

# CODAGE PAR PRIMITIVES ANGLE-SEGMENT ( $\alpha, l$ ) DE CONTOUR POUR LA FUSION ET LA SEPARATION DE FORMES

Lala ANDRIAMAMPINANINA\*, Georges STAMON\*

° Département Electronique, Ecole Supérieure Polytechnique, Université d'Antananarivo  
B.P. 1500 - 101 Antananarivo - MADAGASCAR  
tél : 261-2-301-93/261-2-273-49, fax : c/o 261-2-318-15/261-2-405-43  
e-mail: andriam@espa.espa.mg

\* SIP, Laboratoire des Systèmes Intelligents de Perception, Université Paris V  
45 rue des Saints-Pères 75006 Paris - FRANCE  
tél : 33-(1)-44-55-35-56, fax : 33-(1)-44-55-35-36  
e-mail: vision @math-info.univ-paris5.fr

**MOTS CLES:** Contour, primitives angle-segment, fusion et séparation de formes.

## RESUME

Le présent article décrit les propriétés d'un codage par primitives angle-segment du contour d'objet dans une image binaire. La méthode est appliquée aux opérations de fusion (assemblage) et de séparation (désassemblage) de formes pour la manipulation assistée par ordinateur de pièces (industrielles, objets planaires, puzzles...). C'est un codage directionnel dont les paramètres constituent deux classes de codes, celle de la longueur ( $l$ ) d'un segment du contour et celle symbolisant l'angle ( $\alpha$ ) que fait ce segment avec son précédent. Le plan de l'image est discretisé en  $d$  directions  $\alpha_k = k \cdot 2\pi/d$  (modulo  $2\pi$ ) avec  $d$  un entier naturel,  $k=0, \dots, d-1$ . Le plus grand segment du contour est pris comme référence. La méthode exploite des propriétés géométriques simples tirées des chaînes de primitives angle-segment qui représentent les contours.

**KEYWORDS:** Contour, angular-segment primitives, merging and splitting of shapes.

## ABSTRACT

This paper describes the main properties of a codification of binary images by angular-segment primitives. The method is applied to merging and splitting shapes operations that can be made useful to a handling parts computer aided system (mechanical parts, planar parts, jigsaw puzzle pieces...). It is a directional encoding which parameter are dividing into two classes, segment length ( $l$ ) of the boundary of the shapes and angle ( $\alpha$ ) between two successive segments. The image space is partitioned into  $d$  angular bins  $\alpha_k = k \cdot 2\pi/d$  (modulo  $2\pi$ ) where  $d$  is an integer,  $k=0, \dots, d-1$ . The longest segment of the contour is taken as a reference. Only elementary geometrical properties of angular-segment primitives coding are used.

## 1 INTRODUCTION

La manipulation assistée par ordinateur de pièces (industrielles, objets planaires, puzzles...) nécessite la détermination de leur forme, de leur position et de leur orientation lorsqu'elles sont présentées devant une caméra. Les objets dans une image binaire sont caractérisés soit par des régions homogènes, soit par leur frontières obtenues par détection de contour. L'expérience sur la vision humaine montre que l'homme est capable de reconnaître un objet par simple observation de son contour. La représentation par contour est la plus utilisée pour extraire les points caractéristiques d'une forme.

Une approche classique consiste à représenter chaque point du contour par la distance avec le centre de gravité de la pièce [DESS83]. La séquence obtenue, invariante par translation et par rotation, donne la signature polaire de la pièce. De plus, une fois les distances normalisées, la signature obtenue est invariante au changement d'échelle [TAXT90] et [CHAN91]. La méthode développée dans [LIN92] mesure la distance entre le centre de la corde soutendue par deux points consécutifs et la courbe paramétrique représentant le contour. D'autres méthodes utilisent les points d'intersection d'un ensemble de cercles concentriques avec le contour [TAZA89], [KITA92] et [LEFR92]. Ces méthodes sont surtout appliquées à la reconnaissance de formes et particulièrement aux caractères [TAXT90] et [KITA92].

Le présent article décrit les propriétés d'un codage par primitives angle-segment du contour appliqué aux opérations de fusion (assemblage) et de séparation (désassemblage) de formes. C'est un codage directionnel dont les paramètres constituent deux classes de codes, celle de la longueur (l) d'un segment du contour d'une forme et celle symbolisant l'angle ( $\alpha$ ) que fait ce segment avec son précédent. Le plan de l'image est discretisé en d directions  $\alpha_k = k \cdot 2\pi/d$  (modulo  $2\pi$ ) avec d un entier naturel,  $k=0, \dots, d-1$ . Le plus grand segment du contour est pris comme référence.

Cette représentation ( $\alpha, l$ ) du contour d'une forme 2D est une généralisation du codage par primitives angulaires, primitives qui représentent respectivement les angles  $\pi/2$ ,  $\pi$  et  $3\pi/2$  que font entre eux les segments qui relient les bords des pixels du contour (les chaînes qu'elles constituent sont appelées "Shape Descriptor Chain" ou SDC [BRIB79], [STAM83] et [ANDR94]), et du codage de Freeman dont les codes représentent les directions absolues des segments reliant deux pixels du contour en 4 ou 8 directions (dont les codes sont respectivement  $k \cdot \pi/2$  et  $k \cdot \pi/4$  [FREE74]). Dans ces derniers la longueur des segments figurent implicitement dans le codage du contour, la longueur unité, 1, du côté pixel carré dans SDC et 1 et  $\sqrt{2}$  dans le codage de Freeman. Si les longueurs sont normalisées (côtés réguliers, nombre de formes limité...), le nombre de code de segment est limité. Le codage par primitives angulaires a été utilisé pour l'assemblage et le désassemblage de formes [ANDR93].

Malgré un plus grand nombre de primitives, nombre qui dépend de l'angle de segmentation  $\alpha_s$  ( $\alpha_s = 2\pi/d$  modulo  $2\pi$  dans le codage par primitives angle-segment ( $\alpha, l$ ), d primitives angulaires, d codes pour les angles et n codes différents pour les longueurs;  $\alpha_s = \pi/2$  dans le codage par primitives angulaires SDC, 3 primitives et 3 codes;  $\alpha_s = \pi/4$  dans le codage de Freeman à 8 directions, 8 primitives et 8 codes), d'une part, et la considération de la longueur des segments qui définissent les angles, d'autre part, le codage ( $\alpha, l$ ) a l'avantage d'être invariant par rotation. Cette représentation angle-segment est apparentée à la représentation curviligne  $\psi$ -s dans [BALL82] et identique à celle utilisée dans [ALTM 89] pour l'appariement de pièces de puzzle.

Si un contour parcouru dans le sens horaire est décrit par n primitives angle-segment, la chaîne C correspondante de 2.n éléments s'écrit:

$$C = \alpha_1 l_1 \dots \alpha_i l_i \dots \alpha_k l_k \dots \alpha_n l_n \tag{1.1}$$

Une partie du contour est représentée par une sous-chaîne  $C_p$  de C telle que  $C_p \subset C$ .  
Deux chaînes C1 et C2 de même nombre d'éléments sont identiques si, pour  $\forall i$ , on a:

$$l_{1i} = l_{2i} \text{ et } \alpha_{1i} = \alpha_{2i} \tag{1.2}$$

Deux chaînes C1 et C2 ayant le même nombre d'éléments sont opposées si:

$$l_{11} = l_{2n}, l_{12} = l_{2(n-1)}, \dots, l_{1n} = l_{21}, \tag{1.3}$$

$$\alpha_{11} + \alpha_{21} = 360^\circ \tag{1.4}$$

$$\text{et } \alpha_{12} + \alpha_{2n} = \alpha_{13} + \alpha_{2(n-1)} = \dots = \alpha_{1n} + \alpha_{22} = 360^\circ \tag{1.5}$$

Etant donné le sens de parcours, deux contours qui ont des parties similaires pouvant s'imbriquer sont décrites par des sous-chaînes opposées qui correspondent à la jonction des deux formes (figure 1.1). Comme ces sous-chaînes ne représentent pas toujours des contours fermés, les

égalités  $l_{11}=l_{2n}$  et  $l_{1n}=l_{21}$  de la condition (1.3) ainsi que la condition (1.4) ne seront pas tout le temps vérifiées (cf. § 2 et 3).

L'appariement d'une pièce à une autre, ou à un groupe de pièces déjà assemblées, peut être traité de deux manières, soit par l'expansion du contour (fusion de deux formes) ou soit par sa réduction (séparation de deux formes). Ces opérations sont présentées dans la deuxième et la troisième partie de cet article avec des exemples d'applications.

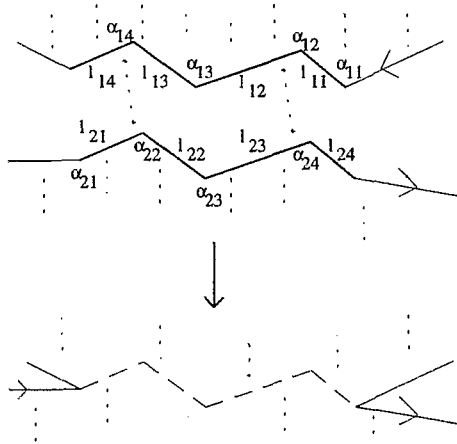


Figure 1.1: Fusion de deux formes.

## 2 FUSION DE DEUX FORMES

Soit  $C_1$  un contour découpé en  $m$  segments. Sa description  $(\alpha_1, l_1)$  est:

$$C_1 = \alpha_{11} l_{11} \dots \alpha_{1i} l_{1i} \dots \alpha_{1k} l_{1k} \dots \alpha_{1m} l_{1m} \quad (2.1)$$

Soit  $C_2$  un contour découpé en  $n$  segments. Sa description  $(\alpha_2, l_2)$  est:

$$C_2 = \alpha_{21} l_{21} \dots \alpha_{2i'} l_{2i'} \dots \alpha_{2k'} l_{2k'} \dots \alpha_{2n} l_{2n} \quad (2.2)$$

Si  $C_1$  et  $C_2$  possèdent des sous-chaînes opposées entre  $J_1$  et  $J'_1$  et entre  $J_2$  et  $J'_2$ , elles peuvent être fusionnées en une seule chaîne. Soit

$$C_1 = \alpha_{11} l_{11} \dots J_1 \dots J'_1 \dots \alpha_{1m} l_{1m} \quad (2.3)$$

$$C_2 = \alpha_{21} l_{21} \dots J_2 \dots J'_2 \dots \alpha_{2n} l_{2n} \quad (2.4)$$

La jonction constituée par les sous-chaînes opposées  $J_1 J'_1$  et  $J_2 J'_2$  seront éliminées lors de la fusion des deux chaînes. Les points de jointure qui correspondent à une seule primitive (angle ou bien segment), selon le cas, sont représentés par les primitives:

$$J_1 = \alpha_{1i} l_{1i} \quad (2.5)$$

$$J'_1 = \alpha_{1k} l_{1k} \quad (2.6)$$

$$J_2 = \alpha_{2i'} l_{2i'} \quad (2.7)$$

$$J'_2 = \alpha_{2k'} l_{2k'} \quad (2.8)$$

Les deux primitives angle et segment figurent dans ces expressions pour respecter la description adoptée. Cependant la primitive non apparié et qui correspond au point de jointure sera marquée par le caractère "\*". Une primitive angulaire décrit mieux la jonction de deux contours. C'est pour cette raison qu'un segment sur lequel tombe une jonction est subdivisé en ce point en deux parties

formant un angle  $\pi$ . Dans ce qui suit,  $J_1, J'_1, J_2$  et  $J'_2$  sont nommées simplement point de jointure dont leur expression ne contient plus les primitives appariées.

La description de la chaîne résultante se fait séquentiellement de la manière suivante:

- sous-chaîne de  $C_1$  à gauche de  $J_1$ ,
- jonction  $J_1 J'_2$ ,
- sous-chaîne de  $C_2$  à droite de  $J'_2$ ,
- sous-chaîne de  $C_2$  à gauche de  $J_2$ ,
- jonction  $J_2 J'_1$  et
- sous-chaîne de  $C_1$  à droite de  $J'_1$ .

Le contour  $C$  obtenu après la fusion des deux chaînes est alors exprimé comme suit:

$$C = \alpha_{11} l_{11} \dots \alpha_{1(i-1)} l_{1(i-1)} J_1 J'_2 \alpha_{2(k'+1)} l_{2(k'+1)} \dots \alpha_{2n} l_{2n} \alpha_{21} l_{21} \dots \alpha_{2(i'-1)} l_{2(i'-1)} J_2 J'_1 \alpha_{1(k+1)} l_{1(k+1)} \dots \alpha_{1m} l_{1m} \quad (2.9)$$

Les sections suivantes montrent les types de jonctions possibles. Ce paragraphe sera terminé par l'énoncé de la règle pour déterminer les couples  $J_1 J'_2$  et  $J_2 J'_1$  qui forment les jonctions des deux contours.

**2.1  $J_1, J'_2, J_2$  et  $J'_1$  coïncident avec les sommets des angles  $\alpha_{1i}, \alpha_{2k'}, \alpha_{2i'}$  et  $\alpha_{1k}$  (figure 2.1)**

Les points de jointures sont:

$$J_1 = \alpha_{1i} \quad (2.9)$$

$$J'_1 = \alpha_{1k} l_{1k} \quad (2.10)$$

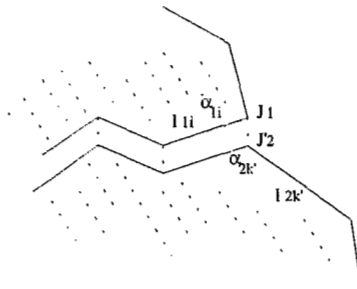
$$J_2 = \alpha_{2i'} \quad (2.11)$$

$$J'_2 = \alpha_{2k'} l_{2k'} \quad (2.12)$$

$l_{1i}$  et  $l_{2i'}$  appartiennent à la partie commune et vont disparaître lors de la fusion des deux formes contrairement à  $l_{1k}$  et  $l_{2k'}$ . Les points de jointure qui tombent tous sur le sommet d'un angle sont déterminés par les primitives:

$$J_1 J'_2 = (\alpha_{1i} + \alpha_{2k'}) l_{2k'} \quad (2.13)$$

$$J_2 J'_1 = (\alpha_{2i'} + \alpha_{1k}) l_{1k} \quad (2.14)$$



**Figure 2.1:** Fusion de deux formes. Points de jointure:  $\alpha_{1i} l_{1i}$  et  $\alpha_{2k'} l_{2k'}$ .

L'expression de la chaîne résultante est alors

$$C = \alpha_{11} l_{11} \dots \alpha_{1(i-1)} l_{1(i-1)} (\alpha_{1i} + \alpha_{2k'}) l_{2k'} \alpha_{2(k'+1)} l_{2(k'+1)} \dots \alpha_{2n} l_{2n} \alpha_{21} l_{21} \dots \alpha_{2(i'-1)} l_{2(i'-1)} (\alpha_{2i'} + \alpha_{1k}) l_{1k} \alpha_{1(k+1)} l_{1(k+1)} \dots \alpha_{1m} l_{1m} \quad (2.15)$$

2.2  $J_1$  coïncide avec le sommet de l'angle  $\alpha_{1i}$  et  $J'_2$  avec un point du segment  $l_{2k'}$  (figure 2.2)

Les points de jointures sont:

$$J_1 = \alpha^*_{1i} l_{1i} \text{ et } J'_2 = l^*_{2k'} \quad (2.16)$$

D'après ces hypothèses,  $l_{1i}$ , un côté de  $\alpha_{2k'}$  apparié avec  $\alpha_{1(i+1)}$ , est commun aux deux sous-chaînes, il est entre les points  $J_1$  et  $J'_1$ , dans la jonction. Il restera dans l'expression de C jusqu'à ce qu'il soit apparié avec un segment de  $C_2$ . Dans ce cas C s'écrit:

$$C = \alpha_{11} l_{11} \dots \alpha_{1(i-1)} l_{1(i-1)} [\alpha^*_{1i} l_{1i}, l^*_{2k'}] \alpha_{2(k+1)} l_{2(k+1)} \dots \alpha_{2n} l_{2n} \alpha_{21} l_{21} \dots \alpha_{2(i'-1)} l_{2(i'-1)} J_2 J'_1 \alpha_{1(k+1)} l_{1(k+1)} \dots \alpha_{1m} l_{1m} \quad (2.17)$$

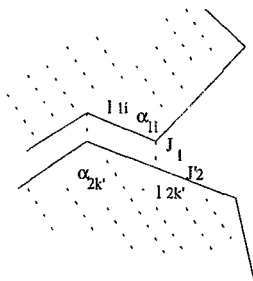


Figure 2.2: Fusion de deux formes. Points de jointure:  $\alpha^*_{1i} l_{1i}$  et  $\alpha_{2k'} l^*_{2k'}$ .

Les codes entre les points  $J_1$  et  $J'_2$  sont à reconsidérer afin de déceler les segments en correspondance. La démarche est de prendre le plus grand segment et de le diviser en deux parties formant un angle  $\pi$  dont une aura la longueur du segment en vis à vis dans l'autre contour. L'apparition d'un même segment dans  $J_1$  et dans  $J'_2$  ramènera au cas de la section 2.1.

Dans l'exemple de la figure 2.2,  $l_{2k'}$  plus grand que  $l_{1i}$  sera subdivisé en deux segments formant un angle  $\pi$  dont une partie, de longueur  $l_{1i}$ , et sera commune avec  $C_1$  tel que:

$$J'_2 = l^*_{2k'} = (l_{1i} + l'_{2k'}) = l_{1i} \pi^* l'_{2k'} \quad (2.18)$$

Or

$$J_1 = \alpha^*_{1i} l_{1i} \quad (2.19)$$

$l_{1i}$  apparaît dans  $J_1 J'_1$  et dans  $J_2 J'_2$ ; c'est un segment commun qui disparaîtra dans la fusion. De même que les angles  $\alpha_{2k'}$  et  $\alpha_{1(i+1)}$  d'qui sont appariés. D'où la nouvelle expression de  $J_1$  et de  $J'_2$ :

$$J_1 = \alpha^*_{1i} \quad (2.20)$$

$$J'_2 = \pi^* l'_{2k'} \quad (2.21)$$

Finalement, le point de jointure est donné par la primitive:

$$J_1 J'_2 = (\alpha = \alpha_{1i} + \pi) l'_{2k'}$$

$$J_1 J'_2 = (\alpha_{1i} + \pi) (l_{2k'} - l_{1i}) \quad (2.22)$$

La chaîne C s'écrit alors:

$$C = \alpha_{11} l_{11} \dots \alpha_{1(i-1)} l_{1(i-1)} (\alpha_{1i} + \pi) (l_{2k'} - l_{1i}) \alpha_{2(k+1)} l_{2(k+1)} \dots \alpha_{2n} l_{2n} \alpha_{21} l_{21} \dots \alpha_{2(i'-1)} l_{2(i'-1)} J_2 J'_1 \alpha_{1(k+1)} l_{1(k+1)} \dots \alpha_{1m} l_{1m} \quad (2.23)$$

2.3  $J_1$  coïncide avec un point du segment  $l_{1i}$ , et  $J_2$  avec le sommet de l'angle  $\alpha_{2k'}$  (figure 2.3)

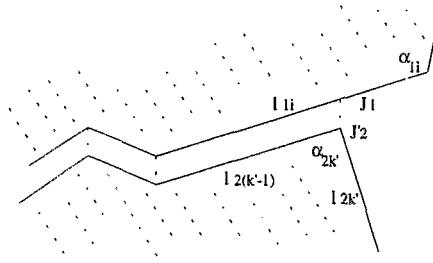


Figure 2.3: Fusion de deux formes. Points de jointure:  $\alpha_{1i} l_{1i}$  et  $\alpha_{2k'} l_{2k'}$ .

Dans l'exemple de la figure 2.3,  $\alpha_{1i}$  et  $l_{2k'}$  n'appartiennent pas à la jonction, ils doivent apparaître dans l'expression de la chaîne équivalente C de la fusion.  $l_{2(k'-1)}$  de  $C_2$  n'est pas apparié avec un segment de  $C_1$ , il figurera encore dans C avant sa prochaine transformation. Les points de jointures sont:

$$J_1 = \alpha_{1i} l_{1i} \text{ et } J_2 = l_{2(k'-1)} \alpha_{2k'} l_{2k'} \quad (2.24)$$

C s'écrit alors:

$$C = \alpha_{11} l_{11} \dots \alpha_{1(i-1)} l_{1(i-1)} [\alpha_{1i} l_{1i}, l_{2(k'-1)} \alpha_{2k'} l_{2k'}] \alpha_{2(k'+1)} l_{2(k'+1)} \dots \alpha_{2n} l_{2n} \alpha_{21} l_{21} \dots \alpha_{2(i'-1)} l_{2(i'-1)} J_2 J_1 \alpha_{1(k+1)} l_{1(k+1)} \dots \alpha_{1m} l_{1m} \quad (2.25)$$

Comme  $l_{1i}$  est plus grand que  $l_{2(k'-1)}$ ,  $l_{1i}$  est subdivisé en deux segments formant un angle  $\pi$  dont une partie, de longueur  $l_{2(k'-1)}$ , sera commune avec  $C_2$  et tel que:

$$J_1 = \alpha_{1i} l_{1i} = \alpha_{1i} (l_{1i} + l_{2(k'-1)}) = \alpha_{1i} l_{1i} \pi^* l_{2(k'-1)} \quad (2.26)$$

Or

$$J_2 = l_{2(k'-1)} \alpha_{2k'} l_{2k'} \quad (2.27)$$

Il découle de ces deux expressions que  $l_{2(k'-1)}$  est commun à  $J_1 J_1$  et à  $J_2 J_2$ . Les points de jointures deviennent:

$$J_1 = \alpha_{1i} l_{1i} \pi^* \quad (2.28)$$

$$J_2 = \alpha_{2k'} l_{2k'} \quad (2.29)$$

Donc le point de jointure est donné par les primitives:

$$J_1 J_2 = \alpha_{1i} l_{1i} (\alpha = \pi + \alpha_{2k'}) l_{2k'} \quad (2.30)$$

$$J_1 J_2 = \alpha_{1i} (l_{1i} - l_{2(k'-1)}) (\pi + \alpha_{2k'}) l_{2k'}$$

La chaîne C résultante devient:

$$C = \alpha_{11} l_{11} \dots \alpha_{1(i-1)} l_{1(i-1)} \alpha_{1i} (l_{1i} - l_{2(k'-1)}) (\pi + \alpha_{2k'}) l_{2k'} \alpha_{2(k'+1)} l_{2(k'+1)} \dots \alpha_{2n} l_{2n} \alpha_{21} l_{21} \dots \alpha_{2(i'-1)} l_{2(i'-1)} J_2 J_1 \alpha_{1(k+1)} l_{1(k+1)} \dots \alpha_{1m} l_{1m} \quad (2.31)$$

2.4 Applications

La figure 2.4 montre les résultats d'expériences sur les algorithmes de fusion avec des formes simples en utilisant des chaînes SDC,  $\alpha_s = \pi/2$ , avec 3 primitives angulaires.

La règle suivante résume le processus. Elle est aussi valable pour la séparation de formes. Les points de jointure doivent coïncider avec des primitives angulaires. Lorsqu'un point de jointure tombe sur un segment, celui-ci est remplacé par deux segments formant un angle  $\pi$  dont le sommet coïncidera avec le point de jointure. L'un des segments sera choisi de même longueur que celui en vis à vis, il sera commun aux sous-chaînes opposées pour la fusion et identiques pour la séparation.

(I) SDC1 = 131221313313121331121231231221321321  
 (II) SDC2 = 1133112132231311313231132112311323131131322312  
 (III) SDCF = 3212312312213213213113311213223131131323113211

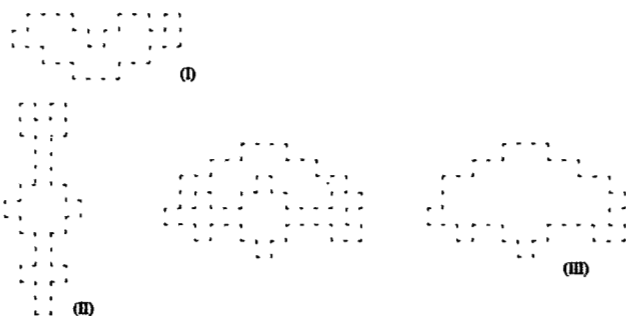


Figure 2.4.a: Résultat (III) du calcul de la fusion des formes en (I) et (II) codées en SDC.

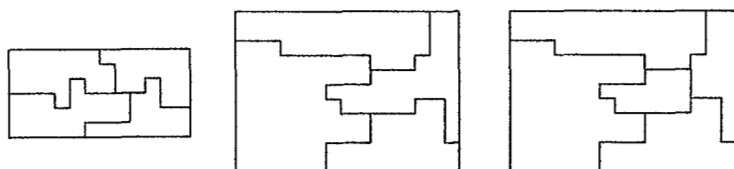


Figure 2.4.b: Des puzzles codés en SDC résolus par les algorithmes de fusion..

### 3 SEPARATION DE DEUX FORMES

La règle concernant les points de séparation est la même que pour les points de jointure du paragraphe précédent. Soit  $C_1$  et  $C_2$  deux chaînes dont les représentations sont données dans (2.1) et (2.2). Lors de la séparation de deux formes, les deux chaînes correspondantes présenteront des sous-chaînes identiques (elles étaient opposées dans le cas de la fusion). Pour des raisons d'ordre pratique, les sous-chaînes non identiques seront mises, cette fois-ci, entre les primitives représentées par  $J_2J_1$  et  $J'_1J_2$ , et placées au début de la chaîne  $C$  restante qui s'écrira alors:

$$C = J_2 J_1 \alpha_{1(i+1)} l_{1(i+1)} \dots \alpha_{1(k-1)} l_{1(k-1)} J'_1 J'_2 l_{2(k'-1)} (2\pi - \alpha_{2(k'-1)}) \dots l_{2(i'+1)} (2\pi - \alpha_{2(i'+1)}) \quad (3.1)$$

Cette chaîne qui résulte de la séparation de la forme décrite par  $C_2$  de celle décrite par  $C_1$  (le contour restant) est obtenue de la manière suivante:

- jonction  $J_2J_1$ ,
- sous-chaîne de  $C_1$  entre  $J_1$  et  $J'_1$ ,
- jonction  $J'_1J'_2$  et
- sous-chaîne de  $C_2$  entre  $J'_2$  et  $J_2$  lue à l'envers, les angles  $\alpha_{2j'}$  sont changés en  $(2\pi - \alpha_{2j'})$ .

### 3.1 $J_1, J'_2, J_2$ et $J'_1$ coïncident avec les sommets des angles $\alpha_{1i}, \alpha_{2k'}, \alpha_{2i'}$ et $\alpha_{1k}$

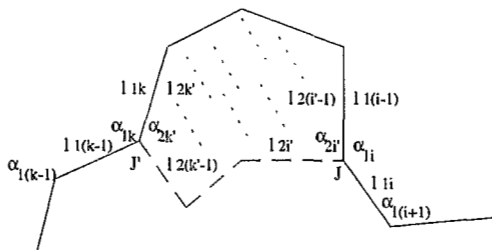


Figure 3.1: Séparation de deux formes.

Points de séparation:  $J[\alpha^*_{1i} l_{1i}, \alpha^*_{2i'} l_{2i'}]$  et  $J'[\alpha^*_{1k} l_{1k}, \alpha^*_{2k'} l_{2k'}]$ .

Dans l'hypothèse de la figure 3.1, comme  $l_{1k}$  et  $l_{2k'}$  appartiennent à la partie commune, ils seront ignorés. Les points de jointures sont:

$$J_1 = \alpha^*_{1i} l_{1i}, J'_1 = \alpha^*_{1k}, J_2 = l_{2i'} \alpha^*_{2i'} \text{ et } J'_2 = \alpha^*_{2k'} \quad (3.2)$$

Les points de séparation sont déterminés par les primitives:

$$J = J_2 J_1 = l_{2i'} (\alpha = \alpha_{1i} - \alpha_{2i'}) l_{1i} \quad (3.3)$$

$$J' = J'_1 J'_2 = (\alpha' = \alpha_{1k} - \alpha_{2k'}) \quad (3.4)$$

Le contour restant est décrit par:

$$C = l_{2i'} (\alpha_{1i} - \alpha_{2i'}) l_{1i} \alpha_{1(i+1)} l_{1(i+1)} \dots \alpha_{1(k-1)} l_{1(k-1)} (\alpha_{1k} - \alpha_{2k'}) l_{2(k-1)} (2\pi - \alpha_{2(k-1)}) \dots l_{2(i+1)} (2\pi - \alpha_{2(i+1)}) \quad (3.5)$$

### 3.2 $J_1$ coïncide avec le sommet de l'angle $\alpha_{1i}$ , $J_2$ avec le sommet de l'angle $\alpha_{2i'}$ , $J'_1$ avec le segment $l_{1k}$ , et $J'_2$ avec le sommet de l'angle $\alpha_{2k'}$

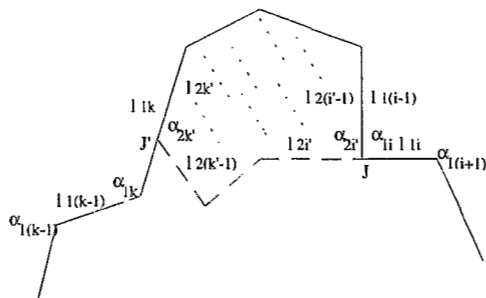


Figure 3.2: Séparation de deux formes.

Points de séparation:  $J[\alpha^*_{1i} l_{1i}, \alpha^*_{2i'} l_{2i'}]$  et  $J'[\alpha_{1k} l_{1k}, \alpha^*_{2k'} l_{2k'}]$ .

Tous les cas possibles sont décrits par ces combinaisons.

D'après les hypothèses de la figure 3.2,  $l_{1i}$  et  $l_{2i'}$  n'appartiennent pas à la partie commune et doivent figurer dans C.  $J'_1$  coïncidant avec un segment,  $l_{1k}$ , et  $J'_2$  avec le sommet d'un angle,  $\alpha_{2k'}$ ,  $J'_1$  doit être transformée pour faire apparaître une jonction au niveau des sommets des angles.

Les points de jointures sont:

$$J_1 = \alpha^*_{1i} l_{1i}, J'_1 = \alpha_{1k} l_{1k}, J_2 = l_{2i'} \alpha^*_{2i'} \text{ et } J'_2 = \alpha^*_{2k'} l_{2k'} \quad (3.6)$$



La nouvelle expression de C est:

$$C = [l_{2i'} \alpha_{2i'}, \alpha_{1i} l_{1i}] \alpha_{1(i+1)} l_{1(i+1)} \dots \alpha_{1(k-1)} l_{1(k-1)} [\alpha_{1k} l_{1k}, \alpha_{2k'} l_{2k'}] \\ l_{2(k'-1)} (2\pi - \alpha_{2(k'-1)}) \dots l_{2(i'+1)} (2\pi - \alpha_{2(i'+1)}) \quad (3.7)$$

La jonction  $J_2 J_1 = [l_{2i'} \alpha_{2i'}, \alpha_{1i} l_{1i}]$  devient  $(\alpha_{1i} - \alpha_{2i'})$ . C'est du même type que celle de la jonction J de la section 3.1. précédente où les points de jointure coïncident avec les sommets des angles. Seulement lorsque la différence entre les angles est  $\pi$  ( $\alpha_{1i} - \alpha_{2i'} = \pi$ ), cela signifie que  $l_{2i'}$  et  $l_{1i}$  peuvent former un seul segment dont la longueur est la somme de leur longueur (figure 3.2). Dans ce cas, la jonction  $J_2 J_1$  s'écrit:

$$J_2 J_1 = [l_{2i'} \alpha_{2i'}, \alpha_{1i} l_{1i}] = l_{2i'} (\alpha_{1i} - \alpha_{2i'}) l_{1i} = l_{2i'} \pi l_{1i} \quad (3.8)$$

La jonction  $J_1 J_2 = [\alpha_{1k} l_{1k}, \alpha_{2k'} l_{2k'}]$  doit faire apparaître un point de jointure qui coïncide avec des primitives angulaires. Pour ce faire, le plus grand entre les segments  $l_{1k}$  et  $l_{2k'}$  est subdivisé en deux dont une partie a pour longueur celle de l'autre. Cette transformation a pour effet de faire apparaître deux segments qui forment un angle  $\pi$ . Dans l'exemple de la figure 3.2, on a  $l_{1k} > l_{2k'}$ ,  $J_1$  est transformée comme suit:

$$J_1 = \alpha_{1k} l_{1k} = \alpha_{1k} (l_{1k} + l_{2k'}) = \alpha_{1k} (l_{1k} \pi l_{2k'}) \quad (3.9)$$

$l_{2k'}$  est commune aux deux sous-chaîne car il est présent dans  $J_1$ , d'après (3.9), et dans  $J_2$ . L'expression de la jonction  $J_2 J_1$  se simplifie de la manière suivante:

$$J_2 J_1 = [\alpha_{2k'} l_{2k'}, \alpha_{1k} l_{1k}] = [\alpha_{1k} l_{1k} \pi l_{2k'}, \alpha_{2k'} l_{2k'}] = (\alpha_{1k} l_{1k} \pi, \alpha_{2k'}) \\ J_2 J_1 = \alpha_{1k} l_{1k} (\pi, \alpha_{2k'}) = \alpha_{1k} l_{1k} (\pi - \alpha_{2k'}) \quad (3.10)$$

D'après (3.9) et (3.10) C devient:

$$C = l_{2i'} \pi l_{1i} \alpha_{1(i+1)} l_{1(i+1)} \dots \alpha_{1(k-1)} l_{1(k-1)} \alpha_{1k} l_{1k} (\pi - \alpha_{2k'}) \\ l_{2(k'-1)} (2\pi - \alpha_{2(k'-1)}) \dots l_{2(i'+1)} (2\pi - \alpha_{2(i'+1)}) \quad (3.11)$$

or

$$l_{2i'} \pi l_{1i} = l_{2i'} + l_{1i} \quad \text{et} \quad l_{1k} = l_{1k} - l_{2k'}$$

l'expression finale de C est donc:

$C = (l_{2i'} + l_{1i}) \alpha_{1(i+1)} l_{1(i+1)} \dots \alpha_{1(k-1)} l_{1(k-1)} \alpha_{1k} (l_{1k} - l_{2k'}) (\pi - \alpha_{2k'}) \\ l_{2(k'-1)} (2\pi - \alpha_{2(k'-1)}) \dots l_{2(i'+1)} (2\pi - \alpha_{2(i'+1)}) \quad (3.12)$
--

### 3.3 Application à la résolution de Puzzles Tangram

L'application suivante concerne la résolution d'un puzzle particulier, les puzzles Tangram, et utilise une codification qui comprend 6 primitives angulaires  $k \frac{\pi}{4}$  ( $k=1, \dots, 7$ ) pour classifier les formes et 6 codes de longueur pour la phase d'identification. La méthode choisie est l'éclatement des pièces par séparation de formes.

#### 3.3.1 Principe et définition

Un TANGRAM est un puzzle chinois qui est composé de sept pièces: un parallélogramme, un carré, deux grands triangles rectangles isocèles, un triangle rectangle isocèle de taille moyenne et deux petits triangles rectangles isocèles (figure 3.3.a). Les côtés de chaque pièce est un multiple (réel) du côté du carré. Le problème est de reproduire une silhouette donnée à l'aide de ces pièces (figure 3.3.b et 3.3.c). Historiquement le Tangram sert de support à d'autres recherches, par exemple la création artistique.

La solution proposée par [PORQ 86] est un système syntactique de reconnaissance des formes basé sur une grammaire formelle dont le vocabulaire terminal comprend les angles et les segments. Le

codage adopté est constitué de 6 primitives angulaires qui sont décrites dans la figure 3.4.a. Ces primitives dénommées "a", "b", "c", "d", "e" et "f" représentent respectivement les angles 45°, 90°, 135°, 225°, 270° et 315°. Ce codage est dérivé de celui de FREEMAN en 8-connexité. Cette représentation est très adaptée au TANGRAM dont les pièces et les formes cibles sont toutes décrites par ces primitives (figure 3.4.b).

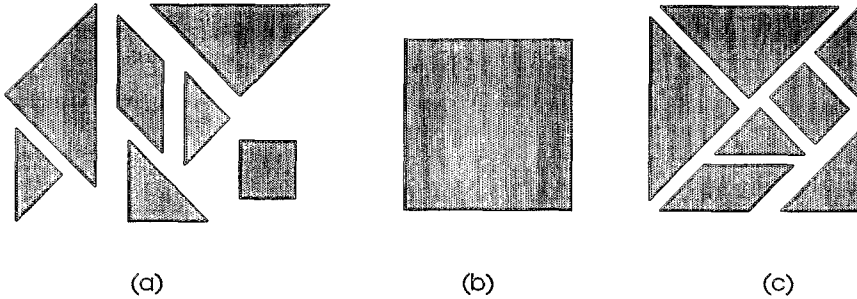


Figure 3.3: TANGRAM (a) Formes géométriques. (b) Silhouette. (c) Une solution de (b).

L'analyse des puzzle traités a conduit à la définition des symboles "l", "m", "n" et "o" représentant les longueurs tels que:

$$m = l \cdot \sqrt{2} \quad (4.3)$$

$$n = m \cdot \sqrt{2} \quad (4.4)$$

$$o = n \cdot \sqrt{2} \quad (4.5)$$

D'autres symboles combinaisons linéaires des précédents sont aussi définis:

$$p = 2 \cdot n \quad (4.6)$$

$$q = l + n \quad (4.7)$$

$$r = n - m \quad (4.8)$$

Ainsi, les codages dans la figure 3.5 des pièces et du puzzle deviennent:

- Carré: blblblbl.
- Petit triangle: amalbl.
- Parallélogramme: alcmalcm.
- Triangle moyen: anambm.
- Grand triangle: aoanbn.

**Remarque:**

- Le nombre de codes est toujours pair.
- Le codage est cyclique et peut bien débiter par un angle que par un segment.

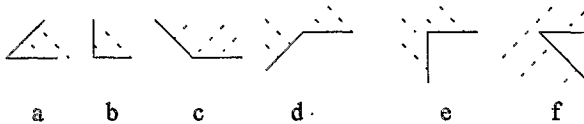
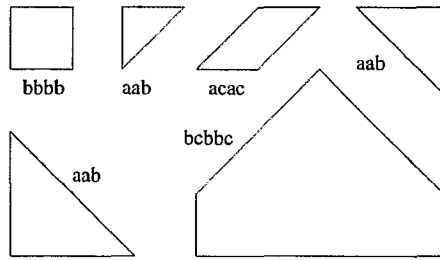


Figure 3.4.a: Primitives angulaires  $k \frac{\pi}{4}$  ( $k=1, \dots, 7$ ).



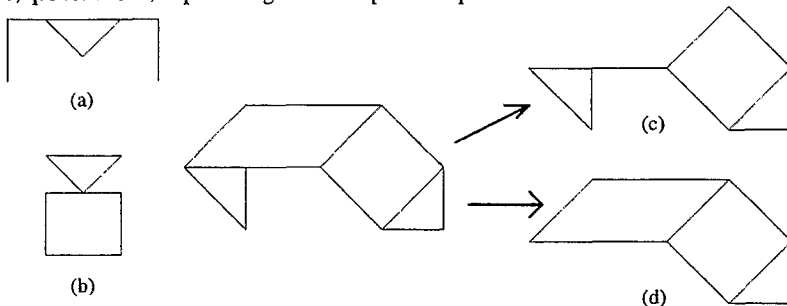
**Figure 3.4.b:** Codage par primitives angulaires des pièces et d'un puzzle TANGRAM.

### 3.3.2 Résolution du TANGRAM

#### a) Identification des parties communes

Le principe utilisé est celui de la séparation de formes. L'analyse peut descendre au niveau de la mesure des segments après la détection des parties communes, surtout dans le cas où un triangle est identifié pour connaître ses dimensions. Si aucune coïncidence n'est décelée sur les chaînes angulaires, la comparaison est de nouveau effectuée sur les segments, c'est-à-dire sur un côté entier d'une pièce. La longueur intervient aussi après identification d'une pièce qui va être séparée de la silhouette ou de ce qui va rester.

Comme la méthode de comparaison induit que les coïncidences apparaissent toujours sur les angles ou bien sur deux segments de même longueur, les pièces de plus grande taille sont identifiées en premier et séparées de la forme. Ainsi, les éventualités décrites dans la figure 3.5 seront évitées. Ces cas sont aussi évitées en donnant la priorité aux parties qui présentent le maximum de correspondance. Par exemple, dans la figure 3.5.c, le choix du parallélogramme, plus grand en surface que les petits triangles, entraîne une ambiguïté sur la forme restante. Cette ambiguïté est levée en choisissant la formes qui présente le maximum de correspondance. Dans le cas de la figure 3.5.d, c'est le triangle dont un angle et deux côtés coïncident avec la forme de départ, 3 éléments sur 6 sont identifiés, qui est choisi; le parallélogramme ne présente que 3 éléments identifiés sur 8.



**Figure 3.5:** (a) à (c) cas ambigus à éviter. (d) Priorisation du choix afin d'éviter (c)

#### b) Traitement des chaînes

Retrancher une pièce d'une silhouette se traduit par des opérations de soustractions dans la détermination des angles et des segments qui restent après la séparation. Quelques exemples vont illustrer le traitement des chaînes pour effectuer une séparation.

La partie hachurée représente la pièce identifiée qui sera séparée du reste de la forme. Les éléments des chaînes qui coïncident sont soulignés et placés en tête.

La chaîne résultante va être composée des éléments qui restent dans les deux chaînes. L'élément de départ est le premier élément immédiatement après la partie commune de la première chaîne. Le premier segment commence par des pointillés dans les figures. Par exemple, dans (3.7.a) c'est la primitive angulaire "c" après le segment m. La suite sera composée des autres éléments de la première chaîne (c n b n b n c), à laquelle sera concaténée les éléments restants de la deuxième chaîne pris à partir du dernier élément (a n a).

### 3.3.3 Exemples

#### Exemple I (figure 3.7)

1- *Sous-chaîne identique.* m b m est la sous-chaîne commune de trois éléments: segment (entier) - angle - segment (entier) (3.7.a).

2- *Points de séparation.* Angles: (c-a, c-a)=(b,b) (3.7.b).

3- *Chaîne résultante.* La chaîne résultante est celle d'un carré de côté n:

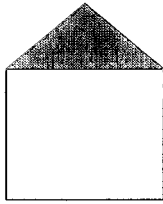


Figure 3.7

$$C_{I\Gamma} = b n b n b n b n \quad (3.7.c)$$

$$\begin{cases} \underline{m b m} & c n b n b n c \\ \underline{m b m} & a n a \end{cases} \quad (3.7.a)$$

$$\begin{cases} c n b n b n c \\ \Downarrow b & b \Downarrow \\ a & n & a \end{cases} \quad (3.7.b)$$

$$C_{I\Gamma} = b n b n b n b n \quad (3.7.c)$$

#### Exemple II (figure 3.8)

1- *Sous-chaîne identique.* a est la sous-chaîne commune, un élément: angle (3.8.a).

2- *Points de séparation.* Segments:  $p = l + q$  devient  $l\pi q$  et  $o = m + m$  devient  $\pi m$ . Changement des p.a. de la deuxième chaîne: "a" en "f" (3.8.b). La sous-chaîne "lm" devient commune aux deux chaînes.

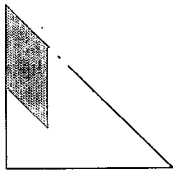


Figure 3.8

3- *Chaîne résultante.*  $C_{II\Gamma} = q a o b m a l f m a$  (3.8.c).

$$\begin{cases} a & p a o b o \neg \\ a & l c m a l c m \end{cases} \quad (3.8.a)$$

$$\begin{cases} l \pi q a o b m \pi m \\ l c m a l c m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{l m} & \pi q a o b m \pi \\ & \Downarrow a & a \Downarrow \\ \underline{l m} & c m a l c \end{cases} \quad (3.8.b)$$

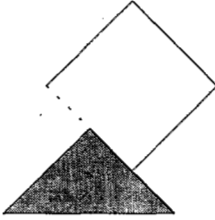
$$C_{II\Gamma} = a q a o b m a l f m a \quad (3.8.c)$$

**Exemple III (figure 3.9)**

1- *Sous-chaîne identique.* a o a n est la sous-chaîne commune, quatre éléments: deux primitives angulaires "a" et deux segments, "o" et "n" (3.9.a).

2- *Points de séparation.* Angle ( $e-b=\pi$ ) et segment "l" et "n" ( $n=l+l$  devient  $l\pi l$ ). "l" devient commune aux deux chaînes (3.9.b). Après la concaténation,  $l\pi l$  est changée en  $l+l=n$

3- *Chaîne résultante.*  $CIII_T = b n b n b n b n$ , qui est celle d'un carré de côté n (3.9.c).



**Figure 3.9**

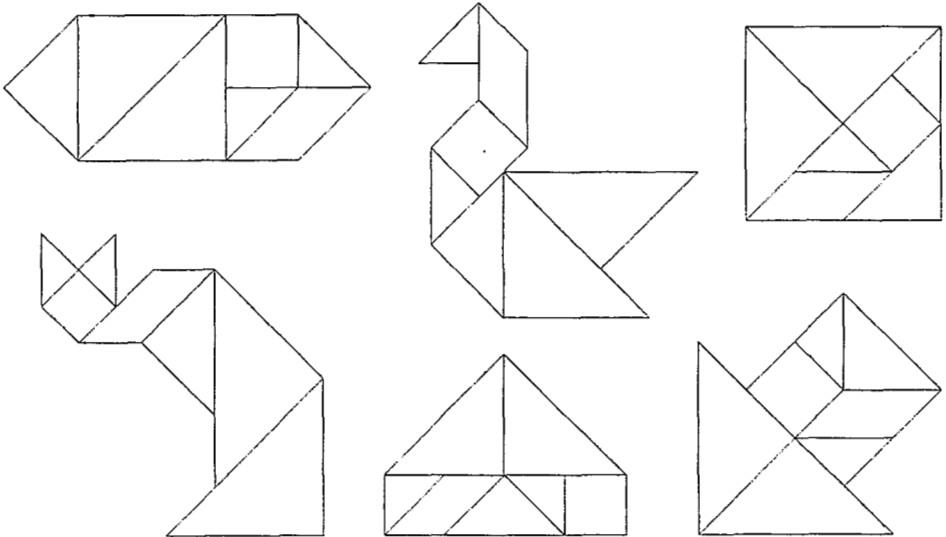
$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{a o a n} \quad e l b n b n b n e l \\ \underline{a o a n} \quad b m \end{array} \right. \quad \lrcorner \quad (3.9.a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e l b n b n b n e l \\ b l \pi l \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} l \quad e l b n b n b n e \\ \updownarrow \pi \quad b \\ l \quad b l \pi \end{array} \right. \quad \lrcorner \quad (3.9.b)$$

$$CIII_T = \pi l b n b n b n b l = b n b n b n b l \pi l = b n b n b n b n \quad (3.9.c)$$

**3.3.4 Résultats**

La figure 3.10 montre quelques exemples de puzzles TANGRAM résolus par la méthode. Les formes sont saisies par scanner et des bruits sont introduits pour simuler une prise de vue par caméra vidéo.



**Figure 3.10: Silhouettes résolues avec l'algorithme de séparation**

#### 4. CONCLUSION

La méthode présentée utilise le contour d'objet dans une image binaire pour la manipulation assistée par ordinateur de pièces. Elle exploite des propriétés géométriques simples tirées des chaînes de primitives angle-segment qui représentent les contours.

Il existe deux opérations inverses sur les contours pour décrire l'assemblage et le désassemblage de pièces, la fusion et la séparation de formes. Les règles établies sont générales et peuvent être appliquées aux chaînes de description de contour telles que les chaînes SDC [ANDR93].

Une application de la méthode dans l'appariement de pièces de puzzles est en cours de réalisation actuellement ou la fusion de chaînes est utilisée pour décrire l'assemblage des pièces de la bordure d'un puzzle rectangulaire; l'assemblage des pièces intérieures se fera par la réduction (séparation de contours) de la chaîne obtenue précédemment.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [ANDR93] Lala ANDRIAMAMPIANINA, Georges STAMON et Maurice POULENARD: "Numerical Descriptor of 2D Forms Applied to Line and Mechanical Drawings" - Second Annual Symposium on Document Analysis and Information Retrieval - Ceasars Palace, Las Vegas, Nevada, April 26-28 1993.
- [ANDR94] Lala ANDRIAMAMPIANINA, Georges STAMON, Jacques SIMON et Maurice POULENARD: "Transformations géométriques et extraction de caractéristiques d'une forme 2D en représentation par primitives angulaires" - 2ème Colloque Africain pour la Recherche en Informatique, CART94, Ouagadougou, Burkina Faso, 12-18 Octobre 1994.
- [ALTM 89] Tom ALTMAN: "Solving the Jigsaw Puzzle Problem in Linear Time" - Applied Artificial Intelligence, 3: p.453-462, 1989.
- [BALL82] D. H. BALLARD and C. M. BROWN: "Computer Vision" - Prentice-Hall, Inc. - Englewood Cliffs, New Jersey, 1982.
- [BRIB79] Ernesto BRIBIESCA and Adolfo GUZMAN: "How to Describe Pure Form and How to Measure - Differences in Shapes Using Shape Numbers" - PRIP - IEEE, p.427-436, 02/1979.
- [CHAN91] C. C. CHANG, S. M. HWANG and D. J. BUEHRER: "A Shape Recognition Scheme Based on Relative Distances of Feature Points from the Centroid", Pattern Recognition, Vol. 24, N° 11, p.1053-1063, 1991.
- [DESS83] J.D. DESSIMOZ et al. de l'EPFL de Lausanne: Point en robotique; Edition J.C. PRUVOT - 1983.
- [FREE74] H. FREEMAN: "Computer Processing of Line-Drawing Images" - Computer Survey, Vol. 6, N° 1, p.57-97, March 1974.
- [KITA92] N. KITA: "Object Locating Based on CCD" - IEEE - p.637-641, 1992.
- [LEFR92] L. LEFRERE, "A New Method of Distorsion-Invariant Character Recognition" - Université de Rouen, 1992.
- [LIN92] Y. LIN, J. DOU and H. WANG: "Contour Shape Description Based on an Arch Height Function" - Pattern Recognition, Vol. 25, N° 1, p.17-23, 1992.
- [STAM83] Georges STAMON: "Some Extensions to Chain Encoding" - Internal Report, IBM, San Jose, California, 1983.
- [TAXT90] T. TAXT, J. B. OLAFSDOTTIR and M. DAEHLEN: "Recognition of Handwritten Symbols" - Pattern Recognition, Vol. 23, N° 11, p.1155-1166, 1990.
- [TAZA89] A. TAZA and C. Y. SUEN: "Discrimination of Planar Shapes Using Shape Matrices" - Trans. Sys. Man Cybern., Vol. 19, N° 5, 1989.