

## REPRESENTATION FRACTALE DU SOL ET DE SON FONCTIONNEMENT HYDRIQUE

---

*RIEU M.*

### RESUME

Une représentation fractale du sol, considéré comme un milieu à la fois fragmentaire et poreux, est proposée. Ce modèle met en jeu la définition d'un domaine d'échelles dans lequel une structure fractale est développée, ainsi que de la fragmentation incomplète d'un élément de sol en classes de fractures semblables et un volume résiduel. Des relations générales entre porosité, dimension fractale et rapport de similitude sont établies. Les principales prédictions de ce modèle sont illustrées par des données déjà publiées sur des sols de textures différentes :

- (i) Une dimension fractale  $< 3$ ;
- (ii) Une relation inverse entre la taille et la densité des agrégats;
- (iii) Une relation exponentielle entre la taille et le nombre des agrégats;
- (iv) Une relation inverse entre le potentiel de l'eau dans la porosité et les puissances croissantes du rapport de similitude.

### INTRODUCTION

La structure du sol, "faite de particules et d'éléments structuraux...formés par l'agrégation de particules plus petites" (Baver et Rhoades, 1932) a été étudiée intensivement par les physiciens du sol durant les dernières décennies. L'objectif essentiel était de déterminer "l'état d'agrégation" du sol de façon à rendre compte de "la variation de la structure ou de l'agrégation des sols" (Alderfer, 1946). Ce problème classique de la physique du sol a pris récemment une nouvelle dimension avec la prise de conscience que, parce que le sol est à la fois un milieu fragmentaire et un milieu poreux, une représentation fractale de sa structure pourrait lui être particulièrement appropriée (Mandelbrot, 1983; Turcotte, 1986;

Feder, 1988). Cette question est brièvement étudiée dans les pages qui suivent. Après le rappel de quelques propriétés de la structure du sol, une structure fragmentaire fractale est présentée. Les propriétés de cet objet fractal sont comparées à celles du sol et son aptitude à représenter la structure du sol sont analysées. La possibilité de définir une structure fractale équivalente à celle du sol est confirmée.

## 1. LA STRUCTURE FRAGMENTAIRE DU SOL ET SES PROPRIETES

Quelle que soit sa taille, un élément de sol présente rarement un aspect continu. Une motte semble parcourue par un réseau de fractures de sorte qu'elle peut être aisément fragmentée en éléments plus petits. Une observation détaillée de ces derniers révèle encore des fissures fines et apparemment discontinues, si bien qu'une action mécanique ménagée, comme un choc ou une humectation rapide, produit une nouvelle fragmentation en éléments encore plus petits où l'on distingue toujours quelques fissures, d'autant plus rares que les éléments sont petits. Finalement on n'observe plus que des éléments très fins et compacts.

La structure fragmentaire du sol est très généralement observée. Elle peut être décrite comme l'imbrication d'éléments de toutes tailles, séparés par un réseau complexe de fractures et de fissures. Ces dernières constituent une porosité particulière qui représente une part importante de la porosité totale du sol.

Si l'on mesure la pression de l'eau dans un élément de sol de la taille d'une motte, pour une teneur en eau évoluant de la saturation à l'état sec, on constate que cette pression ne varie pas de façon continue mais se stabilise à des paliers successifs. Si l'on indexe par un nombre entier  $i$  ces paliers et l'on note  $h_i$  la valeur correspondante de la pression, on vérifie que (Fig. 1) :

$$\log \left( \frac{h_i}{h_0} \right) = -i \log (r) \quad (1)$$

où  $h_0$  est la valeur la plus proche de 0, mesurée au palier que l'on indexe 0, et  $r$  est un nombre positif inférieur à 1.

Qu'il s'agisse de tubes capillaires ou de fissures, la pression de l'eau vérifie la loi de Laplace que l'on peut exprimer simplement par:

$$h_i = \frac{R}{\rho_i} \quad (2)$$

où  $\rho_i$  représente le rayon du tube ou la largeur de la fissure et  $R$  une constante faisant intervenir la densité de l'eau, sa tension de vapeur et la constante de la gravité.

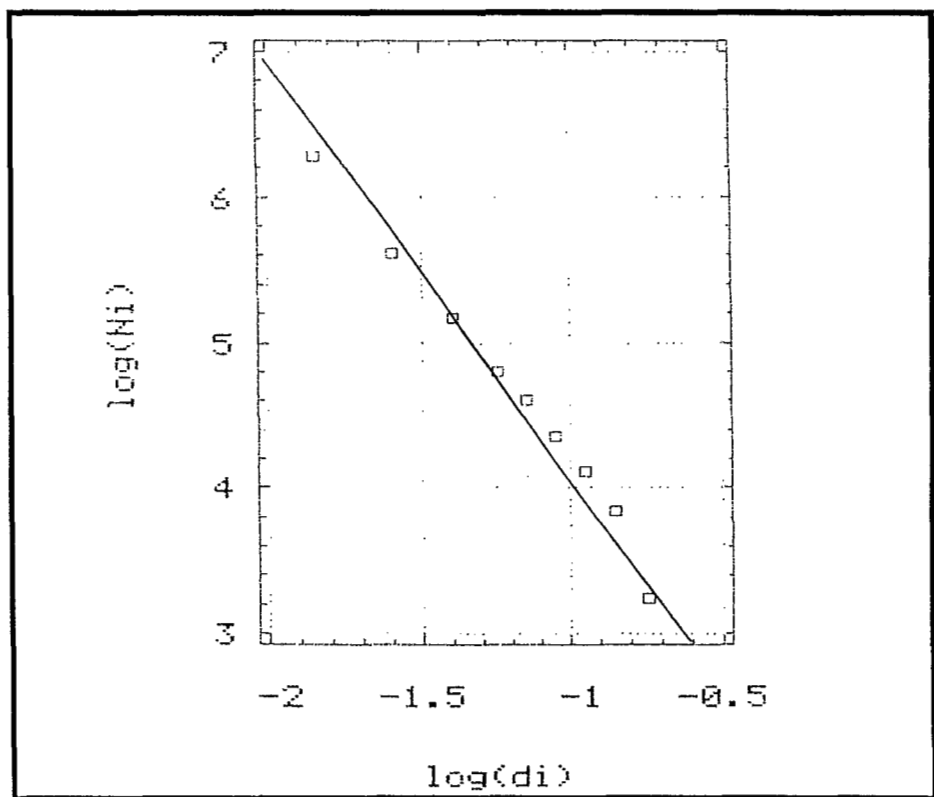


Figure 1. Valeurs stationnaires de la pression de l'eau dans le sol de l'Ariana (Données de Bousnina, 1984)

Il résulte des équations (1) et (2) que:

$$P_i = P_0 r^i \quad (3)$$

L'équation (3) exprime que la largeur des fissures décroît en raison des puissances croissantes du facteur d'échelle  $r$ . En d'autres termes, dans l'élément de sol étudié, la taille des fissures est réglée par une homothétie interne.

L'élément de sol peut être fragmenté en une collection d'agrégats dont la taille est caractérisée par leur diamètre moyen  $d_i$ . On note  $d_m$  le diamètre des agrégats les plus petits et  $d_0$  celui des plus grands.

On vérifie que le nombre  $N_i$  d'agrégats de taille supérieure à un diamètre donné  $d_i$  ( $d_m \leq d_i \leq d_0$ ) est tel que (Fig. 2):

$$\log(N_i) = -D \log(d_i) + A \quad (4)$$

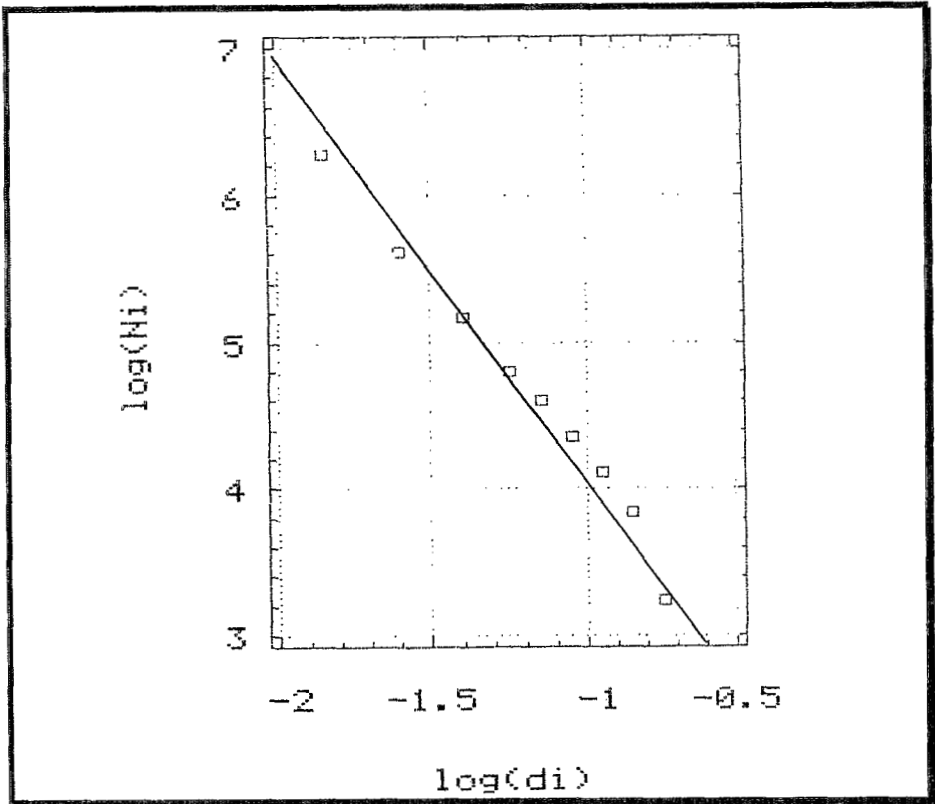


Figure 2. Distribution du nombre d'agrégats en fonction de leur taille dans le sol de l'Ariana (Données de Bousnina, 1984)

où A et D sont des constantes ( $2 < D < 3$ ).

L'équation (4) exprime que le nombre des agrégats croît de façon strictement exponentielle lorsque leur taille diminue. Si l'on considère que la fragmentation de l'élément de sol initial se produit selon les fissures qui le parcourent, on en conclut que le réseau qu'elles forment est strictement organisé.

La mesure de la densité des agrégats des différentes tailles apporte une information complémentaire. On constate que les agrégats sont d'autant plus denses que leur taille est réduite, ce qui est cohérent avec les observations précédentes sur la fissuration des agrégats, et que la variation de la densité est décrite par la loi exponentielle (Fig. 3) :

$$\log(\sigma_i/\sigma_0) = -C \log(d_i/d_0) \quad (5)$$

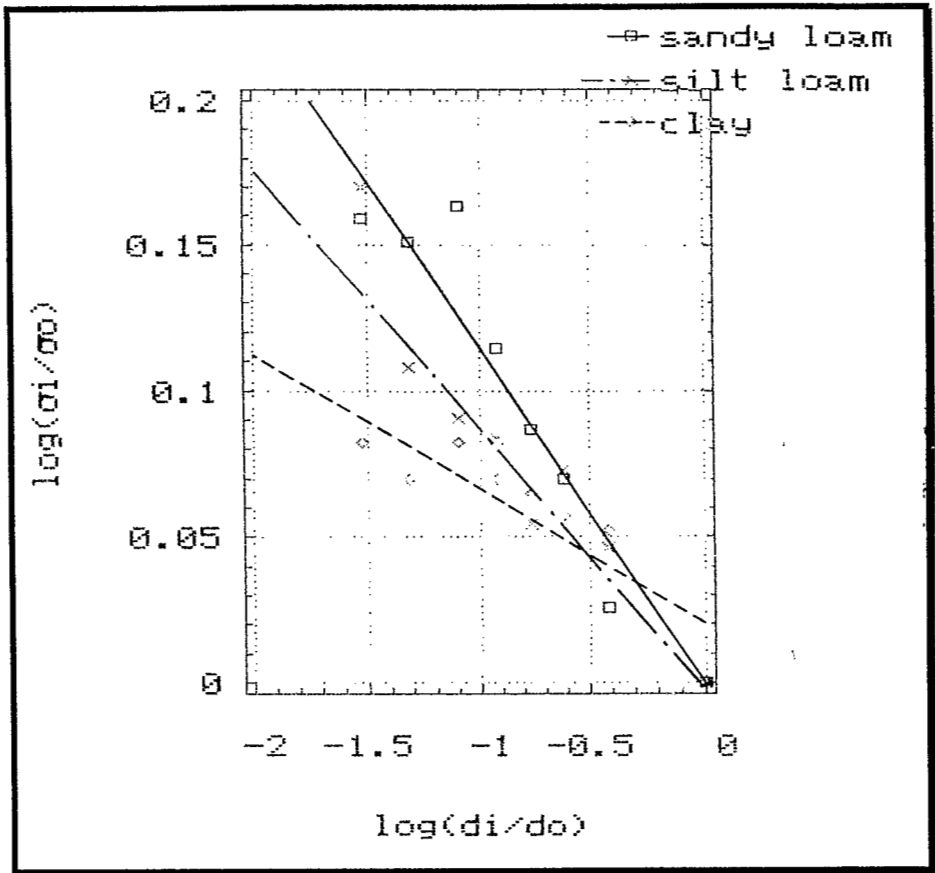


Figure 3. Variation de la densité d'agrégats de trois sols de texture différente en fonction de leur taille (Données de Chepil, 1950)

où  $\sigma_1$  est la densité d'un agrégat de diamètre  $d_1$  et  $C$  un nombre positif inférieur à 1. L'équation (5) exprime que la porosité, ou le taux de fissuration, des agrégats varie de façon exponentielle en raison de leur taille. On notera que une densité uniforme pour tous les agrégats correspond à la condition :  $C = 0$ .

Les observations qui précèdent montrent que un milieu apparemment hétérogène et de structure complexe comme le sol comporte en fait, dans un domaine de tailles où le caractère fragmentaire de sa structure et de sa porosité est prédominant, des éléments d'organisation très robustes : Le degré de fissuration des agrégats qui le constituent dépend étroitement de leur taille; les fissures forment un réseau organisé et leur largeur est réglée par une homothétie interne. Toutefois ces propriétés ne semblent vérifiées que dans un domaine d'échelles limité. On peut observer sur la Figure (4) que l'homothétie des tailles des fissures n'est vérifiée qu'entre deux largeurs particulières.

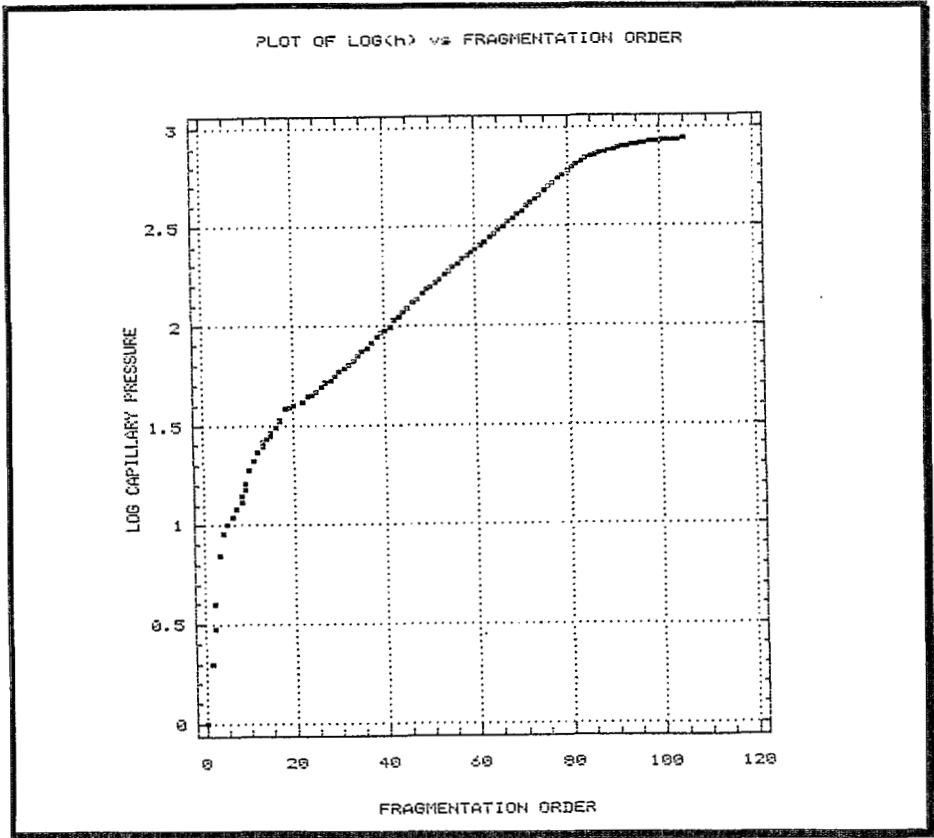


Figure 4. Valeurs stationnaires de la pression de l'eau dans un sol ferrallitique (Données de Braudeau, 1990)

Par ailleurs, la densité des agrégats ne peut pas être supérieure à la densité des particules élémentaires ni inférieure à la densité apparente du sol lui-même. Les éléments d'organisation identifiés précédemment ne sont que des propriétés particulières d'une structure générale au sein de laquelle elles trouvent leur lien. Une telle structure, en raison du type même de propriétés qu'elle possède, présente des similitudes frappantes avec une structure fractale.

## 2. OBJETS FRACTALS ET STRUCTURE FRAGMENTAIRE FRACTALE

La "Poussière de Cantor" est un objet fractal fragmentaire à une dimension dont l'initiateur est un segment de droite (Fig. 5). Il présente la propriété fondamentale commune à tous les objets fractals : une homothétie interne, définie par un rapport linéaire  $r$  inférieur à 1, qui fait correspondre à tout élément un nombre constant  $N$  d'éléments transformés. Sa dimension fractale est définie en fonction des paramètres  $r$  et  $N$  (Mandelbrot, 1983) :

$$D = \log(N)/\log(1/r) \quad (6)$$

ou encore :

$$Nr^D = 1 \quad (7)$$

Etant donné une forme initiale et un "générateur" qui précise les positions respectives des produits de chaque étape de l'homothétie interne, deux des trois paramètres  $N$ ,  $r$  et  $D$  suffisent à définir un objet fractal.

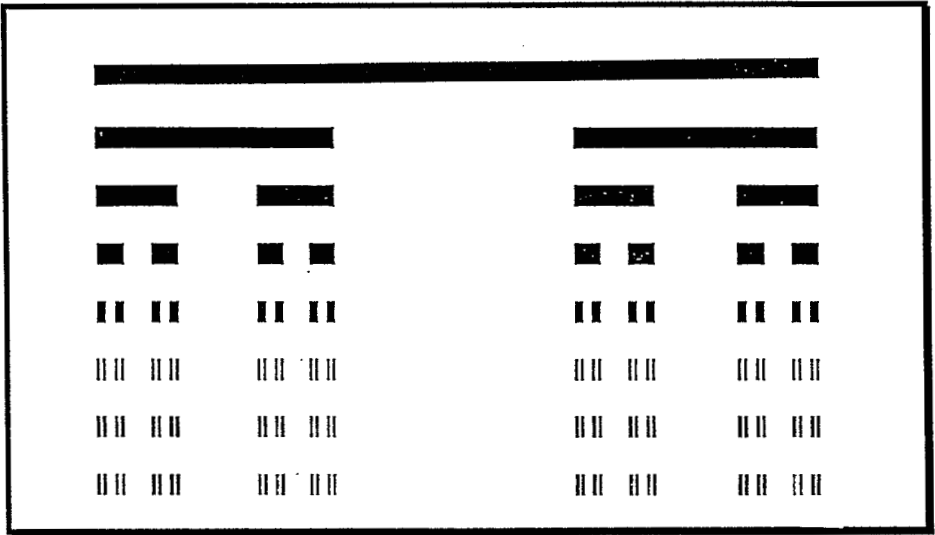


Figure 5. Les 7 premières étapes du développement de la "Poussière de Cantor" (D'après Mandelbrot, 1983)

Dans le cas de la poussière de Cantor, l'initiateur est un segment de droite de longueur  $d_0 = 1$ , le générateur est tel que les éléments transformés sont alignés selon un axe confondu avec le segment initial,  $r = 1/3$ ,  $N = 2$  et  $D = 0.6309$ . On notera que aussi bien les éléments figurés que les lacunes ménagées par le développement du fractal vérifient l'homothétie interne. Toutefois, toutes les lacunes sont conservées tandis que les segments sont indéfiniment transformés en éléments de plus en plus petits; d'où le nom de poussière donné à cet objet fractal. La première étape de la construction crée 2 segments de longueur  $d_1 = rd_0$  et l'étape  $m$  crée  $N^m$  segments de longueur  $d_m = r^m d_0$  : lorsque la longueur est multipliée par  $r$ , le nombre de segments est multiplié par  $N$ . On conçoit aisément que le nombre  $N_i$  de segments de longueur  $d > d_i$  soit de la forme :

$$N_i = A d_i^{-D} \quad (8)$$

avec  $d_i = r^i d_0$  et  $A = (rd_0)^D$ . La relation entre le nombre et la taille des éléments d'un objet fractal fragmentaire est une conséquence directe de la propriété d'homothétie interne. A ce titre, elle peut être considérée suffisante pour caractériser une distribution fractale (Mandelbrot, 1982; Turcotte, 1986; 1989).

A deux dimensions, l'équivalent de la poussière de Cantor est le "Tapis de Sierpinski" ( $N = 8$ ;  $r = 1/3$ ;  $D = 1.8928$ ), (Fig. 6)

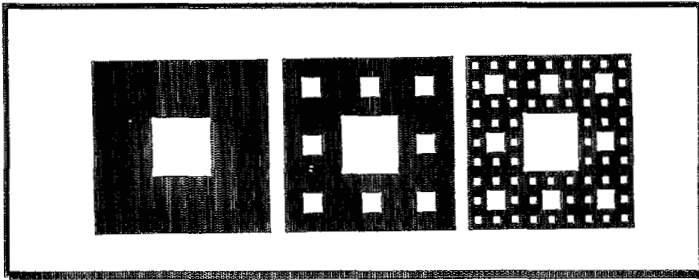


Figure 6. Les 3 premières étapes du développement du "Tapis de Sierpinski" (D'après Mandelbrot, 1983)

L'équivalent tridimensionnel du tapis de Sierpinski est l'"Eponge de Menger" ( $N = 20$ ;  $r = 1/3$ ;  $D = 2.7268$ ), (Fig. 7). Cet objet fractal est un milieu poreux régulier, de type lacunaire. L'initiateur est un cube unitaire et le générateur est tel que l'espace vide dégagé dans chaque élément à toute étape  $i$  du développement du fractal soit concentré en un même lieu : Chaque cube d'arête  $d_i$  est décomposé en 27 petits cubes jointifs d'arête  $d_{i+1} = rd_i$  dont 7 cubes, disposés selon les axes de symétrie principaux, sont vides.

On peut aussi envisager un générateur tel que l'espace vide créé à chaque étape soit régulièrement réparti autour de tous les petits cubes correspondants. Il en résulte une structure fragmentaire imbriquée où tout cube est décomposé en  $N$  petits cubes non jointifs, séparés par un réseau de fractures (Fig. 8). Pour les valeurs  $N = 8$  et  $r = 0.4665$  la dimension fractale d'une telle structure est identique à celle de l'éponge de Menger. Il découle de l'homothétie interne que les largeurs  $p_i$  des fractures successives sont dans le même rapport que les arêtes  $d_i$  des cubes:  $p_{i+1}/p_i = d_{i+1}/d_i = r$ .

Dans l'éponge de Menger comme dans la structure fragmentaire, aussi bien les éléments solides, jointifs ou non, que les espaces vides, cubiques ou plans, présentent la propriété essentielle d'homothétie interne de rapport linéaire  $r < 1$  et ils vérifient une distribution fractale. Ces deux objets fractals peuvent être utilisés comme des modèles théoriques de milieux poreux. En raison de son générateur particulier, la structure fragmentaire comporte des similitudes remarquables avec la structure du sol analysée précédemment.



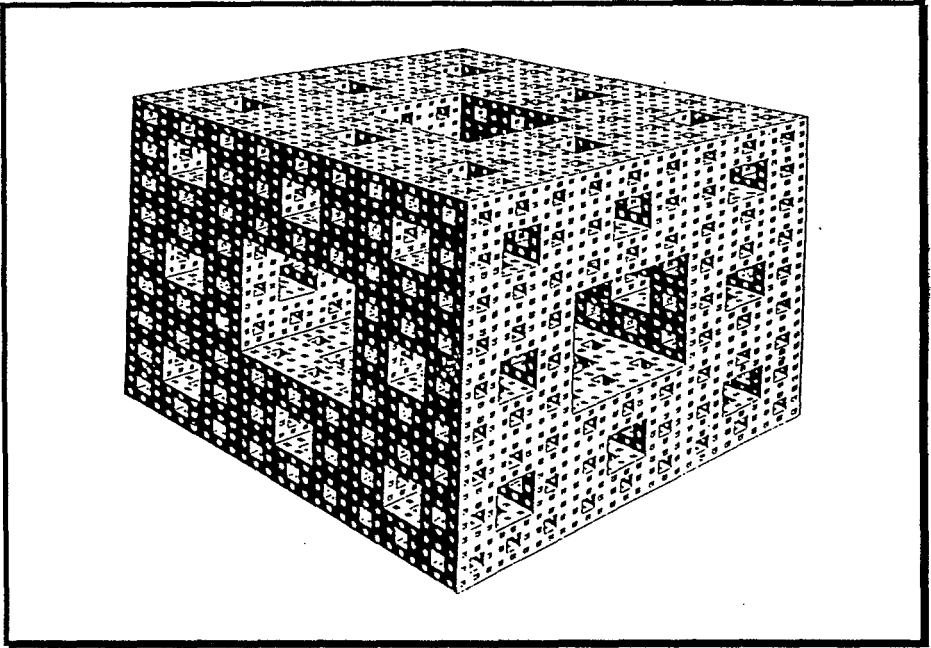


Figure 7. La quatrième étape du développement de l'"Eponge de Menger" (D'après Mandelbrot, 1983)

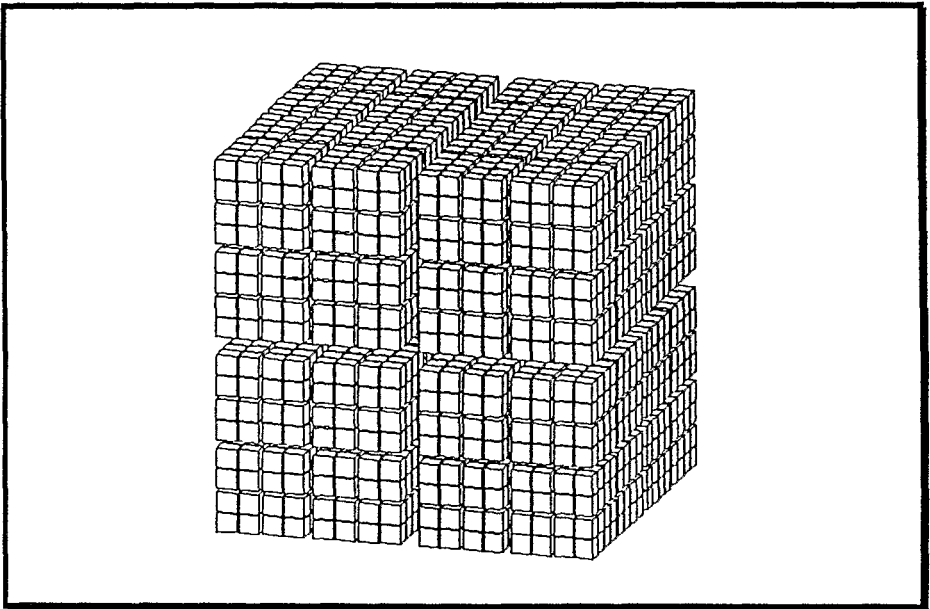


Figure 8. La quatrième étape du développement de la structure fragmentaire fractale (D'après Rieu et Sposito, 1990)

### 3. STRUCTURE FRAGMENTAIRE FRACTALE ET STRUCTURE DU SOL

Les objets fractals ne sont pas limités dans l'espace. On peut toutefois étudier leur structure dans un domaine d'échelles borné. Ce domaine peut être défini par la longueur  $d_m$  de l'arête de l'élément solide le plus petit et, soit le nombre  $m$  d'étapes de développement du fractal qui ont produit le plus petit élément, soit la longueur  $d_0$  de l'arête de l'élément solide le plus grand. Ceci porte à quatre le nombre de paramètres nécessaires pour définir un objet fractal borné; par exemple :  $r$ ,  $D$ ,  $d_m$  et  $d_0$  ou  $m$ .

Dans le cas de la structure fragmentaire, le cube d'arête  $d_m$  n'inclut aucune fracture; sa porosité est nulle et sa densité est notée  $\sigma_m$ . Le cube d'arête  $d_0$ , et de densité  $\sigma_0$ , contient toutes les fractures possibles dans le domaine considéré. Le cube d'arête  $d_{m-1}$  ne contient que des fractures de largeur  $p_{m-1}$ , tandis que la largeur des fractures les plus ouvertes contenues dans le cube d'arête  $d_0$  est notée  $p_0$ .

Tous les éléments de la structure fragmentaire vérifient une distribution fractale. Cette propriété est exprimée par (Cf. Eq. (8)) :  $N_i = A d_i^{-D}$ . Cette relation est équivalente à l'équation (4) vérifiée par la distribution des agrégats du sol. On en déduit que cette distribution est fractale ainsi que la distribution des fissures délimitant les agrégats. On observera que l'équation (4) permet de déterminer expérimentalement la valeur de la dimension fractale  $D$  de ces distributions.

On démontre (Rieu et Sposito, 1990) que, dans la structure fragmentaire fractale, la porosité de l'élément de taille  $d_0$  est :

$$\phi_0 = 1 - (r^{3-D})^m \quad (9)$$

où  $r$  est le rapport d'homothétie interne et  $D$  la dimension fractale de la structure fragmentaire.

La porosité d'un élément de taille  $d_i$  est exprimée par :

$$\phi_i = 1 - (r^{3-D})^{m-i} \quad (10)$$

Dans les équations (9) et (10) la condition :  $\emptyset < 1$  implique que la dimension fractale d'un milieu poreux est nécessairement inférieure à 3. Par ailleurs, il résulte de l'équation (7) que, pour une valeur

constante de N, si  $D \rightarrow 3$ ,  $r \rightarrow 1$  et  $\emptyset \rightarrow 0$  : Plus la valeur de la dimension fractale se rapproche de celle de la dimension Euclidienne, plus l'espace poral est réduit et finement divisé; inversement, plus la dimension fractale est inférieure à 3, plus la porosité est développée et grossière.

Si un processus d'humectation a rempli d'eau toutes les fractures de largeur inférieure ou égale à  $p_i$ , la teneur en eau volumique est :

$$\theta_i = (r^{3-D})^i - (r^{3-D})^m \quad (11)$$

La porosité d'un élément de taille  $d_i$  et de densité  $\sigma_i$  est par définition:

$$\emptyset_i = 1 - \sigma_i / \sigma_m \quad (12)$$

Il résulte de l'homothétie interne que  $d_m = d_0 r^m$  et  $d_i = d_0 r^i$ . L'équation (10) peut être réécrite sous la forme :

$$\emptyset_i = 1 - (d_m / d_i)^{3-D} \quad (13)$$

En combinant les équations (12) et (13) on obtient :

$$\sigma_i / \sigma_m = (d_i / d_m)^{D-3} \quad (14)$$

De la même façon on a :

$$\sigma_0 / \sigma_m = (d_0 / d_m)^{D-3} \quad (15)$$

et la combinaison des équations (14) et (15) produit :

$$\sigma_i / \sigma_0 = (d_i / d_0)^{D-3} \quad (16)$$

L'équation (16) est identique à l'équation (5), avec la constante  $C = 3 - D$  : La propriété exprimée par l'équation (5) est strictement une propriété d'un milieu poreux fractal. Comme cela a été observé à propos de cette équation, la condition  $D = 3$ , équivalente à  $C = 0$ , implique que le milieu n'est pas poreux, c'est à dire que tous les éléments ont la même densité.

un rapport d'homothétie déterminés expérimentalement dans le sol. Une telle structure, développée entre deux limites correspondant à la taille des agrégats le plus petit et le plus grand observés dans le sol, est équivalente à la structure du sol.

#### 4. COMPORTEMENT HYDRODYNAMIQUE

Il résulte de l'homothétie interne que  $p_i = p_0 r^1$  (Cf. Eq. (3)). La pression de l'eau dans une fracture de largeur  $p_i$  peut s'écrire (Cf. Eq. (2)) :

$$h_i = h_0 r^{-i} \quad (17)$$

où  $h_0 = R/p_0$  est la pression dans la fracture la plus large, c'est à dire la pression la plus proche de 0. L'équation (17) est identique à l'équation (1) : La variation de la pression de l'eau mesurée dans le sol est identique à la variation de la pression dans une structure fragmentaire fractale. On observera que l'équation (1) permet de déterminer expérimentalement la valeur du rapport d'homothétie interne  $r$ .

Les équations (9) et (11) permettent d'écrire :

$$\theta_i = (r^{-i})^{D-3} + \varnothing_0 - 1 \quad (18)$$

et en combinant les équations (17) et (18), on obtient :

$$h_i = h_0 (1 - \varnothing_0 + \theta_i)^{1/(D-3)} \quad (19)$$

L'équation (19) exprime la loi de variation de la pression de l'eau dans le système de fractures d'une structure fragmentaire fractale en fonction de la teneur en eau. Les valeurs expérimentales de la pression de l'eau dans le sol reportées sur la Fig. (1), sont présentées en fonction de la teneur en eau du sol correspondante sur la Fig. (9) et confrontées aux valeurs modélisées par une structure fractale équivalente. Les paramètres de cette structure ont été déterminés expérimentalement :

$$\varnothing_0 = 0.46 \text{ m}^3 / \text{m}^3$$

$$h_0 = 0.22 \text{ m}$$

$$r = 0.82 \text{ (Eq. 1)}$$

$$D = 2.90 \text{ (Eq. 4)}$$

$$m = 31 \text{ (Eq. 9)}$$

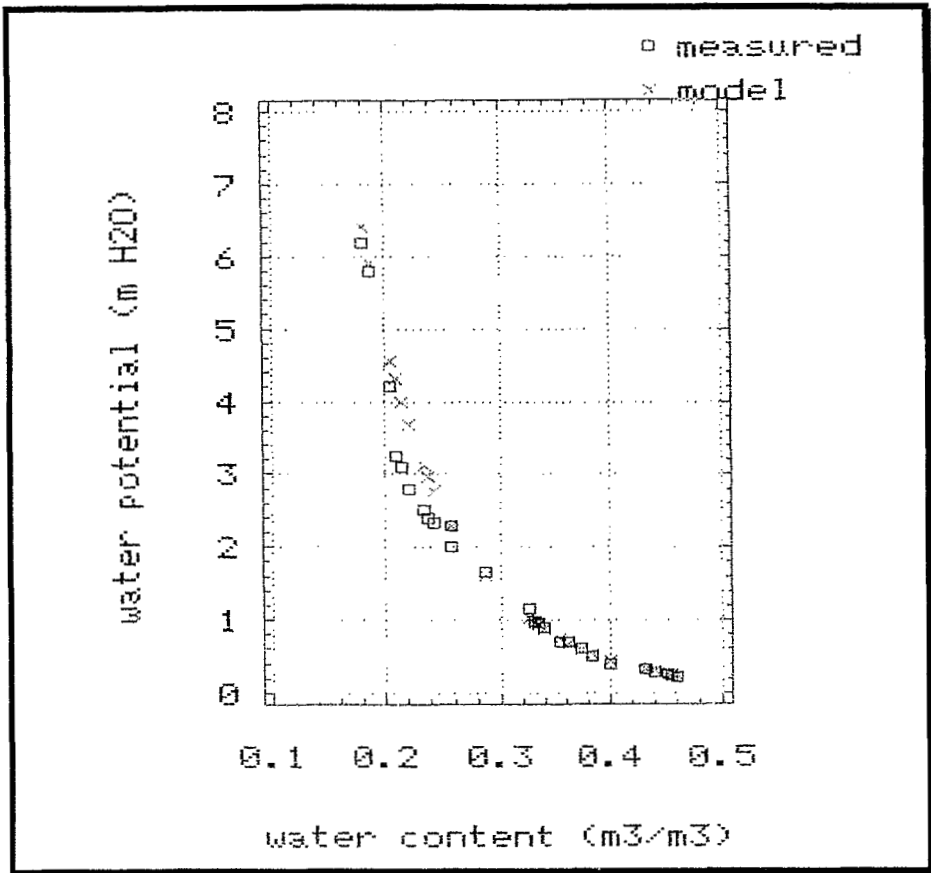


Figure 9. Variation de la pression de l'eau en fonction de la teneur en eau dans le sol de l'Ariana. Comparaison entre les valeurs expérimentales et les valeurs modélisées par l'équation (19) (Données de Bousnina, 1984)

La bonne correspondance entre l'expérimentation et le modèle permet d'affirmer que les variations simultanées de la pression de l'eau et de la teneur en eau dans le sol sont identiques à celles qui se produisent dans une structure fragmentaire fractale équivalente. On notera par ailleurs que l'ajustement d'une courbe théorique de la forme :  $h = h_0 (1 - \theta + \theta)^E$  à un graphe expérimental de  $h(\theta)$  permet de déterminer la dimension fractale  $D$ .

## CONCLUSION

La mesure expérimentale de quelques propriétés liées à la structure du sol ainsi que la détermination théorique des propriétés d'une structure fragmentaire fractale permettent d'établir une équivalence entre les deux structures. Cette équivalence n'est pas limitée à des caractères statiques telles que la distribution ou la taille des

éléments structuraux mais il est possible de modéliser le comportement hydrodynamique du sol par celui de la structure fragmentaire fractale équivalente à la structure du sol. Cette structure est définie par deux paramètres qui peuvent être déterminés expérimentalement et développée entre deux limites mesurées dans le sol. Une telle structure représente en quelque sorte une abstraction idéale et simplifiée de l'assemblage du sol, complexe et délicat à analyser en raison de son apparente hétérogénéité. De là à affirmer que, au moins dans un domaine d'échelles limité, la structure du sol est fractale, il n'y a qu'un pas qui ne pourra cependant être franchi qu'après de nombreuses vérifications étendues à la plus large variété de sols possible.

## REFERENCES

- ALDERFER, R.B. 1946. Seasonal variability in the aggregation of Hagerstown silt loam. *Soil Sci.* 62:151-168.
- BAVER, L.D., ET H.F.R. RHOADES. 1932. Aggregate analysis as an aid in the study of soil structure relationships. *J. Amer. Soc. Agron.* 24:920-930.
- BOUSNINA, H., 1984. Comparaison de différentes méthodes d'étude des propriétés hydrodynamiques d'un sol à texture fine. *Mém. Fin Et. Institut National Agronomique. Tunis, Tunisie.*
- CHEPIL, W.S., 1950. Methods of estimating apparent density of discrete soil grains and aggregates. *Soil Sci.* 70:351-362.
- FEDER J. 1988. *Fractals.* Plenum Press, New York.
- MANDELBROT B.B. 1983. *The fractal geometry of nature.* W.H. Freeman, San Francisco.
- RIEU, M., ET G. SPOSITO. 1990. Fractal fragmentation, soil porosity and soil water properties. (Soumis à *Soil Sci. Soc. Amer. J.*)
- TURCOTTE, D.L. 1986. Fractals and fragmentation. *J. Geoph. Res.* 91:1921-1926.
- TURCOTTE, D.L. 1989. Fractals in Geology and Geophysics. *Pageoph.* 131:171-196.