

## Composition parallèle de réseaux de Petri temporels: analyse par énumération des états accessibles

Hanifa BOUCHENEB II-USTHB  
BP32 EL-Alia Dar-El-Beida Alger  
e-mail : boucheneb@ist.cerist.dz

Gérard BERTHELOT IIE-CNAM  
18 allée J.Rostand, 91025 EVRY CEDEX, FRANCE,  
e-mail : berthelot@iie.cnam.fr

**Mots clés:** réseau de Petri temporel, parallèle synchrone/asynchrone, graphe, borné, fini.

**Résumé:** Nous présentons un modèle de spécification composé d'un ensemble de réseaux de Petri temporels évoluant en parallèle. Nous avons développé, dans [BOU,93], une approche de construction du graphe d'atteignabilité pour un réseau de Petri temporel. Il s'agit d'étendre et d'adapter cette approche au modèle présenté ici.

**Abstract:** We present a model of specification composed with a set of time Petri nets evolving in parallel. We have developed, in [BOU,93], an approach to build the reachability graph for a time Petri net. We will complete and adapt this approach to the model presented here.

### 1 - Introduction

Depuis leur apparition, les réseaux de Petri ont connu une large utilisation dans la spécification et l'analyse de systèmes parallèles (systèmes distribués, systèmes temps-réel...) en raison des nombreux avantages, notamment ils permettent de décrire aisément des comportements parallèles et de prouver les propriétés d'un système parallèle en construisant son graphe d'atteignabilité ou en calculant ses invariants. C'est pour augmenter leur puissance de modélisation que les réseaux de Petri initiaux ont été complétés (réseaux de Petri colorés, à prédicats, temporisés, temporels, stochastiques...)[JENa], [JEN b], [BERT,91], [MEN,82], [AND,89].

Cela étant, nous nous intéressons à l'analyse de systèmes distribués. Dans notre cas, un système distribué est décrit au moyen d'une expression algébrique composée de réseaux de Petri temporels et d'opérateurs parallèles synchrone et asynchrone. L'expression algébrique indique les modes d'évolution parallèle des différents processus. Chaque réseau de Petri temporel (ou modèle de Merlin) représente le comportement d'un processus du système. Cette composition parallèle de réseaux permet, à notre avis, de mieux rendre compte des différents types de parallélisme du système et la synchronisation de ses composants.

Nous avons développé, dans [BOU,93], une technique de construction du graphe d'atteignabilité pour un réseau de Petri temporel évoluant en mode asynchrone. Il s'agit, ici, d'étendre cette approche au cas d'un ensemble de réseaux de Petri temporels évoluant en parallèle synchrone, asynchrone ou mixte.

Nous commençons par définir le modèle proposé puis nous développons une approche de construction de son graphe d'atteignabilité. Nous montrons, ensuite, une relation d'équivalence sur les états accessibles du modèle qui permet d'obtenir un graphe

fini si et seulement si le modèle est borné ou bien si son modèle sous-jacent est borné. Enfin, nous terminons par un exemple d'application.

## 2 Système de réseaux de Petri temporels

### 2-1 Réseaux de Petri temporels

#### Définitions 1: Réseau de Petri temporel et Marquage

Un réseau de Petri temporel marqué RT est un triplet  $(R, I, M_0)$  où

R est un réseau de Petri simple:  $\langle P, T, Pre, Post \rangle$

P et T sont des ensembles finis de places et de transitions ( $P \cap T = \emptyset$ )

Pre et Post sont les fonctions d'incidence arrière et avant:  $P \times T \rightarrow \mathbb{N}$ ;

I est une fonction délai:  $I: T \rightarrow \mathbb{Q}^+ \times (\mathbb{Q}^+ \cup \{\infty\})$ ,

$I(t) = (tmin(t), tmax(t))$   $tmin(t) \leq tmax(t)$

tmin(t) et tmax(t) sont les délais minimum et maximum de tir de t;

$M_0$  est le marquage initial  $M_0: P \rightarrow \mathbb{N}$ .

Le marquage d'un réseau de Petri temporel est une fonction notée M :  $P \rightarrow \mathbb{N}$ .

Un modèle de Merlin est un réseau de Petri étendu associant à chaque transition t un intervalle de temps  $[tmin(t), tmax(t)]$ . Si les marques nécessaires au tir d'une transition t sont disponibles à partir de l'instant  $\tau$  (t est sensibilisée à l'instant  $\tau$ ), elle peut être tirée à un instant quelconque de l'intervalle  $[\tau + tmin(t), \tau + tmax(t)]$ , à condition qu'elle reste continuellement sensibilisée jusqu'au moment de son tir. Autrement dit, la transition t est maintenue sensibilisée au moins tmin(t) unités de temps et au plus tmax(t) unités de temps avant son franchissement. Dans le cas où la transition t est maintenue sensibilisée durant tmax(t) unités de temps, elle est tirée immédiatement sans aucun délai.

#### Définitions 2: Transition sensibilisée et transitions en conflit

Une transition t est sensibilisée pour un marquage M ssi  $M \geq Pre(., t)$ .

Soit s un ensemble de transitions sensibilisées pour un marquage M.

Les transitions de s ne sont pas en conflit pour M ssi  $M \geq \sum_{t \in s} Pre(., t)$ .

#### Définition 3: Etat du modèle

Soit TS l'ensemble des transitions sensibilisées pour un marquage M.

Un état du modèle est un triplet  $e = (M, IS, \tau)$  où

M est un marquage;

IS est une fonction:  $TS \rightarrow \mathbb{Q}^+ \cup \{\infty\}$ ;

IS(t) est l'instant de sensibilisation de t.

$\tau$  est un instant:  $\tau \in \mathbb{Q}^+ \cup \{\infty\}$ .

#### Définition 4: Règle de tir à partir d'un état

Une transition t peut être tirée à partir d'un état  $e = (M, IS, \tau)$  (ou encore  $e[[t \gg]$ ) ssi  $t \in TS$  et  $(\exists \tau' \geq \tau / IS(t) + tmin(t) \leq \tau'$  et  $\forall t' \in TS, \tau' \leq IS(t') + tmax(t')$ ).

Autrement dit, t est sensibilisée pour M et il est possible de maintenir le marquage M et laisser progresser le temps durant  $(\tau' - \tau)$  unités de temps afin de permettre à la transition sensibilisée t d'atteindre son délai minimal  $(IS(t) + tmin(t) \leq \tau')$  sans dépasser les délais maximaux de toutes les transitions sensibilisées pour le marquage M  $(\forall t' \in TS, \tau' \leq tmax(t') + IS(t'))$ .

Si la transition t est franchissable à partir de l'état  $e = (M, IS, \tau)$ , son tir, à l'instant  $\tau'$ , produit l'état  $e' = (M', IS', \tau')$  (noté  $e[[t \gg e'$ ) tel que

$M' = M - Pre(., t) + Post(., t)$  et

$\forall t' \in TS', IS'(t') =$  si t' est non nouvellement sensibilisée alors  $IS(t')$  sinon  $\tau'$ .





Autrement dit, (i) :  $gt_n$  est un groupe, sensibilisé pour le marquage  $M_{n-1}$ , de transitions synchronisables; (ii): il est possible de maintenir le marquage durant  $(\tau_n - \tau_{n-1})$  unités de temps de manière à ce que toutes les transitions de  $gt_n$  atteignent leurs délais minimaux et qu'aucune transition sensibilisée pour le marquage  $M_{n-1}$  ne dépasse son délai maximal.

**Définition 11:** condition de tir d'une séquence  $gt_1, gt_2, \dots, gt_n$  à partir de l'état initial

Soit  $gt_1, gt_2, \dots, gt_n$  une séquence de groupes de transitions

$$e_0[[gt_1 \dots gt_n]] \Leftrightarrow (\exists (e_1, \dots, e_{n-1}) / e_0[[gt_1]] > e_1 \text{ et } e_1[[gt_2]] > e_2 \text{ et } \dots \text{ et } e_{n-1}[[gt_n]] > e_n)$$

**Proposition 1:**

$$e_0[[gt_1 gt_2 \dots gt_n]] \Leftrightarrow$$

$$\exists (e_1, e_2, \dots, e_{n-1}) / (\forall i = 1, n, gt_i \in GT_{i-1}) \text{ et}$$

$$I(n) \left\{ \begin{array}{l} \max\{t_{\min}(t) + IS_0(t)\} \leq \tau_1 \leq \min\{t_{\max}(t) + IS_0(t)\} \\ t \in gt_1 \qquad \qquad \qquad t \in TS_0 \\ \max\{t_{\min}(t) + IS_1(t)\} \leq \tau_2 \leq \min\{t_{\max}(t) + IS_1(t)\} \\ t \in gt_2 \qquad \qquad \qquad t \in TS_1 \\ \vdots \\ \max\{t_{\min}(t) + IS_{n-1}(t)\} \leq \tau_n \leq \min\{t_{\max}(t) + IS_{n-1}(t)\} \\ t \in gt_n \qquad \qquad \qquad t \in TS_{n-1} \end{array} \right.$$

**Preuve:**

Pour obtenir la condition de tir d'une séquence de groupes  $gt_1, gt_2, \dots, gt_n$ , il suffit de regrouper les conditions du premier, du second, ..., et du (n)ième tir en une seule.

QED

### 3 Graphe d'atteignabilité d'un SRT

La condition de tir donnée ci-dessus est très complexe et ne peut être utilisée dans la construction du graphe d'atteignabilité car elle est liée au numéro de tir. Or ce dernier peut être infini si le système admet des séquences de tir infinies. Il est donc nécessaire de rechercher une condition de tir équivalente plus simple.

#### 3-1 Simplification de la condition de tir d'un groupe

Pour simplifier la condition de tir précédente, nous devons montrer une condition simple, nécessaire et suffisante d'existence d'une solution au moins au système d'inéquations linéaires  $I(n)$  (proposition 1). Ce dernier a la même forme que celui étudié dans [BOU,93]. Nous montrons de la même manière les théorèmes let 2 suivants.

**Notations 2:**

.ES(n) désigne l'espace des solutions du système d'inéquations  $I(n)$ .

.Soit  $gt_1, gt_2, \dots, gt_n$  une séquence de groupes telle que chaque groupe  $gt_i$  ( $i=1, n$ ) est un élément de l'ensemble correspondant  $GT_{i-1}$ .

Nous définissons récursivement la suite  $TE_n$  comme suit:

$$TE_n(n, n) = 0;$$

$$\forall i \in [0, n-1],$$

$$TE_n(i, n) = \min_{t' \in TS_{n-1}} \{t_{\max}(t') + TE_{n-1}(i, j)\} \qquad (j \text{ est le tir de sensibilisation de } t')$$

$$TE_n(n, i) = \min_{t \in gt_n} (TE_{n-1}(n-1, i), \min\{TE_{n-1}(j, i) - t_{\min}(t)\}) \quad (j \text{ est le tir de sensibilisation de } t)$$

$$\forall i \in [0, n-1], \forall j \in [0, n-1] \quad TE_n(i, j) = \min(TE_{n-1}(i, j), TE_n(i, n) + TE_n(n, j)).$$

**Théorème 1:**

$ES(n) \neq \emptyset \Leftrightarrow (\forall j \in [1, n], \forall t \in gt_j, t_{\min}(t) \leq TE_j(i, j))$   
 (i est le tir de sensibilisation de t).

**Théorème 2:**

Si  $ES(n) \neq \emptyset$  alors  $TE_n(i, j)$  et  $TE_n(j, i)$  avec  $(0 \leq i < j \leq n)$  sont respectivement le plus grand et le plus petit temps dans  $ES(n)$  entre les tirs i et j.

**Preuves :** les preuves sont similaires à celles données dans [BOU,93].

**Corollaire 1:** condition simplifiée de tir d'un groupe au n-ième franchissement

Supposons que les groupes  $gt_1, gt_2, \dots, gt_{n-1}$  ont été tirés, dans l'ordre, depuis l'état initial (ie.  $ES(n-1) \neq \emptyset$ ).

Un groupe  $gt_n$  peut être le (n)ième groupe tiré

- $\Leftrightarrow$
- (i)  $gt_n \in GT_{n-1}$  et
  - (ii)  $\forall t \in gt_n, \forall t' \in TS_{n-1}, t_{\min}(t) \leq t_{\max}(t') + TE_{n-1}(i, j)$   
 où i et j sont les tirs de sensibilisation resp. de t et t'.

**Preuve:**

Comme  $ES(n-1) \neq \emptyset$ , d'après le théorème 1, nous avons  $\forall j \in [1, n-1], \forall t \in gt_j, t_{\min}(t) \leq TE_j(i, j)$ . Par conséquent,  $ES(n) \neq \emptyset$  ssi  $(gt_n \in GT_{n-1})$  et  $(\forall t \in gt_n, t_{\min}(t) \leq TE_n(i, n))$ . La relation (ii) est obtenue en remplaçant  $TE_n(i, n)$  par sa valeur.

QED

Nous avons montré une condition nécessaire et suffisante de franchissement simultané d'un groupe de transitions  $gt_n$  au (n)ième tir qui dépend du marquage, des tirs de sensibilisation des transitions et des temps minimaux et maximaux entre les différents tirs de sensibilisation. Nous avons aussi montré que ces trois paramètres avant le tir sont nécessaires et suffisants pour déterminer ceux obtenus suite à un tir. Nous pouvons donc définir l'ensemble des états atteignables suite au franchissement de la séquence  $gt_1, gt_2, \dots, gt_{n-1}$  par un triplet composé de ces paramètres.

**3-2 Ensembles d'états équivalents****Définition 12:** Ensemble d'états

L'ensemble  $E_{n-1}$ , de tous les états atteignables suite aux tirs successifs des groupes  $gt_1, gt_2, \dots, gt_{n-1}$  à partir de l'état initial, est un triplet  $(M_{n-1}, S_{n-1}, TE_{n-1})$  où

$M_{n-1}$  est le marquage obtenu au (n-1)ième tir,

$S_{n-1} : TS_{n-1} \rightarrow [0, n-1]$ ,

$S_{n-1}(t)$  est le tir de sensibilisation de t,

$TE_{n-1} : [0, n-1]^2 \rightarrow Q \cup \{\infty\}$ ,

$TE_{n-1}(i, j)$  et  $TE_{n-1}(j, i)$  indiquent les temps minimal et maximal entre les tirs i et j.

**Notations 3:**

Soit l'ensemble d'états  $E_{n-1} = (M_{n-1}, S_{n-1}, TE_{n-1})$ . Nous définissons les fonctions  $D_{n-1}, A_n$  et  $B_n$  comme suit:

$\forall (t', t) \in TS_{n-1}^2$ , posons  $S_{n-1}(t) = i$  et  $S_{n-1}(t') = j$ ,

$D_{n-1}(t', t) = t_{\max}(t') + \min\{TE_{n-1}(n-1, j), TE_{n-1}(i, j) - t_{\min}(t)\}$ .

$\forall t \in T$ ,

$A_n(t) =$  si  $t \in TS_{n-1}$  alors  $\min(0, \min\{D_{n-1}(t', t) / t' \in TS_{n-1}\})$  sinon  $-t_{\min}(t)$

$B_n(t) =$  si  $t \in TS_{n-1}$  alors  $\min\{D_{n-1}(t, t') / t' \in gt_n\}$  sinon  $t_{\max}(t)$ .

Afin de contracter davantage le graphe d'atteignabilité, nous devons définir le ou les critère(s) permettant de regrouper des ensembles d'états. Intuitivement, nous regroupons les ensembles d'états équivalents du point de vue comportement (ayant les mêmes séquences de tir). Ces relations d'équivalence sont bien connues et peuvent être définies formellement comme dans [MIL] par exemple.

**Définition 13 : Relation de Bisimulation**

une relation  $\rho \subseteq E \times E$ , où  $E$  est l'ensemble de tous les ensembles d'états atteignables, est une bisimulation si

$$(E_{n-1}, E_{n'-1}) \in \rho \Rightarrow \forall g_{t_n} \in T^+ \begin{aligned} & \text{(i) si } E_{n-1} \llbracket g_{t_n} \gg E_n \text{ alors } \exists E_{n'} / E_{n'-1} \llbracket g_{t_n} \gg E_{n'} \text{ et } (E_n, E_{n'}) \in \rho \\ & \text{(ii) si } E_{n'-1} \llbracket g_{t_n} \gg E_{n'} \text{ alors } \exists E_n / E_{n-1} \llbracket g_{t_n} \gg E_n \text{ et } (E_n, E_{n'}) \in \rho. \end{aligned}$$

**Définition 14: Equivalence des ensembles d'états**

Les ensembles  $E_{n-1}$  et  $E_{n'-1}$  sont équivalents, noté  $E_{n-1} \sim E_{n'-1}$ , si  $(E_{n-1}, E_{n'-1}) \in \rho$  pour une certaine bisimulation.

Nous pouvons montrer que la relation  $\sim = \{ \rho \mid \rho \text{ est une bisimulation} \}$  est réflexive, symétrique et transitive et donc une relation d'équivalence. Le théorème suivant définit une condition suffisante d'équivalence sur les ensembles d'états atteignables.

**Théorème 3:**

Deux ensembles d'états  $E_{n-1} = (M_{n-1}, S_{n-1}, TE_{n-1})$  et  $E_{n'-1} = (M_{n'-1}, S_{n'-1}, TE_{n'-1})$  sont équivalents si (i)  $M_{n-1} = M_{n'-1}$  et (ii)  $\forall (t', t) \in TS_{n-1}^2, D_{n-1}(t', t) = D_{n'-1}(t', t)$ .

**Preuve**

Pour montrer que  $E_{n-1}$  et  $E_{n'-1}$  sont équivalents, il suffit de prouver 1) et 2):

- 1)  $E_{n-1} \llbracket g_{t_n} \gg \Leftrightarrow E_{n'-1} \llbracket g_{t_n} \gg$
- 2)  $E_{n-1} \llbracket g_{t_n} \gg E_n$  et  $E_{n'-1} \llbracket g_{t_n} \gg E_{n'} \Rightarrow E_n$  et  $E_{n'}$  vérifient le Théorème 3.

1) En utilisant le Corollaire 1, nous avons:

$$E_{n-1} \llbracket g_{t_n} \gg \Leftrightarrow (g_{t_n} \in GT_{n-1} \text{ et } \forall t \in g_{t_n}, \forall t' \in TS_{n-1}, t_{\min}(t) \leq t_{\max}(t') + TE_{n-1}(i, j))$$

D'après Notations 2 et Théorème 2, nous avons:  $0 \leq TE_{n-1}(n-1, n) \leq t_{\max}(t') + TE_{n-1}(n-1, j)$ .  
Par conséquent,  $E_{n-1} \llbracket g_{t_n} \gg \Leftrightarrow (g_{t_n} \in GT_{n-1} \text{ et } \forall t \in g_{t_n}, \forall t' \in TS_{n-1}, 0 \leq D_{n-1}(t', t))$ .

Comme  $M_{n-1} = M_{n'-1}$  et  $D_{n-1} = D_{n'-1}$ , nous avons donc:  $E_{n-1} \llbracket g_{t_n} \gg \Leftrightarrow E_{n'-1} \llbracket g_{t_n} \gg$ .

2) Supposons que  $E_{n-1} \llbracket g_{t_n} \gg E_n$  et donc  $\exists E_n / E_{n'-1} \llbracket g_{t_n} \gg E_{n'}$  et montrons (i') et (ii'):

$$(i') M_n = M_{n'} \text{ et } (ii') \forall (t', t) \in TS_n^2, D_n(t', t) = D_{n'}(t', t)$$

Puisque  $M_{n-1} = M_{n'-1}$ , nous avons  $M_n = M_{n'}$  et donc  $TS_n = TS_{n'}$ .

Soient  $i = S_{n-1}(t)$ ,  $j = S_{n-1}(t')$ ,  $i' = S_{n'-1}(t)$  et  $j' = S_{n'-1}(t')$ .

A partir de la relation (ii) et en utilisant Notations 2 et 3, nous montrons que:

$$\begin{aligned} \text{si } i < n \text{ alors } & A_n(t) = A_{n'}(t), A_n(t) = \min(0, TE_n(i, n) - t_{\min}(t)) \\ & \text{et } A_{n'}(t) = \min(0, TE_{n'}(i', n') - t_{\min}(t)) \\ \text{si } j < n \text{ alors } & B_n(t') = B_{n'}(t'), B_n(t') = t_{\max}(t') + TE_n(n, j) \\ & \text{et } B_{n'}(t') = t_{\max}(t') + TE_{n'}(n', j'). \end{aligned}$$

Développons les termes  $D_n(t', t)$  et  $D_{n'}(t', t)$  séparément en procédant comme suit :

- si  $i < n$  et  $j < n$  (donc  $i' < n'$  et  $j' < n'$ )
  - remplacer  $TE_n(i, j)$  par  $\min(TE_{n-1}(i, j), TE_n(i, n) + TE_n(n, j))$
  - remplacer  $TE_n(n, j)$  par  $\min(TE_{n-1}(n-1, j), TE_n(n, j))$ .

Nous déduisons donc que:  $D_n(t', t) = \min(D_{n-1}(t', t), B_n(t') + A_n(t))$   
et  $D_{n'}(t', t) = \min(D_{n'-1}(t', t), B_{n'}(t') + A_{n'}(t))$ .

$$\text{- sinon } D_n(t', t) = B_n(t') + A_n(t) = B_{n'}(t') + A_{n'}(t) = D_{n'}(t', t).$$

QED

### 3-3 Construction du graphe d'atteignabilité

Le graphe d'atteignabilité d'un système de réseaux de Petri temporels est un graphe dont l'ensemble des noeuds constituent tous les ensembles d'états accessibles et les arcs étiquetés représentent les séquences de groupes faisables à partir de l'état initial. Nous regroupons dans un même noeud du graphe tous les ensembles d'états accessibles qui satisfont la relation d'équivalence donnée en Théorème 3. Ces ensembles d'états constituent une classe d'états et ont tous le même marquage et la même fonction D. Nous avons montré, dans la preuve du Théorème 3, que le marquage et la fonction D d'une classe d'états sont nécessaires et suffisants pour calculer ceux des classes successeurs. Par conséquent, une classe d'états peut être définie par ces deux paramètres.

#### Définition 15: Classe d'états

Une classe d'états  $CL_{n-1}$  comportant l'état  $(M_{n-1}, S_{n-1}, TE_{n-1})$  est définie par une paire  $(M_{n-1}, D_{n-1})$  où  $M_{n-1}$  est un marquage et  $D_{n-1}$  est définie en Notations 3.

#### Proposition 2: Règle de tir simultané d'un groupe à partir d'une classe

Soit une classe d'états  $CL_{n-1} = (M_{n-1}, D_{n-1})$ .

•  $CL_{n-1} \llbracket [gt_n \gg \Leftrightarrow (gt_n \in GT_{n-1}) \text{ et } (\forall t' \in TS_{n-1}, \forall t \in gt_n, D_{n-1}(t', t) \geq 0)$ .

• Si  $(CL_{n-1} \llbracket [gt_n \gg CL_n)$  alors  $CL_n = (M_n, D_n)$  telle que:

$$M_n = M_{n-1} + \sum_{t \in gt_n} (\text{Post}(., t) - \text{Pre}(., t))$$

$$\forall (t', t) \in TS_n^2,$$

$$\text{si } t \text{ ou } t' \text{ est nouvellement sensibilisée, } D_n(t', t) = B_n(t') + A_n(t)$$

$$\text{sinon } D_n(t', t) = \min\{ D_{n-1}(t', t), B_n(t') + A_n(t) \}.$$

**Preuve:** se déduit de celle du théorème 3.

#### Théorème 4:

Le graphe d'atteignabilité d'un modèle SRT obtenu selon l'approche développée ici est fini ssi le modèle est borné ou si le modèle sous-jacent est borné.

**Preuve :** Similaire à celle donnée dans [BOU,93]

#### 4 Exemple d'application:

L'application de notre approche au modèle suivant (figure 2) produit le graphe d'atteignabilité donné en figure 3.

où

$$C_0 = (p_0, D_0(t_0, t_0) = 1)$$

$$C_1 = (p_1 + p_2, D_1(t_2, t_2) = 0, D_1(t_2, t_1) = -2, D_1(t_1, t_1) = 0, D_1(t_1, t_2) = 2)$$

$$C_2 = (p_1 + p_4, D_2(t_1, t_1) = 0, D_2(t_4, t_1) = 0, D_2(t_4, t_4) = 1, D_2(t_1, t_4) = 1)$$

$$C_3 = (p_0 + p_3, D_3(t_0, t_0) = 1, D_3(t_0, t_3) = 0, D_3(t_3, t_3) = 1, D_3(t_3, t_0) = 2)$$

$$C_4 = (p_0 + p_1 + p_2, D_4(t_2, t_2) = 0, D_4(t_1, t_1) = 0, D_4(t_0, t_0) = 1, D_4(t_2, t_1) = -2, D_4(t_1, t_2) = 2, D_4(t_0, t_1) = 0, D_4(t_1, t_0) = 1, D_4(t_0, t_2) = 2, D_4(t_2, t_0) = -1)$$

$$C_5 = (p_0 + p_1 + p_4, D_5(t_4, t_4) = 1, D_5(t_1, t_1) = 0, D_5(t_0, t_0) = 1, D_5(t_4, t_1) = 0, D_5(t_1, t_4) = 1, D_5(t_0, t_1) = 0, D_5(t_1, t_0) = 1, D_5(t_0, t_4) = 1, D_5(t_4, t_0) = 1)$$

Par exemple, les successeurs de la classe d'états  $C_1$  sont calculés comme suit:

$$C_1 \llbracket [t_1 \gg \text{ n'est pas vérifiée car } \min(D_1(t_2, t_1), D_1(t_1, t_1)) = -2 < 0.$$

$$C_1 \llbracket [t_2 \gg \text{ est vérifiée car } \min(D_1(t_1, t_2), D_1(t_2, t_2)) = 0 \geq 0.$$

$$C_1 \llbracket [t_2 \gg C_2 \quad C_2 = (M_2, D_2): \quad M_2 = p_1 + p_4,$$

$$D_2(t_1, t_1) = \min(D_1(t_1, t_1), D_1(t_1, t_2) + \min(0, D_1(t_2, t_1), D_1(t_1, t_1))) = 0,$$

$$D_2(t_4, t_1) = \text{tmax}(t_4) + \min(0, D_1(t_2, t_1), D_1(t_1, t_1)) = 0,$$

$$D_2(t_4, t_4) = \text{tmax}(t_4) - \text{tmin}(t_4) = 1,$$

$$D_2(t_1, t_4) = D_1(t_1, t_2) - \text{tmin}(t_4) = 1.$$



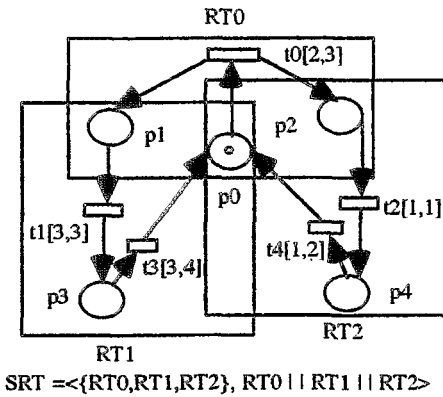


Figure 2 : un modèle SRT

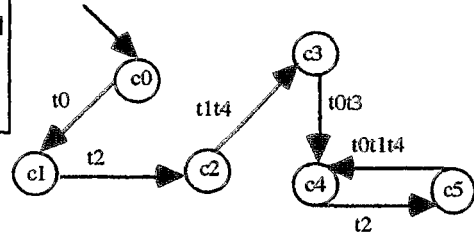


Figure 3: son graphe d'atteignabilité

La technique de génération de graphe présentée ici peut être adaptée au cas d'une expression comportant d'autres opérateurs algébriques notamment l'opérateur parallèle synchrone par rapport à un ensemble de transitions (' $\parallel$ '). Par exemple, l'expression ' $RT_1 \parallel ((t_1, t_2) \parallel RT_2)$ ' impose que les transitions  $t_1$  de  $RT_1$  et  $t_2$  de  $RT_2$  soient franchies en même temps. Puisque chaque transition a son propre intervalle de tir et que tous les réseaux de Petri temporels du SRT utilisent le même temps de référence, le rendez-vous entre les transitions  $t_1$  et  $t_2$  est non réalisable, si, à un instant donné, l'une des deux atteint son délai maximal alors que l'autre ne peut être franchie (transition non sensibilisée ou son délai minimal non atteint). Dans ce cas, nous assistons à un blocage qui est résolu en masquant les délais maximaux des transitions qui ont atteint leurs délais maximaux et qui ne peuvent être franchies. Ces transitions seront franchies plus tard. Elles sont dites en violation temporelle.

Considérons l'exemple précédent mais avec l'expression de comportement suivante:  $RT_0 \parallel RT_1 \parallel ((t_1, t_2), (t_3, t_4)) \parallel RT_2$ . A partir de la classe  $C_1$ , les transitions  $t_1$  et  $t_2$  doivent être franchies simultanément. Mais, cela n'est pas possible car la transition  $t_1$  n'est pas franchissable à partir de la classe d'états  $C_1$ . Nous avons donc un blocage: tous les groupes sont non franchissables et il existe au moins une transition sensibilisée. Pour résoudre ce blocage, le délai maximal de la transition  $t_2$  est masqué dans  $C_2$ . La transition  $t_2$  est en violation temporelle car le tir du groupe  $\{t_1, t_2\}$  aura lieu en dehors de l'intervalle de  $t_2$ .

## 5 Conclusion

Le modèle présenté est un ensemble de réseaux de Petri temporels évoluant en parallèle selon une expression algébrique appelé expression de comportement. Il progresse en franchissant simultanément, à chaque tir, un groupe de transitions sélectionnées des différents réseaux de Petri temporels, conformément à son expression de comportement. Après avoir étudié le fonctionnement du modèle, nous avons développé, une technique de construction du graphe d'atteignabilité qui produit un graphe fini si et seulement si le modèle est borné ou bien si le modèle sous-jacent est borné.

Le graphe ainsi obtenu permet de prouver toutes les propriétés classiques (vivacité, réinitialisable, blocage...), et évaluer les performances du modèle concernant les temps minimal et maximal pour accomplir une séquence de groupes de transitions ([BOU,95]) ...

Enfin, ce travail est appelé à connaître un développement notamment définir des relations d'équivalence plus faibles qui permettront de contracter davantage le graphe et d'étendre cette approche au cas où les réseaux de Petri temporels d'un modèle SRT n'ont pas forcément un même temps de référence.

## Références

- [AND,89] C.André "Synchronized Elementary Net Systems". Advances in Petri Nets 1989, Grzegorz Rozenberg editor, LNCS 424, Springer -Verlag.
- [BERT,83] B.Berthomieu, M.Menasche "An enumerative approach for analysing time Petri nets". IFIP Congress 1983, Paris, North-Holland.
- [BERT,91] B.Berthomieu, M. Diaz "Modeling and verification of time dependent systems using time Petri nets". IEEE Transactions on Software Engineering vol 17, N°3, March 91.
- [BERT,94] G.Berthelot, H.Boucheneb "Occurrence graphs for interval timed coloured nets" in Proc. of "15th International Conference on Application and Theory of Petri Nets" Zaragoza (Spain), Juin 94, LNCS 815; Springer Verlag..
- [BOU,93] H.Boucheneb, G.Berthelot " Towards a Simplified building of time Petri Net Reachability graphs". Proc.of Petri Nets and Performance Models PNPM93, Toulouse (France), October 1993, IEEE Computer Society Press.
- [BOU,94] H.Boucheneb, G.Berthelot " Predicting logical and temporal properties of real-time systems using synchronized Elementary Nets". Proc. of FTRTFT94, Kiel (Allemagne) October 1994. LNCS 863;Springer-Verlag.
- [BOU,95] H.Boucheneb, G.Berthelot "Analyse du Graphe d'Atteignabilité d'un réseau de Petri Temporel: Calcul des Temps de Cycle et de Chemin". Proc. of Second International Symposium on Programming and Systems. Alger avril 1995.
- [BOU,96] H.Boucheneb, G.Berthelot " Un graphe d'atteignabilité fini pour un système de réseaux élémentaires synchronisés évoluant en mode mixte synchrone / asynchrone". Proc. of 4<sup>th</sup> Maghrebien Conference on Software Engineering and Artificial Intelligence, Algeria April 1996.
- [JENa] K.Jensen "Coloured Petri Nets : Basic concepts, Analysis Methods and Practical use. volume 1: Basic Concepts". To appear in EATCS Monographs Theoretical Computer Science, Springer-Verlag.
- [JENb] K.Jensen "Coloured Petri Nets : Basic concepts, Analysis Methods and Practical use. volume 2 : Analysis Methods"? To appear in EATCS Monographs on Theoretical Computer Science, Springer-Verlag.
- [MEN,82] M.Menasche, "Analyse des réseaux de Petri temporisés et application aux systèmes distribués". Thèse de docteur ingénieur, université Paul Sabatier, Toulouse, Nov. 82.
- [MER,76] P.Merlin, D.J.Farber, "Recovability of communication protocols". IEEE Trans. on Communications , 24 (1976).
- [MIL] R.Milner "Communication and Concurrency". Prentice Hall international series in computer science.
- [QUE,89] J.Quemada, A.Azcorra, D.Frutos, "A timed Calculus for LOTOS". Proc. of Formal Description Techniques FORTE 89, S.Vuong editor, Vancouver Canada Dec. 89.
- [RAM,74] C.Ramchandani "Analysis of Asynchronous Concurrent Systems by Timed Petri Nets"; Project MAC, TR 120, MIT, 1974.
- [SIF,91] J.Sifakis, "An Overview and Synthesis on Timed Process Algebras". Proc. of the 3rd International Workshop CAV'91, Alborg, Denmark, july 91, LNCS 575, Springer-Verlag.