

Comportement dynamique d'un réseau d'automates associé aux orientations d'un graphe

René Ndoundam et Maurice Tchuenta

Faculté des Sciences
Département d'Informatique
BP 812 Yaoundé Cameroun
e-mail: tchuenta @ irisa.fr / tchuenta @ yaounde.orstom.fr

Mots-clés: dynamique, réseau d'automates, cycles, hypercube, anneaux couplés.

Résumé Nous étudions le comportement dynamique d'un réseau d'automates introduit dans la littérature sous le nom de "chip firing game" et qui intervient dans la modélisation de certains phénomènes physiques tels que des systèmes de balles qui rebondissent sur des parois mobiles en leur faisant subir des mouvements de translation. Nous nous intéressons au cas particulier où les règles d'évolution sont associées aux orientations du graphe sous-jacent. Dans le cas où le graphe est un hypercube de dimension n , nous présentons des techniques qui permettent de construire des évolutions de périodes variées et en particulier de toutes les longueurs paires comprises entre 0 et 2^n . Ensuite, en utilisant un système composé d'une cascade d'anneaux, nous exhibons des évolutions dont les périodes sont exponentielles par rapport à la taille du graphe.

Abstract We are interested in the dynamic behavior of an automata network known as the "chip firing game" and which can be used to modelize various physical phenomena such as systems of balls which bounce back and forth between walls, hitting and pushing them. We study the particular case where the evolution rules correspond to the orientations of the underlying graph. In the case where this graph is a hypercube of dimension n , we present a construction which leads to evolutions of various periods. Then, using a cascade of rings, we exhibit evolutions whose periods are exponential with respect to the size of the graph.

I - INTRODUCTION

Considérons un graphe non orienté $G = (V, E)$ d'ordre n où $V = \{1, \dots, n\}$ est l'ensemble des sommets et $E \subset V \times V$ est l'ensemble des arêtes. Dans toute la suite, d_i désigne le degré du sommet i , c-à-d le nombre de sommets qui lui sont reliés dans G . Initialement chaque sommet i comporte un certain nombre de jetons noté $x(i)$. Le système évolue de la manière suivante: si $x(i)$ est supérieur ou égal à d_i à l'instant t , et si le sommet i est activé, alors il envoie exactement un jeton à chacun de ses voisins; autrement dit, le sommet i perd d_i jetons et chacun de ses voisins en gagne un.

Lorsqu'un seul sommet est activé à la fois, nous disons que le système évolue en série. Par contre, lorsque tous les sommets sont activés simultanément à chaque pas, on dit que le système évolue en parallèle. Dans toute la suite nous nous intéressons uniquement à l'itération parallèle.

Quel que soit le mode d'évolution, le nombre de jetons reste constant au cours de temps. En conséquence, le système finit par évoluer de manière périodique. Si x_t désigne la configuration à l'instant t , alors il existe un entier q appelé longueur du transitoire et un entier p appelé période tels que

$$x_{t+p} = x_t \text{ pour tout } t \geq q, \text{ et } x_{t+p'} \neq x_{t'} \text{ pour } t < q \text{ ou } p' < p.$$

La suite x_0, x_1, \dots, x_{q-1} est appelée phase transitoire et toute suite de p configurations $x_{q+r}, x_{q+r+1}, \dots, x_{q+r+p-1}$ obtenue après la phase transitoire est appelée période de l'itération.

Ce réseau d'automates a été introduit pour la première fois par Spencer [SPE 86] et analysé dans le cas particulier où le graphe sous-jacent est une chaîne. Par la suite, Anderson et al. [AND 89] ont poursuivi cette étude et analysé en détail le cas particulier où initialement toutes les m boules sont regroupées en un seul sommet de la chaîne. Ils ont alors montré que le nombre de pas nécessaires pour que le système se stabilise, est en $O(m^2)$. C'est à eux qu'on doit aussi l'interprétation en termes de balles qui rebondissent sur des murs en les faisant déplacer d'un cran chaque fois qu'elles s'y heurtent.

G. Tardos [TAR 88] a montré que, si l'évolution aboutit à une configuration stable, alors la longueur du transitoire est au plus en $O(n^4)$ où n est la taille du graphe. Plus tard, Bitar et Goles [BiG 92] ont démontré que sur tout arbre, Les itérations sont de période 1 ou 2. Par ailleurs, Goles et Kiwi [GoK 93] ont établi des relations entre ce réseau d'automates et les réseaux de Petri.

Une variante de ce jeu a été introduite par Giglia et Mastin [GiM 86] sur la chaîne et la grille, dans le cadre de la définition d'un algorithme de calcul de l'argument d'une fonction complexe. Dans cette variante, le nombre de jetons de chaque sommet évolue vers la valeur moyenne des nombres de jetons des sommets voisins. Autrement dit, si $x(i)$ est supérieur à cette moyenne alors il est décrémenté; s'il est plutôt inférieur alors il est incrémenté; s'il est égal alors il est soit stable soit incrémenté selon que tous les sommets voisins ont le même nombre de jetons ou pas. Formellement cette règle d'évolution s'écrit:

$$x'(i) = \begin{cases} x(i) & \text{si tous les voisins du sommet } i \text{ ont } x(i) \text{ jetons} \\ x(i) - 1 & \text{si le nombre moyen de jetons des voisins de } i \text{ est inférieur à } x(i) \\ x(i) + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

A la suite de simulations, Giglia et Mastin avaient été conjecturé que les évolutions de ce système dynamique sont de période 1 ou 2, et ce résultat a été démontré par Odlyzko et Randall [OdR 87].

Dans ce papier, nous considérons le cas particulier où le nombre de jetons en chaque sommet correspond au nombre d'arcs entrants en ce sommet dans une orientation de G . Le jeu se ramène alors à des changements d'orientation des arcs d'un graphe orienté. Plus précisément, à chaque pas, on prend tous les sommets qui sont des puits, c-à-d les sommets dont tous les arcs incidents sont entrants, et on change l'orientation de tous ces arcs. Les puits deviennent ainsi des sources c-à-d des sommets où tous les arcs incidents sont sortants. En d'autres termes, on sélectionne à chaque pas tous les puits du graphe

orienté et on effectue les changements d'orientation qui permettent de les transformer en sources. Un exemple d'évolution est présenté dans la figure 1 où, à chaque pas, les puits sont représentés en gras. On voit que cette évolution est de période 2.

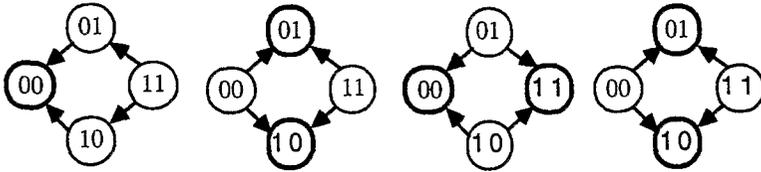


Fig. 1 Un exemple d'évolution

Nous présentons d'abord une construction qui permet d'obtenir des suites de périodes variées sur l'hypercube de dimension n . Compte tenu du fait que l'hypercube est un graphe biparti et n'admet que des cycles de longueurs paires, l'existence de suites de périodes impaires sur l'hypercube montre entre autres que les périodes de l'itération du chip firing game ne sont pas liées uniquement aux cycles du graphe G . Ensuite, nous considérons un système constitué de deux anneaux couplés. Nous exhibons sur ce système une évolution cyclique dont la période est exponentielle par rapport à la taille du graphe, ce qui illustre la complexité du problème.

II - Cas de l'hypercube

L'hypercube de dimension n , $n \geq 0$, est un graphe dont les 2^n sommets peuvent être identifiés avec les nombres binaires codés sur n bits. Deux sommets sont voisins si et seulement s'ils diffèrent par exactement un bit dans leur codage binaire.

Une autre interprétation qui sera d'ailleurs très utile dans la suite consiste à procéder de manière récurrente. Un zéro-cube comporte un seul noeud. Un n -cube est obtenu en prenant deux copies identiques d'un $(n-1)$ -cube et en reliant deux à deux les sommets de ces deux sous-cubes de manière univoque: chaque sommet d'un sous-cube est relié à son homologue dans l'autre sous-cube. La figure 2 ci-dessous illustre cette construction pour $n = 0, 1, 2, 3$.

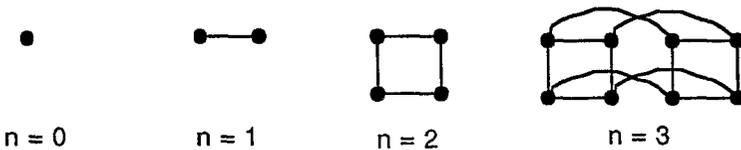


Fig. 2

Dans toute la suite, nous notons H_n un hypercube de dimension n . Nous utiliserons deux types particuliers de partitions des sommets de l'hypercube que nous allons introduire maintenant.

Définition Une partition $W(0), \dots, W(k-1)$ des sommets H_n est dite linéaire si deux sommets du même sous-ensemble ne sont pas reliés par une arête et si tout sommet $u \in W(i)$ de H_n appartient à une chaîne

$u_0, \dots, u_{i-1}, u_i = u, u_{i+1}, \dots, u_{k-1}$, où $u_i \in W(i), i = 0, \dots, k-1$.

Par exemple, $\{00\}, \{01,10\}, \{11\}$ est une partition linéaire de H_2 . Nous allons maintenant présenter plusieurs méthodes pour engendrer des partitions linéaires à partir de cycles hamiltoniens.

Méthode 1: Si $u_0, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_{k-1}$ est un cycle hamiltonien de l'hypercube, alors la partition $\{u_0\}, \{u_1, u_{k-1}\}, \dots, \{u_i, u_{k-i}\}, \dots, \{u_{k/2-1}, u_{k/2+1}\}, \{u_{k/2}\}$ est linéaire.

On peut procéder de manière encore plus générale à partir d'un cycle hamiltonien $u_0, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_{k-1}$ de l'hypercube en considérant une partition $\{u_0\}, \{u_1\}, \dots, \{u_i\}, \{u_{i+1}, u_{k-1}\}, \{u_{i+2}, u_{k-2}\}, \dots, \{u_{i+r}, u_{k-r}\}, \{u_{i+r+1}\}$, à condition que u_i et u_{k-1} soient voisins dans l'hypercube. Comme par ailleurs tout sommet de l'hypercube admet n voisins, on déduit à partir d'un cycle hamiltonien, n partitions cycliques.

Méthode 2: Si $u_0, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_{k-1}$ est un cycle hamiltonien de l'hypercube, alors on peut l'enrouler comme indiqué dans la figure 3 ci-dessous. Plus précisément, on considère une partition $W(0), W(1), \dots, W(p-1)$ et on place successivement les u_i dans les sous-ensembles en suivant un ordre de période $W(0), W(1), \dots, W(p-1), W(p-2), \dots, W(1)$. Si dans cette méthode, u_j est placé dans $W(j)$ alors u_j doit avoir un voisin dans le sous-ensemble qui suit $W(j)$ dans la suite.

Dans cette méthode, si le dernier sommet est dans $W(1)$ alors tout marche bien puisque dans le cycle hamiltonien, ce sommet est relié à u_0 qui est dans $W(0)$ (cf. figure 3).

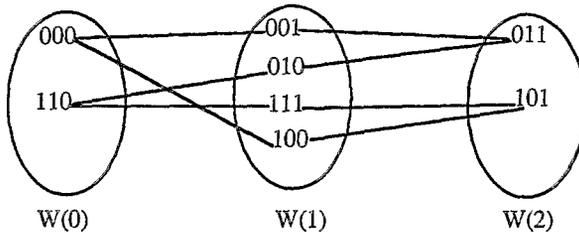


Fig. 3 Construction d'une partition linéaire à partir d'un cycle hamiltonien

Définition Une partition $W(0), \dots, W(p-1)$ des sommets H_n est dite en boucle si elle est linéaire et si en plus tout sommet de $W(0)$ est relié à un sommet de $W(p-1)$ et tout sommet de $W(p-1)$ est relié à un sommet de $W(0)$.

Dans toute la suite, pour tout sous-ensemble W de H_n , nous notons $0W$ le sous-ensemble de H_{n+1} obtenu à partir des éléments de W en ajoutant à gauche un bit de valeur 0. On peut évidemment définir $1W$ de manière analogue. Avec cette notation, on peut écrire $H_{n+1} = 0H_n \cup 1H_n$.

Proposition 1 Si H_n admet une partition linéaire $W(0), W(1), \dots, W(p-1)$ de taille p , alors H_{n+1} admet une partition en boucle de taille $2p$.

Démonstration Il suffit de considérer dans H_{n+1} , la partition $0W(0), 0W(1), \dots, 0W(p-1), 1W(p-1), 1W(p-2), \dots, 1W(0)$. La vérification peut se faire aisément.

Un exemple d'illustration de cette proposition est donné dans la figure 4a.

Proposition 2 Si H_n admet une partition en boucle de taille p , alors H_{n+1} admet une partition en boucle de taille p .

Démonstration Considérons une partition en boucle de H_n notée $W(0), W(1), \dots, W(p-1)$. Nous allons prendre dans H_{n+1} la partition

$$0W(0) \cup 1W(1), 0W(1) \cup 1W(2), \dots, 0W(p-1) \cup 1W(p), 0W(p) \cup 1W(0).$$

Nous devons montrer que les conditions imposées pour les partitions en boucle sont vérifiées.

Considérons deux éléments u, v du même sous-ensemble $0W(i) \cup 1W(i+1)$. Deux situations sont possibles. D'abord, u et v peuvent être tous les deux soit dans $0W(i)$ soit dans $1W(i+1)$. Le résultat est alors acquis par le fait que $W(0), W(1), \dots, W(p-1)$ est une partition en boucle. Le second cas correspond à la situation où u est dans $0W(i)$ et v dans $1W(i+1)$. Dans ce cas, u et v diffèrent déjà par rapport au bit de gauche. Par ailleurs, On a $u = 0u', v = 1v'$ où u' et v' sont respectivement dans $W(i)$ et $W(i+1)$. $W(0), W(1), \dots, W(p-1)$ étant une partition, on a forcément $u' \neq v'$. En conséquence, u et v diffèrent de plus d'un bit et ne peuvent être reliés dans l'hypercube.

Les autres conditions se déduisent de manière immédiate du fait que $W(0), W(1), \dots, W(p-1)$ est une partition en boucle. Il suffit pour cela de considérer les arêtes et les chemins correspondant à cette partition, et de remplacer chaque noeud x par le noeud $0x$ ou par le noeud $1x$.

Un exemple d'illustration de cette proposition est donné dans la figure 4c.

Proposition 3 Si H_n admet une partition en boucle de taille impaire p , et si H_m admet une partition en boucle de taille impaire q , alors H_{n+m} admet une partition en boucle de taille impaire pq .

Démonstration Soit $W(0), W(1), \dots, W(p-1)$ et $V(0), \dots, V(q-1)$ les partitions en boucle définies sur H_n et sur H_m . Considérons alors les sous-ensembles $W(i).V(j)$ dont les éléments sont obtenus en concaténant les bits des éléments de $W(i)$ avec ceux des éléments de $V(j)$. Il suffit de ranger ces sous-ensembles dans l'ordre illustré dans la figure 4d pour obtenir une partition en boucle de taille pq .

{00}, {01,10}, {11}

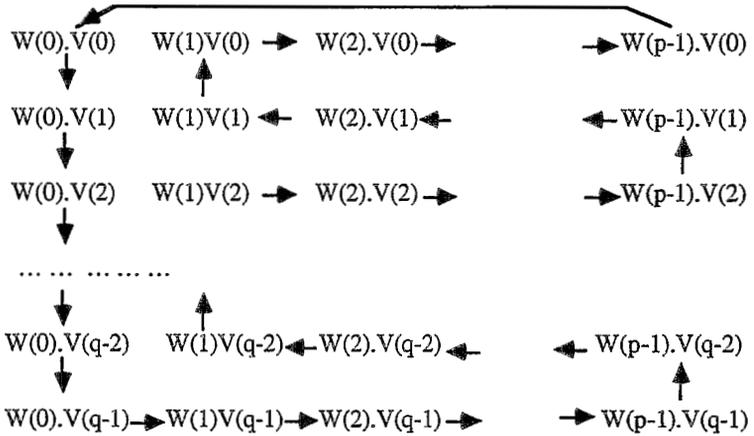
(a) Partition linéaire de H2.

{000}, {001,010}, {011}, {111}, {110,101}, {100}.

(b) Partition en boucle de H3.

{0000,1001,1010}, {0001,0010,1011}, {0011,1111},
{0111,1110,1101}, {0110,0101,1100}, {0100, 1000}.

(c) Partition en boucle de H4.



(d) Partition en boucle de H_{p+q}

Fig. 4 Exemples de partitions linéaires et en boucle

Le résultat ci-dessous établit le lien entre les partitions en boucle et les évolutions du chip firing game associées aux orientations d'un graphe.

Proposition 4 Pour toute partition en boucle d'ordre p , il existe une orientation qui engendre dans le chip firing game, une évolution de période p , dans laquelle les sous-ensembles $W(i)$ sont activés périodiquement dans l'ordre $0, 1, \dots, p-1$.

Démonstration. Il suffit de considérer une orientation dans laquelle tout arc reliant un sommet u de $W(i)$ à un sommet v de $W(j)$, $i < j$, est orienté de j vers i .

A l'instant initial, les sommets de $W(0)$ sont les seuls puits et peuvent donc être activés. De plus, après leur activation, on constate que $W(1), W(2), \dots, W(p-1), W(0)$ est une partition en boucle au sens où nous l'avons défini plus haut et l'orientation fait des sommets de $W(1)$ des puits. On est donc ramené à une situation analogue à la configuration de départ, et le raisonnement peut être recommencé. On montre ainsi de

proche en proche que les sous-ensembles $W(i)$, $i = 0, \dots, p-1$ seront activés à tour de rôle, ce qui correspond bien à une évolution cyclique de période p .

Pour engendrer diverses partitions de tailles paires et impaires, il suffit de partir de certaines partitions de base et de procéder par récurrence en utilisant les propositions 1, 2 et 3.

Proposition 5 Tout hypercube H_n , $n \geq 1$, admet une partition boucle de taille 2.

Ceci est une conséquence immédiate du fait que H_n est un graphe biparti. Le sous-ensemble $W(0)$ est constitué des éléments qui ont un nombre pair de bits de valeur 1, et le sous-ensemble $W(1)$ est constitué des éléments qui ont un nombre impair de bits de valeur 1.

Proposition 6 Pour tout entier $n \geq 4$, H_n admet une partition en boucle de taille $2^{n-1} - 1$.

Démonstration Nous notons $N = 2^{n-2}$, et nous considérons la suite u_0, \dots, u_{N-1} correspondant à la suite de Gray de H_{n-1} . Rappelons que cette suite est obtenue pour l'ordre k en prenant la suite $u'_0, \dots, u'_{N'-1}$ d'ordre $k-1$ et en effectuant la construction

$$0u'_0, \dots, 0u'_{N'-1}, 1u'_{N'-1}, 1u'_{N'-2}, \dots, 1u'_1, 1u'_0$$

Cette suite correspond à un cycle hamiltonien de l'hypercube. De plus, on sait que

$$u_i = \text{bin}(i) \oplus \text{bin}(i/2)$$

où $\text{bin}()$ désigne le code binaire et \oplus désigne le "ou exclusif".

Par exemple, pour $n = 1, 2, 3$, ces suites sont les suivantes:

$$\begin{aligned} n = 1: & 0, 1 \\ n = 2: & 00, 01, 11, 10 \\ n = 3: & 000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100 \end{aligned}$$

Nous posons

$$v_i = u_i \oplus 1 \oplus 2^{n-2}$$

et nous considérons la partition

$$\{0u_0, 1v_0\}, \{0u_1, 1v_1\}, \dots, \{0u_{N-3}, 0u_{N-1}, 1v_{N-3}, 1v_{N-1}\}, \{0u_{N-2}, 1v_{N-2}\}$$

En fait, deux sommets de l'hypercube de codes u et v sont voisins si et seulement si $u \oplus v$ est une puissance de 2. Or

$$0u_j \oplus 1v_i = 2^{n-1} \oplus (u_j \oplus v_i) = 2^{n-1} \oplus 1 \oplus 2^{n-2}$$

$0u_j$ et $1v_i$ ne sont donc pas voisins. Par ailleurs,

$$u_0 = 0\dots 0, u_{N-4} = 10\dots 010, u_{N-3} = 10\dots 011, u_{N-2} = 10\dots 01 \text{ et } u_{N-1} = 10\dots 0.$$

Donc

$$v_0 = 10\dots 01, v_{N-4} = 0\dots 011, v_{N-3} = 00\dots 010, v_{N-2} = 00\dots 00 \text{ et } v_{N-1} = 00\dots 1.$$

Ceci permet de vérifier que la partition ci-dessus est en boucle.

•

Remarque Cette partition en boucle de longueur impaire permet, avec les partitions de longueur paire, de générer par récurrence une grande variété d'évolutions du chip firing game sur l'hypercube.

On peut se poser la question de savoir s'il est possible de générer ainsi toutes les périodes de longueurs paires p , pour $p \leq 2^n$. Nous allons répondre positivement à cette question. Pour ce faire nous avons besoin du résultat préliminaire suivant;

Lemme 1 H_n admet des partitions linéaires de tous les ordres p compris entre 0 et 2^n .

Démonstration. Considérons la construction exposée dans la méthode 2 et supposons que:

- x_{N-1} est affecté à $W(i)$,
- dans l'énumération de période $W(0), \dots, W(p-2), W(p-1) W(p-2), \dots, W(1)$, l'ensemble qui suit le sous-ensemble $W(i)$ auquel a été affecté x_{N-1} est $w(j)$.
- le dernier sommet affecté à $W(j)$ au cours de l'enroulement est x_r .

Pour que l'enroulement corresponde à une partition linéaire, il suffit que x_{N-1} et x_r soient voisins dans l'hypercube.

Or on peut vérifier aisément que dans tous les cas, $N-1-r$ est impair. Il suffit donc de prouver que, pour tout entier impair $k \leq 2^n$, il existe un cycle hamiltonien dans lequel il y a deux sommets à distance k qui sont voisins dans l'hypercube H_n .

Ceci est obtenu en considérant le cycle de Gray. En effet, cette propriété est une conséquence immédiate de la méthode récurrente qui est à la base de la construction de cette suite. Plus précisément, si u'_0, \dots, u'_{N-1} est la suite de Gray d'ordre 2^n , alors dans la suite de Gray d'ordre 2^n , qui s'écrit

$0u'_0, \dots, 0u'_{N-1}, 1u'_{N-1}, 1u'_{N-2}, \dots, 1u'_1, 1u'_0$

$0u'_{N-1}$ et $1u'_{N-1}$ sont à distance 1, $0u'_{N-2}$ et $1u'_{N-2}$ à distance 3, et plus généralement $0u'_{N-s}$ et $1u'_{N-s}$ sont à distance $2s-1$.

Ceci achève la démonstration du lemme.

Proposition 7 L'hypercube H_n , $n \geq 1$, admet des partitions en boucle de tous les ordres pairs p compris entre 0 et 2^n .

Démonstration Nous procédons par récurrence. Le résultat est évident pour $n = 2$. Pour l'étape de récurrence nous distinguons les cas $p = 4k$ et $p = 4k+2$.

Le premier cas est traité en considérant la partition en boucle d'ordre $2k$ de H_{n-1} (elle existe par hypothèse de récurrence), et en appliquant la proposition 1.

Le second cas est traité en considérant la partition linéaire de longueur $2k+1$ exhibée dans le lemme 1 et en appliquant la proposition 1.

Nous avons ainsi montré que le chip firing game génère sur l'hypercube H_n , toutes les périodes de longueurs paires p , pour $p \leq 2^n$.

III - Cycle exponentiel sur deux anneaux couplés

Considérons d'abord un anneau d'ordre n . Il est facile de définir sur un tel anneau, une orientation à partir de laquelle l'évolution du système est de période n . Il suffit pour cela de considérer une orientation qui en fait un circuit, et de changer ensuite l'orientation d'un seul arc (cf. figure 5a). On peut alors donner une interprétation de l'évolution en disant que l'unique sommet source porte un véhicule qui circule de sommet en sommet le long de l'anneau. On peut d'ailleurs généraliser cette construction en considérant plusieurs véhicules correspondant à plusieurs sommets sources sur l'anneau orienté.

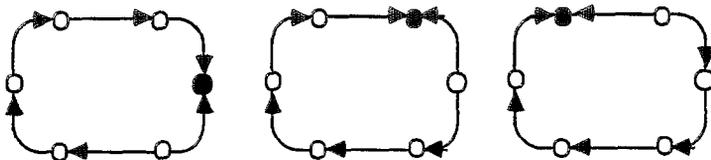


Fig. 5

Dans les figures ci-dessus, les sommets activés sont représentés par des ronds noirs. En fait, On voit bien que tout se passe comme si ces sommets portaient des véhicules et que ces véhicules se déplaçaient de sommet en sommet sur la boucle.

Un système de deux anneaux couplés est défini comme un graphe composé de deux anneaux d'ordres n et m , reliés par une arête $[a,b]$ (cf. figure 6a). Dans le premier anneau, les véhicules se déplacent comme dans l'anneau isolé, sauf que, lorsqu'ils arrivent au sommet a , ils ne continuent que si l'arête $[a,b]$ est orientée de b vers a . La même remarque est valable pour les véhicules du deuxième anneau.

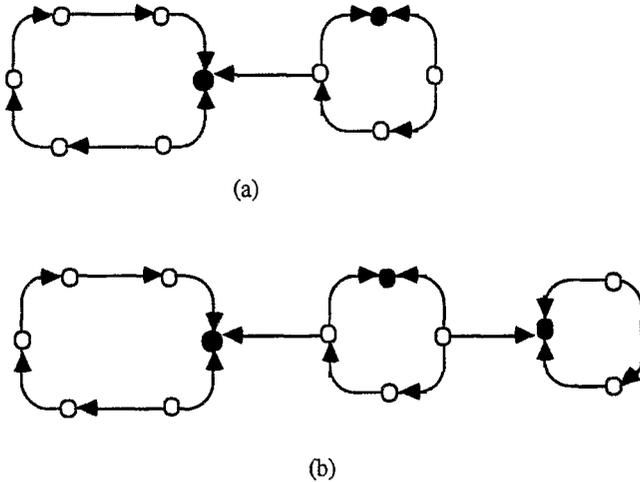


Fig. 6

La première étape de notre construction consiste à définir sur ce système de deux anneaux couplés, une configuration qui engendre une évolution de période proportionnelle au ppcm de n et m .

Pour ce faire, il suffit de considérer des véhicules qui tournent sur les deux anneaux et qui sont disposés de telle sorte que:

- lorsqu'un véhicule du premier anneau arrive en a , l'arc $[a,b]$ est orienté de b vers a ;
- lorsqu'un véhicule du second anneau arrive en b , l'arc $[a,b]$ est orienté de a vers b .

Nous procédons comme suit. Nous prenons $n = kd$ et $m = (k+1)d$, avec $d \geq 4$ et $k \geq 1$.

- le premier anneau comporte k véhicules dont les dates de passage au sommet a correspondent à la suite $0, d+1, 2d+1, \dots, (k-1)d+1, \dots, pn, pn+d+1, pn+2d+1, \dots, pn+(k-1)d+1, \dots$. Remarquons bien que ces véhicules circulent et passent en a avec une périodicité qui est bien n et non d .
- le second anneau comporte $k+1$ véhicules dont les dates de passage au sommet b correspondent à la suite $2, d+3, 2d+3, \dots, kd+3, \dots, pm+2, pm+d+3, pm+2d+3, \dots, pm+kd+3, \dots$. Remarquons bien que ces véhicules circulent et passent en a avec une périodicité qui est bien m et non d .

Avec ce système on constate que dans le premier anneau, les véhicules sont à distance au moins $d-1$ les uns des autres et que leurs dates de passage au sommet a sont congrues à 0 ou 1 modulo d . Par ailleurs, dans le second anneau, les véhicules sont aussi à distance au moins $d-1$ les uns des autres et leurs dates de passage au sommet b sont congrues à 2 ou 3 modulo d . Comme $d \geq 4$, on vérifie aisément que les dates de passage des véhicules des deux anneaux aux sommets a et b sont alternées.

En orientant initialement l'arête $[a,b]$ de b vers a , on voit que

- le premier véhicule du premier anneau passe à une date $t \in \{0,1\}$ au point a . Après ce passage, l'arête $[a,b]$ est orientée de a vers b .
- le premier véhicule du second anneau passe à une date $t \in \{2,3\}$. Après ce passage, l'arête $[a,b]$ est orientée de b vers a .
- comme $d \geq 4$, le second véhicule du premier anneau passe à une date $t \in \{d,d+1\}$ en a , et après ce passage, l'arête $[a,b]$ est orientée de a vers b .
- le second véhicule du second anneau passe à une date $t \in \{d+2,d+3\}$, et après ce passage, l'arête $[a,b]$ est orientée de b vers a .
- ...

Ceci montre que les véhicules des deux anneaux évolueront comme si ces deux anneaux étaient autonomes. En conséquence, le système des deux anneaux couplés a une évolution dont la période est $\text{ppcm}(kd, (k+1)d) = k(k+1)d$.

Cette construction peut être généralisée à une cascade d'anneaux (cf. Figure 6b). Plus précisément, considérons une cascade d'anneaux de longueurs $3d + 4d + \dots + md = O(m^2d)$. Il suffit pour cela que les véhicules passent par les sommets de liaison de type a à des dates appartenant à $\{0,1\}$ modulo d et par les sommets de liaison de type b à des dates appartenant à $\{2,3\}$ modulo d .

La cascade d'anneaux est de taille $O(m^2d)$ et l'ensemble correspond à une évolution cyclique de période $\text{ppcm}(3d, 4d, \dots, md) = d \text{ppcm}(3, 4, \dots, m)$.

L'expression $\text{ppcm}(3, 4, \dots, m)$ n'est autre que la fonction de Tchebychev $\phi(m)$ et on sait que $\phi(m) = e^{O(m)}$ [RoS 62].

Nous avons ainsi exhibé un graphe d'ordre $n = O(m^2d)$ sur lequel le chip firing game conduit à une évolution de période $e^{O(m)} = e^{O(\sqrt{n})}$, expression qui est exponentielle par rapport à la taille n du graphe.

Remerciements Ce travail a été réalisé dans le cadre du projet n° S91017 de l'Université de Yaoundé I et a été soutenu par le Microprocessors and Informatics Programme de l'Université des Nations Unies (UNU).

Références

[AND 89] R. Anderson, L. Lovasz, P. Schor, J. Spencer, E. Tardos and S. Winograd, Disks, Balls and walls: analysis of a combinatorial game, *American Mathematical Monthly*, vol. 96, pp. 481-493

[BiG 92] Parallel chip firing games on graphs, *Theoretical Computer Science*, 92, 291-300.

[GiM 86] D. C. Ghiglia and G. A. Mastin, A cellular automata method for phase unwrapping, *Journal of Optical Society*, 1988.

[GoK 93] E. Goles et A. Kiwi, Games on line graphs and sand piles, *Theoretical Computer Science* 115, 321-349.

[RoS 62] J. B. Rosser et L. Schoenfeld, Approximate formulas for some functions of prime numbers, *Illinois Journal of Mathematics*, 6, pp. 64-94.

[OdR 87] A. M. Odlyzko and D. J. Randall, On the periods of some graph transformations, *Complex Systems*, 1, pp. 203-210.

[SPE 86] J. Spencer, Balancing vectors in the max norm, *Combinatorica*, 6, pp. 55-66.

[TAR 88] G. Tardos, Polynomial bound for a chip firing game on graphs, *SIAM Journal of Discrete Mathematics*, 1, 3, pp. 397-398.