

# Résolution d'un problème aux limites elliptique par une méthode de lissage hiérarchique de résidu

Aurélien GOUDJO, Maître-Assistant  
(Université Nationale du Bénin)  
B.P. 526 COTONOU (BENIN)

**Mots clefs :** Algorithme multi-niveau, Euler, Runge Kutta, Facteur d'amplification, Lissage hiérarchique.

## Résumé

Dans ce travail nous avons construit et analysé grâce à la méthode de von Neumann des schémas multi-niveaux pour la résolution numérique d'un problème aux limites de type elliptique.

Nous utilisons à cet effet la technique dite de lissage hiérarchique de résidu. En partant de la méthode d'Euler ou celle de Runge Kutta d'ordre 4, nous avons construit des schémas à deux ou trois niveaux puis étudié leurs compositions.

Des expériences monodimensionnelles nous ont permis de tester l'efficacité de ces schémas.

## Abstract

The first goal of this work consists to build and analyse a class of multi-level schemes for iterative matrix resolution from elliptic boundary problems.

A approach referred as Hierarchical Residual Averaging, is performed. Three levels schemes are constructed and one dimensional experiences are presented.

## 1 Introduction

Soit  $\Omega$  un ouvert connexe de  $\mathbf{R}^n$   $n \leq 3$ . Soit  $\mathcal{H}$  un sous espace de Hilbert de  $L^2(\Omega)$ . Soit  $F$  un opérateur sur  $\mathcal{H}$ . Ce qui nous occupe ici est de chercher une approximation numérique du problème

*On cherche  $u \in \mathcal{H}$  tel que  $F(u) = 0$  sachant qu'il existe  $\alpha > 0$  pour que  $\alpha F + Id_{\mathcal{H}}$  soit une contraction*

Soit  $\Omega_h$  le réseau associé au domaine  $\Omega$ . Soit  $F_h : \mathbf{R}^m \mapsto \mathbf{R}^m$  la forme discrète de l'opérateur  $F$ . Soit  $U_h \in \mathbf{R}^m$  la solution discrète.

Pour une classe donnée d'opérateurs, nous voulons construire et utiliser des méthodes itératives mettant en œuvre des schémas d'accélération de convergence basés sur des méthodes de lissage hiérarchique de résidu. Cette approche tient à la fois des méthodes classiques de multigrille (Mac Bryan [1]) et des méthodes de lissages polynomiaux de type Chebychev (van der Houwen [2]).

Ici nous n'aurons pas à gérer la complexité liée à l'existence de plusieurs niveaux de grille comme c'est le cas dans les méthodes multigrilles. Cependant nous exploitons virtuellement la capacité des grilles grossières à faciliter l'atténuation de certaines fréquences intermédiaires contenues dans le résidu du problème.

### 1.1 Analogie évolutive

Rappelons que notre problème continu est stationnaire et que nous voulons utiliser des méthodes itératives pour sa résolution numérique. Donc nous adoptons une approche pseudo-stationnaire. La description de l'analogie évolutive de notre problème stationnaire pourra éclairer les choix et les généralisations que nous serons amené à faire. Nous pouvons résumer cette description par:

$$\begin{array}{rcl}
 u \in \mathcal{H} & \text{tel que} & F(u) = 0 & (1) \\
 & \Downarrow & \text{Discrétisation} & \\
 U_h \in \mathbf{R}^m & \text{tel que} & F_h(U_h) = 0 & (2) \\
 & \Updownarrow & & \\
 U_h \in \mathbf{R}^m & \text{tel que} & U_h = U_h + \alpha F_h(U_h) & (3) \\
 & \Updownarrow & & \\
 (U_h^n)_{n \in \mathbf{N}^*} \subset \mathbf{R}^m & \text{tel que} & U_h^{n+1} = U_h^n + \alpha F_h(U_h^n) & (4) \\
 & \Uparrow & \text{Méthode d'Euler} & \\
 U(t \rightarrow \infty) \in \mathbf{R}^m & \text{tel que} & \begin{cases} \frac{dU}{dt} = F_h(U) \\ U(t=0) \text{ donné} \end{cases} & (5)
 \end{array}$$

### 1.2 Remarque générale

La discrétisation spatiale du problème ne fait pas l'objet de notre étude. Pour nos applications 2-D nous utiliserons les Eléments Finis.

Dans l'analyse 1-D qui va suivre la discrétisation en espace se fera par Différences Finies.

Dans toute la suite nous noterons par  $g$  le polynôme caractéristique de la méthode de Runge Kutta linéarisée d'ordre 4. Il a la forme:

$$g(z) = \alpha_4 z \{1 + \alpha_3 z [1 + \alpha_2 z (1 + \alpha_1 z)]\}$$

où  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  sont les coefficients de la méthode. Nous utiliserons en particulier les coefficients optimisés pour permettre un pas de relaxation plus grand

que les classiques et apparus dans la thèse de Marie Hélène LALLEMAND [3]; ce sont :

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \left( \frac{1}{10}, \frac{13}{50}, \frac{1}{2}, 1. \right)$$

## 2 Analyse monodimensionnelle

Afin de procéder à une analyse théorique simple des schémas nous allons considérer le problème d'équilibre thermique dans une barre modélisé par:

$$\begin{cases} -u_{xx} = f(x, u) & x \in ]0, 1[ \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Nous obtenons alors le problème pseudo-stationnaire

$$\begin{cases} U_t = U_{xx} + f(x, U) & (x, t) \in ]0, 1[ \times \mathbf{R}_+ \\ U(0, t) = U(1, t) = 0 & \forall t \geq 0 \\ U(x, 0) \text{ donné} & \forall x \in ]0, 1[ \end{cases}$$

Pour simplifier l'analyse, nous nous restreignons au cas où  $f$  est indépendant de la solution  $u$ . Tout se ramènera alors à une analyse mode par mode de l'erreur de la méthode.

### 2.1 Cas d'une intégration RK1 en temps

Nous adoptons une discrétisation par différences centrées en espace et le schéma d'Euler en temps. Pour un réseau régulier défini sur  $]0, 1[$  par  $h = \frac{1}{M}$  et  $x_j = jh$ ,  $j = 0, \dots, M$ , ceci donne

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} = f(x_j, U_j^n) + \frac{U_{j-1}^n - 2U_j^n + U_{j+1}^n}{h^2}$$

$$\forall j = 1 \dots, M-1 \quad \forall n \in \mathbf{N}^*$$

$U_j^n$  est une approximation de  $U(jh, n\Delta t)$ ,  $\Delta t$  étant le pas de temps. Ainsi nous avons le schéma explicite

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \sigma R_j(x_j, U_h^n) \quad \forall j = 1, \dots, M-1$$

où

$$\begin{cases} \sigma & = \frac{\Delta t}{h^2} \\ U_h^n & = (U_0^n, U_1^n, \dots, U_M^n) \\ f_j^n & \text{Une approximation de } f(x_j, u(x_j)) \\ R_j(x_j, U_h^n) & = h^2 f_j^n + U_{j-1}^n - 2U_j^n + U_{j+1}^n \end{cases}$$

Le comportement du schéma dépend du spectre de l'opérateur

$$\mathcal{L} = \sigma R = \sigma (R_j)_{j=0, \dots, M}$$

Nous avons  $U_h^{n+1} = (I + \mathcal{L})U_h^n$ . C'est la méthode d'Euler qui n'est qu'une méthode de Runge Kutta d'ordre 1.

Il est à noter que les opérateurs discrets introduits ici et dans la suite, sont des opérateurs de type Toeplitz. Donc pour tout réel  $\theta$ ,  $(e^{ij\theta})_j$  est un vecteur propre. Ainsi l'analyse du problème périodique en espace ne nous éloigne pas trop de celle du problème de Dirichlet si nous écartons temporairement les effets au bord. Nous gagnons alors en simplicité, et l'erreur de la méthode  $\epsilon^n = u - U_h^n = (\epsilon_j^n)$  admettra une représentation en série de Fourier.

### 2.1.1 Analyse de la méthode d'Euler

Pour la méthode d'Euler, l'erreur  $\epsilon = u - U_h$  sera solution de

$$\epsilon^{n+1} = \epsilon^n + \mathcal{L}(\epsilon^n) \quad \text{avec} \quad R_j(x_j, \epsilon^n) = \epsilon_{j-1}^n - 2\epsilon_j^n + \epsilon_{j+1}^n$$

Ainsi, partant de l'harmonique  $\epsilon^0 = (e^{ij\theta})_{j=0, \dots, M}$ , on a

$$\epsilon_j^{n+1} = [1 + z]\epsilon_j^n \quad \text{où} \quad z = 2\sigma(\cos \theta - 1) \in Sp(\sigma R) = Sp(\mathcal{L})$$

d'où le facteur d'amplification de la méthode d'Euler sera

$$\lambda = 1 + 2\sigma(\cos \theta - 1) = 1 + \phi(\cos \theta)$$

avec  $\phi(x) = 2\sigma(x - 1)$ .

La condition forte de stabilité spectrale de von Neumann donne

$$|\lambda| < 1 \Leftrightarrow 0 < \sigma < \frac{1}{2}$$

Le but principal du travail consiste à résoudre le problème :

*Pour une fréquence critique  $\theta_c$  donnée, trouver  $\sigma_{op}$ , tel que*

$$|\lambda(\sigma_{op}, \theta_c)| = \min_{\sigma \in [0, \sigma_{max}]} |\lambda(\sigma, \theta_c)|$$

Pour la méthode d'Euler, un lisseur haute fréquence par excellence, la fréquence critique est  $\theta_c = \pi$ . Il s'agit de trouver la solution de

$$|\lambda(\sigma_{op}, \pi)| = \min_{\sigma \in [0, \frac{1}{2}]} |\lambda(\sigma, \pi)|$$

L'atténuation optimale est obtenue pour  $\sigma_{op} = \frac{1}{4}$ .

### 2.1.2 Construction et analyse d'un schéma 2-Niveaux

Pour construire l'opérateur de transfert 2-Niveaux  $\mathcal{L}_2$ , nous procédons par barycentrage. Nous définissons à cet effet l'opérateur  $\mathcal{S}$  dans  $\mathbf{R}^{M+1}$  par

$$\mathcal{S} : R = (R_0, \dots, R_M) \in \mathbf{R}^{M+1} \mapsto \mathcal{S}(R) = (S_j)_{j=0, \dots, M} \in \mathbf{R}^{M+1}$$

avec

$$S_j = \frac{1}{4}[R_{j-1} + 2R_j + R_{j+1}] \quad \forall j = 1, \dots, M-1$$

L'opérateur  $\mathcal{S}$  est symétrique et possède donc un spectre réel.

Considérons à présent l'opérateur  $\mathcal{L}_2 = \mathcal{S} \circ \mathcal{L}$ . Son action est donnée par

$$U^{n+1} = U^n + \mathcal{L}_2(U^n) = U^n + \mathcal{S} \circ \mathcal{L}(U^n)$$

et il coûte approximativement 2 Euler.

$\mathcal{L}$  est également symétrique; le spectre  $Sp(\mathcal{L}_2) \subset \mathbf{R}$ . Si  $\lambda_{\mathcal{S}}$  et  $\lambda_{\mathcal{L}}$  sont les valeurs propres respectives de  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{L}$  associées à l'harmonique  $(U_j)_j = (e^{ij\theta})$ , on a  $\lambda_{\mathcal{L}_2} = \lambda_{\mathcal{L}} \lambda_{\mathcal{S}}$ , valeur propre de  $\mathcal{L}_2$  associée à cette harmonique. Or

$$\begin{cases} \lambda_{\mathcal{S}} = \frac{1}{2}(\cos \theta + 1) \\ \lambda_{\mathcal{L}} = 2\sigma(\cos \theta - 1) \end{cases} \Rightarrow \lambda_{\mathcal{L}_2} = \sigma(\cos^2 \theta - 1)$$

donc le facteur d'amplification du schéma  $U^{n+1} = U^n + \mathcal{L}_2(U^n)$  sera

$$\lambda = 1 + \lambda_{\mathcal{L}_2} = 1 + \sigma(\cos^2 \theta - 1) = 1 + \phi(\cos \theta)$$

avec  $\phi(x) = \sigma(x^2 - 1)$ .

La condition de stabilité de von Neumann conduit à  $0 < \sigma < 2$ .

Par ailleurs on montre que la fréquence critique est ici  $\theta_c = \frac{\pi}{2}$ . La solution de

$$|\lambda(\sigma_{op}, \frac{\pi}{2})| = \min_{\sigma \in [0, 2[} |\lambda(\sigma, \frac{\pi}{2})|$$

est  $\sigma_{op} = 1$ . La fréquence critique est annihilée pour cette valeur optimale.

### 2.1.3 Construction et analyse d'un schéma 3-Niveaux

En procédant comme pour le lisseur 2-niveaux, on définit l'opérateur de transfert 3-niveaux  $\mathcal{L}_3$  par

$$\mathcal{L}_3 = \mathcal{S}^2 \circ \mathcal{L} = \mathcal{S} \circ \mathcal{L}_2$$

Le schéma de lissage dont le coût est approximativement 3 Euler, est alors

$$U^{n+1} = U^n + \mathcal{L}_3(U^n)$$

Le facteur d'amplification est ici :

$$\lambda = 1 + \lambda_{\mathcal{S}}^2 \lambda_{\mathcal{L}} = 1 + \frac{1}{2} \sigma (\cos \theta + 1)^2 (\cos \theta - 1) = 1 + \phi(\cos \theta)$$

où  $\phi(x) = \frac{1}{2} \sigma (x+1)^2 (x-1)$

Le critère de von Neumann conduit au domaine de stabilité donné par  $0 < \sigma < \frac{27}{8}$ . La fréquence critique est  $\theta_c = \arccos \frac{1}{3}$  et correspond à une basse fréquence. Le problème d'optimisation : *trouver  $\sigma_{op}$  pour que*

$$|\lambda(\sigma_{op}, \arccos \frac{1}{3})| = \min_{\sigma \in [0, \frac{27}{8}[} |\lambda(\sigma, \arccos \frac{1}{3})|$$

donne  $\sigma_{op} = \frac{27}{16}$  le pas de relaxation qui annihile la fréquence critique.

**Remarque :**

*On observe que les schémas de lissage 2-Niveaux et 3-Niveaux n'affectent pas la très basse fréquence ainsi que la haute fréquence.*

## 2.2 Cas d'une intégration RK4 en temps

Pour augmenter l'efficacité des processus dans un calcul concret, nous avons remplacé l'intégrateur en temps, RK1, par du Runge Kutta d'ordre 4, RK4.

La démarche la plus naturelle, au regard de l'analogie évolutive décrite en introduction, est de construire les opérateurs

$$\tilde{\mathcal{L}}_i = g(\mathcal{L}_i), \quad \mathcal{L}_i \in \{\mathcal{L}, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3\}$$

où  $g(z) = \alpha_4 z \{1 + \alpha_3 z [1 + \alpha_2 z (1 + \alpha_1 z)]\}$  est le polynôme caractéristique de la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 linéarisée. Nous optons pour cette version en raison de la simplicité de son implémentation.

Le processus ainsi décrit par

$$U_h^{n+1} = U_h^n + \tilde{\mathcal{L}}_i(U_h^n)$$

aura pour facteur d'amplification

$$\lambda = 1 + g(\lambda_{\mathcal{L}_i}) = 1 + g(\phi(\cos \theta))$$

avec

$$\phi(x) = \begin{cases} 2\sigma(x-1) & \text{pour } \mathcal{L} \\ \sigma(x^2-1) & \text{pour } \mathcal{L}_2 \\ \frac{1}{2}\sigma(x+1)^2(x-1) & \text{pour } \mathcal{L}_3 \end{cases}$$

Les versions RK4 des schémas de lissage coûtent 4 fois leurs homologues RK1 mais théoriquement on en attend une plus grande efficacité.

Les domaines de stabilité consignés dans le tableau 1 autorisent des coefficients de relaxation plus grands.

	$I + \tilde{\mathcal{L}}$	$I + \tilde{\mathcal{L}}_2$	$I + \tilde{\mathcal{L}}_3$
$\sigma_{max}$	1.3941428	5.576571	9.4104645

**Tableau 1 :** Domaine de stabilité des versions RK4

Bien que relativement coûteux, ce mode de construction présente des avantages énoncés dans la proposition suivante

**Proposition :** *Les versions RK4 des schémas de lissage conservent les fréquences critiques de leurs homologues RK1.*

*Par ailleurs les schémas 2-Niveaux et 3-Niveaux, comme leurs homologues RK1, n'affectent pas la très basse fréquence et la haute fréquence.*

Ainsi nous optimisons les schémas version RK4 selon les mêmes critères, en fixant  $\theta$  à la fréquence critique des homologues RK1. Nous indiquons un intervalle efficace  $[\sigma_1, \sigma_2]$  dans lequel

$$|\lambda(\sigma, \theta_c)| < \kappa, \quad \kappa \text{ un seuil}$$

L'analyse des courbes d'optimisation<sup>1</sup>, peut se résumer par le tableau 2

	$I + \tilde{\mathcal{L}}$	$I + \tilde{\mathcal{L}}_2$	$I + \tilde{\mathcal{L}}_3$
$\theta_c$	$\pi$	$\frac{\pi}{2}$	$\arccos \frac{1}{3}$
$\kappa$	$\frac{4}{1000}$	$\frac{5}{1000}$	$\frac{4}{1000}$
$\sigma_{op} \in$	$[0.88, 0.98]$	$[3.5, 3.9]$	$[5.9, 6.6]$

**Tableau 2** : Domaine et seuil d'optimisation des versions RK4

Dans chaque cas on peut choisir  $\sigma$  afin d'atténuer notablement la fréquence critique  $\theta_c$ .

### 2.3 Lissage Hiérarchique de Résidu (LHR)

Un cycle complet à trois niveaux de lissage hiérarchique de résidu est décrit par le diagramme:

$$U^n \xrightarrow{I+\tilde{\mathcal{L}}} \overline{U}^n \xrightarrow{I+\tilde{\mathcal{L}}_2} \overline{\overline{U}}^n \xrightarrow{I+\tilde{\mathcal{L}}_3} U^{n+1}$$

Le passage du cycle numero  $n + 1$  est alors traduit par les équations:

$$\begin{aligned} \overline{U}^n &= U^n + \tilde{\mathcal{L}}(U^n) \\ \overline{\overline{U}}^n &= \overline{U}^n + \tilde{\mathcal{L}}_2(\overline{U}^n) \\ U^{n+1} &= \overline{\overline{U}}^n + \tilde{\mathcal{L}}_3(\overline{\overline{U}}^n) \end{aligned}$$

**Proposition** : *Le facteur d'amplification d'un cycle LHR est*

$$\lambda = \lambda_1(\sigma_1)\lambda_2(\sigma_2)\lambda_3(\sigma_3)$$

où  $\lambda_1(\sigma_1)$ ,  $\lambda_2(\sigma_2)$  et  $\lambda_3(\sigma_3)$  sont respectivement les facteurs d'amplification du RK4, du lisseur 2-Niveaux et du lisseur 3-Niveaux.

La figure 1 montre que les schémas LHR optimisés pour les fréquences critiques précédemment mises en évidence nous permet d'obtenir, sur plus des 70 pour 100 du spectre, des facteurs d'amplification en dessous de  $\frac{7}{100}$  pour l'intégrateur RK1 et de  $\frac{5}{1000}$  pour le RK4.

<sup>1</sup>les calculs et courbes sont faits sous MAPLE

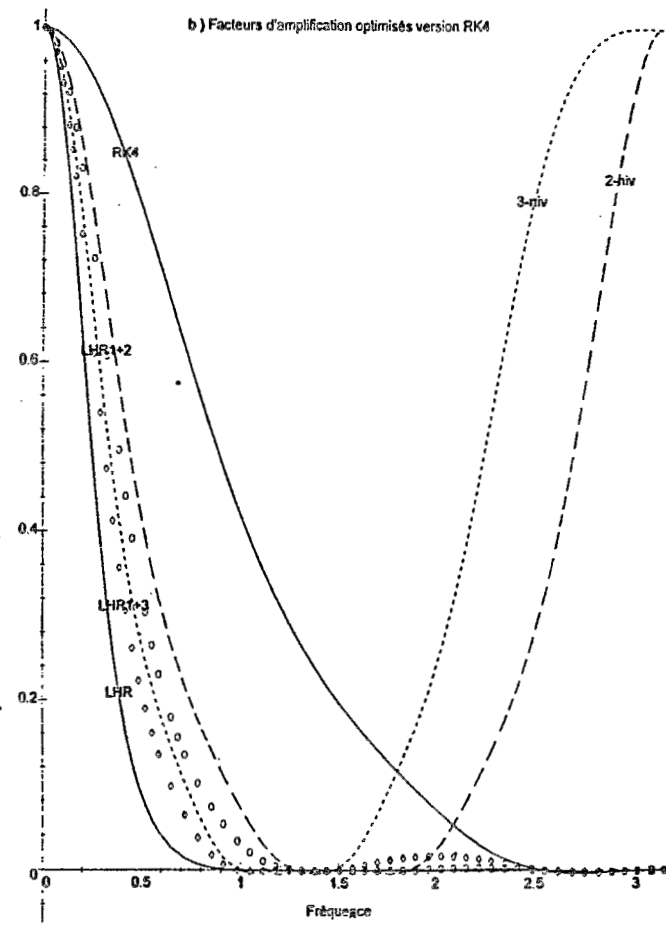
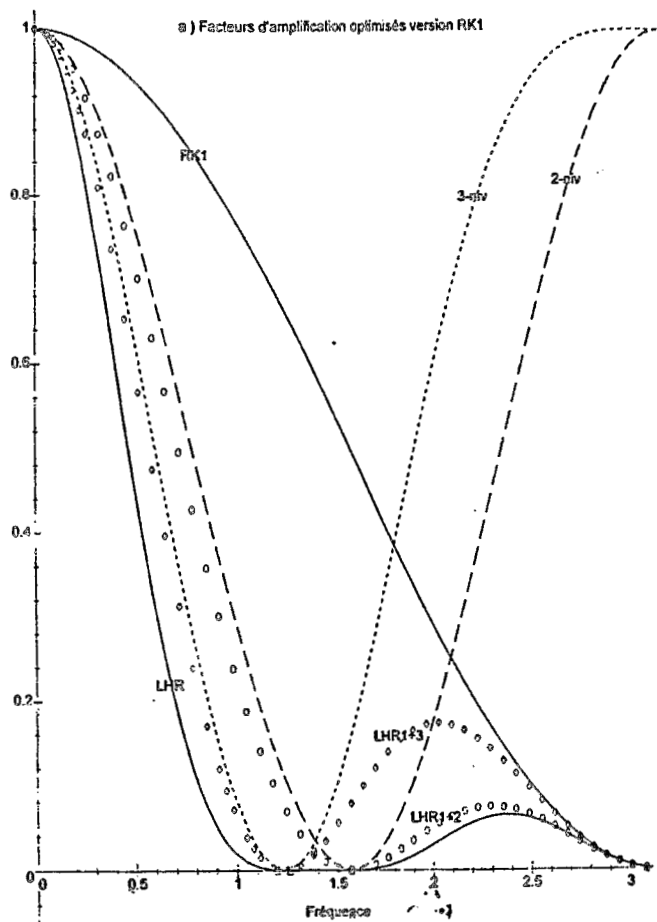


Figure 1: Facteurs d'amplification optimisés versions RK1 et RK4



### 3 Expériences Numériques

Elles sont monodimensionnelles, et consistent d'une part à valider l'analyse de Fourier mettant en évidence l'existence de fréquences critiques. D'autre part nous ferons des tests comparatifs des vitesses de convergence des divers lisseurs mis au point, en fonction du nombre de niveaux. La comparaison portera sur les schémas que nous désignerons par RK , LHR1+2 , LHR1+3 et LHR. Les LHR1+2 et LHR1+3 sont des lissages hiérarchiques de résidu dits incomplets. Sommairement :

$$\begin{aligned} \text{RK} &= \text{RUNGE KUTTA} \\ \text{LHR1+2} &= \text{RK} \quad \circ \quad \text{Lissage 2-Niveaux} \\ \text{LHR1+3} &= \text{RK} \quad \circ \quad \text{Lissage 3-Niveaux} \end{aligned}$$

#### 3.1 Validation de l'analyse de Fourier

Nous considérons le problème

$$\begin{cases} u_{xx} = 0 & x \in ]0, 1[ \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Les fréquences critiques observées dans l'analyse théorique ne sont pas forcément dans le spectre de l'opérateur discret associé au problème de Dirichlet. Nous voulons simplement vérifier que les fréquences propres ici ont les facteurs d'amplification prédits par l'analyse précédente.

A cet effet nous partons d'une solution initiale ayant la fréquence testée. Par exemple:

$$U_j^0 = \sin \theta_{test} j \quad \text{où} \quad \theta_{test} \in \text{Spectre}$$

Soit  $U^n$  la valeur prise par  $U^0$  après  $n$  itérations du schéma étudié; on déterminera le facteur d'amplification  $\lambda_{test}$  par la relation :

$$\lambda_{test} = \sqrt{\|U^n\|_{\mathbf{L}^2(]0,1[)} / \|U^0\|_{\mathbf{L}^2(]0,1[)}}$$

On note  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  les coefficients de relaxation respectifs des lisseurs  $I + \mathcal{L}$ ,  $I + \mathcal{L}_2$ ,  $I + \mathcal{L}_3$ ;  $M$  désigne le nombre de points du réseau. Etant donnée une fréquence critique  $\theta_c$ , on teste la fréquence propre juste en dessous si  $\theta_c$  n'est pas dans le spectre. Nous relatons ici les expériences en version RK1, pour lesquelles nous prendrons  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (\frac{1}{4}, 1, \frac{27}{16})$ . Les manipulations sont faites pour diverses valeurs de  $M$ . Le tableau 3 résume les observations concernant  $M = 50$ . Pour  $n \leq 2$ , les observations confirment l'analyse théorique. Au delà, les erreurs d'arrondi rendent inexploitable les valeurs obtenues.

	$I + \mathcal{L}$	$I + \mathcal{L}_2$	$I + \mathcal{L}_3$	LHR complet
$\theta_c$	$\pi$	$\frac{\pi}{2}$	$\arccos \frac{1}{3}$	combinaison
$\theta_{iest}$	$\frac{49}{50}\pi$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{19}{50}\pi$	combinaison
$\sqrt[n]{\frac{\ U^n\ _{\mathbf{L}^2(]0,1])}}{\ U^1\ _{\mathbf{L}^2(]0,1])}}$	$9.86635710^{-4}$	$1.6610^{-16}$	$2.07813110^{-3}$	$5.781810^{-4}$

**Tableau 3** : Test d'annihilation des fréquences critiques (RK1)

### 3.2 Test monodimensionnel

Nous faisons ce test<sup>2</sup> sur le problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} -u_{xx} &= \frac{32(2x-1)}{(1+(2x-1)^2)^2} \quad x \in ]0, 1[ \\ u(0) &= -u(1) = -\pi \end{cases}$$

dont la solution exacte du problème est  $u(x) = 4 \arctan(2x - 1)$ .

Dans ce cadre, nous ne présenterons que les résultats relatifs à  $M = 50$ . Nous exprimerons le temps en nombre de niveaux de schéma de base RK1 (Euler). Cette unité de temps permet une comparaison entre les versions Euler et les versions RK4.

Les courbes de la figure 2 représentent

$$n \mapsto e_n = \frac{\|U^n - u\|_{\mathbf{L}^2(]0,1])}}{\|U^1 - u\|_{\mathbf{L}^2(]0,1])}}$$

où  $e_n$  est le taux d'erreur rapporté à l'erreur initiale

#### 3.2.1 Version Euler ou RK1

Pour ces expériences, nous prenons  $(\sigma_i)_{i=1}^3 = (\frac{1}{4}, 1, \frac{27}{16})$ . En hautes fréquences ( $\theta > \frac{\pi}{2}$ ), la figure 1a prévoit un très bon comportement du schéma RK1 par rapport aux schémas de lissage hiérarchique.

Une courbe de résidu nous aurait montré une forte pente de décroissance pour le RK1 lors des premiers instants de traitement. Mais pour des raisons de commodité, nous avons opté pour le taux d'erreur en norme  $L^2$  qui est une mesure globale, représenté à la figure 2a.

Cette figure confirme cependant la prépondérance basse fréquence des lisseurs hiérarchiques telle que prévoit la figure 1a. Pour ce qui concerne l'efficacité relative des lisseurs hiérarchiques, on préférera le schéma LHR1+3 dont le comportement global est plus acceptable que celui du schéma complet LHR de complexité plus grande.

<sup>2</sup>Codes FORTRAN disponibles

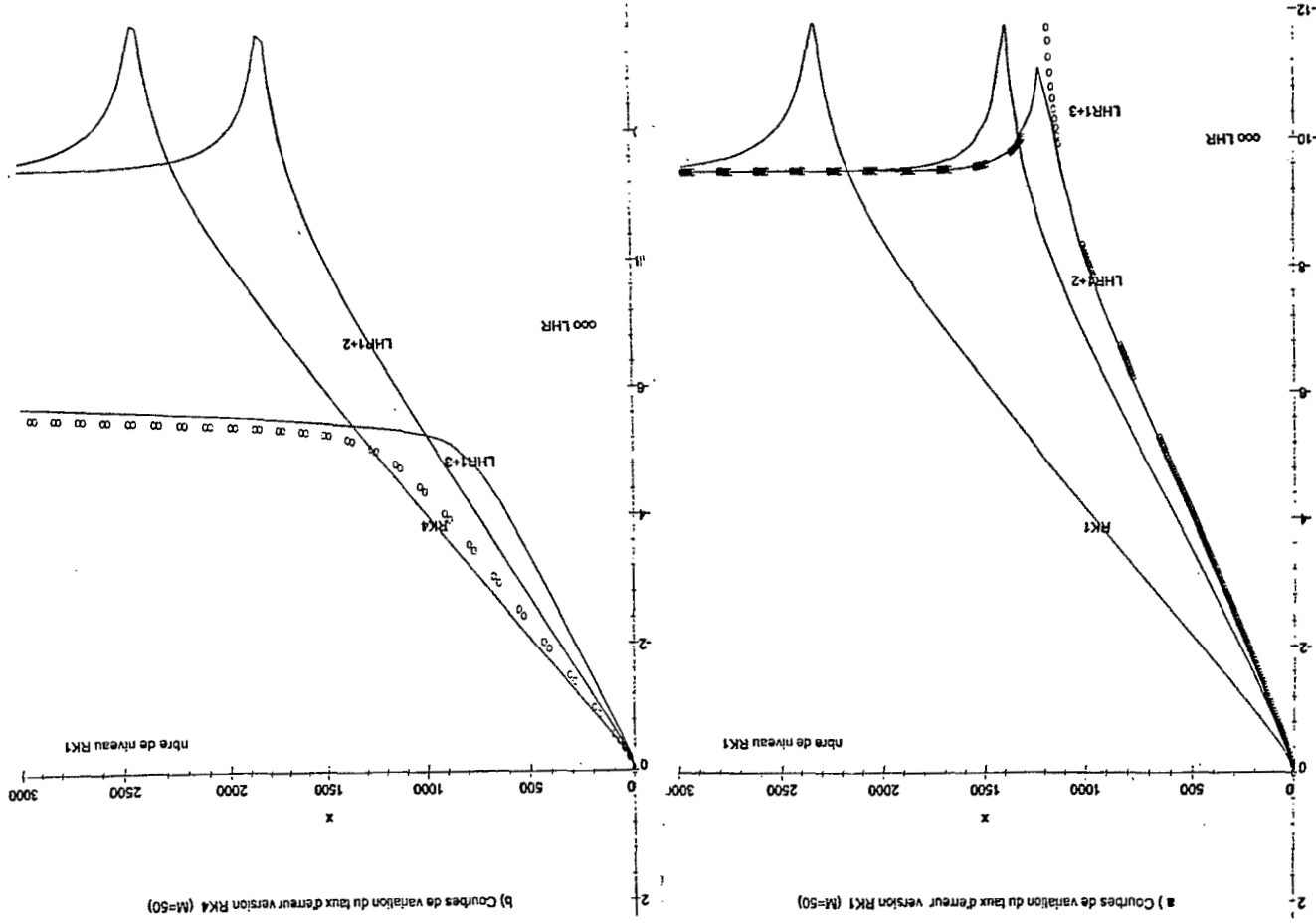


Figure 2: Courbes de variation de taux d'erreur versions RK1 et RK4

### 3.2.2 Version RK4

Ici nous prenons  $(\sigma_i)_{i=1}^3 = (0.970877, 3.879674, 6.557)$ . La lecture de la figure 1b laisse voir une certaine similitude avec la figure 1a. Il est donc normal d'attendre des comportements analogues mais à un autre échelle pour les expériences RK1 et RK4.

Contrairement à nos espérance, nous observons que le même nombre de niveaux RK1 produit des effets moins importants. Les minima sont passés de  $10^{-10}$  en RK1 à  $10^{-5}$  en RK4. Cette observation relate une perte d'efficacité dont la raison est probablement imputable au RK4.

Notre choix du RK4 pour accélérer la converge de la méthode a été dicté par sa robustesse puisqu'il autorise des pas de relaxation  $\sigma$  élevé. La perte d'efficacité observée par rapport au RK1 nous suggère d'orienter notre étude vers les couplages utilisant l'accélération polynômiale de Tchebychev, en prenant en compte les fréquences critiques observées.

## 4 Conclusion

Pour les problèmes elliptiques un schéma de lissage hiérarchique de résidu semble une alternative intéressante aux méthodes Multigrilles. Il permettra nous en sommes convaincu, surtout le cas LHR1+3, avec un coût pas trop prohibitif et sans grande complexité de programmation, la résolution de problème ardu comme un laplacien dans un domaine à coin. Des tests sont actuellement en cours et les résultats seront bientôt disponibles.

Comme direction de travail nous pouvons analyser l'influence du couplage des lisseurs hiérarchiques version RK1 avec l'accélération de Tchebychev sur l'efficacité des algorithmes

## 5 Références

1. P.O. FREDERIKSON , O. Mc BRYAN (1988) " Parallel superconvergent multi-grid" in Multigrid Methods S.F. Mc CORMICK ed. Dekker
2. P. J. van der HOUWEN, B. P. SOMMEIJER, G. PONTRILLI (1987) " A comparative study of chebyshev acceleration and residu smoothing in solution on nonlinear elliptic difference equations", CWI report NM R8723
3. M. H. LALLEMAND (1988), " Schémas décentrés multigrilles pour la résolution des équations d'Euler en éléments finis", Thèse à l'Université de Marseilles
4. A. DERVIEUX, L. FEZOUI, A. GOUDJO (1989), " Multi-level algorithms for solving the Euler equations", Proceeding of the fourth Copper Mountain conference on multigrid methods, SIAM

