

Journées du programme Environnement, Vie et Sociétés (15-17 Janvier 1996) :

"Tendances nouvelles en modélisation pour l'environnement"

**FRACTALS, THEORIE DE LA PERCOLATION ET STRUCTURES DES SOLS :
UNE APPROCHE PHYSIQUE UNIFIEE POUR LA MODELISATION
DES COURBES DE RETENTION D'EAU ET DES TRANSFERTS ?**

V. GOMENDY ⁽¹⁾, F. BARTOLI ⁽¹⁾, B. PECHARD-PRESSON ⁽²⁾, H. VIVIER ⁽²⁾, V. PETIT ⁽²⁾,
N. BIRD ⁽³⁾, S. NIQUET ⁽⁴⁾, E. PERRIER ⁽⁵⁾, J.J. ROYER ⁽⁶⁾ et T. LEVIANDIER ⁽⁷⁾

(1) Centre de Pédologie Biologique, UPR 6831 du CNRS associée à l'Université Henri Poincaré - Nancy I, BP 5, 54 501 Vandoeuvre-les-Nancy

(2) Laboratoire des Sciences du Génie Chimique, UPR 6811 du CNRS, Nancy

(3) Silsoe Research Institute, Silsoe Bedford (Royaume Uni)

(4) Centre Interrégional de Ressources Informatiques de Lorraine, Vandoeuvre-les-Nancy

(5) Centre ORSTOM d'Ile de France, Bondy

(6) C. R. P. G., UPR 6821 du CNRS, Vandoeuvre-les Nancy

(7) Division Hydrologie du CEMAGREF, Antony

Remerciements : Les résultats de recherches préliminaires qui pourront être exposés au cours de ces Journées ont été acquis dans le cadre du Comité "Méthodes, modèles et théories" du programme Environnement, Vie et Sociétés du CNRS, du GDR "analyse et modélisation des systèmes fluviaux anthropisés" (programme PIREN Seine) et du programme Alliance.

Dans les écosystèmes, les sols sont des réacteurs physico-chimiques et biologiques qui peuvent jouer leur rôle de filtre actif si les apports polluants sont limités. Mais, dans les écosystèmes perturbés (agrosystèmes et milieux urbains), les contaminants minéraux et organiques qu'ils reçoivent présentent de plus en plus un danger à court et à long terme pour la qualité des eaux continentales et des végétaux destinés à la consommation humaine et animale. *Les sols ne peuvent pas être purifiés comme l'air et l'eau et l'établissement de modèles de prévision pourrait limiter les dommages.*

Les **modélisations des courbes de rétention d'eau des sols**, et tout particulièrement de leurs horizons de surface, interfaces réactionnelles majeures entre le sol, la plante, l'atmosphère et l'hydrosphère, sont ainsi essentielles en Hydrologie. Trois grands types d'approches permettent de modéliser les courbes de rétention d'eau en fonction du potentiel matriciel : les modèles mathématiques empiriques, les fonctions de pedo-transfert et les modèles structuraux fractals.

La première approche consiste à sélectionner une *fonction mathématique* dont les valeurs de paramètres sont déterminés par régression non-linéaire sur les données étudiées. Parmi ces fonctions mathématiques, les plus largement utilisées sont celles de Brooks et Corey (1964) (1) et de van Genuchten (1980) (2) :

$$\theta(P) - \theta_r / \theta_s - \theta_r = (P_{\min}/P)^\lambda \quad \text{ou :} \quad \theta(P) \propto P^{-\lambda} \quad \text{pour } P > P_{\min} \quad (1)$$



Fonds Documentaire ORSTOM
Cote : B y 7961 Ex : 1

$$\theta(P) - \theta_r / \theta_s - \theta_r = (1 + (\alpha P)^n)^{-m} \quad \text{ou} \quad \theta(P) \propto (1 + (\alpha P)^n)^{-m} \quad \text{pour } P > 0 \quad (2)$$

dans lesquelles $\theta(P)$ (mesurée), θ_s et θ_r (déterminées par ajustement de la courbe de rétention d'eau) sont les teneurs volumétriques de l'eau du sol correspondant à un potentiel matriciel P , à la saturation et à la saturation résiduelle (souvent prise égale à zéro), respectivement, P_{\min} est la pression d'entrée d'air, λ est un paramètre d'ajustement relié à la distribution des tailles de pores, α , n and m sont d'autres paramètres d'ajustement des courbes de rétention d'eau.

La seconde approche consiste à déterminer une *fonction de pedo-transfert* pour prédire les paramètres des équations (1) et (2) en utilisant d'autres caractéristiques des sols tels l'analyse granulométrique, la porosité et la teneur en carbone organique (par exemple Rawls et Brakensiek, 1985; Vereecken *et al.*, 1989). En utilisant le concept de similarité de forme des courbes de rétention d'eau et de distribution granulométrique cumulée, Arya et Paris (1981) et Haverkamp et Parlange (1986) ont également proposé une fonction de pédo-transfert à signification physique empirique.

La troisième *approche, fractale* (Mandelbrot, 1982; Feder, 1988; Gouyet, 1992) permettrait de modéliser les courbes de rétention d'eau, à l'aide d'invariants d'échelle : les dimensions fractales. De façon pionnière, de Gennes (1985) avait simulé le remplissage, par un liquide mouillant, de deux familles différentes de milieux poreux modèles, à *interfaces solides-pores fractales*. Dans chaque cas, utilisant la loi de Laplace, il avait obtenu les proportionnalités suivantes :

$$S \propto P^{D_s-3} \quad (3) \quad \text{ou} :$$

$$\theta(P)/\theta_s \propto (P_{\min}/P)^{3-D_s} \quad \text{ou} : \quad \theta(P) \propto P^{D_s-3} \quad (4)$$

dans lesquelles $S = \theta(P)/\theta_s$ est le taux de saturation et D_s est la dimension fractale de l'interface solides-pores.

Toledo *et al.* (1990) ont aussi établi que l'éponge fractale de Menger suivait cette proportionnalité (4), lorsqu'on la saturait plus ou moins d'eau. Ils ont donc suivi la conclusion de de Gennes selon laquelle l'équation (4) s'appliquerait à tout milieu poreux désordonné possédant des interfaces solide-pores rugueuses et fractales, selon une certaine gamme d'échelles. Cette proportionnalité a pu être effectivement validée par Toledo *et al.* (1990), dans des sols sableux et dans la gamme d'échelles imposées par les potentiels matriciels choisis, ce qui a donné une signification physique à la relation mathématique de Brooks and Corey ($\lambda = 3 - D_s$).

Par ailleurs, Tyler and Wheatcraft (1990), en utilisant le tamis fractal de Sierpinski et l'équation de Laplace, sont parvenus, par une autre voie, à l'expression analytique suivante :

$$\theta(P)/\theta_s \propto (P_{\min}/P)^{2-D} \quad \text{ou} : \quad \theta(P) \propto P^{2-D} \quad (5)$$

qui est similaire, en deux dimensions, à la proportionnalité (4).

Cette dimension fractale D augmente avec la teneur en argiles, ce qui a été confirmé par Brakensiek et Rawls (1992) pour une gamme très étendue de sols américains appartenant à 11 classes granulométriques : la dimension fractale D augmente alors de façon non-linéaire, de 1.41 à 1.87, en fonction de la teneur en argiles. Nos propres résultats, portant sur une gamme réduite de sols limoneux, sont analogues.

Mais une *analyse mathématique critique* (Perrier, 1994; Bird *et al.*, 1995) vient de révéler que ce type de loi puissance (proportionnalité (4)) n'est pas rigoureusement exacte car il manque des constantes d'intégration, ce que ces auteurs ont démontré en combinant l'équation de Laplace et les équations issues de l'intégration des deux proportionnalités suivantes :

$$dV_p/dR \propto -R^{2-D_s} \quad (6)$$

$$dv_p/dR \propto R^{2-D_s} \quad (7)$$

dans lesquelles V_p est le volume de pores dont les rayons de constriction sont supérieurs à R , $v_p(R)$ est le volume poreux complémentaire composé de pores de rayons inférieurs à R et D_s la dimension fractale de l'interface solide-pores ($2 < D_s < 3$).

La proportionnalité (6) a été établie à partir du modèle fractal déterministe de l'éponge de Menger (Pfeifer et Avnir, 1983; Friesen et Mikula, 1987), d'un modèle poreux fractal statistique (Friesen et Laidlaw, 1993) ou d'une approche topologique (Fripiat, 1989). Mais des milieux poreux fractals de masse solide peuvent aussi satisfaire cette proportionnalité (6). Dans ce cas, la valeur de la dimension fractale est inférieure à 2 (Friesen et Mikula, 1987; Ehrenburger-Dole *et al.*, 1991).

Bird *et al.* (1995) ont ainsi pu notamment établir la proportionnalité suivante, dans le cas où tous les pores appartiennent au domaine fractal :

$$\theta(P) \propto P^{-2} B (P_{\max}^{(D-1)} - P_{\min}^{(D-1)}) / (D-1) \quad \text{avec } B = \text{constante inférieure à } 1 \quad (8)$$

Cette fonction puissance a un exposant égal à la fonction de désaturation des pores, indépendant de la dimension fractale D , qu'elle soit de surface ou de masse solide.

Par ailleurs, la dérivation de fonctions de rétention pour des modèles de milieux poreux fractals de pore permet de démontrer que, pour de tels milieux fractals, les courbes de rétention dérivées ne peuvent pas être modélisées par de simples lois puissance (Bird *et al.*, 1995).

Un autre modèle fractal des courbes de rétention d'eau est le *modèle fractal de fragmentation incomplète de Rieu et Sposito* (1991_{a,b}), dans lequel D_r est une dimension fractale de masse solide :

$$\theta(P) = (P_{\min}/P)^{3-D_r} - (1 - \theta_s) \quad (9)$$

Ce modèle a été validé sur une gamme de données structurales et hydriques obtenus sur un seul sol limoneux (Rieu et Sposito, 1991_b) ainsi que par des simulations numériques de drainage d'un liquide mouillant dans des réseaux fissurés connectés fractals (Perrier, 1994).

De façon complémentaire, une revue bibliographique et les résultats de notre propre groupe de recherche révèlent que les sols sont généralement des fractals de masse solide (Bartoli *et al.*, 1995), ce qui tend à conforter ce type de modèle fractal structural. Dans une gamme d'échelles bien définies, la porosité d'un sol ϕ suit donc la loi d'échelle suivante, en fonction de la jauge R :

$$1 - \phi(R) \propto R^{D_m - 3} \quad (10), \text{ en trois dimensions}$$

Cette modélisation de la porosité, en fonction de la dimension fractale de masse solide, a été validée sur un gamme étendue d'images binaires de micrographies MEB de lames minces de sols ainsi que sur des gammes de mesures de densités apparentes de mottes ou d'agrégats de sols de différentes tailles, les sols argileux étant nettement moins hétérogènes que les sols limoneux et surtout sableux (Bartoli *et al.*, 1995). Réciproquement, à une échelle d'observation donnée, correspondant à

celle des processus de rétention d'eau, la porosité diminue de façon non-linéaire en fonction de la dimension fractale de masse solide (Bartoli *et al.*, 1995).

Ce résultat est important mais doit être nuancé au vue de la *complexité des phénomènes de régulation de la pression capillaire macroscopique* qui dépendrait de 11 paramètres physiques et physico-chimiques (Hassanizadeh et Gray, 1993), notamment de la porosité, dont nous avons mieux cerné l'hétérogénéité et les lois d'échelle grâce à la géométrie fractale, et de la surface spécifique interfaciale solide-liquide, dépendant à la fois de paramètres géométriques (rugosités, à différentes échelles, des interfaces solides-pores) et de paramètres physico-chimiques tel l'énergie d'adhésion liquide-solide.

Même en ne restant qu' au seul niveau des paramètres géométriques régulant la pression capillaire macroscopique, *la réalité complexe des structures de sols s'avère être difficile à quantifier, mais la géométrie fractale et la théorie de la percolation sont des outils prometteurs dans ce domaine.* C'est ainsi que la comparaison des données de distribution de volumes poreux, en fonction de leur rayon moyen équivalent, effectuées par porosimétrie mercure et par analyse d'image révèle une forte divergence des résultats, attribuables aux seuils de percolation, déterminés par ailleurs par porosimétrie mercure sur une gamme de micro-mottes de sols de différentes tailles ou sur une gamme de parallépipèdes de sols de même section carrée mais de hauteurs différentes.

De même, les interfaces solides-pores d'une gamme de sols limoneux s'avèrent ne pas obéir aux lois de la géométrie fractale aux échelles d'observation correspondant à celles des courbes de rétention d'eau par drainage, que ce soit par porosimétrie mercure (méthode de la distribution des volumes poreux) ou par analyse d'image (méthode des cordes : logiciel développé par le LSGC) (Bartoli *et al.*, 1995). Ceci serait notamment attribuable au manque de hiérarchie du réseau poral, de fins capillaires débouchant directement dans de vastes "chambres porales", complexes.

Par contre, la proportionnalité (10) a pu être validée et utilisée pour calculer la dimension fractale de masse solide D_m sur des données homologues d'analyse d'image, de porosimétrie mercure et de rétention d'eau. Ces dimensions fractales de masse solide D_m augmentent toutes, de façon non-linéaire, avec la teneur en argiles, mais augmentent aussi des données d'analyse d'image à celles de porosimétrie mercure puis enfin à celles de rétention d'eau, en divergeant d'autant plus que le milieu poreux est plus pauvre en argiles. Des mesures de mouillabilité et de connectivité de pores sont en cours afin d'expliquer ces divergences.

De plus, ces invariants d'échelle, tout comme les porosités correspondantes, évoluent de façon saisonnière, en fonction des cycles d'humectation-dessiccation.

Enfin, les **modélisations physiques des fonctions de transfert d'eau dans les sols utilisant la géométrie fractale et la théorie de la percolation** sont aussi de nouvelles approches prometteuses en matière de recherche sur l'environnement.

La loi d'Archie (1942), modèle mathématique empirique reliant la perméabilité G à la porosité Φ via une loi puissance ($G \propto \Phi^m$) a été ainsi reformulée de façon plus physique.

C'est ainsi par exemple que Muller et MacCauley (1992) ont utilisé un modèle hiérarchique déterministe de pores fractals pour dériver la proportionnalité suivante :

$$G \propto \Phi^{(2-D)D} \quad (11)$$

dans laquelle D est la dimension fractale hiérarchique du modèle.

De façon analogue, mais expérimentale, Hatano *et al.* (1992) ont établi la relation suivante :

$$B = 0.028\Phi^{-D_p} + 4.673D_s - 7.249 \quad (12)$$

dans laquelle B est le nombre de Brenner de transfert de chlorure dans le sol, calculé selon une loi empirique reliant volumes poreux et concentrations relatives, D_p et D_s sont les dimensions fractales d'interface solides-macropores et de macropores, respectivement, déterminées par analyse d'image.

Les recherches en cours dans ce domaine font intervenir la *connectivité des pores du sol*, facteur clé de la modélisation physique des transferts dans les milieux poreux.

La simulation numérique du transfert d'un liquide mouillant dans un fractal statistique de masse solide a récemment conduit Crawford (1994) à établir la loi puissance d'échelle suivante :

$$K \propto L^{D_m - 2(D_m/d_s) - (2-D)D} \quad (13)$$

dans laquelle K est la conductivité hydraulique, L est la jauge géométrique, D_m la dimension fractale de masse solide et d_s la dimension spectrale (Gouyet, 1992). Mais le passage d'une jauge géométrique à une pression capillaire macroscopique s'avère être complexe (voir plus haut et Crawford, 1994). Ce résultat théorique est analogue à celui, plus général, reliant la conductance $G(r)$ à la structure d'un milieu poreux (Gouyet, 1992):

$$G(r) \propto r^{-D_m/d_s(2-d_s)} \quad (14)$$

Dans notre groupe de recherche, en s'inspirant du livre de Gouyet (1992), le LSGC a développé un logiciel d'analyse d'image permettant d'avoir accès aux paramètres clés de la théorie de la percolation, notamment la *longueur de corrélation*, qui est le rayon de giration moyen de tous les amas de pores finis. Cette longueur de corrélation dépend de la gamme d'échelles d'observation choisie, du type de sol et de la variabilité saisonnière des propriétés structurales, elles-mêmes fonction des cycles d'humectation-dessiccation (résultats évoqués au cours de l'exposé).

De façon complémentaire, la méthode des carrés emboîtés et la fonction de corrélation de paire centrées appliquées au macropore de transfert étudié (logiciel d'analyse d'image développé par le CIRIL) permettent de calculer des *dimensions fractales de propagation* de pore D_{pr} .

De plus, l'étude de la distribution des cordes entre les masses (solides ou porales) (logiciel mis au point par le LSGC) permettant d'avoir éventuellement accès à une dimension fractale de surface D_s (Bartoli *et al.*, 1995, van Damme, 1995) s'avère également être un outil pertinent de caractérisation des *interfaces solides-pores*, dans l'optique d'une modélisation physique des transferts dans les sols. Ces interfaces s'avèrent être complexes et souvent non-fractales.

Enfin, différentes caractérisations structurales sont en cours pour essayer de différencier la *part due aux macro-géométries connectées relativement déterministes (pores de transfert privilégié) de celle due à des géométries plus microscopiques et relativement plus aléatoires (pores de rétention et de transfert lent)* (résultats évoqués au cours de l'exposé).

References

- Arya, L.M. and Paris, J.F., 1981. A physicoempirical model to predict the soil moisture characteristic from particle-size distribution and bulk density data. *Soil Science Society of America Journal*, **45** : 1023-1030.
- Bartoli, F., Dutartre, Ph., Gomendy, V., Niquet, S., Dubuit, M. and Vivier, H., 1995. Fractals and soil structure. In : P. Baveye, J.Y. Parlange and B.A. Stewart (Editors), *Fractals and Chaos in Soil Science*. Advances in Soil Science (à paraître).
- Bird, N.R.A., Bartoli, F. and Dexter, A.R., 1995. Water retention models for fractal structures. *European Journal of Soil Science* (accepté).
- Brakensiek, D.L. and Rawls, W.J., 1992. Comments on "fractal processes in soil water retention" by Scott W. Tyler and Stephen W. Wheatcraft. *Water Resources Research*, **28** : 601-602.
- Brooks, R.H. and Corey, A.T., 1964. Hydraulic properties of porous media. *Hydrology Paper n° 3*, Colorado State University, Fort Collins.
- Crawford, J.W. The relationship between structure and the hydraulic conductivity of soil. *European Journal of Soil Science* **45** : 493-502.
- de Gennes, G., 1985. Partial filling of a fractal structure by a wetting fluid. In : D. Adler *et al.* (Editors), *Physics of disordered materials*. Plenum Press, New York, pp. 227-241.
- Ehrburger-Dolle F., Mors, P.M. and Jullien, R., 1991. Void size distribution in simulated fractal aggregates. *Journal of Colloid and Interface Science*, **147** : 192-205.
- Feder, J., 1988. *Fractals*. Plenum Press, New York.
- Friesen, W.I. and Mikula, R.J., 1987. Fractal dimensions of coal particles. *Journal of Colloid and Interface Science*, **120** : 263-271.
- Friesen, W.I. and Laidlaw, W.G., 1993. Porosimetry of fractal surfaces. *Journal of Colloid and Interface Science*, **160** : 226-235.
- Fripiat, J.J., 1989. Porosity and adsorption isotherms. In : D. Avnir (Editor), *The Fractal Approach to Heterogeneous Chemistry. Surfaces, Colloids, Polymers*. Wiley, New York, pp. 331-340.
- Gouyet, J.F., 1992. *Physique et structures fractales*. Masson, Paris.
- Hassanizadeh, S.M. and Gray, W.G., 1993. Thermodynamics of capillary pressure in porous media. *Water Resources Research* **29** : 3389-3405.
- Hatano, R., Kaawamura, N., Ikeda, J. and Sakuma, T., 1992. Evaluation of the effect of morphological features of flow paths on solute transport by using fractal dimensions of methylene blue staining pattern. *Geoderma*, **53** : 31-44.
- Haverkamp, R. and Parlange, J.Y., 1986. Predicting the water retention curve from particle size distribution : I. Sandy soils without organic matter. *Soil Science*, **142** : 325-339.
- Mandelbrot, B., 1982. *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman, San Francisco.
- Muller, J. and McCauley, J.L., 1992. Implication of fractal geometry for fluid flow properties of sedimentary rocks. *Transport in Porous Media* **8** : 133-147.
- Pfeifer, P., and Avnir, D., 1983. Chemistry in noninteger dimensions between two and three. I. Fractal theory of heterogeneous surfaces. *Journal of Chemical Physics*, **79** : 3558-3565.
- Rawls, W.J. and Brakensiek, D.L., 1985. Prediction of soil water properties for hydrologic modeling. *Proceedings of the Symposium "Watershed Management in the Eighties"*, 293-299, Denver.
- Rieu, M. and Sposito, G., 1991_a. Fractal fragmentation, soil porosity, and soil water properties : I. Theory. *Soil Science Society of America Journal*, **55** : 1231-1238.
- Rieu, M. and Sposito, G., 1991_b. Fractal fragmentation, soil porosity, and soil water properties : II. Applications. *Soil Science Society of America Journal*, **55** : 1239-1244.
- Stauffer, D. and Aharony, A., 1994. *Introduction in Percolation Theory*. Taylor and Francis, London.
- Toledo, P.G., Novy, R.A., Davis, H.D. and Scriven, L.E., 1990. Hydraulic conductivity of porous media at low water content. *Soil Science Society of America Journal*, **54** : 673-679.
- Tyler, S.W. and Wheatcraft, S.W., 1990. Fractal processes in soil water retention. *Water Resource Research*, **26** : 1047-1054.
- van Damme, H., 1995. Scale invariance and hydric behaviour of soils and clays. *Comptes Rendus à l'Académie des Sciences*, Paris, **320**, Series II a : 665-681.
- van Genuchten, M. Th., 1980. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Science Society of America Journal*, **44** : 892-898.
- Vereecken, H., Maes, J., Feysen, J. and Darius, P., 1989. Estimating the soil moisture retention characteristics from texture, bulk density, and carbon content. *Soil Science*, **148** : 389-403.

Tendances nouvelles

**EN MODÉLISATION
POUR L'ENVIRONNEMENT**

cité des Sciences et de l'Industrie, Paris
les 15, 16 et 17 janvier 1996

**ACTES DES JOURNÉES DU PROGRAMME
ENVIRONNEMENT, VIE ET SOCIÉTÉS**

COMMUNICATIONS ORALES

SESSION A : Problèmes de modélisation,
conceptualisation, agrégations d'échelles,
assimilation de données.



CENTRE NATIONAL
DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE