

Un algorithme spectral pour la solution numérique des écoulements à surface libre

Abdou GARBA

International Centre for Theoretical Physics, P.O. Box 586, 34100 Trieste, Italy

Résumé: Nous présentons une méthode numérique pour le calcul des écoulements à surface libre. La formulation fonction de courant-tourbillon a été adoptée. Un changement de variable permet de ramener les calculs dans un domaine fixe. Les équations sont ensuite discrétisées de façon implicite, ce qui conduit à une résolution itérative. La résolution spatiale Fourier/Chebyshev utilise la méthode de la matrice d'influence. On présente des résultats numériques obtenus sur le problème d'injection-extrusion.

Mots clés: Equations de Navier-Stokes, surface libre, méthodes spectrales, méthode de collocation, méthode de la matrice d'influence, schéma implicite, processus itératif.

Abridged English Version: This paper is devoted to the spectral solution of unsteady two-dimensional free-surface flows of a viscous fluid. The usual difficulty associated with the numerical calculation of such flows lies in the fact that the computational domain is not rectangular and that its shape is an unknown which varies with time. These features are not easily accepted by spectral methods. However, the actual need of high accuracy in a number of physical problems connected with free-surfaces and more generally with interfaces makes valuable to produce an effort for the development of efficient spectral methods for the solution of such problems.

In the first part, we address the general formulation of the free-surface conditions and the approximations usually considered for simplifying the problem. Then, the equations of the motion are presented within the vorticity-stream function formulation. The difficulty of the variable domain is overcome thanks to a coordinate transform based on the height of the free-surface which maps the domain into a fixed domain.

The time-discretization makes use of a fully implicit scheme of second order accuracy. This technique leads at each time step to nonlinear partial differential equations which are solved by iterative procedure. We presented 3 options for the choice of the relaxation parameter: (i) the Richardson method, (ii) the Preconditioned Minimal Residual method (PMR) and (iii) finally we present a new choice of the relaxation parameter. The later choice is not an optimal one, however, in the linear situation, it can be shown that this choice leads to a substantial decrease of the residual at each iteration when it is associated with a good preconditioning (see [6] for more details). In the present work, the flow is assumed to be periodical in the horizontal direction, so that Fourier series are used in this direction while Chebyshev polynomials are considered in the vertical direction. The boundary conditions, including the dynamical free-surface conditions, are easily included in the solution method through the influence matrix technique [1], [3].

The method has been validated against various situations: analytical solution and also comparison with results obtained by [5] using finite elements method. As an example

of solution, we present here results obtained on a problem of injection–withdrawal of a fluid at the bottom of the domain. Comparaison of the performance of the differents iterative methods shows that when the problem is quite smooth(i.e the derivatives of the free surface are small) all the 3 methods give good results(tab.1). On the other hand when the problem is stiff ($Fr > 1$) the PMR does not converge and the Richardson method needs a large number of iterations to converge. The new method however is much robust and large amplitudes of deformation can be calculated at a reasonable cost(Fig.1).

1 Introduction

Nous présentons une méthode spectrale Fourier–Chebychev pour la résolution numérique des écoulements instationnaires à surface libre d'un fluide visqueux. L'écoulement est supposé bidimensionnel avec une direction de périodicité. La difficulté majeure quand on approche numériquement les problèmes est liée à la complexité du domaine de calcul qui varie au cours du temps. Les méthodes spectrales, dans leur formulation d'origine sont mal adaptées pour ce genre de situations. Cependant le besoin d'une grande précision dans bon nombre de problèmes physiques impliquant le phénomène de surface libre nécessite des efforts en vue d'adapter ces méthodes à des situations compliquées.

Le premier paragraphe présente la formulation du problème. Les équations sont ensuite considérées dans la formulation fonction de courant–tourbillon. Un changement de variable basé sur la hauteur de la surface libre permet alors de ramener le domaine variable à un domaine fixe.

La méthode numérique est présentée dans le paragraphe 2. La discrétisation temporelle utilise un schéma complètement implicite. On est alors conduit à chaque pas de temps à un problème nonlinéaire dont la résolution se fait par un processus itératif. La discrétisation spatiale est basée sur les séries de Fourier dans la direction périodique et collocation–Chebychev dans la seconde direction.

2 Présentation du problème

2.1 Equations du mouvement

Nous supposons que le fluide est visqueux de viscosité μ , incompressible et soumis à la gravité. Les équations dynamiques qui décrivent le mouvement du fluide à l'intérieur du domaine sont alors les équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible:

$$\bar{\rho}[\bar{V}_t + (\bar{V} \cdot \bar{\nabla})\bar{V}] + \bar{\nabla}\bar{p} = \mu\bar{\nabla}^2\bar{V} - g\bar{e}_j, \quad (1)$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{V}} = 0, \quad (2)$$

(\mathbf{j} est le vecteur unitaire dans la direction verticale). Ces équations sont résolues dans le domaine $\bar{\mathcal{D}}(\bar{t}) = \{0 \leq \bar{x} \leq L, 0 \leq \bar{y} \leq \bar{h}(\bar{x}, \bar{t})\}$, où $\bar{y} = \bar{h}(\bar{x}, \bar{t})$ est l'équation de la surface libre. Dans ces équations, g désigne la gravité, $\bar{\rho}$ est la masse volumique du fluide que l'on suppose constante, \bar{p} la pression et $\bar{\mathbf{V}} = (\bar{u}, \bar{v})$ la vitesse du fluide.

2.2 Conditions de surface libre

Deux types de conditions (voir [4]) sont imposées à l'interface séparant un liquide et un gaz: (i) La condition cinématique qui traduit le fait que les particules du fluide ne traversent pas l'interface

$$\bar{h}_{\bar{t}} + \bar{u}\bar{h}_{\bar{x}} - \bar{v} = 0 \quad \text{en} \quad \bar{y} = \bar{h}, \quad (3)$$

et (ii) la condition dynamique qui exprime la continuité du tenseur de contrainte normale dans la direction normale à l'interface (on néglige ici la tension superficielle)

$$(\bar{h}_{\bar{x}}^2 - 1)(\bar{u}_{\bar{y}} + \bar{v}_{\bar{x}}) + 2\bar{h}_{\bar{x}}(\bar{u}_{\bar{x}} - \bar{v}_{\bar{y}}) = 0 \quad \text{en} \quad \bar{y} = \bar{h}, \quad (4)$$

$$\bar{p} - \bar{p}_A - 2\mu\bar{v}_{\bar{y}} + \mu\bar{h}_{\bar{x}}(\bar{u}_{\bar{y}} + \bar{v}_{\bar{x}}) = 0 \quad \text{en} \quad \bar{y} = \bar{h}, \quad (5)$$

où \bar{p}_A est la pression atmosphérique. Pour formuler complètement le problème, on impose au fond du domaine la vitesse du liquide

$$\bar{u} = \bar{u}_f, \quad \bar{v} = \bar{v}_f \quad \text{en} \quad \bar{y} = 0, \quad \bar{t} \geq 0. \quad (6)$$

où \bar{v}_f satisfait à la condition de débit: $\int_0^L \bar{v}_f(\bar{x}, \bar{t}) d\bar{x} = 0$.

Enfin on ajoute les conditions initiales à $\bar{t} = 0$:

$$\bar{u}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{u}_0(\bar{x}, \bar{y}), \quad \bar{v}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{v}_0(\bar{x}, \bar{y}), \quad \bar{h}(\bar{x}, \bar{t}) = \bar{h}_0(\bar{x}), \quad (\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{\mathcal{D}}_0 \quad (7)$$

La vitesse initiale $\bar{\mathbf{V}}_0 = (\bar{u}_0, \bar{v}_0)$ est supposée vérifier $\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{V}}_0 = 0$.

Il n'est pas surprenant qu'on impose deux conditions aux limites au fond du domaine et trois conditions au niveau de la surface libre, dans la mesure où la surface libre constitue une inconnue supplémentaire, donc requiert une équation supplémentaire. La formulation

mathématique précédente laisse prévoir déjà les difficultés du problème, d'abord à cause du caractère non linéaire des équations, en particulier celles traduisant les conditions aux limites au niveau de la surface libre; mais la difficulté émane surtout du fait que la surface libre n'est pas connue *a priori*, et qu'en conséquence l'équation de la quantité de mouvement (1) et l'équation de continuité (2) doivent être résolues dans un domaine qui n'est pas connu d'avance. La difficulté liée au domaine variable sera éliminée grâce à un changement de variable basé sur la hauteur de la surface libre.

Les équations sont rendues adimensionnelles en introduisant des quantités de références \bar{h}_* , \bar{V}_* , $\bar{p}_* = \bar{\rho}\bar{V}_*^2$ et $\bar{t}_* = \bar{h}_*/\bar{V}_*$ pour la longueur, vitesse, pression et le temps respectivement. La longueur caractéristique \bar{h}_* est prise comme étant la moyenne de la hauteur initiale. La vitesse de référence n'est pas spécifiée. Son choix dépend de la situation considérée. On notera alors les variables adimensionnées sans le signe barre.

En peut introduire le terme de force $-g\bar{\rho}\bar{j}$ dans le gradient de pression, en définissant une nouvelle variable $\Pi = (\bar{p} - \bar{p}_A)/(\bar{\rho}\bar{V}_*^2) + y/Fr^2$ où $Fr = \bar{V}_*/(g\bar{h}_*)^{\frac{1}{2}}$ est le nombre de Froude. De sorte que les équations adimensionnées (3.30) et (3.33) s'écrivent respectivement:

$$\mathbf{V}_t + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} + \nabla\Pi - \nu\nabla^2 \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (x, y) \in \mathcal{D}_t \quad (8)$$

$$\Pi - \frac{h}{Fr^2} + \nu[h_x(u_y + v_x) - 2v_y] = 0 \text{ en } y = h(x, t) \quad (9)$$

On introduit la fonction tourbillon $\omega = v_x - u_y$ et la fonction de courant ψ telle que $u = \psi_y$, $v = -\psi_x$. Les équations du mouvement deviennent alors

$$\omega_t + \mathbf{V} \cdot \nabla\omega - \frac{1}{Re}\nabla^2\omega = 0, \quad (10)$$

$$\nabla^2\psi + \omega = 0, \quad (11)$$

dans le domaine $\mathcal{D}(t) = (0 \leq x \leq A = L/\bar{h}_*, 0 \leq y \leq h)$, avec les conditions de surface libre en $y = h$:

$$h_t + \psi_y h_x + \psi_x = 0, \quad (12)$$

$$(h_x^2 - 1)(\omega + 2\psi_{xx}) - 4h_x\psi_{xy} = 0, \quad (13)$$

$$\Pi - \frac{h}{Fr^2} - \frac{1}{Re}[h_x(\omega + 2\psi_{xx}) - 2\psi_{xy}] = 0, \quad (14)$$

les conditions au fond du domaine:

$$\psi = \psi_f(x, t) \quad , \quad \psi_y = u_f(x, t) \quad (15)$$

et la condition initiale à $t = 0$:

$$h = h_0 \quad , \quad V = V_0 \quad \text{soit} \quad \omega = \omega_0, \quad (16)$$

Le nombre de Reynolds Re est défini par

$$Re = \bar{\rho} \bar{V}_* \bar{h}_* / \mu \quad (17)$$

La pression Π apparaissant dans l'équation (14) sera éliminée ultérieurement. Le changement de variables $X = 2\pi x/A$, $Y = 2y/h - 1$ est utilisé pour ramener le domaine variable $\mathcal{D}(t)$ au domaine fixe $\mathcal{D}_0 = (0 \leq X \leq 2\pi, -1 \leq Y \leq 1)$. Les équations (10) et (11) deviennent alors:

$$\Omega_t - \frac{1}{Re} L(\Omega, H) - (1 + Y) \frac{H_t}{H} \Omega_Y + C(\Omega, \Psi, H) = 0, \quad (18)$$

$$L(\Psi, H) + \Omega = 0, \quad (19)$$

où Ω , Ψ et H désignent respectivement le tourbillon ω , la fonction de courant ψ et la hauteur h dans les nouvelles variables. Le terme C contient les termes de convection nonlinéaires $V \cdot \nabla \omega$ et L est le laplacien transformé, soit:

$$L(\phi, H) = \theta^2 \phi_{XX} + \frac{4}{H^2} \phi_{YY} + M(\phi, H), \quad (20)$$

où $\theta = 2\pi/A$ et M est un opérateur différentiel nonlinéaire. Les conditions de surface libre deviennent

$$H_t + \theta \Psi_X = 0, \quad \text{en } Y = 1 \quad (21)$$

$$\Omega + 2\theta^2 \Psi_{XX} + Q(\Omega, \Psi, H) = 0, \quad \text{en } Y = 1 \quad (22)$$

$$2\Psi_{Yt} + \frac{2}{Re} (\Omega_Y - 2\theta^2 \Psi_{XY}) + \frac{\theta}{Fr^2} H H_X + R(\Omega, \Psi, H) = 0. \quad (23)$$

Le terme Q dans l'équation (22) est défini par

$$Q = \theta^2(H_X^2\Omega - 4H_{XX}\Psi_Y/H). \quad (24)$$

L'équation (23) est obtenue après élimination de la pression Π dans (14). Pour cela on dérive par rapport à X l'équation (14) (exprimée dans les nouvelles coordonnées) et on élimine le gradient tangentiel de pression $\nabla\Pi.t = \theta\Pi_X$ grâce à la projection tangentielle de l'équation de quantité de mouvement sur la surface libre. Les conditions au fond $Y = -1$ deviennent

$$\Psi = \Psi_f, \quad \Psi_Y = \frac{1}{2}HU_f \quad (25)$$

et la condition initiale sur Ψ_X, Ψ_Y, Ω et H sont déduites de (16).

3 Résolution numérique du problème

3.1 Discrétisation temporelle

La discrétisation temporelle des équations fait appel à un schéma totalement implicite, précis au second ordre du type *ER2* (Voir [1]). Ainsi donc les équations du tourbillon et de la fonction de courant sont respectivement discrétisées par

$$\frac{3\Omega^{n+1} - 4\Omega^n + \Omega^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{1}{Re}L(\Omega^{n+1}, H^{n+1}) + D(\Omega^{n+1}, \Psi^{n+1}, H^{n+1}) = 0, \quad (26)$$

$$L(\Psi^{n+1}, H^{n+1}) + \Omega^{n+1} = 0, \quad (27)$$

où $D(\Omega, \Psi, H) = -(1+Y)\frac{H_t}{H}\Omega_Y + \frac{2\theta}{H}(\Psi_Y\Omega_X - \Psi_X\Omega_Y)$. Les conditions dynamiques (22) et (23) en $Y = 1$ sont discrétisées respectivement par

$$\Omega^{n+1} + 2\theta^2\Psi_{XX}^{n+1} + Q(\Omega^{n+1}, \Psi^{n+1}, H^{n+1}) = 0 \quad (28)$$

$$\frac{3\Psi_Y^{n+1} - 4\Psi_Y^n + \Psi_Y^{n-1}}{\Delta t} + \frac{2}{Re}(\Omega_Y^{n+1} - 2\theta^2\Psi_{XXY}^{n+1}) + \frac{\theta}{Fr^2}(HH_X)^{n+1} + R(\Omega, \Psi, H)^{n+1} = 0 \quad (29)$$

La discrétisation temporelle de l'équation cinématique s'écrit

$$\frac{3H^{n+1} - 4H^n + H^{n-1}}{2\Delta t} + \theta\Psi_X^{n+1} = 0 \text{ en } Y = 1 \quad (30)$$

Enfin les conditions aux limites en $Y = -1$ sont

$$\Psi^{n+1} = \Psi_f^{n+1}, \Psi_Y^{n+1} = \frac{1}{2}(HU_f)^{n+1} \quad (31)$$

On est ainsi conduit à chaque pas de temps, à la résolution du problème nonlinéaire constitué des équations (26)–(27) associées aux conditions aux bords (28)–(31). La résolution d'un tel problème fait appel à un processus itératif que nous allons maintenant décrire.

3.1.1 Equations de base des méthodes de résolution itérative

Pour résoudre les équations (26)–(27) associées aux conditions aux bords (28)–(31), on procède de la façon suivante: On introduit $\delta\Omega$, $\delta\Psi$ et δH les incréments respectifs de Ω , Ψ et H ,

$$\begin{cases} \delta\Omega^{m+1} = \Omega^{n+1,m+1} - \Omega^{n+1,m} \\ \delta\Psi^{m+1} = \Psi^{n+1,m+1} - \Psi^{n+1,m} \\ \delta H^{m+1} = H^{n+1,m+1} - H^{n+1,m} \end{cases} \quad (32)$$

L'indice n porte sur le pas de temps et l'indice m correspond aux itérations. Si l'on pose $\phi^m = (\Omega^m, \Psi^m, H^m)$ et $\delta\phi^{m+1} = (\delta\Omega^{m+1}, \delta\Psi^{m+1}, \delta H^{m+1})$, le problème (26)–(30) peut alors se mettre sous la forme symbolique

$$\mathcal{A}\phi = f \quad (33)$$

où \mathcal{A} est un opérateur nonlinéaire. La résolution itérative de (34) consiste à écrire

$$\mathcal{A}_0(\delta\phi^{m+1}) = \alpha_m(-\mathcal{A}\phi^m + f) \quad (34)$$

où l'opérateur de préconditionnement \mathcal{A}_0 est choisi assez voisin de \mathcal{A} et α_m est un paramètre de relaxation. La procédure itérative s'écrit alors:

1. Initialisation

1.a On se donne ϕ^0

1.b On calcule $\mathcal{R}_0 = f - \mathcal{A}\phi^0$

2. Itération:

- 2.a On résout $\mathcal{A}_0 \delta \phi^{m+1} = \mathcal{R}^m$
- 2.b On calcule α_m
- 2.c On écrit que $\phi^{m+1} = \phi^m + \alpha_m \delta \phi^{m+1}$
- 2.d On calcule $\mathcal{R}^{m+1} = f - \mathcal{A} \phi^{m+1}$
- 2.e Test de convergence

Concrètement, les processus itératifs que nous proposons consistent à écrire pour les équations (26) et (27) du tourbillon et de la fonction de courant respectivement

$$\left[\frac{3}{2\Delta t} - \frac{1}{Re} L(\cdot, H_a) \right] \delta \Omega^{m+1} = \alpha_m \left[- \frac{3\Omega^{n+1,m} - 4\Omega^n + \Omega^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{1}{Re} L(\Omega^{n+1,m}, H^{n+1,m}) - D^{n+1,m} \right] \quad (35)$$

$$-L(\delta \Psi^{m+1}, H_a) - \delta \Omega^{m+1} = \alpha_m [L(\Psi^{n+1,m}, H^{n+1,m}) + \Omega^{n+1,m}] \quad (36)$$

où α_m est un paramètre de relaxation et l'opérateur de préconditionnement linéaire $L(\cdot, H_a)$ est défini par $L(\phi, H_a) = \theta^2 \phi_{XX} + (4/H_a^2) \phi_{YY}$, H_a étant une constante. De même, pour les conditions dynamiques (28) et (29), on écrit respectivement

$$-\delta \Omega^{n+1} - 2\theta^2 \delta \Psi_{XX}^{m+1} = \alpha_m (\Omega^{n+1,m} + 2\theta^2 \Psi_{XX}^{n+1,m} + Q^{n+1,m}) \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{\Delta t} \delta \Psi_Y^{m+1} + \frac{2}{Re} (\delta \Omega_Y^{m+1} - 2\theta^2 \delta \Psi_{XXY}^{m+1}) &= \alpha_m \left[\frac{3\Psi_Y^{n+1} - 4\Psi_Y^n + \Psi_Y^{n-1}}{\Delta t} \right. \\ &\left. + \frac{2}{Re} (\Omega_Y^{n+1} - 2\theta^2 \Psi_{XXY}^{n+1}) + \frac{\theta}{Fr^2} (HH_X)^{n+1} + R(\Omega, \Psi, H)^{n+1} \right] \end{aligned} \quad (38)$$

Enfin pour la condition cinématique (30), on a

$$\frac{3}{2\Delta t} \delta H^{m+1} + \theta \delta \Psi_X^{m+1} = \alpha_m \left[- \frac{3H^{n+1,m} - 4H^n + H^{n-1}}{2\Delta t} - \theta \Psi_X^{n+1,m} \right] \quad (39)$$

Les conditions (31) au fond du domaine fournissent:

$$\delta \Psi^{m+1} = \alpha_m [\Psi_f^{n+1} - \Psi^{n+1,m}], \quad \delta \Psi_Y^{m+1} = \alpha_m \left[\frac{1}{2} (HU_f)^{n+1} - \Psi_Y^{n+1,m} \right] \quad (40)$$

De telle sorte qu'après convergence du processus itératif (i.e. lorsque $\|\delta \phi^m\| \rightarrow 0$), les équations du problème (26)–(31) sont satisfaites. Pour démarrer le processus itératif à

chaque pas de temps, on se sert de la solution numérique calculée au pas précédent, soit $\Omega^{n+1,0} = \Omega^n$, $\Psi^{n+1,0} = \Psi^n$, $H^{n+1,0} = H^n$.

Nous analysons ici différentes options pour le choix de α_m . La méthode la plus simple est celle de Richardson où α_m est pris de façon constante. Nous présentons aussi la méthode dite du résidu minimum avec préconditionnement (Preconditioned Minimal Residual "PMR") où le paramètre α_m est déterminé de façon à minimiser la norme euclidienne du résidu $\|\mathcal{R}^m - \alpha_m \mathcal{A} \delta \phi^{m+1}\|$, soit

$$\alpha_m = \frac{\langle \mathcal{R}^m, \mathcal{A} \delta \phi^{m+1} \rangle}{\|\mathcal{A} \delta \phi^{m+1}\|^2} \quad (41)$$

(Voir [2] pour plus de détails sur ces méthodes itératives). Enfin nous présentons un nouveau choix du paramètre de relaxation

$$\alpha_m = \frac{\|\mathcal{R}^m\|}{\|\mathcal{A}(\delta \phi^{m+1})\|} = \frac{\|\mathcal{A}_0(\delta \phi^{m+1})\|}{\|\mathcal{A}(\delta \phi^{m+1})\|} \quad (42)$$

Ce dernier choix du paramètre de relaxation n'est pas en théorie un choix optimal. Cependant dans le cas linéaire, on peut montrer qu'un tel choix conduit à une réduction substantielle du résidu à chaque itération quand il est associé à un bon préconditionnement, c'est à dire si $\mathcal{A}_0 \approx \mathcal{A}$ (Voir [6] pour plus de détails). Dans la présente situation où les operateurs sont nonlinéaires cette méthode s'est révélée être supérieure à la méthodes "PMR" dans des situations présentant de très forts gradients.

3.2 Discrétisation spatiale

Dans la direction de périodicité, l'approximation est basée sur les séries de Fourier. Soient $\hat{\omega}_k$, $\hat{\psi}_k$ et \hat{h}_k les coefficients de Fourier des incréments $\delta \Omega^{n+1}$, $\delta \Psi^{n+1}$ et δH^{n+1} , respectivement. Le problème monodimensionnel donnant les coefficients ($\hat{\omega}_k$, $\hat{\psi}_k$) pour chaque valeur de k se déduit des équations (37)- (40) et est de la forme

$$\hat{\omega}_k'' - \lambda_k \hat{\omega}_k = \hat{f}_k \quad , \quad -1 < Y < 1, \quad (43)$$

$$\hat{\psi}_k'' - \mu_k \hat{\psi}_k + \nu_k \hat{\omega}_k = \hat{g}_k \quad , \quad -1 < Y < 1, \quad (44)$$

avec les conditions de surface libre

$$\hat{\omega}_k - \kappa_k \hat{\psi}_k = \hat{s}_k \quad \text{en } Y = 1, \quad (45)$$

$$\hat{\omega}'_k + \gamma_k \hat{\psi}'_k + \delta_k \hat{\psi}_k = \hat{t}_k \quad \text{en } Y = 1 \quad (46)$$

et les conditions au fond du domaine

$$\hat{\psi}_k = 0, \quad \hat{\psi}'_k = 0 \quad \text{en } Y = -1. \quad (47)$$

Dans ces équations, λ_k , μ_k , ν_k , κ_k , γ_k et δ_k sont des constantes strictement positives. Les seconds membres sont évalués par la technique classique pseudospectrale utilisant des FFT. La solution du problème (43)-(47) se fait par la méthode de la matrice d'influence. On est alors conduit à des problèmes de Helmholtz avec des conditions de Dirichlet. La discrétisation de ces problèmes se fait en collocation-Chebyshev basée sur les points de Gauss-Lobatto $Y_j = \cos(\pi j/N)$, $j = 0, \dots, N$. Ensuite, l'incrément de la hauteur est fourni par (39), soit:

$$\hat{h}_k = -i(\alpha_m k/\sigma) \hat{\psi}_k + \hat{z}_k, \quad (\hat{z}^2 = -1). \quad (48)$$

3.3 Résultats numériques

L'algorithme a été validé dans différentes situations: solution analytique, comparaison avec des résultats obtenus par [5] utilisant la méthode des éléments finis. Nous présentons ici des résultats obtenus sur un problème d'injection-extrusion. La situation physique est celle où l'on injecte et retire simultanément du fluide au fond du domaine. La vitesse d'injection est:

$$U = 0, \quad V = \sin t \sin X. \quad (49)$$

Le tableau 1 permet de comparer les 3 méthodes itératives étudiées dans un cas où la déformation est assez faible ($H_{max} = 1.076$, $H_{min} = 0.906$). Dans ce tableau, $\bar{n}it$ désigne le nombre moyen d'itérations par pas de temps, cpu est le temps CPU (CRAY T3E) par itération et cpu le temps CPU moyen par pas de temps. Le critère de convergence étant $\|\delta\phi^{m+1}\| \leq 10^{-5}$. On constate que les méthodes utilisant un paramètre de relaxation variable convergent plus vite que la méthode de Richardson. En revanche, cette dernière est largement moins coûteuse par itération. Pour de fortes déformations, la méthode PMR ne converge pas. Le tableau 2, avec $Fr = 1.30$ montre la supériorité de la nouvelle méthode sur celle de Richardson, cette dernière nécessitant un faible paramètre de relaxation et donc un grand nombre d'itérations pour converger.

La nouvelle méthode itérative permet de calculer sans difficulté des situations raides comme celle correspondant à un nombre de Froude $Fr = 1.35$. On obtient dans ce cas de fortes déformations comme le montrent les figures 1. Ces figures présentent les profils de la surface libre à divers instants. Les lignes de niveau du tourbillon correspondant à ces profils sont montrés par les Figures 1.a et les lignes de courant par les figures 1.b.

	Richardson($\alpha_m = 0.75$)	"PMR"	nouvelle méthode
<i>nit</i>	11.28	8.3	8.3
<i>cpu</i>	$7.16 \times 10^{-3} sec$	$1.069 \times 10^{-2} sec$	$1.053 \times 10^{-2} sec$
<i>c̄pu</i>	0.081s	0.089s	0.084s

Table 1: $Re = 100$, $Fr = 1$, $K_f = 18$, $N_c = 30$, $\Delta t = 10^{-2}$

	Richardson($\alpha_m = 0.4$)	nouvelle méthode
<i>nit</i>	33.85	17.5
<i>cpu</i>	0.242sec	0.184sec

Table 2: $Re = 100$, $Fr = 1.30$, $K_f = 18$, $N_c = 30$, $\Delta t = 10^{-2}$

Conclusion

Une méthode spectrale pour l'approximation numérique des écoulement à surface instationnaires à surface libre a été présenté. La méthode utilise un schéma totalement implicite en temps. Les essais numériques présentés sur un problème d'injection-extrusion montrent une bonne performance de l'algorithme dans des situations raides. L'étude a été effectuée dans avec l'hypothèse de périodicité dans une direction. On pourrait s'affranchir de cette hypothèse en utilisant les ingrédients suivants: méthode de la matrice d'influence, approximation collocation-Tchebychev, technique de diagonalisation.

References

- [1] J.M.Vanel, P.Bontoux and R. Peyret, "A pseudospectral solution of vorticity-stream function equations using the influence matrix technique" in "Numerical Methods for Fluid Dynamics II", K.W. Morton and M. J. Baines, eds. p.463-475, Clarendon Press, Oxford, 1986.
- [2] C. Canuto and A. Quarteroni, "Preconditioned minimal residual method for Chebyshev spectral calculations", J. Comput. Phys., vol.60, p. 31 5-337, 1985.
- [3] U. Ehrenstein and R. Peyret, "A Chebyshev-collocation method for the Navier-Stokes equations with application to double-diffusive convection", Int. J. Num. Meth. in Fluids, vol.9,p.427-452,1989.
- [4] J.V. Wehausen and E.V. Laitone, "Surface Waves", Handbuch der Physik, vol.9,p.446-778,1960.
- [5] F. Muttin, T. Coupez, M. Bellet and J.L. Chenot, "Lagrangian finite-element analysis of time-dependent viscous free-surface flows using an automatic remeshing technique. Application to metal casting flow", Int. J. Numer. Meth. Eng. (to appear).

- [6] A. Garba, "Méthodes spectrales en domaines non rectangulaires. Application au calcul d'écoulements à surface libre", Thèse de l'université de Nice-Sophia-Antipolis, Juin 1993.

- [6] A. Garba, "Méthodes spectrales en domaines non rectangulaires. Application au calcul d'écoulements à surface libre", Thèse de l'université de Nice-Sophia-Antipolis, Juin 1993.

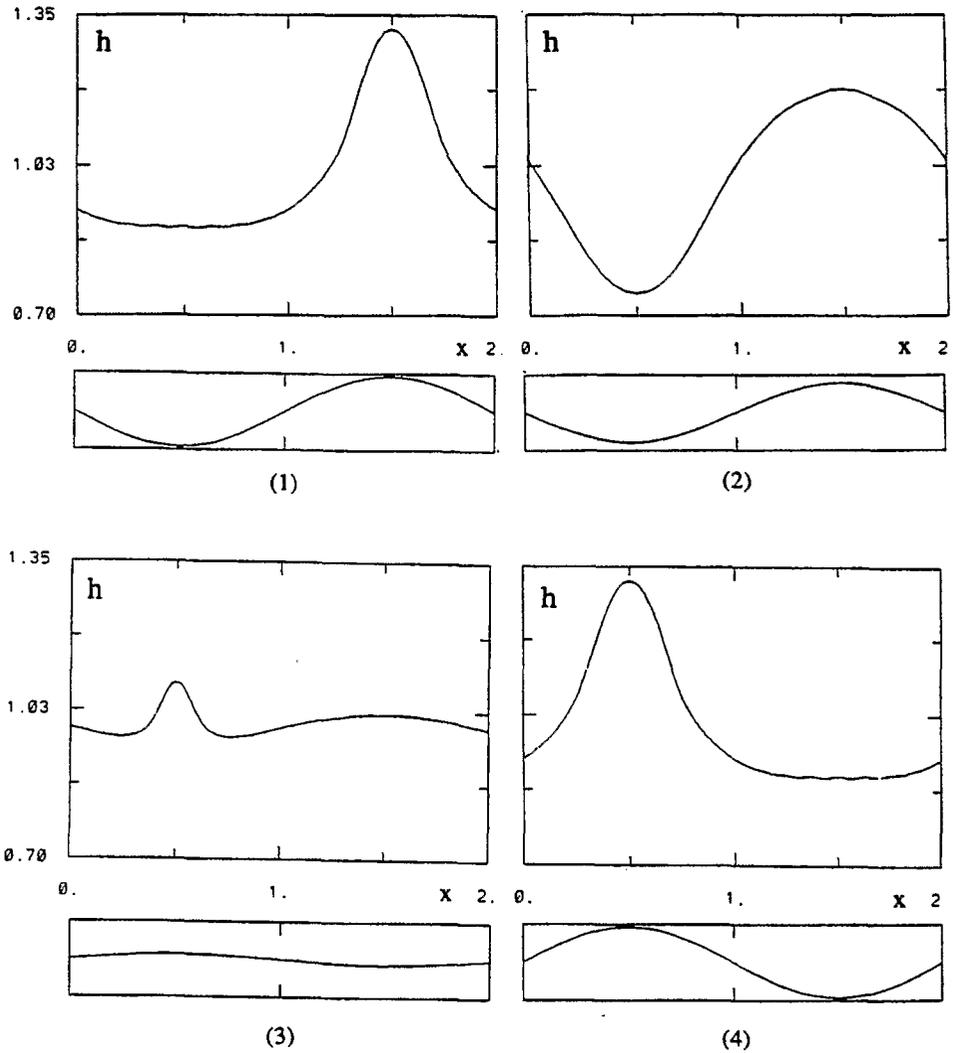


Figure 1 : Injection-extrusion instationnaire: $A = 2$, $Re = 100$, $Fr = 1.35$.

Profils de la surface libre et vitesse au fond, aux instants:

(1) $t = 35.74$, (2) $t = 35.74 + \pi/3$

(3) $t = 35.74 + 2\pi/3$, (4) $t = 35.74 + \pi$

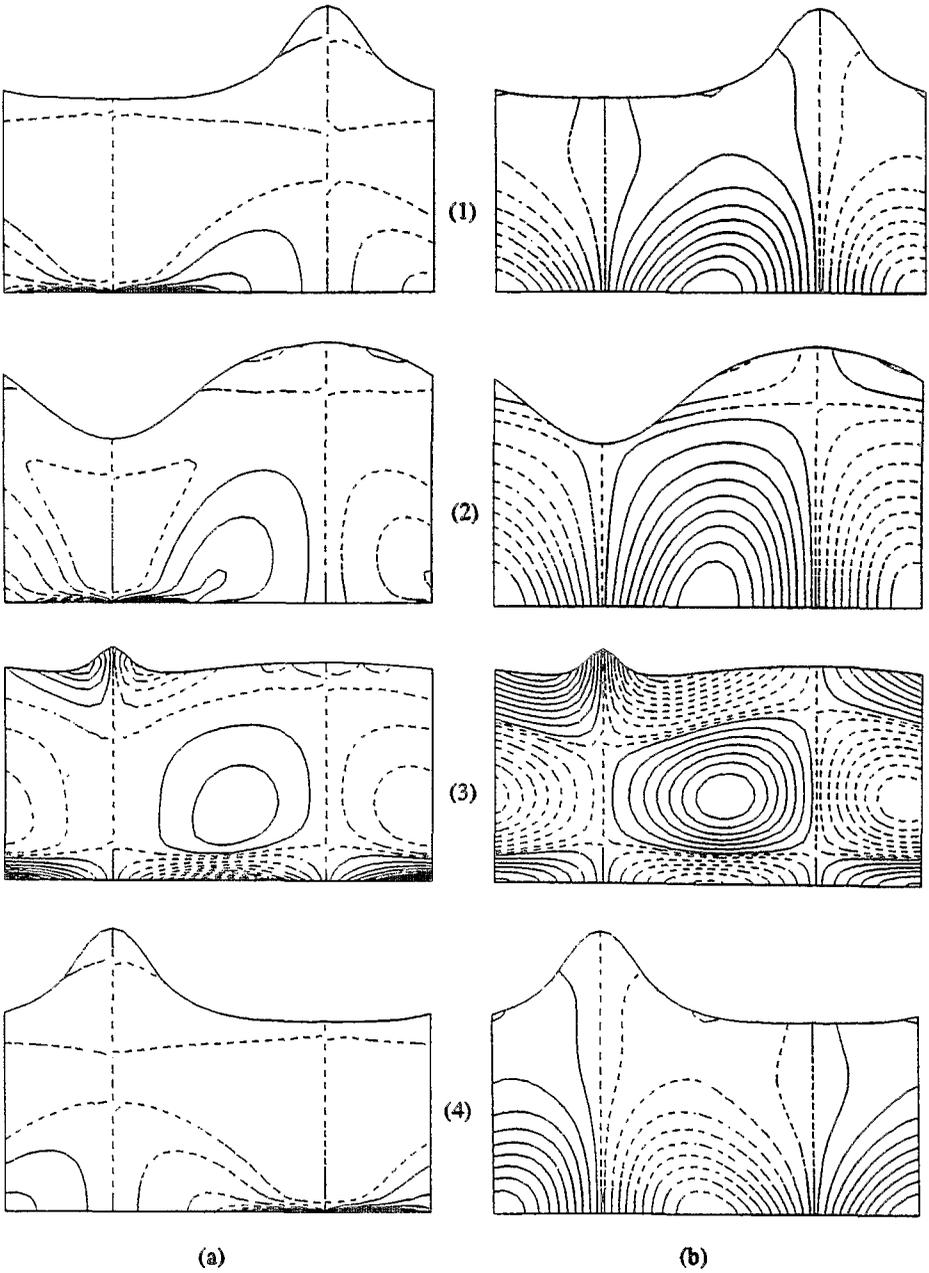


Figure 2 . : Injection-extrusion instationnaire: $A = 2$, $Re = 100$, $Fr = 1.35$.

(a) Lignes iso-tourbillon. (b) Lignes de courant, aux instants:

(1) $t = 35.74$, (2) $t = 35.74 + \pi/3$

(3) $t = 35.74 + 2\pi/3$, (4) $t = 35.74 + \pi$