

Réseaux de Petri : Contrôle optimal du marquage

Emmanuel SIMEU

Laboratoire d'automatique de Grenoble
B.P. 46 38402 Saint Martin d'Hères Cedex

Institut supérieur d'automatique et de robotique
52-74, rue B. de Laffemas, 26010 Valence Cedex

Mots-clefs : Réseaux de Petri, dynamique, lagrangien, séquence optimale.

Résumé

Cet article s'intéresse au problème d'optimisation du coût de production dans les systèmes dont la modélisation par un réseau de Petri est disponible. La notion de dépense est modélisée au niveau du réseau de Petri par un coût de franchissement associé aux transitions. Une description formelle adaptée du réseau de Pétri est introduite. Ce formalisme autorise une définition et un traitement analytique du problème de recherche d'un ordonnancement optimal du marquage au sens de la minimisation du coût de production. La méthode de résolution proposée s'appuie sur le principe fondamental de la programmation dynamique.

1 Introduction

Les études sur la théorie et les applications des réseaux de Petri notamment dans la modélisation des systèmes de production a connu un essor important depuis les années 80. Parmi les nombreux travaux qui traitent de ce sujet, nous citerons les ouvrages de René DAVID et de Hassan ALLA [DAV 89] et [DAV 92], et le livre de F. DICESARE et al., [DIC 93]. L'adaptation des réseaux de Petri à modéliser et à visualiser avec efficacité les comportements dans lesquels interviennent les problèmes de parallélisme, de synchronisation et de partage de ressource n'est pas étrangère à l'intérêt que suscite cet outil.

Dans un système de production modélisé par un réseau de Petri, plusieurs protocoles différents permettent généralement d'atteindre un marquage (ou un ensemble de marquages) final désiré, en partant des conditions initiales données. Bien que les conditions initiales et terminales de la production soient identiques, deux ordonnancements différents génèrent le plus souvent des coûts de production différents.

Cette article pose le problème suivant : Connaissant le réseaux de Pétri qui modélise un système de production donné, "comment déterminer, parmi les différentes séquences de franchissement qui permettent d'atteindre un objectif de production spécifié, celui qui minimise le coût de production?"

Au niveau du réseau de Petri, cette question pose le problème de recherche d'un ordonnancement optimale, conduisant à un marquage visé; et sa résolution consiste à élaborer une séquence de franchissement de transitions admissible, qui permet de passer d'un marquage initial x_0 donné à un marquage final x_f souhaité, en minimisant une fonctionnelle J qui constitue l'indice de performance associé aux choix des transitions franchies. Dans [YAM 92], une approche similaire est proposée pour le recouvrement à optimal des pannes.

Une définition formelle de réseau de Petri permet d'énoncer et de traiter le problème de recherche de séquence de franchissement optimale (nous utiliserons le terme de "problème de recherche d'un ordonnancement optimal" ou PROO" en abrégé) comme un problème de commande optimale classique. Toute fois, les contraintes fortes dues aussi bien à la restriction de l'objectif à atteindre qu'aux conditions de validité des transitions soulèvent de nombreuses difficultés.

Ce formalisme est introduit dans la section 2 et concerne aussi bien les RdP ordinaires que les réseaux de Petri généralisés (au sens de [DAV 89], [DAV 92] et [DIC 93]). L'expression "réseau de Petri" (ou RdP en abrégé) sans précision explicite s'applique aussi bien à l'un des types qu'à l'autre.

Une mise en équation adaptée à la "dynamique" de l'évolution du marquage du RdP permet de tirer profit des résultats qui existent dans la théorie des systèmes dynamiques, et notamment de ceux qui concernent les problèmes de commande optimale.

La section 3 est consacrée à la définition du problème de recherche d'un ordonnancement optimal avec ces différentes variantes.

Une méthode de résolution du problème fondamental est proposée dans la section 4. Cette méthode s'appuie sur le principe d'optimalité de Bellman dont le caractère intuitif est le principal avantage.

2 Dynamique associée au franchissement

Les réseaux de Petri qui nous intéressent sont ordinaires ou généralisés et comportent n places et r transitions. À chaque place de P_i du RdP, on associe une variable x_i entière et positive qui indique à chaque étape de l'évolution du

marquage, le nombre de marques contenues dans cette place. Aux n places du RdP correspondent ainsi n variables d'état (x_1, x_2, \dots, x_n) que nous regroupons en un vecteur d'état de marquage $x \in \mathcal{N}^n$, caractéristique du marquage du RdP.

2.1 Caractéristiques de franchissement d'une transition

Chacune des r transitions du RdP est caractérisée par deux vecteurs : Un vecteur de contrainte et un vecteur d'action.

2.1.1 vecteur de contrainte

Le vecteur de contrainte $u_j^c \in \mathcal{N}^n$ associé à une transition T_j indique les conditions régissant la validité de cette transition relativement à un état de marquage courant x . Ce vecteur est défini par :

$$u_j^c = [u_{1j}^c, u_{2j}^c, \dots, u_{nj}^c]'_{j=1,2,\dots,r}$$

Où le coefficient u_{ij}^c est défini de la manière suivante :

si P_i est une place d'entrée de la transition T_j alors u_{ij}^c est le poids de l'arc $P_i \rightsquigarrow T_j$,

sinon $u_{ij}^c = 0$

Autrement dit, u_{ij}^c définit le nombre minimum de marques requis dans la place P_i pour valider la transition T_j .

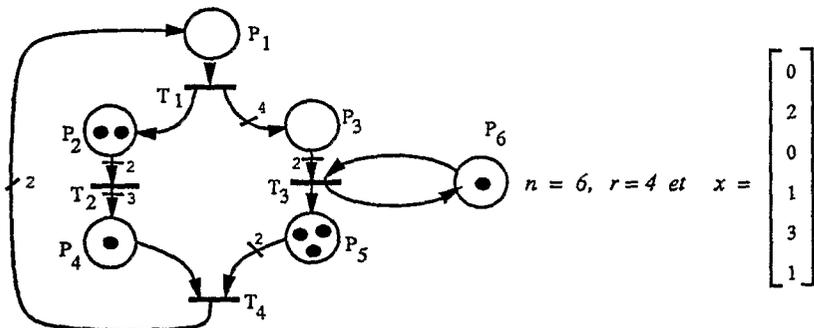


Figure 1: Exemple de réseau de Petri marqué.

Exemple : Pour le RdP de la figure 1, on a :

$$u_1^c = [1, 0, 0, 0, 0, 0]'; \quad u_2^c = [0, 2, 0, 0, 0, 0]';$$

$$u_3^c = [0, 0, 2, 0, 0, 1]'; \quad u_4^c = [0, 0, 0, 1, 2, 0]'$$

Une transition T_j du RdP est validée par un état de marquage x si et seulement si

$$x - u_j^c \in \mathcal{N}^n. \quad (1)$$

Exemple : L'état de marquage $x = [0, 2, 0, 1, 3, 1]'$ de la figure 1 valide les transitions T_2 et T_4 ; par contre, les transitions T_1 et T_3 ne sont pas validées par cet état.

2.1.2 vecteur d'action

Le vecteur d'action $u_j^a \in \mathcal{N}$ associé à une transition T_j indique les opérations effectuées sur l'état de marquage lors du franchissement de la transition T_j (lorsqu'elle est validée par un état courant). L'évolution de l'état courant consécutif au franchissement de la transition T_j se traduit par une équation de la forme :

$$\tilde{x} = x + u_j^a \quad (2)$$

où x et \tilde{x} sont respectivement les états de marquage du RdP avant et après franchissement,

et u_j^a , vecteur d'action de T_j est défini par :

$$u_j^a = [u_{1j}^a, u_{2j}^a; \dots, u_{nj}^a]', \text{ avec } u_{ij}^a = u_{ij}^+ - u_{ij}^c |_{i=1,2,\dots,n}$$

et u_{ij}^+ étant défini par :

si P_i est une place de sortie de la transition T_j alors, u_{ij}^+ est le poids de l'arc $T_j \rightsquigarrow P_i$

$$\text{sinon } u_{ij}^+ = 0$$

u_{ij}^c indique le nombre (algébrique) de marques qui sont ajoutées à la place P_i lors du franchissement de la transition T_j .

Exemple : Pour le RdP de la figure 1, nous avons :

$$u_1^a = [-1, 1, 4, 0, 0, 0]'; \quad u_2^a = [0, -2, 3, 0, 0, 0]';$$

$$u_3^a = [0, 0, -2, 0, 1, 1]'; \quad u_4^a = [2, 0, 0, -1, -2, 0]'$$

2.1.3 Matrice de franchissement d'une transition

Toute transition T_j du RdP est ainsi caractérisée par la paire de vecteurs contrainte/action (u_j^a/u_j^c) qui lui est associée. Nous appelons **Matrice de franchissement** de la transition T_j la matrice $n \times 2$ notée u_j et définie par :

$$u_j = [u_j^a, u_j^c]$$

La première et deuxième colonnes de u_j sont respectivement les vecteurs d'action et de contrainte de la transition T_j .

Exemple : Pour le RdP de la figure 1, nous avons :

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad u_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans la suite de cette étude et tant que cela ne prête à aucune confusion, le terme "franchissement" sera utilisé à la place de "matrice de franchissement". On notera

$$U = \{u_j / j = 1, 2, \dots, r\}. \quad (3)$$

Remarque

Dans le cas général, un même vecteur de contrainte peut être associé à plusieurs transitions différentes. Tel est notamment le cas dans un RdP ordinaire lorsque plusieurs transitions différentes ont le même ensemble de places d'entrée et des ensembles de places de sortie éventuellement différents. Les conditions de validité de ces transitions alors identiques conduisent naturellement à un même vecteur de contrainte.

Pour les transitions T_1, T_2 du RdP-1 la figure 2, il est aisé de vérifier que : $u_1^c = u_2^c$ par contre, $u_1^a \neq u_2^a$.

De même, à plusieurs transitions différentes du RdP peut correspondre un même vecteur d'action. Dans un RdP ordinaire, tel est le cas lorsque plusieurs transitions ont des ensembles de places d'entrée et de sortie pures (au sens de [DAV 92]) identiques, (avec des ensembles de places impures associés à ces transitions éventuellement distincts). (T_1 et T_2 du RdP-2 la figure 2)

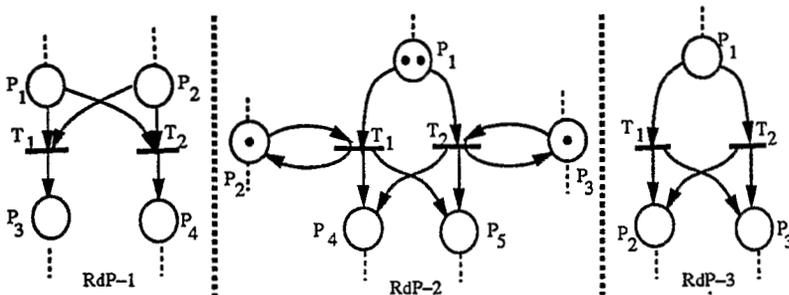


Figure 2 : Quelques cas particuliers.

Sur le RdP-2 de la figure 2, les conditions de validité des transitions T_1 et T_2 sont différentes (les ensembles de places d'entrée associés sont distincts). Mais lorsqu'elles sont validées, le franchissement de l'une ou l'autre de ces transitions conduit à la même évolution du marquage du RdP. En effet, on a $u_1^a \neq u_2^c$ par contre

$$u_1^a = u_2^c \implies \bar{x} = x + u_1^a = x + u_2^c, \quad \forall x/x + u_1^c \geq 0 \text{ et } x + u_2^c \geq 0$$

La connaissance d'un franchissement $u \in U$, détermine de façon univoque les vecteurs de contrainte et d'action de la transition associée; en effet,

$$u^a = u. \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } u^c = u. \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Propriété :

Deux transitions T_j et T_l sont identiques (au sens de [DAV 92]) si et seulement si $u_j = u_l$

(c'est à dire $u_j^c = u_l^c$ et $u_j^a = u_l^a$)

Exemple : Les transitions T_1 et T_2 du RdP-3 de la figures sont identiques.

Cette étude concerne essentiellement les RdP sans transitions identiques. Pour cette classe de RdP, la connaissance de l'ensemble U des matrices de franchissement suffit pour déterminer de façon univoque le RdP non marqué associé, qu'il soit ordinaire ou généralisé, pur ou impure. Il s'en suit que tout RdP non marqué, sans transitions identiques est parfaitement défini par l'ensemble U des matrices de franchissement qui lui est associé.

Définition

Soit U l'ensemble des matrices de franchissement associées aux transitions d'un RdP; un franchissement $u \in U$ est validé par un état de marquage x si et seulement si

$$x - u. \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{N}^n \quad (5)$$

D'après les équations (1 et 4), la transition T associée au franchissement u est alors validée pour le marquage du RdP correspondant à l'état x .

Zéro, un ou plusieurs franchissements différents peuvent être validés par le même état de marquage. L'ensemble des franchissements validés par un état x est noté :

$$U(x) = \{u \in U/x - u. \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{N}^n\} \quad (6)$$

Exemple : Pour le RdP de la figure 1, $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ et pour $x = [0, 2, 0, 1, 3, 1]'$, on a $U(x) = \{u_2, u_4\}$

2.2 Dynamiques de franchissement

Lorsqu'un franchissement $u \in U(x)$ est validé par l'état courant x , son application à cet état de marquage entraîne une évolution de l'état courant déterminée par l'équation suivante :

$$\tilde{x} = f(x, u) \quad (7)$$

Où \tilde{x} est l'état de marquage résultant de cette application $f(., .)$ étant la fonction vectorielle définie par :

$$f(x, u) = x + u \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Ainsi, la dynamique qui régit l'évolution du marquage d'un RdP peut être modélisée par les équations de la **dynamiques de franchissement** :

$$\begin{aligned} x(k) &= f(x(k-1), u(k)) \\ u(k) &\in U(x(k-1)) \end{aligned} \quad |_{k=1,2,\dots,n} \quad (9)$$

Où $f(x, u)$ et $U(x)$ sont respectivement définis par les relations (8) et (6). Cette équation suppose les hypothèses suivantes :

1) Une seule transition validée par un état de marquage courant est franchie à la fois.

2) Le choix de la transition franchie ($u(k)$), parmi celles qui sont simultanément validées par un état courant $x(k-1)$ est complètement libre.

Cette liberté de choix permet d'agir sur l'évolution du marquage en déterminant avec un degré de liberté plus ou moins important (déterminé par $U(x(k-1))$) l'état de marquage ultérieur $x(k)$.

Définition

Un **Ordonnancement** d'origine x_0 est constitué : d'une suite d'états de marquage

$$x(0), x(1), x(2), \dots, x(N) \quad (10)$$

appelée **trajectoire de marquage** et suite de franchissement

$$u(1), u(2), \dots, u(N) \quad (11)$$

appelée *séquence de franchissement* qui vérifient les équations dynamiques de franchissement :

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ x(k) &= f(x(k-1), u(k)) \\ u(k) &\in U(x(k-1))|_{k=1,2,\dots,N} \end{aligned} \quad (12)$$

Le nombre entier N est la longueur de la séquence (ou de la trajectoire). Les états $x(0)$ et $x(N)$ sont respectivement l'origine et l'extrémité de la trajectoire (10).

La séquence de franchissement (11) est dite admissible relativement au marquage initial ($x(0)$).

Remarque

Dès qu'une séquence (11) admissible relativement à un état initial connu $x(0)$ est définie, la trajectoire de marquage correspondante (10) se détermine de façon univoque par la relation suivante:

$$x(k) = f(x(k-1), u(k))|_{k=1,2,\dots,N}. \quad (13)$$

Par contre, dans le cas général, une même trajectoire de marquage peut résulter de plusieurs séquences de franchissements différents.

Exemple : Sur le RdP-2 de la figure 2, la trajectoire $x(0)$, $x(1)$ avec $x(0) = [2, 1, 1, 0, 0]'$ et $x(1) = [1, 1, 1, 1, 1]'$ correspond à deux séquences de franchissement différents de longueur 1: $u(1) = u_1$ et $u(1) = u_2$; puisque

$$\begin{aligned} x(1) &= f(x(0), u_1) &= f(x(0), u_2) \\ u_1 &\in U(x(0)) &u_2 \in U(x(0)) \end{aligned}$$

Lorsque l'on connaît l'ensemble des franchissements U définissant un RdP (3), l'évolution du marquage de ce RdP est décrite par la procédure suivante :

- ⊙ l'état d'origine $x(0) = x_0$ étant défini;
- ⊙ pour $k = 1$ à N :
 - ▷ déterminer $U(x(k-1))$ (avec la relation 6),
 - ▷ choisir $u(k) \in U(x(k-1))$,
 - ▷ déterminer $x(k) = f(x(k-1), u(k))$ (avec la relation 12),
- ⊙ fin.

Il est évident que la séquence de franchissement (11) qui résulte de cette procédure est admissible, relativement à l'état initial x_0 et la suite des états $\{x(k)\}_{k=1,2,\dots,N}$ est la trajectoire de marquage correspondant à cette séquence.

Nous sommes maintenant en mesure de poser le problème qui nous préoccupe dans cette étude : celui de la recherche d'une séquence de franchissement optimale.

3 Problème d'ordonnancement optimal

Pour formuler le problème de recherche d'un ordonnancement (ou de séquence de franchissement) optimal, nous supposons qu'à chaque étape de l'évolution du marquage du RdP, le franchissement de chacune des transitions validées par le marquage courant est pénalisé par un coût de franchissement associé.

En pratique, cette dépense peut aussi bien représenter le coût de passage d'une pièce sur une machine, le coût de stockage le coût de réparation d'une machine en panne et même le temps de passage d'une pièce sur une machine.

Dans le cas général, ce coût de franchissement peut dépendre non seulement de la transition franchie ($u(k)$), mais aussi du marquage courant ($x(k-1)$) et du moment où ce franchissement a lieu (k). Il peut ainsi être modélisé par une fonction de la forme $L(k, x(k-1), u(k))|_{k=1,2,\dots,N}$ qui représente la "dépense" encourue par l'application à l'étape k , du franchissement $u(k)$ lorsqu'il est validé par le l'état de marquage courant $x(k-1)$.

Le coût de revient total attaché à chaque ordonnancement (trajectoire et séquence (10-11)) indique dans quelle mesure le choix de ce dernier est "avantageux" (ou désavantageux) par rapport à un autre choix.

Le *critère d'efficacité*, est défini par la fonctionnelle suivante :

$$\begin{aligned} J &= L(1, x(0), u(1)) + \dots + L(N, x(N-1), u(N)) + K(N, x(N)) \\ &= K(N, x(N)) + \sum_{k=1}^N L(k, x(k-1), u(k)) \end{aligned} \quad (14)$$

Le terme $K(N, x(N))$, est appelé "coût final"; lié au marquage d'arrivée, il pénalise l'écart avec un objectif idéal (état final et longueur de séquence) souhaité.

Dans la théorie de commande optimale et de recherche opérationnelle ([KIR 70], [PAP 92], [DAS 92]), la fonction coût $L(k, x(k-1), u(k))$ est aussi appelée "Lagrangien".

Dans la suite de ce papier, tout RdP est défini par l'ensemble des matrices de franchissement U qui lui est associé. Les ensembles suivants sont définis :

- ensemble source $M_s \subset \mathcal{N}^n$
il détermine les états de marquage de départ admis.
- ensemble but $M_b \subset \mathcal{N}^n$ (tels que $M_s \cap M_b = \emptyset$).
Il représente l'ensemble des états de marquages à atteindre.
- l'intervalle des longueurs de séquence admises $\mathcal{I} \subset \mathcal{N}$.

Les ensembles M_b et \mathcal{I} définissent les conditions terminales : l'ensemble composé $M_b \times \mathcal{I}$ sera désigné par le terme *ensemble cible*.

Les ensembles M_b et \mathcal{I} définissent les conditions terminales: l'ensemble composé $M_b \times \mathcal{I}$ sera désigné par le terme *ensemble cible*.

Le problème de recherche de trajectoire optimale de source M_s et de cible $M_b \times \mathcal{I}$ se pose comme suite :

Parmi les séquences de franchissement admissibles (11) dont la trajectoire associée (10) vérifie :

$$\begin{array}{l} \text{la condition initiale : } x(0) \in M_s, \\ \text{la condition terminale : } \begin{cases} x(N) \in M_b, \\ N \in \mathcal{I} \end{cases}, \end{array}$$

déterminer celle qui minimise le critère J défini par l'équation (14).

Suivant la nature de l'ensemble source M_s et de l'ensemble but M_b , différentes variantes du problème de recherche d'un ordonnancement optimal (PROO) peuvent être définies.

Dans le cas le plus générale où M_s et M_b sont deux sous-ensembles quelconques de \mathcal{N}^n . On a alors un PROO avec origine et extrémité libres que désignons par PROO-Général.

Définition : (PROO-Général)

Soit U l'ensemble de franchissements définissant un RdP donné; sur ce RdP, le problème de recherche d'un ordonnancement optimale avec origine et extrémité libres de source M_s et de cible $M_b \times \mathcal{I}$ consiste à trouver un état de marquage initial $x(0) \in M_s$ et une séquence de franchissement de longueur $N \in \mathcal{I}$ admissible relativement à $x(0)$ (11) tels que l'extrémité $x(N)$ de la trajectoire (10) associée à cette séquence vérifie $x(N) \in M_b$ et que le critère J défini par (14) soit minimal.

Dans beaucoup de cas, les conditions initiales se limitent à un état de marquage initial unique x_0 donnée. L'ensemble source M_s se réduit alors en un seul point x_0 . La variante fondamentale du PROO se caractérise par une origine fixe ($x(0) = x_0$) et une extrémité libre :

Définition : PROO-fondamental

Connaissant le marquage d'origine $x(0) = x_0$ et la cible $C = M_b \times \mathcal{I}$, Le PROO-fondamental consiste à déterminer une séquence de franchissement (11) de longueur $N \in \mathcal{I}$ admissible relativement à l'origine x_0 telle que l'extrémité $x(N)$ de la trajectoire (10) associée à cette séquence vérifie $x(N) \in M_b$ et que le critère J défini par (14) soit minimal.

En plus du problème fondamental, on peut aussi considérer une variante du PROO dans la quelle le marquage final (x_f) (aussi bien que le marquage

initial ($x_0 = x(0)$) est préalablement fixé. Nous parlons alors de PROO à extrémité fixe.

Définition : PROO à extrémité fixe

Connaissant marquage l'origine $x(0) = x_0$, le marquage terminal x_f et l'intervalle des longueurs admises \mathcal{I} , Le PROO à extrémité fixe consiste à déterminer une séquence de franchissement (11) de longueur $N \in \mathcal{I}$ admissible relativement à l'origine x_0 telle que la trajectoire (10) associée à cette séquence ait pour extrémité $x_f = x(N)$ et que le critère J défini par (14) soit minimal.

Par ailleurs, suivant la nature de l'intervalle des longueurs admise \mathcal{I} , des variantes différentes de PROO peuvent également être considérées. C'est ainsi que l'on peut distinguer :

- *PROO à longueur libre lorsque $\mathcal{I} = \mathcal{N}$,
- *PROO à longueur limitée lorsque $\mathcal{I} \subset \mathcal{N}$,
- *PROO à longueur fixe lorsque $\mathcal{I} = \{N_f\}$.

Dans les PROO que nous avons définis, l'ensemble cible défini par $C = M_b \times \mathcal{I}$ est une donnée préalablement fixée.

On peut aussi envisager un PROO dans lequel l'objectif à atteindre peut varier à certaines étapes de l'évolution du marquage du RdP. La cible visée est alors un point mobile qui est déterminé à l'étape k par $c(k) = (x_f(k), N_f(k))$.

4 Résolution du problème fondamental

Pour des raisons de simplicité, nous nous limitons ici à la résolution du problème fondamental. Autrement dit, connaissant l'état de marquage initial x_0 d'un RdP défini par les équations dynamiques (12), nous nous proposons de déterminer un ordonnancement (11-10) admissible relativement à x_0 et de longueur $N \in \mathcal{I} = [N_{min}, N_{max}]$ tel que l'extrémité $x(N)$ de la trajectoire (10) appartienne à l'ensemble but M_b et que le critère J défini par (14) soit minimal.

4.1 Condition de solvabilité

Ensemble des marquages accessibles

Pour résoudre ce problème, définissons par récurrence les ensembles suivants :

$$\begin{aligned}
\Omega_0(x_0) &= \{x_0\} \\
\Omega_1(x_0) &= \left\{x_0 + u \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} / u \in U(x_0)\right\} \\
&\vdots \\
&\dots \\
\Omega_k(x_0) &= \left\{x + u \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} / x \in \Omega_{k-1} \text{ et } u \in U(x)\right\} \\
&\vdots \\
&\dots \\
\Omega_{N_{max}}(x_0) &= \left\{x + u \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} / x \in \Omega_{N_{max}-1} \text{ et } u \in U(x)\right\}
\end{aligned}$$

On construit ainsi une suite d'ensembles $\{\Omega_k(x_0)\}_{k=0,1,\dots,N_{max}}$

Chaque élément $\Omega_k(x_0)$ de cette suite représente l'ensemble des marquages qui sont accessibles à partir du marquage initial x_0 par la réalisation d'une séquence de franchissement de longueur k .

4.2 Cible accessible

Un élément (k, x) de l'ensemble cible $\mathcal{I}xM_b$ est accessible à partir de l'état initial x_0 si et seulement si $N_{min} \leq k \leq N_{max}$ et $x \in \Omega_k(x_0)$. Ceci nous amène à la définition des ensembles suivants :

$$\forall k / N_{min} \leq k \leq N_{max}, \pi_k = M_b \cap \Omega_k(x_0)$$

Propriété :

Le PROO-fondamental admet une solution si et seulement si $\bigcup_{k=N_{min}}^{N_{max}} \pi_k \neq \emptyset$

Nous supposons dans ce qui suit le PROO-fondamental solvable. Il existe alors au moins un entier $k / N_{min} \leq k \leq N_{max}$ et $\pi_k \neq \emptyset$. Nous noterons

$$N_\alpha = \text{Sup}\{k / \pi_k \neq \emptyset\}_{k / N_{min} \leq k \leq N_{max}}$$

4.3 Stratégie optimale

En supposant dans le PROO-fondamental solvable, nous décrivons dans ce qui suit une méthode de recherche de la stratégie optimale parmi plusieurs ordonnancements éventuellement possibles. La méthode proposée est s'appuie sur le principe d'optimalité de Bellman [BOL 76], [KIR 70].

L'idée maîtresse de la programmation est la suivante : Pour qu'un ordonnancement constitué d'une trajectoire (10) et d'une séquence franchissement

(11) soit optimale, il faut qu'à chaque étape intermédiaire $1 \leq k \leq N$, les portions de trajectoire et de séquence

$$x(k-1), x(k), \dots, x(N) \text{ et } u(k), u(k+1), \dots, u(N) \quad (15)$$

constituent un ordonnancement possédant également la propriété d'optimalité dans le sens du minimum de la fonctionnelle.

$$J_k = K(N, x(N)) + \sum_{j=k}^N L(j, x(j-1), u(j)) \quad (16)$$

Plusieurs portions d'ordonnancement de la forme (15) peuvent être construites à partir d'un marquage intermédiaire $x(k)$. À chacune de ces portions correspond un coût total qui se calcule par la somme (16). Nous notons $\omega_k(x(k)) = \omega_k(x)$ la fonction qui représente la plus petite entre ces sommes.

Les fonctions ω_{N_α} , $\omega_{N_\alpha-1}$, ..., ω_1 , ω_0 se construisent par la récurrence suivante :

1^{ier} cas $k = N_\alpha$

On définit sur l'ensemble Ω_{N_α} la fonction suivante :

$$\omega_{N_\alpha}(x) = \begin{cases} K(N_\alpha, x) & \text{si } x \in \pi_{N_\alpha} \\ +\infty & \text{si } x \notin \pi_{N_\alpha} \end{cases}$$

2^{ieme} cas $N_{\min} < k \leq N_\alpha$

Supposant la fonction ω_k déjà définie, on construit sur l'ensemble Ω_{k-1} la fonction intermédiaire suivante :

$$\gamma_{k-1}(x) = \begin{cases} \min_{u \in U(x)} \left[\omega_k \left(x + u \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + L(k, x, u) \right] & \text{si } U(x) \neq \emptyset \\ +\infty & \text{si } U(x) = \emptyset \end{cases}$$

ω_{k-1} est en suite défini sur ω_{k-1} par :

$$\omega_{k-1}(x) = \begin{cases} \gamma_{k-1}(x) & \text{si } x \notin \pi_{k-1} \\ \inf \{ \gamma_{k-1}(x), K(k-1, x) \} & \text{si } x \in \pi_{k-1} \end{cases} \quad (17)$$

3^{ieme} cas $1 \leq k \leq N_{\min}$

Supposant la fonction ω_k déjà défini sur Ω_k , la fonction ω_{k-1} est définie sur l'ensemble ω_{k-1} par :

$$\omega_{k-1}(x) = \begin{cases} \min_{u \in U(x)} \left[\omega_k \left(x + u \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + L(k, x, u) \right] & \text{si } U(x) \neq \emptyset \\ +\infty & \text{si } U(x) = \emptyset \end{cases} \quad (18)$$

Remarque :

Dans les trois cas, $\omega_{k-1}(x)$ est bien défini pour tout $x \in \Omega_{k-1}(x_0)$. En effet, il est évident que ω_{N_α} est défini sur tout l'ensemble $\Omega_{N_\alpha}(x_0)$.

Pour $k \leq N_\alpha$ si ω_k est défini sur tout $\Omega_k(x_0)$, alors

$$f(x, u) = x + u \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \Omega_k(x_0), \quad \forall x \in \Omega_{k-1}(x_0) \text{ et } \forall u \in U(x);$$

et comme $L(k, x, u)$ est défini pour tout $u \in U(x)$, l'expression

$$\omega_k \left(x + u \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + L(k, x, u)$$

est bien définie. De plus, comme l'ensemble $U(x)$ ayant un cardinal fini (et supposé non nul), le minimum

$$\min_{u \in U(x)} \left[\omega_k \left(x + u \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + L(k, x, u) \right]$$

existe pour tout $x \in \Omega_{k-1}(x_0)$ et la fonction ω_{k-1} est bien définie sur tout l'ensemble Ω_{k-1} .

La méthode de recherche d'un ordonnancement optimal par la programmation dynamique est basée sur le théorème suivant :

Théorème

Étant donné un état de marquage initial x_0 et un ensemble cible $\mathcal{I}xM_b$, la séquence de franchissement $u(1), u(2), \dots, u(N_f)$ admissible relativement à x_0 et la trajectoire associée $x(0), x(1), \dots, x(N_f)$ constituent un ordonnancement de cible $\mathcal{I}xM_b$, optimal (dans le sens du minimum de la fonctionnelle (14)) si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

i) $N_f \in \mathcal{I}$ et $x(N_f) \in M_b$

ii) $\forall k \in \{1, 2, \dots, N_f\}$, $\omega_{k-1}(x_{k-1}) = \omega_k(x_k) + L(k, x_{k-1}, u(k))$.

Ce théorème est basé sur le principe fondamental de la programmation dynamique classique. La démonstration du théorème de programmation dynamique proposé dans [BOL 76] peut aisément être adaptée à ce théorème. Cette adaptation devra nécessairement tenir compte de la définition des fonctions de coût minimal ω_k qui est différente de celle généralement utilisée dans la technique classique de programmation dynamique. Cette différence est consécutive aux contraintes supplémentaires imposées par la restriction de l'ensemble des marquages à atteindre (M_b) d'une part et par la définition d'un intervalle des longueurs admises (\mathcal{I}) d'autre part.

Conclusion

La modélisation des systèmes est d'une importance capitale dans la conception et la gestion d'un système de production. Elle permet d'évaluer à priori et d'améliorer certaines propriétés du système. Les critères de performance recherchés sont alors rattachés aux taux de production, au temps de séjour des pièces dans l'atelier...

Bien que constituant un facteur de performance non négligeable, le coût de production n'est généralement pas pris en compte dans cette phase de l'étude.

Cette étude montre qu'une adaptation appropriée des outils classiques de modélisation et d'évaluation des performances des systèmes de production, autorise une prise en compte simultanée et une extimation des performances productives et économiques du système étudié.

REFERENCES

- [DAV 89] R. DAVID et H. ALLA, *Du Grafset aux Réseaux de Petri*. Hermès Paris 1989.
- [DAV 92] R. DAVID et H. ALLA, *Petri Nets & Grafset*. Prentice Hall 1992.
- [DIC 93] F. DICESARE, G. HARHALAKIS, J.M. PROTH, M. SILVA F.B. VERNDAT, *Pratice of Petri Nets in Manufacturing*. Chapman & Hall 1993.
- [YAM 92] E. C. YAMOLIDOU, E.D. ADAMIDES & D.BONVIN, *Optimal Failure Recovery in Batch Processing Using Petri Net Models*. Automatic Control Conference, Chicago 1992.
- [DAS 70] B. V. DASARATHY, *Optimal Control in Nonlinear Systems*. IEEE Trans. on Automatic Control, December 1970.
- [PAP 92] N. S. PAPAGEORGIOU, *On Optimal Control of Strongly Nonlinear Evolution Equations*. Journal of Mathematical Analysis and Application N.164, 1992.
- [BOL 76] V. BOLTJANSKI, *Commande Optimale des Systèmes Discrets*. Editions MIR, Moscou 1976.
- [KIR 70] D. E. KIRK, *Optimal Control Theory - an Introduction*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall 1970.