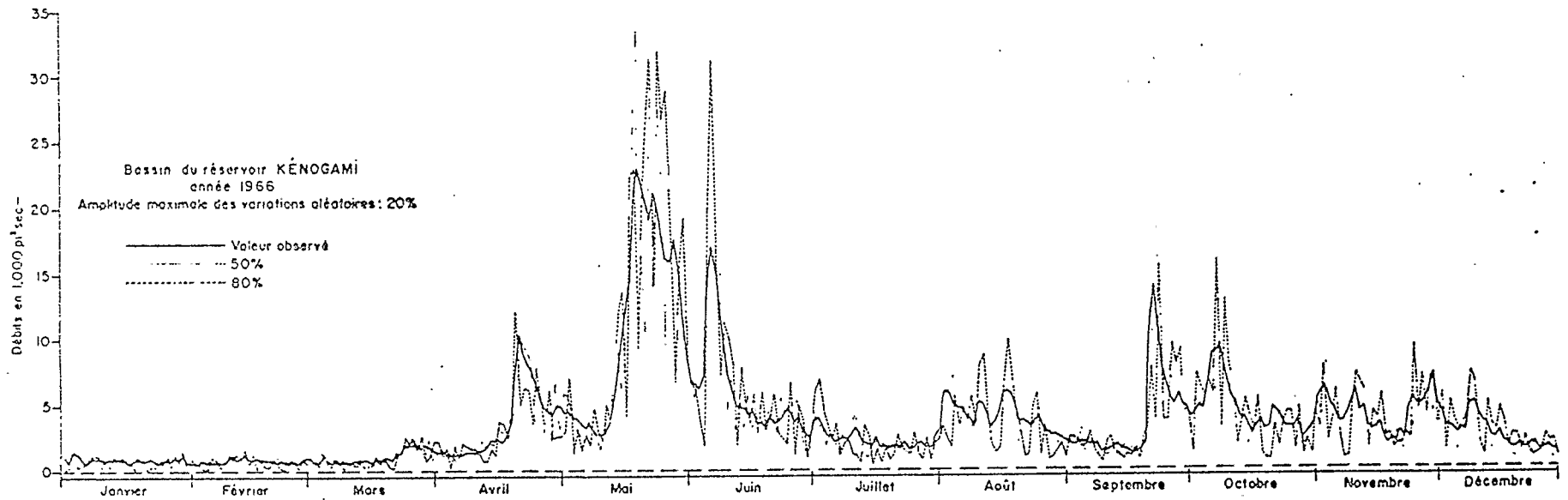


Fig 2. Addition de variations aléatoires à l'hydrogramme observé.

pas le reflet quantifié d'une observation visuelle.

Les autres critères nettement moins sensibles que  $C_1$ , possèdent néanmoins la qualité de varier différemment selon qu'il s'agisse d'une crue ou d'un étiage (figures 4-b et 4-c).

Nous observons notamment que la variation de  $C_5$  en fonction du déphasage est beaucoup plus grande en période de crue qu'en période d'étiage, accordant aussi plus d'importance aux crues. Ce mode de variation est un avantage.

#### CONCLUSION

L'analyse de la sensibilité des critères fait ressortir l'importance de bien choisir le critère en fonction des buts poursuivis. En particulier, si le critère retenu doit servir à la fois à quantifier nos observations et à optimiser les paramètres, nous suggérons que le critère  $C_5$  devrait être considéré. Toutefois, quelque soit notre choix, il y a lieu de nous assurer que le critère choisi est bien celui qui aura la sensibilité voulue en fonction de la variation du paramètre étudié.

Ainsi, un critère formé à partir d'un volume peut être plus sensible qu'un critère basé sur la variance résiduelle lorsque nous optimisons un paramètre comme le coefficient à attribuer aux données d'un bac d'évaporation (Charbonneau, 1970).

BIBLIOGRAPHIE

1. Charbonneau R., Fortin J.P., Girard G., 1971. Précision et sensibilité des modèles paramétriques. **Huitième symposium canadien sur l'hydrologie**, Québec 26 et 27 mai 1971. A paraître.
2. Dawdy D.R., and Lichty R.W., 1968. Methodology of hydrologic model building, Symposium on the use of analog and digital computers in hydrology. Pub. no 81 AIHS p. 347-355.
3. Lichty R.W., Dawdy D.R. and Bergman J.M., 1968. Rainfall-runoff model for small basin flood hydrograph simulation. Symposium on the use of analog and digital computers in hydrology. Pub. no 81 AIHS p. 356-367.
4. Mandeville A.N., O'Connell P.E., Sutcliffe J.V. and Nash J.E., 1970. River flow forecasting through conceptual models, Part III The Ray Catchment at Grendon Underwood, J. of Hydrology 11 p. 109-128.
5. Nash. J.E., 1969. A course of lectures on parametric or analytical hydrology. Great Lakes Institute. University of Toronto Pr 38. Lecture no 12.
6. O'Connell P.E., Nash J.E. and Farrell, J.P., 1970. River flow forecasting through conceptual models, Par II. The Brosna catchment at Ferbane. J. of Hydrology 10, p. 317-329.