

Un outil de paramétrage en reconstruction de surface gauche

OULD DELLAHY MALOUM Isselmou
Faculté des Sciences et Techniques de Nouakchott &
LIGIM, Bât. 710, Université Lyon I,
43, Bd. du 11 Nov. 1918,
69622 Villeurbanne cedex
France
ould@bat710.univ-lyon1.fr

Mots clés. Paramétrisation, reconstruction de surface, données sans structure, interpolation, approximation

Résumé. Ce papier présente une nouvelle approche permettant d'obtenir par interpolation ou par approximation, un modèle surfacique à partir d'un ensemble de points, saisis sur une surface. Aucune structuration particulière n'est imposée à ces points (scattered data).

Dans la littérature, la "reconstruction de surface gauche" est envisagée sous deux formes : approximation et interpolation. Un problème fondamental souvent sous-jacent à la reconstruction est celui de la paramétrisation, qui est un préalable imposé par les modèles en produit tensoriel. Dans la situation simple d'une grille régulière de points, des méthodes empruntées à la reconstruction de courbe peuvent être appliquées :

- paramétrage uniforme
- paramétrage par longueur de corde
- paramétrage par longueur d'arc
- ...

En revanche, quand le nuage de points ne dégage pas d'axes privilégiés, ou quand il est saisi au hasard (cf. figure 1(b)), les méthodes ci-dessus ne sont plus appropriées.

Les transformations conformes constituent un outil puissant permettant de mettre en bijection l'intérieur de deux contours fermés quelconques. Si l'un des contours est l'espace de paramétrage et l'autre, déduit de la "forme" du nuage de points, on a là, un moyen d'associer deux paramètres (u, v) à chacun des points du nuage.

Nous proposons dans cet article l'exploration de la composition de plusieurs fonctions de paramétrage, dont une transformation conforme.

Abstract. The tensor product surface reconstruction from a cloud of points requires a parameterization. In most cases the cloud is structured as a regular grid of points. Hence we can use some methods used for curve parameterization :

- uniform parameterization
- chord length parameterization
- arc length parameterization
- ...

However, when the cloud has no privileged direction or in case of scattered data, these methods become inappropriate. So we use a powerful mathematical tool (the conformal mapping) to define a one-to-one transformation between the parameter space and the inner of a contour inferred from the cloud of points.

1 Modèle paramétrique

Nous nous proposons d'ores et déjà de définir le paramétrage dans son sens le plus large. Sans perte de généralité, nous allons considérer le cas d'une courbe $2D$.

Soit une courbe C dans l'espace \mathbb{R}^2 .

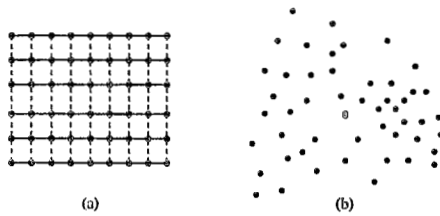


Figure 1: Exemples de données structurées en grille régulière (a), et de données non structurées (b).

On peut représenter cette courbe sous trois formes différentes :

- Forme explicite $y = f(x)$. Exemple : $y = 3x^2 + 2$
- Forme implicite. Exemple :

$$\begin{aligned} 1 &= xy \\ xy + x^y &= \sqrt{xy} \end{aligned}$$

- Forme paramétrique Elle comprend en premier lieu deux équations explicites, chacune définissant une fonction. Dans les deux cas, le domaine de définition est le même. Ainsi, sous la forme générale on a :

$$\begin{aligned} f_1 : t &\longrightarrow x = f_1(t) \\ f_2 : t &\longrightarrow y = f_2(t) \end{aligned}$$

Si maintenant on affecte à chaque $x_0 = f_1(t_0)$ la valeur $y_0 = f_2(t_0)$, on obtient une application des valeurs de f_1 sur les valeurs de f_2 . Il est évident que cette application peut être définie d'une infinité de manières. Et c'est cette liberté que nous explorons au cours de ce travail.

Si la fonction $y = f(x)$ est représentée par deux fonctions différentes, de la forme $x = f_1(t)$ et $y = f_2(t)$, la variable t est appelée paramètre. Au moyen d'une telle représentation paramétrique une relation implicite donnée entre x et y peut être représentée à l'aide de deux fonctions explicites. La seule condition imposée est l'unicité du domaine de définition de f_1 et f_2 .

2 Reconstruction de surface paramétrique

2.1 Notions de théorie des surfaces

Nous avons vu qu'une courbe paramétrique s'exprime par deux fonctions f_1 et f_2 d'un paramètre t . Une surface paramétrique $S(u, v)$ a besoin de deux paramètres (u, v) appartenant à un domaine de paramétrage \mathbb{P} (souvent plan).

De façon similaire au cas des courbes, les paramètres d'une surface peuvent être choisis arbitrairement ; au lieu de u et v on peut prendre comme paramètres r et s dans un domaine \mathbb{Q} du plan s'il existe une transformation bi-univoque [GK75] de la forme :

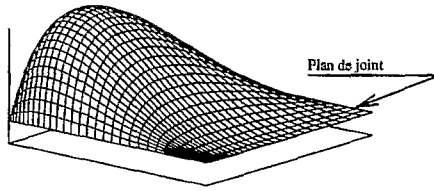


Figure 2: Exemple de surface démontable.

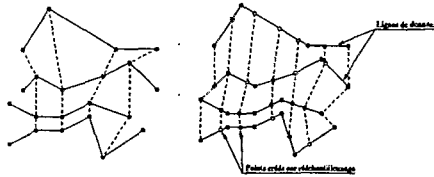


Figure 3: Structure en ligne et rééchantillonnage.

$$\begin{cases} r = r(u, v) \\ s = s(u, v) \end{cases} \quad \text{telle que} \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial u} & \frac{\partial r}{\partial v} \\ \frac{\partial s}{\partial u} & \frac{\partial s}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

2.2 Généralités

Associer deux valeurs de paramètres (u, v) aux points d'une surface, nécessite de distinguer de nouveaux concepts relatifs au nuage de points (figure 1) :

1. Concept de grille régulière : la notion de voisinage d'un point est définie. Selon sa position dans la grille, un point peut avoir 2, 3 ou 4 voisins.
2. Concept de données non structurées : cette notion englobe le cas général de points sans aucune idée de voisinage, et le cas de points extraits d'une grille régulière, où le voisinage est partiellement connu.
3. Concept de surface démontable défini par l'existence d'un plan appelé plan de joint sur lequel la projection de cette surface est bijective continue (cf. figure 2).

2.3 Méthodes de paramétrage connues

Parmi les quelques auteurs qui ont proposé des méthodes de paramétrage de grille régulière de points, on trouve Hoschek [HOS88]. L'algorithme d'approximation optimale qu'il propose pour les courbes admet, en effet, une généralisation simple au cas des surfaces.

D'autres auteurs appliquent simplement une extension des méthodes de paramétrage de courbes (uniforme, longueur de corde, ...). Nous avons fait appel à ce type de paramétrage dans des travaux récemment publiés (voir [DPSV95, EPS⁺94, SDV94]).

Dans le cas de nuages de points non structurés les modèles adoptés, dans la littérature, sont autres que des produits tensoriels.

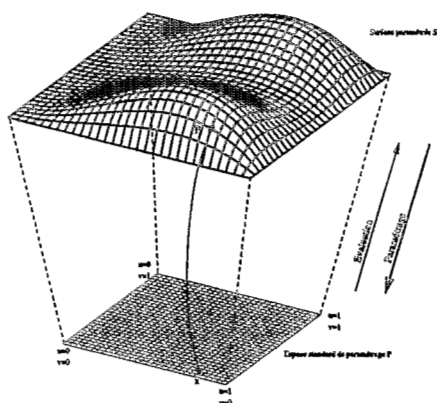


Figure 4: Problème du paramétrage de surface.

Certains systèmes de numérisation permettent d'obtenir des nuages partiellement structurés (structure en ligne ou "stripe". Cette structure en ligne a été exploitée dans le projet ESPRIT [DPSV94] pour générer un nuage de points en grille régulière, par rééchantillonnage (cf. figure 3)).

Le principe est de modéliser les lignes de données par des équations du paramètre $t \in [0, 1]$ et de les évaluer à des intervalles réguliers de t . Si le pas de rééchantillonnage est assez fin ou s'il y a surabondance de données, on peut estimer que la grille de points générée est "représentative" du nuage non structuré. A partir de là, on peut se permettre une reconstruction de surface utilisant l'une des méthodes de paramétrage citées plus haut.

L'autre type de nuage non structuré est celui de la figure 1 (b). Là, on peut supposer que les points sont saisis au hasard sur une surface inconnue.

De tels types de nuage peuvent être générés par un système de saisie suffisamment "intelligent" pour relever une densité de points, variable en fonction de la courbure locale de la zone digitalisée. Les données peuvent aussi être saisies sur un terrain vaste par mesures ponctuelles (ex. : mesures de température ou de pluviométrie sur la surface d'une région de la terre).

Il est évident qu'il est impossible d'utiliser les méthodes classiques de paramétrage, basées sur les notions de voisinage ou de direction de paramétrage.

Faute d'orientation privilégiée et de structuration des données, nous proposons un outil assurant des propriétés de voisinage : les transformations conformes.

3 Paramétrage par transformation conforme

Nous sommes en présence d'un nuage G^N de points $p_i, i = 1, \dots, N$ saisi au hasard sur, ou à proximité d'une surface inconnue S . Nous envisageons la reconstruction de cette surface S en l'approximant par une surface S^N .

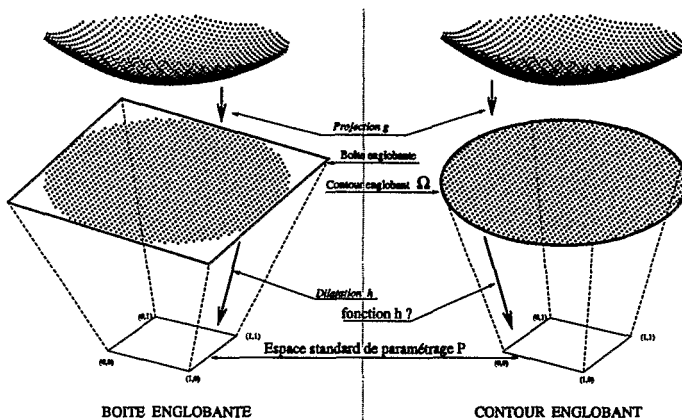


Figure 5: Méthode de la boîte englobante et du contour englobant. (Nuage de points, représentant un verre de lunette, fourni par Essilor).

Le problème de paramétrage qui découle de cette reconstruction de surface consiste à définir une fonction f telle que (cf. figure 4) :

$$f : G^N \longrightarrow D^N \subset \mathbb{P} \quad (1)$$

$$p_i \longmapsto f(p_i) = (u_i, v_i) \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

(D^N est le nuage 2D résultat de la projection du nuage 3D G^N sur le plan de joint \mathbb{P} .)

Précisons que le modèle de surface à reconstruire est un produit tensoriel et que l'espace de paramétrage \mathbb{P} est le carré unité.

La fonction f , définie en (1) permet de passer d'un espace 3D à un espace 2D. C'est pour cela qu'on la définit comme étant la composition d'une projection par une déformation plane :

$$f : G^N \subset \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \Omega \xrightarrow{h} \mathbb{P} \quad (2)$$

où g est une simple projection sur le plan de joint du nuage et h est appelée fonction principale de paramétrage.

Ω est un domaine plan, éventuellement non convexe, extrait de la projection du nuage G^N sur son plan de joint.

Deux définitions possibles de Ω se dégagent induisant les deux méthodes de paramétrage que nous proposons : boîte englobante et contour englobant (voir figure 5).

La première méthode ne pose pas de problème particulier. Elle servira de méthode de comparaison. En revanche le contour englobant pose deux problèmes dans l'ordre :

- définir Ω
- définir la fonction de paramétrage h .

3.1 Ω : notion d' α -forme

Soient :

- $\alpha \in \mathbb{R}^+$
- α_{xy} le complémentaire dans \mathbb{R}^2 du disque de rayon α , centré en (x, y) , tel que $D^N \subset \alpha_{xy}$,

On définit Ω comme étant (cf. figure 6) :

$$\Omega = \bigcap_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \alpha_{xy}$$

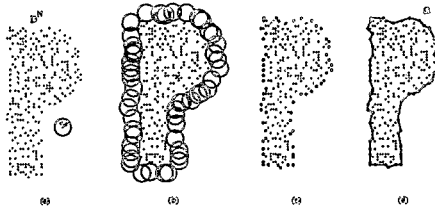


Figure 6: Construction du contour Ω :

- (a) nuage de points D^N sous forme de "P" et disque de rayon α ;
- (b) ensemble des disques définissant la α -enveloppe ;
- (c) définition des points α -extrêmes ;
- (d) définition de l' α -forme Ω .

Le problème de recherche d'une α -forme a été traité par Melkemi [MM95] en faisant appel aux diagrammes de Voronoï. Herbert et al. [HM94] ont développé un algorithme optimal en $O(n \log n)$ faisant appel à une triangulation de Delaunay.

3.2 fonction de paramétrage h

h est une mise en correspondance entre le domaine Ω et l'intérieur du carré unité. Elle doit vérifier les conditions de composition de fonctions de paramétrage déjà citées en section 2.1. Elle doit notamment :

- être bijective
- admettre des dérivées partielles sur Ω
- vérifier $J(h, x) \neq 0 \forall x \in \Omega$ où $J(h, x)$ est la Jacobienne de h en x .

3.3 Solution $h =$ transformation conforme

Définition 1 : Une transformation conforme h , envoyant un domaine Ω_1 vers un domaine Ω_2 du plan \mathbb{C} , est une fonction analytique qui conserve les angles.

Elle est, par définition, dérivable, à dérivée non nulle et bijective sur Ω . Elle est donc bien une fonction de paramétrage conformément aux critères de la section 2.1.

3.3.1 Existence et unicité d'une transformation conforme

Le théorème de Riemann constitue le support théorique de notre méthode. Celui de Schwarz-Christoffel en est le support numérique [DEL95].

Théorème 1 de Riemann. Soient :

Ω un domaine simplement connexe de \mathbb{C}

a un point intérieur à Ω

ϕ un nombre réel.

Il existe une et une seule fonction analytique f envoyant Ω dans le disque unité. f est définie par :

$$f(a) = 0,$$

$$\arg f'(a) = \phi$$



Figure 7: Théorème de Riemann.

Théorème 2 de Schwarz-Christoffel. Soit un domaine polygonal Ω . Toute transformation conforme envoyant le disque unité sur Ω peut s'écrire :

$$w(z) = w_c + C \int_0^z \prod_{k=1}^{k=n} \left(1 - \frac{\tau}{z_k}\right)^{-\beta_k} d\tau$$

où (figure 8) :

w_c est l'image du centre du cercle

C est une constante de mise à l'échelle et d'orientation

β_k est l'angle extérieur (en nombre de fois π , $\beta_k \in \mathbb{R}$) du polygone au point p_k

z_k est l'antécédent de p_k sur le cercle unité

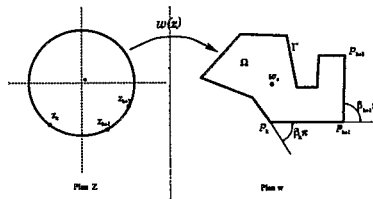


Figure 8: Théorème de Schwarz-Christoffel.

On peut consulter les démonstrations du théorème de Riemann et de celui de Schwarz-Christoffel dans [HEN93].

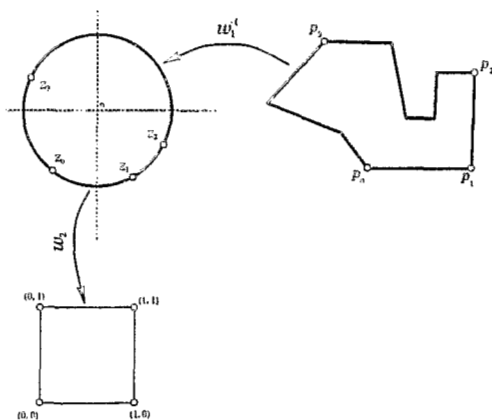


Figure 9: Paramétrage par double transformation conforme.

3.3.2 Théorème de Schwarz-Christoffel pour le paramétrage

Nous faisons une double utilisation du théorème de Schwarz-Christoffel afin de réaliser le paramétrage. Une première fois permet d'envoyer le polygone Ω dans le disque unité, une seconde fois pour envoyer le disque dans l'espace de paramétrage (voir figure 9).

Il est évident que cette double transformation est contrainte par le choix de quatre sommets privilégiés, appartenant au contour Ω . Ces sommets sont envoyés sur les quatre sommets du carré unité.

4 Application

4.1 Exemples

Nous avons choisi d'illustrer les deux méthodes de reconstruction par deux exemples concrets :

- Le T (figure 10) : nuage de points extrait d'une pièce moulée¹.
- Le verre de lunette (figure 5).

Ces deux exemples ont été choisis car ils illustrent bien les avantages et surtout les problèmes que soulève le paramétrage par transformation conforme.

4.2 Avantages et limites

Le caractère quadrangulaire des carreaux en produit tensoriel est quelque peu restreignant, en ce sens qu'une information visuelle importante est perdue : la forme du contour extérieur. Le carreau reconstruit par la méthode de la boîte englobante (figure 10(d)) en est l'illustration. C'est un carreau dont une partie importante est "loin" de tout point

¹Gracieusement fournie par la société italienne MECOF.

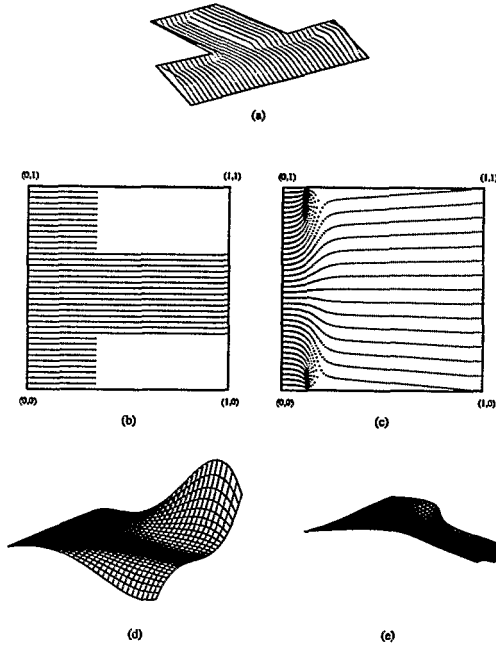


Figure 10: Nuage de points en forme de T, extrait d'une pièce moulée (a).
 Paramétrisation du T (b) : boîte englobante, (c) : contour englobant.
 Carreaux obtenus (d) : boîte englobante, (e) : contour englobant

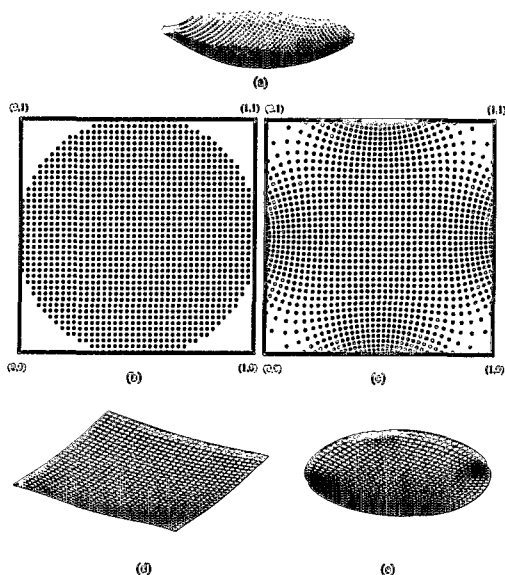


Figure 11: Modélisation d'un nuage saisi sur un verre de lunette (même légende que la figure 10).

du nuage initial. Le paramétrage par transformation conforme peut être un moyen de préserver cette information. On peut s'en apercevoir à travers la figure 10(e).

Notons que l'erreur d'approximation est sensiblement la même pour les deux méthodes de paramétrage.

4.2.1 Comportement au coin

Lorsque nous observons le voisinage des quatre coins du carreau, nous constatons la formation d'une "perturbation" locale en chacun. Le zoom de la figure 12 le montre plus clairement. Une "petite" zone du carreau est en auto-intersection.

4.2.2 Interprétation et remède

Les auteurs [ZEM86, PKW87, HEN93] qui se sont penchés sur le calcul numérique des transformations conformes se sont vite aperçus du phénomène de tassement² qui peut avoir lieu quand les deux contours mis en correspondance sont géométriquement "peu semblables". L'existence de zones de tassement dans une transformation conforme est toujours accompagnée de celle d'autres zones d'"étalement".

Nous avons établi un lien direct entre les zones perturbées et les zones d'étalement de la fonction de paramétrage. Le tassement peut être exprimé à l'aide de la dérivée première de la fonction de paramétrage h . Nous avons calculé et reporté sur la figure 13 le module de cette dérivée en chacun des points paramètres.

²Crowding phenomenon.

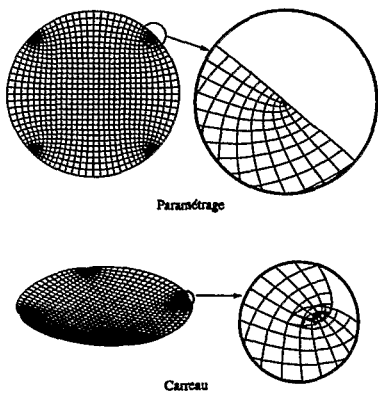


Figure 12: Fonction de paramétrage et carreau au voisinage des coins.

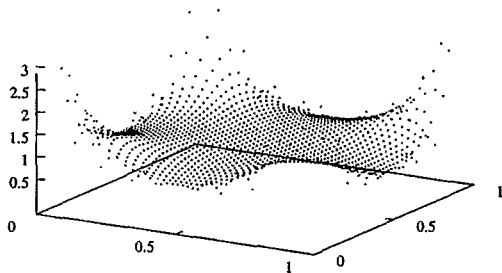


Figure 13: Le module de la dérivée de la fonction h exprime l'étalement local.

Le remède aux perturbations de coins est donc à chercher du côté de l'élimination du tassement en paramétrant avec une fonction garantissant de "petites" variations de la dérivée première. Dans le cas du verre de lunette, la dérivée peut tripler d'un point à l'autre (cf. figure 13).

5 Conclusion

Avec l'usage des transformations conformes, nous réconcilions, la notion de forme quadrangulaire, notion intrinsèque aux surfaces en produit tensoriel, avec la notion de contour de base, qui peut être quelconque et surtout sans contrainte de convexité. D'autre part, nous assurons le paramétrage d'un nuage de points sans structure échappant ainsi à la contrainte - fréquemment rencontrée en reconstruction de surface - de grille de points.

Enfin, les carreaux reconstruits "ressemblent" mieux au nuage, du point de vue de la forme extérieure de celui-ci ; ce qui permet une reconstruction guidée par les lignes caractéristiques de la surface numérisée à l'aide d'un processus de segmentation-reconstruction.

References

- [DEL95] I. OULD DELLAHY. Reconstruction de Surfaces Gauches à Partir de Données Non Structurées - Paramétrisation par des Transformations Conformes. PhD thesis, Université Claude Bernard - Lyon 1, 1995.
- [DPSV94] I. OULD DELLAHY, E. PERNA, B. SHARIAT, and D. VANDORPE. 3d reconstruction software. In *Seconde Pacific Conference on Computer Graphics and application*, China, pages 293-305, August 1994.
- [DPSV95] I. OULD DELLAHY, E. PERNA, B. SHARIAT, and D. VANDORPE. A methodology for surface fitting from range data. In *SIAM Geometric Design Conference*, Nashville Tennessee - USA, November 1995.
- [EPS+94] I. OULD-DELLAHY E., PERNA, B. SHARIAT, D. VANDORPE, S. BOUAKAZ, and M. MELKEMI. Surface reconstruction from range images. *6th International Conference on Engineering Computer Graphics and Descriptive Geometry*, Japan, pages 370-374, August 1994.
- [GK75] W. GELLERT and H. KÜSTNER. *Petite Encyclopedie des Mathematiques*. K. Pagoulatos, Athènes - Grèce, 1975.
- [HEN93] Peter HENRICI. *Applied and Computational Complex Analysis*, volume 3. Wiley Classics Library, 1993.
- [HM94] Herbert HEDELSBRUNNER and Ernst P. MÜCKE. Tree-dimensional alpha shapes. *ACM Transactions on Graphics*, 13(1):43-72, January 1994.
- [HOS88] J. HOSCHEK. Intrinsic parametrisation for approximation. *Computer Aided Geometric Design*, 5:27-31, 1988.
- [MM95] M. MELKEMI and I. MELKEMI. An algorithm for detecting dot patterns. *Computer Graphic International ACM SIGGRAPH/IEEE CG*, UK, June 1995.

- [PKW87] N. PAPAMICHAEL, C.A. KOKKINOS, and M.K. WARBY. Numerical techniques for conformal mapping onto a rectangle. *Journal of computational and Applied Mathematics*, pages 349–358, 1987.
- [SDV94] B. SHARIAT, I. OULD DELLAHY, and D. VANDORPE. 3d-scan : Saisie et reconstruction 3d. In *MICAD*, March 1994.
- [ZEM86] C. ZEMACH. A conformal map formula for difficult cases. *Numerical Conformal Mapping*, pages 207–215, 1986. North-Holland Amsterdam.