

CARACTERISATION DE TEXTURES PAR L'ANISOTROPIE DE LA DIMENSION *FRACTALE*

Kidiyo KPALMA

Laboratoire d'Automatique, Equipe Image
Institut National des Sciences Appliquées
20, avenue des Buttes de Coësmes
35043 RENNES CEDEX
e-mail : kpalma@labim0.univ-rennes1.fr

Mots clés : texture, mouvement brownien, autosimilarité, dimension *fractale*, anisotropie, segmentation.

RESUME

La texture est une composante riche en information dans l'interprétation d'une image. Que ce soit pour l'étude des images microscopiques ou satellitaires de télédétection, la texture représente un élément nécessaire pour la compréhension. Son importance dans l'interprétation d'images explique l'intérêt que l'on lui porte dans l'analyse d'images.

Ce papier présente une méthode de caractérisation de textures basée sur la dimension *fractale*. Le calcul de cette dimension suivant plusieurs orientations, nous procure une structure géométrique anisotrope. Des mesures faites sur cette structure donne des paramètres discriminants pour la caractérisation des textures.

I INTRODUCTION

Dans une image, la texture est un paramètre très important pour la compréhension et l'interprétation d'une scène. C'est ainsi qu'elle est prise en compte dans nombre de méthodes d'analyse d'images. Si les méthodes permettant la mesure de textures sont nombreuses, aucune ne peut, aujourd'hui, prétendre généraliser un modèle de texture. En effet, de part sa complexité intrinsèque, l'on n'a pu trouver une définition formelle de ce qu'est la texture. On se contente donc de trouver un modèle adéquat pour l'étude à mener. C'est ainsi que l'on peut dresser une longue liste d'approches dans l'analyse de textures. Les différentes méthodes pouvant être regroupées dans deux catégories :

- les méthodes structurelles pour l'étude des textures dites structurées dans lesquelles l'on peut isoler des primitives distribuées de façon plus ou moins régulière et périodique.

- et les méthodes statistiques consacrées à l'étude des textures qui peuvent être considérées comme la réalisation d'un processus aléatoire. Sous cet aspect, la texture ne présente ni structure isolable, ni fréquence de répétition. Elle est donc définie par son plus fin détail qui est le pixel.

Avec l'essor que prend la télédétection dans la gestion de l'environnement, l'on voit grandir l'intérêt pour les méthodes d'analyse de la texture. Elle permet une bonne compréhension des images de télédétection que ce soit dans le visuel ou dans le radar.

Ce papier, nous présente une méthode d'analyse de textures basée sur une structure définie à l'aide de la dimension *fractale* mesurée dans différentes orientations. Si la notion de *fractales* a longtemps été utilisée dans la synthèse d'images, on voit se développer ses applications en analyse d'images et en compression d'images où elle laisse paraître un grand espoir.

Compte-tenu de l'importance qu'elle occupe actuellement en traitement d'images et pour expliquer le choix du modèle *fractal* pour l'analyse de textures, nous consacrons la section suivante à la notion de la géométrie *fractale*. Dans la section 3, nous présenterons l'étude d'un modèle *fractal* appliqué aux textures naturelles. Dans la section 4, nous illustrerons l'étude par des résultats expérimentaux. Pour finir, la section 5 fera l'objet d'observations et de conclusions.

II LES FRACTALES : définition et propriétés

II.1 Définition

Les objets *fractals* ou, simplement, *fractales* sont définis comme des objets mathématiques ou réels dont la dimension de Hausdorff-Besicovitch (ou dimension *fractale*) est fractionnaire et strictement supérieure à leur dimension topologique. Leur description est régie par les lois de la géométrie *fractale* qui généralise la notion de la géométrie traditionnelle.

La description du monde réel est soumise aux lois de la géométrie. Mais la géométrie traditionnelle qui ne dispose que de figures simples comme les droites, les cercles et les sphères devient parfois insuffisante. Comment pourrait-on, sans perdre trop de temps de calculs et d'espace mémoire, décrire des objets

complexes, irréguliers et animés de fluctuations aléatoires que sont les montagnes, les flocons de neige ou des côtes littorales [8, 9] ?

Avec la géométrie *fractale* dont la clé est la dimension non entière, caractère essentiel des objets irréguliers, la description et la compréhension de ces objets naturels deviennent plus aisées.

Que ce soit au cinéma pour la création des effets spéciaux ou en chimie pour la simulation des polymères, on fait de plus en plus appel à la géométrie *fractale*.

Les *fractales* sont caractérisées par leurs irrégularités et la complexité de leurs fluctuations qui leur a valu leur nom *fractales* (du latin *fractus* : irrégulier, fragmenté) introduit par Mandelbrot. Il a été démontré que la "*fractalité*" d'un objet est notre perception intuitive de son irrégularité ou de sa rugosité ; plus un objet est irrégulier et plus sa dimension *fractale* est élevée [9].

La notion traditionnelle de la dimension d'un objet (ou d'un espace vectoriel) fait référence à un nombre entier de vecteurs indépendants qui forme la base de cet objet : c'est la dimension topologique. Une droite a une dimension égale à l'unité, un plan en a deux et l'espace en a trois.

Afin de mieux comprendre l'utilité des dimensions non entières, considérons une côte littorale sauvage et irrégulière [9]. Pour mesurer la longueur d'une portion de cette côte qui s'étend entre deux points fixes A et B, nous devons définir un pas de mesure ϵ . Pratiquement, cette longueur aura un comportement croissant aussi longtemps que l'on choisira un pas de mesure de taille décroissante.

Considérons une règle de longueur ϵ . Pour mesurer la longueur de la côte entre les points A et B, nous devons disposer cette règle bout à bout depuis le point A jusqu'au point B en suivant les contours. Si $N(\epsilon)$ est le nombre de ϵ juxtaposés le long de AB, alors la longueur $L(\epsilon)$ de la côte entre les points A et B est le produit de la longueur de la règle et du nombre $N(\epsilon)$:

$$L(\epsilon) = \epsilon \cdot N(\epsilon) \quad (1)$$

Il est évident que la longueur mesurée dépend de la taille de ϵ . En effet, si certains détails de la côte sont plus petits que ϵ , comme c'est le cas sur la figure 1, ceux-ci seront ignorés dans l'opération de la mesure et la longueur mesurée comportera une erreur. Cette erreur sera d'autant plus grande que la règle ϵ sera trop grande par rapport aux détails de la côte. Par contre si l'on diminue la taille du pas ϵ , on remarque que la longueur mesurée croît sans fin. La notion de

longueur est donc relative à la résolution de la mesure et elle est différente de la "vraie" longueur. La notion de la mesure perd alors son sens physique et se pose alors un problème : *comment obtenir une mesure exacte de la longueur d'une courbe ?*

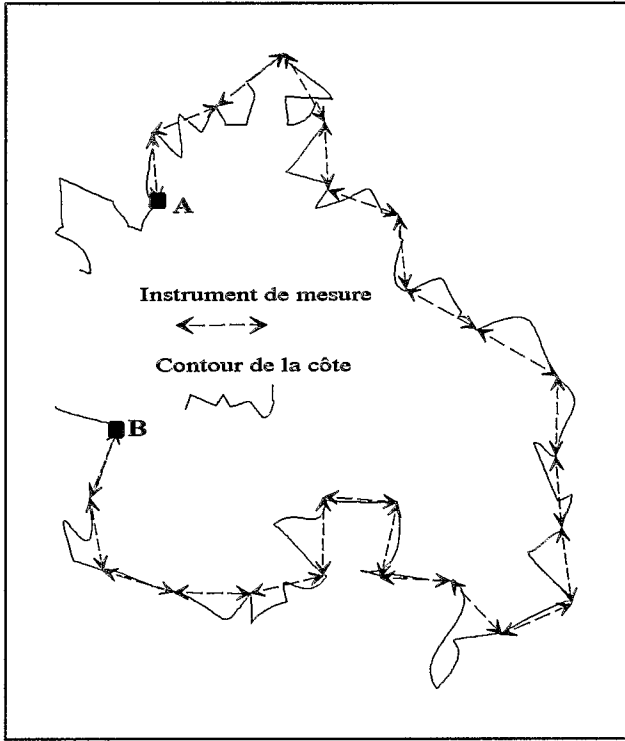


Fig.1 : Illustration de la mesure de la longueur d'une côte avec un pas de mesure plus grand que certains détails de la côte.

En s'inspirant de la loi de Richardson, Mandelbrot [9] a pu résoudre le problème. En effet, Richardson avait montré dans ses travaux que la longueur d'une côte valait approximativement

$$L(\epsilon) \approx F \cdot \epsilon^{1-D} = \epsilon \cdot (F \cdot \epsilon^{-D}) \quad (2)$$

où $F \cdot \epsilon^{-D}$ pourrait être défini comme le nombre d'intervalles de longueur ϵ nécessaires pour couvrir la côte entre A et B. F et D étant des constantes, on obtient la relation suivante :

$$N(\epsilon) = F \cdot \epsilon^{-D} \quad (3)$$

Dans les travaux de Richardson, on note que la constante D varie avec la côte et avec la portion de la côte prise en compte, mais cette constante ne dispose d'aucune signification précise. Felix Hausdorff qui a découvert la dimension *fractale* (dimension de Hausdorff) en 1919 a montré que si $N(\varepsilon) = F \cdot \varepsilon^{-D}$, il faut élever ε à la puissance D avant la multiplication dans la mesure de $L(\varepsilon)$. La longueur de la côte devient alors :

$$L(\varepsilon) = (\varepsilon^D)(F \cdot \varepsilon^{-D}) = F \quad (4)$$

On trouve ainsi une mesure qui ne dépend plus de la taille du pas de mesure [9] et ceci donne alors un sens à la constante F . Même si $L(\varepsilon)$ ne dépend plus de ε , le problème n'est toujours pas résolu puisque Hausdorff a montré que D ne pouvait pas prendre n'importe quelle valeur et que pour une côte donnée, il existe une valeur unique \bar{D} telle que

$$\begin{array}{ll} \text{si } D > \bar{D}, & L(\varepsilon) = \infty \quad \text{et} \\ \varepsilon \rightarrow 0 & \\ \text{si } D < \bar{D}, & L(\varepsilon) = 0 \\ \varepsilon \rightarrow \infty & \end{array}$$

La mesure de la longueur d'une côte irrégulière n'a donc de sens que si l'exposant D est égal à cette valeur \bar{D} : c'est sa dimension *fractale*. Pour la suite, nous noterons : D_F la dimension *fractale* et D_T la dimension topologique.

II.2 Les propriétés des fractales

L'une des principales propriétés des *fractales* est l'*autosimilarité* (ou similitude interne) sur laquelle reposent la plupart des méthodes de construction et d'analyse d'objets *fractals*. La simulation d'objets *fractals* sur l'ordinateur utilise, en général, les algorithmes récursifs qui consistent en une série d'itérations d'une transformation appliquée aux motifs générateurs [1]. On dit qu'un ensemble A est autosimilaire de rapport d'homothétie r par rapport à l'entier N s'il est la réunion de N sous-ensembles disjoints et congruents à A . Congruent voulant dire identique à une translation, à une rotation et à une légère déformation près. La courbe de Von Koch de la figure 2 illustre bien cette propriété d'*autosimilarité*. Cette courbe résulte d'une subdivision récursive Φ de segments de droite comme le montrent les différentes étapes de construction. A la $n^{\text{ième}}$ itération de la transformation Φ , on a 3^n segments de droite T_n congruents à T_0 .

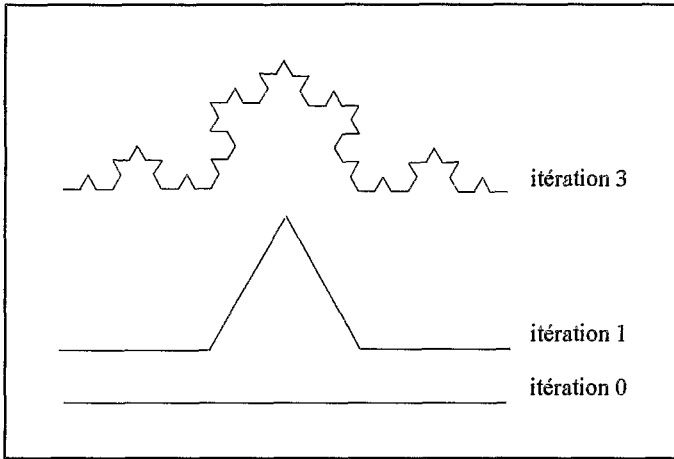


Fig.2 : Courbe de Von Koch à l'itération 0, 1 et 3 de la transformation.

Si le segment initial mesure L_0 , alors à la $n^{\text{ième}}$ itération de la transformation, la longueur L_n de cette courbe est $L_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n L_0$.

La figure 3.a montre une fougère engendrée par une méthode fractale (SFI : Système de Fonctions Itératives) [7]. L'agrandissement d'une partie (fig. 3.b) illustre la propriété d'autosimilarité de cette fractale : quelle que soit l'échelle d'observation, on distingue des structures congruents au tout. Dans la synthèse, l'on n'est limité que par la résolution du système de visualisation.

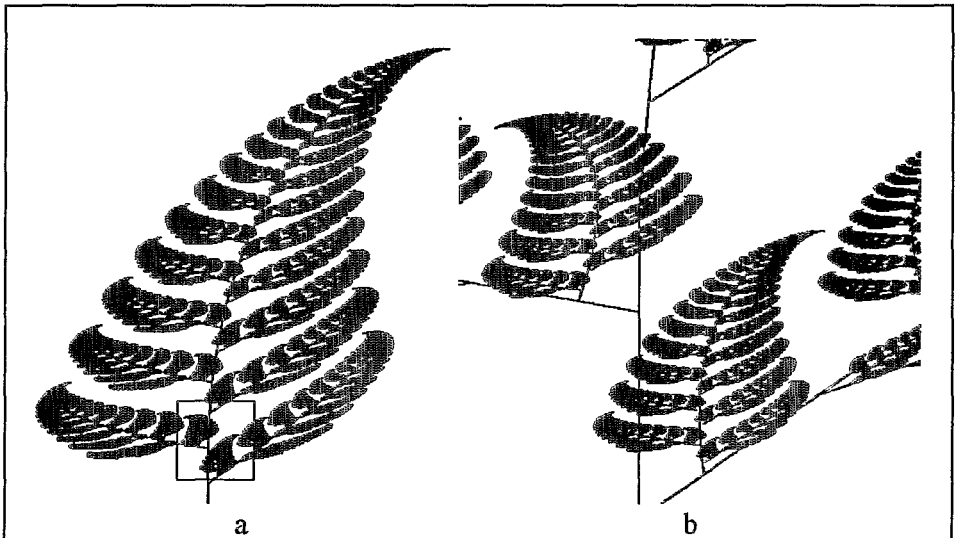
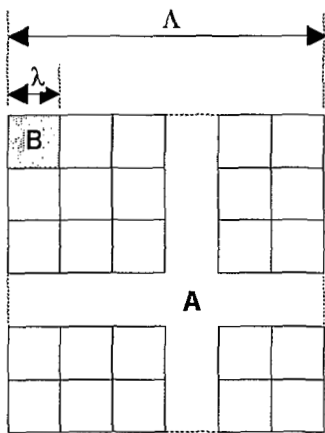


Fig.3 : a- Fougère engendrée par un SFI et b- agrandissement ($\times 6$ environ) de la zone encadrée de a.

De la même façon que la courbe de Von Koch, si on utilise une homothétie de rapport non nul on peut paver un carré par N petits carrés ; chaque partie étant réduite par un rapport d'homothétie de valeur $r(N) = \frac{1}{\sqrt{N}}$. Dans le cas d'un cube, on a N petits cubes réduits avec un rapport d'homothétie $r(N) = \frac{1}{\sqrt[3]{N}}$ pour le paver. Plus généralement, un espace euclidien de dimension D_T admet une homothétie de rapport $r(N) = \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{1}{D_T}}$.



Soit r le rapport d'homothétie, par dimension, entre un carré de type B et le carré A. On a alors :

$$r = \frac{\lambda}{\Lambda}$$

Si N est le nombre de carrés de type B dans le carré A, alors

$$N = \left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right)^2 = \left(\frac{1}{r}\right)^2$$

donc on a bien $r = \frac{1}{\sqrt{N}}$ puisque $D_T=2$.

Fig.4 : Subdivision d'un carré pour mesurer sa dimension d'homothétie interne.

On a ainsi la formule $N = r(N)^{-D}$ qui rappelle la loi de Richardson et dont on peut tirer la dimension

$$D = - \frac{\text{Log}(N)}{\text{Log}(r(N))} \quad (5)$$

dite dimension d'homothétie interne.

La dimension d'homothétie interne de la courbe de Von Koch est donc donnée par

$$D_K = - \frac{\text{Log}(N)}{\text{Log}(r)} = - \frac{n \cdot \text{Log}(4)}{n \cdot \text{Log}(1/3)} = \frac{\text{Log}(4)}{\text{Log}(3)} = 1.26$$

où $N = 4^n$ et $r = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ à la $n^{\text{ième}}$ itération.

D_K qui est appelé dimension d'homothétie interne n'est rien d'autre qu'une expression de la dimension *fractale*. Ceci nous introduit ainsi à une méthode de mesure de la dimension *fractale*.

II.3 Les *fractales* stochastiques : le mouvement brownien fractionnaire

A côté des *fractales* définies plus haut, existent des *fractales* stochastiques : c'est dans leurs propriétés statistiques que l'on retrouve les propriétés *fractales* telles que l'autosimilarité ou la dimension *fractale*.

Le mouvement brownien, du nom de l'Écossais Robert Brown qui l'a observé pour la première fois en 1827 [5], décrit les mouvements des particules dans une suspension. Ce mouvement est introduit par Mandelbrot [8] comme un modèle stochastique permettant une étude plus aisée des *fractales* naturelles telles que les côtes littorales, les textures, les montagnes ou les nuages.

Les mouvements browniens fractionnaires fBm (fractional Brownian motion) [8] permettent de décrire les processus stochastiques de type gaussien. Un fBm est essentiellement caractérisé par un paramètre H qui définit sa dimension *fractale*. Si D_F et D_T sont les dimensions *fractale* et topologique d'un fBm paramétré par H , alors on a :

$$D_F = D_T + 1 - H \tag{6}$$

H est défini sur le domaine $]0, 1[$, donc la dimension *fractale* D_F est bien fractionnaire et strictement supérieure à la dimension topologique D_T .

Le fBm répond à la définition des *fractales* énoncée plus haut : il est donc un mouvement *fractal*. Étant la réalisation d'un processus stochastique gaussien, le mouvement brownien est régi par des lois statistiques. Si B_H est un fBm de paramètre H , alors on a :

$$\Pr\left[\frac{B_H(x+\Delta x) - B_H(x)}{\|\Delta x\|^H} < s\right] = F(s) \tag{7}$$

où F est une fonction de répartition de la variable aléatoire s de type gaussien $N(m, \sigma^2)$.

$$F(s) = \text{erf}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^s \exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right) dt \tag{8}$$

Des équations (7) et (8), on déduit l'équation suivante

$$E[(B_H(x + \Delta x) - B_H(x))^2] = \alpha \cdot \|\Delta x\|^{2H} \quad (9)$$

où α est une constante.

Il est évident que si $\frac{B_H(x+\Delta x) - B_H(x)}{\|\Delta x\|^H}$ est de type gaussien $N(m, \sigma^2)$, alors son moment d'ordre 2 est donné par

$$E\left[\left(\frac{B_H(x+\Delta x) - B_H(x)}{\|\Delta x\|^H}\right)^2\right] = \sigma^2 + m^2 \quad (10)$$

L'équation (9) devient alors

$$E[(B_H(x+\Delta x) - B_H(x))^2] = (\sigma^2 + m^2) \cdot \|\Delta x\|^{2H}$$

et la constante de proportionnalité α prend la valeur :

$$\alpha = \sigma^2 + m^2 \quad (11)$$

En prenant les logarithmes des deux membres de l'équation (9), on arrive, aisément, à extraire H de l'équation linéaire obtenue :

$$\text{Log}(E[(B_H(x+\Delta x) - B_H(x))^2]) = 2H \cdot \text{Log}(\|\Delta x\|) + \text{Log}(\alpha) \quad (12)$$

III APPLICATION DU MODELE *FRACTAL* AUX TEXTURES NATURELLES

Comme on l'a vu à la section II, la géométrie *fractale* offre un outil essentiel pour la description des objets naturels ou synthétiques ayant des structures extrêmement complexes et irrégulières. Les textures naturelles, comme le montre la figure 5, présentent un aspect fragmenté ; la surface que décrit le niveau de gris d'une image de texture est une surface qui peut être très irrégulière. Comme l'a bien montré A. P. Pentland dans [10] et Kaneko dans [4], la mesure de la rugosité d'une surface que nous fournit le modèle du fBm est une signature efficace pour la caractérisation de textures naturelles. Les mesures faites sur des images de textures différentes montrent, en effet, que le paramètre H de ce modèle possède un pouvoir discriminant. Dans les travaux précédents [6, 7], nous avons montré que le paramètre H , extrait dans différentes orientations, nous procure un facteur discriminant pour les textures.

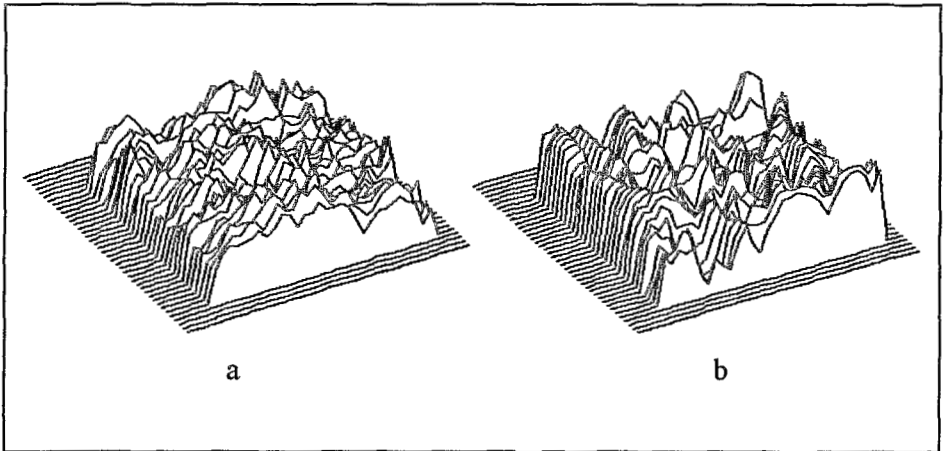


Fig.5 : Surface du niveau de gris de deux textures naturelles : a- laine et b- herbe.

En pratique, la mesure de H se fait à l'aide de l'équation (9). En calculant la moyenne des carrés des écarts entre les pixels situés dans une fenêtre d'analyse centrée sur le pixel x et ceux situés dans une autre fenêtre de même taille, centrée sur le pixel $x+\Delta x$, on obtient le premier membre de l'équation (9). En prélevant une série de valeurs de ce type pour différentes valeurs du vecteur déplacement Δx , l'estimation de la droite passant par les points ainsi obtenus donne le paramètre H qui représente la pente de cette droite. La valeur mesurée est alors attribuée au pixel x .

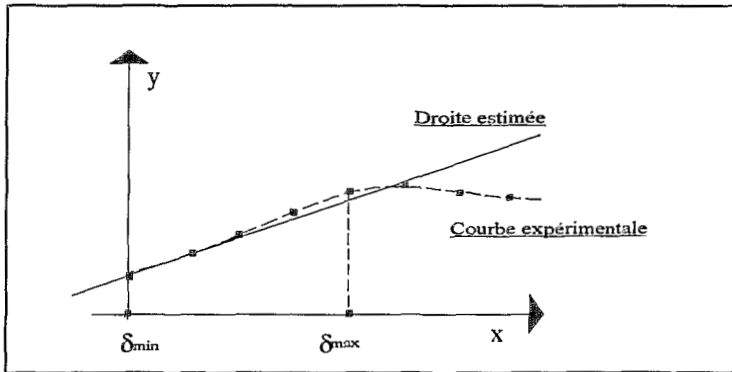


Fig.6 : Courbe et droite estimée de $\text{Log}(E[(B(x+\Delta x)-B(x))^2])$ en fonction de $\text{Log}(\|\Delta x\|)$

Les expériences effectuées sur des images de textures naturelles pour extraire le paramètre H en fonction de Δx montrent que les points prélevés ne donnent pas une droite, mais une courbe avec une saturation à partir d'une valeur δ_{\max} comme on peut le voir sur la figure 6. Ce phénomène de saturation observé correspond à la décorrélation des points d'images quand ils sont séparés par une certaine distance. En effet, pour les points suffisamment éloignés, la corrélation inter-pixel chute. δ_{\max} définit donc le domaine d'applicabilité du modèle. Il est donc nécessaire pour la mesure du paramètre *fractal* de délimiter le domaine d'observation.

Comme on peut le voir sur l'équation (7), le fBm est une fonction isotrope : c'est-à-dire que la valeur de H reste la même quelle que soit la direction du vecteur déplacement Δx ; cette équation ne dépend pas de l'orientation du déplacement. Mais il s'avère que les images de textures naturelles ne possèdent pas cette propriété. La représentation du paramètre H en fonction de l'orientation faite sur la figure 7.a illustre l'anisotropie d'une texture naturelle (laine) par rapport au modèle *fractal* du fBm. Il s'avère utile alors de prendre cette anisotropie en compte dans la caractérisation de la texture par des mesures de H [6 et 7]. La méthode que nous avons proposée dans les travaux précédents, consiste à définir un certain nombre de directions suivant lesquelles on extrait le paramètre *fractal* H. En quantifiant l'espace angulaire en d (d=4) directions différentes, on peut extraire, pour une texture, différentes valeurs du paramètre *fractal* $H(\theta_i)$ dépendant de l'angle θ_i (i=1, 2, ..., d) et constituer un vecteur attribut $V = (H(\theta_1), H(\theta_2), \dots, H(\theta_d))^T$.

Dans cet article, nous proposons une nouvelle méthode basée sur la structure géométrique définie par la "rose" des H. Les différentes valeurs de H sont calculées, comme précédemment, à l'aide de l'équation (12). A partir de cette rose des H (fig.7.b), on définit une structure géométrique polygonale (fig.7.c). Des mesures basées sur les propriétés géométriques de cette structure nous donnent alors des attributs de la texture.

Evidemment, ces mesures sont d'autant plus consistantes que l'on les effectue sur la structure réelle. Mais pour des raisons de coût de calcul, nous nous limitons à une structure simplifiée mais suffisamment représentative que l'on obtient en "échantillonnant" l'espace angulaire. Le nombre d'orientations utilisées est de 16 (avec un pas angulaire de 22.5°). Les 16 différentes orientations qui se sont avérées suffisamment consistantes pour la représentation des structures a été fixé par les résultats expérimentaux obtenus sur diverses textures. Les attributs proposés sont définis alors par les mesures ci-dessous [3] (en utilisant les notations suivantes) :

Notations :

S : structure géométrique de la texture (fig. 7.c)
SC : l'équivalent convexe de S.

d : diamètre minimal de S
D : diamètre maximal de S
<d> : diamètre moyen de S

- Périmètre : $P(S)$
- Aire : $A(S)$

• Indice d'isotropie : $ISO = \frac{\langle d \rangle}{D}$. Cette mesure varie de 0 (segment de droite) à 1 pour un cercle.

• Facteur de forme : $FF = \frac{d}{D}$. C'est la mesure du taux de compacité d'un objet. Il varie aussi entre 0 pour un segment de droite et 1 pour un cercle.

• Degré de symétrie par rapport à l'axe principal (DSD) et par rapport à l'axe du diamètre minimal (DSd) : le degré de symétrie par rapport à un axe est donné par le rapport entre la moyenne des écarts de H (en valeur absolue) de part et d'autre de cet axe et le rayon maximal de S.

• Degré de convexité par rapport à la surface : $DCS = \frac{A(S)}{A(SC)}$.

• Degré de convexité par rapport au périmètre : $DCP = \frac{P(SC)}{P(S)}$

Le paramètre DCS mesure le taux de déficit en surface de S par rapport à son équivalent convexe alors que le DCP mesure le taux de déficit en périmètre de SC par rapport à S.

• Indice de déficit : $ID = \frac{\pi(D-d)^2}{P(S)^2}$

• Indice d'écart avec le cercle maximal inscrit (IECI) et le cercle circonscrit (IECC) : c'est la mesure de l'écart en surface entre le cercle maximal inscrit et le cercle circonscrit respectivement.

$$IECI = \frac{\pi d^2}{4A(S)}$$

et

$$IECC = \frac{4A(S)}{\pi d^2}$$

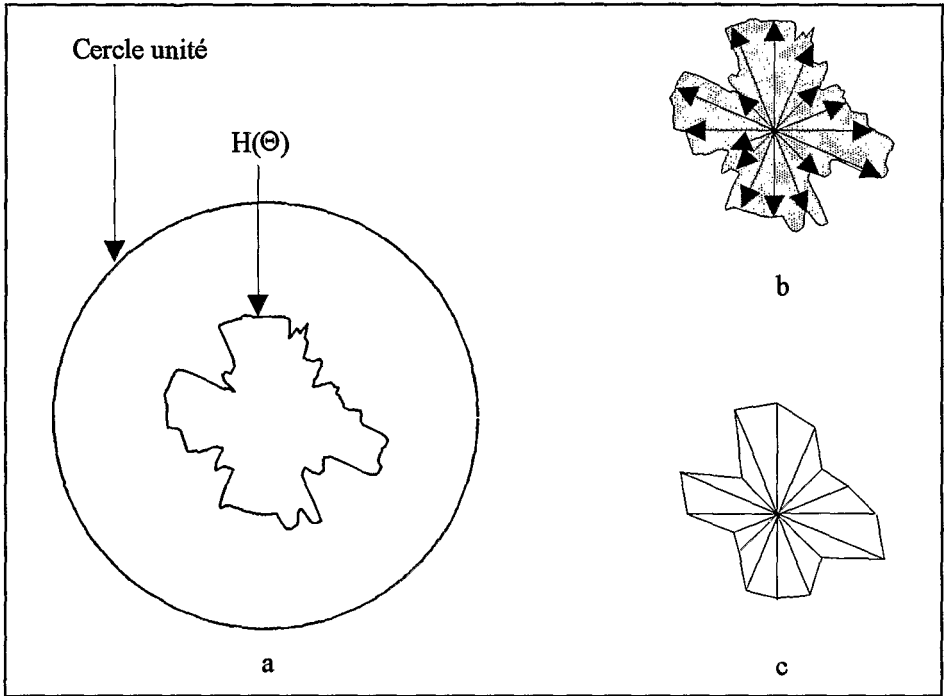


Fig.7 : a- $H(\Theta)$ (de la texture "laine") et cercle unité, b- structure S et rose des H, c- structure polygonale obtenue.

IV RESULTATS EXPERIMENTAUX

Pour valider ces attributs, nous avons effectué quelques tests de segmentation sur des mosaïques de textures. Ces textures qui sont prélevées dans l'album de Brodatz [2], ont, d'abord, été normalisées à une même moyenne et une même variance avant être combinées pour créer les images de test. La segmentation qui consiste à donner une même étiquette aux régions contiguës ou non possédant les mêmes propriétés caractéristiques à été réalisée par la classification bayésienne des points images.

Après l'extraction des paramètres de la structure géométrique, une analyse simple permet de sélectionner les plus discriminants.

Les images utilisées sont de taille 256×256 quantifiées sur 256 niveaux de gris. Pour l'extraction de la dimension fractale (paramètre H), une fenêtre d'analyse de taille 17 pixels de côté a été utilisée.

Les figures 8.a et 8.c montrent deux exemples d'images de test. Les résultats de la segmentation présentés sur les figures 8.b et 8.d montrent l'efficacité de cette méthode d'analyse. Le taux moyen de bonne segmentation obtenu s'élève à 94%.

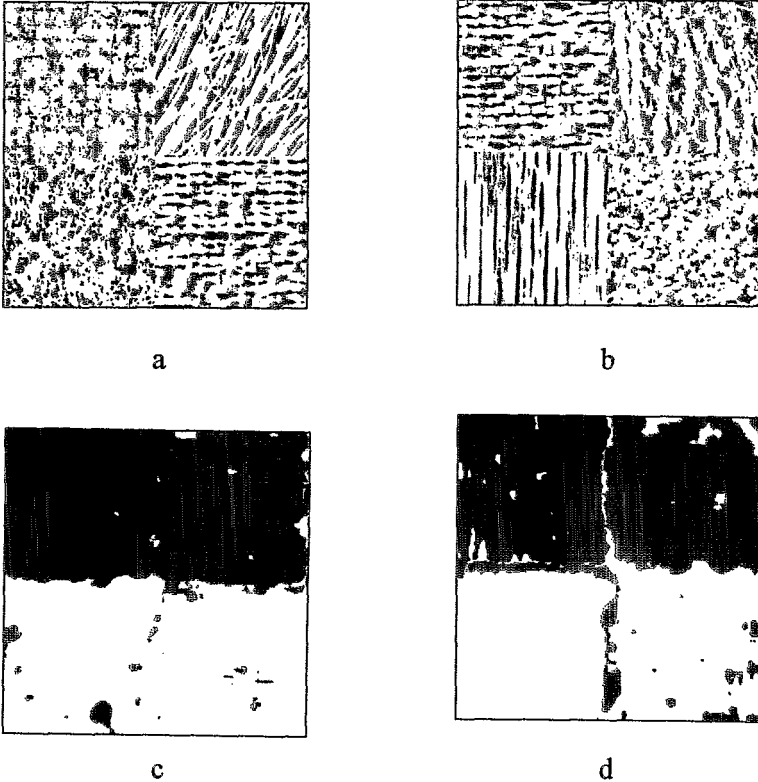


Fig. 8 : Images de test et images segmentées correspondantes (a→b et c→d).

V CONCLUSION

Nous avons présenté une méthode d'analyse de textures. Calculée suivant plusieurs orientations, la dimension fractale donne une structure géométrique anisotrope. Des mesures effectuées sur cette structure a permis de dégager certains attributs de textures.

Des tests de segmentation effectués sur des mosaïques de textures a permis d'évaluer le pouvoir discriminant de ces attributs. Le taux de bonne segmentation

qui est un peu en dessous de celui obtenu par l'utilisation directe des paramètres H [7] reste satisfaisant. Ces résultats placent, ainsi, cette méthode en bonne place, en termes de performances, par rapport aux méthodes des matrices de cooccurrences ou de l'intégrale curviligne.

Cette méthode peut être particulièrement adaptée à la discrimination de textures possédant des primitives orientées, car dans ce cas, les structures (structures S) extraites présentent des formes significatives plus discriminantes.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. F. Barnsley, "Fractals Everywhere", Academic Press, Inc., 1250 Sixth Avenue, San Diego, 1988
- [2] P. Brodatz, "Textures", A photographic Album for Artists and Designers, Dover, New York, 1966
- [3] M. Coster et J. -L. Chermant, "Précis d'Analyse d'Images", Editions du C.N.R.S., 15, quai A. France, Paris, 1985
- [4] H. Kaneko, "A Generalized Fractal Dimension and Its Application to Texture Analysis", IEEE, 1989, pp 1711-1714
- [5] H. B. Kaye, "A random walk through fractal dimensions", publié par VCH Verlagsgesellschaft, Weinheim (RFA), 1989
- [6] K. Kpalma, A. Bruno, V. Haese-Coat, "Natural Texture Analysis in Multiscale Context Using Fractal Dimension", Proc. SPIE, Visual Commun. Image Processing, Nov. 1991
- [7] K. Kpalma, "Analyse Fractale de Textures Naturelles dans un Contexte Multirésolution : Application à la Segmentation d'Images Multirésolution", thèse de doctorat, 12 février 1992, Institut National des Sciences Appliquées de Rennes, France.
- [8] B. B. Mandelbrot, "Les objets fractals : forme, hasard et dimension", Paris (France), Editions Flammarion, 1975
- [9] B. B. Mandelbrot, "The Fractal Geometry of Nature", San Francisco, CA: Freeman, 1982
- [10] A. P. Pentland "Fractal-Based Description of Natural Scenes", IEEE PAMI, vol. 6, No. 6, November 1984, pp 661-674