

Assimilation de données météorologiques par une technique de contrôle optimal

Christian TATHY

Laboratoire de Mathématiques Appliquées
Université Blaise Pascal (Clermont-Ferrand 2)
63177 AUBIERE Cedex, FRANCE

Mots-clés : assimilation, contrôle optimal, fonction coût, système adjoint.

Résumé

Les méthodes d'adjoint pour l'assimilation de données ont été appliquées récemment aux modèles numériques de prévision à grande échelle. Ceci conduit à la minimisation d'une fonction coût, définie comme une somme discrète en espace et en temps des différences entre la prévision du modèle et les observations connues. Notre but est ici d'utiliser de telles méthodes pour l'assimilation de données au moyen d'un modèle à mésoéchelle.

Abstract

The adjoint methods for data assimilation are applied recently for large-scale numerical weather forecast. They lead to the minimization of a nonlinear cost function defined as a discrete sum in space and time difference between the model forecast and the assumed known observations.

Our aim is to use such methods for mesoscale model data assimilation. For that reason, after a brief description of the model being used and the choice of cost function, we show the adjoint model deduction.

An application using the collected sounding during the Pyrénées experiments in 1990 (PYREX 90) is made. The numerical results obtained are good illustrations of developed algorithms and demonstrate the feasibility of the method.

The interest of this study is its ability to work with temporal and spatial data and to reconstitute a dynamical analysis of meteorological fields.

I-Introduction.

Les recherches météorologiques ont connu ces dernières décennies un essor important tant sur le plan expérimental (données radar, données satellitaires) que sur le plan numérique (développement de la modélisation, apparition de nouveaux calculateurs). La prise en compte par les modèles des données ainsi recueillies est un problème nullement évident qui se pose en des termes différents suivant l'échelle considérée.

La mésoéchelle désigne l'ensemble des domaines d'aire limitée dont les dimensions horizontales caractéristiques vont de 2 à 2000 km. Plusieurs causes concourent à rendre l'étude de la mésométéorologie particulièrement ardue : citons par exemple la faible densité des mesures effectivement disponible à ces échelles, ainsi que la grande variabilité naturelle des phénomènes qui en relèvent.

En dépit de récents et rapides progrès faits dans le domaine de la prévision à court termes, les modèles à mésoéchelle se heurtent à des problèmes d'initialisation.

Le travail que nous présentons consiste à développer une procédure d'assimilation pour un modèle météorologique à mésoéchelle permettant de reconstituer la trace sur une coupe verticale des variables vent horizontale, pression au sol et température potentielle.

Nous supposons pour cela disposer à la fois d'un modèle et des observations des champs météorologiques considérés, et nous nous donnons de plus une mesure J de la distance entre les observations et une solution du modèle. L'assimilation variationnelle de données utilise des algorithmes itératifs de minimisation comme outil de contrôle optimal des équations aux dérivées partielles pour trouver la meilleure condition initiale, au sens de J , d'un modèle de prévision. Chaque itération dans le procédé de minimisation nécessite le calcul du gradient de la fonction coût J par rapport aux variables de contrôle. Théoriquement, ce gradient peut être obtenu par une approximation en différences finies ou par des modules automatiques de différentiation. Malheureusement, ces approches sont d'un coût de calcul très élevé. La technique de contrôle optimal proposée par Le Dimet et Talagrand permet d'obtenir le gradient en intégrant de façon rétrograde en temps le modèle adjoint du premier ordre qui réalise d'une manière simple le couplage entre le modèle et les observations. Le gradient obtenu est alors utilisé pour la recherche des directions le long desquelles la fonction coût devrait décroître. Des recherches linéaires peuvent également être faites pour optimiser la descente de la fonction coût J .

Les simulations ont été faites sur un domaine comportant une montagne de 2 km de hauteur et 20 km de largeur en utilisant les sondages effectués au dessus de la ville de Saragosse lors de la campagne PYREX 90 pour montrer la réalisation numérique de la technique.

II-Description du modèle SALSA.

II-1 Les équations de base.

L'acronyme SALSA signifie : simulation sur aire limitée des systèmes atmosphériques. Le modèle utilisé est une version bidimensionnelle simplifiée de celui développé par Nickerson et al. (1986) et Richard et al. (1989). Il s'agit d'un modèle à l'échelle méso- β en équations primitives. L'utilisation de l'approximation hydrostatique est justifiée puisqu'on considère classiquement un domaine horizontal de 300 km, avec une maille de 10km. Les équations sont écrites dans le système de coordonnées (x, ν) , où la coordonnée verticale ν est dérivée de la coordonnée classique σ définie de la façon suivante :

$$\sigma = \frac{p - p_t}{\Pi} \quad \text{avec} \quad \Pi = p_s - p_t \quad (2.1)$$

p désignant la pression au niveau considéré, p_s et p_t respectivement les pressions au sol et au sommet. ν est alors définie par la relation :

$$\sigma = a\nu + b\nu^2 + c\nu^3 + d\nu^4 \quad (2.2)$$

Cette coordonnée verticale permet, tout en conservant un incrément de taille

constante en ν , de modifier facilement par le choix des coefficients a, b, c la répartition en z des niveaux verticaux. Dans ce travail, le choix suivant a été adopté : $a = \frac{4}{3}$, $b = 0$, $c = 0$, $d = \frac{-1}{3}$. Les limites verticales du domaine d'intégration sont alors $\nu = \sigma = 1$ au sol, et $\nu = \sigma = 0$ au sommet. Le modèle peut tourner classiquement avec 15, 30 ou 60 niveaux verticaux.

Les variables pronostiques de la dynamique et de la thermodynamique sont :

$$U = \Pi u, \quad S = \Pi H \quad \text{et} \quad \Pi,$$

où u est la composante horizontale du vent et H l'entropie. Le choix de ces variables est de permettre d'écrire les équations du modèle sous forme de flux pour assurer la quasi-conservation de la quantité de mouvement après passage en différences finies.

En l'absence d'humidité et de termes diabatiques, le système bidimensionnel se réduit aux équations suivantes (2.3, a-d)

$$\frac{\partial \Pi u}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi u u}{\partial x} - \frac{1}{\sigma'} \frac{\partial \Pi u \sigma' \dot{\nu}}{\partial \nu} + (\phi - RT) \frac{\partial \Pi}{\partial x} - \frac{\partial \Pi \phi}{\partial x} + K_H \Pi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K_D (\Pi u - \tilde{\Pi} \tilde{u}) \quad (2.3, a)$$

$$\frac{\partial \Pi H}{\partial t} = \frac{\partial \Pi H u}{\partial x} - \frac{1}{\sigma'} \frac{\partial \Pi H \sigma' \dot{\nu}}{\partial \nu} + K_H \Pi \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + K_D (\Pi H - \tilde{\Pi} \tilde{H}) \quad (2.3, b)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = -\int_0^1 \frac{\partial \Pi u}{\partial x} \sigma' d\nu + K_D (\Pi - \tilde{\Pi}) \quad (2.3, c)$$

$$\dot{\nu} = -\frac{1}{\Pi \sigma'} \int_0^\nu \sigma' \left(\frac{\partial \Pi}{\partial t} + \frac{\partial \Pi u}{\partial x} \right) d\nu^*$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \hat{p}} = -C_p \theta \quad (2.3, d)$$

avec

$$H = \ln(\theta), \quad \dot{\nu} = \frac{d\nu}{dt}, \quad \sigma' = \frac{d\sigma}{d\nu}, \quad \hat{p} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{R/C_p}$$

qui sont respectivement les équations de :

- la conservation du mouvement,
- l'évolution de l'entropie,
- l'équation d'évolution de la pression au sol,
- l'équation d'évolution de la vitesse verticale,
- l'équation du géopotentiel.

Les notations suivantes ont été utilisées :

- C_p : chaleur spécifique de l'air sous pression constante ;
- $\theta \left(= \frac{T}{\hat{p}} \right)$: température potentielle ;
- p_0 : pression de référence (1000 mb) ;
- R : la constante universelle des gaz parfaits.

Dans les équations (2.3,a) à (2.3,c), les derniers termes représentent des conditions de relaxation vers des valeurs spécifiées au bord (conditions aux limites du type Davies). $\tilde{\Pi}$, \tilde{u} et \tilde{H} sont des solutions prescrites et $K_D(x)$ le coefficient de relaxation qui n'est non nul que dans une région voisine du bord. Pour alléger l'écriture ils ne figurent pas dans la suite des calculs mais sont inclus dans le code numérique. Les deux avant-derniers termes des deux premières équations sont des termes diffusifs utilisés pour des raisons numériques. Leur but est d'une part de filtrer les ondes de gravité de longueur $2\Delta x$, et d'autre part de minimiser le plus possible la réflexion à la frontière supérieure. Le modèle étant écrit en coordonnées sigma, il n'est pas possible d'imposer une condition non réfléchissante sur cette frontière. Pour remédier à cet inconvénient, il a été rajouté une couche diffuse dite absorbante à la frontière supérieure.

Pour définir ce terme K_H la formulation suivante a été adoptée dans laquelle K_{H_0} représente la diffusion de fond opérant dans l'ensemble du domaine, \hat{K}_H la diffusion maximale au sommet de l'absorbant et où kal désigne l'indice du niveau vertical correspondant à la base de la couche absorbante.

$$K_H = \begin{cases} K_{H_0} & k \geq kal \\ K_{H_0} + \hat{K}_H \frac{\sigma_{kal} - \sigma_k}{\sigma_{kal} - \sigma_1} & k < kal \end{cases} \quad (2.4)$$

Les valeurs adimensionnelles choisies pour K_{H_0} et \hat{K}_H sont 0.65 et 0.1.

II-3 Conditions aux limites.

A la limite supérieure du domaine ($\sigma = \nu = 0$), $\dot{\nu}$ est posé égal à zéro. Cette condition est raisonnable lorsque $p_t = 0$, mais peut créer des difficultés quand p_t est supérieur à $100mb$. Les valeurs du vent et de la température à la limite supérieure sont égales aux valeurs correspondantes du niveau immédiatement inférieur. La spécification de ces valeurs n'a pas d'importance, puisqu'elles apparaissent dans les équations sous forme de flux (par exemple $\dot{\nu}\Pi u$) et par conséquent, elles disparaissent lorsque $\dot{\nu}$ s'annule.

A toutes les autres frontières, y compris au sol, les variables thermodynamiques sont spécifiées à priori.

Sur les frontières latérales, le vent est spécifié par flux entrant et extrapolé à partir des valeurs intérieures en condition de flux sortant. Par flux entrant le vent reste égal à sa valeur initiale ; par flux sortant il est calculé en supposant que la dérivée normale s'annule.

III- Formulation du problème discrétisé en espace.

La discrétisation en espace peut généralement s'effectuer de trois manières : en différences finies, en éléments finis, par troncature d'un développement analytique, par exemple d'un développement suivant une base orthogonale de fonctions propres dans le cas d'un opérateur linéaire.

Pour des raisons de simplicité, nous allons retenir la formulation en différences finies sur une grille rectangulaire de maille régulière.

Le système d'équations (2.3) une fois discrétisé sur une telle grille s'écrit alors

sous la forme :

$$\frac{dX}{dt} = F(X)$$

où F est une application non linéaire de \mathbb{R}^N dans lui même, supposée ici lipschitzienne et X un vecteur à $N = N_{var} \times (Ng)^2$ composantes fonctions du temps, N_{var} étant le nombre de variable météorologiques et $(Ng)^2$ le nombre de points à l'intérieur de la grille.

Le problème de Cauchy avec condition initiale

$$\begin{aligned} \frac{dX(u, t)}{dt} &= F(X(u, t)) \\ X(u, 0) &= u \end{aligned}$$

admet alors comme solution unique $X(u, t)$ sur l'intervalle $[0, T]$.

Nous supposons que les observations réparties dans l'espace et dans le temps ont permis, par l'intermédiaire d'un opérateur de prolongement de définir un vecteur fonction du temps $X_{obs}(t)$ que nous appellerons vecteur des observations.

On définit la fonction coût $J(u)$ par

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^T \langle W(CX(u, t) - X_{obs}(t)), CX(u, t) - X_{obs}(t) \rangle dt \quad (3.1)$$

où W désigne une matrice diagonale positive indépendante du temps dont les éléments non nuls sont les poids de la fonction coût, et

$$\langle X(t), Y(t) \rangle = \sum_{i=1}^N X_i(t) Y_i(t)$$

désigne le produit scalaire de deux vecteurs $X(t)$, $Y(t)$ de composantes $X_i(t)$, $Y_i(t)$ $1 \leq i \leq N$.

L'ensemble des états possibles étant théoriquement \mathbb{R}^N tout entier, on a donc un problème d'optimisation sans contraintes qui s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u^* \in \mathbb{R}^N \text{ tel que} \\ J(u^*) = \inf_{u \in \mathbb{R}^N} J(u) \end{array} \right. \quad (3.2)$$

IV- Détermination de la condition d'optimalité, calcul du gradient.

Lorsque J admet des dérivées partielles continues pour tout u dans \mathbb{R}^N , une condition nécessaire pour que u^* soit un minimum (local ou global) est que

$$\nabla J(u^*) = 0 .$$

Si de plus J est convexe, continûment différentiable, la condition ci-dessus est nécessaire et suffisante.

Le problème (3.2) ne peut en général pas être résolu analytiquement. Il existe toutefois des algorithmes de résolution numérique qui permettent d'en déterminer des solutions approchées, parmi lesquels la méthode du gradient conjugué ou celles de quasi-Newton.

La plupart sont des procédures itératives de descente qui, partant d'une valeur initiale u_0 , recherchent la meilleure approximation u_1 de la solution optimale u^* de façon que $J(u_1) \leq J(u_0)$ et itèrent le procédé jusqu'à satisfaire une condition de convergence donnée. Toutes ces méthodes utilisent le gradient de la fonction à minimiser par rapport à la variable de contrôle (dans notre cas). D'où l'importance de la détermination du gradient de J par rapport à u .

Si nous définissons P comme étant solution de l'équation adjointe :

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} + \left[\frac{\partial F}{\partial X} \right]^t P &= C^t(CX - X_{obs}) \\ P(T) &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

on montre, voir par exemple [5], que :

$$\nabla J(u) = -P(0) . \quad (4.2)$$

Dans le cas de SALSA, le système adjoint dont nous avons construit le code s'écrit pour le modèle continu en espace et en temps :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P_U}{\partial t} &= +u \frac{\partial P_U}{\partial x} + \sigma' \dot{\nu} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{P_U}{\sigma'} \right) + \int_0^1 \frac{\partial P_{\Pi}}{\partial x} \sigma' d\nu^* \\ &\quad - \frac{1}{\Pi \sigma'} \int_0^{\nu} \frac{\partial P_{\dot{\nu}}}{\partial x} \sigma' d\nu^* + P_u - {}^t C_U(C_U U - U_{obs}) \end{aligned} \quad (4.3, a)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P_S}{\partial t} &= +u \frac{\partial P_S}{\partial x} + \sigma' \dot{\nu} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{P_S}{\sigma'} \right) + P_H \\ &\quad - {}^t C_S(C_S S - S_{obs}) \end{aligned} \quad (4.3, b)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P_{\Pi}}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left[(\phi - RT) P_U \right] - \phi \frac{\partial P_U}{\partial x} + K_H \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} P_U + K_H \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} P_S \\ &\quad - \frac{1}{\Pi^2 \sigma'} \left(\int_0^{\nu} \sigma' \left(\frac{\partial \Pi}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} \right) d\nu^* \right) P_{\dot{\nu}} - \frac{1}{\Pi \sigma'} \int_0^{\nu} \sigma' \frac{\partial P_{\dot{\nu}}}{\partial t} d\nu^* \\ &\quad - (u P_u + H P_H) - {}^t C_{\Pi}(C_{\Pi} \Pi - \Pi_{obs}) \end{aligned} \quad (4.3, c)$$

$$0 = -\sigma' U \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{P_U}{\sigma'} \right) - \sigma' S \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{P_S}{\sigma'} \right) + P_{\dot{\nu}} \quad (4.3, d)$$

$$0 = \frac{\partial \Pi}{\partial x} P_U + \Pi \frac{\partial P_U}{\partial x} + \frac{\partial P_{\phi}}{\partial \hat{p}} \quad (4.3, e)$$

$$0 = -U \frac{\partial P_U}{\partial x} + K_H \Pi \frac{\partial^2 P_U}{\partial x^2} - S \frac{\partial P_S}{\partial x} - \Pi P_u \quad (4.3, f)$$

$$0 = K_H \Pi \frac{\partial^2 P_S}{\partial x^2} + C_p e^H P_\phi - \Pi P_H \quad (4.3, g)$$

avec :

$$P_U(T) = 0 \quad ; \quad P_S(T) = 0 \quad ; \quad P_\Pi(T) = 0 \quad (4.3, h)$$

V-Utilisation du modèle adjoint de SALSA pour l'assimilation de données

V-1 Les Données issues de la campagne PYREX 90.

Les données utilisées dans cette étude proviennent du Centre National de Recherche en Météorologie (C.N.R.M.) qui a coordonné cette campagne qui s'est déroulée du 1^{er} octobre au 30 novembre 1990 dans la région des Pyrénées.

Le but principal de la campagne était la constitution d'un jeu de données permettant des études détaillées de l'influence dynamique d'une montagne telle que les Pyrénées sur l'atmosphère à grande échelle (ondes de gravité) et à mésoéchelle (génération d'ondes, turbulence en ciel clair, vents locaux ...).

Dans ce travail, nous utilisons les sondages réalisés au dessus de la ville de Saragosse le 15 octobre à 0600 TU et à 1200 TU.

V-2 Vérification de la dérivation et de la transposition.

Un point essentiel pour la mise en œuvre de la méthode est le calcul du gradient ainsi que sa vérification. A partir du système direct nous obtenons le système tangent par linéarisation autour d'une perturbation, puis le système adjoint par transposition. Pour obtenir l'adjoint, nous écrivons le code du système tangent puis nous transposons les instructions ligne à ligne .

Pour vérifier l'exactitude du gradient obtenu (Courtier, 1987), nous considérons la formule de Taylor :

$$J(u + \alpha h) - J(u) = \alpha \nabla J(u) \cdot h + \frac{\alpha^2}{2} \nabla^2 J(u)(h, h) + o(\alpha^2)$$

où $\nabla^2 J(u)$ désigne la matrice des dérivées seconde de J par rapport à u.

Nous avons alors :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} f(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{J(u + \alpha h) - J(u)}{\alpha \nabla J(u) \cdot h} \right) = 1 \quad (5.1)$$

Nous avons effectué des essais sur le CRAY YMP C98 de l'Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique (IDRIS), pour tester la validité de la formule (5.1) en prenant pour direction $h = \nabla J(u)$. La figure 1 montre que, pour α compris entre 10^{-1} et 10^{-10} , la valeur de $f(\alpha)$ est égale à 1.

V-3 Expérience numérique.

Nous utilisons pour notre expérience l'optimiseur m1qn2 (Lemaréchal et Gilbert, 1989) issue de la bibliothèque modlopt et qui met en œuvre une méthode de quasi-Newton. Elle est implémentée à partir d'un algorithme BFGS proposé par Nocedal et qui s'est révélé efficace pour plusieurs types de problèmes dont ceux de météorologie.

Dans cette partie, l'expérience est faite selon le schéma suivant : le modèle génère des observations à partir d'une analyse de mesures du sondage de 1200 TU le 15 octobre 1990 à Saragosse. La procédure d'optimisation est alors initialisée à partir des mesures faites sur le même lieu à 0600 TU du même jour et extrapolées sur tout le domaine d'intégration. Nous connaissons donc exactement la solution du problème de contrôle qui correspond dans ce cas aux champs obtenus à 1200 TU, et la valeur minimale de la fonction coût qui vaut alors zéro.

Nous supposons que les observations sont disponibles à tous les pas de temps d'intégration des équations du modèle, et que la fonction coût discrète est définie par la formule :

$$J(u) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^L < (X(u, k) - X_{obs}(k)), (X(u, k) - X_{obs}(k)) > \quad (6.1)$$

Nous avons choisi, dans cette expérience, de faire l'assimilation sur une durée d'une heure, le but étant de vérifier le bon fonctionnement du code adjoint avant d'envisager son utilisation pour des temps d'assimilation plus longs.

La figure 2 représente les variations du logarithme décimal de la fonction coût normalisée ($\frac{J_k}{J_0}$) et de la norme du gradient normalisée ($\frac{\|\nabla J_k\|}{\|\nabla J_0\|}$) en fonction du nombre k d'itérations. On remarque qu'après 150 itérations la fonction coût normalisée est réduite de 7,6 à l'échelle du logarithme décimal tandis que la norme du gradient normalisée l'est de 5. Les valeurs exactes étant $J_0 = 0.11771E + 10$, $J_{150} = 0.27394E + 02$, $\|\nabla J_0\| = 0.19141E + 07$ et $\|\nabla J_{150}\| = 0.20713E + 02$. Cela apparaît à première vue suffisant pour apprécier le fonctionnement du code. Les figures 3-a et 3-b représentent respectivement le champ de température potentielle utilisé comme observation et le même champ reconstitué par la procédure d'assimilation.

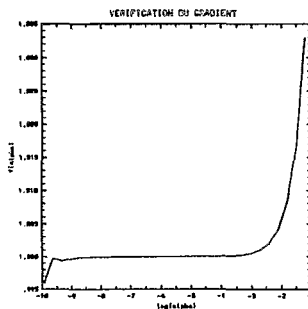


Figure 1 : Variations de $f(\alpha)$ en fonction du logarithme décimal de α .

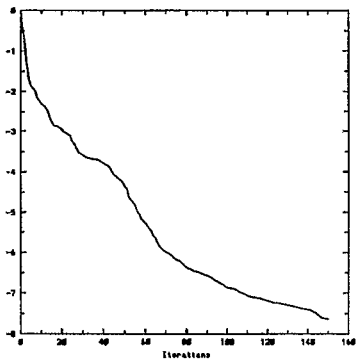


fig.2-a : variations de $\log\left(\frac{J_k}{J_0}\right)$
en fonction des itérations k

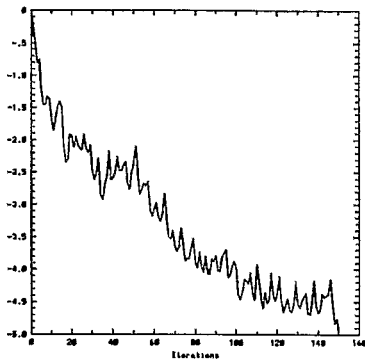


fig.2-b : variations de $\log\left(\left\|\frac{g_k}{g_0}\right\|\right)$
en fonction des itérations k

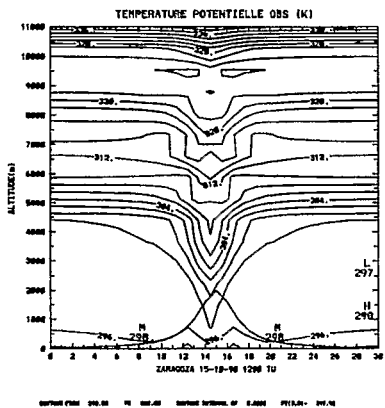


fig.3-a : Champ de température
potentielle observé à 12 TU.

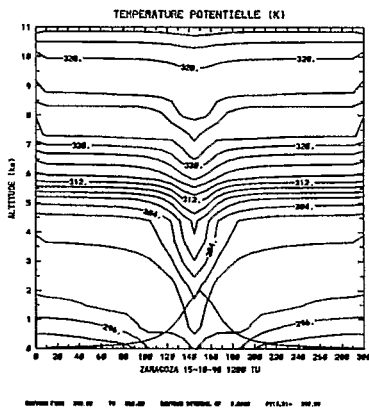


fig.3-b : Champ de température
potentielle reconstitué à 12 TU.

Références.

- [1] Courtier P., 1987 - Application du contrôle optimal à la prévision numérique en météorologie. Thèse de doctorat de l'université de Paris VI.
- [2] Ghil M., Malanotte-Rizzoli P., 1991 - Data assimilation in meteorology and oceanography. *Advances in Geophysics* vol 33, 141 – 266.
- [3] Griewank A., Corliss G.F., 1991 - Automatic Differentiation of Algorithms. SIAM ed.
- [4] Haltiner G.J. and Terry Williams R., 1979 - Numerical prediction and dynamic meteorology. Second edition. John Wiley and Sons.
- [5] Le Dimet F.X. and Talagrand O., 1986 - Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observation : theoretical aspects. *Tellus*, 38A, 97 – 110.
- [6] Le Dimet F.X. and Nouailler A., 1986 - Assimilation of dynamical in geosciences. Y.K. Sasaki, Editor, Elsevier, Amsterdam, 181-198.
- [7] Le Dimet F-X, 1991 - Méthodes de contrôle optimal pour l'assimilation de données en météorologie. Thèse de doctorat d'état. Université Blaise Pascal (Clermont -Ferrand II)
- [8] Lemarechal C. et Gilbert J.C., 1989 - The modules M1QN2, M1QN3, N1QN2 and N1QN3. INRIA Rocquencourt BP 105. 78153 Le Chesnay CEDEX.
- [9] Nickerson E.C. and Magaziner E., 1976 - A tree-dimensional simulation of winds and non-precipitating orographic clouds over Hawaii. NOAA Technical Report ERL 377-APCL 39.
- [10] Nickerson E.C., Richard E., Rosset R. and Smith D.R., 1986 - The numerical simulation of clouds, rain and airflow over the Voges and the Black Forest mountains : a meso- β model with parametrization microphysics. *Mon. Wea. Rev.* 114, 396 – 414.
- [11] Nouailler A., 1987 - Assimilation de données à petite échelle : technique de contrôle optimal. Thèse de doctorat de 3^e cycle. Université de Clermont II.
- [12] Richard E., 1982 - Paramétrisation de la microphysique des nuages en phases mixte dans un modèle tridimensionnel à mésoéchelle. Thèse de doctorat de 3^e cycle. Université Blaise Pascal (Clermont II).
- [13] Richard E., 1991 - Ondes de montagne et processus diabatiques. Thèse de doctorat d'Etat. Université de Clermont II.
- [14] Richtmyer R.D. and Morton K.W., 1967 - Difference methods for initial-value problems. Second edition. Interscience Publishers.
- [15] Sasaki Y., 1969 - Proposed inclusion of time variation terms, observational and theoretical, in numerical variational objective analysis. *J.Meteor.Soc.Japan*, 47, 115 – 203.
- [16] Tathy C., 1995 - Contrôle optimal et prédictibilité de modèles météorologiques. Thèse de doctorat de l'université Blaise Pascal (Clermont -Ferrand II).