Une approche pour la représentation et la simplification des expressions booléennes

Sid-Ali AKIL
Institut National d'Informatique
Oued-Smar BP68M
Alger - Algérie
E-mail : cipap@ist.cerist.dz
Fax : (213) 2 51-61-56

Mots-clés : expression booléenne, réduction, simplification, chemin d'expression, graphe d'expression.

Résumé - Dans ce papier, nous nous intéressons au problème de réduction (ou simplification) des expressions booléennes. Nous présentons une approche différente des approches connues, telles que celles de Karnaugh et Quine-Mc Clusky. L'expression est modélisée sous la forme de chemins d'expression comprenant des termes ascendants et descendants. La simplification consiste à trouver les ascendants irréductibles.

Abstract - This paper presents a new approach for representing and simplifying boolean expressions. This method is different from those of Karnaugh maps or Quine-Mc Cluskey's method. Expression is modelled with expression paths comprising ascendant and descendant terms. The purpose of the simplification is to find the non-reductible terms.
Keywords : boolean expression, reduction, expression path, expression graph.

Introduction

La simplification des expressions booléennes est principalement réalisée par l'utilisation de trois méthodes principales, la méthode algébrique (utilisation des théorèmes de l'algèbre de Boole), celle des tableaux de Karnaugh (méthode graphique) et celle de Quine-Mc Cluskey. La première demande beaucoup d'intuition et d'expérience; la seconde est généralement utilisée facilement jusqu'à cinq variables; la troisième peut se programmer et permet de traiter des fonctions complexes. D'autres méthodes, moins connues, peuvent être citées, comme celle de Quine appelée méthode des consensus [QUI-52], celle de Nelson appelée double duale [NEL-54], ou de Tison [TIS-65]. Ce papier présente une nouvelle méthode basée sur deux opérations, absorption (regroupement ou union) et division (éclatement), et une technique de réduction de chemins d'expression.

Définitions et règles

Avant de détailler la méthode de représentation et de simplification, nous allons donner quelques définitions et règles de simplification. Nous montrons ensuite le principe de la méthode puis présentons des exemples d'applications.

Une fonction canonique peut être représentée selon divers modes (diagramme de Veitch, tableau de Karnaugh, diagrammes d'Euler Venn ...).

Dans la méthode que nous présentons, l'expression doit être de forme canonique disjonctive.

$$E = \sum_{i=1}^{n}(\pi_i) \quad \textit{Forme canonique disjonctive}$$

où π_i est le i-ème produit de l'expression. Exemple : $E = abc + \bar{a}b + b\bar{c}d$

Rappelons qu'en faisant usage des lois de l'algèbre de Boole, il est facile de mettre en évidence l'équivalence des deux formes canoniques, disjonctive et conjonctive.

Définition 1 : ascendant et descendant

Soit α un minterme quelconque de l'expression et x une variable donnée. Les deux mintermes αx et $\alpha\bar{x}$ sont appelés descendants de α par rapport à x et α est appelé ascendant. Les termes αx et $\alpha\bar{x}$ sont générés par simple division de α sur x.

Exemples : abc est l'ascendant de abcd et $abc\bar{d}$,
ab est l'ascendant de abc et $ab\bar{c}$,
abcd et $abc\bar{d}$ sont les deux descendants de abc.

Le *regroupement* des termes abcd et $abc\bar{d}$ sur la variable d donne abc.

La *division* du terme ab sur la variable c (ab/c) donne abc et $ab\bar{c}$. Les opérations division et regroupement sur la même variable sont mutuellement réciproques.

La représentation graphique donne :

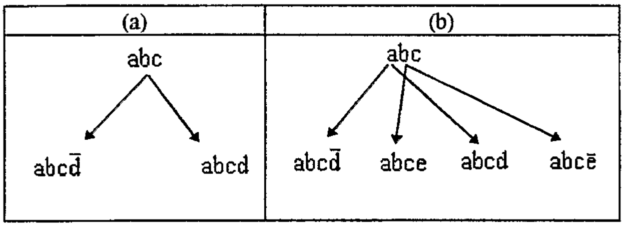


Fig. 1- ascendant et descendant

La division abc/d donne abcd et $abc\bar{d}$ (fig1-a). On peut aussi représenter différents descendants sur x du même ascendant (fig1-b).

Propriétés

L'ascendant de tous les ascendants est égal à 1.

Définition 2 : réseau booléen ou graphe d'expression

Une expression booléenne (de forme canonique disjonctive) peut être représentée par un graphe appelé *réseau booléen* ou *graphe d'expression* où les sommets représentent les termes de l'expression et/ou leurs ascendants et descendants et les arcs orientés représentent les relations ascendant-descendant.

Exemple: l'expression $E = ab + bc + abc + \bar{a}bc$ (1) est représentée par le graphe d'expression suivant :

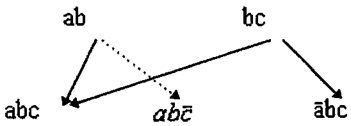


Fig. 2 - réseau booléen ou graphe d'expression

On remarque sur la figure 2 la présence du terme $ab\bar{c}$. Il peut faire partie du graphe d'expression, il ne change rien à la valeur de l'expression puisqu'il est descendant de ab, au même titre que abc.
La simplification d'une expression consiste à détecter et éliminer les termes redondants. Nous allons progressivement définir les règles de réduction.

De la définition 1, nous déduisons une première règle appelée règle d'absorption.
Règle 1 : Absorption (regroupement)
Toute expression de la forme $Ax + A\bar{x}$ ou $A+Ax$ peut être réduite en A;
On dit que A absorbe $Ax + A\bar{x}$ ou $A+Ax$.

Dans la figure 2, bc absorbe abc et $\bar{a}bc$, par regroupement sur a. Il reste donc les termes ab et bc. L'expression E (1) est réduite à ab + bc.

Règle 2 : Consensus
Toute expression de la forme $\alpha\bar{x} + \beta x + \alpha\beta$ peut être réduite en $\alpha\bar{x} + \beta x$. Le terme $\alpha\beta$ est appelé consensus [QUI-52], [TIS-64].
Représentons l'expression $a\bar{b}$ + bc + ac par son graphe d'expression, en y incluant les termes descendants $a\bar{b}\bar{c}$, $a\bar{b}c$, abc et $\bar{a}bc$.

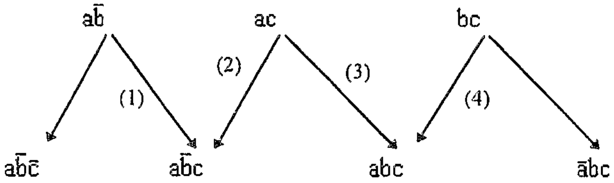


Fig. 3 - Réseau de $a\bar{b}$ + bc + ac

Les descendants de ac, c'est-à-dire $a\bar{b}c$ et abc sont contenus respectivement dans $a\bar{b}$ et bc, donc le terme ac est redondant. Il est appelé consensus.

Règle 3 :
Toute expression de la forme Ax + A peut être réduite en A.
Démonstration :
A contient Ax + $A\bar{x}$, donc A + Ax est contenue dans A. Ax + A = A (Ax est redondant).

$$Ax \longleftarrow A \longrightarrow A\bar{x}$$

<u>Définition 3</u> : Chemin d'expression
Une expression peut être représentée par un ou plusieurs chemins d'expression. Le chemin d'expression est l'ensemble des arcs qui relient les termes de l'expression ayant une relation ascendant-descendant entre eux, mais aussi les termes descendants et ascendants engendrés, s'il en existe.
Une expression peut avoir plusieurs chemins d'expression. Exemple ab+cd.
Le chemin d'expression est souvent mis en évidence grâce à la division ou le regroupement de certains termes.

Dans la figure 3, le chemin d'expression de $a\bar{b} + bc + ac$ est constitué des arcs (1), (2), (3) et (4). Il est mis en évidence par la division des termes $a\bar{b}, bc$ et ac.

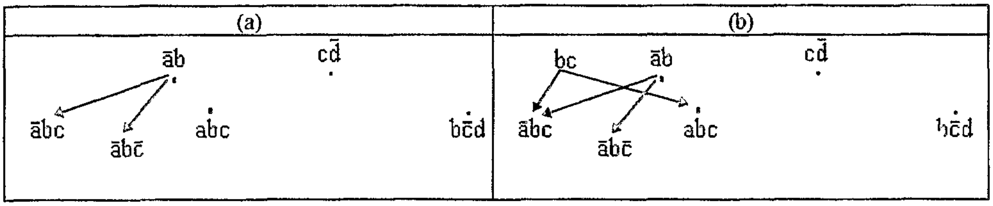
Principe de simplification

Pour chaque chemin d'expression construit, la simplification consiste à appliquer les règles de réduction. A chaque étape de simplification, le chemin d'expression est réduit pour ne contenir que les ascendants. La procédure de simplification est récursive. L'ascendant peut être réduit en descendant qui peut être à son tour réduit ou éliminé à l'étape suivante.

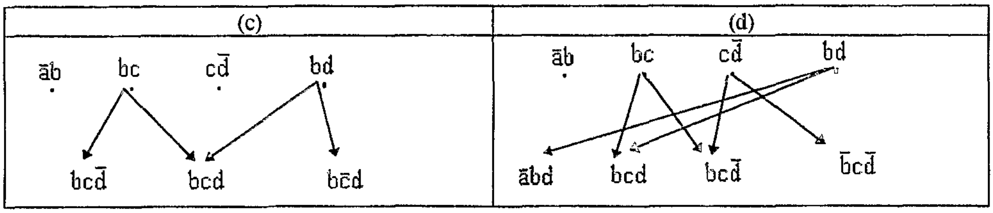
Nous donnons ci-dessous deux exemples pour montrer en détails la méthode de simplification.

Exemple n°1 : soit l'expression $E1 = \bar{a}b + c\bar{d} + abc + b\bar{c}d$

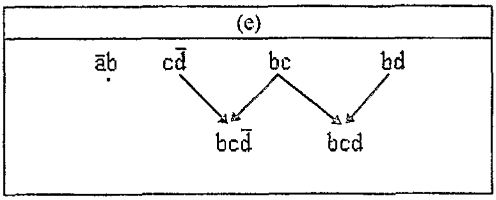
Construction du graphe



La construction du graphe et la mise en évidence du chemin d'expression ont donné naissance aux termes bc (fig.4-a,4-b) par division de $\bar{a}b$ sur c. Un chemin d'expression est défini; il est possible donc de le réduire par regroupement. Les termes $\bar{a}bc$ et $\bar{a}b\bar{c}$ sont regroupés dans $\bar{a}b$: le terme abc est absorbé par bc. L'expression E1 devient $E1 = \bar{a}b + bc + c\bar{d} + b\bar{c}d$.



En (c), on construit un nouveau chemin d'expression; bc est divisé en $bc\bar{d}$ et bcd, le terme $b\bar{c}d$ est ainsi associé à bd avec le terme bcd. L'expression E1 devient $E1 = \bar{a}b + bc + c\bar{d} + bd$, par regroupement. En (d), un autre chemin est exploré en procédant par division de bc, $c\bar{d}$ et bd.



bc est un consensus (règle n°2). Il est donc éliminé. Il reste dans l'expression initiale les termes $\bar{a}b$, $c\bar{d}$ et bd.
Donc $E1 = \bar{a}b + c\bar{d} + bd$.

En (e) nous montrons clairement l'existence du consensus.

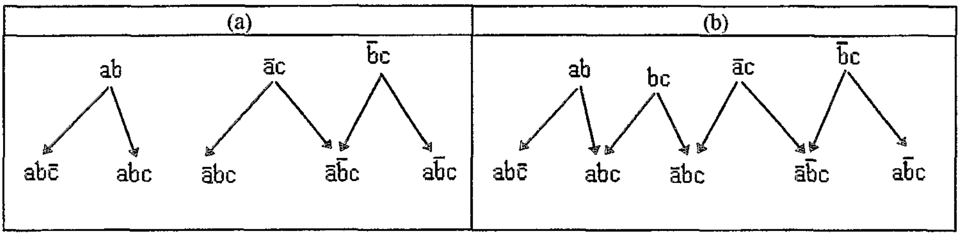
Exemple n°2 : réduire $E2 = ab + \bar{b}c + \bar{a}c$
Construction du graphe
En plaçant les termes de E2, nous ne trouvons pas de connexion (pas de chemin).
En (a), nous engendrons donc les termes descendants par division.

$$ab \rightarrow abc,\ ab\bar{c}$$

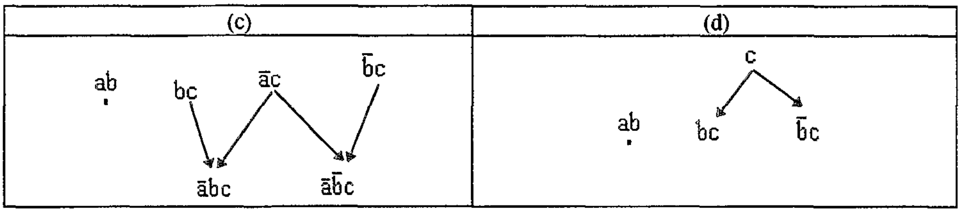
$$\bar{a}c \rightarrow \bar{a}bc,\ \bar{a}\bar{b}c$$

$$\bar{b}c \rightarrow \bar{a}\bar{b}c,\ a\bar{b}c$$

et le terme ascendant bc en (b)



Remarquons en (a) la présence de deux chemins d'expression pour la même expression.



En (c), nous obtenons, après absorption, $E2 = ab + bc + \bar{a}c + \bar{b}c$. ac est un consensus. Il est éliminé (d). Enfin, nous effectuons un regroupement de bc et $\bar{b}c$. L'expression réduite devient E2=ab+c.

Détection du ou-exclusif
Il est parfois utile de représenter une fonction par des portes ou-exclusif. Nous définissons donc une règle qui détecte le ou exclusif.

Règle 4 : Si deux ascendants x et y ont un descendant commun xy, alors la somme des deux autres descendants $x\bar{y} + \bar{x}y$ peut être réduite en $x \oplus y$.
Représentation graphique :

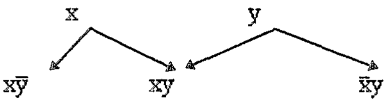


Fig.5 - graphe du ou exclusif

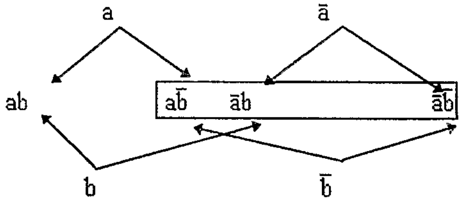
Résolution des théorèmes de De Morgan

Nous montrons enfin comment les théorèmes de De Morgan sont résolus par cette méthode.

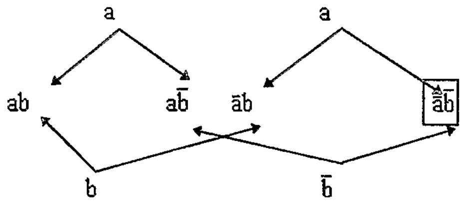
$$\overline{ab} = \bar{a} + \bar{b}$$

$$\overline{a + b} = \bar{a}\bar{b}$$

Nous dessinons le graphe.



Le complément de ab, donc $\overline{ab}$ est constitué de la somme des termes $a\bar{b}$, $\bar{a}b$ et $\bar{a}\bar{b}$, donc $\overline{ab} = a\bar{b} + \bar{a}b + \bar{a}\bar{b} = \bar{a} + \bar{b}$ par regroupement.



Le complément de a+b, c'est-à-dire $\overline{a + b}$ est représenté par $\bar{a}\bar{b}$. Donc $\overline{a + b} = \bar{a}\bar{b}$.

Pour la simplification systématique, nous proposons l'algorithme général suivant :

```
debut
        répéter
        - construire le graphe d'expression {en plaçant les relations ascendant-
        descendant} à partir des termes de l'expression ou des termes engendrés par
        division ou regroupement
        - réduire les chemins d'expression en appliquant les règles de réduction
        jusqu'à (¬∃ chemin d'expression) {expression irréductible}
fin
```

Conclusion

Une expression booléenne peut être modélisée par un ou plusieurs chemins d'expression. Sa simplification consiste à réduire ces chemins pour converger vers la solution où les termes restants ne présentent aucune connexion entre eux. Le travail en cours consiste à implémenter les algorithmes de construction du graphe, de recherche de chemin et de réduction des chemins d'expression.

Bibliographie

[QUI-52] The problem of simplifying truth function
American mathematical monthly, vol.59, 1952, p.521-531
W.V. Quine

[NEL-54] Méthode double duale
Journal of symbolic logic, vol.20, n°2, June 1954.
R.J. Nelson

[CLU-56] Minimisation of Boolean Function,
Bell System Technical, vol.35, pp.1427-1444, Nov.1956
Mc Cluskey, E.J.

[TIS-64] Recherche des termes premiers d'une fonction booléenne
Automatisme, tome IX, n°1, Janvier 1964.
P. Tison

Les techniques binaires et le traitement de l'information
H. Soubies - Camy - Dunod 2ème édition 1966

Théorie structurelle des automates finis
GR. C. Moisil - Ed. Gauthier-Villars 1967

Logique binaire et ordinateurs, Fonctions logiques et arithmétique binaire
Tome 1
M. Aumiaux - Masson et Cie. 1974

Eléments de la Recherche Opérationnelle
Robert Faure - Gauthier-Villars. 1975

Computer System Architecture
M. Morris Mano - Prentice Hall. 1976

Computer Architecture and Organization
John P. Hayes - International Student Edition. 1979

Les automatismes logiques industriels
C. Laurgeau Editions SCM. 1979