

ACADEMIE DE MONTPELLIER
UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC

T H E S E

présentée à l'Université des Sciences et Techniques du Languedoc
pour obtenir le diplôme de DOCTORAT
Spécialité: Mécanique, Génie mécanique, Génie civil

MODELISATION DES CIRCULATIONS TRANSITOIRE
ET RESIDUELLE: APPLICATION A L'ESTUAIRE DE LA
CASAMANCE (SENEGAL)

par

Antoine LAHOUD

Soutenue le 7 Octobre 1988 devant le jury composé de:

MM. C. BOCQUILLON, Président
J. LEMOALLE
L. MASBERNAT, Rapporteur
B. POUYAUD, Rapporteur

ORSTOM Fonds Documentaire
N° : 26.512 ex 1
Cote : A

TDM 55

ORSTOM

Editions de l'ORSTOM

INSTITUT FRANÇAIS DE RECHERCHE SCIENTIFIQUE
POUR LE DÉVELOPPEMENT EN COOPÉRATION

Collection :

Travaux et documents microédités

PARIS 1989

ISBN 2-7099-0959-6

© ORSTOM

« La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, « que les copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'article 40).

« Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code Pénal. »

F 8

à Joseph
et
Hind

"L'activité scientifique ne peut pleinement convaincre qu'en quittant le domaine de base: si elle expérimente, il faut raisonner; si elle raisonne, il faut expérimenter".

Gaston Bachelard
Le nouvel esprit scientifique

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer mes remerciements et ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur C. BOCQUILLON, directeur du Laboratoire d'Hydrologie Mathématique de Montpellier, qui m'a fait bénéficier de ses larges connaissances et de sa grande expérience dans le domaine de la mécanique des fluides. Sa disponibilité, ses nombreux conseils, son encouragement, son aide efficace et sa patience m'ont été précieux pour mener à bien ces travaux de recherche.

Mes remerciements vont aussi aux autres membres du jury:

Monsieur le Professeur L. MASBERNAT, de l'Institut National Polytechnique de Toulouse, et Monsieur B. POUYAUD, Directeur de recherche à l'ORSTOM, qui ont apporté leur appui à ce travail en acceptant d'en être les rapporteurs.

Monsieur J. LEMOALLE, Chargé de recherche à l'ORSTOM, qui m'a fait part de ses conseils avisés en maintes occasions. Sa présence au jury, pour laquelle nous le remercions, est pour nous le signe de l'ouverture de notre recherche vers les domaines appliqués de l'hydrobiologie.

Le présent travail a été réalisé au sein du Laboratoire d'Hydrobiologie et d'Océanographie Tropicale du Centre ORSTOM de Montpellier. Par leur accueil amical et les moyens qu'ils ont mis à ma disposition, les membres de ce laboratoire m'ont permis de mener mon travail dans les meilleures conditions financières, matérielles et surtout amicales. Je remercie toutes les personnes de l'ORSTOM qui ont aussi soutenu notre démarche, en particulier Monsieur J-R. DURAND.

J'exprime toute ma sympathie à tous les membres du Laboratoire d'Hydrologie Mathématique de Montpellier avec qui j'ai eu le

plaisir de travailler et qui, à divers titres, ont tous contribué à la réalisation de cette thèse.

Je terminerai en adressant mes amitiés à C. REY et à tous les membres de l'équipe ORSTOM de Montpellier qui m'ont entouré au cours du travail; je ne peux les nommer tous, mais leur amical soutien et leurs encouragements sont pour beaucoup dans l'accomplissement de ce travail.

SOMMAIRE

INTRODUCTION	7
CHAPITRE I: ESTUAIRE DE LA CASAMANCE	11
CHAPITRE II: HYPOTHESES ET APPROXIMATIONS	83
CHAPITRE III: MOUVEMENT TRANSITOIRE	163
CHAPITRE IV: APPLICATIONS ET TESTS	258
CHAPITRE V: MOUVEMENT RESIDUEL	343
CONCLUSIONS	395
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	399
Liste des figures	414
Liste des tableaux	420
Table des matières	421
Résumé	

INTRODUCTION

INTRODUCTION

L'objectif de ce travail est de présenter les techniques utilisées dans l'élaboration des modèles traitant la circulation transitoire et résiduelle dans les milieux côtiers bien mélangés. L'estuaire de la Casamance a constitué le domaine d'application des diverses approches effectuées.

De par l'intérêt économique que présentent ces régions et la complexité des phénomènes naturels rencontrés, l'étude de l'hydrodynamique des milieux côtiers a depuis longtemps soulevé l'attention de différents secteurs scientifiques, afin de comprendre leur fonctionnement et d'arriver à optimiser la gestion de leur ressources soumis à des pressions souvent diverses et parfois conflictuelles.

Concernant la région casamançaise, son régime pluviométrique privilégié par rapport au reste du Sénégal, la richesse halieutique de son estuaire et ses potentialités agricoles (riziculture) en font une des régions les plus importantes du pays. Malheureusement la sécheresse qui sévit sur toute la région sahélienne depuis la fin des années soixante a conduit à des modifications écologiques importantes, avec des conséquences marquées sur toute la bande soudano-guinéenne et notamment en Casamance qui, avec d'autres régions limitrophes - Gambie par exemple - est la plus touchée. A deux cents kilomètres de l'embouchure le taux de salinité dépasse les 120 grammes par litre, les apports d'eau douce sont inférieurs à 10 m³/s, certaines espèces de poissons ont complètement disparu. Cependant, contrairement à ce que l'on pouvait attendre, la productivité reste toujours importante malgré des changements importants du fonctionnement.

L'étude hydrodynamique de l'estuaire de la Casamance s'intègre dans une réflexion pluridisciplinaire sur l'environnement, la pêche et la socio-économie de la région. Le travail de modélisation réalisé repose sur l'élaboration de modèles qui traitent les écoulements transitoires et résiduels dans l'estuaire.

Aucune technique présentée ne saurait être qualifiée en soi de nouvelle ou d'inédite mais nous avons cherché un ensemble qui s'adapte au mieux aux problèmes posés par ce type d'estuaire. Dans cette perspective, nous avons tenté de concilier les deux impératifs que doit respecter un modèle: décrire les phénomènes physiques en question avec autant de réalisme que possible et, surtout, respecter certaines propriétés numériques nécessaires à la stabilité de la résolution. Grâce au matériel informatique dont nous disposons, le modèle obtenu a été ainsi utilisé en vue de comprendre le comportement de l'estuaire et d'en déduire ce qui se passerait dans la réalité sous l'influence d'éventuels aménagements.

Le premier chapitre est consacré à la présentation du milieu: caractéristiques géomorphologiques et hydrologiques, historique de l'évolution du milieu au cours des vingt dernières années, description de la phase expérimentale d'installation d'appareil de contrôle. Cette présentation est suivie de l'analyse des enregistrements marégraphiques en vue de dégager la composante dominante du train d'onde qui a été utilisée dans la suite pour les diverses simulations.

Dans le second chapitre les équations intégrées sur la profondeur sont établies avec les approximations et hypothèses retenues. Une analyse détaillée des propriétés des termes d'advection, de diffusion et de frottement a permis de mettre en évidence les problèmes numériques susceptibles d'apparaître et de dégager les conditions nécessaires pour augmenter la précision des discrétisations d'une part et, d'autre part, pour améliorer la stabilité de la résolution.

Le troisième chapitre présente les modèles transitoires étudiés avec quelques autres développements testés, ainsi que le traitement des noeuds limitrophes et l'algorithme de résolution du système algébrique résultant. Une revue bibliographique survole les modèles bi-dimensionnels en plan de grande utilisation. Quant à la dernière partie du chapitre, elle a été consacrée, d'une part, au modèle mono-dimensionnel utilisé pour le calage du coefficient de frottement et, d'autre part, à la technique d'optimisation choisie.

Les applications et tests sont regroupés dans le quatrième chapitre avec une analyse de l'importance des divers termes des équations et de leurs contributions dans le mouvement. On présente ensuite la procédure de couplage des deux modèles (2-D) et (1-D), l'influence du vent, du frottement au fond, de la force de Coriolis et de la viscosité. L'intérêt de la modélisation est par la suite justifié par une étude de l'influence de quelques aménagements hydrauliques hypothétiques (barrages, dragage).

Le cinquième chapitre est consacré aux études du mouvement résiduel suivant des approches lagrangiennes et eulériennes, le calcul de l'entraînement de Stokes et le suivi du mouvement d'un nuage de point durant un ou plusieurs cycles de marée.

CHAPITRE 1
ESTUAIRE DE LA CASAMANCE

Chapitre I

ESTUAIRE DE LA CASAMANCE

I.1 PRESENTATION DU MILIEU

I.1.1 Introduction

La côte sénégalaise est caractérisée par la présence de trois estuaires (Casamance - Gambie - Saloum) qui se répartissent tout le long de la côte du sud vers le nord entre les latitudes 12° - 20° et 16° - 20° et les longitudes 16° - 20° et 16° - 30° . Une caractéristique commune de ces milieux est la présence de vastes zones de mangroves que l'on rencontre surtout dans la partie aval de leurs cours (Marius, 1984).

Les mangroves sont des communautés biotiques d'animaux et de végétaux, d'aspect très particulier, caractéristiques de vases littorales marines soumises au flux et au reflux des marées. L'eau nécessaire à la vie est fournie par la mer (Mangeot, 1985).

La sécheresse qui a sévi sur toute la région sahélienne, a entraîné une nette diminution de l'apport fluvial et par conséquent une amplification du processus de remontée saline, conditionnée par un taux important d'évaporation. Ceci a rendu le bilan hydrique dans la région, et particulièrement dans l'estuaire de la Casamance, déficitaire (fig.I.1).

I.1.2 Caractéristiques géomorphologiques

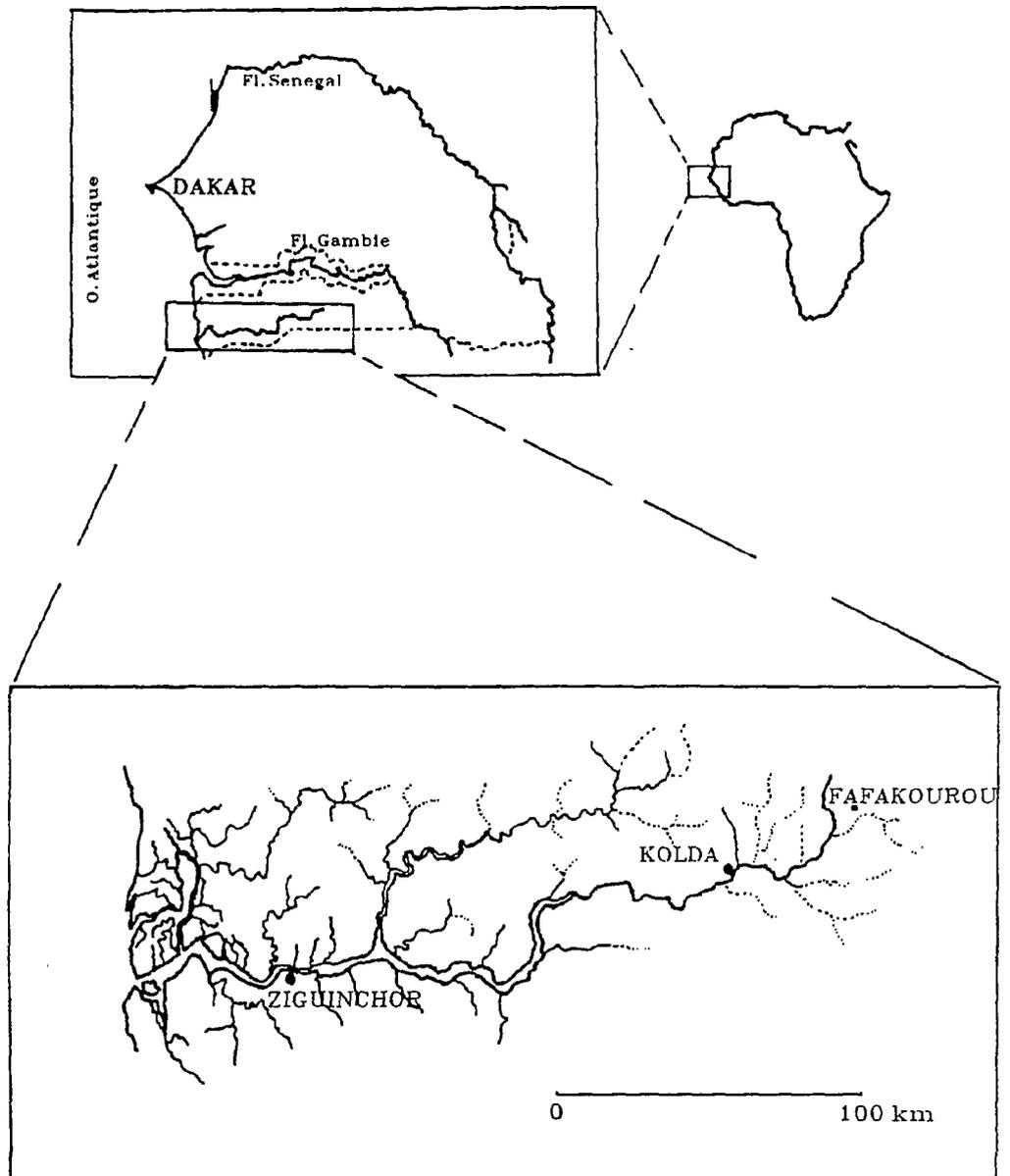


fig.I.1-Carte générale du réseau de la Casamance.(Pagès, 1987)

L'estuaire de la Casamance, né de la rencontre de l'eau de mer et des eaux continentales, est un système écologique naturel. Sa vulnérabilité est à la mesure de sa richesse. Le fleuve prend naissance à

Fafakourou (50 km au nord-est de Kolda), où se réunissent plusieurs marigots (bras de rivière). Le débit fluvial est assez faible comparé à l'apport d'eau salée de la mer et à la perte par évaporation. En saison sèche l'apport fluvial est inexistant, seules les actions de la marée et de l'évaporation persistent.

Les explorateurs ont depuis longtemps signalé les richesses et les caractéristiques particulières de la région Casamançaise. L'Amiral Lepredour (1828), décrivait la côte occidentale d'Afrique depuis le cap de Naze jusqu'au cap Roxo, en spécifiant la présence de bancs de sable, de hauts fonds et la rareté de l'eau douce en basse Casamance:

"La rive gauche de la rivière est bordée par un banc de sable qui s'étend à environ un demi-mille de terre; c'est en passant entre ce banc et les brisants, que nous sommes entrés dans la rivière CAZAMANCA ... Les fonds diminuaient rapidement lorsque nous nous rapprochions de la rive gauche sur laquelle nous jetait le vent ... mais l'eau douce y est saumâtre et l'on ne s'en procure qu'avec beaucoup de peine".

Le bassin versant de la Casamance occupe une superficie de 14 000 km² à Ziguinchor, il est limité au nord par la Gambie, à l'est par le fleuve Gambie, au sud par la Guinée Bissau et à l'ouest par l'Océan Atlantique. Son cours d'eau, étroit et allongé, parcourt environ 300 km. Selon Brunet-Moret (1970), la partie maritime de l'estuaire se limitait à Diana-Malari (213 km de l'embouchure), mais après les 15 dernières années de sécheresse, la partie maritime s'est trouvée refoulée jusqu'à la station de Boguel (240 km de l'embouchure) (Diouf *et al.*, 1986).

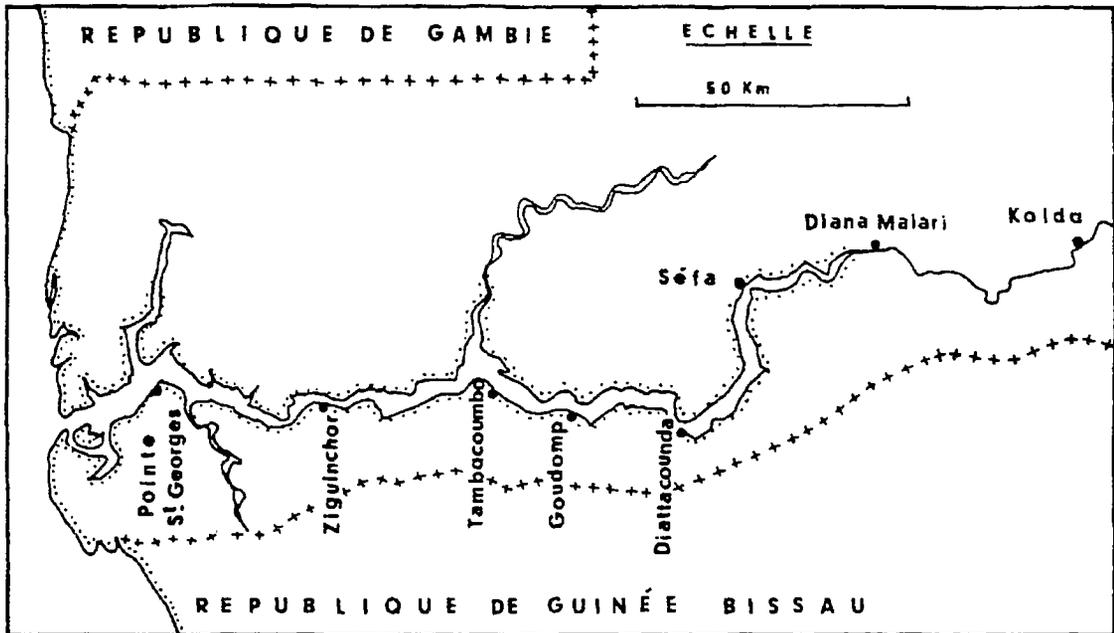


fig.I.2-Estuaire de la Casamance.(Le reste,1986)

Dans l'estuaire de la Casamance se jettent plusieurs cours d'eau dont le Soungrougrou, le Bignona, le Diouloulou et le Baila (rive droite), et le Guidel, le Nyassia et le Kamobeul (rive gauche). Tous sont soumis à l'action de la marée. L'affluent le plus important est le Soungrougrou. Formé par la réunion de plusieurs marigots, il prend naissance dans la forêt de Plata, sa largeur maximale est de 1 km (dans sa partie médiane). La marée pénètre assez loin dans son cours et provoque une salinisation aussi importante que celle observée dans l'estuaire de la Casamance.

Les reliefs sont peu accentués. Recouverts par une végétation très basse, ils dépassent rarement 50 mètres. Ils sont limités par "un réseau compliqué de marigots qui constituent des couloirs de pénétration à travers de véritables îlots bien drainés, ceinturés de dépressions basses et humides, où s'insinue la mangrove" (Pélissier, 1966).

Actuellement, de part les modifications écologiques qu'a subit l'estuaire, les bords des marigots sont souvent limités par des espaces argileux, d'accès difficile en saison humide. Dépourvus de

végétation à cause de leur extrême salinité, ce sont généralement des tannes. Les alluvions varient d'aval en amont et des rives au chenal principal. Elles sont saturées en sel et deviennent noires et vaseuses dans les zones limitrophes du chenal (Roche, 1985).

La morphologie du milieu est variable; elle peut être subdivisée en trois zones :

- la première s'étend de l'embouchure jusqu'à Ziguinchor où les profondeurs dépassent 7m; la largeur du fleuve est de 5 km à la Pointe Saint Georges, elle diminue progressivement en remontant vers l'amont pour atteindre 630 m à Ziguinchor. Cette zone est caractérisée par une forte densité de mangroves, en particulier sur la rive droite. La salinité de cette région est proche de celle de la mer (35 ‰) à l'embouchure avec une augmentation progressive jusqu'à Ziguinchor où elle atteint 52 ‰ (Pagés et al., 1987) L'entrée est obstruée par des bancs de sable. Un chenal au Nord permet le passage des bateaux jusqu'à Ziguinchor avec un trajet balisé, donc navigable sans difficultés.

- la deuxième région, comprise entre Ziguinchor et Hamdalaye, présente une profondeur moyenne de 3 m et est caractérisée par plusieurs coudes et méandres, des élargissements et des étranglements successifs, avec un embayement à la confluence avec le Soungrougrou où la largeur dépasse 4 km. La salinité augmente progressivement dans cette région où elle évolue de 52‰ à Ziguinchor jusqu'à atteindre 72‰ à Hamdalaye. La navigation est difficile à cause de la présence des bancs de sable entre Ziguinchor et Adéane.

- la troisième région va de Hamdalaye jusqu'à l'amont de Kolda, où le lit est étroit et la profondeur est faible (80 cm), le taux de salinité pouvant dépasser 100‰ ; la marée est faible et la topographie se caractérise par la présence de hauts fonds, qui sont sujets à des

inondations à marées hautes et à un découvrement progressif et lent durant le jusant (fig.I.3).

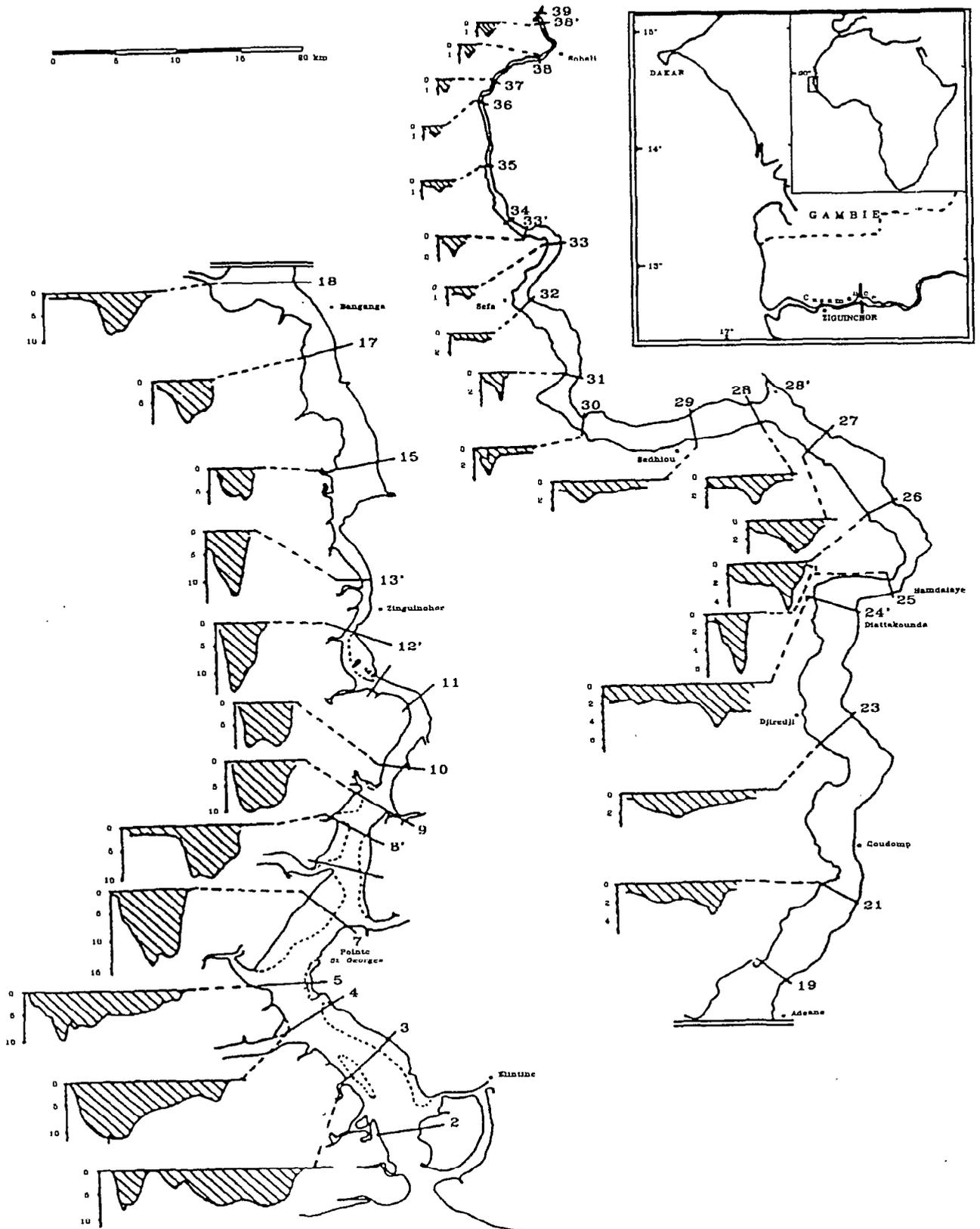


fig.I.3-Carte de situation et profils bathymétriques.(Debenay, 1986)

Les formations végétales rencontrées dans la région casamançaise sont de deux types: les mangroves et les forêts. Ces dernières occupent les plateaux, elles sont souvent compactes et de pénétration difficile (forêt de Bayo au sud-ouest de Ziguinchor). Quant aux mangroves, envahies par l'eau de mer, elles bordent les rives du fleuve et des marigots. Elle est essentiellement constituée d'arbres plus ou moins hauts offrant un aspect extraordinaire, car certaines parties de leur appareil racinaire, non dissimulée dans la vase, forment des dispositifs étranges. La mangrove, abondante de l'embouchure jusqu'à Ziguinchor, ne forme qu'une mince bande bordant, d'une manière intermittente, les rives du fleuve de Ziguinchor jusqu'à Diana-Malari. Les Rhizophora et les Avicennia sont les espèces les plus fréquemment rencontrées. Toutes ces espèces sont halophiles. Dans la moyenne Casamance les Rhizophora, communément appelés palétuviers, ont tendance à disparaître dès que l'eau devient douce (Badiane, 1986).

La prolongation de la sécheresse a provoqué un net recul de la superficie des zones de mangroves qui en 1973 occupaient 931 km², en 1983 880km², et actuellement moins de 800km² (Pagès et al., 1987). Les rizières sont complètement abandonnées et les tannes nues augmentent en superficie. Plusieurs facteurs ont contribué à la régression des zones de mangroves: l'exploitation du bois, la récolte des huîtres, le développement de la riziculture, les aménagements hydro-agricoles, et les facteurs naturels tel que le déficit pluviométrique, la progression de la marée, et l'évaporation (Le reste, 1986).

I.1.3 Caractéristiques hydrologiques

Le climat est de "transition rapide" entre les savanes du nord et le climat guinéen. Cette transition commence à se faire sentir à partir de la Gambie, où les Baobabs du Nord Sénégalais sont remplacés par

les forêts et mangroves. Ce climat, défini par les géographes comme tropical subguinéen, est caractérisé par une saison humide (5 mois) qui s'échelonne du mois de juin au mois d'octobre, et une saison sèche où il ne tombe pratiquement pas d'eau. Il suffit d'une anomalie en saison humide pour perturber le régime hydrique et rendre le bilan déficitaire. Ainsi durant les quinze dernières années, les mois d'octobre ou de juin ont été généralement secs et la saison pluvieuse s'est trouvée réduite à 3 ou 4 mois. Une analyse rapide de la pluviométrie annuelle aux stations de mesures implantées dans l'estuaire (Ziguinchor et Sedhiou) montre que depuis 1968 se manifeste une nette tendance à la diminution de l'intensité des précipitations avec des périodes de grande sécheresse (1968-72-77-80-83) (Pagès *et al.*, 1987) (fig.I.4,I.5).

Cette baisse d'apport pluvial, a entraîné une perturbation du régime hydrique "normal". L'évaporation intense conditionnée par une géométrie particulière et une topographie irrégulière a amené l'estuaire à son état actuel de sursalinisation (fig.I.6).

La salinité maximale est atteinte entre mai et juin, elle est minimale en septembre et octobre. Les mesures effectuées (Diouf *et al.*, 1986) montrent le caractère particulier de l'évolution et de la répartition de la salinité dans cet estuaire. La comparaison des observations effectuées de 1968 à 1970 par Brunet-Moret, et celles réalisées par Pagès *et al.* entre 1984 et 1986 montre l'évolution du profil longitudinal de la salinité qui autrefois était concave et est actuellement convexe avec un pic de sursalure qui dépasse 100 %. Le sommet de la courbe de salinité, progresse vers l'amont en saison sèche; ses valeurs passent de 60% à 120%. (Debenay *et al.*, 1986) (fig.I.7).

PLUVIOMETRIE (moyenne) : SEDHIOU

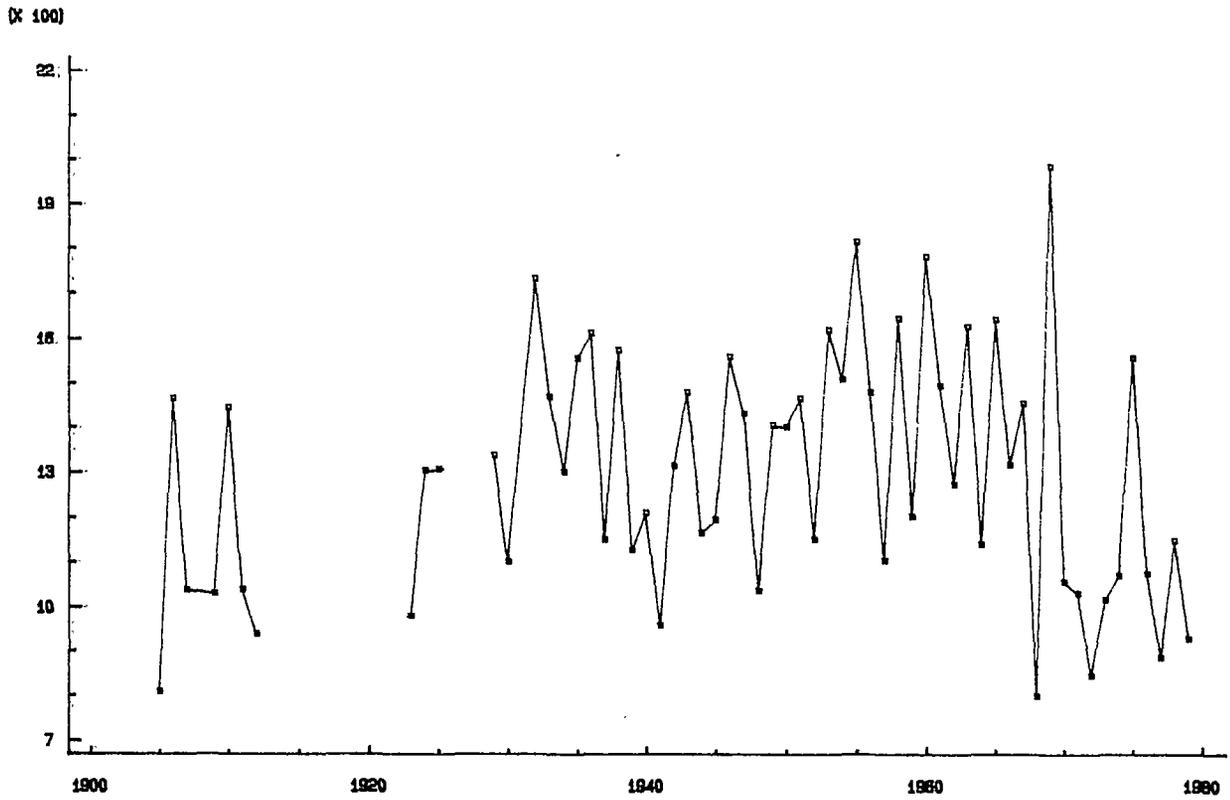


fig.I.4-Pluviométrie moyenne à la station de Sédhiou.

PLUVIOMETRIE : ZIGUINCHOR

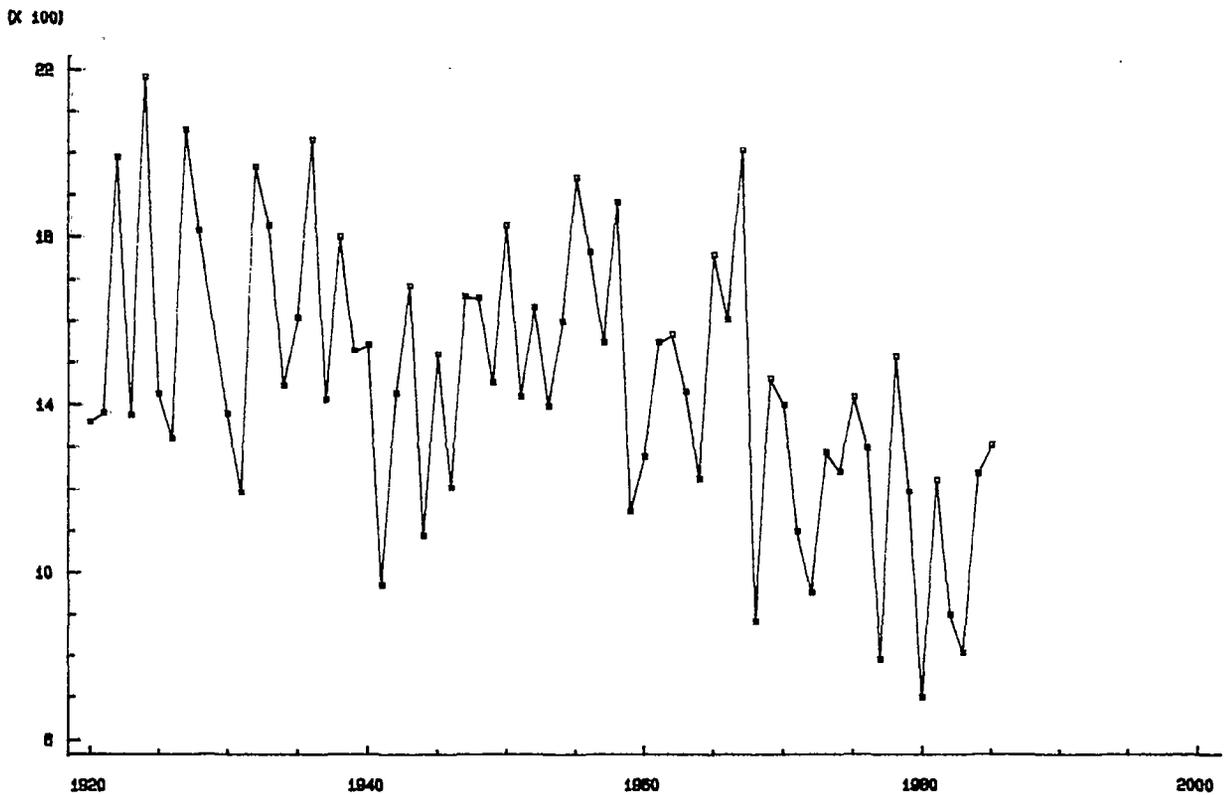


fig.I.5-Pluviométrie moyenne à la station de Ziguinchor.

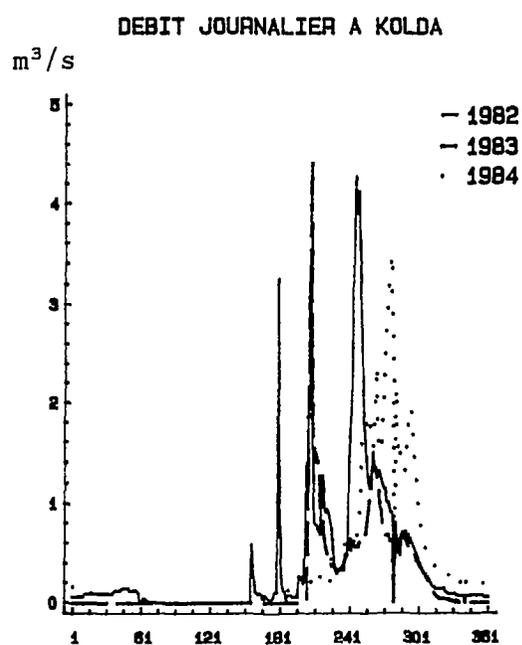
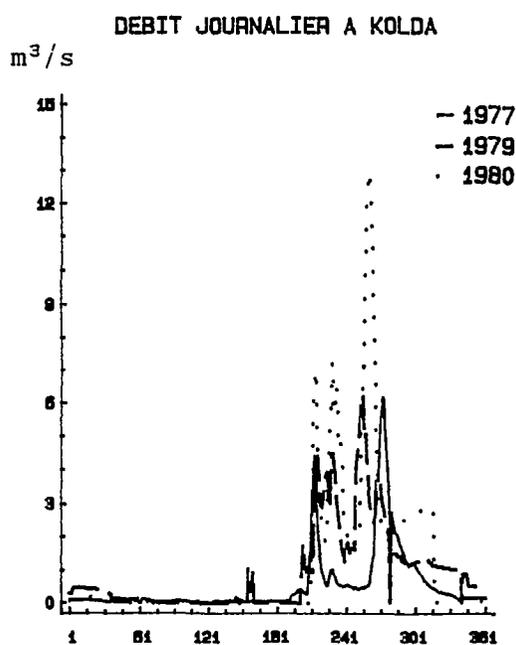
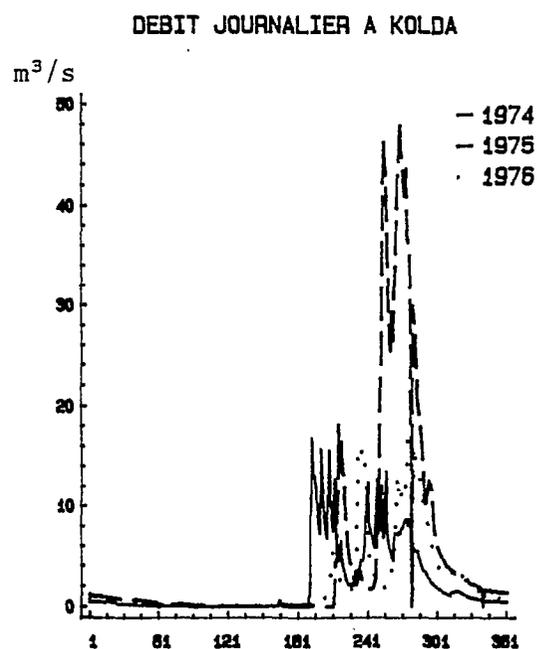
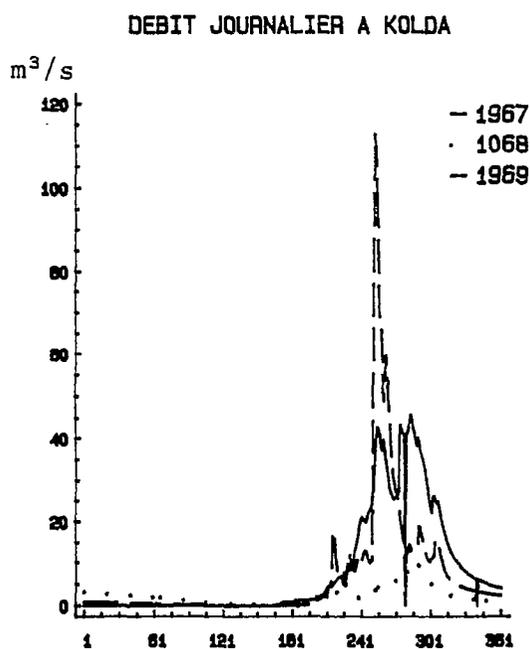


fig.I.6-Débit journalier à la station de Kolda.(1967-1984)

Salinite S%.

EVOLUTION DE LA SALINITE LE LONG DE LA CASAMANCE

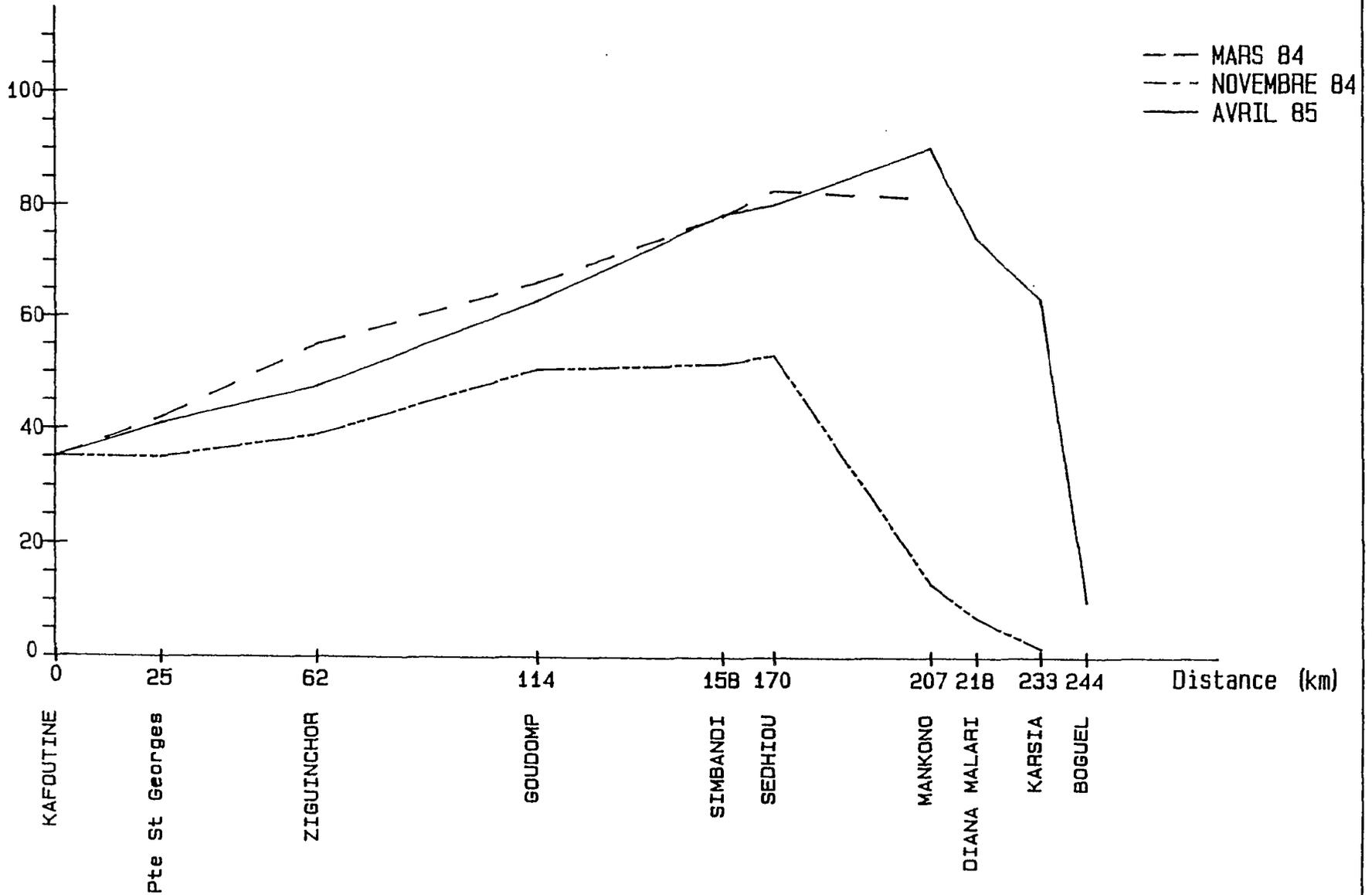


fig.I.7-Répartition longitudinale de la salinité

L'évaporation, mesurée au bac "Colorado classe A" (ASECNA), est très intense, elle diminue de l'est vers l'ouest. Le pic se trouve en février (>200 mm) et le minimum en juillet (50mm). La grandeur de ce facteur est supérieure à l'apport d'eau douce, rendant le bilan hydrique déficitaire, ce qui favorise l'augmentation de la concentration de sel, surtout dans la partie amont de l'estuaire où l'influence de la marée est faible. Ce facteur attribue à l'estuaire toute son originalité et joue un rôle important dans l'évolution de l'écosystème (fig.I.8).

Dans les périodes sèches (novembre - avril), l'humidité est faible. Elle est minimale en mars. Quant à la température moyenne, elle présente de faibles variations: de 23 à 26° en saison fraîche et de 27 à 29° en saison chaude. Les mois les plus chauds sont avril et mai (fig.I.9).

Les vents sont généralement faibles. En saison des pluies le vent est de secteur ouest. En mai il est de secteur sud-ouest. Les quelques vents forts sont généralement de secteur sud-est ou sud (fig.I.10).

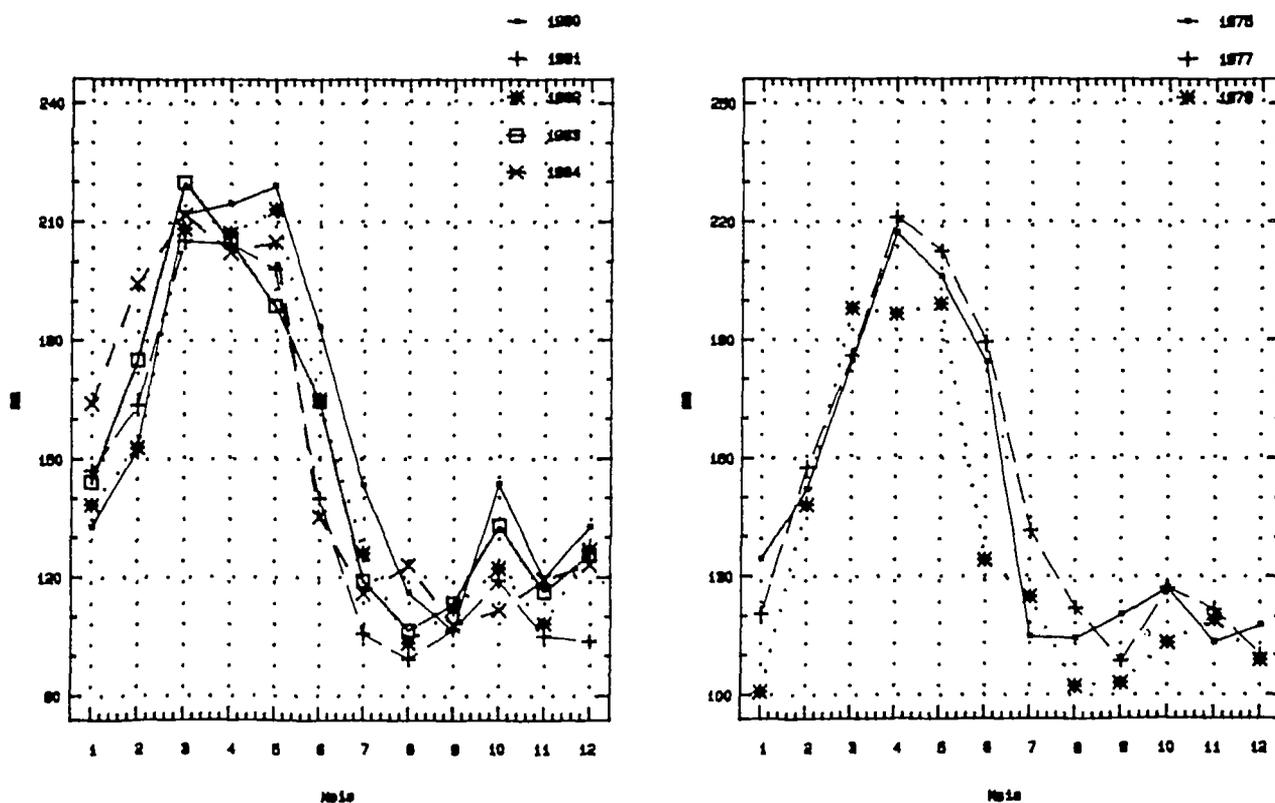


fig.I.8-Evaporation mensuelle a ziguinchor mesurée en bac "Colorado classe A".

TEMPERATURE (degres C)

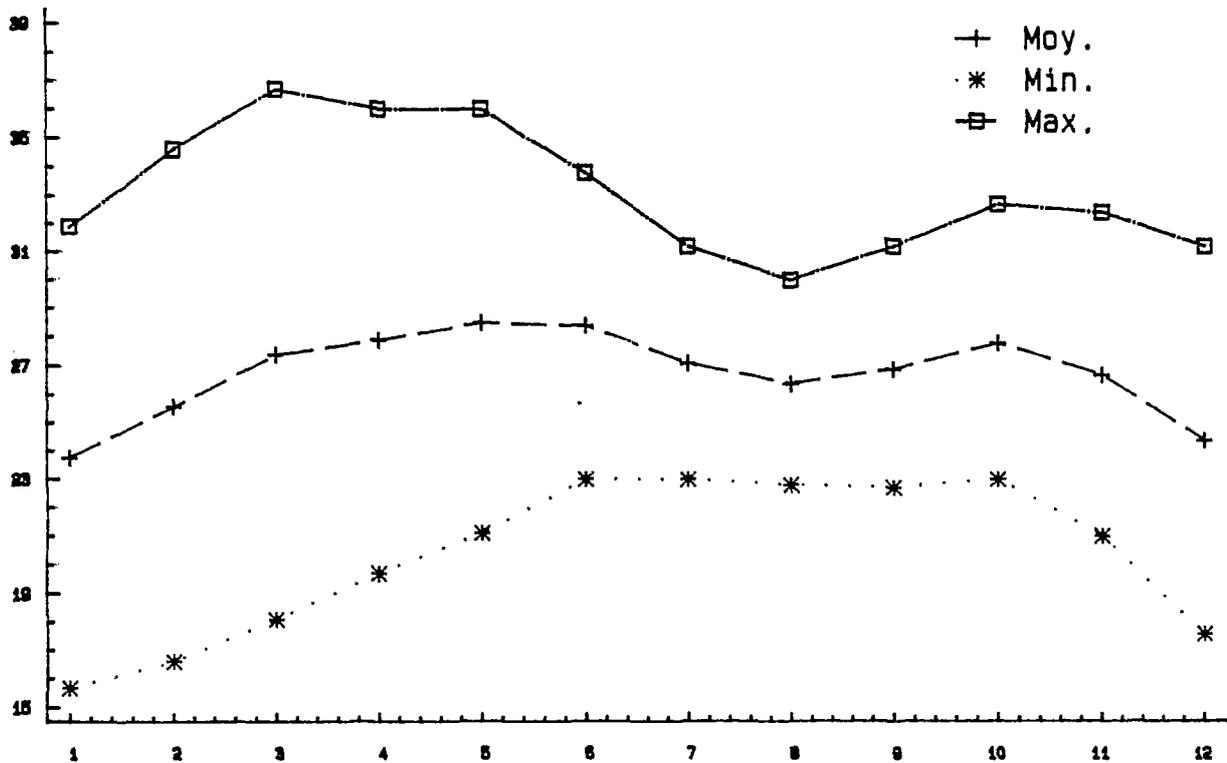


fig.I.9-Températures mensuelles moyennes,maximales et minimales en Casamance.

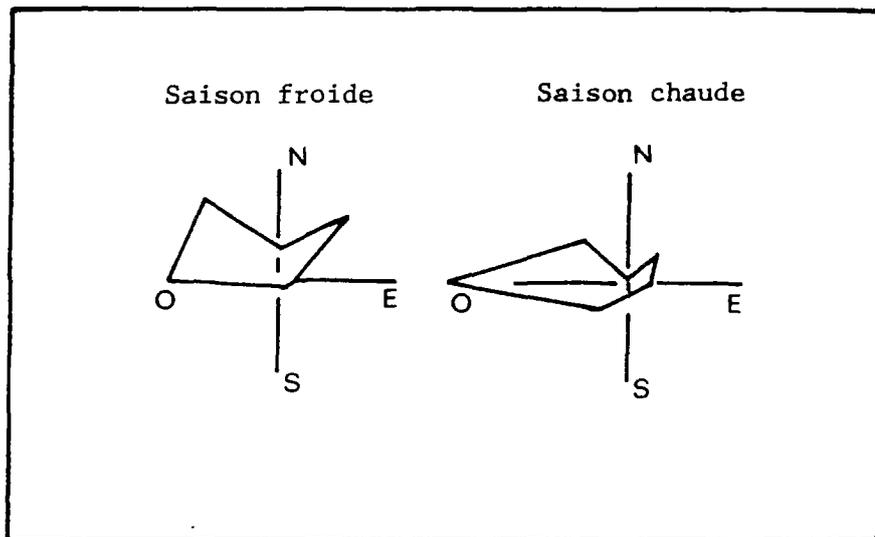


fig.I.10- Régime moyen des vents à Ziguinchor.(Pagès, 1986)

I.1.4 Etudes et mesures réalisées

Le but de l'étude, la morphologie du milieu, et les données disponibles conditionnent le choix du modèle. Ainsi un schéma de priorités est nécessaire afin de guider ce choix et justifier les simplifications à apporter aux équations qui décrivent le mouvement.

La sécheresse, qui a sévi sur le Sahel depuis plus de quinze ans a entraîné des modifications écologiques importantes dans toute la région et particulièrement en Casamance. Une étude pluridisciplinaire, regroupant plusieurs organismes et chercheurs de différents horizons (ORSTOM, ISRA, Université de Dakar), a été entamée depuis 1984, afin d'étudier les causes, les conséquences et les remèdes possibles aux modifications qui se sont manifestées dans ce milieu. Cette étude comporte trois volets: pêche, environnement, et socio-économie.

Depuis février 1984, plusieurs missions ont été effectuées dans l'estuaire, commençant par la définition de la logistique; moyen de transport, appareillage de mesure, choix des sites de contrôle, ... et ont abouti à la fin de l'année 1986, à une masse d'observations non négligeable concernant la bathymétrie, la salinité, la température, la pluviométrie, l'évaporation, les peuplements benthiques, la sédimentologie, l'étude des sols, la pêche, ...(Actes du séminaire de Ziguinchor juin 1986). La partie hydrodynamique, s'est greffée sur ce programme bien après son démarrage, dès l'instant, où la compréhension de la dynamique des circulations des masses d'eau à court et long termes est devenue une nécessité pour les aménageurs afin d'éclaircir certains processus physiques observés.

Une précédente étude limnimétrique de la propagation de la marée avait été réalisée entre 1968 et 1970, par Brunet-Moret, sur l'estuaire de la Casamance et son principal affluent le Soungrougrou. Malgré que cette étude ait été effectuée dans la période précédant la sécheresse, elle comporte plusieurs informations hydrologiques qui,

comparées aux observations récentes (1984 jusqu'en 1986), montrent les grands changements qui se sont déroulés dans le milieu.

a- Pluviométrie: Les analyses statistiques faites en 1970 par Y. Brunet-Moret sur les observations recueillies aux postes pluviométriques situés en Casamance ou près de ses frontières, ont conduit aux conclusions suivantes:

Stations	DUREE D'OBSERVATIONS	PLUVIOMETRIE MOYENNE
Ziguinchor	50 ans	1557 mm
Sedhiou	48 ans	1370 mm
Kolda	48 ans	1235 mm
Velingara	32 ans	1093 mm

La saison de pluie s'étendait sur 5 mois (juin-octobre). Le mois d'août étant le plus arrosé, avec la répartition pluviométrique suivante:

	MAI	JUIN	JUIL.	AOUT	SEP.	OCT.	NOV.
Casamance maritime	1%	9%	22%	23%	24%	10%	1%
haute Casamance	1%	12%	20%	31%	25%	10%	1%

Cette répartition se trouve actuellement fortement modifiée et les mois de mai, juin, octobre et novembre sont secs. Les relevés pluviométriques aux diverses stations du service météorologique montrent le déficit d'apport pluvial dans l'estuaire:

Années	Ziguinchor	Sedhiou	Kolda
1967	2007 mm	1455 mm	1220 mm
1968	880 mm	808 mm	760 mm
1969	1461 mm	1961 mm	1410 mm
1983	800 mm		
1984	1200 mm		

b- Evaporation: Les moyennes mensuelles à Ziguinchor et Kolda en 1968 étaient:

	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D	Total
ZIG.	153	164	191	185	175	115	70	56	54	65	84	116	1428
mm/j	4.9	5.9	6.1	6.2	5.6	3.8	2.3	1.8	1.8	2.1	2.8	3.7	
Kolda	180	221	261	259	246	141	72	53	56	64	84	44	1791
mm/j	5.8	7.9	8.4	8.6	7.9	4.7	2.3	1.7	1.9	2.1	2.8	4.6	

Ces valeurs comparées aux observations récentes (1983 à 1986), à des emplacements proches de ceux de 1968, montrent l'importance de ce facteur dans l'évolution du milieu:

	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D	Total
ZIG.	144	175	219	204	188	164	118	106	113	132	116	125	1804
1983:	4.6	6.2	7.1	6.8	6.1	5.4	3.8	3.4	3.7	4.2	3.8	4.0	mm/j
ZIG.	163	194	211	202	205	135	115	122	107	111	119	123	1807
1984:	5.2	6.9	6.8	6.7	6.6	4.5	3.7	3.9	3.5	3.5	3.9	3.9	mm/j

Les récents jaugeages du débit fluvial à Kolda, reflètent le manque d'apport d'eau douce qui, comparé à l'évaporation largement excédentaire, conduit à un bilan hydrique déficitaire (fig.I.11).

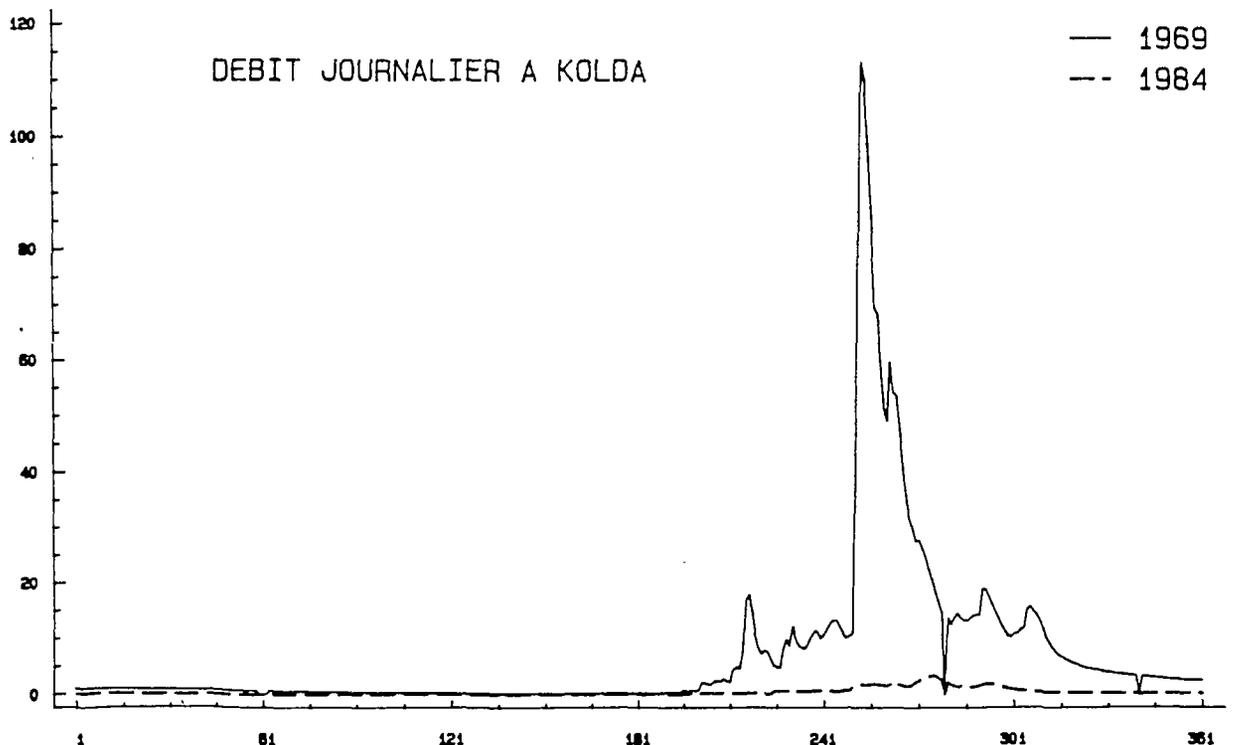


fig.I.11- Débit fluvial à Kolda (1969-1984).

La répartition longitudinale de la salinité présentait, avant la fin des années soixantes, une allure concave avec des maximums ne dépassant pas les 60%. Les campagnes de mesures de la salinité effectuées entre 1984 et 1986 (Pagès et al., 1987), montrent que les valeurs maximales ont doublé et l'allure du profil longitudinal est devenue convexe conduisant à un gradient halin inversé (fig.I.7).

Il s'ensuit que l'étude de référence réalisée par Brunet-Moret (1968-1970) demandait à être réactualisée à partir de mesures récentes de bathymétrie, de salinité et de niveau d'eau. Pour cette raison plusieurs missions d'appui ont été effectuées et ont conduit à :

- réaliser un profil longitudinal de l'estuaire de Ziguinchor jusqu'à l'amont de Diana-Malari, avec une trentaine de profils transversaux et à

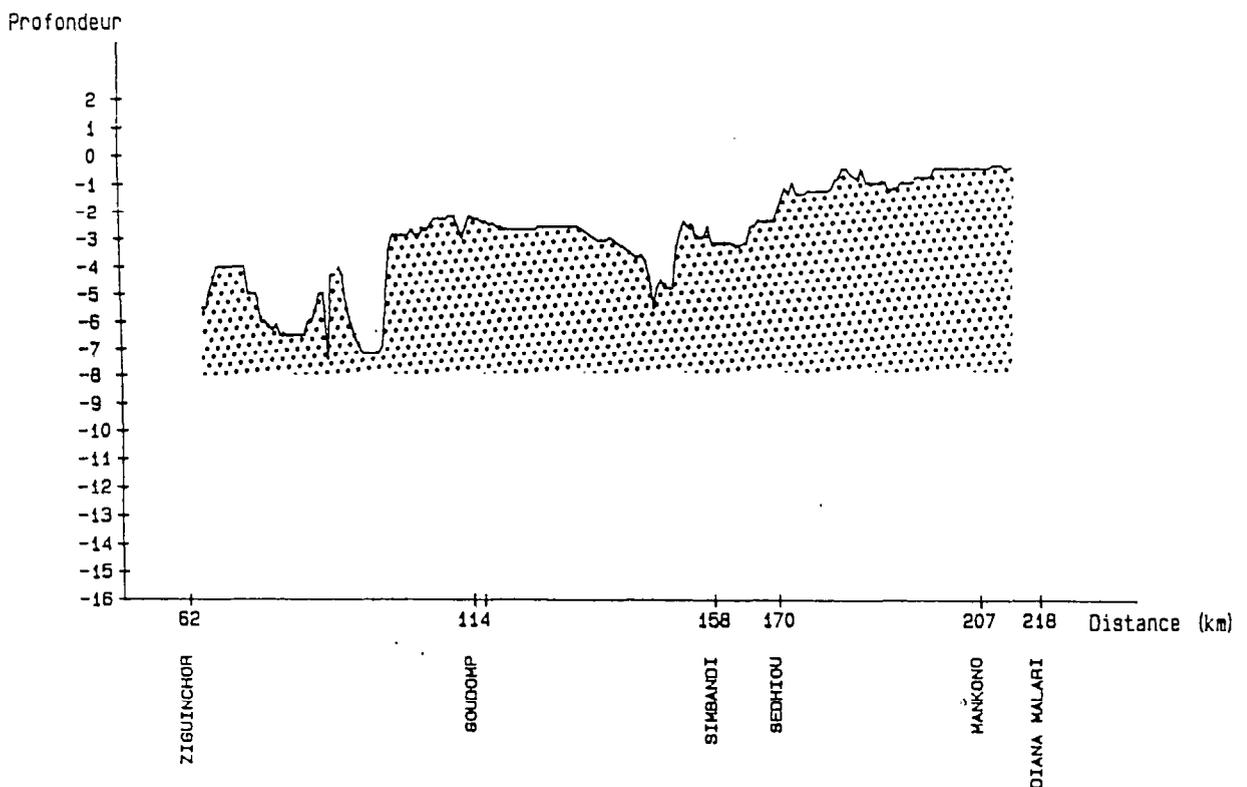
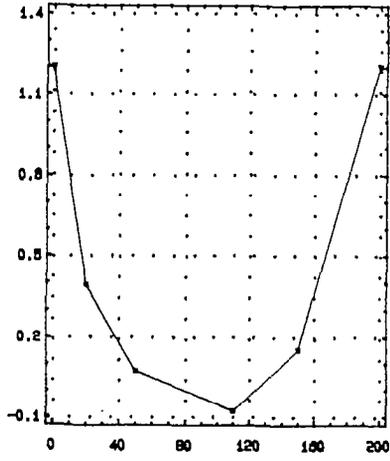
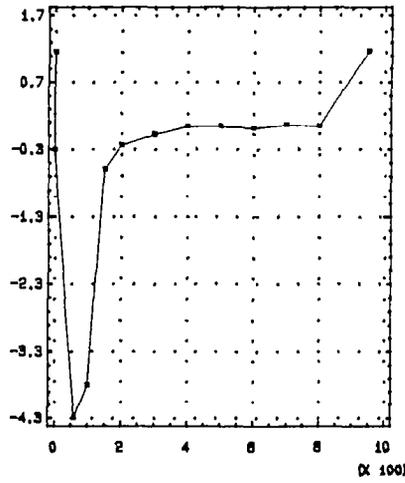


fig.I.12-Profil longitudinal de l'estuaire de la Casamance.

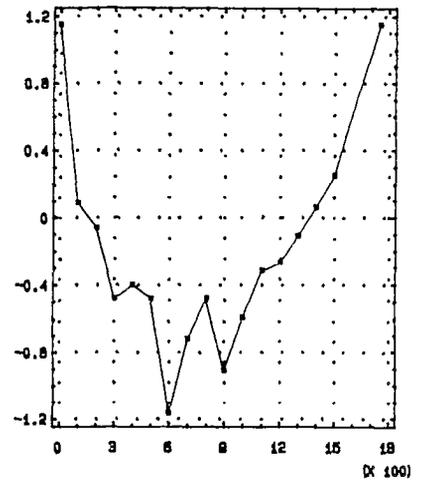
Station 37 : DIANA-MALARI



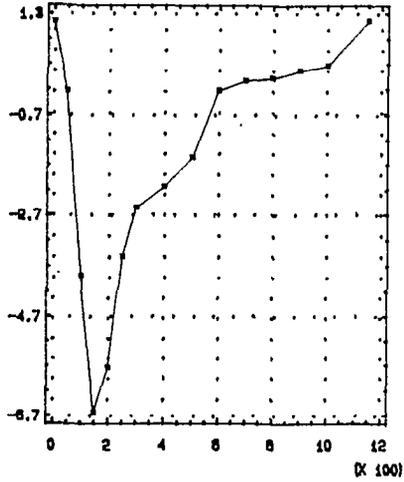
Station 30 : SEFA



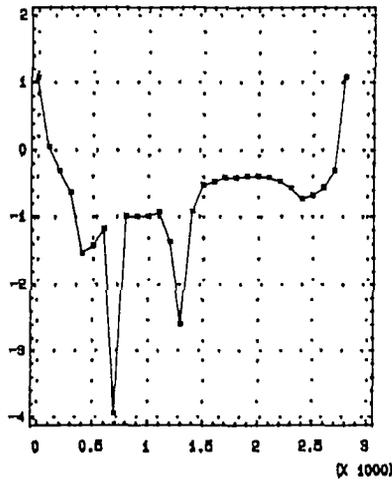
Station 29 : SEDHIQU



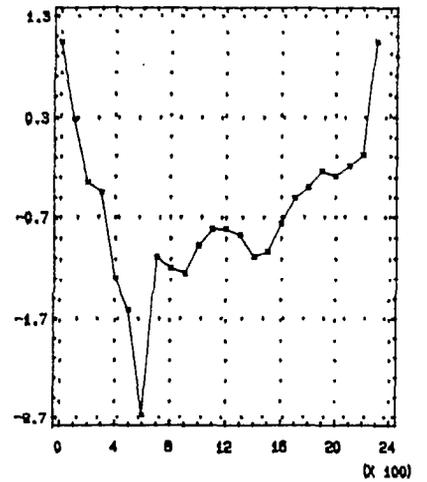
Station 25 : HAMDALAYE



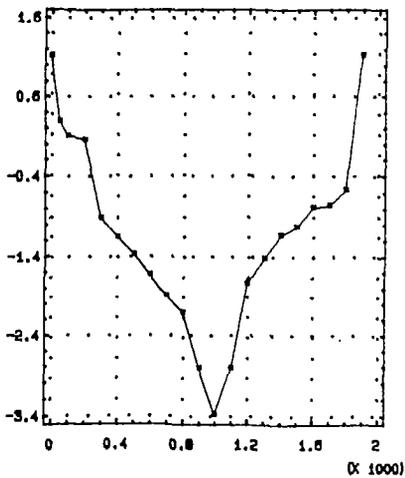
Station 21 : GOUJOMP



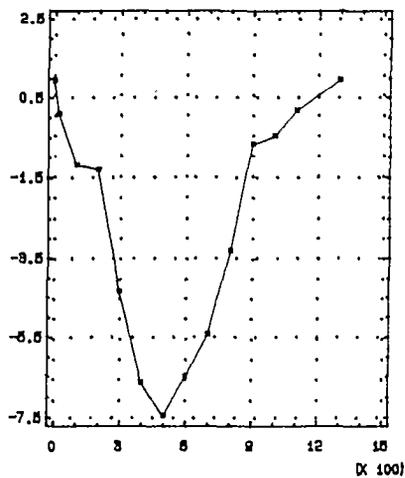
Station 22 : KAOUR



Station : DIATTACOUNDA



Station 17: BANGANGA



Station 13 : ZIGUINCHOR

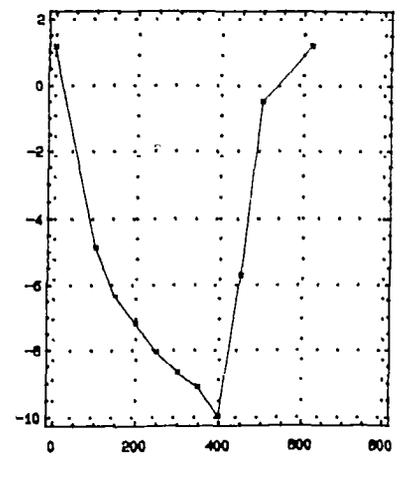


fig.I.13- Quelques exemples de sections transversales.

- installer six limnigraphes aux mêmes emplacements que ceux de Brunet-Moret (fig.I.14).

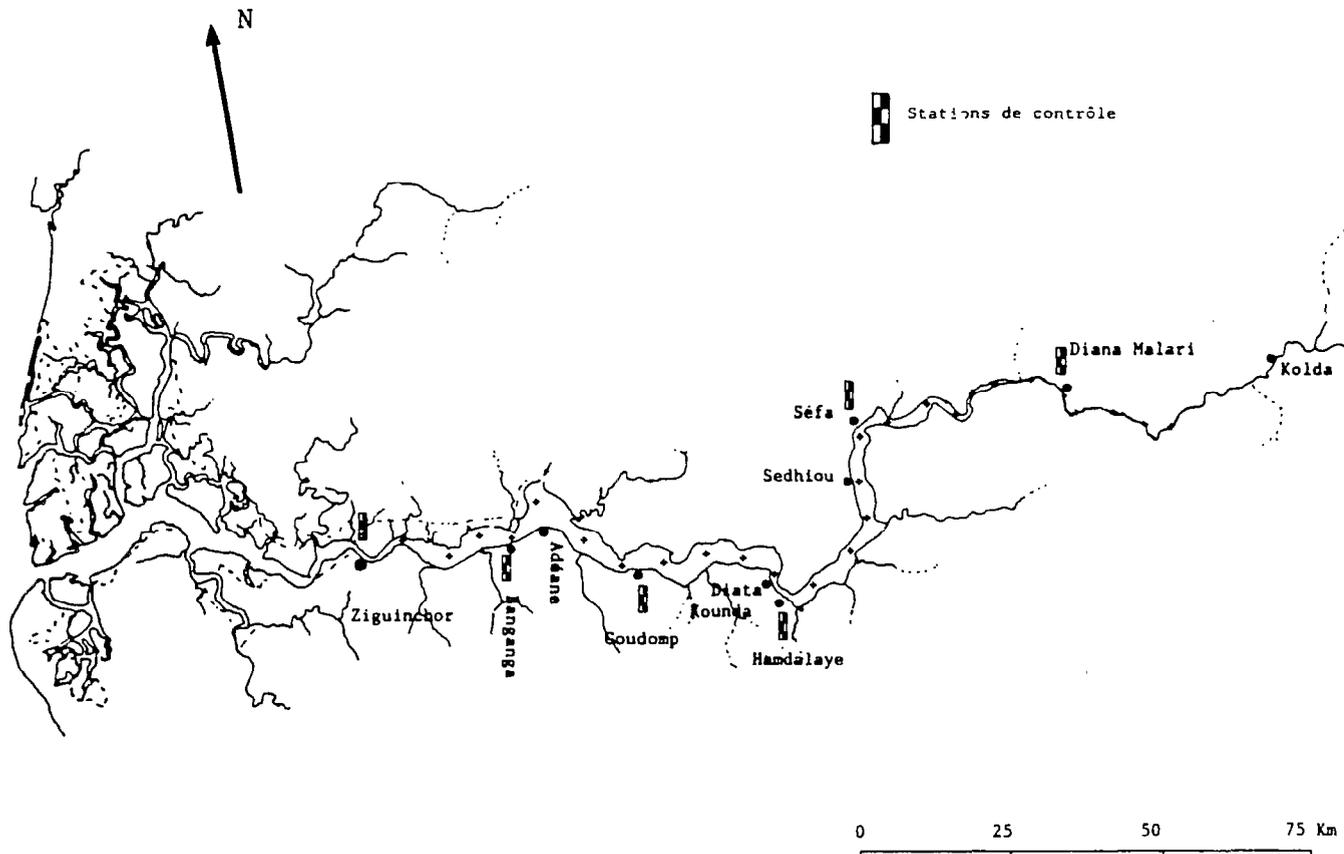


fig.I.14- Emplacement des stations de contrôle dans l'estuaire.

- Une étude du fonctionnement hydrologique de la Casamance maritime (Millet et al., 1986) a constitué la phase préliminaire de l'approche hydrodynamique. Elle a été réalisée à partir d'un suivi de la répartition spatio-temporelle du champ de la vitesse et de la salinité, dans quelques stations de contrôle et sur plusieurs cycles de marée. Elle a conduit aux constatations suivantes:

a- la faible différence d'intensité de vitesse entre le flot et le jusant, avec une nette diminution des courants entre Tambacoumba et Diattacounda (P.K. 30 et P.K. 70 à partir de Ziguinchor). Les figures

I.15, I.16 et I.17 présentent quelques résultats des quatre premières campagnes de mesures qui consistaient à suivre longitudinalement l'évolution de la vitesse maximale d'un même courant de marée sur tout l'estuaire.

b- les 16 suivis complets du champ de courant aux stations Ziguinchor (station 13), Goudomp (stat. 21), Hamdalaye (stat. 25), et Sefa (stat. 30), à travers toute la section mouillée et sur plusieurs cycles de marée, s'appuyant sur la méthode de jaugeage par verticales indépendantes, ont montré l'excellente homogénéité verticale du champ des vitesses, ce qui sera le cas pour toutes les observations effectuées tout le long de l'estuaire. Cette observation sera déterminante quant au choix du modèle hydrodynamique ultérieur.

c- la rapidité du renversement (flot/fusant) apparaît à toutes les sections observées, ainsi que l'existence d'une assez grande hétérogénéité latérale entre les valeurs des courants dans le chenal principal et sur les platiers (Hamdalaye). La figure I.17 présente trois exemples de la structure verticale des vitesses dans la section de Ziguinchor, au niveau de la partie la plus profonde du chenal (10,5 mètres) et dans la section d'Hamdalaye au niveau du chenal (7 m) et du platier peu profond (<3 m), qui s'étend sur la rive droite.

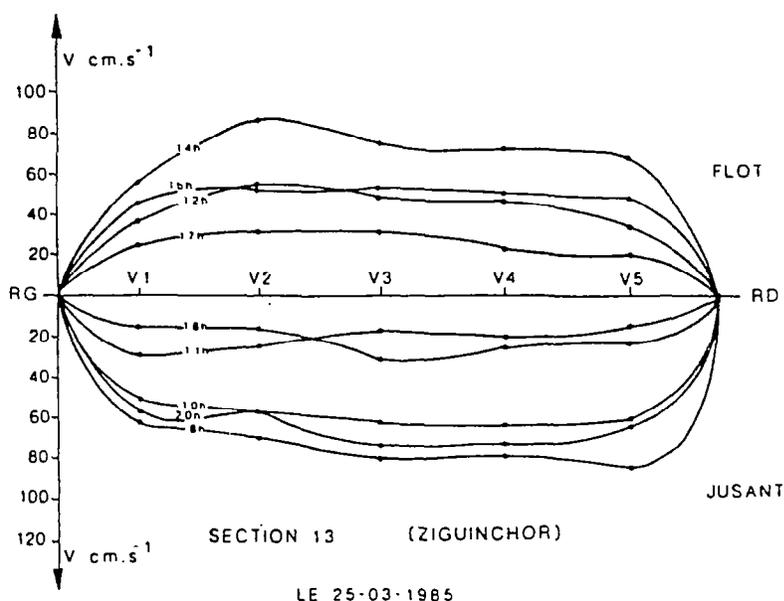


fig.I.15-Variation horaire du champ des vitesses. (Millet,1986)

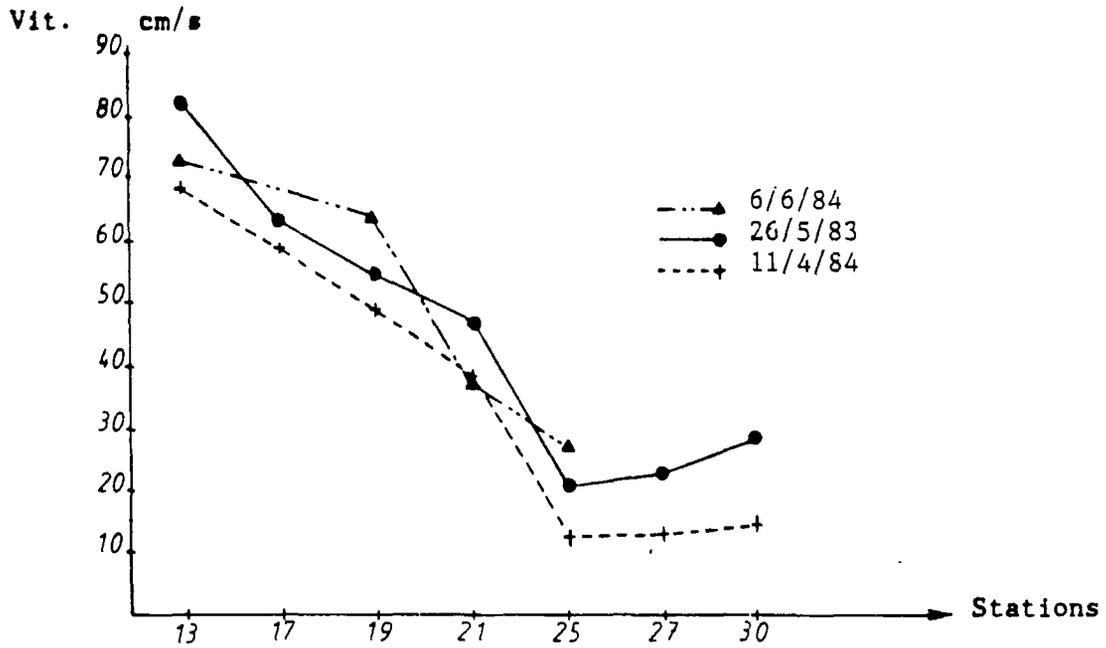


fig.I.16-Variations longitudinales des vitesses maximales du courant de marée. (Millet, 1986)

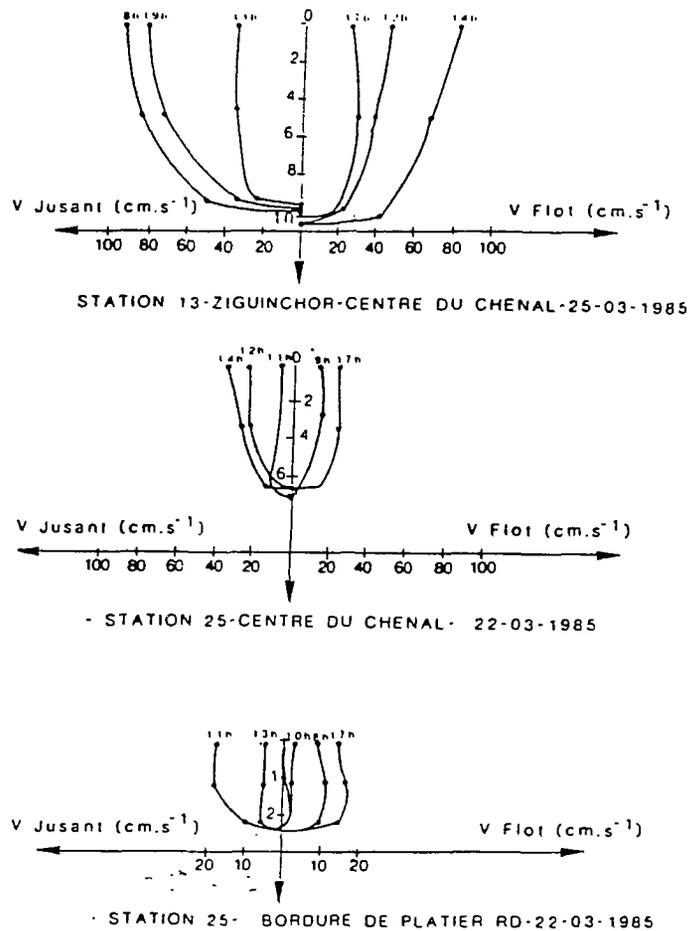


fig.I.17-Quelques exemples de la structure verticale du champ de vitesse. (Millet, 1986)

d- le rapport entre le volume d'eau salée amené par la marée à l'entrée de l'estuaire et le volume d'eau douce pénétrant à l'amont de l'estuaire pendant la période de la marée est un indicateur classique qui rend compte de l'homogénéité verticale des eaux. D'autres critères existent. Celui d'Ippen (1966) consiste à comparer l'énergie dispersée par frottement et le gain d'énergie potentielle de l'eau douce au cours de son mélange:

$$C_{\text{strat}} = \frac{T_{\text{res}} \bar{U}^3}{C^2 H^2 (\Delta\rho/\rho)}$$

T_{res} : temps de résidence C: coefficient de Chezy
 \bar{U} : vitesse moyenne H: profondeur totale
 ρ : densité

L'indice d'Hansen et al. (1966) se résume au calcul des indices de stratification I_s et de circulation I_c , dont les valeurs reportées sur le graphique d'Hansen permettent de classer le milieu étudié.

$$I_s = \frac{\Delta s}{s_0} = \frac{\text{différence de salinité entre le fond et la surface}}{\text{salinité moyenne}}$$

$$I_c = \bar{U}_s / \bar{U} = (\text{Vitesse résiduelle en surface} / \text{Vitesse moyenne})$$

Ces critères donnent les grands traits de la circulation dans l'estuaire, mais ne se substituent pas aux mesures in situ de la structure verticale de la salinité et des courants. C'est pour cela que des mesures récentes de la répartition verticale et longitudinale de la

salinité, réalisées par Pagès et Lemasson (comm. pers., 1987) sur plusieurs sections, montrent l'absence de toute stratification sur la verticale:

Station : Hamdalaye				Station : Sefa			
Prof. m	I	Salinité I	I	Prof. m	I	Salinité I	I
7.0	I	74.12	I	4.0	I	87.62	I
6.5	I	72.50	I	3.5	I	86.48	I
6.0	I	72.72	I	3.0	I	87.53	I
4.0	I	71.98	I	2.5	I	87.27	I
0.0	I	71.91	I	0.0	I	87.53	I

Ces mesures ont constitué la base indispensable dans le choix et la validation de l'approche hydrodynamique à effectuer.

I.1.5 Choix du modèle

Pour reproduire les mécanismes mis en jeu, un modèle tri-dimensionnel est le plus approprié mais ce type d'approche est difficile à mettre en oeuvre, compte tenu de la masse des données et du nombre de paramètres nécessaires pour obtenir des résultats satisfaisants (Heaps, 1978, Nihoul, 1975). Le manque de données concernant la composante verticale du courant, et l'homogénéité dans la répartition des propriétés fluides sur la verticale (salinité-courant) ont écarté le choix d'un modèle 3-D ou 2-D (verticale). La topographie tourmentée et la présence de vastes zones de mangroves, dont certaines sont couvertes à marée hautes, ne pourrait être schématisée d'une façon réaliste avec un modèle mono-dimensionnel. C'est pourquoi le choix s'est porté sur une modélisation bi-dimensionnelle en plan (ox,oy), intégré sur la verticale qui prendra en compte les vastes zones "marginales" ainsi que les divers processus physiques qui conditionnent l'écoulement dans ce milieu. La partie visée par la modélisation s'étend de Ziguinchor à Kolda (fig.I.18).

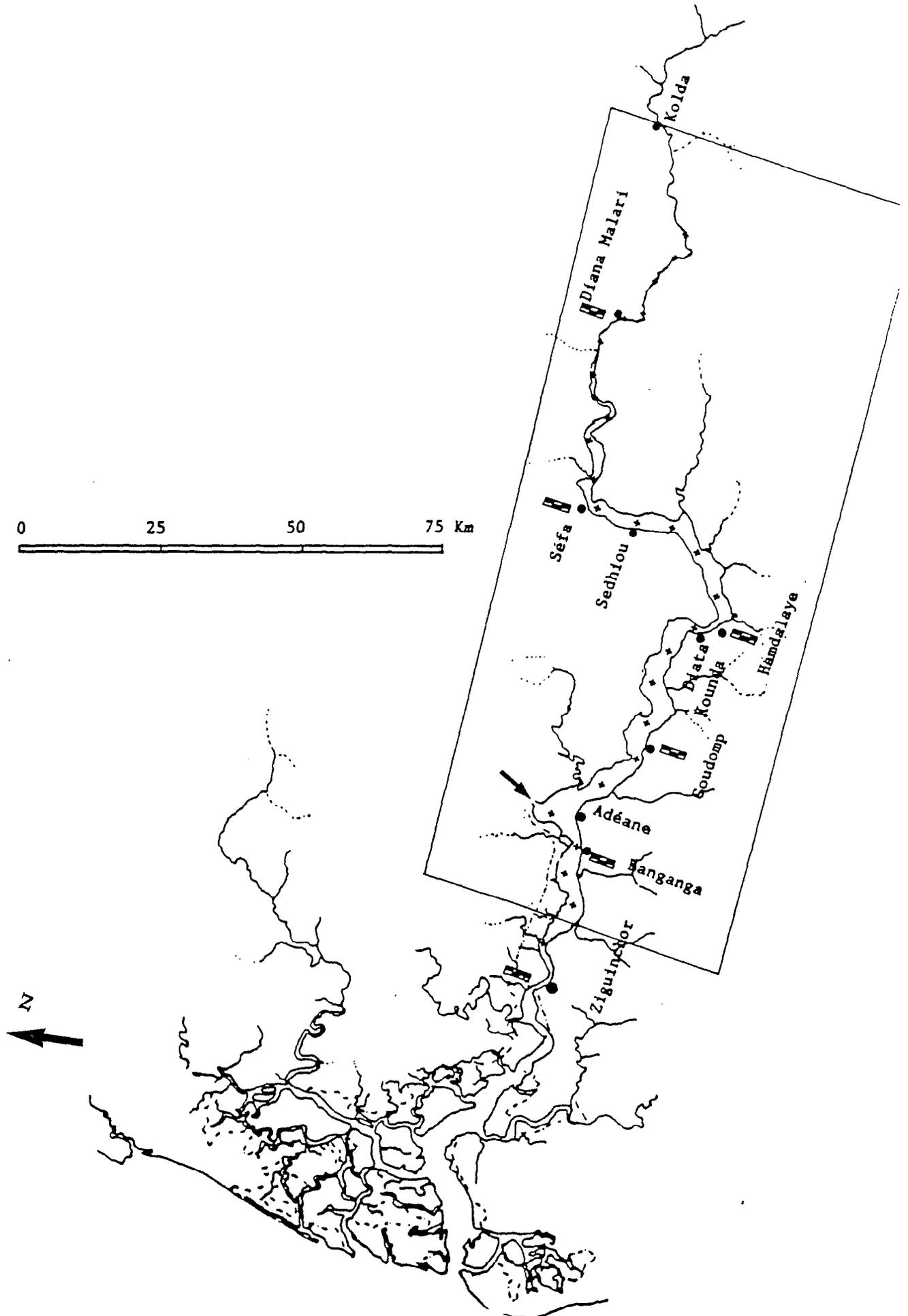


fig.I.18-Zone de l'étude hydrodynamique avec la position des stations de contrôle.

I.2 ANALYSE HARMONIQUE

I.2.1 Introduction

Depuis longtemps, un bon nombre de scientifiques se sont intéressés au phénomène de marée. Strabon (1er siècle avant J.C), Kepler, Galilée (16^{ème} siècle), Newton (1687) et Bernouilli (17^{ème} siècle), ont développé des approches, qui dans la plupart des cas étaient incomplètes. Il a fallu attendre Laplace et Kelvin (18^{ème} et 19^{ème} siècles) pour obtenir la théorie dynamique de base des marées (Kravtchenko).

La marée résulte de l'attraction sidérale exercée sur les masses d'eau océaniques. Ces forces évoluent avec le temps et sont essentiellement dues à la lune et au soleil, qui sont les deux seuls astres à prendre en compte, le premier à cause de sa proximité et le second à cause de sa masse.

Si le mouvement de la lune est négligé, chaque point de la terre, subit l'action des forces centrifuges égales et parallèles ($F_{cent}=4\pi^2a^2/T^2$). La somme de ces forces devrait être équilibrée par les forces d'attraction proportionnelles à la masse et inversement proportionnelles à la racine de la distance. Ces dernières ont une direction et un module différent selon l'endroit étudié. Il s'ensuit que les forces d'attraction peuvent être supérieures ou inférieures aux forces centrifuges. La force génératrice des marées est due à cette différence, et évolue en conséquence en fonction de:

- 1°- la rotation de la terre
- 2°- le mouvement de la lune autour de la terre, qui décrit une orbite elliptique inclinée par rapport à l'équateur
- 3°- le mouvement du système lune-terre par rapport au soleil.

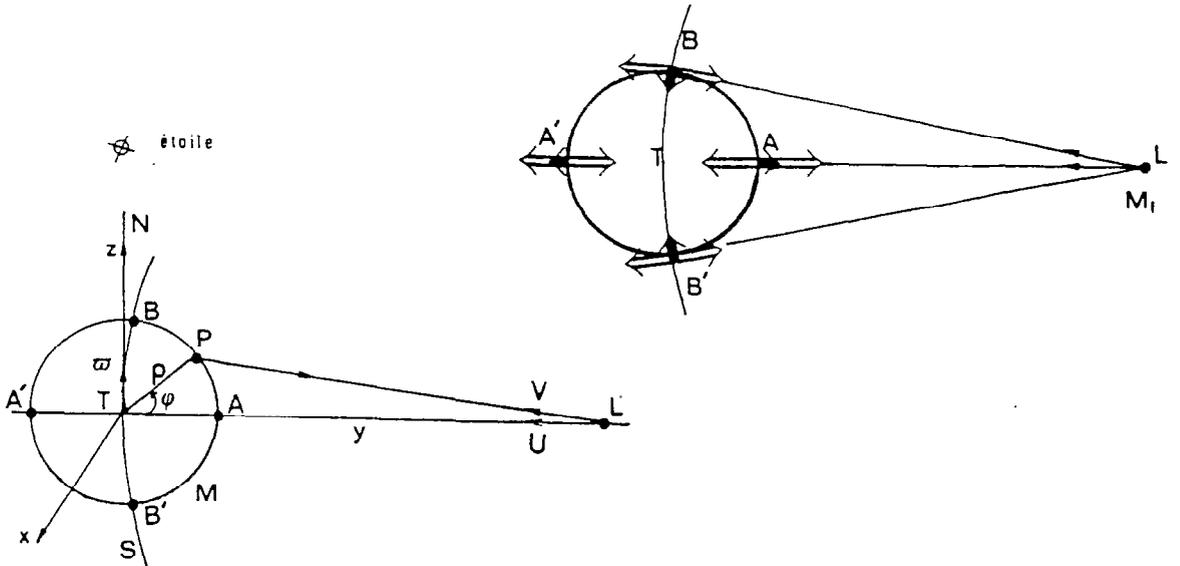


fig.I.19- Représentation des forces d'attraction luni-solaire.

La terre se déplaçant dans le vide, les forces d'inertie et de résistance sont nulles et les seules forces qui persistent sont celles relatives à l'attraction luni-solaire. En appliquant le principe fondamental de la dynamique avec la loi de la gravitation universelle, on arrive à :

$$m \cdot \gamma = R \quad (\text{I.1})$$

R : forces extérieures, telles que :

$$R = R_{\text{lune}} + R_{\text{soleil}}$$

$$\text{avec : } R_{\text{lune}} = (-K \cdot M \cdot M_{\text{terre}} \cdot U_{\text{lune}}) / d^2 \quad (\text{I.2})$$

$$R_{\text{soleil}} = (-K \cdot M \cdot M_{\text{soleil}} \cdot U_{\text{soleil}}) / D^2 \quad (\text{I.3})$$

La force génératrice des marées dérive d'un potentiel dont les dérivées partielles forment les composantes verticale et horizontale de cette force. Le potentiel luni-solaire est la somme des potentiels relatifs aux deux astres. Son expression est donnée par :

$$V = \frac{G M}{r} \sigma P_n \cos \theta \left(\frac{a^n}{r^n} \right) \quad (\text{I.4})$$

M : masse de l'astre

g : accélération de la pesanteur

θ : distance zénithale géocentrique de la lune

T : masse de la terre

G : composante de la gravitation universelle

a : rayon de la terre
 r : distance séparant le centre de la terre à l'astre en question
 P_n : polynôme de Legendre. On se limite généralement au second ordre, ce qui ramène l'équation (I.4) à:

$$V = .5 g a \frac{Ma^3}{T d^3} (3 \cos^2 \theta - 1) \quad (I.5)$$

Kelvin (1867) a montré que l'on pouvait décomposer le potentiel luni-solaire en une somme illimitée de termes rigoureusement périodiques; à chacun de ces termes correspond une marée élémentaire, ou onde composante de même période telle que la superposition de ces ondes donne la marée réelle. Chacune d'elles possède une amplitude et un déphasage que l'on ne cherche pas à déterminer théoriquement, mais que l'on déduit d'une série d'observations appropriées par un calcul appelé "analyse harmonique".

La décomposition harmonique d'une série d'observations conduit à l'expression approchée :

$$\psi_{ap}(x,y,t) = \psi_0(x,y) + \sum f_i \psi_i(x,y) \cos(w_i t + (V_0+u)_i - g_i(x,y)) \quad (I.6)$$

avec :

$\psi_0(x,y)$: valeur moyenne des observations ramenées à un point de référence
 $\psi_i(x,y)$: grandeur de la composante i
 $\psi_{ap}(x,y)$: grandeur approchée de la composante i
 w_i : pulsation de l'onde i
 f_i : coefficient de correction nodal de l'amplitude de l'onde i
 u_i : coefficient de correction de la phase de l'onde i
 V_0 : phase de l'astre perturbateur prise à $t=0$ par rapport à Greenwich
 N : nombre total d'ondes prises en compte
 $g_i(x,y)$: déphasage dû au passage d'un astre fictif (perturbateur), qui évolue suivant un mouvement circulaire dans le plan de l'équateur et qui produit au point (x,y) un mouvement de même pulsation que celle de l'onde i en question.

La transformée de Fourier de l'expression (I.6), multipériodique ($1/\nu_i$), multidéphasée par rapport à l'origine des phases et tronquée, aura pour expression :

$$\psi(\nu_j) = \psi(k\Delta T) = \sum f \psi_0 \cos (q k\Delta T - \alpha) \quad (I.7)$$

qui ramenée à un "niveau d'équilibre" s'écrit:

$$\psi(k\Delta T) = A + \sum f \psi_0 \cos (q k\Delta T - \alpha) \quad (I.8)$$

avec :

$$\alpha = (V_0 + u) - k$$

f : facteur nodal

q : vitesse angulaire

A : niveau moyen (pour des séries limnimétriques)

Le niveau moyen est généralement défini par la moyenne des hauteurs par rapport à un repère pendant une période donnée d'observation. On est souvent amené à définir un niveau moyen journalier, mensuel, annuel.... Ce niveau diffère du niveau d'équilibre ou du niveau à mi-marée. Le premier étant le niveau obtenu sous la seule influence de la pesanteur (attraction terrestre + force centrifuge de la rotation terrestre), tandis que le niveau à mi-marée est la moyenne des pleines mers et basses mers.

La théorie dynamique, avec la seconde hypothèse de Laplace, permet d'associer à tout terme élémentaire du potentiel générateur, une fonction de forçage (marée partielle) de même période, dont l'amplitude et le déphasage dépendent des conditions hydrodynamiques du système traité. La marée observée résulte de la superposition de ces marées partielles qui se caractérisent par leur vitesse angulaire q exprimée en degré par heure, et leur période T, telle que $T=360/q$. On désigne ces marées partielles par une lettre suivie d'un indice spécifiant le groupe auquel elles appartiennent :

A : annuelle m : mensuelle f : semi-mensuelle (fortnight)

1 : diurne 2 : semi-diurne 3 : tiers-diurne

I.2.2 Marée dans les milieux peu profonds

La vitesse de propagation d'une onde est proportionnelle à la racine carrée de la profondeur totale de l'eau. Si la dénivellation entre la pleine mer et la basse mer est faible par rapport à la profondeur, la vitesse de propagation n'est pas modifiée de façon appréciable. En revanche, dans les milieux peu profonds, la topographie conduit à de grandes déformations de la courbe classique de marée et la vitesse de propagation est souvent fortement modifiée. Il en résulte un avancement plus rapide du sommet par rapport au creux. Ce phénomène engendre des ondes supérieures qui viennent perturber la régularité du phénomène astronomique caractérisées par des périodes qui sont des sous-multiples d'ordre 2,3, ... de la période de l'onde fondamentale. Ces ondes non-linéaires sont notées par une combinaison de lettres et d'indices des ondes principales. Par exemple l'onde quart-diurne M4 correspond à l'harmonique 2 de l'onde lunaire moyenne semi-diurne M2. Certaines fréquences de ces ondes secondaires sont les mêmes que celles des ondes principales du potentiel générateur; on les appelle les ondes mixtes. A titre d'exemple, la fréquence de l'onde mixte 2MN2 est confondue avec celle de L2. En conséquence, mis à part les ondes d'origine météorologiques, il existe trois autres types d'ondes : les ondes principales dues aux développement du potentiel luni-solaire, les ondes non-linéaires et les ondes mixtes. Les considérations théoriques sont insuffisantes pour reproduire la marée en un lieu bien déterminé. Il est donc nécessaire de recourir à des observations pendant une période suffisamment longue afin de satisfaire aux objectifs proposés.

I.2.3 Marée en Casamance

Une analyse rapide des marégrammes en Casamance permet de dégager certaines caractéristiques générales de la marée dans l'estuaire :

- La régularité de la marée, favorisée par un manque d'apport fluvial, une évaporation intense, une géométrie irrégulière, et une pente très faible, permettent à l'onde de marée de pénétrer dans le milieu et atteindre Boguel située à 244 km de l'embouchure, malgré un faible marnage qui ne dépasse pas les 70 cm à Ziguinchor.

- il y a systématiquement deux marées par jour. Les pleines mers (ou les basses mers) consécutives ou les deux à la fois, présentent une faible différence d'amplitude qui tend à disparaître tout en remontant l'estuaire. Cette différence s'accompagne d'inégalités dans la répartition dans le temps, ce qui confère à la marée, surtout au niveau de Ziguinchor et Baganga, un caractère semi-diurne avec des inégalités diurnes. En théorie, cette inégalité devrait disparaître lorsque la lune est au voisinage de l'équateur céleste, tandis qu'elle est assez forte quand l'astre est proche des tropiques.

- l'onde de marée subit un fort amortissement après la confluence avec le Soungrougrou: le marnage passe de 63 cm à Ziguinchor à 33 cm à Goudomp. La partie aval de l'estuaire présente une montée rapide de l'eau (flot) et une descente lente (jusant). Ce phénomène est plus marqué au fur et à mesure que l'on remonte l'estuaire.

I.2.4 Etudes réalisées

Une analyse de 30 jours d'observations de marées, effectuée en 1951 dans le port de Diogué (proche de l'embouchure, 12°.34 N, 16°.45 W) par la mission hydrographique des côtes ouest d'Afrique (C.O.E.C, 1953-

1955) a permis d'obtenir les constantes harmoniques suivantes:

Tableau I.1-Constantes harmoniques à la station de Diogué (1951).

1951	I	Amp.	I	situat.	I	Ondes	I	Amp.	I	situat.	I
	I	H (cm)	I	TU g°	I		I	H (cm)	I	TU g°	I
I	K1	I 6.9	I	2.0	I	M2	I	48.6	I	268.7	I
I	O1	I 3.4	I	250.2	I	S2	I	16.7	I	305.3	I
I	P1	I 2.3	I	2.1	I	N2	I	8.7	I	250.2	I
I	Q1	I (0.7)	I	(250.1)	I	K2	I	4.6	I	305.5	I

Selon ce rapport, "La marée dans ce port est très voisine de celle de Dakar, avec un retard d'environ 20 mn".

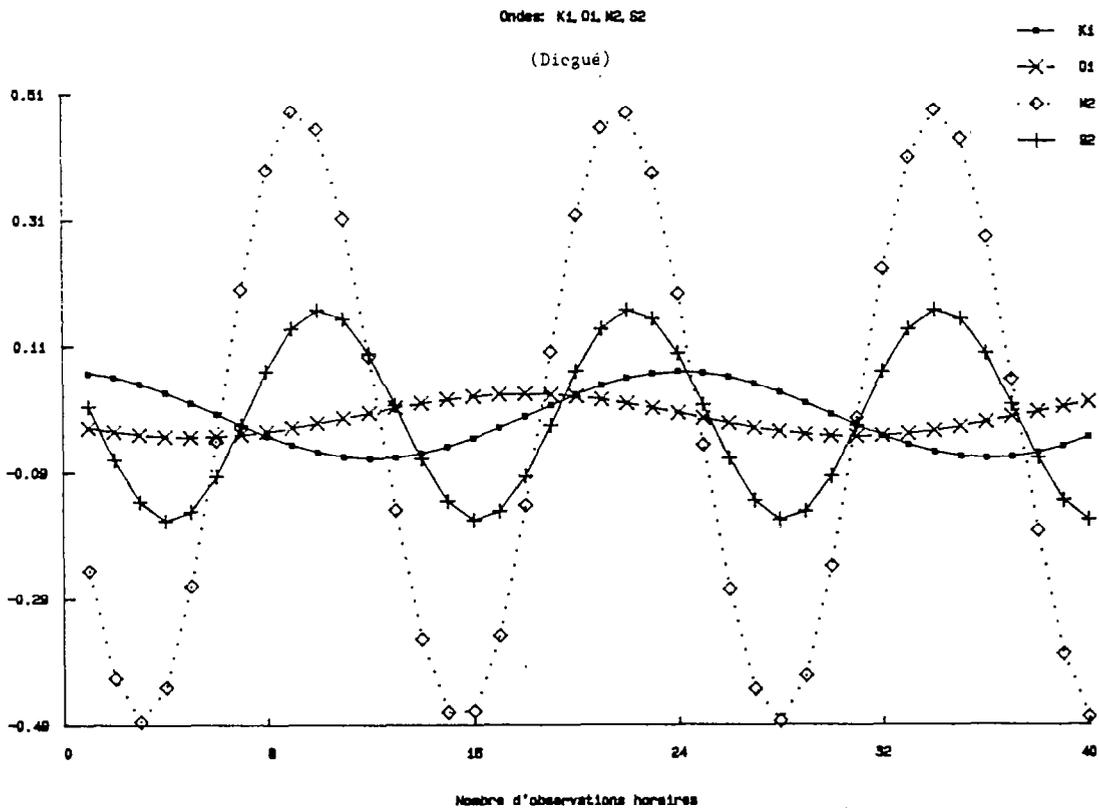


fig.I.20-Représentation des ondes diurnes (O1,K1) et semi-diurnes (M2,S2) à la station Diogué.(1951)

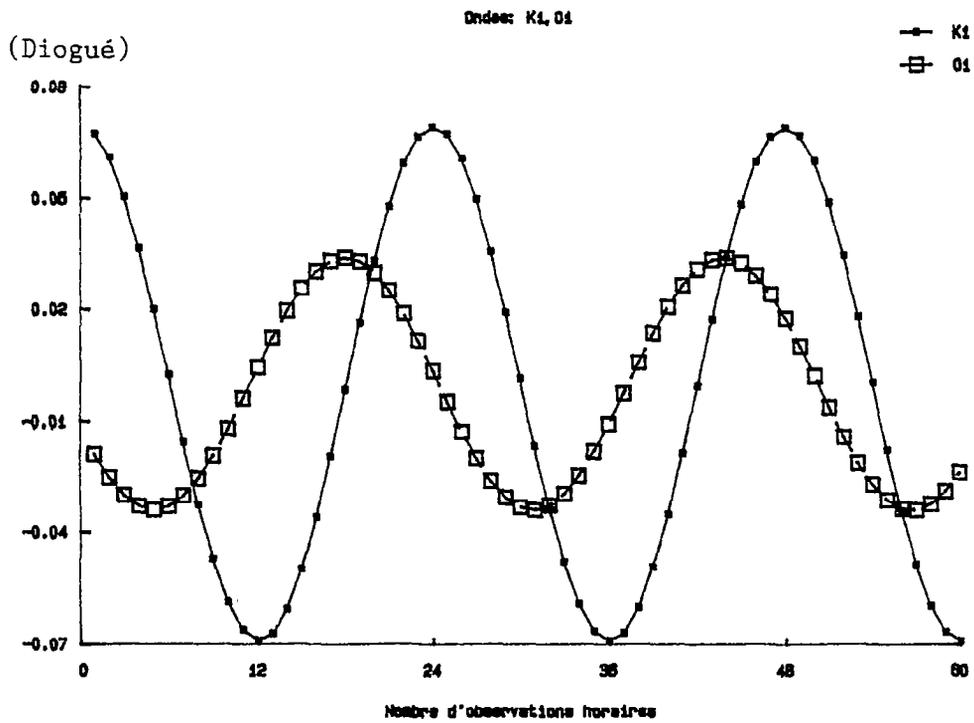


fig.I.21-Représentation des composantes diurnes (K1,O1)   la station Diogué.(1951)

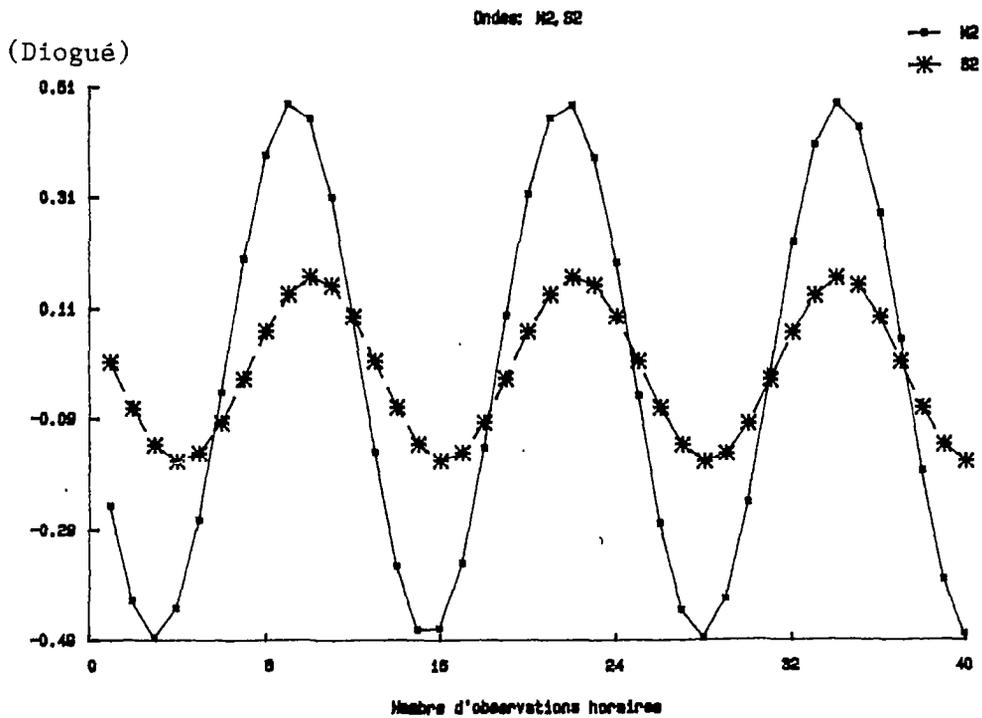


fig.I.22- Représentation des composantes semi-diurnes (M2,S2)   la station Diogué.(1951)

Cette étude fut complétée en 1955 par la détermination des constantes harmoniques de la marée au port de Ziguinchor situé à environ 35 nautiques en amont de l'embouchure où se trouve le port de Diogué. L'analyse d'un enregistrement marégraphique de 30 jours d'observations, obtenues en 1953 par la mission hydrographique de l'Afrique occidentale, a conduit aux résultats suivants:

Tableau I.2-Constantes harmoniques à la station de Ziguinchor (1953).

1953	I	Amp.	I	situat.	I	Ondes	I	Amp.	I	situat.	I
	I	H (cm)	I	TU g°	I		I	H (cm)	I	TU g°	I
I	K1	I 6.0	I	61.0	I	M2	I 28.1	I	16.1	I	
I	O1	I 1.8	I	303.7	I	S2	I 9.5	I	68.8	I	
I	P1	I (2.0)	I	(61.1)	I	N2	I 1.8	I	359.5	I	
I	Q1	I 0.8	I	181.3	I	K2	I (2.6)	I	(68.9)	I	
						M4	I 2.9	I	231.8	I	

Il se dégage de ces deux études, qu'un retard d'environ 3 heures et demie se produit entre Diogué et Ziguinchor où la marée remonte l'estuaire avec une célérité voisine de 10 noeuds l'amplitude diminuant d'environ 42% au cours de la propagation.

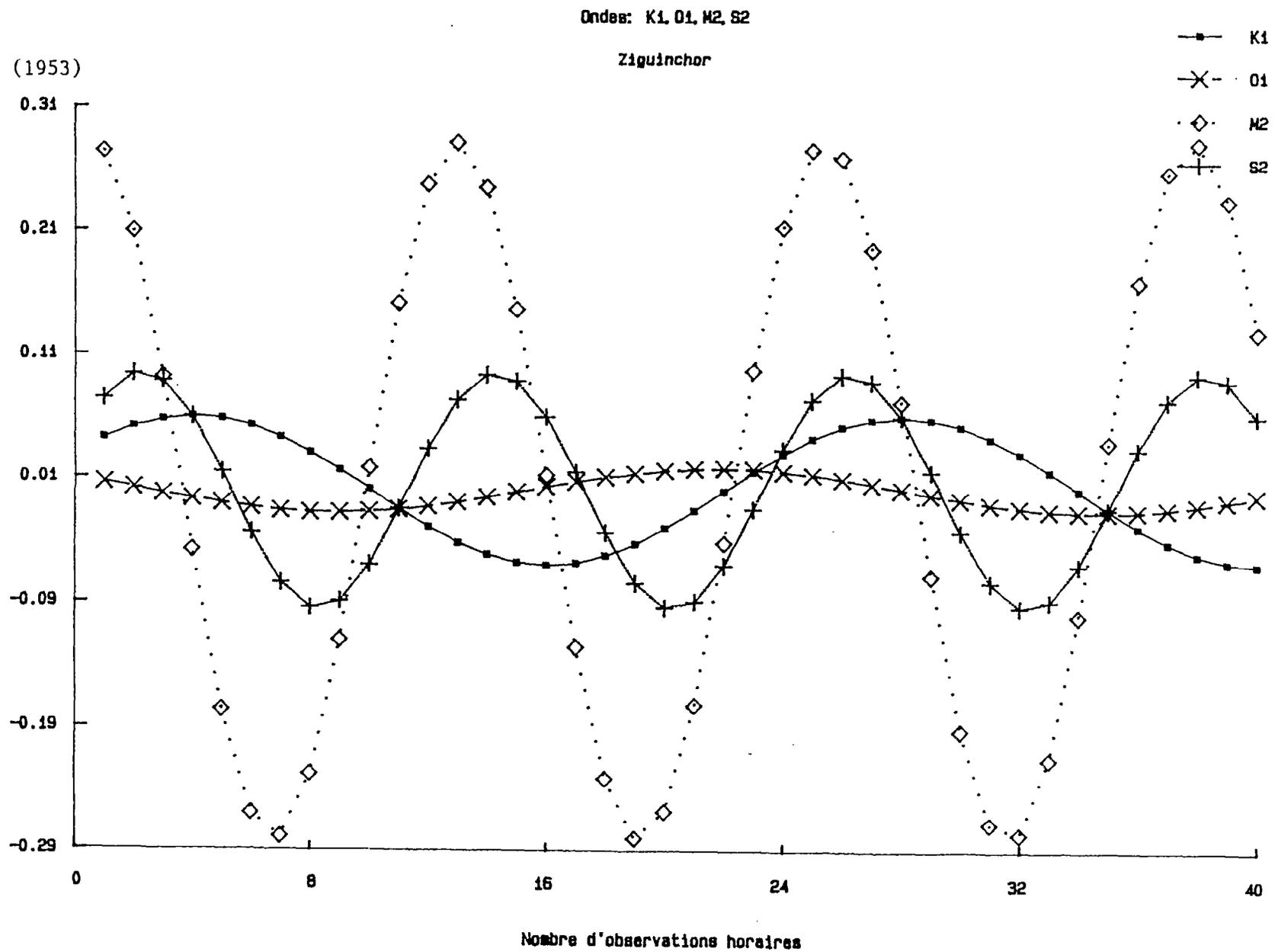


fig.I.23- Représentation des ondes diurnes (K1, O1) et semi-diurnes (M2, S2) à la station de Ziguinchor. (1953)

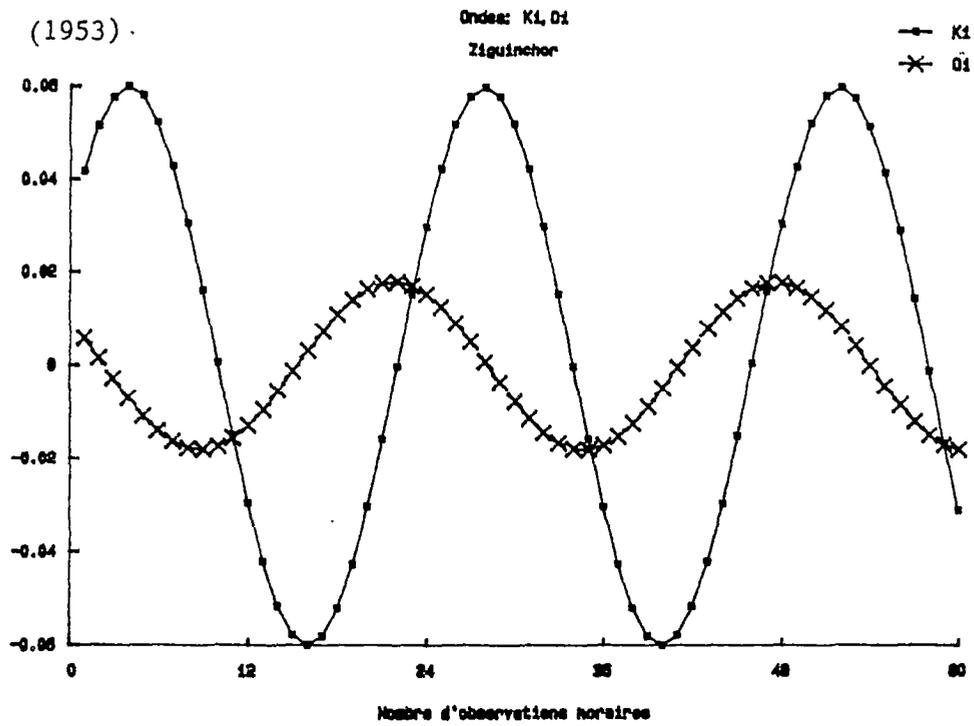


fig.I.24-Représentation des composantes diurnes (K1,O1)
à la station de Ziguinchor.(1953)

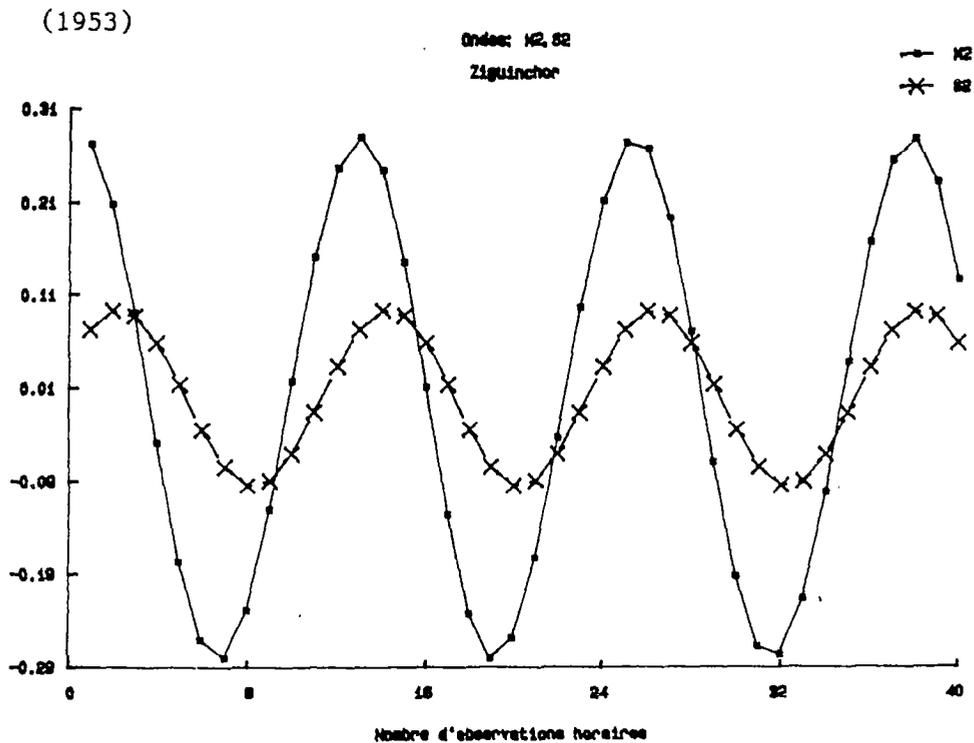


fig.I.25- Représentation des composantes semi-diurnes (M2,S2)
à la station de Ziguinchor.(1953)

Durant la période s'étalant de 1968 à 1970, l'équipe de l'ORSTOM à Dakar (Sénégal), a installé sept limnigraphes dans le cours d'eau principal de l'estuaire de la Casamance, aux stations suivantes:

- Diogué (12.34 N, 16.45 W) ,
- Ziguinchor (12.35 N, 16.16 W), à 63 km de Diogue,
- Baganga (12.37 N, 16.03 W), à 24 km de Ziguinchor,
- Kaour (12.35 N, 15.54 W), à 19 km de Baganga,
- Hamdalaye (12.33 N, 15.40 W), à 36 km de Kaour,
- Sefa (12.47 N, 15.33 W), à 36 km de Hamdalaye,
- Diana-malari (12.51 N, 15.15 W) , à 40 km de Sefa.

Bien qu'aucune analyse harmonique n'ait été effectuée sur les observations récoltées, un dépouillement des marégrammes en hauteur de marée basse et de marée haute a permis de tirer les caractéristiques générales de l'onde de marée (Brunet-Moret, 1970).

a: Marée annuelle et semi-annuelle (fig.I.26)

Toutes les observations traitées, ont montré une forte marée annuelle dont l'amplitude varie relativement peu et qui présente la même allure très dissymétrique dans toutes les stations de mesure. Le minimum se situe en janvier-février et le maximum en septembre-octobre.

b: Marée mensuelle et semi-mensuelle

Pour étudier l'amplitude de la marée semi-mensuelle, Brunet-Moret (1970) a tenu compte de la marée annuelle mais en ne considérant que la plus forte des deux marées de chaque mois. La figure I.27 résume ses conclusions à ce sujet.

c: Marée diurne et semi-diurne

Les amplitudes "brutes" moyenne, maximale et minimale de la marée semi-diurne sont représentées sur la figure I.28 et les temps de propagation sont illustrés dans le tableau suivant:

	Zig.	Bag.	Kaour	Hamdal.	Sefa	Dia.-mal.
Dist. (km)	0	24	43	78	114	154
Tem. de prop.	0	1h50	4h05	7h15	10h40	18h
Vit. moy. de prop.	< 13km/h >		<-----10km/h----->			

d: Niveau moyen

Il a été calculé en effectuant la moyenne des niveaux moyens mensuels de 12 mois consécutifs. Ce niveau moyen accuse une variation maximale d'amplitude de 6 cm. Ces variations du type aléatoire sont dues à la combinaison de plusieurs causes dont les effets topographiques et météorologiques locaux qui se superposent aux ondes astronomiques de longues périodes.

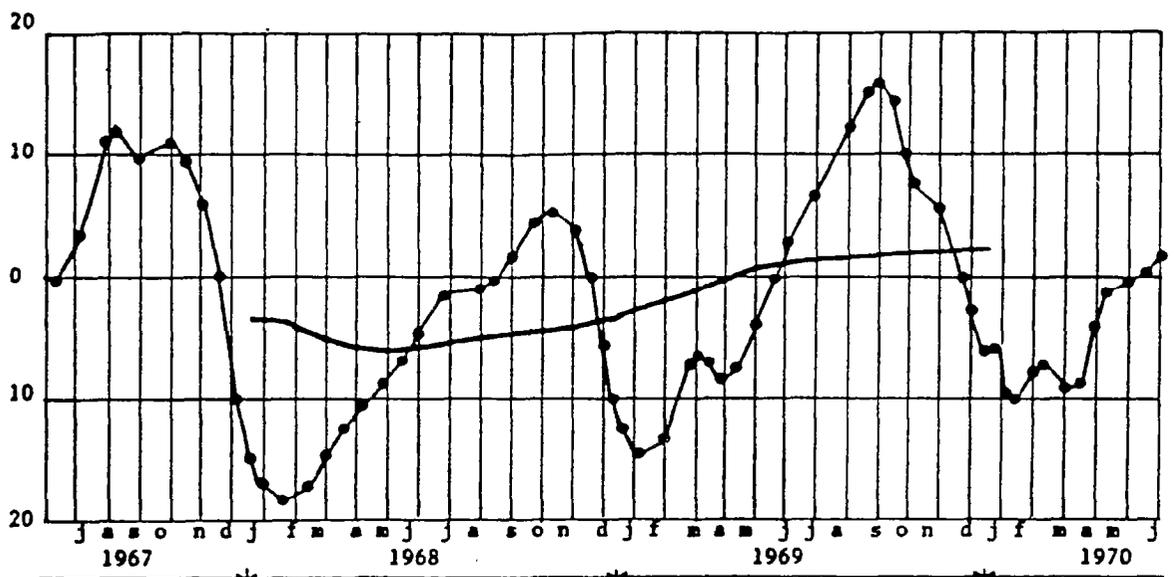


fig.I.26-Marée annuelle.(Brunet-Moret,1970)

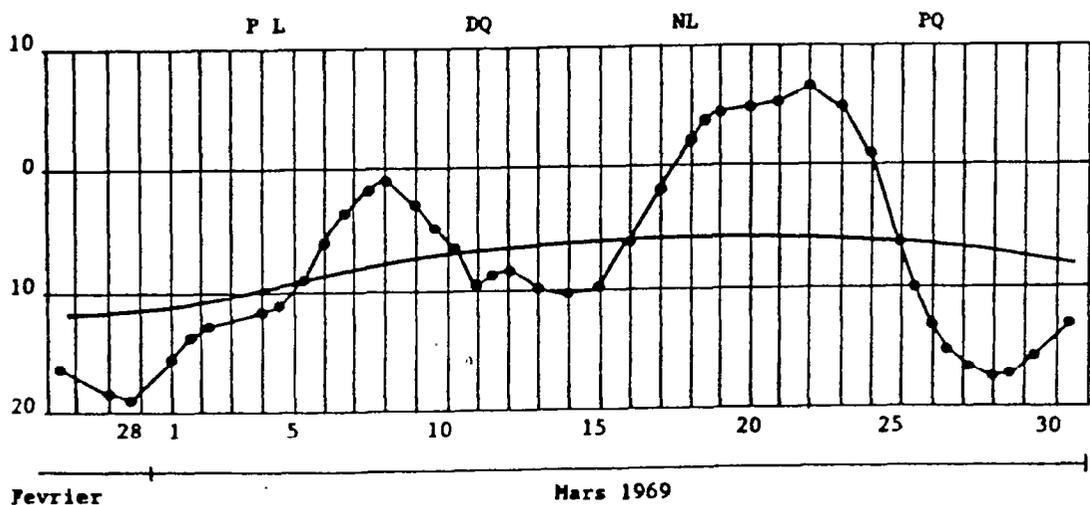
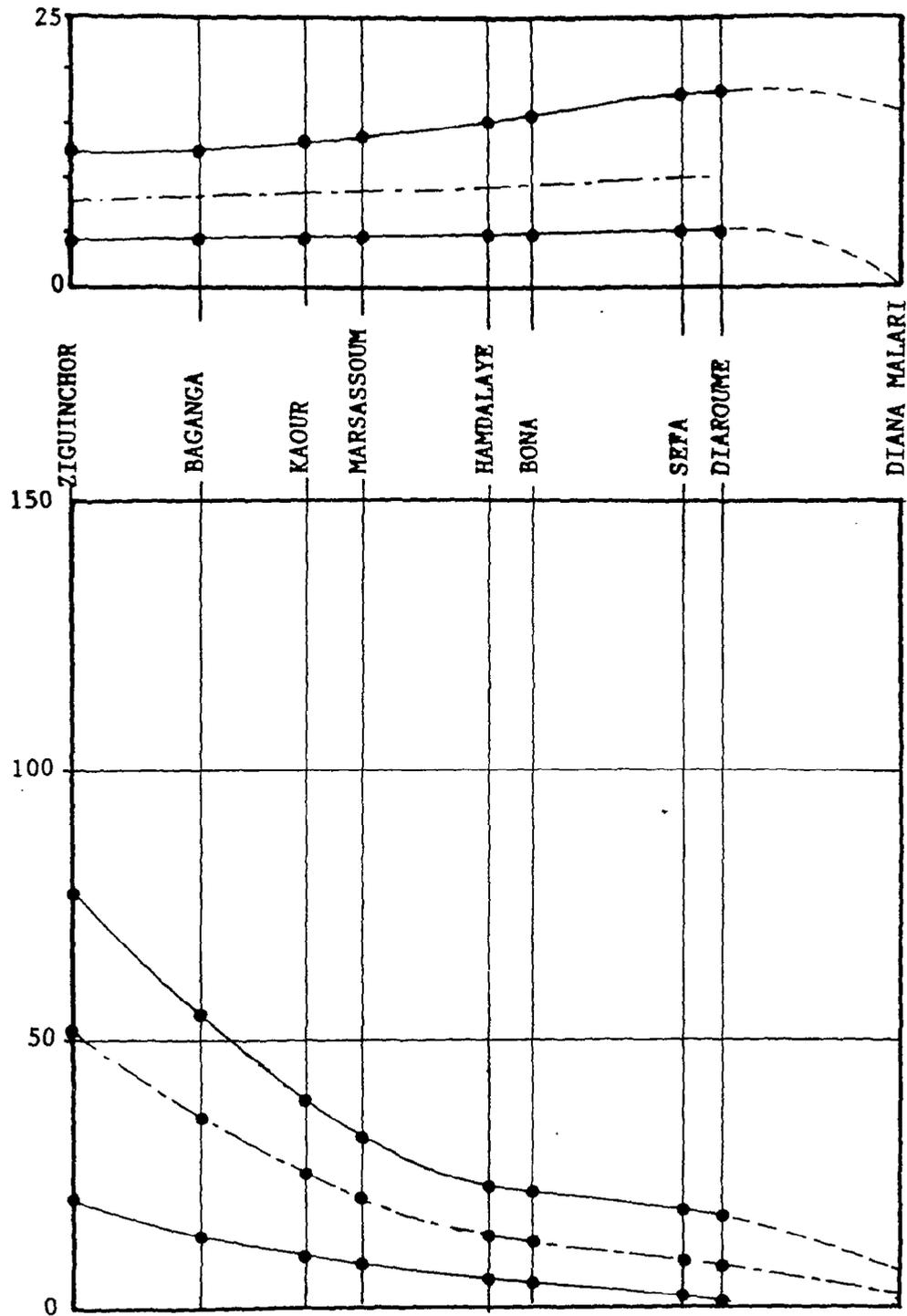


fig.I.27-Marée semi-mensuelle.(Brunet-Moret,1970)

La plus forte par moi des deux marées semi-mensuelles.



(1cm = 10 km)

fig.I.28- Amplitudes, minimales, maximales et moyennes de la marée en Casamance. (Brunet-Moret, 1970)

I.2.5 Traitement des données

L'analyse harmonique aura pour but de calculer les paramètres de l'expression (I.8), associés à chaque vitesse angulaire q sachant qu'on dispose d'une part d'une série d'observations continues sur une période T et, d'autre part que l'on connaît les caractéristiques astronomiques (w_i, u_0, V, f) des composantes présélectionnées. Ainsi l'analyse d'un nombre n d'ondes conduit à la recherche de $2n+1$ inconnues. La résolution du système matriciel qui en découle nécessite au moins $2n+1$ observations.

Un des problèmes préliminaires qui apparaît est le choix des composantes à prendre en compte. Ce choix, pour des périodes d'observation assez longues, est arbitraire car on ne peut savoir a priori, parmi les ondes choisies, celles qui sont susceptibles de prendre quelque importance. Par contre, la séparation des inconnues sur des périodes d'observation courtes se fait d'autant mieux que leurs coefficients dans les équations sont différents. Pour les ondes de vitesses angulaires voisines, l'analyse d'une courte période fournit leur combinaison pendant la période considérée. Afin d'annuler les résidus qui apparaissent, la règle communément admise est d'avoir au moins:

$$2T \geq \frac{1}{\nu_1 - \nu_2} \quad \text{avec } \nu = 2\pi/q \quad (\text{I.9})$$

Cette condition exige, pour la séparation de deux ondes que l'une ait accompli au moins un tour complet par rapport à l'autre. Cette approche est d'autant plus réaliste que la somme des hauteurs correspond à une fermeture plus exacte du tour ou à un plus grand nombre de tours, ce qui diminue l'importance des résidus. Par exemple, si :

T_1 : durée d'un tour de l'onde 1

T_2 : durée d'un tour de l'onde 2

n : nombre de période à considérer

$$\implies nT_1 = (n+1)T_2 \quad (I.10)$$

$$\implies n = T_2 / (T_1 - T_2) = 360 \text{ h} / (q_2 - q_1) = 15 \text{ j} / (q_2 - q_1) \quad (I.11)$$

En conséquence:

1 jour suffit pour séparer l'onde diurne de l'onde semi-diurne,
 14.7 jours suffisent pour séparer les ondes S2 et M2,
 183 jours suffisent pour séparer les ondes S2 et K2.

L'analyse d'une courte période, par exemple 15 jours, ne donnera pas S2 mais $S2 + K2\cos\psi$, avec ψ le déphasage moyen de K2 par rapport à S2 durant ces 15 jours. Pour les 15 jours suivants, le déphasage a augmenté d'une quantité $\Delta\psi$, d'où l'on aura $S2 + K2\cos(\psi+\Delta\psi)$. La séparation n'est possible que si l'on connaît ψ et K2.

Il en résulte que la longueur des enregistrements constitue la contrainte principale de l'analyse harmonique et conditionne le choix des ondes à prendre en compte.

I.2.5.1 Analyse des observations de 1967 à 1970

Lorsqu'une étude est basée sur des observations comme c'est le cas de l'étude des marées, les composantes à choisir sont prises de façon à minimiser leur corrélation. Bien qu'on soit limité en cela par les données disponibles, la difficulté réside dans le fait qu'on n'est jamais sûr qu'il n'y a pas d'autres composantes susceptibles de prendre de l'importance. Ces composantes peuvent paraître, de prime abord, peu importantes ou difficilement mesurables; il est donc souhaitable d'introduire un terme correcteur qui représente l'effet de tous les termes qui ne figurent pas dans le traitement.

Dans un but de comparaison nous avons repris les données originale de la période 1968 à 1970. La durée d'observation traitée sur la Casamance est de 20 jours. Nous avons dépouillé les marégrammes de six stations de contrôle à pas horaire sur table Benson (ref. 6201) avec le logiciel HYDROM (Cochonneau, ORSTOM). Les ondes longues ne varieront pas

durant la période choisie, mais elles apparaissent sous forme d'un terme constant qui englobera à la fois le niveau d'équilibre de la station étudiée et les composantes de périodes assez longues. Ce terme est conventionnellement appelé terme luni-solaire.

Pour une période de 20 jours, la séparation ne peut se faire que pour les ondes dont les vitesses angulaires diffèrent de plus d'un degré. Les ondes susceptibles d'être identifiées sont: O1(13.94), K1(15.04), M2(28.98), S2(30.00), M4(57.97) et MS4(58.98).

I.2.5.2 Caractéristiques des ondes choisies

I.2.5.2.1 Ondes semi-diurnes

M2: Lunaire moyenne

C'est la composante la plus importante de son groupe. Elle résulte du mouvement d'une lune fictive qui décrit une orbite circulaire, située dans le plan de l'équateur céleste. L'onde qui en résulte se caractérise par une allure sinusoïdale, présentant 2 maximums et 2 minimums par jour lunaire (24h50). Les pleines mers suivent le passage de la lune fictive au méridien du lieu d'étude. Le facteur nodal f fait varier l'amplitude de 4% au cours d'une période de 18 ans $\frac{2}{3}$, avec un retard de phase de 50 mn d'un jour à un autre.

S2: Solaire moyenne

Elle résulte du mouvement du soleil qui décrit une orbite circulaire dans l'équateur céleste. Le facteur nodal est égal à 1, d'où son allure constante. Les pleines mers et basses mers présentent 12 heures de décalage.

I.2.5.2.2 Ondes diurnes

K1: onde déclinatoire luni-solaire ou diurne combinée

Elle résulte de la combinaison d'une onde lunaire et d'une onde solaire. Sa période est de 23h03mn. Elle présente une pleine mer et une basse mer, dont l'heure avance chaque jour de 3mn56s. L'amplitude varie de $\pm 12\%$ chaque 18 ans $2/3$.

O1: onde diurne principale

Sa période est de 25h50, mais les heures de pleines mers et basses mers retardent d'un jour à l'autre de 1h50mn. La variation de son amplitude peut atteindre 20% par rapport à la moyenne.

Les deux ondes O1 et K1 sont en phase lors du passage de la lune par les tropiques et en opposition de phase quand la lune passe par l'équateur.

I.2.5.2.3 Ondes quart-diurnes

Les ondes quart-diurne lunaire M4 (2M2) et quart-diurne luni-solaire MS4 (M2+S2) ne sont pas d'origine astronomique. Elles sont dues à la décomposition que subissent les ondes semi-diurnes M2 et S2 dans les milieux peu-profonds. Ces ondes présentent 4 pleines mers et 4 basses mers, avec des périodes de 24h50 pour M4 et 24h25 pour MS4. Leur rôle est de modifier l'allure de l'onde semi-diurne, puisqu'elles se trouvent périodiquement en phase ou en opposition avec les composantes principales dont elles dérivent. Ceci conduit à des modifications permanentes des heures de pleines mers et de basses mers de l'onde M2, il en résulte en conséquence une inégalité entre la montée des eaux et la descente. Bien que ces ondes conservent dans la majorité des cas leur caractère d'infériorité par rapport aux ondes semi-diurnes, leur amplitude dépend de l'épaisseur de la couche liquide dans laquelle l'onde de marée se propage.

I.2.5.3 Méthode de résolution

L'élévation approchée h , résultante des diverses composantes retenues, chacune ayant ses caractéristiques propres (période, phase, amplitude) est donnée par:

$$h = H_0 + \sum (f_i \cdot H_i \cdot \cos(q_i \cdot t - \beta_i)) \quad (I.12)$$

H_0 : niveau moyen des eaux

H_i : amplitude moyenne

f_i : facteur nodal

q_i : vitesse angulaire

β_i : phase

Le processus étant linéaire, une régression multiple a été appliquée afin de résoudre le système surabondant qui découle de (I.12). Dans cette méthode les coefficients sont choisis de façon à minimiser la somme des carrés des écarts entre les valeurs observées et calculées. La résolution du système matriciel qui en découle a conduit aux résultats suivant:

s : longitude moyenne de la lune = 0.549° par heure

h : longitude moyenne du soleil = 0.041° par heure

μ : longitude moyenne du périgée moyen = 0.005° par heure

a : retard de phase ou situation de l'onde

T : temps moyen par heure = 15° par heure

N : longitude

$$i = 5^\circ ; w = 23^\circ 27'$$

$$\epsilon = i \cot g w \sin N = 3.204$$

$$\nu = (i \sin N) / \sin w = 3.488$$

Tableau I.3-Characteristiques des ondes.

	I	V _i	I	U _i	I	Q _i	I
I 01	I	T-2S+H+90	I	2ε-ν	I	13°943	I
I K1	I	T+H-90	I	-ν	I	15°041	I
I M2	I	2T-2S+2H	I	2(ε-ν)	I	28°984	I
I S2	I	2T	I	0	I	30°000	I
I M4	I	4(T-S+H)	I	4(ε-ν)	I	57°968	I
I MS4	I	4T-2S+2H	I	2(ε-ν)	I	58°984	I

$$\beta = \text{tg}^{-1}(\text{Sin}Y_i/\text{Cos}Y_i) + V_i + U_i$$

$$\alpha = \text{tg}^{-1}(\text{Sin}Y_i/\text{Cos}Y_i)$$

$$\eta = \text{Cos}Y_i/\text{Cos}(\alpha)$$

Tableau I.4-Amplitudes des ondes(1968).

1968	I	h ₀	I	01	I	K1	I	M2	I	S2	I	MS4	I	M4	I	C _{corr}
Ziguinchor	I	70	I	4.80	I	7.79	I	22.82	I	5.47	I	2.31	I	1.24	I	0.96
Baganga	I	61	I	1.02	I	2.83	I	16.88	I	2.85	I	0.74	I	2.26	I	0.99
Kaour	I	32	I	0.60	I	1.80	I	10.67	I	1.83	I	0.17	I	0.70	I	0.94
Hamdalaye	I	44	I	0.65	I	1.05	I	4.92	I	0.82	I	0.05	I	0.60	I	0.75
Sefa	I	112	I	0.87	I	0.48	I	4.05	I	0.45	I	0.21	I	0.16	I	0.69
Diana Malari	I	65	I	0.74	I	0.83	I	1.93	I	0.72	I	0.06	I	0.34	I	0.58

Tableau I.5-Phases (degré) des ondes(1968).

Stations	I	01	I	K1	I	M2	I	S2	I	MS4	I	M4	I
Ziguinchor	α	45°	I	-42°	I	-41°	I	40°	I	36°	I	42°	I
	β	152°	I	-120°	I	-12°	I	70°	I	94°	I	99°	I
Baganga	α	-36°	I	-42°	I	59°	I	-47°	I	57°	I	-46°	I
	β	70°	I	-120°	I	88°	I	-17°	I	116°	I	9°	I
Kaour	α	-89°	I	44°	I	68°	I	-60°	I	-10°	I	3°	I
	β	17°	I	-33°	I	97°	I	-30°	I	47°	I	60°	I
Hamdalaye	α	-52°	I	76°	I	10°	I	59°	I	-84°	I	32°	I
	β	54°	I	-1°	I	38°	I	89°	I	-25°	I	89°	I
Sefa	α	87°	I	-27°	I	34°	I	84°	I	80°	I	-66°	I
	β	194°	I	-106°	I	62°	I	114°	I	139°	I	-10°	I
Diana Malari	α	73°	I	-55°	I	-70°	I	-14°	I	-3°	I	-55°	I
	β	180°	I	-133°	I	-42°	I	15°	I	54°	I	1°	I

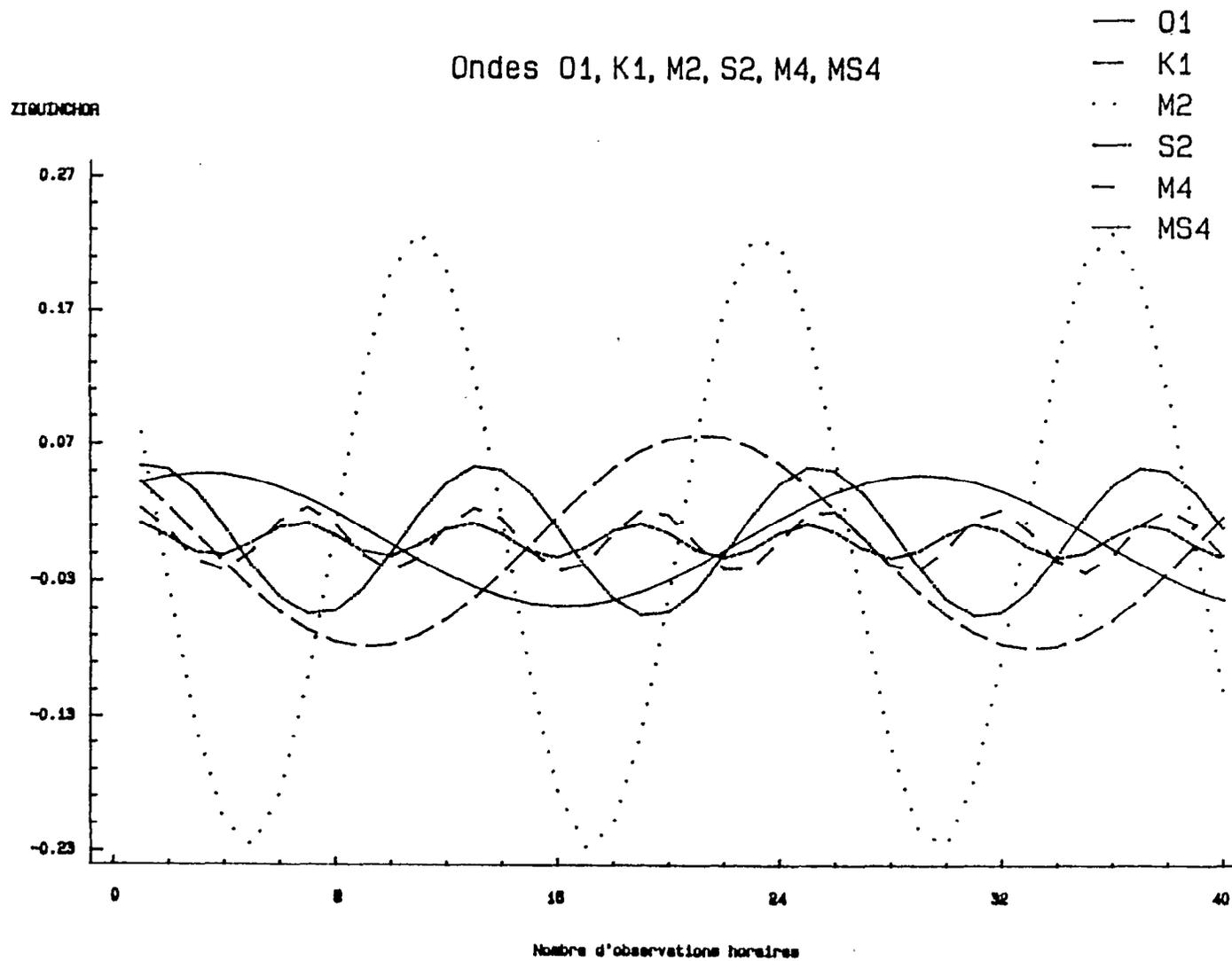


fig.I.29- Représentation des ondes diurnes, semi-diurnes et quart-diurnes à la station de Ziguinchor.(1968)

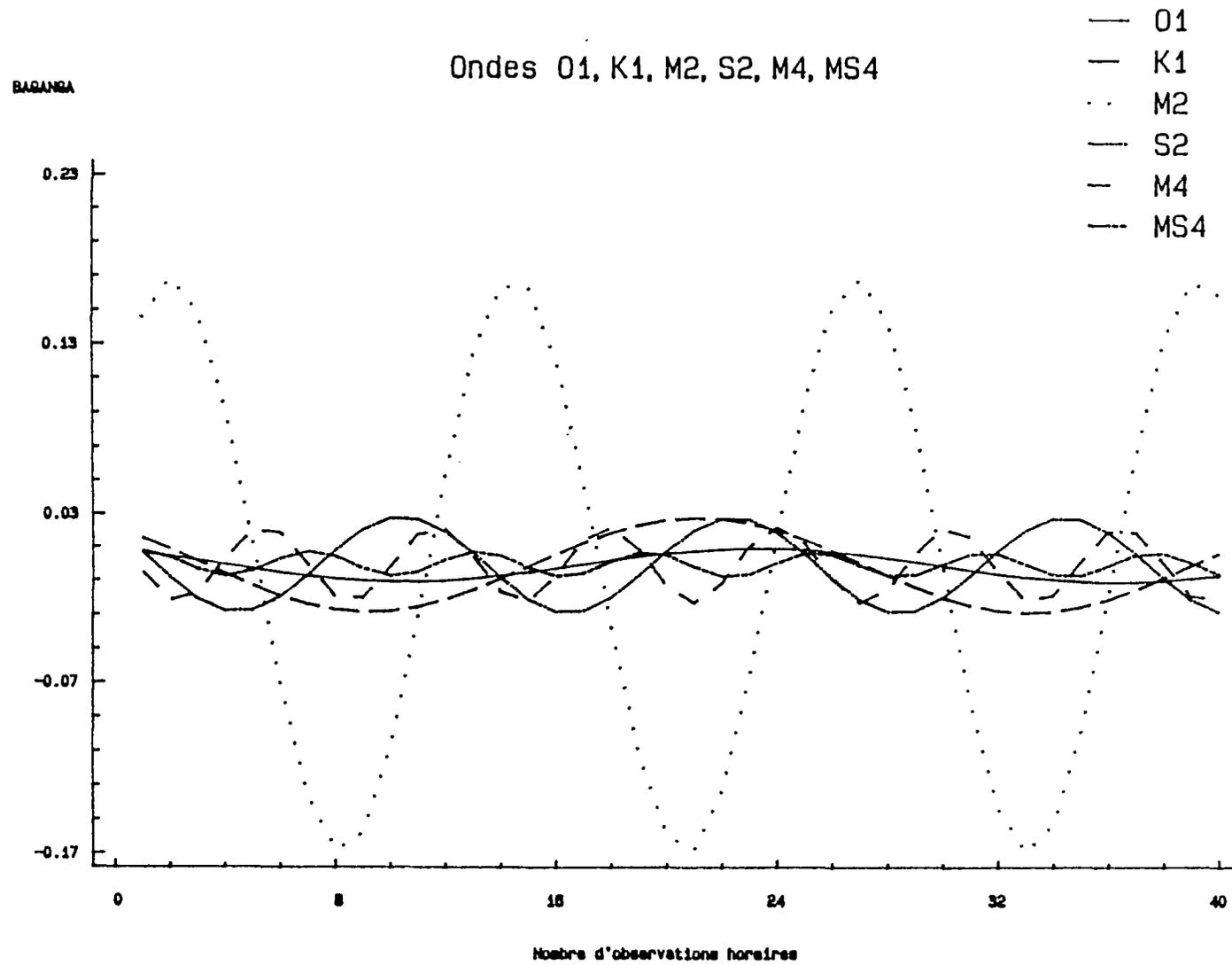


fig.I.30- Représentation des ondes diurnes, semi-diurnes, quart-diurnes à la station de Banganga. (1968)

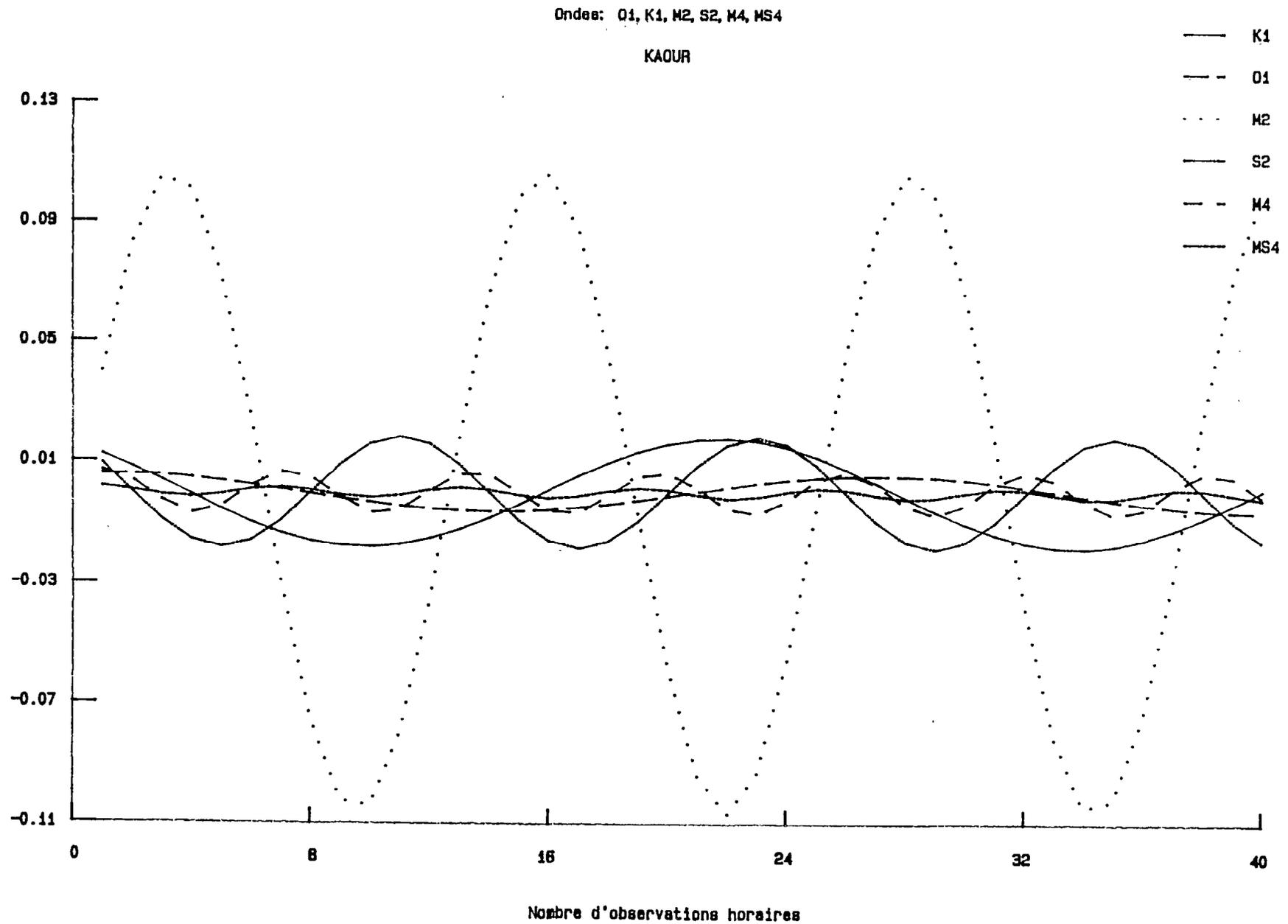
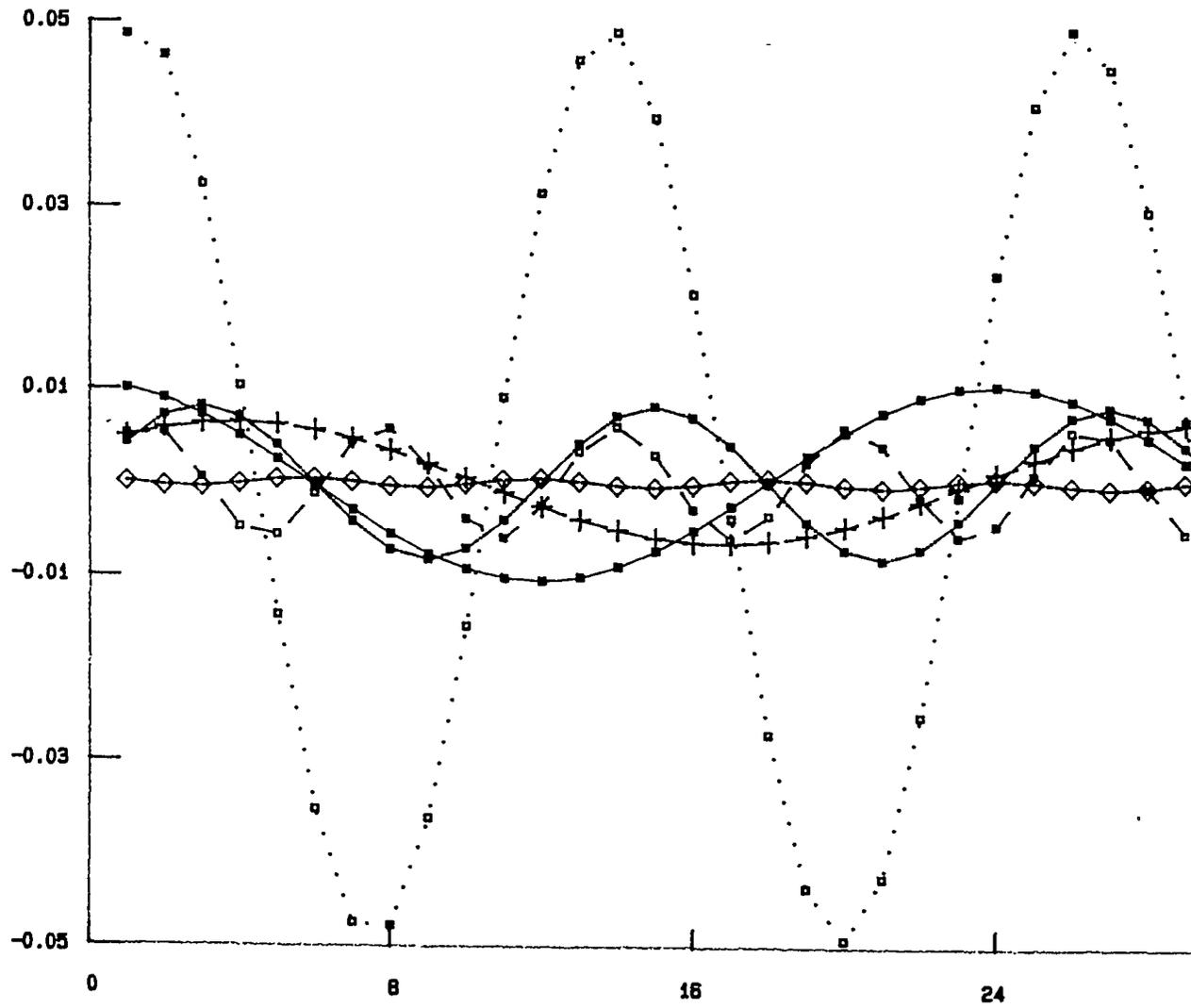


fig.I.31-Représentation des ondes diurnes, semi-diurnes et quart-diurnes à la station de Kaour.(1968)

Ondes: K1, O1, M2, S2, M4, MS4

HAMDALAYE



Nombre d'observations horaires

fig.I.32- Représentation des ondes diurnes, semi-diurnes et quart-d station d'Hamdalaye.(1968)

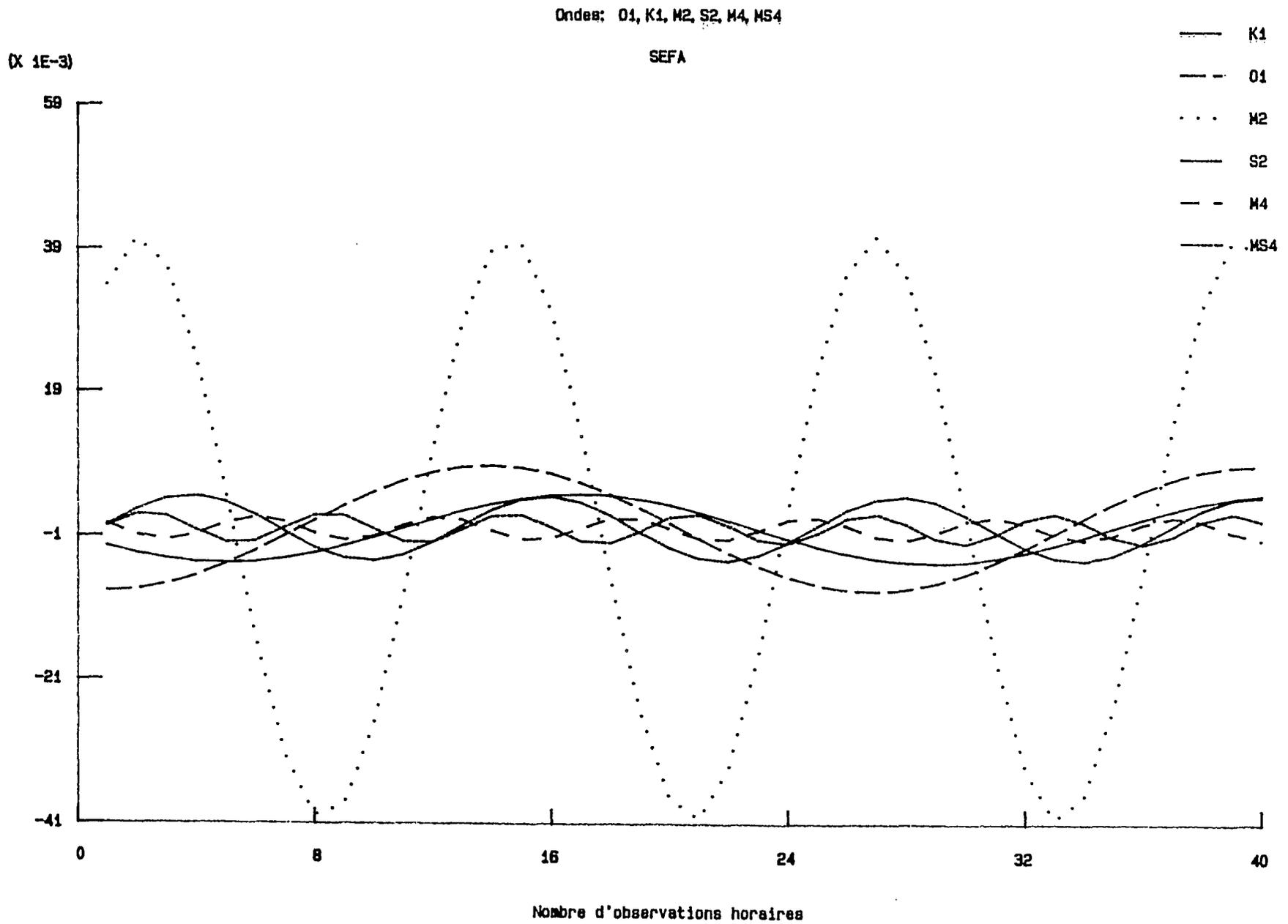


fig.I.33- Représentation des ondes diurnes, semi-diurnes et quart-diurnes à la station de Séfa.(1968)

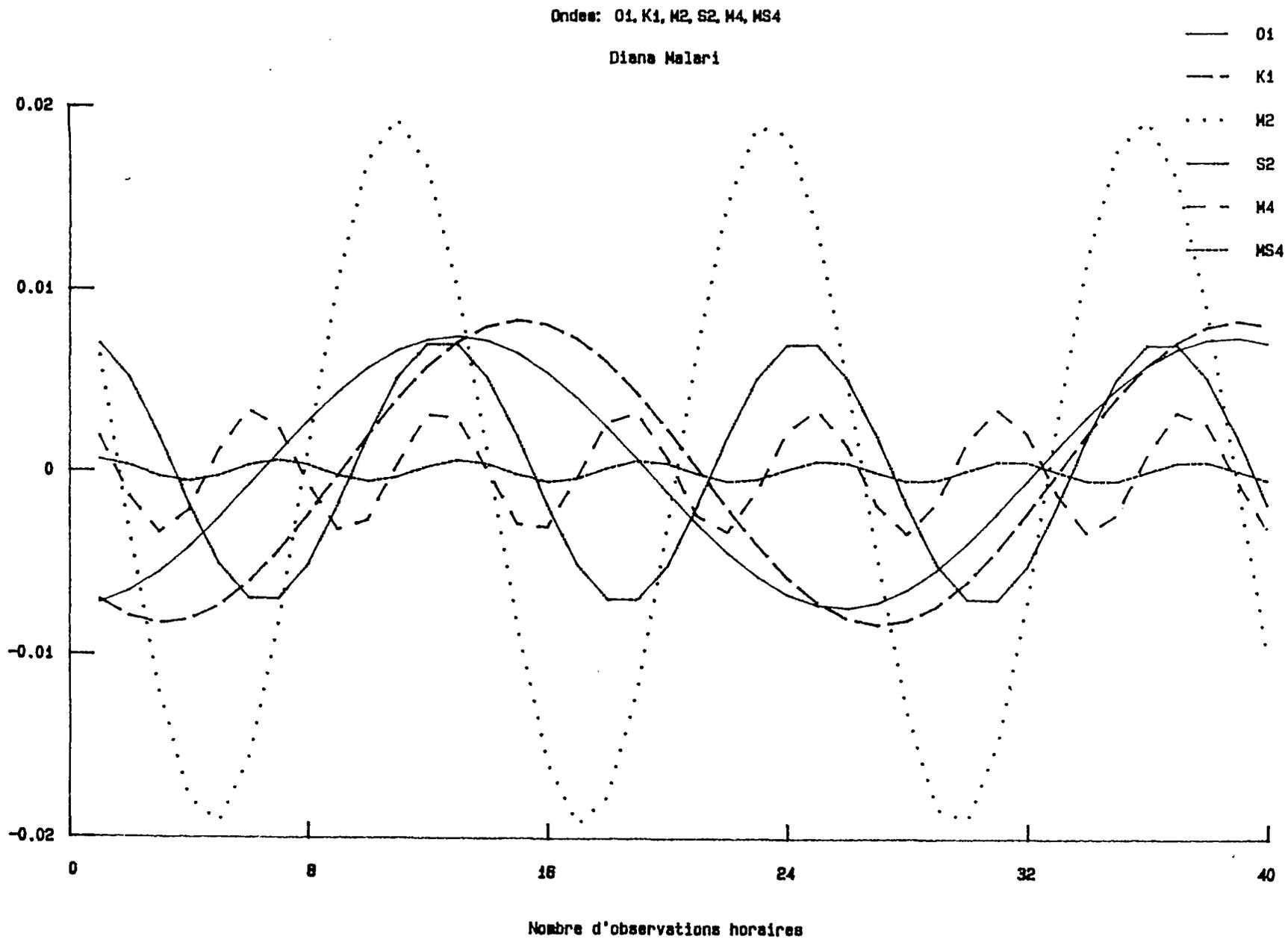


fig.I.34-Représentation des ondes diurnes,semi-diurnes et quart-diurnes à la station de Diana Malari.(1968)

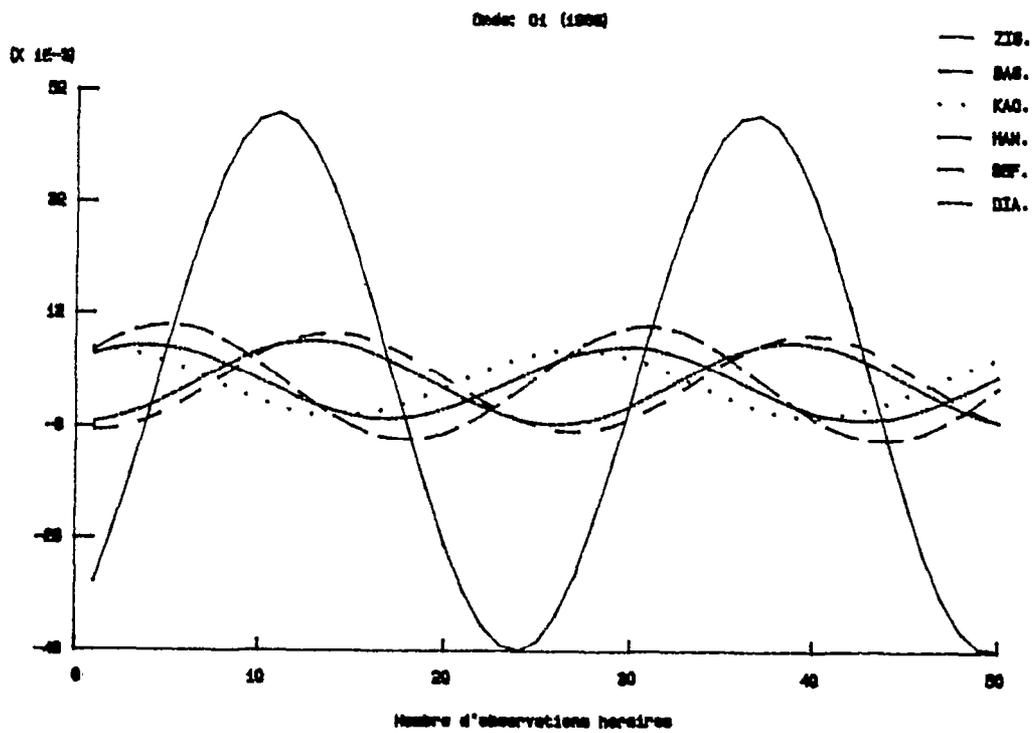


fig.I.35- Représentation de la composante diurne (O1) à toutes les stations de contrôle.(1968)

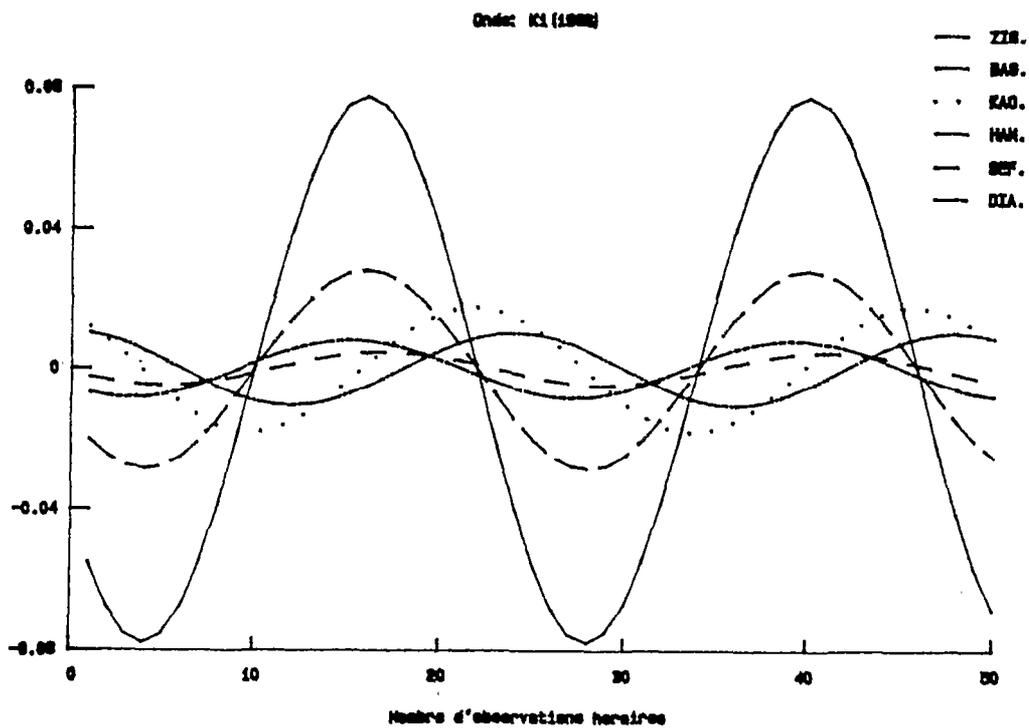


fig.I.36- Représentation de la composante diurne (K1) à toutes les stations de contrôle. (1968)

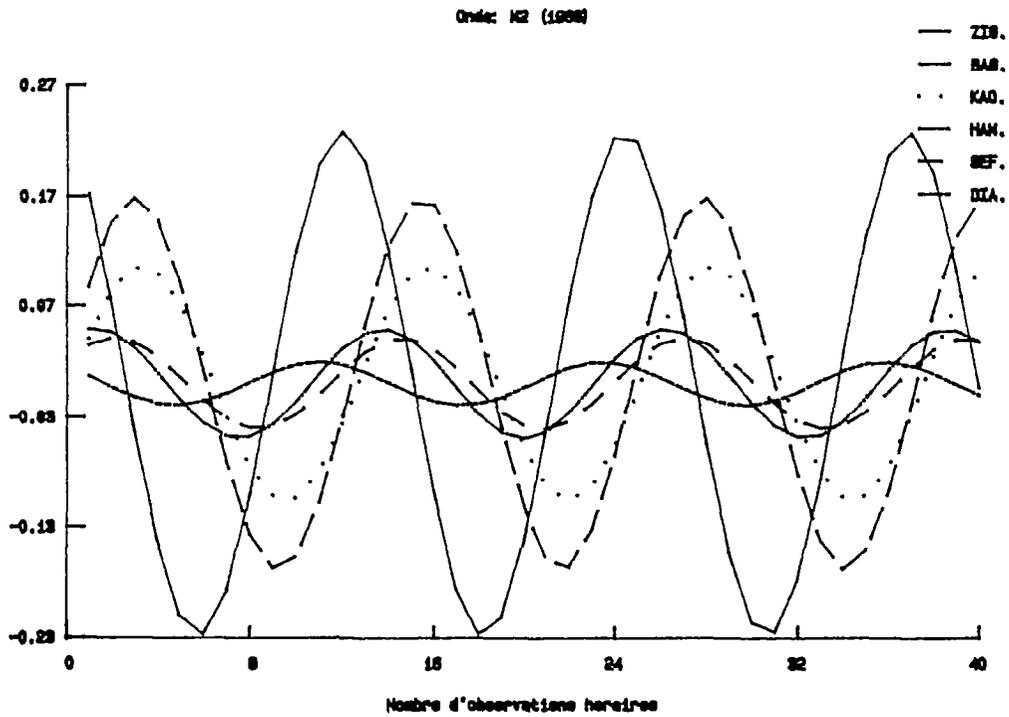


fig.I.37- Représentation de la composante semi-diurne (M2) à toutes les stations de contrôle. (1968)

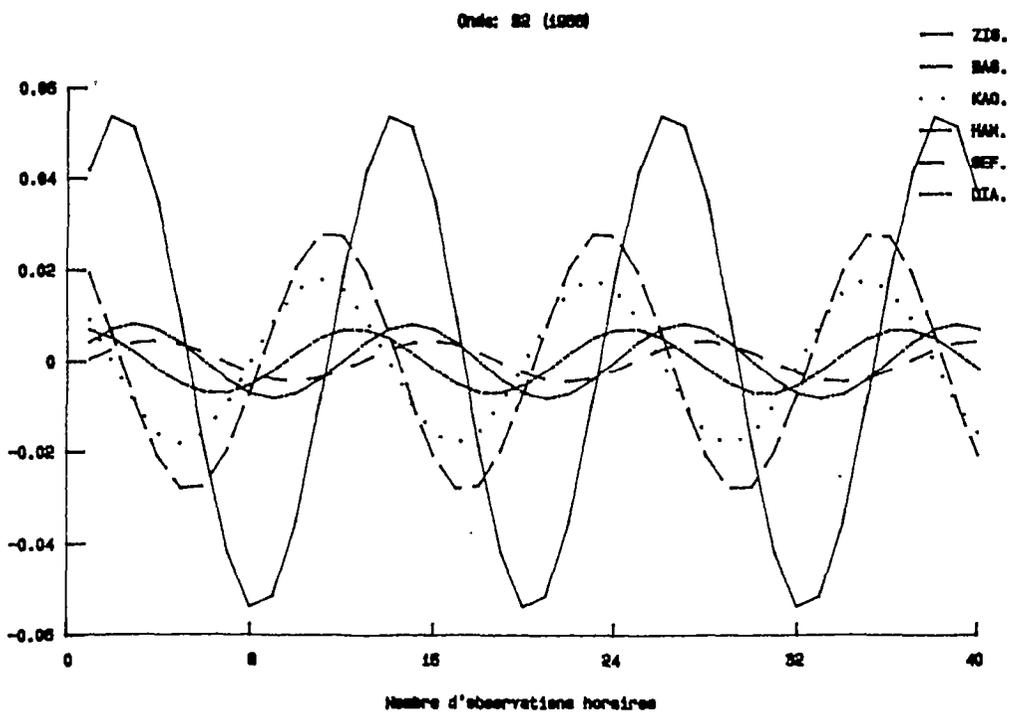


fig.I.38- Représentation de la composante semi-diurne (S2) à toutes les stations de contrôle. (1968)

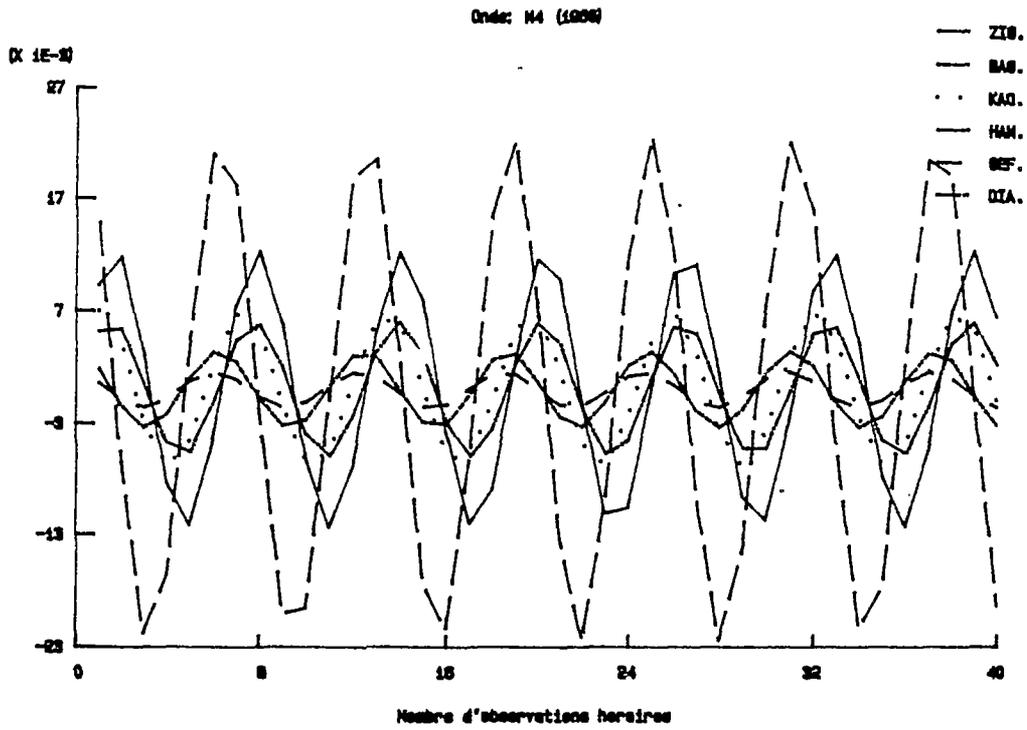


fig.I.39-Représentation de la composante quart-diurne (M4) à toutes les stations de contrôle. (1968)

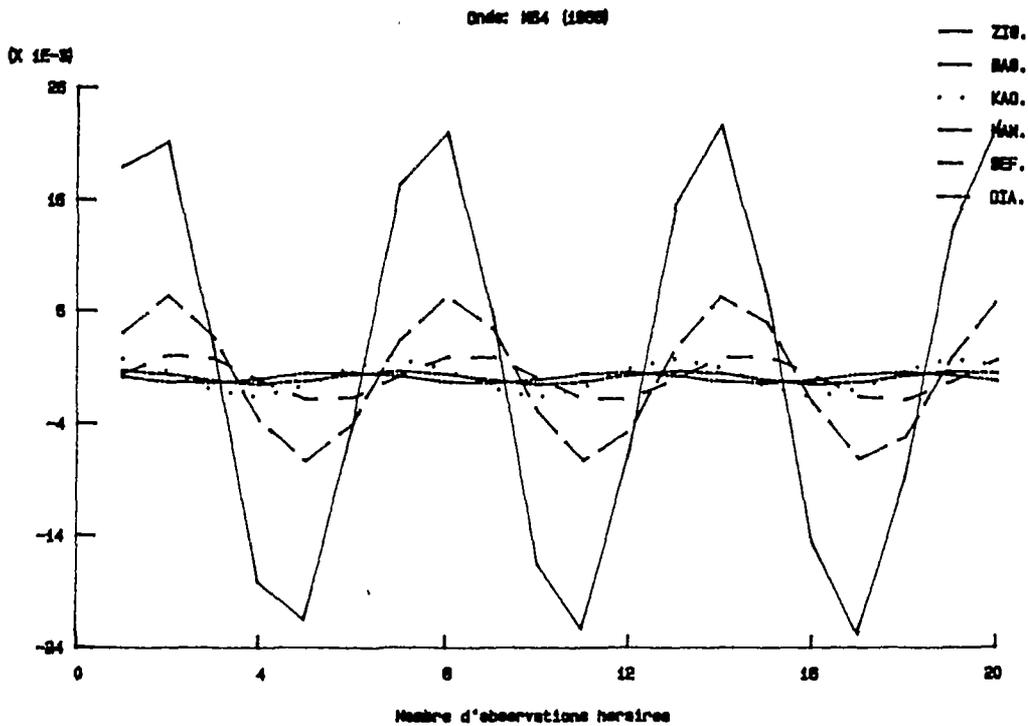


fig.I.40-Représentation de la composante quart-diurne (MS4) à toutes les stations de contrôle. (1968)

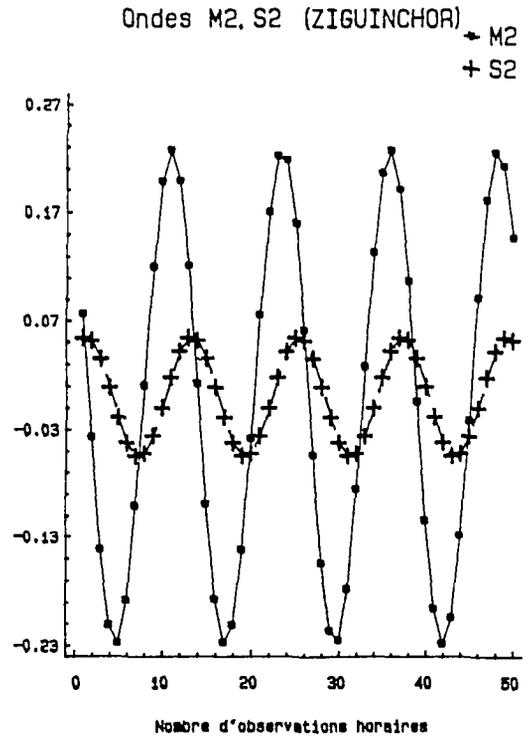
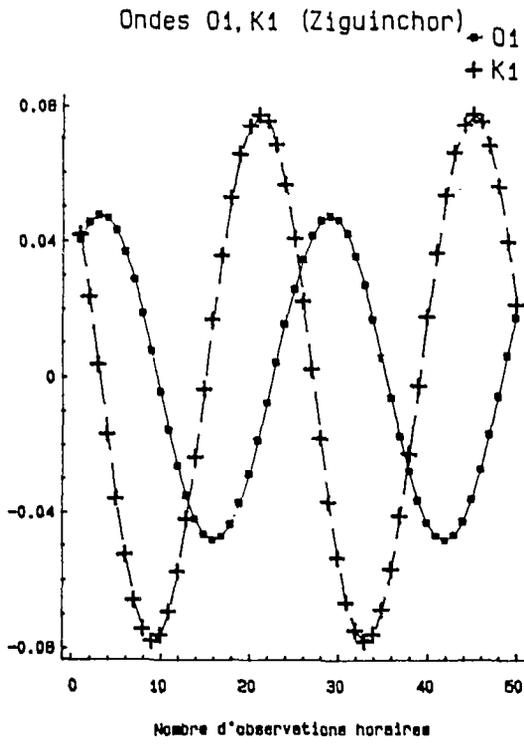


fig.I.41- Représentation des composantes semi-diurnes et diurnes à la station de Ziguinchor. (1968)

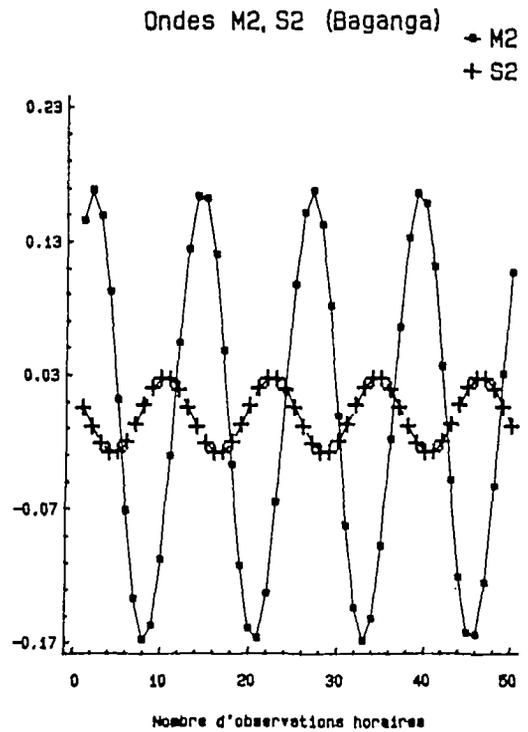
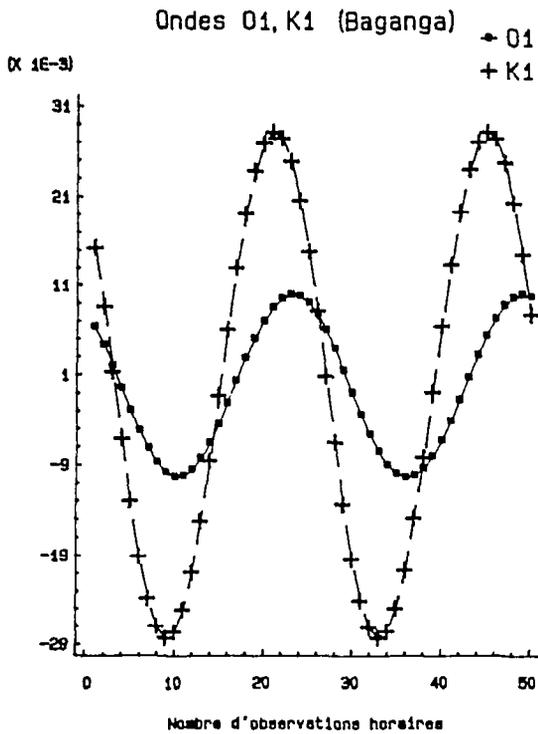


fig.I.42- Représentation des composantes semi-diurnes et diurnes à la station de Banganga. (1968)

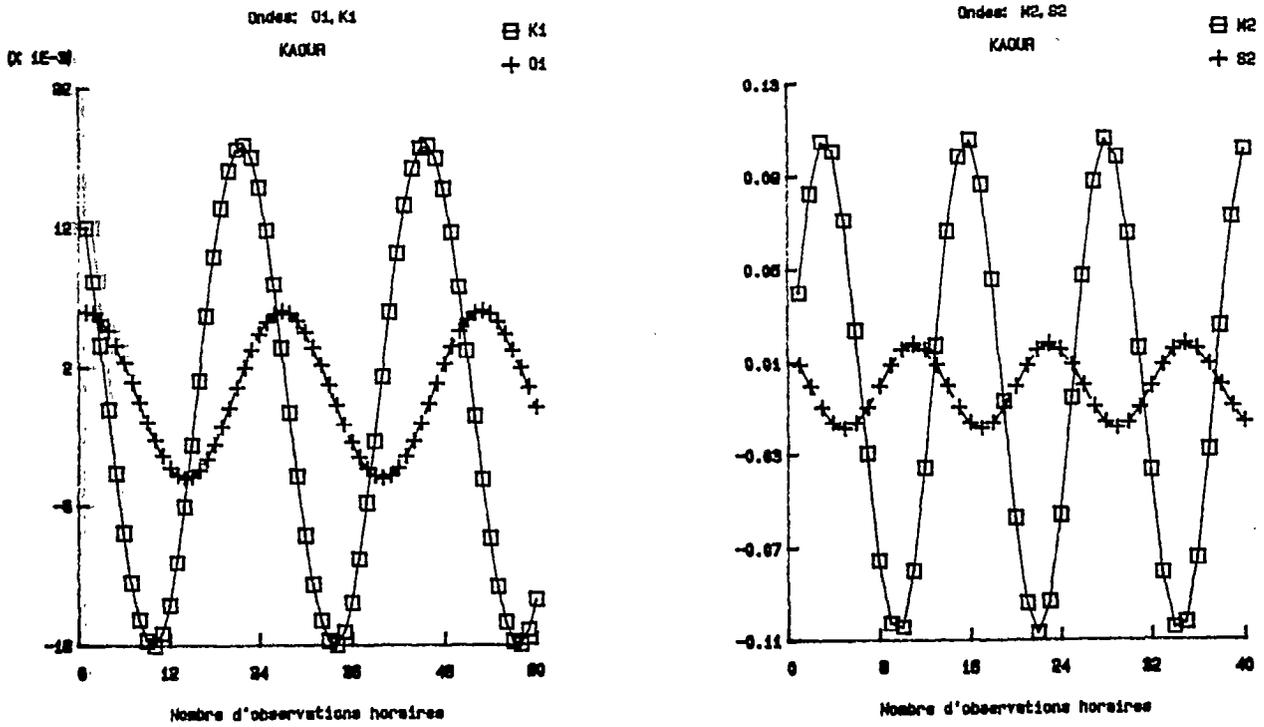


fig.I.43-Représentation des composantes diurnes et semi-diurnes à la station de Kaour. (1968)

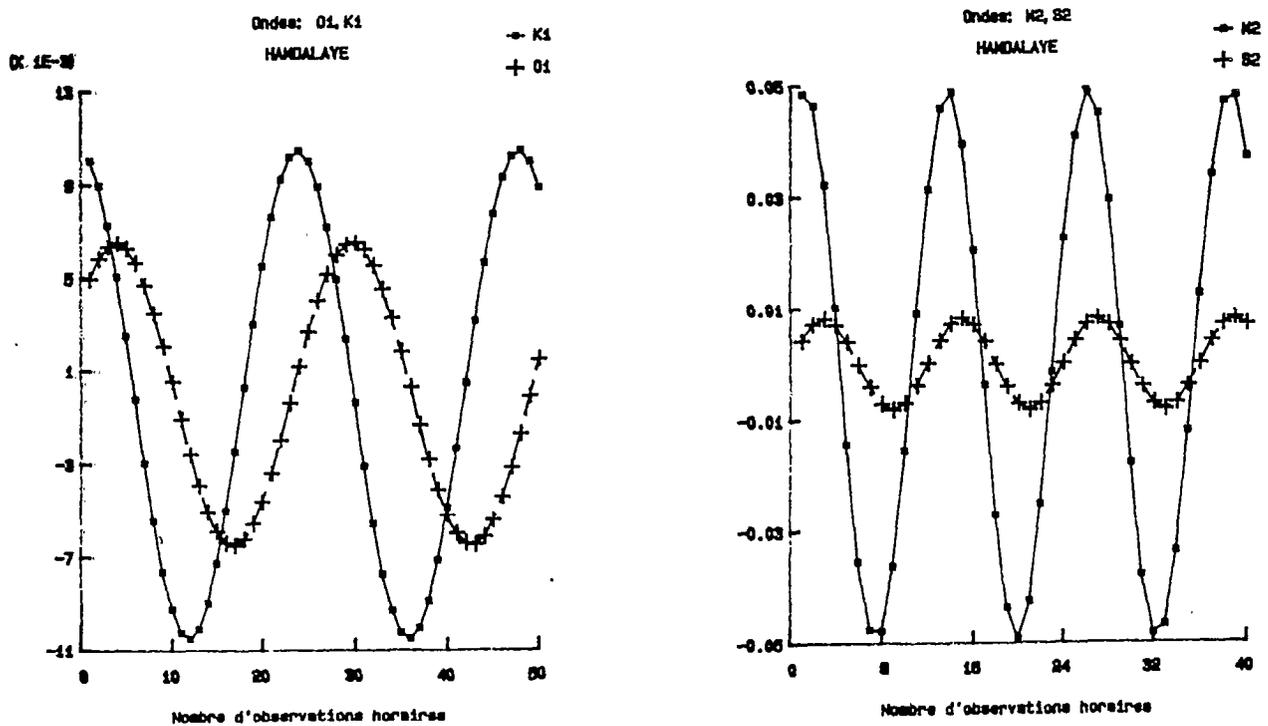


fig.I.44-Représentation des composantes diurnes et semi-diurnes à la station d'Hamdalaye. (1968)

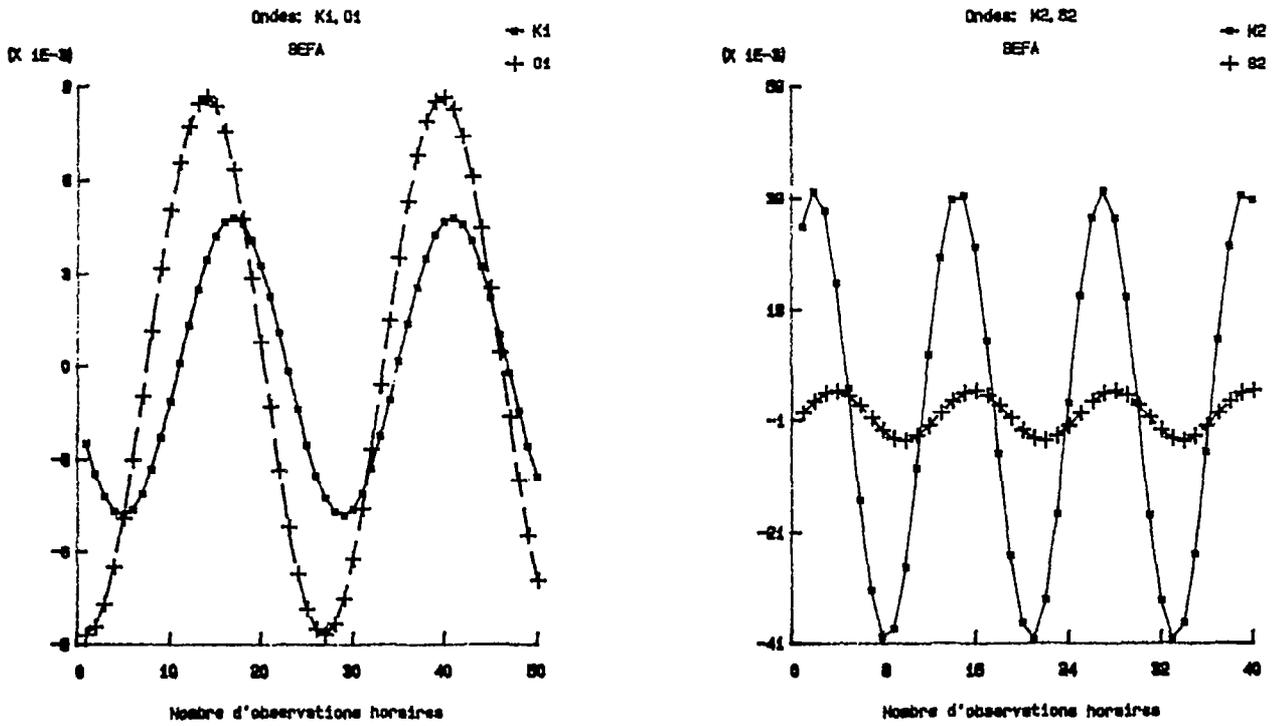


fig.I.45- Représentation des composantes diurnes et semi-diurnes à la station de Séfa. (1968)

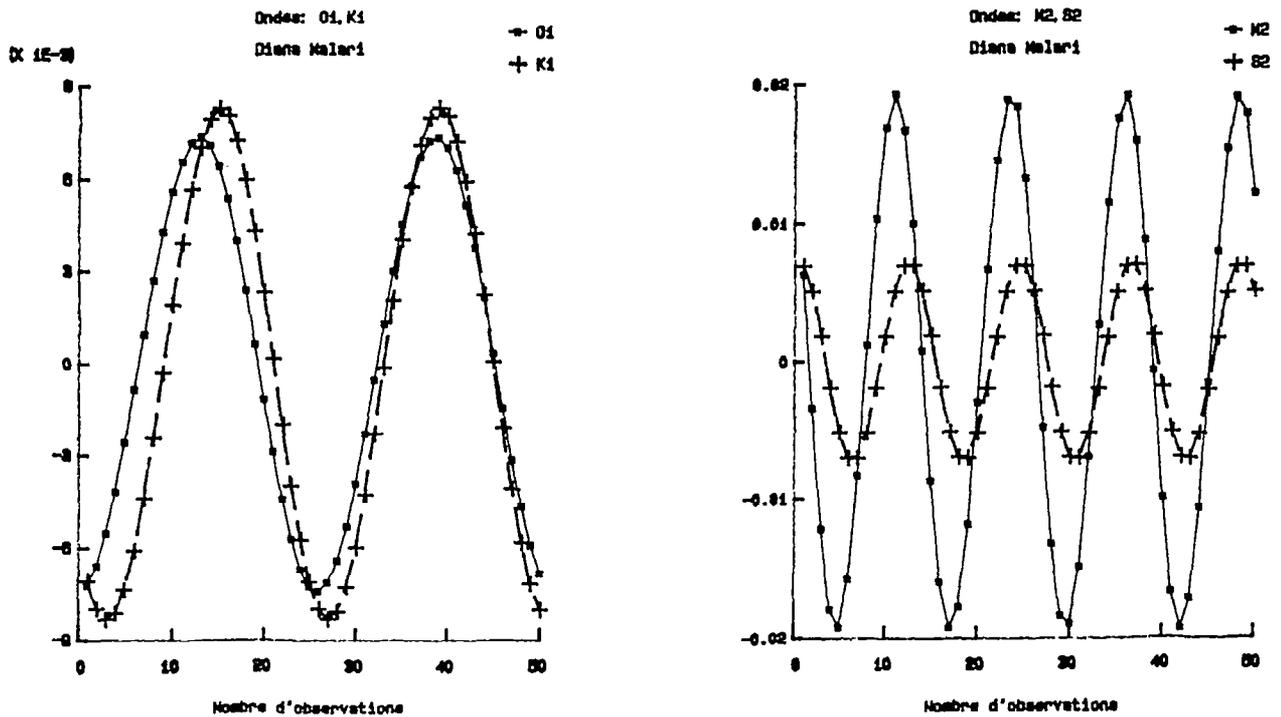


fig.I.46- Représentation des composantes diurnes et semi-diurnes à la station de Diana Malari. (1968)

I.2.5.4 Analyse des observations de 1986

Les modifications qui ont affecté l'estuaire de la Casamance durant les vingt dernières années ont conduit à des changements notables dans le comportement de l'onde de marée. Les données limnimétriques récoltées entre 1968 et 1970 nécessitaient d'être réactualisées afin d'en dégager les caractéristiques actuelles de la marée dans l'estuaire.

Dans ce but l'équipe de l'ORSTOM a installé six limnigraphes (janvier 1986) aux mêmes emplacements que ceux de Brunet-Moret (1970), aux stations Ziguinchor, Baganga, Goudomp, Hamdalaye, Sefa, et Diana-malari. Les appareils de mesure ont fonctionné en continu durant plusieurs semaines aux 4 premières stations, tandis que les deux dernières stations n'ont pas été exploitées faute de période continue d'enregistrement, condition nécessaire pour pouvoir réaliser une analyse harmonique.

L'analyse rapide des marégrammes montre des caractéristiques communes avec les observations de la période 1968-1970: amortissement après la confluence du Soungrougrou, marnage très faible, forte contribution des ondes de longue période dans la partie amont de l'estuaire. La grande différence est l'augmentation de l'amplitude de l'onde de marée sur toutes les stations traitées. Ce phénomène est peut être lié aux changements géomorphologiques subis par l'estuaire durant les dernières années (à partir de 1968). La disparition progressive et massive de la végétation dans la partie aval de l'estuaire et l'absence d'apport fluvial ont abouti à une diminution de l'atténuation de l'onde et ont facilité sa progression vers l'amont.

Le même méthode fut appliquée aux nouvelles données et a conduit aux résultats suivants:

$$\beta = \text{tg}^{-1}(\text{Sin}Y_i/\text{Cos}Y_i) + V_i + U_i$$

$$\alpha = \text{tg}^{-1}(\text{Sin}Y_i/\text{Cos}Y_i) \text{ (retard de phase ou situation géographique)}$$

$$h = \text{Cos}Y_i/\text{Cos}(\alpha)$$

Tableau I.6-Amplitudes des ondes (1986).

1986	h_0	O1	K1	M2	S2	MS4	M4	C_{corr}
Ziguinchor	261	3.42	5.09	37.05	8.64	2.61	5.69	0.98
Baganga	66	1.95	4.71	18.36	3.30	1.98	3.00	0.92
Goudomp	228	1.50	2.52	14.08	2.93	0.93	1.83	0.85
Hamdalaye	78	0.49	1.06	5.45	1.11	0.57	0.69	0.66

Tableau I.7-Phases (degré) des ondes (1986).

Station	O1	K1	M2	S2	MS4	M4	
Ziguinchor	α	321°	73°	16°	88°	321°	54°
	β	68°	354°	45°	118°	19°	110°
Baganga	α	354°	5°	354°	83°	326°	76°
	β	101°	283°	23°	113°	24°	133°
Goudomp	α	88°	347°	339°	15°	71°	48°
	β	195°	269°	7°	45°	129°	105°
Hamdalaye	α	306°	20°	334°	87°	345°	1°
	β	52°	302°	2°	117°	43°	57°

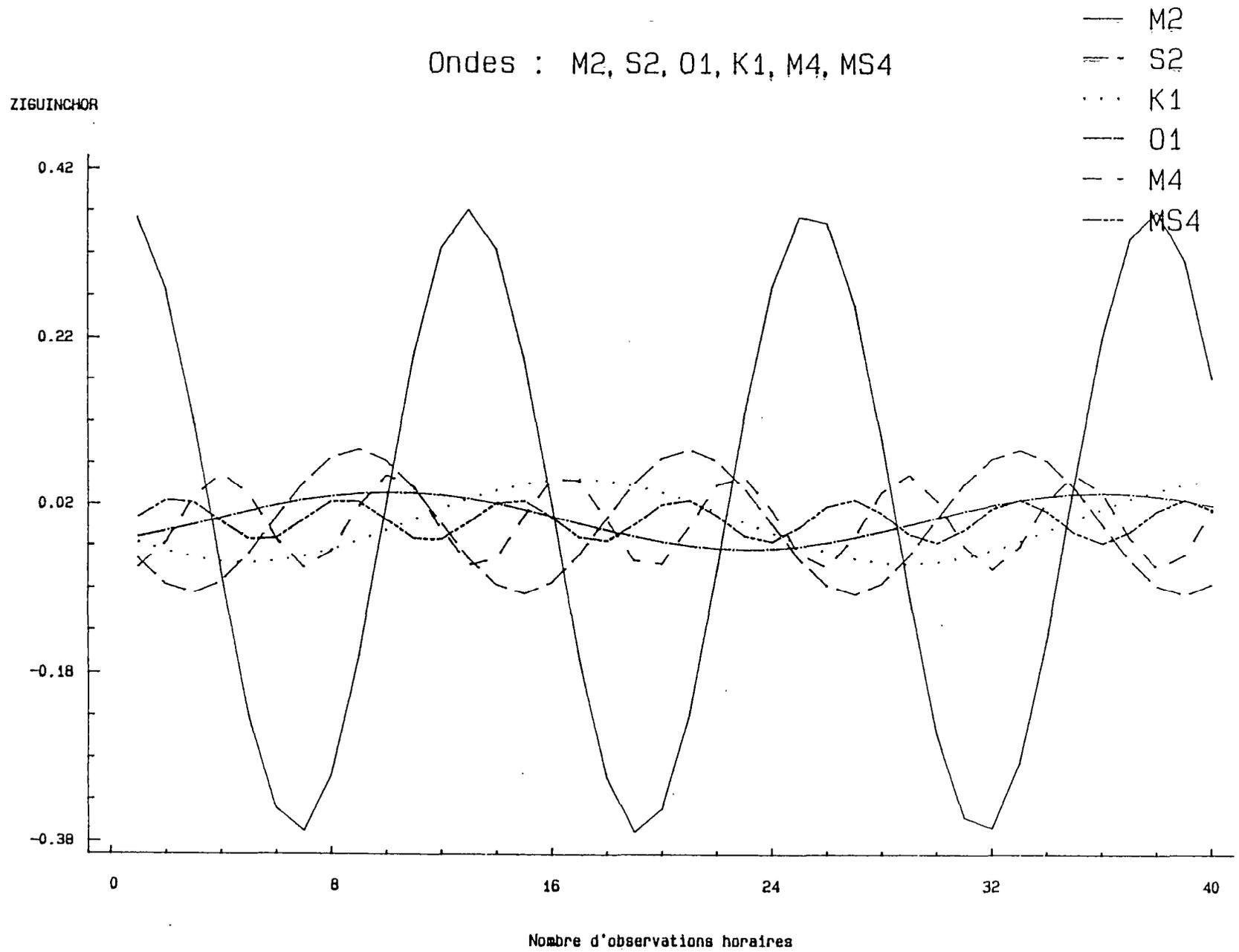


fig.I.47-Représentation des ondes diurnes, semi-diurnes et quart-diurnes à la station de Ziguinchor. (1986)

BAGANGA

Ondes : K1, O1, M2, S2, M4, MS4

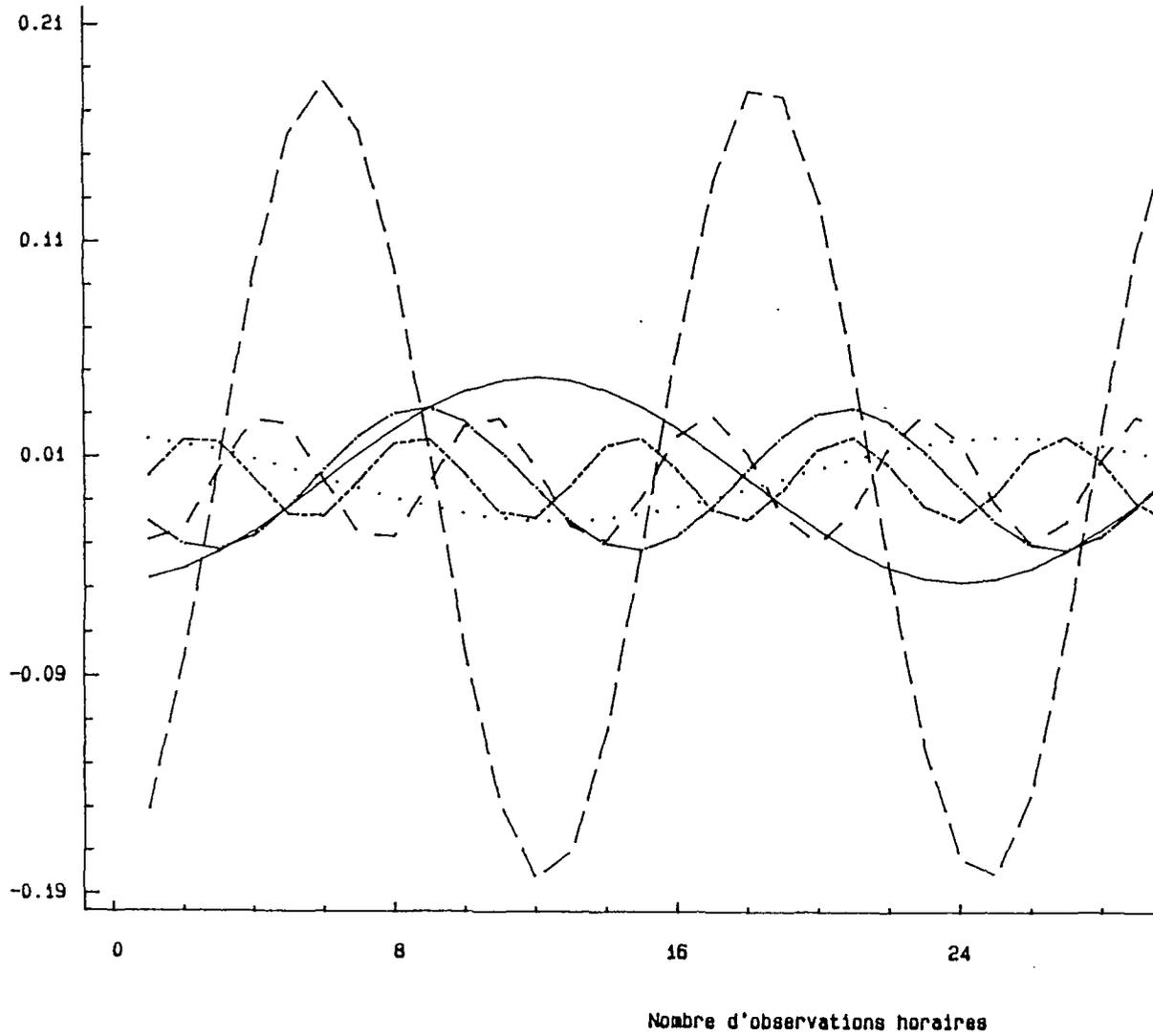


fig.I.48- Représentation des ondes diurnes, semi-diurnes et qt station de Banganga. (1986)

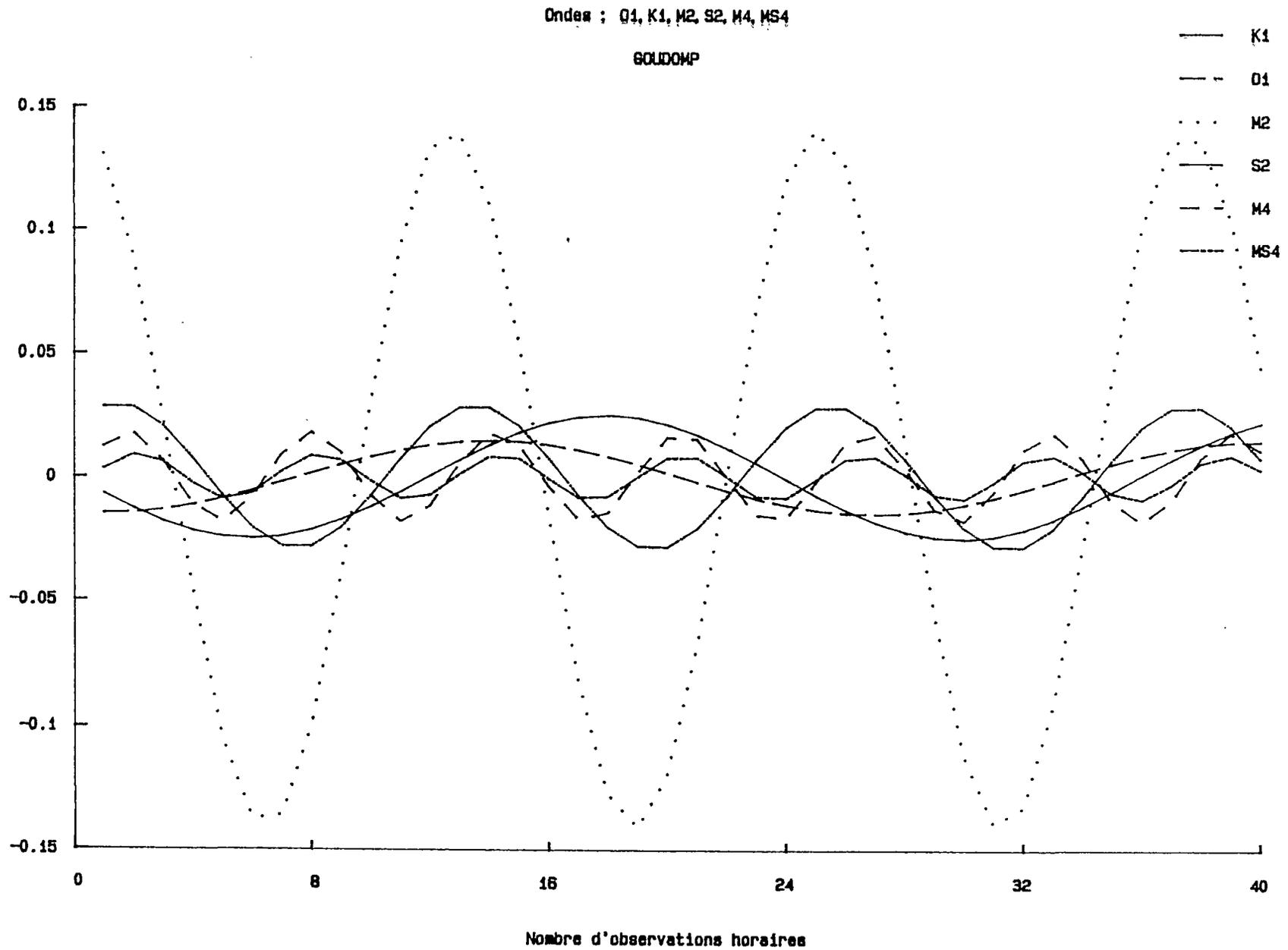


fig.I.49- Représentation des ondes diurnes, semi-diurnes et quart-diurnes à la station de Goudomp. (1986)

HAMDALAYE

Ondes : O1, K1, M2, S2, M4, MS4

- K1
- ... O1
- - - M2
- S2
- - - M4
- · - MS4

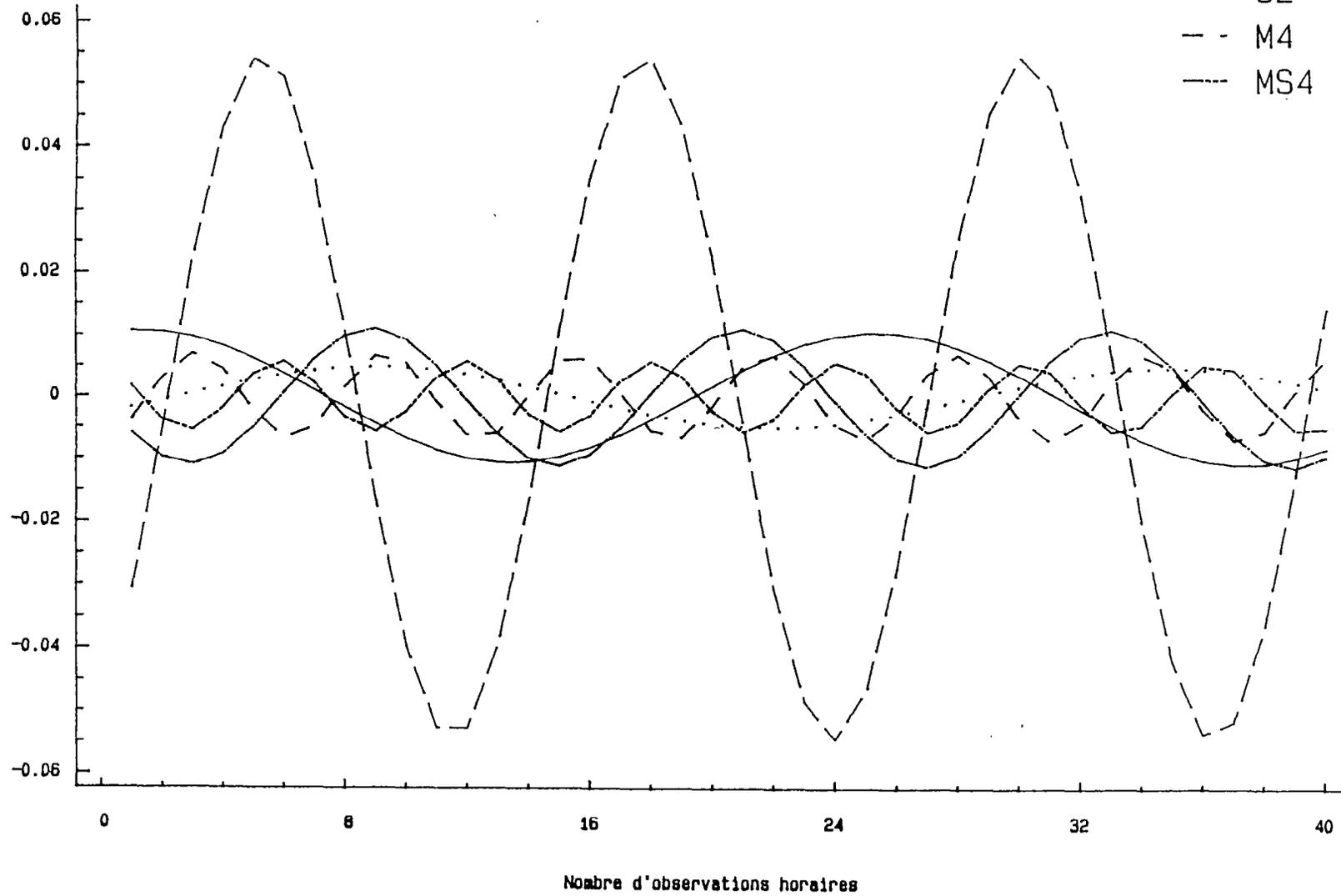


fig.I.50- Représentation des ondes diurnes, semi-diurnes et quart-diurnes à la station d'Hamdalaye. (1986)

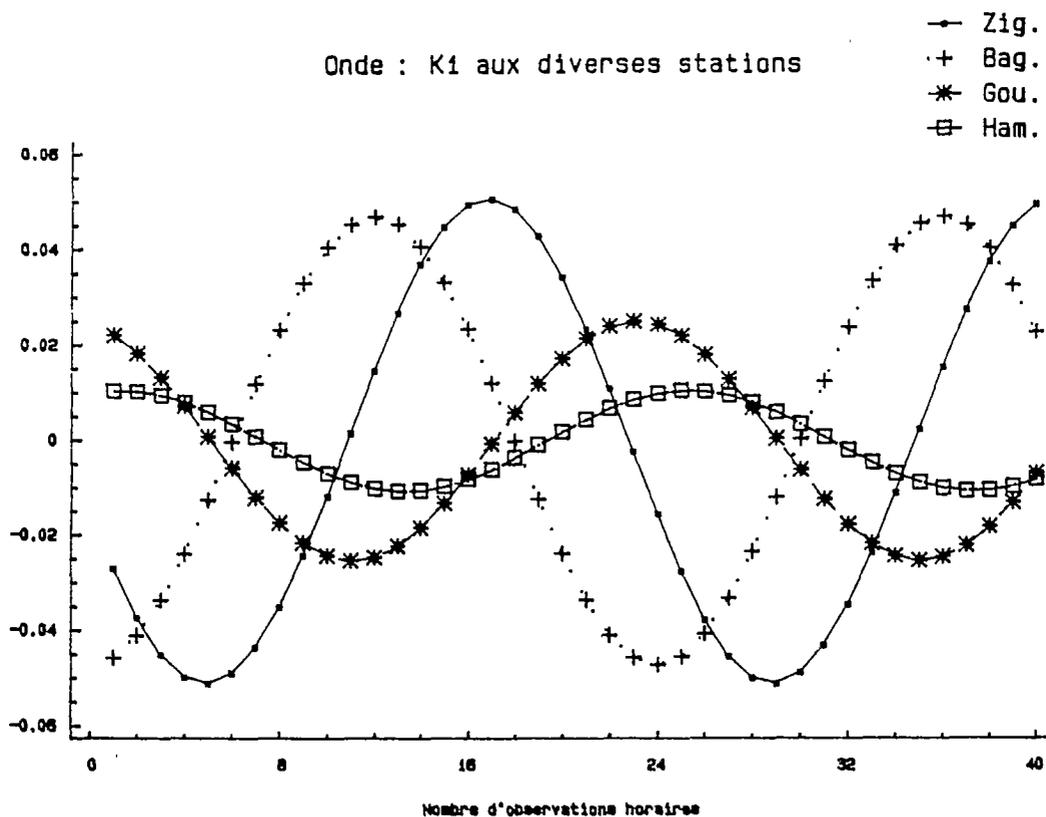


fig.I.51-Représentation de la composante diurne (K1) à toutes les stations de contrôle. (1986)

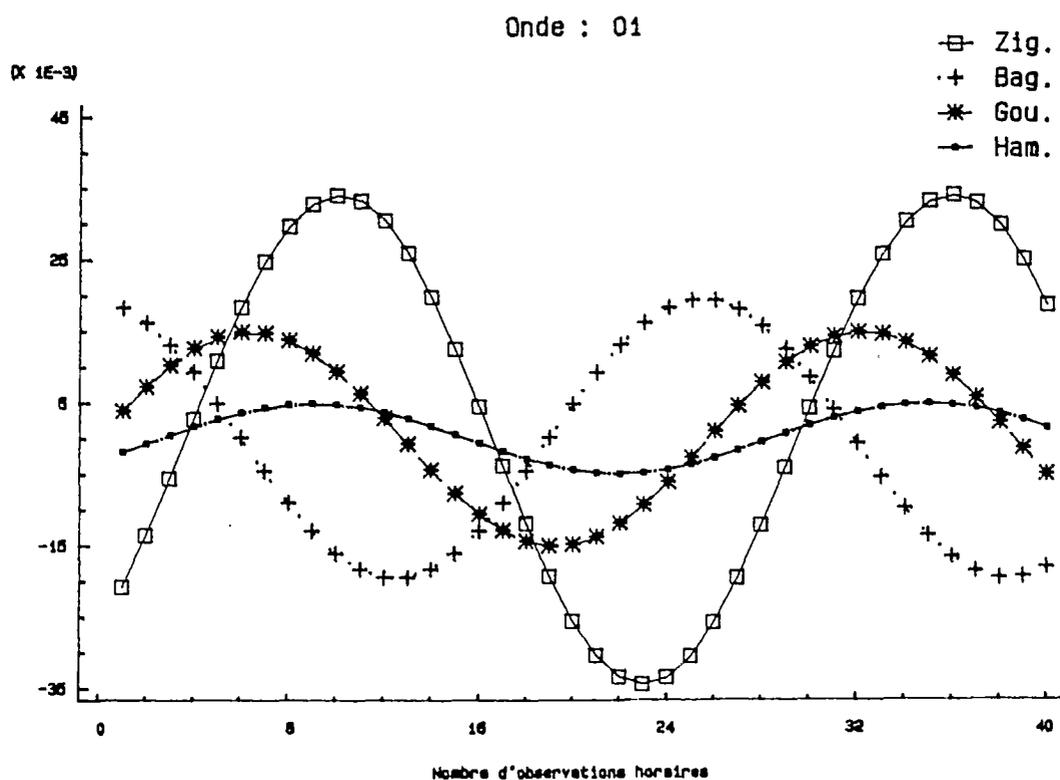


fig.I.52-Représentation de la composante diurne (O1) à toutes les stations de contrôle. (1986)

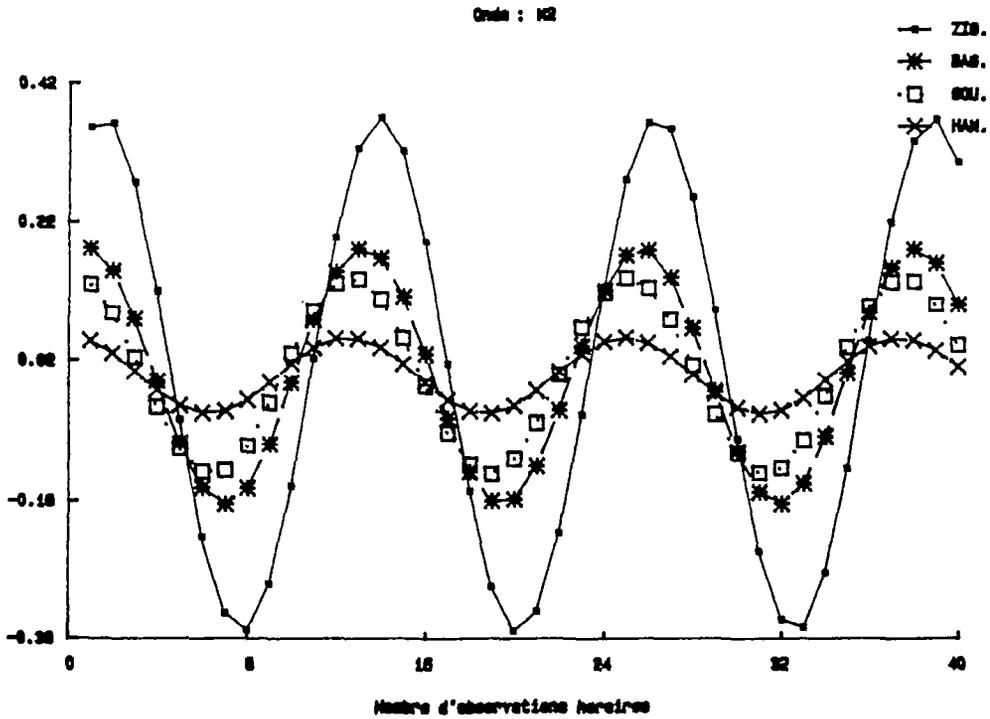


fig.I.53- Représentation de la composante semi-diurne (M2) à toutes les stations de contrôle. (1986)

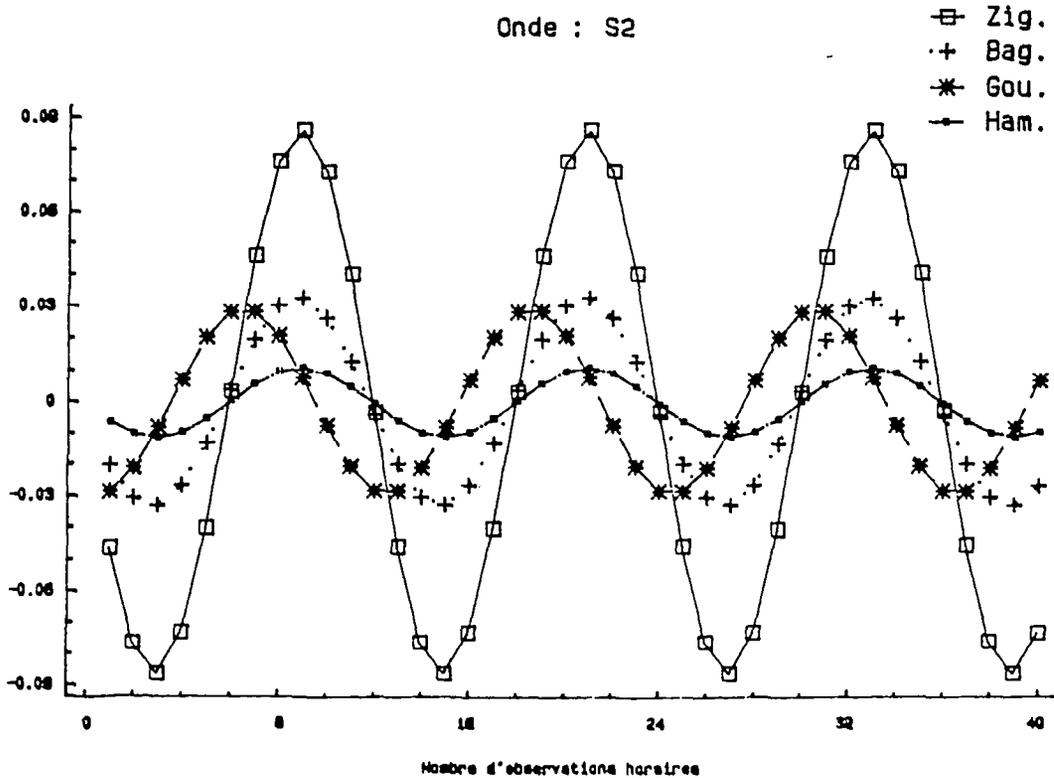


fig.I.54- Représentation de la composante semi-diurne (K2) à toutes les stations de contrôle. (1986)

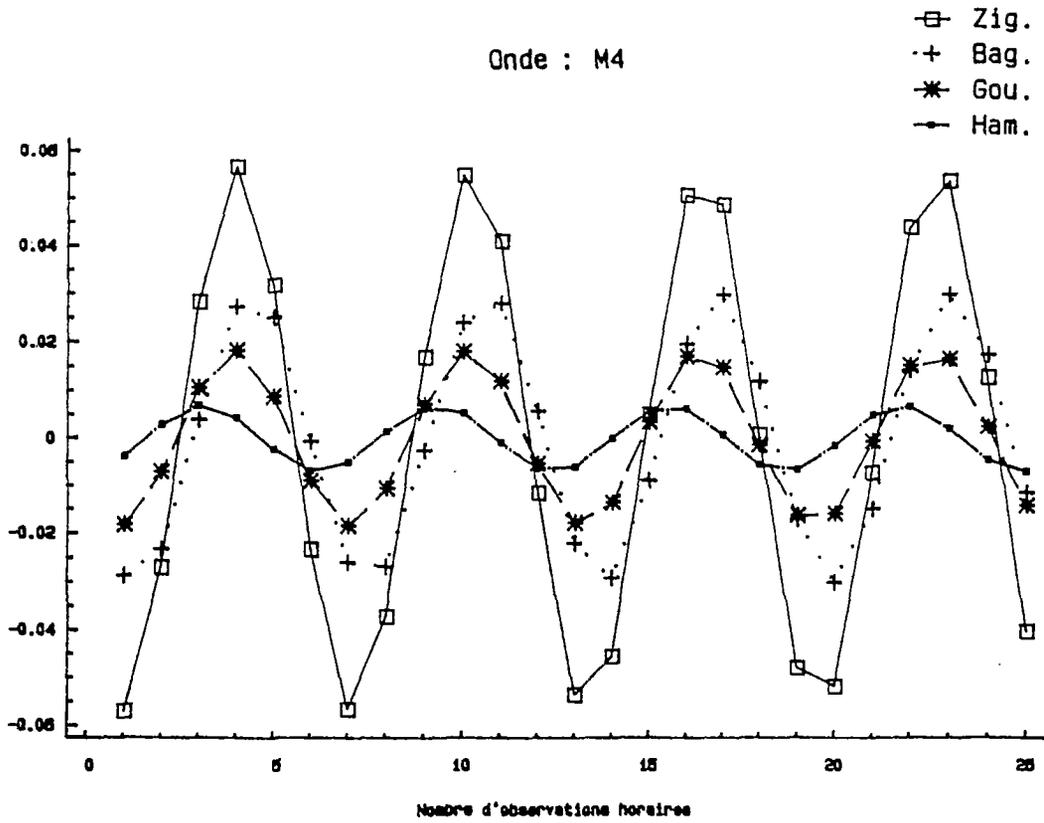


fig.I.55-Représentation de la composante quart-diurne (M4) à toutes les stations de contrôle. (1986)

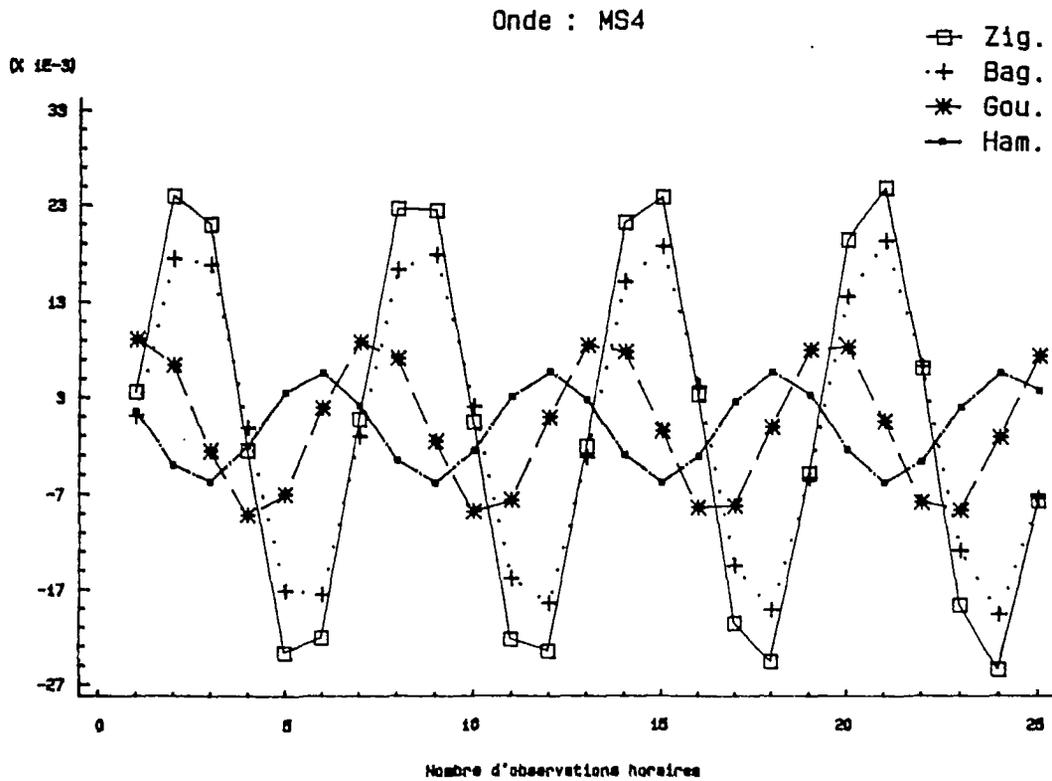


fig.I.56-Représentation de la composante quart-diurne (MS4) à toutes les stations de contrôle. (1986)

STATION : ZIGUINCHOR

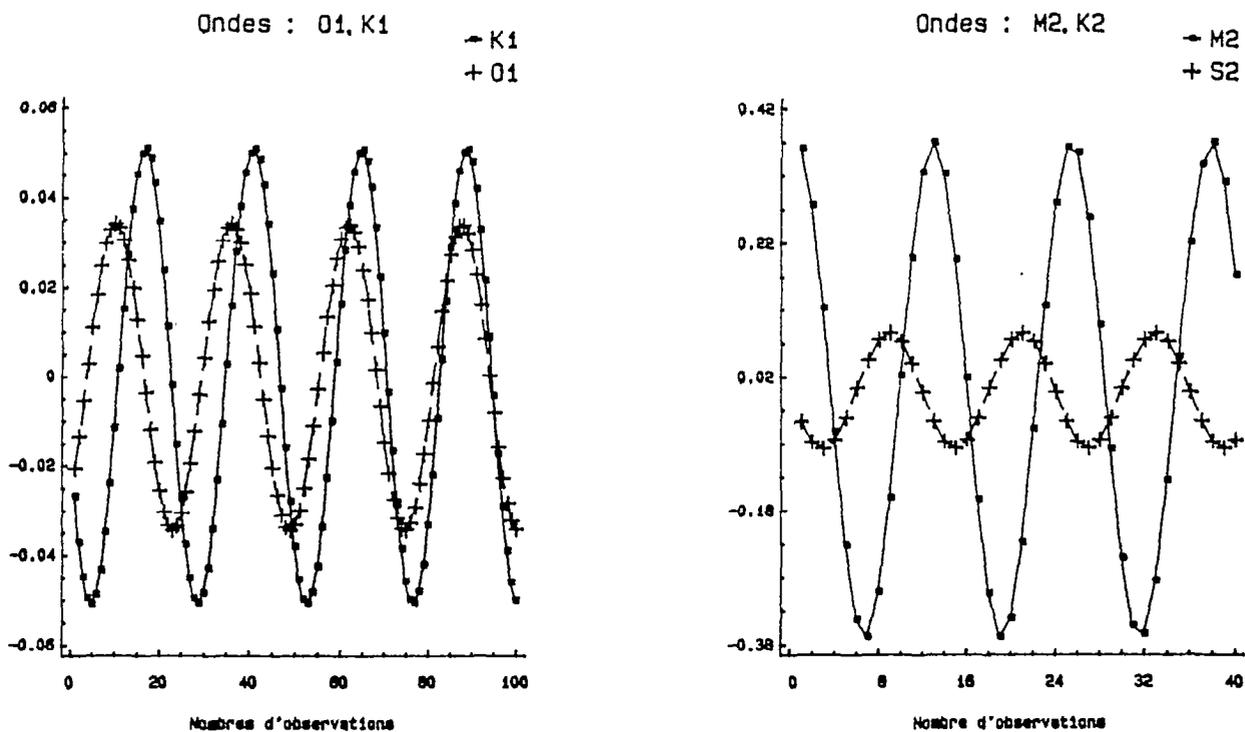


fig.I.57- Représentation des composantes diurnes et semi-diurnes à la station de Ziguinchor. (1986)

STATION : BAGANGA

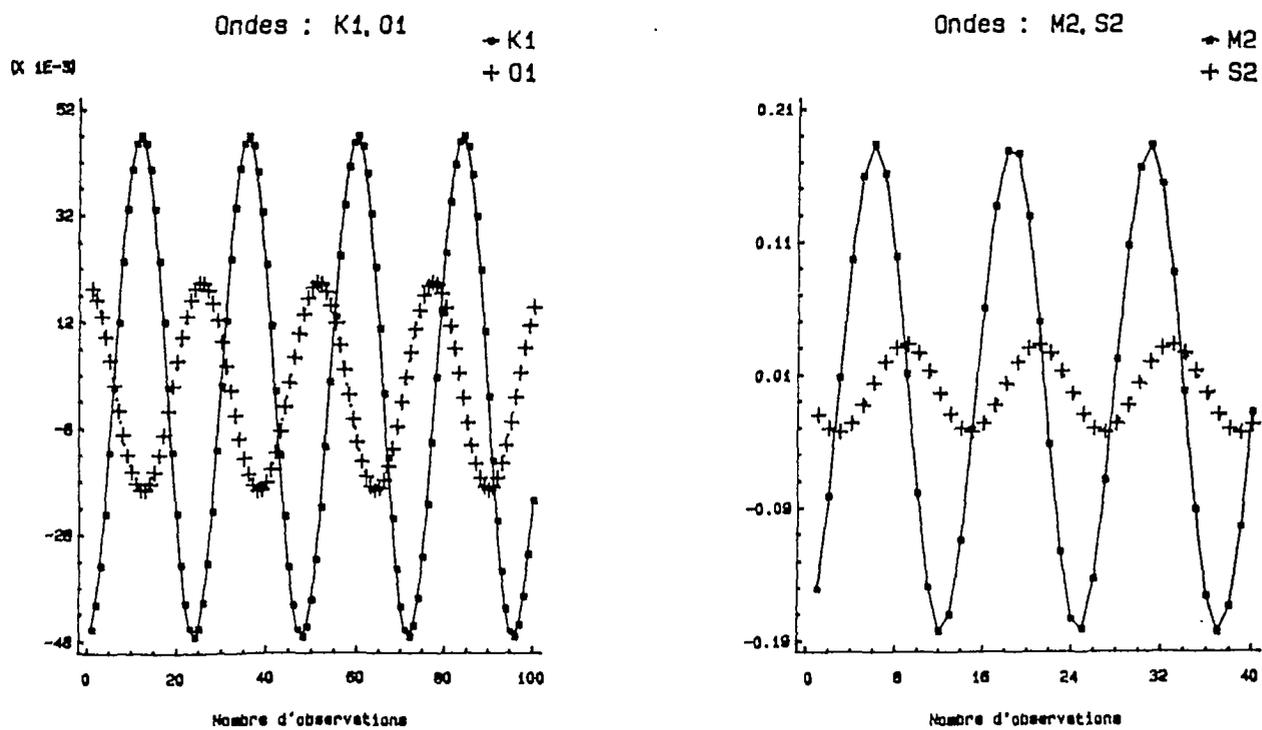


fig.I.58- Représentation des composantes diurnes et semi-diurnes à la station de Banganga. (1986)

STATION : GOUDOMP

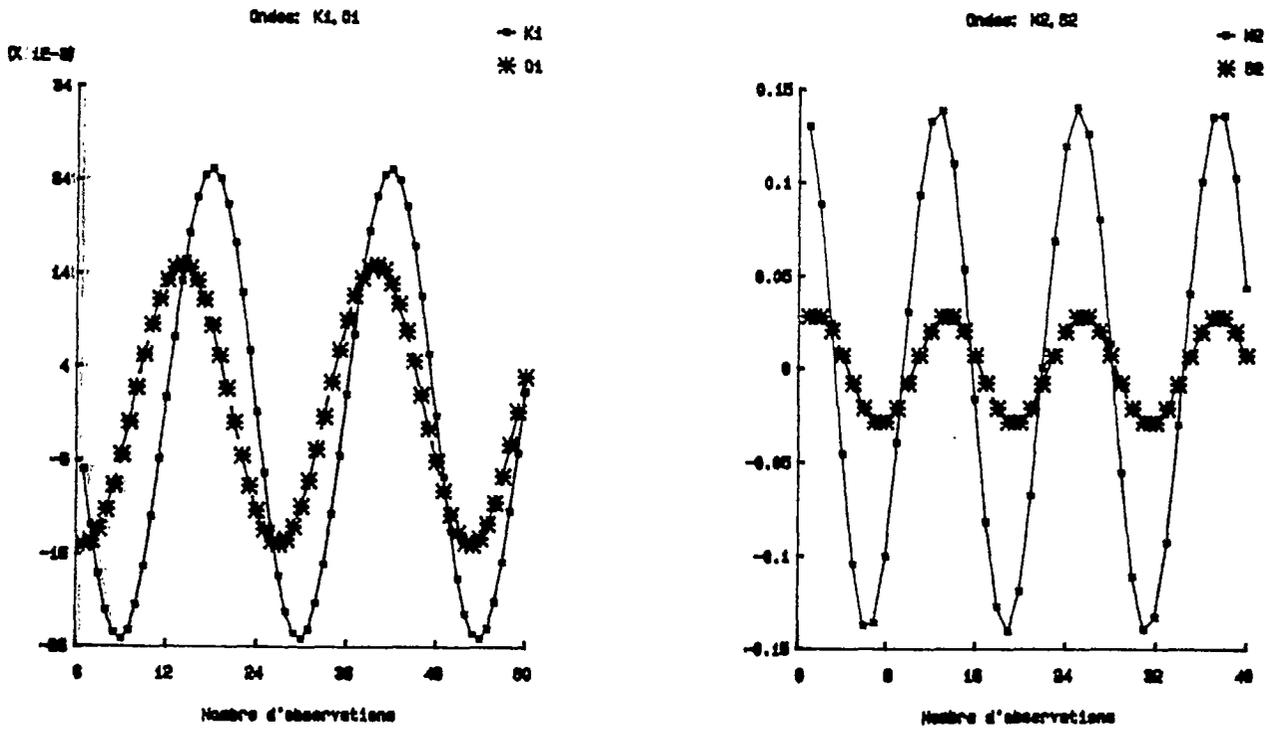


fig.I.59- Représentation des composantes diurnes et semi-diurnes à la station de Goudomp. (1986)

STATION : HAMDALAYE

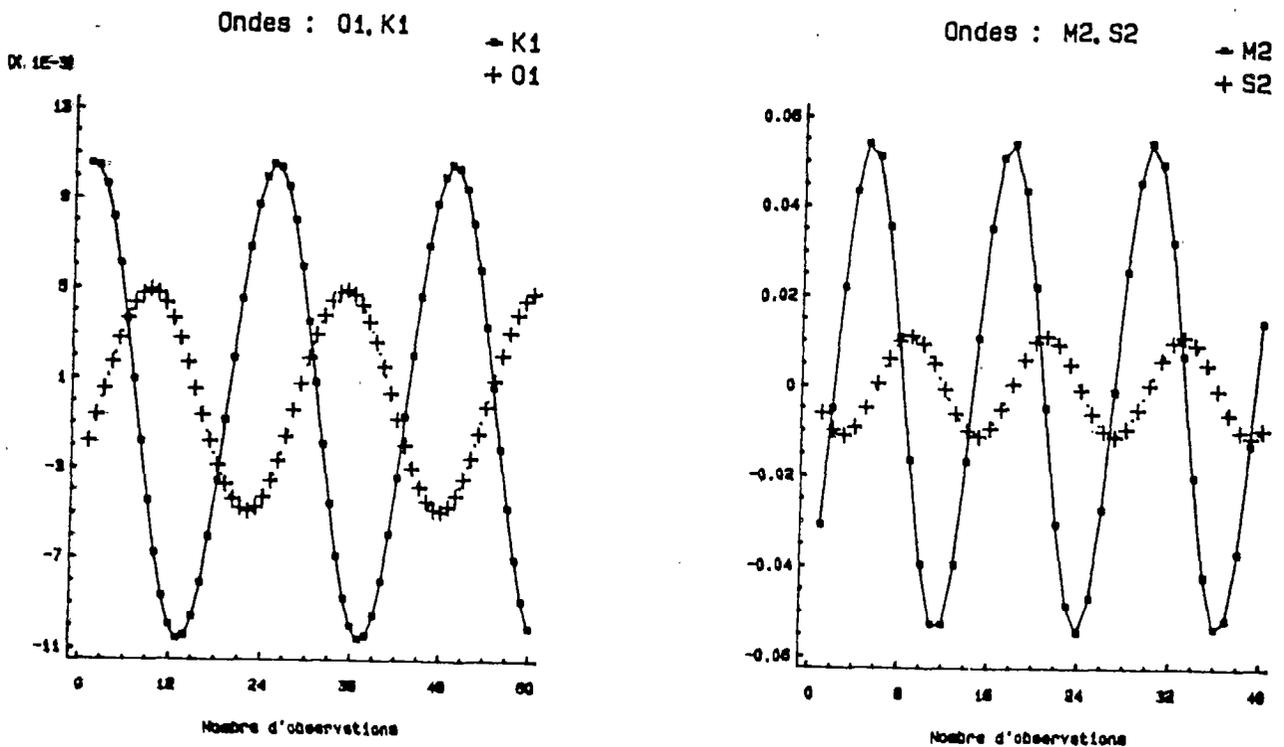


fig.I.60- Représentation des composantes diurnes et semi-diurnes à la station d'Hamdalaye. (1986)

Une forme simplifiée de la formulation de Defant permet la classification du type de la marée en fonction des ondes dominantes aux diverses stations. Ce critère est exprimé par le rapport entre les vives eaux diurnes (O1+K1), et les vives eaux semi-diurnes (M2+S2):

$$C_f = \frac{O1 + K1}{M2 + S2}$$

Si $C_f < 0.5$ =====> marée semi-diurne
 $0.5 < C_f < 2.0$ =====> marée mixte
 $2.0 < C_f$ =====> marée diurne

ce qui dans le cas de Casamance, conduit à:

Station	Zig.	Bag.	Kao.	Ham.	Sef.	Dia.
$C_f(1951)$	0.16					
$C_f(1953)$	0.20					
$C_f(1968)$	0.44	0.19	0.19	0.30	0.30	0.59
$C_f(1986)$	0.19	0.30	0.24	0.24		

Cette évaluation très grossière, varie avec les auteurs, ce qui tend à montrer son insuffisance et son caractère arbitraire. Elle ne constitue qu'un indicateur approximatif du type de marée traitée. D'autres classifications existent, par exemple celle de Courtier:

$0 < C_f < 0.25$ =====> marée semi-diurne régulière
 $0.25 < C_f < 1.5$ =====> marée semi-diurne à inégalité diurne
 $1.5 < C_f < 3.0$ =====> marée mixte
 $3.0 < C_f < 3.0$ =====> marée diurne

ou le critère de Villain, qui se résume à:

1°- une marée est dite diurne si elle a au plus 5 jours par mois de marées semi-diurnes,

2°- une marée est dite mixte si elle a au moins 5 jours par mois de marées diurnes.

Un autre critère fréquemment utilisé dans les milieux peu-profonds est le coefficient d'amplification (F_{amp}). Ce coefficient

caractérise l'amplification des ondes due aux caractéristiques géométriques du milieu. Il est exprimé par:

$$F_{amp} = \frac{a}{0.536 * C_m * \lambda}$$

avec:

a : amplitude de l'onde considérée

λ : facteur de latitude tel que:

$\lambda = \sin^2\psi$ pour les ondes diurnes

$\lambda = \cos^2\psi$ pour les ondes semi-diurnes

ψ : latitude (≈ 12.4 pour la Casamance)

C_m : coefficient théorique tel que:

$C_m(K1) = 0.27$

$C_m(O1) = 0.19$

$C_m(M2) = 0.45$

$C_m(S2) = 0.21$

Les facteurs d'amplification des ondes M2, S2, K1 et O1 aux diverses stations de contrôle dans l'estuaire de la Casamance ($\psi=12.4$)

sont:

(M2) Stat.	Bog.	Zig.	Bag.	Kao.	Ham.	Sef.	Dia.
F_{amp} (1951)	2.11						
F_{amp} (1953)		1.22					
F_{amp} (1968)		0.99	0.73	0.46	0.22	0.18	0.08
F_{amp} (1986)		1.61	0.80	0.61	0.24		
(S2) Stat.	Bog.	Zig.	Bag.	Kao.	Ham.	Sef.	Dia.
F_{amp} (1951)	1.55						
F_{amp} (1953)		0.88					
F_{amp} (1968)		0.51	0.27	0.17	0.08	0.04	0.67
F_{amp} (1986)		0.80	0.31	0.27	0.10		
(K1) Stat.	Bog.	Zig.	Bag.	Kao.	Ham.	Sef.	Dia.
F_{amp} (1951)	0.50						
F_{amp} (1953)		0.43					
F_{amp} (1968)		0.56	0.20	0.13	0.08	0.04	0.06
F_{amp} (1986)		0.37	0.34	0.18	0.08		

(01) Stat.	Bog.	Zig.	Bag.	Kao.	Ham.	Sef.	Dia.
$F_{amp}(1951)$	0.35						
$F_{amp}(1953)$		0.18					
$F_{amp}(1968)$		0.49	0.10	0.06	0.07	0.09	0.08
$F_{amp}(1986)$		0.35	0.20	0.15	0.05		

I.2.6 Conclusions

La somme des composantes O1, K1, M2, S2, M4, et MS4 a permis de reconstituer 95% du phénomène observé aux stations: Ziguinchor, Baganga et Kaour (puis Goudomp). Ce coefficient de corrélation se réduit à 0.75 à Hamdalaye et il n'est que de 0.60 à Sefa et Diana-malari. Ce résultat, prévisible, résulte de l'importance que prennent les ondes supérieures dans des milieux de faible profondeur comme l'estuaire de la Casamance. La période de traitement, assez courte, ne permet pas la séparation des ondes supérieures, dont l'importance croît au fur et à mesure qu'on remonte l'estuaire. Les amplitudes calculées pour les diverses vitesses angulaires, sont égales aux amplitudes exactes augmentées d'un résidu qui représente la contribution de toutes les autres harmoniques du signal. L'importance de ces résidus croît si les ondes supérieures ont des amplitudes comparables à celles des ondes étudiées. Il n'est donc pas étonnant que l'influence de la géométrie, conduise à une augmentation de l'importance de ces ondes supérieures dont l'amplitude devient comparable à celles des ondes d'origine astronomique. Ceci rend l'analyse des observations aux stations amont incomplète. La méthode de séparation linéaire des phases et amplitudes relatives aux ondes mixtes et non-linéaires (Le Provost, 1974), nécessite une période d'observation longue et continue dans le site étudié ou dans un lieu de contrôle voisin des emplacements des limnigraphes, contrainte qui n'était pas disponible.

A l'embouchure, l'effet de la marée est prédominant par rapport aux autres forces extérieures. Son importance décroît au fur et à

mesure qu'on remonte l'estuaire. Ceci est dû à l'interaction de la géométrie et de la profondeur sur la propagation de telle sorte qu'en amont une variation en apport fluvial peut avoir des effets perturbateurs sur un marnage très faible. La décroissance rapide de la profondeur dans la partie amont de l'estuaire (Hamdalaye- Diana Malari) entraîne une diminution aussi rapide de la célérité. Ainsi les composantes de faible amplitude sont largement conditionnées par les perturbations météorologiques se produisant pendant la période d'observation choisie. En revanche, les composantes M2 et k1 présentent une plus grande régularité. C'est par leur constance que le choix de ces composantes est préférable pour les études de prédiction.

CHAPITRE 2
HYPOTHESES ET APPROXIMATIONS

Chapitre II

HYPOTHESES ET APPROXIMATIONS

II.1 EQUATIONS DU MOUVEMENT

La simple collecte de données sur le terrain , tout en se contentant d'une description empirique de leurs évolutions, est une tâche très importante dans la compréhension des processus physiques qui gèrent les circulations dans les milieux naturels, mais elle ne doit pas nous masquer la nécessité d'aller plus loin. Les systèmes réels sont extrêmement complexes, décrire leurs fonctionnement suppose la connaissance de tous leurs mécanismes internes. Cette tâche, bien qu'elle soit possible dans certains cas, conduit à des équations trop complexes et difficiles à manipuler.

On tend généralement à simplifier le problème par une représentation basée sur une modélisation mathématique du système naturel. Le modèle qui en découle constitue une représentation d'un "processus tel qu'il permette d'une part, de rendre compte de toutes les observations faites et, d'autre part, de prévoir le comportement du système considéré dans des conditions plus variées que celles qui ont donné naissance aux observations" (Villiermaux et al., 1978).

II.1.1 Equations générales

La circulation dans l'estuaire de la Casamance est dominée par deux types de convections: la convection forcée due à la marée qui interagit avec la topographie du milieu et, la convection libre due au gradient de densité amplifié par le mécanisme d'évaporation, important en saison sèche et, qui affecte essentiellement la partie amont de l'estuaire (Hamdalaye à Diana Malari).

L'espace étant rapporté à un trièdre orthonormé (ox,oy,oz) on se propose d'étudier l'écoulement d'une masse liquide à surface libre et de profondeur variable. Les équations de mouvement d'un fluide réel incompressible s'écrivent sous leur forme la plus générale:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \cdot \bar{V}) = 0 \quad (\text{II.1})$$

$$\frac{\partial (\rho \cdot V)}{\partial t} + \text{div} (\rho \cdot \bar{V} \cdot \bar{V}) + 2\bar{\Omega} \wedge \bar{V} = \mu \cdot \nabla^2 \bar{V} + \sum \rho \cdot \bar{F}_{\text{ext}} - \nabla \cdot \pi \quad (\text{II.2})$$

\bar{V} : vitesse instantanée tel que $\bar{V}=(U.\bar{i},V.\bar{j},W.\bar{k})$

ρ : masse spécifique

π : force de pression

\bar{F}_{ext} : forces extérieures par unité de masse

∇ : opérateur du divergent: $\nabla \bar{\psi} = (\partial \bar{\psi} / \partial x \bar{i} + \partial \bar{\psi} / \partial y \bar{j} + \partial \bar{\psi} / \partial z \bar{k})$

μ : viscosité

Ce système d'équations fondamentales de l'hydrodynamique résulte de l'application des principes de conservation d'un certain nombre de propriétés à une particule fluide en mouvement:

1°- la conservation de masse qui traduit une variation nulle durant son déplacement.

2°- la conservation de quantité de mouvement: la variation de cette dernière devrait être équivalente aux forces extérieures. Cette équation exprime l'équilibre entre les forces d'inertie d'une part et la somme des forces de pesanteur, de pression et de viscosité d'autre part.

II.1.1.1 Moyennes temporelles

Le rapport des forces d'inertie aux forces visqueuses dans l'estuaire de la Casamance est de l'ordre de 10^6 , la solution stationnaire stable n'existe pas. Les grandeurs que fait intervenir le système d'équations continues (II.1,II.2) sont des grandeurs instantanées

fluctuantes par contre les grandeurs mesurées sont des valeurs moyennes sur des temps courts. Il est donc nécessaire de séparer les diverses variables instantanées en deux termes, les grandeurs moyennes et les grandeurs oscillantes turbulentes telles que toute grandeur dépendante ψ des équations du mouvement s'écrit:

$$\psi = \bar{\psi} + \psi' \quad (\text{II.3})$$

Il est généralement admis (Boussinesq, 1869) que la masse spécifique turbulente est négligeable par rapport à la masse spécifique moyenne

$$\rho = \bar{\rho} + \rho' \quad \text{avec} \quad \rho' \ll \bar{\rho}$$

Ce qui ramène le système précédent à:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + U(i) \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} + \bar{\rho} \frac{\partial U(i)}{\partial x} = 0 = \bar{\rho} \frac{\partial U(i)}{\partial x} = 0 \implies \text{div}(\bar{V}) = \bar{0} \quad (\text{II.4})$$

$$\frac{\partial \bar{U}(i)}{\partial t} + 2\bar{\Omega} \bar{U}(i) + \nabla \bar{U}(i) \bar{U}(i) = -\nabla \left(\frac{\pi}{\rho} \right) + \left\langle \frac{\rho}{\bar{\rho}} F \right\rangle + \frac{\mu}{\bar{\rho}} \nabla^2 \bar{U}(i) - \nabla \langle U'(i) U'(i) \rangle \quad (\text{II.5})$$

avec $\langle f \rangle =$ moyenne temporelle de f

Le système d'équations qui découle de ces deux hypothèses (Boussinesq + Séparation des variables) contrôle les variations spatio-temporelles des grandeurs moyennes (temporelles) de vitesses et de pression.

Le mouvement a donc été intégré sur une période T longue par rapport à l'échelle de la turbulence et petite par rapport à la période de marée. Les termes supplémentaires, résultant de la substitution aux grandeurs instantanées, la somme d'une grandeur moyenne et d'une grandeur fluctuante turbulente caractéristique de la corrélation entre deux des fluctuations, sont a priori inconnus. Il est nécessaire d'en fournir une représentation théorique ou expérimentale en fonction

des grandeurs moyennes afin de pouvoir, d'une part, résoudre les équations et, d'autre part éliminer les oscillations rapides qui encombrant l'analyse.

II.1.1.2 Représentation des tensions

Dans son travail précurseur sur la turbulence Reynolds (1894) a montré que l'influence des termes de fluctuation turbulente sur le mouvement moyen est d'introduire des composantes de frottements internes. Ce raisonnement est appliqué à deux filets liquides séparés par des particules fluides, animés de mouvements transversaux désordonnés. On admet que la quantité de masse échangée à travers une unité de surface S est $\rho V'$ et, que cette dernière engendre une augmentation de la quantité de mouvement dans le sens de l'écoulement, égale à $\rho V'U'$, de sorte qu'il résulte un effort tangentiel $\tau = \rho U'V'$ par unité de surface. Ces tensions, responsables d'une dispersion similaire à la diffusion moléculaire, sont exprimées par:

$$\begin{aligned} P_{xx} &= -\rho \cdot \bar{U}^2 & P_{yy} &= -\rho \cdot \bar{V}^2 & P_{zz} &= -\rho \bar{W}^2 \\ P_{xy} &= -\rho \cdot \bar{U} \cdot \bar{V} & P_{xz} &= -\rho \cdot \bar{U} \cdot \bar{W} & P_{yz} &= -\rho \cdot \bar{V} \cdot \bar{W} \end{aligned}$$

où $P_{x,y}$ représente le frottement sur une surface unitaire perpendiculaire à ox , suivant la direction oy . L'action de la turbulence est similaire à celle de la viscosité et le tenseur P_{ij} est dit tenseur de Reynolds.

L'effet de la turbulence est de créer des tensions de cisaillement qui dans la majorité des cas réels sont largement plus importantes que les frottements dus à la viscosité moléculaire; ces derniers seront par conséquent négligés par la suite. En vertu de leurs effets, il est raisonnable de les exprimer par un terme similaire (en

forme) au terme de diffusion moléculaire. Ceci est accompli par l'introduction d'un coefficient ϕ tel que:

$$\underbrace{- \nabla \langle U'(i)U'(i) \rangle}_{\text{cisaillement}} + \underbrace{\frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \bar{U}(i)}_{\text{viscosité}} = \frac{\partial}{\partial x(j)} \left(\phi(j) \frac{\partial \bar{U}(i)}{\partial x(j)} \right) \quad \begin{array}{l} j=1 \Rightarrow ox \\ j=2 \Rightarrow oy \\ j=3 \Rightarrow oz \end{array} \quad (II.6)$$

Ce coefficient regroupe la viscosité turbulente et l'effet de cisaillement. Généralement on lui attribue une valeur constante mais, en réalité, il dépend de l'échelle considérée, du type et du degré de stabilité de l'écoulement. Cette approximation fréquemment adoptée dans les milieux estuariens détériore le caractère physique de ce coefficient et le transforme, dans la plupart des cas, en un paramètre de contrôle, dont les valeurs sont conditionnées par les propriétés numériques du modèle utilisé.

Les actions de contact qui s'exercent sur un élément de surface présentent deux composantes. Une composante normale proportionnelle aux vitesses de déformations linéaires et une composante tangentielle proportionnelle aux vitesses de déformations angulaires. Quand les vitesses augmentent, les particules fluides se déplacent d'une façon désordonnée, leur vitesse et position varient à chaque instant. Le mouvement est caractérisé par des tensions de cisaillement qui peuvent être subdivisées en deux types: les tensions moyennes qui représentent la pression hydrostatique et les tensions dites de "déviation". Le déplacement d'un volume fluide peut être schématisé par la superposition, d'une part, d'une translation de vitesse u et d'une rotation de vitesse angulaire moyenne égale à la vorticité et, d'autre part, d'une déformation caractérisée par une dilatation due au gradient spatial des vitesses.

En adoptant les approximations ultérieures et en supposant ϕ constant, le système général des équations moyennées se ramène à la forme suivante:

$$\operatorname{div}(\bar{V}) = \bar{0} \quad (\text{II.7})$$

$$\frac{\partial \bar{U}(i)}{\partial t} + 2\Omega \Lambda \bar{U}(i) + \nabla \bar{U}(i) \bar{U}(i) = -\nabla \left(\frac{P}{\rho} \right) + \left\langle \frac{\rho}{\rho} F \right\rangle + \phi \nabla^2 U(i) \quad (\text{II.8})$$

II.1.1.3 Conditions aux limites

La résolution du système (II.7, II.8) nécessite la connaissance des conditions aux limites et des conditions initiales. On introduit des conditions idéalisées aux limites, écrites en variables moyennes (II.8) et qui devraient satisfaire:

- pour $z = \xi$ (interface: eau-air)

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + U \frac{\partial \xi}{\partial x} + V \frac{\partial \xi}{\partial y} = W \quad (\text{II.9})$$

- pour $z = -h$ (interface: eau-fond solide)

$$\frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} + V \frac{\partial h}{\partial y} = -W \quad (\text{II.10})$$

Le fond solide et la surface libre seront considérés comme des limites imperméables telle que la vitesse normale d'une certaine particule est égale à la vitesse de déplacement de cette surface.

Les facteurs qui limitent la réussite de la modélisation sont donc, d'une part, les "qualités" numériques et physiques du modèle et, d'autre part, la précision des conditions aux limites. Ce dernier point pose un problème particulier.

En effet, la complexité des interfaces réelles rend les équations aux limites (II.9) et (II.10) très approximatives. L'hétérogénéité, la superposition et la répartition spatiale de certains

processus physiques, tel que la vitesse du vent, la sédimentation au fond, les matières en suspensions, le transfert qui se produit en milieux stratifiés, les conditions climatiques et bien d'autres facteurs amènent à des limites réelles fortement perturbées. Les conditions aux limites adoptées seront, en conséquence, des limites conventionnelles; l'incertitude dans leur représentation constitue le plus grand handicap de la modélisation.

II.1.2 Approche bi-dimensionnelle en plan

Le système d'équations (II.7,II.8), écrit dans un repère orthonormé, constitue une représentation tridimensionnelle de l'écoulement fluide. Ce type d'approche est naturellement le plus complet mais il est difficilement mis en oeuvre, compte tenu de la masse des données et du nombre de coefficients nécessaires afin d'obtenir des résultats satisfaisants. Ceci constitue dans la majorité des milieux naturels une tâche assez coûteuse et difficilement acquise.

Quand les milieux naturels le permettent, les modélisateurs tendent à réduire le nombre de variables d'état et le nombre de coefficients empiriques qui rentrent en jeu. Un schéma de priorités est nécessaire afin de guider et justifier le choix des simplifications à apporter au système. Ces dernières seront conditionnées par:

- 1°- le but de l'étude,
- 2°- la géométrie du milieu,
- 3°- les données disponibles.

Le chapitre précédent, consacré à la présentation du milieu et aux diverses mesures effectuées dans l'estuaire, rend compte de l'homogénéité dans la répartition des propriétés fluides (salinité et courants) sur la verticale. Le choix s'étant porté sur une modélisation bi-

dimensionnelle en plan (ox,oy) intégrée sur la verticale, certaines hypothèses et simplifications au système (II.7,II.8) s'imposent.

II.1.2.1 Approximation quasi-statique

Les modèles bi-dimensionnels en plan reposent sur l'approximation quasi statique, qui permet d'éliminer la pression des équations du mouvement.

Dans la théorie des ondes longues, l'accélération verticale des particules fluides est négligée car elle est petite par rapport à l'accélération de la pesanteur. Ainsi l'hypothèse de la quasi-hydrostaticité est admise. En projetant l'équation dynamique (II.8) suivant l'axe vertical oz et en supposant que l'accélération verticale des forces de volume est largement dominée par la gravité, l'équation s'écrit:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + 2 (\Omega(ox)V - \Omega(oy)U) + \nabla UW = - \frac{\partial P}{\rho \partial z} - g + D_t$$

D_t : dispersion turbulente

La force de gravité est donc uniquement équilibrée par le gradient de pression d'où:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$$

qui, intégrée sur la profondeur, amène à:

$$P = P_a + \int \rho g dz \quad (II.11)$$

P_a : pression atmosphérique.

H : hauteur totale (h+ξ).

Du fait des dimensions de l'estuaire, on supposera qu'on ne peut déceler un changement appréciable dans la pression atmosphérique. Ainsi:

$$\frac{\partial P_a}{\partial x_i} = 0$$

La variation de la masse volumique sur la verticale est négligeable, par contre sa répartition spatiale moyenne est prise en compte:

$$\begin{aligned} \frac{1}{H} \int_{-h}^{\xi} \frac{\partial}{\partial x_i} \int \rho dz dz &= \frac{1}{H} \int_{-h}^{\xi} \left(\int \frac{\partial \rho}{\partial x_i} dz + \rho(z) \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \right) dz \\ &= \frac{1}{H} \int_{-h}^{\xi} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} z dz + \frac{1}{H} \int_{-h}^{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \rho dz \\ &= \frac{g H \partial \rho}{2 \rho \partial x_i} + g \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \end{aligned}$$

avec $\rho = \rho_0(1+\alpha S)$; $\alpha=0.78 \cdot 10^{-4}$ ceci ramène le terme de pression à l'expression suivante:

$$\frac{gH\alpha}{2(1+\alpha S)} \frac{\partial S}{\partial x} + g \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

II.1.2.2 Forces astronomiques

L'estuaire de la Casamance présente un plan d'eau étroit. En conséquence, la force astronomique due à la résultante de la force d'attraction astrale en chaque point et de la force d'inertie due au

mouvement de la terre est supposée négligeable par rapport à la force de gravité. Le rapport entre ces deux forces est:

$$R = \frac{F(\text{ast})}{F(\text{grav})} = 2 \frac{M}{M_t} \left| \frac{x}{R} \right|^n$$

$$n = 3$$

M = masse de l'astre considéré (lune et soleil),

M_t = masse de la terre.

ainsi

$$R = 0.6 \cdot 10^{-7} \text{ (soleil)}$$

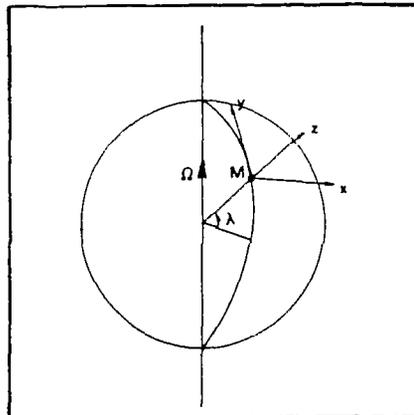
$$R = 0.3 \cdot 10^{-7} \text{ (lune)}$$

Ainsi les deux composantes horizontale et verticale de la force astrale peuvent être négligées.

II.1.2.3 Force de Coriolis

Le système d'axe considéré est un système mobile. L'équation fondamentale $F = m \gamma$ écrite en repère fixe peut être étendue aux systèmes mobiles à condition d'ajouter aux forces extérieures une force fictive, la force de Coriolis.

$$F_C = 2 \bar{\Omega} \Delta \bar{V}$$



\bar{V} : vitesse du système mobile.

Ω : rotation du système mobile par rapport au système fixe.

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega y \cdot \cos \phi \\ \Omega z \cdot \sin \phi \end{pmatrix}$$

$$|\Omega| = 7.29 \cdot 10^{-5}$$

ϕ : latitude ($\approx 12^\circ 40$ en Casamance)

Cette force due à la rotation terrestre, commence à influencer la circulation des eaux, une fois que les particules fluides sont mises en mouvement. A l'exception de quelques endroits bien spécifiques, cette force présente un effet sur le mouvement résultant et sur la distribution des pentes en surface.

Son importance s'accroît aux grandes latitudes ($>10^\circ$) mais dans l'estuaire de la Casamance, elle joue un rôle moins important que les autres forces mises en jeu, compte tenu des petites dimensions que présente l'estuaire et de sa géométrie irrégulière. Ceci permet de la considérer comme constante.

Les composantes horizontale de la force de Coriolis sont:

$$2 \Omega(oy)W - fV \quad \text{suivant } ox \quad (II.12)$$

$$2 \Omega(ox)W + fU \quad \text{suivant } oy \quad (II.13)$$

Les composantes verticales de la vitesse étant négligées par rapport aux composantes horizontales. La combinaison des équations II.6, II.8, II.11, II.12, II.13, projetées sur ox, oy s'écrit alors:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial UV}{\partial y} + \frac{\partial UW}{\partial z} - fV = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Pa}{\rho} + g\xi \right) + F_x + \nu \nabla^2 U \quad (II.14)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial VU}{\partial x} + \frac{\partial V^2}{\partial y} + \frac{\partial VW}{\partial z} + fU = - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Pa}{\rho} + g\xi \right) + F_y + \nu \nabla^2 V \quad (II.15)$$

F_x, F_y sont les composantes horizontales des forces de volume.

II.1.3 Intégration suivant la profondeur

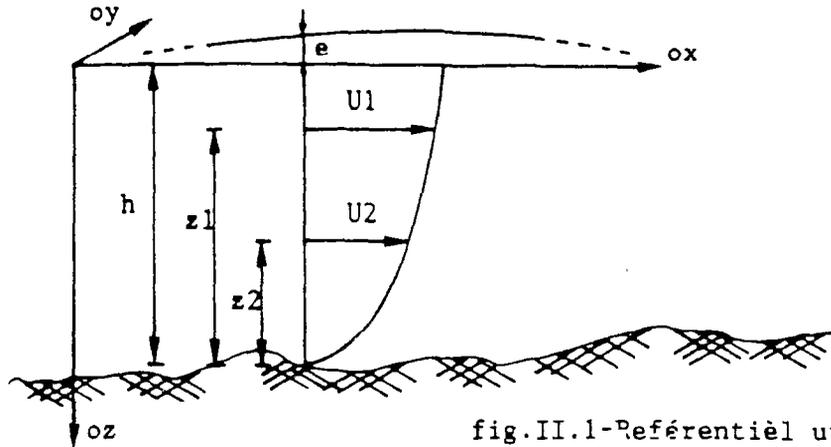


fig.II.1-Repérentièl utilisé.

II.1.3.1 Equation dynamique

Les moyennes effectuées jusqu'à présent étaient des moyennes temporelles; l'intégration sur la verticale constitue en revanche une moyenne spatiale qui, appliquée au système (II.14,II.15), impose certaines hypothèses:

1°- l'intégrale des grandeurs fluctuantes turbulentes sur la verticale est nulle:

$$\int_{-h}^{\xi} U' dz = 0 \quad (\text{II.16})$$

2°- l'intégration suivant oz des dérivées partielles peut être exprimée en termes de dérivées d'intégrale par la formule de Leibnitz:

$$\int_{-h}^{\xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} dz = \frac{\partial}{\partial z} \int_{-h}^{\xi} \varphi dz - \varphi(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} - \varphi(-h) \frac{\partial h}{\partial \alpha} \quad (\text{II.17})$$

L'intégration des termes linéaires ne pose pas de problèmes, car en vertu de l'équation (II.16), les expressions contenant des grandeurs fluctuantes turbulentes sont éliminées. Ceci n'est pas le cas

pour les termes non linéaires qu'on peut regrouper en trois catégories:

$$A: \text{ les expressions du type } \nu \partial(U(i)U(j))/\partial x(i) \quad (\text{II.18})$$

$$B: \text{ les expressions du type } \nu (\partial^2 U(k)/\partial x^2 + \partial^2 U(k)/\partial y^2) \quad (\text{II.19})$$

$$C: \text{ les expressions du type } \nu (\partial^2 U(k)/\partial z^2) \quad (\text{II.20})$$

L'intégrale de (II.18) amène à l'expression suivante:

$$\frac{1}{H} \int_{-h}^{\xi} U(i)U(j)dz = \bar{U}(i)\bar{U}(j) + \frac{1}{H} \int_{-h}^{\xi} U'(i)U'(j)dz \quad (\text{II.21})$$

qui renferme l'intégrale des grandeurs fluctuantes turbulentes. L'action prépondérante de ces fluctuations est de créer un effet de cisaillement dû au gradient vertical de la vitesse. Ces tensions jouent un rôle prépondérant dans les mécanismes dispersifs. La recherche d'une expression appropriée en termes de variables moyennes est nécessaire. On se contente généralement d'une expression de tension qui introduit un nouveau paramètre d'état, dit coefficient de dispersion turbulente ν_T , d'où:

$$\frac{1}{H} \int_{-h}^{\xi} U'(i)U'(j)dz = \nu_T \frac{\partial U'(i)}{\partial x(j)} \quad (\text{II.22})$$

En combinant l'effet dû, d'une part, aux tensions de cisaillements (II.18) et, d'autre part, l'effet de la turbulence (II.19), on définit un nouveau coefficient dispersif turbulent K tel que:

$$\frac{1}{H} \int_{-h}^{\xi} \nu \left(\frac{\partial^2 U(i)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(i)}{\partial y^2} \right) dz - \frac{1}{H} \sum_{j=1,2} \frac{\partial}{\partial x(j)} \int_{-h}^{\xi} U'(i)U'(j)dz = K \nabla^2 U \quad (\text{II.23})$$

Ce coefficient n'est autre qu'un nouveau paramètre de contrôle qu'il faut ajuster empiriquement.

Le troisième type d'expression (II.20) représente la contribution du terme différentiel de la vitesse suivant oz . Cette expression intégrée sur la profondeur amène à :

$$\int_{-h}^{\xi} \nu \frac{\partial^2 U(i)}{\partial z^2} dz = \nu \left. \frac{\partial U(i)}{\partial z} \right|_{z=\xi} - \nu \left. \frac{\partial U(i)}{\partial z} \right|_{z=-h} \quad (\text{II.24})$$

L'expression (II.24) multipliée par la masse volumique représente les composantes des tensions au fond et en surface, d'où :

$$\int_{-h}^{\xi} \nu \frac{\partial^2 U(i)}{\partial z^2} dz = \rho^{-1} (\tau(i:\text{surface}) - \tau(i:\text{fond})) \quad (\text{II.25})$$

A: Tensions au fond

En supposant que les tensions de frottement sont attribuables aux frottements sur le fond plus que sur les berges, il sera admis que les frottements sont liés aux gradients des vitesses moyennes par un coefficient de transfert N tel que :

$$\int_{-h}^{\xi} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(N_{i,k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) dx_k = N_{i,k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \left. \begin{array}{l} x=\xi \quad \text{surface} \\ x=-h \quad \text{fond} \end{array} \right| \quad (\text{II.26})$$

Les simplifications apportées aux équations sont obtenues par un calcul approximatif des coefficients de transfert. Des études expérimentales (Chow, 1959) faisant appel soit à la mesure des fluctuations turbulentes de la vitesse U', V', W' , soit à la mesure du profil vertical des vitesses des courants, ont permis de mettre en évidence une relation simple qui lie l'effort au fond et la vitesse moyenne, à savoir :

$$\tau_x = -\rho U'W' = \rho N_{x,z} \frac{\partial U}{\partial z} \left. \right|_{z=-h} \quad (\text{II.27})$$

$$\tau_y = -\rho V'W' = \rho N_{y,z} \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=-h} \quad (\text{II.28})$$

$$\tau = K (U^2 + V^2)$$

En se basant sur la théorie de Prandtl, l'équilibre entre les forces motrices et les forces de frottement amène à :

$$\tau_f = K V^2 = K.C^2.H \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (\text{II.29})$$

$$\tau_f = \rho g \frac{V^2}{C^2} = \rho g \frac{V |V|}{C^2} \quad (\text{II.30})$$

ce qui pour une formulation de type Chezy donne :

$$\tau_f = \frac{\rho g U (U^2 + V^2)^{\frac{1}{2}}}{C^2 H} \quad (\text{II.31})$$

ou Manning-Strickler,

$$\tau_f = \frac{\rho g U (U^2 + V^2)^{1/2}}{K^2 H^{4/3}} \quad (\text{II.32})$$

Les coefficients de frottement varient en fonction de la nature du fond, de la forme de la section, des irrégularités géométriques, de la hauteur d'eau et de bien d'autres paramètres (alignements, sens de l'écoulement...). Ces coefficients seront ajustés à partir des mesures effectuées. Le paragraphe consacré au calage traitera ce point en détail.

B: Tensions dues au vent

L'effet le plus direct du vent est de créer des vagues. Il est à la base de l'apparition d'un mouvement uniforme de l'eau. Son effet se transmet aux couches inférieures par le cisaillement qui se crée entre les couches fluides. La vitesse du courant résultant de l'action du vent varie en fonction de la profondeur; en général elle décroît en intensité en changeant de direction (fig.II.2).

La pente de la surface, entraîne l'apparition d'un gradient de pression horizontale et d'un courant qui évolue au fond dans le sens inverse du vent (fig.II.3).

Le travail pionnier dans ce domaine est dû à Ekman qui, en 1902, traita les deux cas essentiels que sont les courants stationnaires et transitoires dans les grandes profondeurs (Neumann et al., 1966).

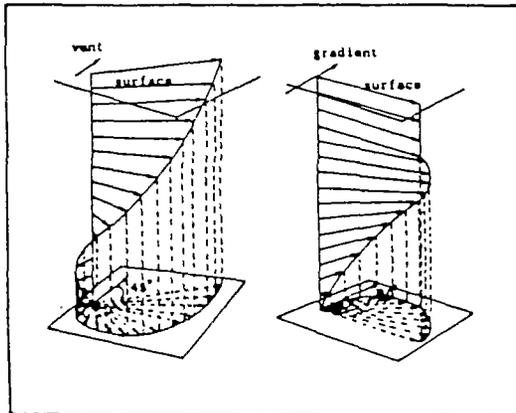


fig. II.2 - Spirale d'Ekman.

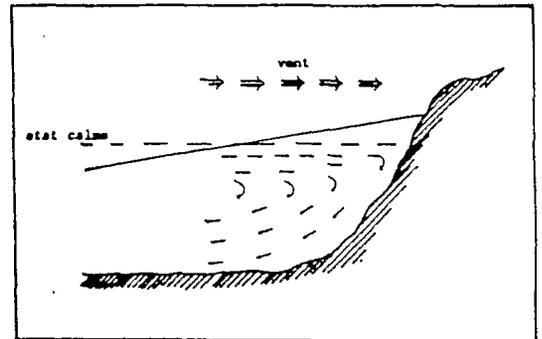


fig. II.3 - Courant de retour induit par le vent.

Si on veut calculer la variation de la vitesse des particules fluides en fonction de la profondeur, il est nécessaire de relier les tensions de cisaillements aux gradients de la vitesse. Si τ_x et τ_y sont les composantes suivant ox et oy de la tension de cisaillement pour une profondeur z , ils seront reliés aux composantes de la vitesse U et V par:

$$\tau_x = \rho \cdot N_z \frac{\partial U}{\partial z} \quad (\text{II.33})$$

$$\tau_y = \rho \cdot N_z \frac{\partial V}{\partial z} \quad (\text{II.34}).$$

En supposant que le coefficient de viscosité turbulente N_z est indépendant de z , une solution analytique du problème peut être envisagée. Le résultat donnera une répartition des tensions suivant une spirale dite spirale d'Ekman (fig.II.2).

Dans les milieux peu profonds, la tension de surface est supposée réagir suivant la direction du vent. Sa grandeur étant proportionnelle au carré de la vitesse du vent prise généralement à une dizaine de mètres au-dessus de la surface de l'eau. On reprendra l'expression de Dronkers (1964):

$$\tau_s = C_d \rho_a W^2 \quad (\text{II.35})$$

W : vitesse du vent

ρ_a : densité de l'air

C_d : coefficient de cisaillement

On retrouve dans la littérature plusieurs expressions empiriques du coefficient de cisaillement, notamment:

Neves (1985): $C_w = \rho_a C_d = (2.4 \pm 0.5) 10^{-6}$ pour $W > 10$ m/s

Nihoul (1982): $C_w = \rho_a C_d = (0.98 + 0.14 V) 10^{-6}$

Dans les petits bassins comme l'estuaire de la Casamance, l'effet du vent se fera sentir aux frontières maritimes et à l'extrémité amont où le marnage est très faible. La relation liant les coefficients de rugosité du fond aux coefficients de cisaillement en surface a été utilisée dans notre travail.

II.1.3.2 Equation de continuité

L'équation (II.7) représente la conservation de masse d'une quantité donnée. Dans cette expression les gradients de vitesse devraient se compenser entre eux. L'équation de continuité intégrée sur la profondeur

présente peu de difficultés car les expressions qui renferment des composantes fluctuantes s'annulent par (II.16). Ce qui amène à :

$$\int_{-h}^{\xi} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) dz + W(\xi) - W(-h) = 0$$

En utilisant la règle de Leibnitz (II.17) et en remplaçant $W(\xi)$ et $W(-h)$ par leurs expressions déduites des équations aux limites, on obtient :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial(HU)}{\partial x} + \frac{\partial(HV)}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.36})$$

or $H = h + \xi$ avec $h = \text{constante}$, d'où l'on aura :

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial(HU)}{\partial x} + \frac{\partial(HV)}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.37})$$

II.1.4 Equations du mouvement

En intégrant les équations du mouvement sur la verticale, en utilisant les expressions II.9, II.10, II.17, II.23, II.25 et II.37, le système d'équations à résoudre se ramène à :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} - fV + g \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{gH}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\tau_{sx} - \tau_{fx}}{\rho H} + \nu \nabla^2 U = 0 \quad (\text{II.38})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + fU + g \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{gH}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\tau_{sy} - \tau_{fy}}{\rho H} + \nu \nabla^2 V = 0 \quad (\text{II.39})$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial(HU)}{\partial x} + \frac{\partial(HV)}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.40})$$

Liste des variables :

- U : composante de la vitesse suivant ox
- V : composante de la vitesse suivant oy
- f : force de Coriolis
- ϕ : latitude

- ξ : élévation par rapport au plan de référence
 h : profondeur de l'eau au plan de référence
 H : hauteur totale $h+u$
 g : accélération de la pesanteur
 ρ : densité de l'eau
 S : salinité de l'eau exprimée en %.
 ρ_a : densité de l'air
 ν : coefficient de viscosité artificielle
 C_d : coefficient du cisaillement du vent
 Ω : angle formé entre la direction du vent et l'axe oy
 C_f : coefficient de rugosité du fond
 ∇ : opérateur du divergent.

Ainsi les processus physiques qui seront pris en compte sont:

- 1°- l'accélération locale: $\frac{\partial U_i}{\partial t}$
 2°- l'accélération convective: $U_i \frac{\partial U_i}{\partial x_i} + U_j \frac{\partial U_j}{\partial x_j}$
 3°- la force de Coriolis: $f_c U_i$
 4°- les tensions au fond: τ_f
 5°- les tensions en surface: τ_s
 6°- le gradient de pression hydrostatique: $g(h+\xi) \frac{\partial \xi}{\partial x_i}$
 7°- le gradient de densité: $g \frac{(h+\xi)}{2 \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_i}$

II.1.4.1 Etude comparative

De l'équation de continuité (II.40), on déduit

$$\frac{\partial U}{\partial x} = - \frac{U}{H} \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{V}{H} \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{1}{H} \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

Si la tension en surface est nulle et la densité est constante, en remplaçant $\partial U/\partial x$ par son expression dans l'équation dynamique (suivant ox) on obtient:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{U}{H} \frac{\partial \xi}{\partial t} + V \frac{\partial U}{\partial y} - U \frac{\partial V}{\partial y} - \partial V = \left(-\rho g + \frac{\rho U^2}{H} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{U V}{H} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{U V}{H} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{U^2}{H} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\rho g U (U^2 + V^2)^{1/2}}{C^2 H}$$

Cette estimation approximative de l'importance des termes des équations est effectuée aux trois stations Ziguinchor, Hamdalaye et Sefa de l'estuaire de la Casamance. Posons:

$$u = U_0 \cos(\omega t) \qquad v = V_0 \cos(\omega t + \psi) \qquad \xi = \xi_0 \cos(\omega t + \theta)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} \leq \omega U_0 \qquad \frac{\partial V}{\partial t} \leq \omega V_0 \qquad \frac{\partial \xi}{\partial t} \leq \omega \xi_0$$

	Ziguinchor	Hamdalaye	Sefa
h	6 m	3 m	1.5 m
ξ	0.38 m	0.06 m	0.05 m
U;V	0.9 m/s	0.4 m/s	0.2 m/s
∂h/∂x	<===== 3.9 10 ⁻⁵ =====>		
∂ξ/∂x	<===== 3.3 10 ⁻⁶ =====>		
∂H/∂x	<===== 4.2 10 ⁻⁵ =====>		
f	<===== 1.9 10 ⁻⁴ =====>		
C	<===== 50 =====>		

Equation de continuité:

	$\frac{1}{H} \frac{\partial \xi}{\partial t}$	$\frac{U}{H} \frac{\partial H}{\partial x}$	$\frac{V}{H} \frac{\partial H}{\partial y}$
Ziguinchor:	8.2 10 ⁻⁶	6 10 ⁻⁶	6 10 ⁻⁶
Hamdalaye :	2.8 10 ⁻⁶	5.6 10 ⁻⁶	5.6 10 ⁻⁶
Sefa :	5.6 10 ⁻⁶	8 10 ⁻⁶	8 10 ⁻⁶

Equation de dynamique (ox):

	Ziguinchor	Hamdalaye	Sefa
$\rho \frac{\partial \xi}{\partial t}$	$1.26 \cdot 10^{-4}$	$5.6 \cdot 10^{-5}$	$2.8 \cdot 10^{-5}$
$\frac{\rho U \partial \xi}{H \partial t}$	$7.34 \cdot 10^{-6}$	$1.12 \cdot 10^{-6}$	$1.1 \cdot 10^{-6}$
$f V$	$3.2 \cdot 10^{-4}$	$7.6 \cdot 10^{-5}$	$3.8 \cdot 10^{-5}$
$\rho \frac{\partial \xi}{\partial x}$	$2.3 \cdot 10^{-5}$	$2.3 \cdot 10^{-5}$	$2.3 \cdot 10^{-5}$
$\frac{U^2 \partial h}{H \partial x}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$2.1 \cdot 10^{-6}$	$1.6 \cdot 10^{-6}$
$\frac{\rho g UV}{c^2 H}$	$7.19 \cdot 10^{-4}$	$2.9 \cdot 10^{-4}$	$2.2 \cdot 10^{-4}$

Il ressort de cette étude préliminaire, d'une part l'importance de la pente du fond par rapport à la pente en surface et d'autre part, la prédominance du terme de frottement au fond, surtout dans la partie amont de l'estuaire, par rapport aux autres termes des équations du mouvement. En conséquence, les termes qui auront un rôle important sont: le frottement au fond, le gradient temporel des vitesses, le gradient spatial des élévations.

Cette étude n'a pas pris en compte le terme advectif: $v\partial u/\partial y$ - $u\partial v/\partial x$, par manque d'observations mais aussi du fait des fréquents changements de la direction de l'écoulement dans le milieu naturel. Bien que la grandeur de ce terme ne soit pas toujours importante vis à vis des autres termes de l'équation dynamique, son traitement numérique dans les schémas de résolution nécessite une attention particulière.

II.2 MODELE DE SIMULATION

Une revue rapide des diverses approches rencontrées dans la littérature montre la domination des modèles numériques dans les études de circulation en milieux estuariens. Ce type d'approche consiste à décrire le mouvement des eaux par un ensemble d'équations différentielles avec des conditions initiales et des conditions appropriées aux limites. Le système (II.38,II.39,II.40) obtenu au paragraphe précédent, est caractérisé par des équations non linéaires à coefficients variables. Moyennant certaines hypothèses simplificatrices (linéarisation, coefficients constants, réduction des dimensions du problème), les solutions analytiques sont possibles mais elles se limitent à quelques cas particuliers. C'est pourquoi on a recours le plus souvent aux modèles numériques dont l'essor de l'informatique a facilité l'utilisation.

II.2.1 Méthodes numériques

Les méthodes harmoniques (Le Provost, 1974) caractéristiques (Abbott, 1966, Benqué et al., 1981), éléments finis (Foreman, 1984) et différences finies (Leendertse, 1967, Runday, 1975, Heaps, 1969) sont les méthodes numériques les plus répandues pour le calcul des circulations dans les estuaires, rivières, lacs, ou zones côtières. Chacune de ces techniques repose sur un traitement particulier des équations du mouvement.

Le choix entre ces diverses méthodes est généralement conditionné par:

- 1°- le but de l'étude,
- 2°- les données disponibles,
- 3°- les processus physiques étudiés,
- 4°- la géométrie du milieu,
- 5°- les conditions aux limites.

Les méthodes harmoniques traitent la propagation d'une série d'ondes sinusoïdales où le caractère continu et périodique de la fonction de forçage est pris en compte (Dronkers, 1964). Dans cette approche, la marée est représentée par un ensemble limité de paramètres (amplitudes et phases). Du point de vue pratique, bien que cette méthode ne demande pas un support informatique très puissant, représenter le mouvement de la marée par une série de fonctions harmoniques sinusoïdales n'est pas toujours simple, sauf si une série d'observations de longue durée est disponible et, par conséquent un grand nombre de composantes est pris en compte.

Quant aux méthodes des caractéristiques, elles simulent le mouvement des marées par la propagation successive d'une série de petites perturbations d'un état initial; ainsi le mouvement est construit pas à pas durant le calcul. Relativement performantes dans les études des discontinuités, ces méthodes ne respectent pas certaines propriétés importantes des schémas telle que la conservation. De même l'évolution de ces caractéristiques est arbitraire (Abbott, 1979). Les expériences ont montré que ces deux méthodes se révèlent inadéquates quand la géométrie du milieu est trop accidentée, ce qui les rend moins attractives que les différences finies ou les éléments finis.

La technique des différences finies consiste à transformer les équations différentielles en équations algébriques afin de calculer les diverses inconnues du système (élevations, vitesses). Cette méthode présente plusieurs avantages par rapport aux éléments finis, la simplicité du maillage et de la discrétisation, en particulier. Grâce à son utilisation très répandue les problèmes liés à sa mise en oeuvre sont mieux cernés que ceux introduits par les éléments finis. Par contre cette technique présente quelques déficiences par rapport aux éléments finis. Les plus importantes concernent la difficulté de prendre en compte des

grandeurs tensorielles et, les inconvénients liés à la représentation des limites curvilignes. Ainsi, l'introduction des conditions aux limites devient délicate et, dans certains cas, les coefficients utilisés perdent leur caractère physique pour se transformer en paramètres de contrôle dont l'ajustement conditionnera la capacité prédictive de la modélisation. Il en est de même pour les problèmes numériques qu'on sait maîtriser dans les approches mono-dimensionnelles mais qui deviennent trop complexes quand on passe à deux ou trois dimensions.

II.2.2 Méthode des différences finies

La technique des différences finies permet de transformer les équations continues du système (II.38,II.39,II.40) en une forme discrète, où les variables dépendantes (élevations, vitesses) sont calculées, en un nombre fini de points, dans l'espace considéré. La première étape dans la recherche de la solution, est la définition du support du calcul. Cette grille de calcul servira à délimiter le champ d'étude et, d'autre part, à préciser un nombre fini de points nodaux où les équations du mouvement seront approchées. Entre ces noeuds aucun calcul direct n'est effectué. Pour couvrir tout l'espace étudié, on a donc recours aux méthodes d'interpolation qui se servent des valeurs connues aux noeuds de la grille. La méthode des différences finies suppose, d'une part, la continuité des variables et de leurs dérivées et, d'autre part, impose une limite dans leurs développements.

Les méthodes qui permettent le passage des équations aux dérivées partielles à des équations en différences finies sont la méthode des séries de Taylor, la méthode polynomiale et la méthode des volumes de contrôle (la méthode des intégrales). Chacune de ces techniques se caractérise par des applications et des utilisations différentes.

Les méthodes des séries de Taylor, ainsi que les méthodes polynomiales, reposent sur la notion mathématique de continuité. La première permet d'exprimer les termes différentiels en une série de termes algébriques allant de l'ordre zéro jusqu'à l'ordre n ($n \rightarrow \infty$). Quant à la deuxième, elle s'effectue en deux étapes: la première consiste à identifier les divers coefficients d'un polynôme d'ordre n passant par les valeurs aux noeuds de la grille, puis, en une deuxième étape, on recherche les expressions des dérivées de ce polynôme. Ces deux méthodes permettent d'évaluer l'ordre de l'erreur de troncature de la discrétisation choisie et par conséquent la précision du schéma utilisé. La méthode polynomiale présente un léger désavantage vis-à-vis de la méthode des séries de Taylor car elle est conditionnée par la qualité des observations. En effet, quand on augmente le degré des polynômes les bruits susceptibles d'apparaître dans les données se transmettent aux divers coefficients. Bitsadze (1964) précise que ces erreurs commencent à se faire sentir quand l'ordre du polynôme est supérieur à deux. Dans ce cas la méthode polynomiale diverge et n'amène pas aux mêmes expressions que celles obtenues par les séries de Taylor.

La méthode du volume de contrôle repose sur la notion physique de conservation d'une propriété quelconque du fluide. Cette approche suppose que l'augmentation d'une propriété macroscopique G du système, à l'intérieur d'un volume V , est égale aux flux à travers les différentes faces du volume auquel vient s'ajouter la production (positive) et la dissipation (négative) à l'intérieur du domaine.

Le choix de ces méthodes est conditionné par l'objectif de l'étude. Dans le présent travail les méthodes du volume de contrôle et des séries de Taylor ont été utilisées. La première a permis le choix et la justification des discrétisations susceptibles de respecter les propriétés

de conservation et de transport. Quant à la seconde, elle a permis d'étudier les erreurs de troncature induites dans certains développements.

II.2.3 Mise en oeuvre

La mise en oeuvre de la méthode des différences finies repose sur plusieurs étapes:

- 1°- choisir le type d'approche,
- 2°- choisir le type de développement,
- 3°- choisir la maille de résolution,
- 4°- étudier les propriétés numériques de la discrétisation,
- 5°- appliquer la résolution au champ d'étude.

II.2.3.1 Choix du type d'approche

Les deux approches susceptibles de résoudre les équations du mouvement sont les approches eulériennes et lagrangiennes. Cette dernière décrit mieux les processus physiques mis en jeu. Dans cette approche, la maille du calcul est entraînée avec la même vitesse que celle qui règne dans le milieu. Le terme non-linéaire de l'advection n'existe plus, ce qui élimine les problèmes liés à sa présence dans les développements eulériens.

En revanche, le déplacement de la maille avec le courant entraîne une déformation de la grille de calcul et, dans certains cas, une diminution dans la précision des résultats. Pour illustrer ce problème supposons une discrétisation mono-dimensionnelle telle que :

$$\begin{array}{c} \Delta X' \qquad \qquad \Delta X \\ * \text{---} * \text{---} * \\ i-1 \qquad i \qquad \qquad i+1 \end{array}$$

$$\psi_{i+1} = \psi_i + \frac{\partial \psi}{\partial x} \Delta X + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Delta X^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} \Delta X^3 + O(\Delta X^4) \quad (\text{II.41})$$

$$\psi_{i-1} = \psi_i - \frac{\partial \psi}{\partial x} \Delta X' + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Delta X'^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} \Delta X'^3 + O(\Delta X'^4) \quad (\text{II.42})$$

$$\Delta X' = X_i - X_{i-1}$$

$$\Delta X = X_{i+1} - X_i$$

avec

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right| + \frac{\psi_{i+1} - \psi_i}{\Delta X} + O(\Delta X) \quad (\text{II.43})$$

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial x'_i} \right| = \frac{\psi_i - \psi_{i-1}}{\Delta X'} + O(\Delta X') \quad (\text{II.44})$$

d'où

$$\begin{aligned} \psi_{i+1} - \psi_{i-1} &= \frac{\partial \psi}{\partial x} (\Delta X + \Delta X') + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} ((\Delta X)^2 - (\Delta X')^2) \\ &\quad + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} ((\Delta X)^3 + (\Delta X')^3) + O(\Delta X^4, \Delta X'^4) \end{aligned} \quad (\text{II.45})$$

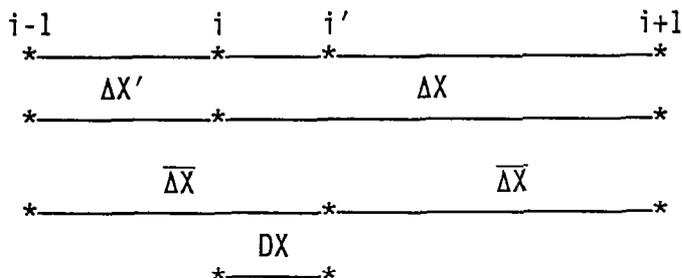
ainsi, en différences centrées, on obtient:

$$1/ \Delta X = \Delta X' \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\psi_{i+1} - \psi_{i-1}}{2 \Delta X} + O(\Delta X^2)$$

$$2/ \Delta X \neq \Delta X' \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\psi_{i+1} - \psi_{i-1}}{(\Delta X + \Delta X')} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} (\Delta X - \Delta X') + O(\max(\Delta X^2, \Delta X'^2))$$

Posons $\bar{\Delta X} = 0.5 (\Delta X + \Delta X')$

$$\begin{aligned} \Delta X &= \bar{\Delta X} + DX \\ \Delta X' &= \bar{\Delta X} - DX \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right) \bar{\Delta X} = \Delta X''$$



On aura

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\psi_{i+1} - \psi_{i-1}}{2\Delta X''} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} (2DX) + O(\max(\Delta X^2, \Delta X'^2)) \quad (\text{II.46})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\psi_{i+1} - \psi_{i-1}}{2\Delta X''} + O(\max(DX, \Delta X^2, \Delta X'^2)) \quad (\text{II.47})$$

L'erreur quadratique est maintenue tant que le degré de DX est inférieur à celui de ΔX ou de $\Delta X'$ donc tant que l'erreur introduite par DX est inférieure à celle introduite par ΔX et $\Delta X'$. Si l'erreur induite par DX est comparable, voire plus importante que celle introduite par ΔX^2 et $\Delta X'^2$, la diffusion numérique s'amplifie et tend à déstabiliser le système. En vertu de l'expression (II.45), la discrétisation du second ordre amène à une erreur de l'ordre de:

$$O \left[\frac{\Delta X^2 - \Delta X'^2}{\Delta X + \Delta X'} \right] \quad (\text{II.48})$$

Les mêmes conclusions s'appliquent à une approche eulérienne, quand une variation de taille des mailles est effectuée dans le but d'améliorer la précision de la résolution aux noeuds limitrophes des singularités géométriques. De même, certains critères de stabilité entraîneront des restrictions supplémentaires sur le pas temporel et par conséquent augmenteront le coût de la simulation. Il s'ensuit qu'une amélioration n'est atteinte que si la variation des pas spatiaux s'effectue lentement et progressivement.

Dans l'approche lagrangienne, la distance entre les noeuds du calcul augmente ou diminue suivant l'étape considérée du cycle de la marée, ce qui n'est pas le cas dans l'approche eulérienne où les distances entre les noeuds du calcul restent constantes alors que le volume entre les divers noeuds de la grille varie. C'est

cette dernière approche qui a été adoptée dans notre modélisation de la circulation transitoire dans l'estuaire de la Casamance.

II.2.3.2 Choix du type de développement

Le choix du type de discrétisation à adopter dépend de la grandeur du milieu, des phénomènes physiques étudiés et du support informatique disponible. Les trois types de développements le plus souvent rencontrés sont les discrétisations explicites, implicites et semi implicites; ils diffèrent par la méthode de discrétisation temporelle.

Une discrétisation est dite explicite si les noeuds d'un schéma choisi sont déterminés sans avoir recours aux schémas voisins. Dans les schémas implicites, chaque opérateur numérique est influencé par son entourage et influence à son tour son entourage selon les conditions imposées par la discrétisation. Plus faciles à mettre en oeuvre, les modèles explicites (Heaps, 1969, Hansen et al., 1966, Runday, 1975) fournissent progressivement les résultats sur les différents noeuds avec l'évolution du calcul. Dans ces approches, le choix des pas de discrétisation est généralement limité par la condition de Courant, Freidrich et Lewy (C.F.L) qui impose un balayage de la grille à une vitesse supérieure à la vitesse maximale de propagation. La condition de C.F.L conduit, dans certains cas, à des pas de résolution trop restrictifs. Ces contraintes numériques ont conduit au développement des schémas implicites (Backhus, 1983, Benqué et al., 1982) qui offrent la possibilité d'utiliser des mailles de plus grande taille, d'où une réduction appréciable du coût des simulations.

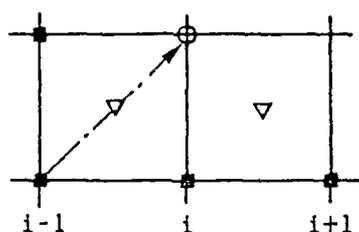
Les méthodes implicites conduisent à la résolution de tous les noeuds en même temps. Une perturbation ϵ est aussi emportée à une distance $L = n.\Delta x$ en un pas de temps tandis que, dans les méthodes explicites, la perturbation est toujours entraînée vers les points

de la grille qui avoisinent le noeud de calcul et, par conséquent à une distance $L=\Delta x$ quel que soit ΔT . D'un autre côté, dans le cas d'un système bidimensionnel, les méthodes implicites amènent à l'inversion, à chaque pas de temps, d'une matrice penta-diagonale, ce qui nécessite la résolution de n équations simultanées et par conséquent un support informatique de grande capacité de stockage. De même, certaines procédures itératives rendent la résolution plus longue et réduisent l'avantage acquis par l'utilisation d'un algorithme implicite.

Les conditions restrictives des schémas explicites et la lourdeur des schémas implicites ont conduit au développement des méthodes semi-implicites. Ces techniques permettent de fractionner le pas de temps afin de ramener le système à des matrices tri-diagonales qui sont généralement résolues par un algorithme de double balayage. Plusieurs méthodes s'adaptent bien à ces schémas, mais la technique des dérivées angulaires (A.D.I) est la plus fréquemment utilisée.

Méthode de la dérivée angulaire (A.D.I) (fig.II.4)

Mise au point par Robert et Weiss (1966), cette méthode repose sur une discrétisation spatio-temporelle centrée au demi-pas de temps. Les dérivées spatiales sont évaluées en moyennant les valeurs des noeuds se trouvant sur la diagonale descendante de la grille. Cette moyenne pourrait se faire sur la diagonale ascendante mais le critère de stabilité devient plus restrictif.



- : valeurs connues
- : valeurs inconnues
- △ : valeurs centrées sur la diagonale au demi pas de temps

fig.II.4-Schéma A.D.I

L'utilisation de cette technique amène à des schémas inconditionnellement stables avec une précision du second ordre

$O(DX^2, DY^2, DT^2)$. Ces deux propriétés numériques se détériorent pour certains traitements aux limites ou dans le cas d'un écoulement fortement non linéaire. En effet, les expériences faites avec des modèles reposant sur la technique A.D.I ont montré que l'introduction des termes non linéaires réduit l'ordre de précision à $O(DX^2, DY^2, DT)$. Certains auteurs suggèrent l'utilisation des procédures itératives pour maintenir la précision du second ordre.

Bien que l'analyse de la stabilité par la méthode de Von Neumann indique une stabilité inconditionnelle, on remarque que le problème implicite aux limites entraîne des restrictions similaires à celles obtenues par les méthodes explicites. Il n'existe pas de traitement universel aux limites mais on admet que le calcul aux noeuds proches des bords doit être effectué par une des méthodes suivantes:

- en interpolant à l'intérieur du domaine d'intégration (Gerritsen, 1982),
- en annulant les variables aux noeuds en question (Leendertse, 1967),
- en définissant des grandeurs fictives à l'extérieur du domaine, qui permettront de conserver la forme des discrétisations (Noye, 1981).

La réussite de ces artefacts numériques dépend, d'une part, du milieu étudié et, d'autre part, des processus physiques simulés. Par exemple, l'interpolation à l'intérieur du domaine est précise si on respecte la direction de l'écoulement tout en considérant un petit pas de temps; sinon, la convergence vers la solution exacte est nettement ralentie. Ces problèmes ne sont pas uniquement liés aux méthodes A.D.I, mais ils apparaissent dans tous les développements implicites.

Les milieux naturels renferment plusieurs types de limites. Le paragraphe consacré à leurs traitements numériques précisera les divers cas rencontrés dans l'estuaire de la Casamance.

II.2.3.3 Choix de la grille

Cette notion préliminaire consiste à faire le choix de la répartition spatiale des variables dépendantes dans le domaine d'intégration. Les premiers schémas développés regroupaient toutes les variables dépendantes aux mêmes noeuds de la grille; ce qui conduit à la répartition spatiale suivante:

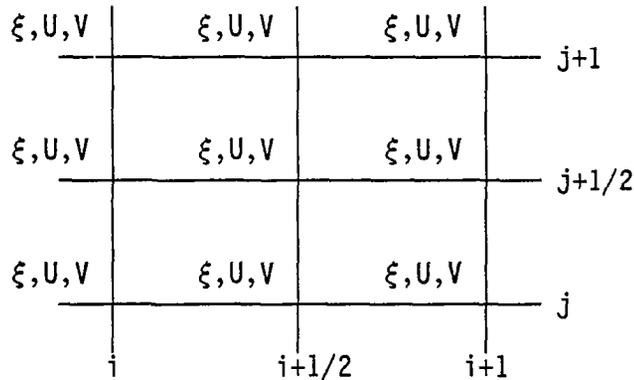


fig.II.5-Maille non imbriquée.

Ce type de représentation nécessite le recours à l'introduction de conditions supplémentaires aux limites et, conduit dans certains cas à une mauvaise schématisation de la réalité. L'exemple donné par Patankar (1980) illustre cet inconvénient; en effet, pour une répartition d'une propriété ψ suivant la figure II.6 et pour une discrétisation centrée, on obtient une distribution uniforme de ψ . Ce problème s'aggrave dans les approches bidimensionnelles où les points i n'auront aucun rôle à jouer (fig.II.6).

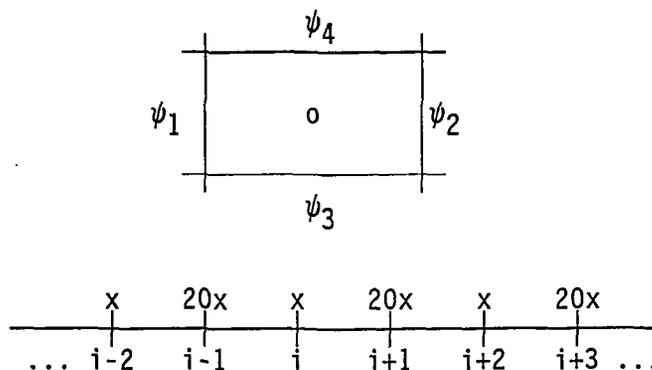
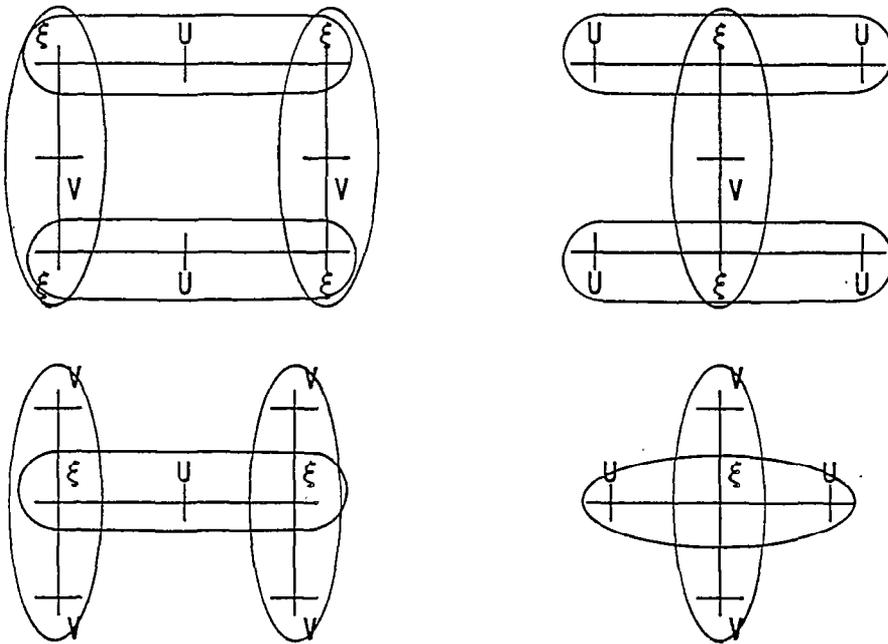


fig.II.6-Répartition non-uniforme de ψ résolue par un schéma centré.

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\psi(i+1) - \psi(i-1)}{2\Delta X} = 0 \quad \forall i$$

Les mailles imbriquées résolvent ce problème en utilisant pour chaque variable dépendante une grille différente de façon que l'assemblage de ces diverses grilles forme le schéma d'intégration.

Plusieurs types de représentations existent, dont les plus utilisées sont :



où pour un volume de contrôle V , les composantes de la vitesse sont choisies sur les faces normales à la direction de l'écoulement considéré.

Les schémas imbriqués facilitent l'introduction des conditions aux limites (Kreiss, 1966); la frontière qui passe par une des variables dépendantes ne nécessite pas la définition d'une condition supplémentaire pour les variables qui se trouvent distancées par rapport à la position du volume de contrôle. Il s'ensuit que pour un même degré de précision, le nombre de variables nécessaires est réduit d'un facteur égal à 4.

II.2.4 Propriétés numériques de la discrétisation

La résolution du système discrétisé amène à exprimer la variable dépendante recherchée ψ_R en fonction des grandeurs aux noeuds qui l'entourent. Ceci conduit à une expression de la forme: (fig.II.7)

$$A_R \psi_R = A_G \psi_G + A_D \psi_D + A_M \psi_M + A_V \psi_V + A_H \psi_H + A_B \psi_B + \text{terme source} \quad (\text{II.49})$$

G : gauche M : amont R : recherchée
D : droite H : haut V : aval B : bas

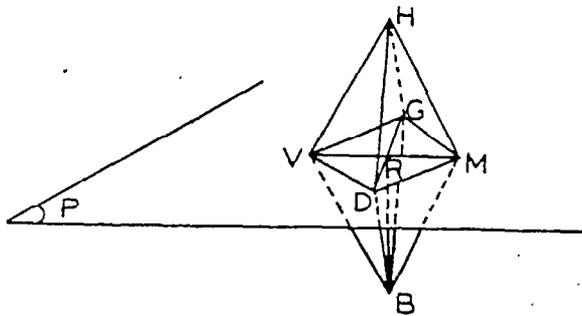


fig. II.7- Schéma 3-D du domaine de dépendance du point R.

La consistance aux frontières (a) et les propriétés (b) relatives aux coefficients de l'expression (II.49) représentent les conditions de base nécessaires pour toute discrétisation afin de parvenir à des résultats physiquement réalistes.

- a - dans les équations discrètes de deux volumes de contrôle adjacents le flux à travers une frontière commune doit être représenté par une même expression (Patankar, 1980). Le flux qui sort du volume (1) doit être égal à celui qui rentre dans (2) (fig.II.8).

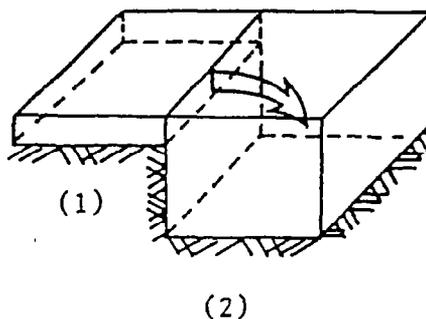


fig. II.8-Flux à travers une frontière de deux volumes de contrôle adjacents.

b - l'expression (II.49) suppose que la variable ψ_R est influencée par tous les noeuds qui l'entourent. Une augmentation qui se produit en un noeud doit être ressentie sur tous les noeuds qui l'avoisinent. Il est donc nécessaire, d'une part, que les coefficients a_j soient tous de même signe et, d'autre part, que le coefficient de la variable soit égal à la somme des coefficients des variables prises en compte (Abbott, 1979).

II.2.4.1 Divers types d'erreurs

La modélisation doit décrire un phénomène particulier avec une précision suffisante et un coût minimal. Précision et coût sont deux contraintes opposées. La première peut être indéfiniment améliorée en réduisant les pas de discrétisation mais ceci entraînera une augmentation du coût de la simulation. Par conséquent, le choix de la discrétisation la plus adéquate, parmi les différentes possibilités doit nécessairement satisfaire les conditions optimales de précision et de stabilité avec, d'une part, un minimum de stockage d'informations et, d'autre part, un minimum de temps de calcul.

Le critère d'évaluation d'une méthode de résolution doit passer par les études des erreurs commises dans les divers développements choisis. Les deux grands types d'erreurs rencontrés sont les erreurs d'arrondissement et les erreurs de troncature (Roache, 1972)

Les erreurs d'arrondi sont des erreurs automatiques, liées à la précision du support informatique utilisé. A chaque calcul la machine effectue un arrondissement des valeurs. Ces erreurs sont indépendantes des pas de discrétisation, mais leurs effets parasites s'accumulent et tendent à ramener le système vers une fausse convergence. L'augmentation du nombre

de chiffres significatifs après la virgule, ne mène pas forcément à une amélioration du résultat final. Par analogie, les méthodes d'interpolation qui se servent de polynômes de degré élevé sont plus sensibles aux bruits numériques que celles qui utilisent des polynômes du premier ou du second ordre. Il en est de même pour le critère de convergence des méthodes itératives. Leur caractère aléatoire rend leur évaluation difficile et l'analyse de leur comportement ne s'effectue qu'à partir des résultats obtenus.

Toutes les erreurs autres que celles d'arrondis sont considérées comme des erreurs de troncature, car elles s'annulent quand les pas spatio-temporels tendent vers zéro. Un protocole de priorité s'impose afin d'évaluer ces erreurs et de justifier les diverses discrétisations choisies.

Une discrétisation doit satisfaire aux propriétés suivantes:

- 1°- représenter les propriétés de conservation;
- 2°- représenter les propriétés de transport;
- 3°- présenter une faible dispersion numérique;
- 4°- présenter une faible dissipation numérique;
- 5°- éliminer les oscillations spatiales;
- 6°- réduire les erreurs aux limites.

Cette liste non exhaustive est fortement conditionnée, d'une part, par les caractéristiques géomorphologiques du champ d'application et, d'autre part, par les processus physiques étudiés. Par exemple, la simulation d'un processus X à partir d'un schéma de résolution implicite qui présente une erreur de discrétisation du premier ordre sur le temps $O(\Delta T, \Delta X^2)$ peut conduire à des résultats qualitativement meilleurs qu'une méthode explicite du second ordre $O(\Delta T^2, \Delta X^2)$. Ceci peut ne pas être vrai pour la simulation d'un autre phénomène Y avec les mêmes schémas. D'où la complexité d'une classification des schémas en fonction de leurs erreurs

(Richtmyer *et al.*, 1967). Dans certains cas, quelques propriétés de la liste énumérées précédemment deviennent de moindre importance. Par exemple l'étude de l'erreur de phase est sans importance quand le régime permanent est recherché.

Il est donc préférable, dans certains cas, d'étudier la validité de l'approche en fonction de ces propriétés particulières plutôt que de se limiter à une évaluation de l'erreur de troncature bien que cette dernière garde son importance.

Dans les méthodes numériques qui utilisent la technique des différences finies la diminution de la grandeur de la grille devrait amener, si le schéma est bien conçu, à la convergence de la solution numérique vers la solution analytique. Malheureusement, les limitations de taille de mémoire et de vitesse de résolution conduisent souvent à s'intéresser plutôt à une meilleure approximation des équations différentielles, ce qui permet l'utilisation de pas de calcul plus grands, avec des méthodes numériques plus simples.

II.2.4.2 Propriétés numériques des schémas d'intégration

La mise en oeuvre d'une résolution nécessite le respect de certaines conditions numériques: la consistance et la convergence du schéma utilisé d'une part et, la stabilité de la solution trouvée d'autre part. Ces conditions sont dues aux passages de la solution exacte E des équations différentielles à la solution exacte U des équations discrétisées et, enfin, à la solution numérique u des équations aux différences finies.

A: Convergence

Soient E_j et U_j les solutions respectives des équations différentielles et de leurs équations approximatives en différences finies; la solution U_j des équations aux différences est dite

convergente si U_j tend vers E_j quand les pas spatio-temporels de la discrétisation, Δx_j et ΔT , tendent vers zéro.

La recherche des conditions qui permettent à la solution de la forme discrète U de tendre vers la solution de la forme continue E constitue le problème de convergence. Mis à part quelques cas simples (systèmes linéarisés à coefficients constants et unidimensionnels), le calcul de E et U est complexe et laborieux; ceci rend la vérification de cette propriété difficilement réalisable.

L'erreur de troncature ($E_j - U_j$) dépend de la taille de la maille de calcul, donc de ΔT et Δx_j et de l'ordre des dérivées prises en compte dans le développement des termes en séries de Taylor. Quant à Δx_j et ΔT , ils dépendent du nombre d'équations à résoudre, du schéma d'intégration et de l'espace requis pour stocker les informations. L'expression finale de l'erreur de discrétisation est généralement faite en termes inconnus des dérivées pour lesquelles on ne peut spécifier une limite supérieure ou inférieure.

Le problème de convergence présente donc d'énormes difficultés pour sa mise en oeuvre afin de parvenir à des conclusions profitables (Lambert, 1977).

B: Stabilité

A chaque opération arithmétique l'ordinateur commet une erreur qui conduit à la solution numérique u , en contraste avec la solution exacte U du système discrétisé. L'évaluation de ces erreurs n'est pas simple vu sa distribution arbitraire. Une estimation de sa valeur et de son influence peut s'effectuer à partir des études de stabilité.

Le concept de stabilité ne fait aucune référence aux équations différentielles qu'on veut résoudre: c'est uniquement une propriété des équations aux différences finies.

S'il était possible de développer la solution des équations aux différences jusqu'à la dernière décimale, on obtiendrait la solution exacte U . En pratique on se limite à un certain nombre de décimales. Cette procédure introduit une erreur à chaque pas de calcul et la solution calculée u (solution numérique) diffère de la solution exacte U . Un système d'équations est stable si l'effet cumulatif de ces erreurs est négligeable. De la même façon, si des erreurs e_{ij} sont introduites aux divers noeuds du système P_{ij} et si $|e_{ij}| < \delta$, le système est alors considéré comme stable si $\text{Max } |U-u|$ tend vers 0 quand δ tend vers 0 et ne croît pas exponentiellement avec le nombre de colonnes ou de lignes du maillage. Cette dernière condition est nécessaire car, dans certains cas, l'erreur ne diminue pas exponentiellement mais elle persiste sous forme d'une combinaison linéaire de l'erreur initiale. Ces erreurs ne seraient tolérables que si leur somme était nettement inférieure à u .

La stabilité n'est pas reliée directement à la solution de l'équation différentielle mais elle concerne le comportement de la solution quand une perturbation volontaire est introduite dans le système. La solution numérique est généralement plus exacte que ne le prévoient certaines méthodes d'analyse de stabilité. En effet l'application de ces méthodes suppose la pire combinaison des erreurs locales suivant une distribution à signe constant positif et, un effet total additif ce qui n'est pas forcément vrai.

Les approches les plus utilisées dans les études de stabilité sont:

B.1 Analyse d'une perturbation discrète

Cette méthode consiste à introduire une erreur ϵ en un noeud du maillage; la résolution est considérée stable si cette erreur volontaire ne s'amplifie pas avec l'évolution du calcul. Dans cette approche on peut se limiter à l'analyse de la propagation de l'erreur sur

une seule ligne du système matriciel, l'effet des autres lignes étant déduit de la somme des effets de chaque ligne séparément. Le système sera considéré stable si l'erreur reste limitée quand son indice croît.

L'introduction d'une perturbation ϵ en un noeud correspond aux erreurs de discrétisation dans les expressions des divers termes des équations du mouvement en ce point (Wendroff, 1961 et 1965).

B.2 Méthode de HIRT

Mise au point par Hirt (1968), cette méthode sert à étudier le comportement de l'erreur de discrétisation introduite par les divers développements choisis. L'équation aux différences n'est autre qu'une nouvelle forme d'écriture de l'équation différentielle. Cette forme, à l'exception de l'erreur de troncature, correspond à l'équation différentielle en tous points de la grille d'intégration.

La forme continue est obtenue en remplaçant chaque terme des équations discrétisées par leur développement en des séries de Taylor. L'ordre inférieur doit correspondre à l'équation différentielle de départ et les termes d'ordre supérieur représenteront l'erreur introduite par la discrétisation. La stabilité du schéma est étudiée en analysant ces termes.

B.3 Méthode des séries de Fourier

Dans cette procédure une erreur ϵ est introduite dans le schéma de différences finies sous forme d'une série de Fourier en un point arbitraire $P(i,j)$, tel que $\epsilon_{ij} = e^{i(\beta x + \sigma t)}$. On analyse l'effet de cette perturbation volontaire dans le calcul de la solution des équations aux différences. Le système est considéré comme stable si cette perturbation meurt progressivement.

La propriété de linéarité des séries de Fourier permet de se contenter de l'étude du comportement d'un seul terme de la somme des séries qui définit le train d'onde (Piskounov, 1974). Ce dernier est donné par:

$$\tau(x,t) = \exp(i\pi m(x-ut)) \quad (\text{II.50})$$

$k=2/m$: longueur d'onde

πm : nombre d'onde

avec une valeur initiale :

$$\tau(j,0) = \exp(i\pi m z) = \exp(i\beta j) \quad (\text{II.51})$$

$$\beta = \pi.m.\Delta X$$

L'équation algébrique déduite de la discrétisation choisie, aura une solution exacte qui satisfait la condition initiale (II.51) et qui s'exprime sous la forme:

$$\tau(j\Delta X, n\Delta T) = [G]^n \cdot \exp(i\beta j) \quad (\text{II.52})$$

L'expression de l'erreur introduite dans la discrétisation est donnée par :

$$\epsilon(j\Delta X, n\Delta T) = [G]^n \exp(i\beta j) \quad (\text{II.53})$$

où G représente la matrice d'amplification qui permet le calcul des variables à l'instant $(n+1)\Delta T$ en fonction de leurs valeurs à l'instant $n\Delta T$. G peut être exprimé en fonction de son module et de son argument par:

$$G = |G| \exp(-iv) \quad (\text{II.54})$$

avec $|G|$: module de G

v : argument de G

En conséquence la solution numérique de l'équation en différences finies s'écrit:

$$\tau(j\Delta X, n\Delta T) = |G|^n \exp(i\pi m(j\Delta X - nv/\pi m)) \quad (\text{II.55})$$

et la solution exacte de l'équation différentielle est

$$\tau(j\Delta X, n\Delta T) = \exp(i\pi m(j\Delta X - nu\Delta T)) \quad (\text{II.56})$$

En comparant les expressions (II.55, II.56) on remarque que

Les solutions exactes et numériques diffèrent en amplitude et en célérité. La vitesse numérique est alors :

$$u(\text{num}) = v / \pi \Delta T \quad (\text{II.57})$$

L'introduction du nombre de courant amène à :

$$\frac{u(\text{num})}{u} = \frac{v}{\pi \Delta X} = \frac{v}{\beta c} \quad (\text{II.58})$$

Cette méthode locale, développée par Von Neumann durant la 2^{ème} guerre mondiale, a été publiée par O'Brien et al. en 1951. Bien qu'elle ne soit appliquée qu'à des systèmes linéarisés à coefficients constants, elle présente l'avantage de fournir des informations non seulement sur l'atténuation d'une perturbation (module de G), mais encore sur l'effet de phase produit ($u(\text{num})/u$). Elle rentre donc dans le résultat que peut donner cette erreur. Par exemple, une discrétisation qui amène à un $|G|=0.99$ et $u(\text{num})/u = 1.15$, présente un développement où le train d'onde à chaque pas de temps subit une faible atténuation et une déviation importante de la célérité. La technique numérique idéale étant celle qui conduit à des valeurs de $|G|$ égales à 1 quel que soit β et c , de façon que $\arg(G) = -\beta c$ et $u(\text{num})/u=1$; dans ce cas aucun changement de phase n'est théoriquement susceptible d'apparaître.

La condition nécessaire de stabilité de Von Neumann impose aux valeurs propres de la matrice d'amplification des valeurs absolues inférieures à 1. Cette condition est équivalente à celle de Friedrich qui, pour des matrices d'amplifications symétriques à coefficients variables et pour des schémas consistants, impose que la somme des matrices d'amplification ne soit pas négative (Hahn, 1958).

C: Consistance

Il est possible d'approcher une équation différentielle par une équation aux différences finies au moyen d'un schéma numérique stable, mais dont la solution ne converge pas vers la solution exacte quand

les dimensions de la grille tendent vers 0. Ce type de schéma est dit inconsistant.

La consistance est une notion qui repose sur la définition de la limite des dérivées. Cette propriété n'est pas étudiée pour chaque terme du développement séparément, mais elle traite la limite de la solution des équations (Roache, 1972). La vérification se fait en remplaçant chaque variable de l'équation différentielle par son expression en série de Taylor. L'erreur de troncature devrait tendre vers 0 quand les pas de calcul tendent vers 0.

Cette propriété, nécessaire pour la convergence, ne constitue pas une condition suffisante. L'équation aux différences peut tendre vers l'équation différentielle quand les pas de discrétisation s'approchent de zéro. Ceci ne conduit pas nécessairement à un rapprochement entre la solution numérique et la solution continue, car une fausse convergence peut apparaître.

D: Condition de Lax

Il existe une relation étroite entre la stabilité des schémas en différences finies et la convergence de leurs solutions avec la consistance des équations différentielles. Un exemple de cette relation est donné par Lax et al. (1960).

Supposons une valeur initiale (linéaire) et une approximation en différences finies d'un problème telle qu'elle satisfasse la condition de consistance. La stabilité est la condition nécessaire et suffisante pour la convergence. Le théorème d'équivalence de Lax peut être prouvé pour des équations linéarisées à coefficients constants opérant sur des valeurs initiales et aux limites uniformément continues (Godunov et al., 1964).

Dans la majorité des cas réels, l'étude de la consistance et de la stabilité sur des systèmes linéarisés à coefficients constants est

beaucoup plus simple que l'étude de la convergence. Il s'ensuit que cette relation permettra, pour des équations simplifiées, d'éviter le souci de prouver la convergence de la solution ce qui représente une économie numérique appréciable.

II.2.5 Conclusions

Les méthodes d'analyse de stabilité évoquées auparavant sont généralement appliquées à des systèmes linéarisés à coefficients constants. D'autres méthodes existent, mais leur utilisation est moins fréquente. On citera la méthode spectrale et la méthode de l'énergie (Richtmyer *et al.*, 1967), le critère de Schur et Cohn (Kusic *et al.*, 1969). Ces méthodes sont généralement appliquées à des schémas de résolution simple. Leur inconvénient est qu'elles entraînent des calculs analytiques compliqués même pour des problèmes assez simples.

Les diverses méthodes d'étude de stabilité imposent des conditions trop simplificatrices aux équations du mouvement. Les études sur ces équations simplifiées sont effectuées en des points à l'intérieur du domaine d'intégration, loin des limites. Généralement, ce sont ces hypothèses qui causent le plus de problèmes. Par exemple, le traitement des noeuds proches des limites impose, dans certains milieux, une réduction de l'ordre de discrétisation, qui pourrait avoir un effet déstabilisant pour certains développements stables à l'intérieur du domaine.

Bien que Trapp et Ramshaw (1976) aient essayé d'étendre la méthode de Von Neumann jusqu'aux noeuds limitrophes, la diversité des types de limites rencontrées dans les milieux naturels limite la généralisation de leur approche.

Plusieurs publications mettent en évidence certains des problèmes induit par ces hypothèses. On citera à titre de référence les

travaux de Phillips (1958) qui donna un exemple sur le type d'instabilités provoquées par les termes non linéaires, de Lilly (1965) qui analysa l'importance des coefficients variables, d'Abbott (1979) qui a mis en évidence l'importance des conditions initiales pour certaines discrétisations, de Hirt (1968) qui étudia les problèmes qui conduisent à l'introduction d'une diffusion négative.

Il apparaît que la stabilité, même pour des systèmes simplifiés, n'a pas une définition universellement applicable. Il n'existe pas de critère adéquat pour le calcul pratique et toutes les méthodes citées jusqu'à présent ne sont qu'approximatives et locales. Il est difficile de distinguer entre ce qu'on admet comme instabilité et ce qu'on entend par faible convergence.

Toute approche de modélisation de ces aspects numériques devient expérimentale, car les mouvements réels ne se font jamais suivant les hypothèses imposées dans ces méthodes. Ainsi la prudence, la nature des processus étudiés et la géométrie du milieu conduisent souvent à adopter une fraction du critère trouvé. Les divers traitements numériques reliés à la stabilité ne devraient pas être considérés comme une fin mais comme un moyen efficace et un support rationnel qui devrait orienter les expérimentations numériques.

Dans notre travail, les trois méthodes citées dans le paragraphe précédent ont été utilisées: la méthode de Von Neumann a permis d'évaluer les erreurs de phase et d'amplitude de plusieurs types de discrétisations, la méthode de Hirt a conduit à des conclusions intéressantes sur l'importance de la diffusion négative; enfin la méthode de la perturbation discrétisée a servi à analyser les propriétés de transport et de conservation de certains développements.

II.3 PROPRIETES NUMERIQUES DU TERME ADVECTIF

II.3.1 Introduction

L'importance des termes non-linéaires du système (II.38,II.39,II.40) dépend du champ d'application et des circonstances liées à l'étude. Dans certains cas, la linéarisation des équations est possible. Cette simplification constitue, pour une marée simple, l'élément de base de la méthode harmonique du calcul des marées (Dronkers, 1964).

Dans les cas où la linéarisation est possible, la réduction des dimensions des équations permet d'obtenir des solutions analytiques du problème. Ce type de résolution n'est adapté qu'à des phénomènes qui évoluent dans des milieux à géométrie simple et leur généralisation ne peut être envisageable. Il faut garder à l'esprit l'influence des simplifications apportées aux équations du mouvement sur le phénomène étudié. Par exemple, si le mouvement résiduel est recherché, on ne peut a priori négliger le terme advectif qui joue un rôle important dans ce type d'écoulement (Tee, 1980, Nihoul, 1975).

Les termes non-linéaires du système (II.38,II.39,II.40) sont:

1°- pour l'équation de continuité

$$\frac{\partial Su}{\partial x} \quad \text{et} \quad L \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

2°- pour l'équation dynamique

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{et} \quad \tau(\text{fond}) = \rho \cdot K \cdot u \cdot |u|$$

Les termes non-linéaires de l'équation de continuité jouent un rôle secondaire. La section mouillée et le rayon hydraulique varient en fonction de l'élévation relative d'une section à une autre. Leur caractère non-linéaire ne pose pas un grand problème (Dronkers, 1964).

Les termes advectifs prennent de l'importance dans les milieux où un grand changement se produit en h et L sur une petite

distance. Bien que leur valeur soit de moindre importance par rapport aux autres termes des équations du mouvement ils sont à l'origine des principaux problèmes numériques rencontrés dans la modélisation.

Le processus physique décrit par l'advection est le transport d'une certaine propriété fluide suivant la direction de l'écoulement. Ce transport doit être conservatif par le biais d'une discrétisation qui respecte cette propriété fondamentale et qui présente une faible erreur de troncature. Cette dernière condition est nécessaire mais non suffisante. Une faible erreur de troncature ne conduit pas nécessairement à une faible erreur sur le résultat final.

Lamb (1932) a montré que les effets des termes non linéaires ne se limitent pas à la création d'harmoniques résultant de la perturbation initiale, mais qu'ils conduisent à l'apparition de nouvelles composantes dues à la combinaison linéaire des fréquences de l'onde initiale. La marée perdra son caractère sinusoïdal symétrique: la descente du niveau d'eau occupe plus de temps que la montée:

$$Z(j,n).Z(j,n)=\exp(ik\mu v X).\exp(ik\mu v X)=\exp(i2km\Delta X) \quad (\text{II.59})$$

Ce phénomène complique le développement des composantes astronomiques de la marée et impose une condition sur le rapport élévation sur hauteur de l'eau, afin que la solution trigonométrique reste valable.

Les problèmes induits par les termes advectifs, ne se limitent pas à leur caractère non-linéaire ou à la variation des coefficients dans leurs expressions: ils peuvent être dus à une "mauvaise" discrétisation.

Dans les solutions continues des équations différentielles, la distribution initiale se propage à la vitesse u tandis que, dans la méthode des différences finies, plusieurs composantes de Fourier sont présentes dont les vitesses de propagation sont différentes. La vitesse la

plus importante s'approche de u et correspond à la plus grande longueur d'onde tandis que les autres harmoniques se propagent à des vitesses moins importantes.

A un instant bien déterminé, les variations spatiales peuvent être considérées comme une représentation de séries de Fourier avec différentes fréquences spatiales (nombre d'onde). Les problèmes numériques qui en découlent sont, d'une part, les dispersions numériques et, d'autre part, les dissipations numériques.

Dispersif, veut dire qu'une composante se propage à une vitesse différente de celle de la solution exacte et, dissipatif signifie qu'une composante décroît en amplitude sans qu'il y ait une raison physique à cette atténuation. Ces deux propriétés sont à l'origine des instabilités dynamiques et statiques. Les premières sont des oscillations qui apparaissent dans la résolution et qui peuvent être éliminées en réduisant le pas de temps en dessous du pas critique. Quant aux instabilités statiques, l'erreur augmente d'une façon monotone. Ce type d'erreur ne s'élimine pas en réduisant ΔT , mais un changement de discrétisation est nécessaire. Bien que certains processus physiques possèdent une dissipation faible ou limitée localement, le type de développement choisi peut conduire à l'amplification de certaines composantes et par conséquent à des instabilités numériques.

Dans les milieux peu profonds, les interactions "non linéaires" des composantes harmoniques sont faibles. Il est possible d'obtenir un critère représentatif des diverses expressions du terme advectif en considérant un système d'équations linéarisées. Cette hypothèse permettra, d'une part, d'admettre la superposition et, d'autre part, de limiter l'étude à une seule composante des séries de Fourier, puis qu'elles se propagent d'une façon indépendante.

II.3.2 Diverses discrétisations du terme advectif

Une classification exhaustive des schémas numériques serait trop longue en raison de l'existence d'une multitude de schémas hybrides. On s'est limité à la résolution d'une équation hyperbolique à coefficients constant, suivant deux types de discrétisation, l'une amont et l'autre centrée. Cette analyse est réalisée sur quelques schémas classiques afin d'obtenir le critère de stabilité (Von Neumann) et d'évaluer l'importance de la diffusion numérique (Hirt). Les étapes du calcul ne seront développées que pour le premier schéma (explicite centré); pour les autres, on se contentera de reproduire les résultats.

L'équation à résoudre est:

$$\underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial t}}_{\text{advection}} + u \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial x}}_{\text{diffusion}} = v \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (\text{II.60})$$

ψ : variable dépendante,

u : vitesse constante,

v : coefficient de diffusion,

x : coordonnée spatiale,

t : coordonnée temporelle.

En appliquant les développements par des séries de Taylor à $\psi(j,n+1)$, $\psi(j+1,n)$, $\psi(j-1,n)$, $\psi(j+1,n+1)$, $\psi(j-1,n+1)$, on obtient:

$$\psi(j,n+1) = \psi(j,n) + \frac{\partial \psi}{\partial t} \Delta T + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \frac{\Delta T^2}{2} + O(\Delta T^3) \quad (\text{II.61})$$

$$\psi(j+1,n) = \psi(j,n) + \frac{\partial \psi}{\partial x} \Delta X + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\Delta X^2}{2} + O(\Delta X^3) \quad (\text{II.62})$$

$$\psi(j-1,n) = \psi(j,n) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \Delta X + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\Delta X^2}{2} + O(\Delta X^3) \quad (\text{II.63})$$

$$\psi(j+1,n+1) = \psi(j,n) + \frac{\partial \psi}{\partial t} \Delta T + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \frac{\Delta T^2}{2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \Delta X + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\Delta X^2}{2} + O(\Delta X^3, \Delta T^3) \quad (\text{II.64})$$

$$\psi(j-1, n+1) = \psi(j, n) + \frac{\partial \psi}{\partial t} \Delta T + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \frac{\Delta T^2}{2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \Delta X + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\Delta X^2}{2} + O(\Delta X^3, \Delta T^3) \quad (\text{II.65})$$

II.3.2.1 Schéma explicite centré

La stabilité est une caractéristique qu'un bon schéma doit posséder. La procédure de calcul doit en conséquence être choisie de telle manière que la solution trouvée ait une erreur qui soit toujours tolérable et bornée. La méthode de Von Neumann, évoquée au paragraphe précédent, consiste à exprimer la solution suivant des séries de Fourier. Il en résulte une matrice d'amplification qui permet le passage des variables de l'instant t à l'instant $t+\Delta t$. Le critère de stabilité est évalué en examinant l'amplification et l'amortissement de l'onde à chaque noeud de la grille de calcul.

La solution aura la forme suivante:

$$\psi(j, n) = (G)^n \exp(iK_x(j\Delta X)) \quad (\text{II.66})$$

n : indice de temps,

j : indice d'espace,

ΔX : pas spatial,

G : matrice d'amplification,

c : nombre de courant = $u\Delta T/\Delta X$

La matrice d'amplification au temps $n\Delta T$ d'une composante particulière de nombre d'onde K_x , donc de longueur d'onde $\nu = 2\pi/K_x$, aura un angle de phase θ égal à K_x , défini sur un domaine infini. Il est donc nécessaire d'analyser les erreurs d'amplitude et de phase séparément dans l'espace et dans le temps, en se servant de la technique classique des séries de Fourier.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\psi(j, n+1) - \psi(j, n)}{\Delta T} \quad (\text{II.67})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\psi(j+1, n) - \psi(j-1, n)}{2\Delta X} \quad (\text{II.68})$$

$$\psi(j,n) = (G)^n \exp(iKx(j\Delta X)) \quad (\text{II.69})$$

$$\psi(j,n+1) = \psi(j,n) - c/2 (\psi(j+1,n) - \psi(j-1,n)) \quad (\text{II.70})$$

$$\text{avec } c = u\Delta T/\Delta X$$

$$G = 1 - icsin\beta \quad (\text{II.71})$$

Etude du coefficient de diffusion

Pour mettre en évidence cette propriété, étudions l'équation de transport en supposant que les coefficients sont constants.

$$\frac{\psi(j,n+1) - \psi(j,n)}{\Delta T} = -u \frac{\psi(j+1,n) - \psi(j-1,n)}{2\Delta X} + v \frac{\psi(j+1,n) - 2\psi(j,n) + \psi(j-1,n)}{\Delta X^2} \quad (\text{II.72})$$

Remplaçons (II.62) et (II.63) dans (II.72) on obtient:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \frac{\Delta T}{2} = -u \frac{\partial \psi}{\partial x} + v \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + O(\Delta T^3, \Delta X^3) \quad (\text{II.73})$$

Cette équation définit un domaine d'influence d'un point arbitraire $(j\Delta X, n\Delta T)$, limité par une caractéristique de pente $\pm(\Delta T/2v)^{1/2}$. Chaque calcul d'une variable ψ en un point (j,n) , dépend du calcul précédent aux points voisins $(j-1, n-1)$ et $(j+1, n-1)$.

A chaque pas de calcul, la variable au noeud (j,n) propage son influence aux noeuds voisins, qui eux-mêmes propagent leurs effets aux points voisins et ainsi de suite. La condition de C.F.L impose qu'une onde ne peut se déplacer au delà de la dimension de la grille durant un pas de temps. Ceci correspond à:

$$\frac{\Delta T}{\Delta X} \leq (\Delta T/2v)^{1/2}$$

où

$$\Delta T \leq \frac{1}{2} \frac{\Delta X^2}{v} \quad (\text{II.74})$$

Evaluation de : $\partial^2\psi/\partial t^2$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + u \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t} = v \frac{\partial^3\psi}{\partial t\partial x^2} \quad (\text{II.75})$$

En remplaçant (4) dans (18) on aura:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -u^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - 2uv \frac{\partial^3\psi}{\partial x^3} + v^2 \frac{\partial^4\psi}{\partial x^4} \quad (\text{II.76})$$

En remplaçant (II.76) dans (II.73) et en négligeant les dérivées d'ordre supérieur à deux, on obtient:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -u \frac{\partial\psi}{\partial x} + K \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \quad (\text{II.77})$$

avec

$$K = (v - u^2\Delta T/2) \quad (\text{II.78})$$

K : coefficient de viscosité "effective".

La fonction physique du coefficient de diffusion est de répandre une perturbation, en tendant de ramener le système vers une distribution uniforme de cette perturbation. Par conséquent, un coefficient de diffusion négatif est physiquement impossible, car dans ce cas le système aurait tendance à concentrer les perturbations et à conduire à des instabilités numériques.

La condition de stabilité du schéma précédent sont alors:

$$\Delta T \leq \frac{2v}{u^2} \quad (\text{II.79})$$

figures (II.9,II.9bis)

II.3.2.2 Schéma explicite amont

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\psi(j,n+1) - \psi(j,n)}{\Delta T} \quad (\text{II.80})$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\psi(j,n) - \psi(j-1,n)}{\Delta X} \quad (\text{II.81})$$

$$G = 1 - c(1 - \cos\beta) - ic\sin\beta \quad (\text{II.82})$$

$$K = v - u\Delta X/2 - u^2\Delta T/2 \quad (\text{II.83})$$

figures (II.10, II.10bis)

II.3.2.3 Schéma implicite centré

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\psi(j, n+1) - \psi(j, n)}{\Delta T} \quad (\text{II.84})$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\psi(j+1, n+1) - \psi(j-1, n+1)}{2\Delta X} \quad (\text{II.85})$$

$$G = \frac{1 - ic\sin\beta}{1 + c^2\sin^2\beta} \quad (\text{II.86})$$

$$K = v - u^2\Delta T/2 \quad (\text{II.87})$$

figures (II.11, II.11bis)

II.3.2.4 Schéma implicite amont

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\psi(j, n+1) - \psi(j, n)}{\Delta T} \quad (\text{II.88})$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\psi(j+1, n+1) - \psi(j, n+1)}{\Delta X} \quad (\text{II.89})$$

$$G = \frac{1 + c(1 - \cos\beta) - ic\sin\beta}{(1 + c(1 - \cos\beta))^2 + (c\sin\beta)^2} \quad (\text{II.90})$$

$$K = v - u\Delta X/2 - u^2\Delta T/2 \quad (\text{II.91})$$

figures (II.12, II.12bis)

II.3.2.5 Schéma semi-implicite centré (Cranck-Nicholson)

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\psi(j, n+1) - \psi(j, n)}{\Delta T} \quad (\text{II.92})$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\psi(j+1, n+1) + \psi(j+1, n) - \psi(j-1, n+1) - \psi(j-1, n)}{4\Delta X} \quad (\text{II.93})$$

$$G = \frac{1 - i(c/2)\sin\beta}{1 + i(c/2)\sin\beta} \quad (\text{II.94})$$

$$K = v - u^2\Delta T/2 \quad (\text{II.95})$$

figures (II.13,II.13bis)

II.3.2.6 Schéma semi-implicite amont

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\psi(j,n+1) - \psi(j,n)}{\Delta T} \quad (\text{II.96})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\psi(j,n+1) + \psi(j,n) - \psi(j-1,n+1) - \psi(j-1,n)}{2\Delta X} \quad (\text{II.97})$$

$$G = \frac{1 - c/2 + c/2 \exp(-i\beta)}{1 + c/2 - c/2 \exp(-i\beta)} \quad (\text{II.98})$$

$$K = v + u\Delta X/2 - u^2\Delta T/2 \quad (\text{II.99})$$

figures (II.14,II.14bis)

II.3.2.7 Schéma A.D.E (Explicite: diagonale descendante)

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\psi(j,n+1) - \psi(j,n)}{\Delta T} \quad (\text{II.100})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\psi(j+1,n) + \psi(j,n+1) - \psi(j,n) - \psi(j-1,n)}{2\Delta X} \quad (\text{II.101})$$

$$G = \frac{1 + c/2 - c/2 \cos\beta - ic/2\sin\beta}{1 + c/2 - c/2 \cos\beta + ic/2\sin\beta} \quad (\text{II.102})$$

$$K = v - u^2\Delta T/2 \quad (\text{II.103})$$

figures (II.15,II.15bis)

II.3.2.8 Schéma A.D.I (Implicite: diagonale ascendante)

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\psi(j,n+1) - \psi(j,n)}{\Delta T} \quad (\text{II.104})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\psi(j+1,n+1) + \psi(j,n) - \psi(j,n+1) - \psi(j-1,n)}{2\Delta X} \quad (\text{II.105})$$

$$G = \frac{1 - c/2 + c/2 \cos\beta - ic/2\sin\beta}{1 - c/2 + c/2 \cos\beta + ic/2\sin\beta} \quad (\text{II.106})$$

$$K = v - u^2\Delta T/2 \quad (\text{II.107})$$

figures (II.16,II.16bis)

Schéma explicite centré

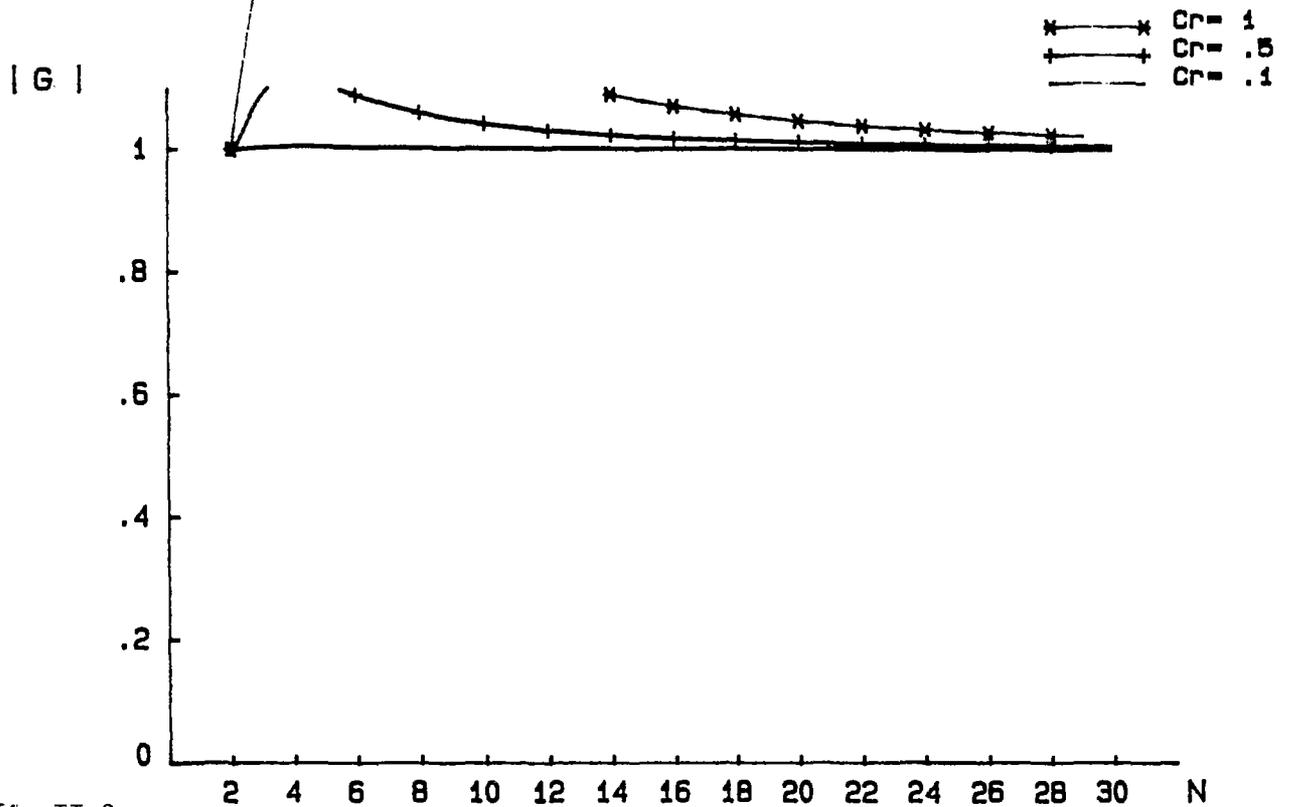


fig.II.9

Amplitude en fonction du nombre de courant (Cr)
et du nombre de points de calcul par longueur d onde (N)

Un/U

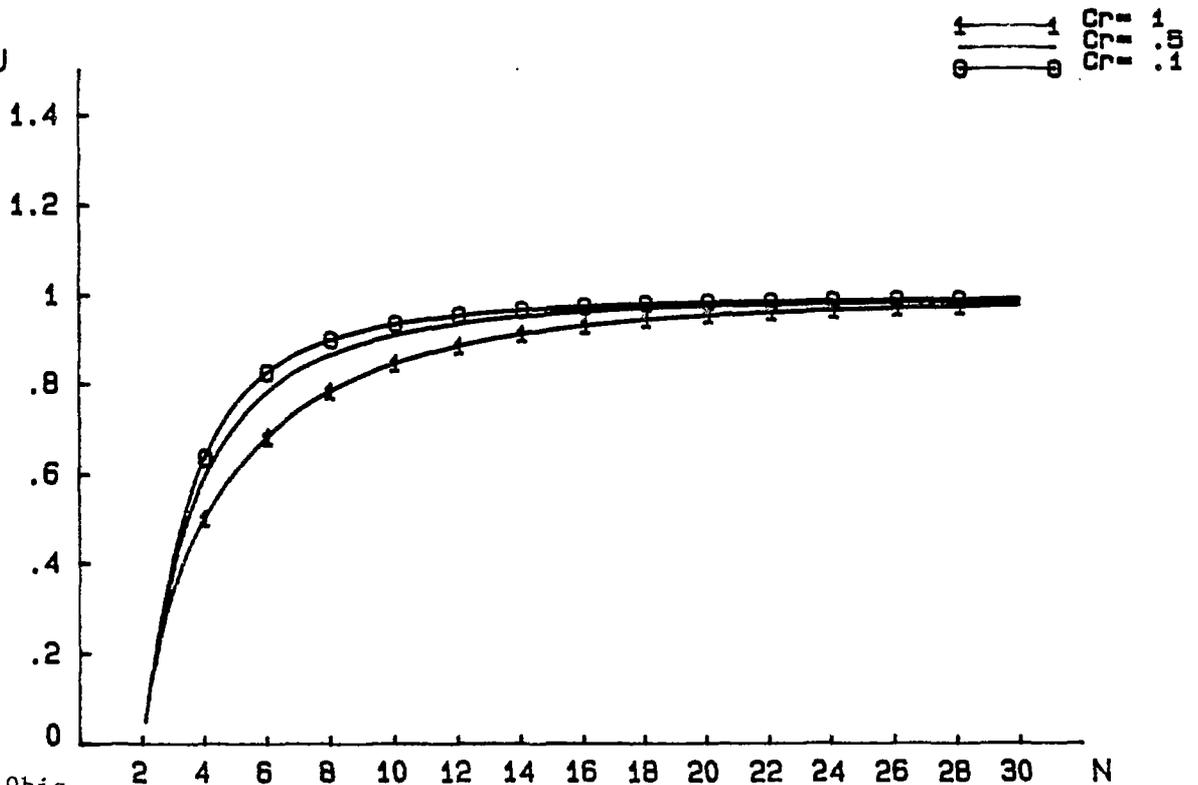


fig.II.9bis

Erreur de phase en fonction du nombre de courant (Cr)
et du nombre de points de calcul par longueur d onde (N)

Schéma explicite différences amont

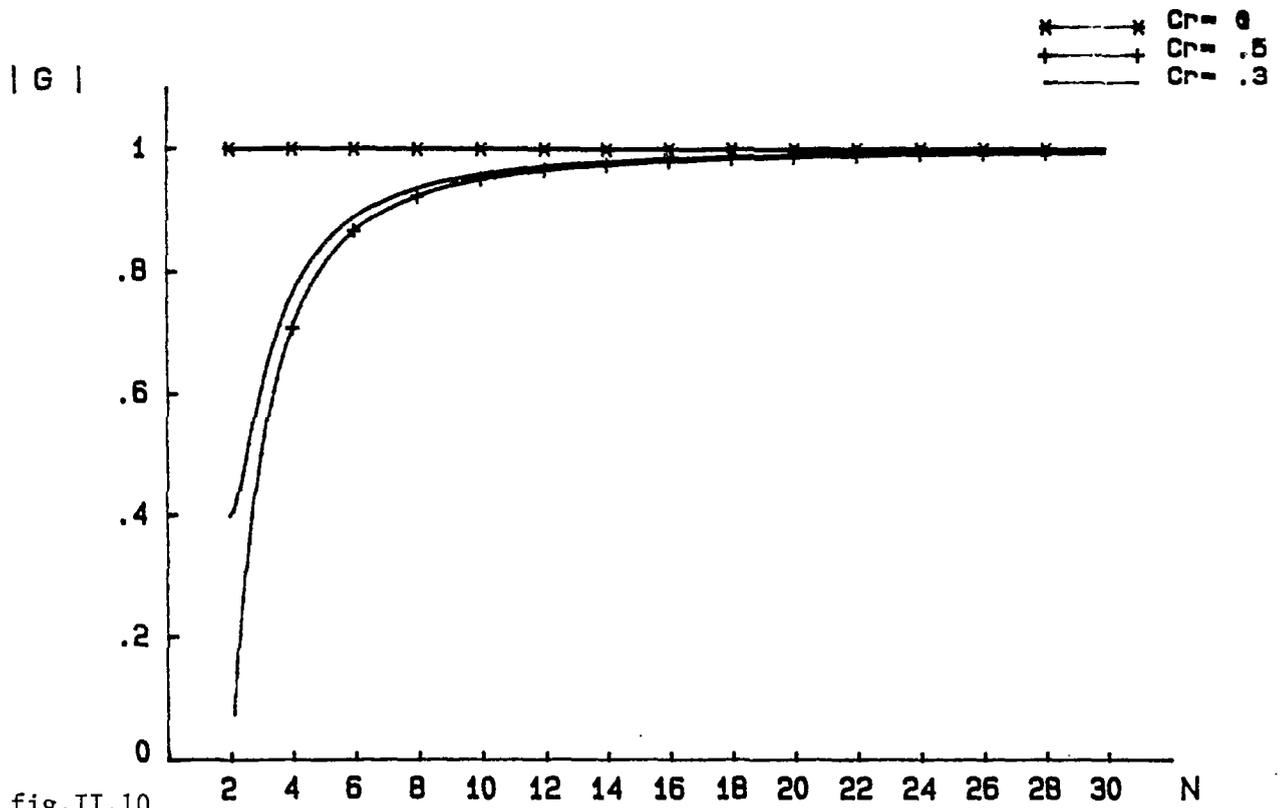


fig.II.10

Amplitude en fonction du nombre de courant (Cr)
et du nombre de points de calcul par longueur d onde (N)

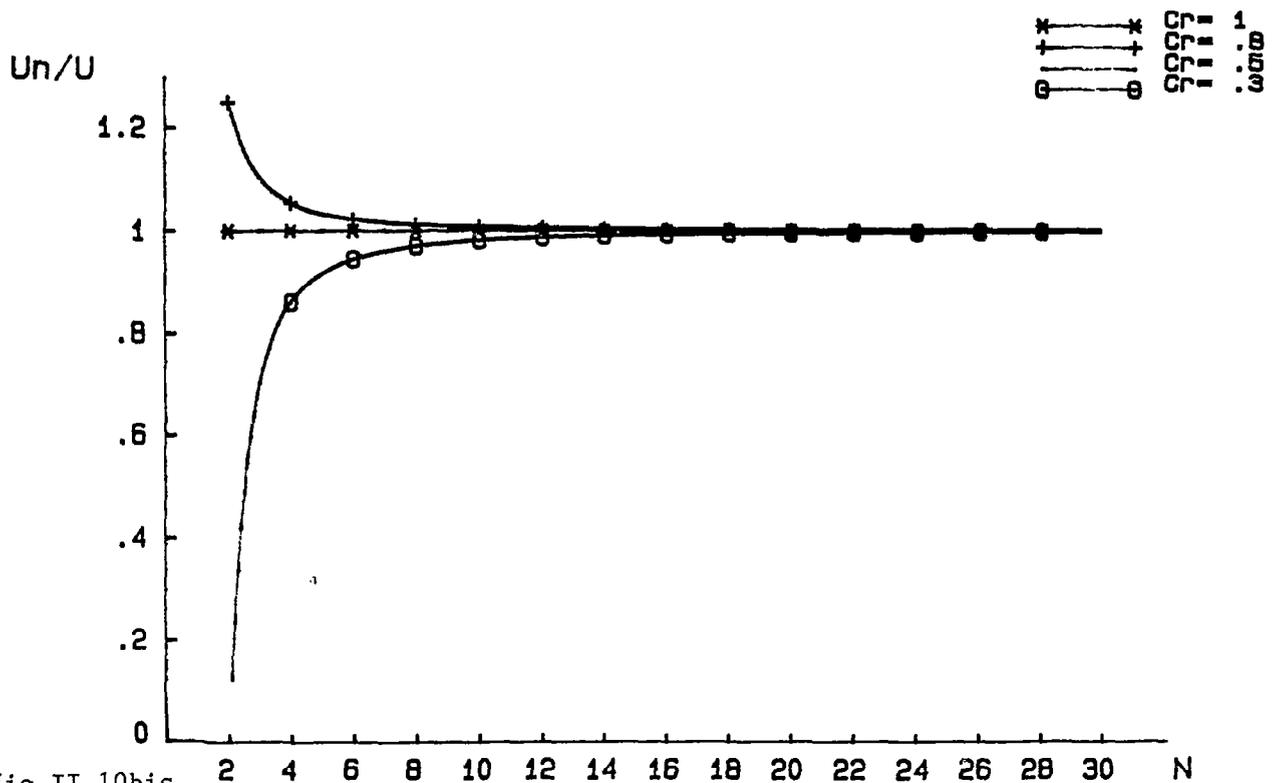
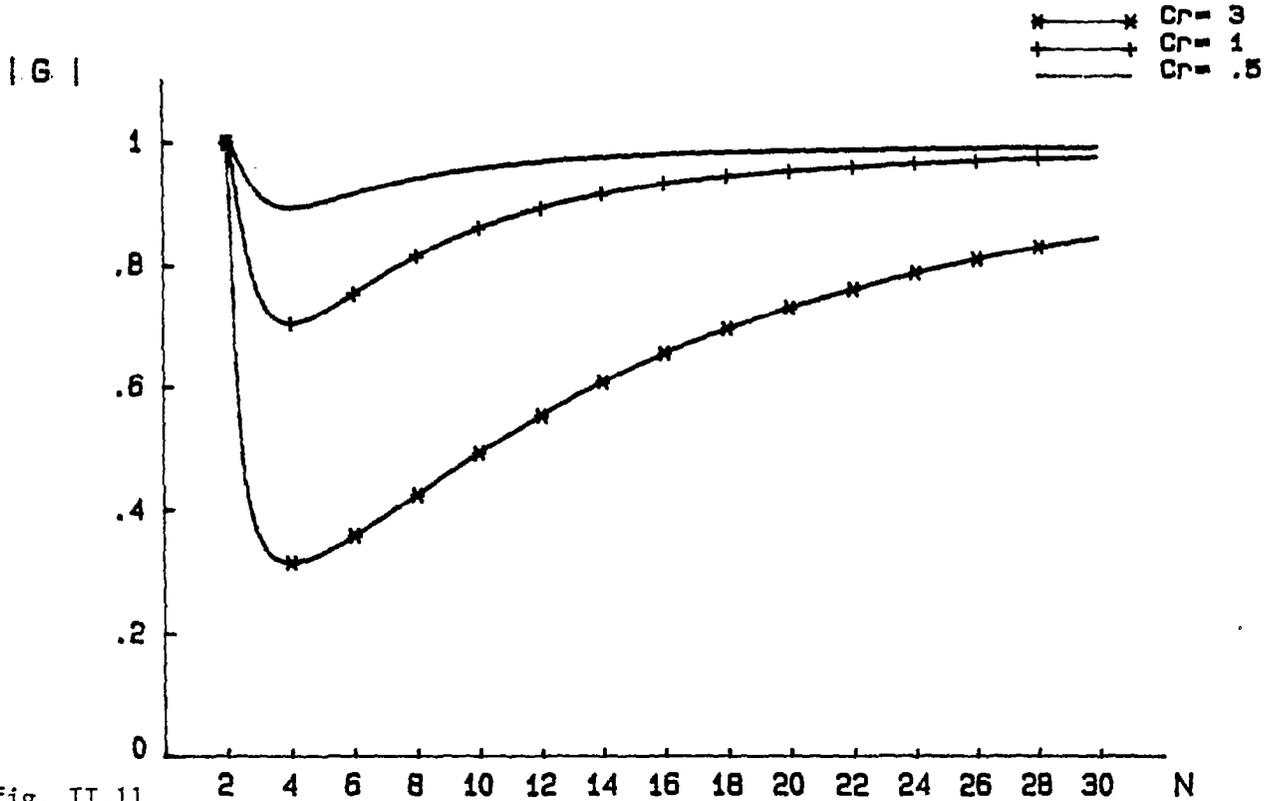


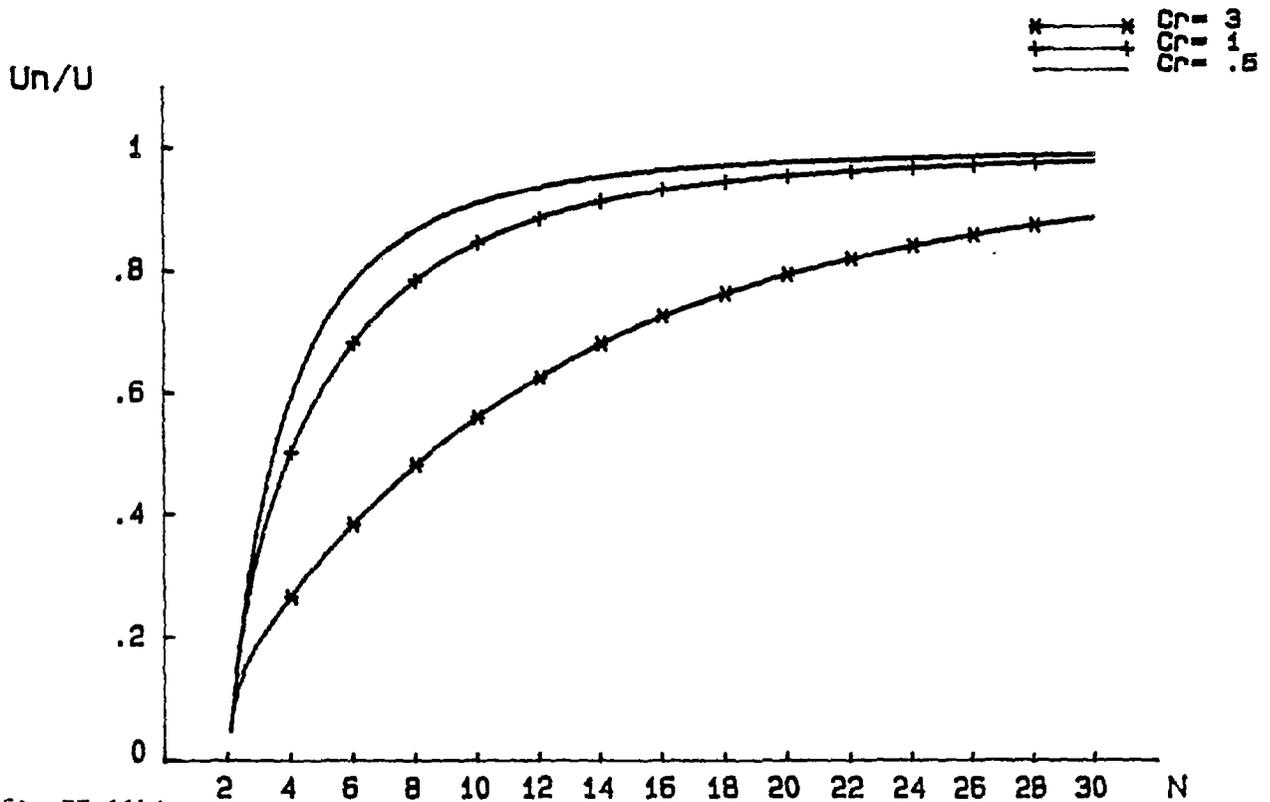
fig.II.10bis

Erreur de phase en fonction du nombre de courant (Cr)
et du nombre de points de calcul par longueur d onde (N)

Schéma implicite centré



Amplitude en fonction du nombre de courant (Cr) et du nombre de points de calcul par longueur d'onde (N)



Erreur de phase en fonction du nombre de courant (Cr) et du nombre de points de calcul par longueur d'onde (N)

Schéma implicite differences amont

|G|

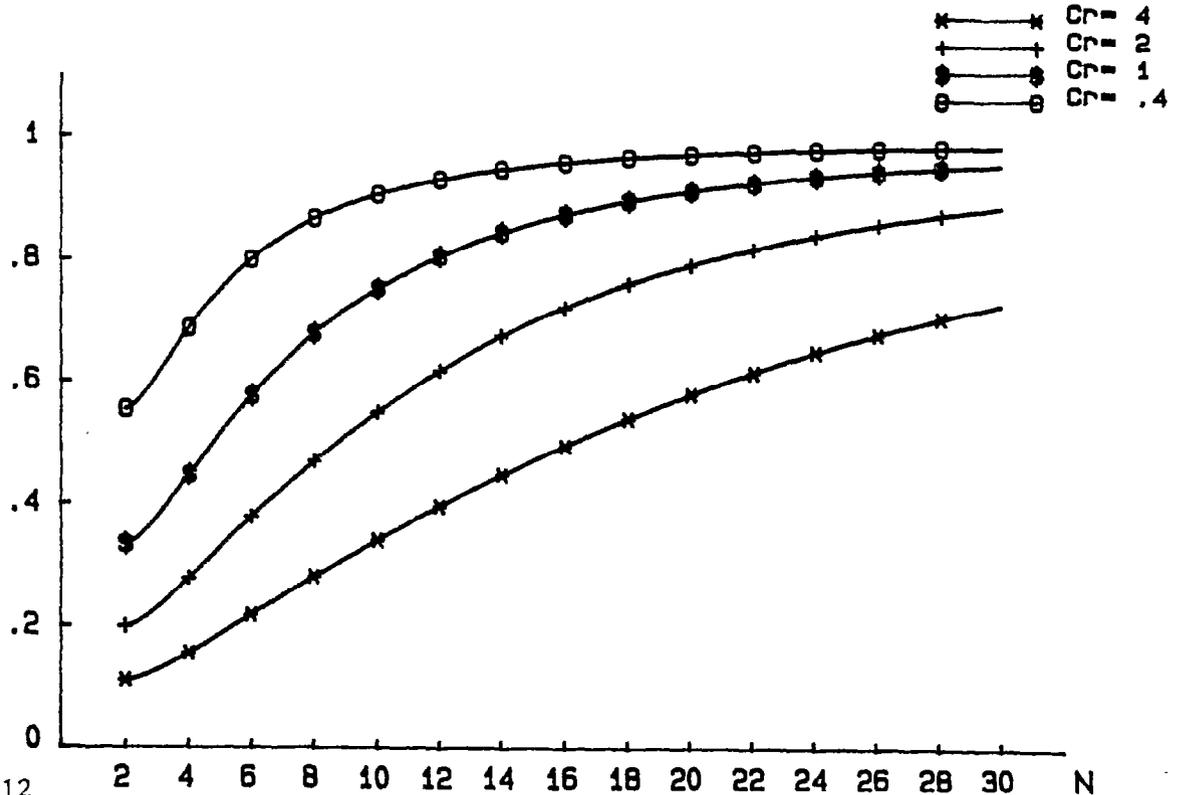


fig.II.12

Amplitude en fonction du nombre de courant (Cr) et du nombre de points de calcul par longueur d'onde (N)

U_n/U

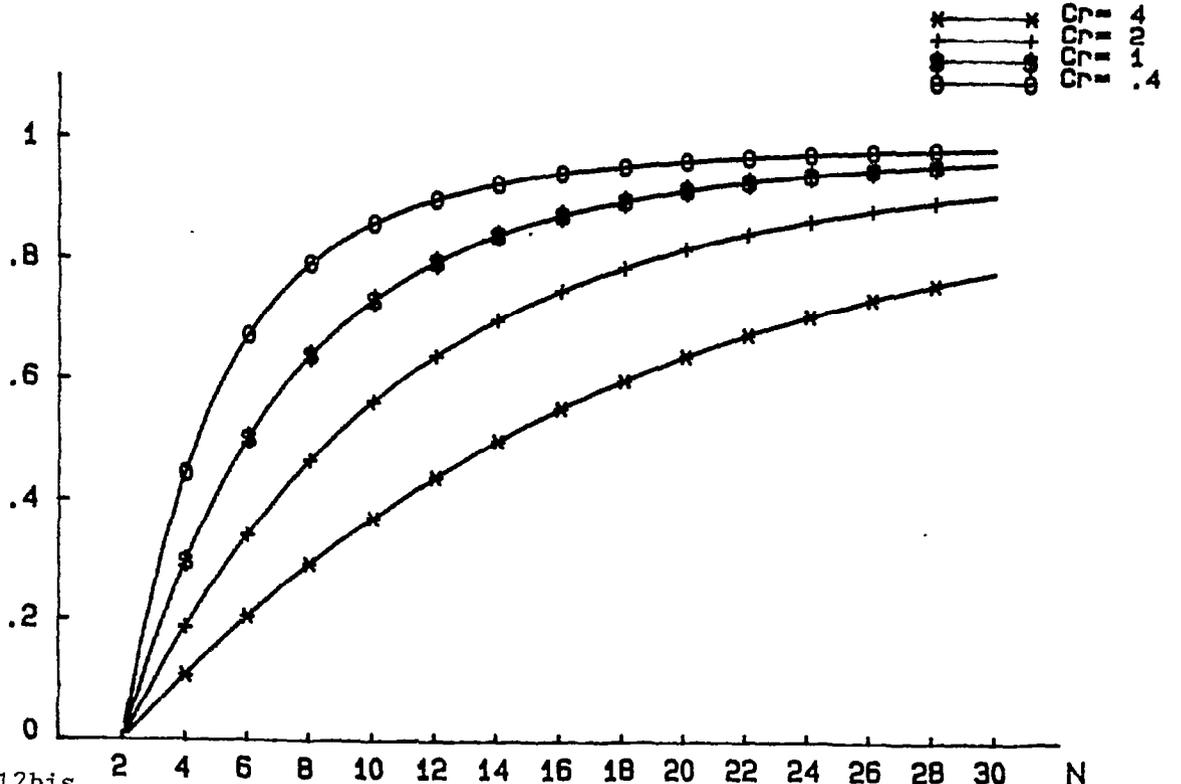


fig.II.12bis

Erreur de phase en fonction du nombre de courant (Cr) et du nombre de points de calcul par longueur d'onde (N)

Schéma de Cranck Nicolson

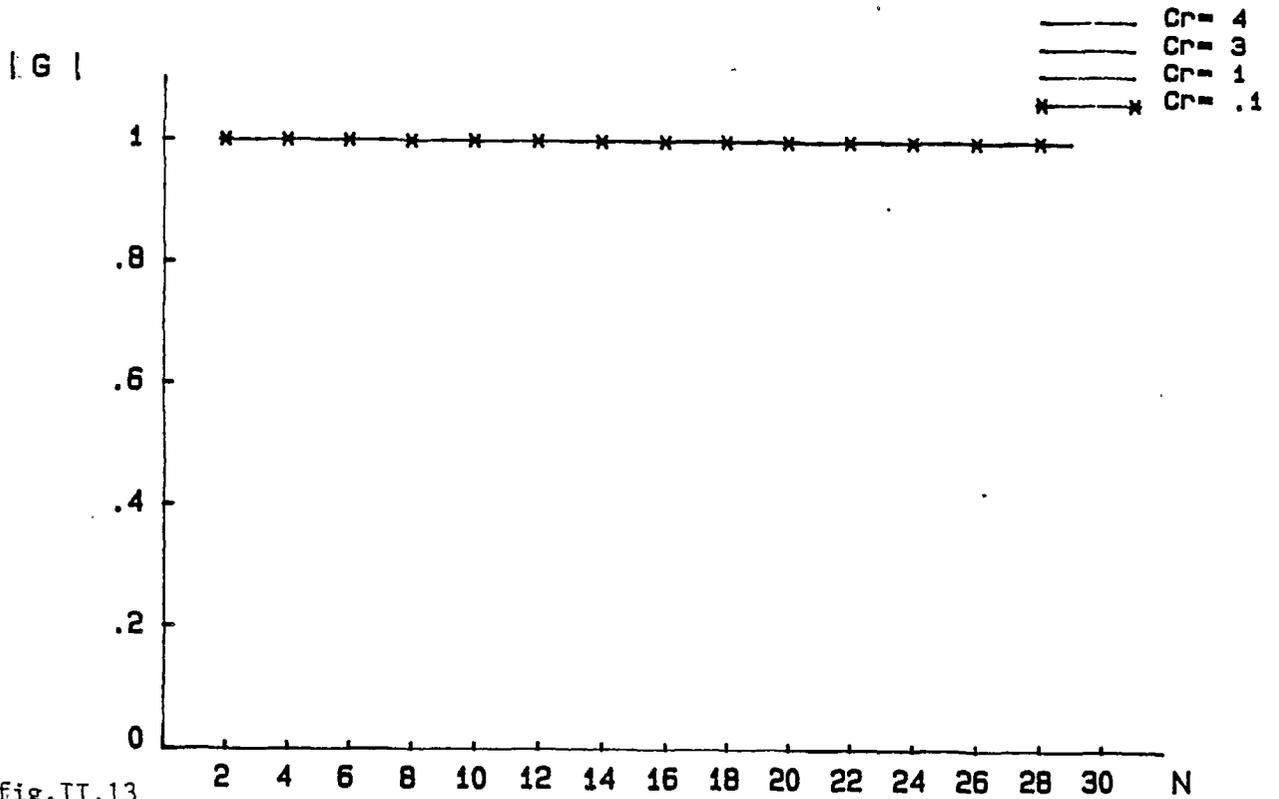


fig.II.13

Amplitude en fonction du nombre de courant (Cr) et du nombre de points de calcul par longueur d onde (N)

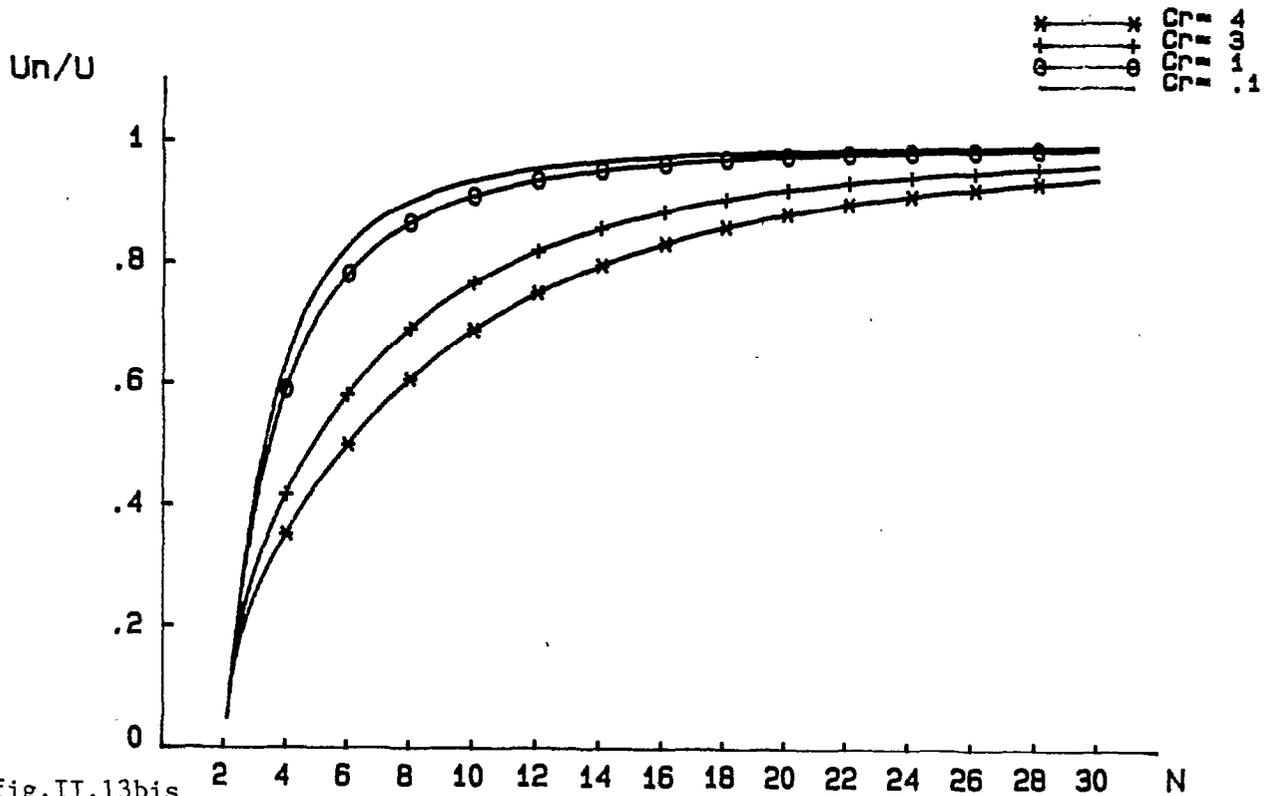
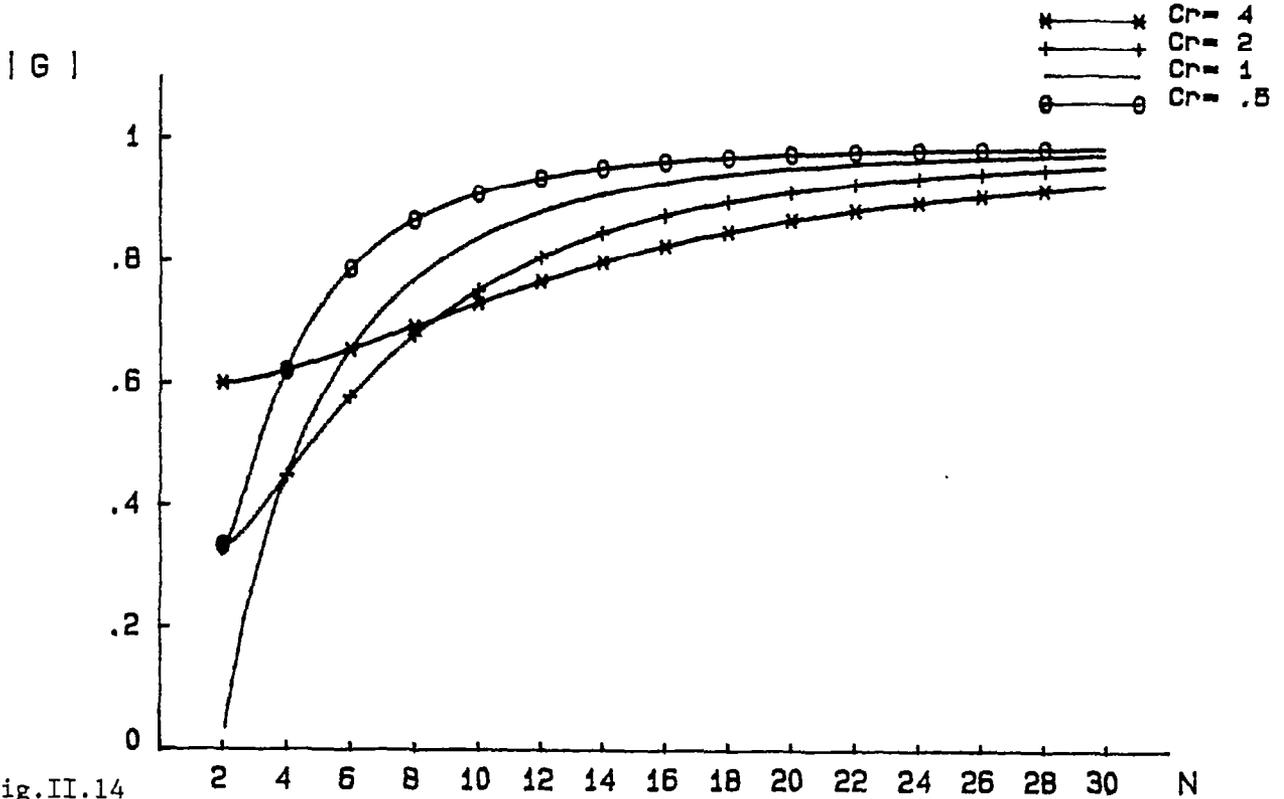


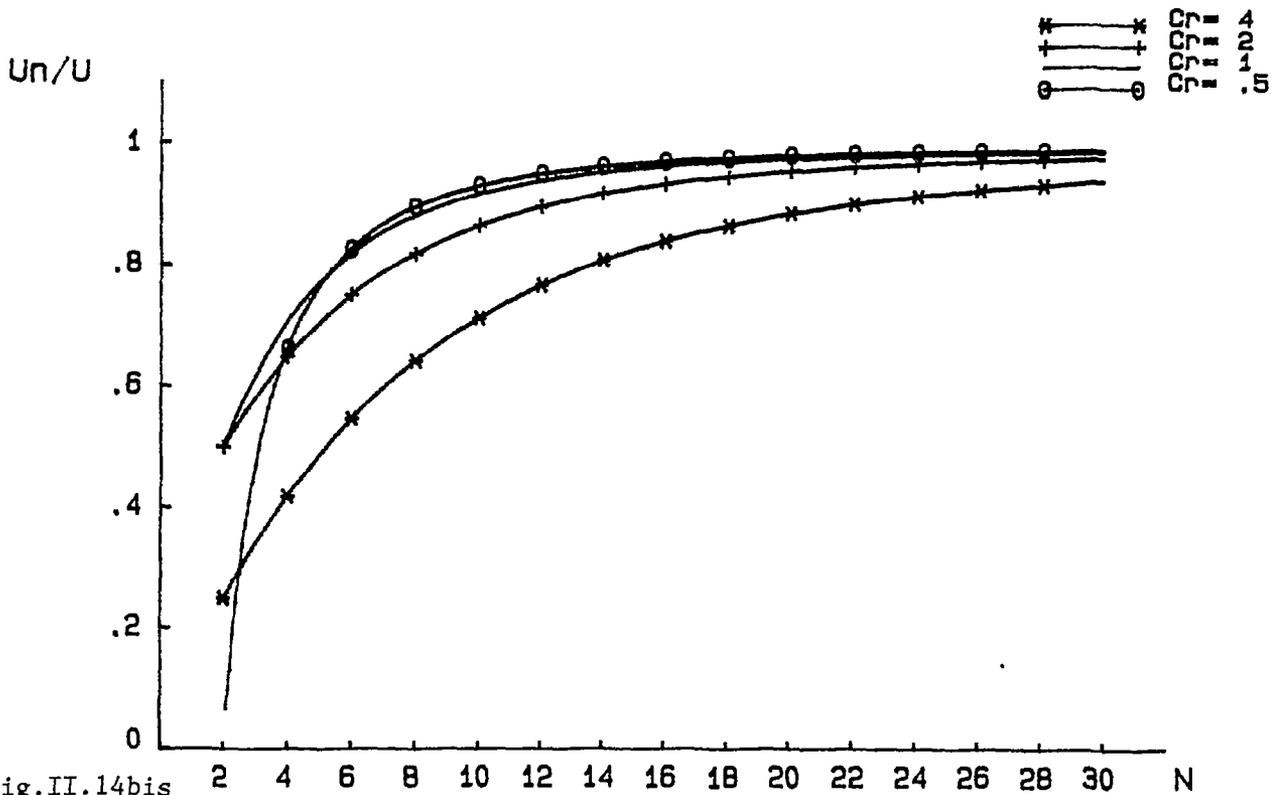
fig.II.13bis

Erreur de phase en fonction du nombre de courant (Cr) et du nombre de points de calcul par longueur d onde (N)

Schéma semi implicite amont



Amplitude en fonction du nombre de courant (Cr) et du nombre de points de calcul par longueur d onde (N)



Erreur de phase en fonction du nombre de courant (Cr) et du nombre de points de calcul par longueur d onde (N)

Schéma A.D.I descendant

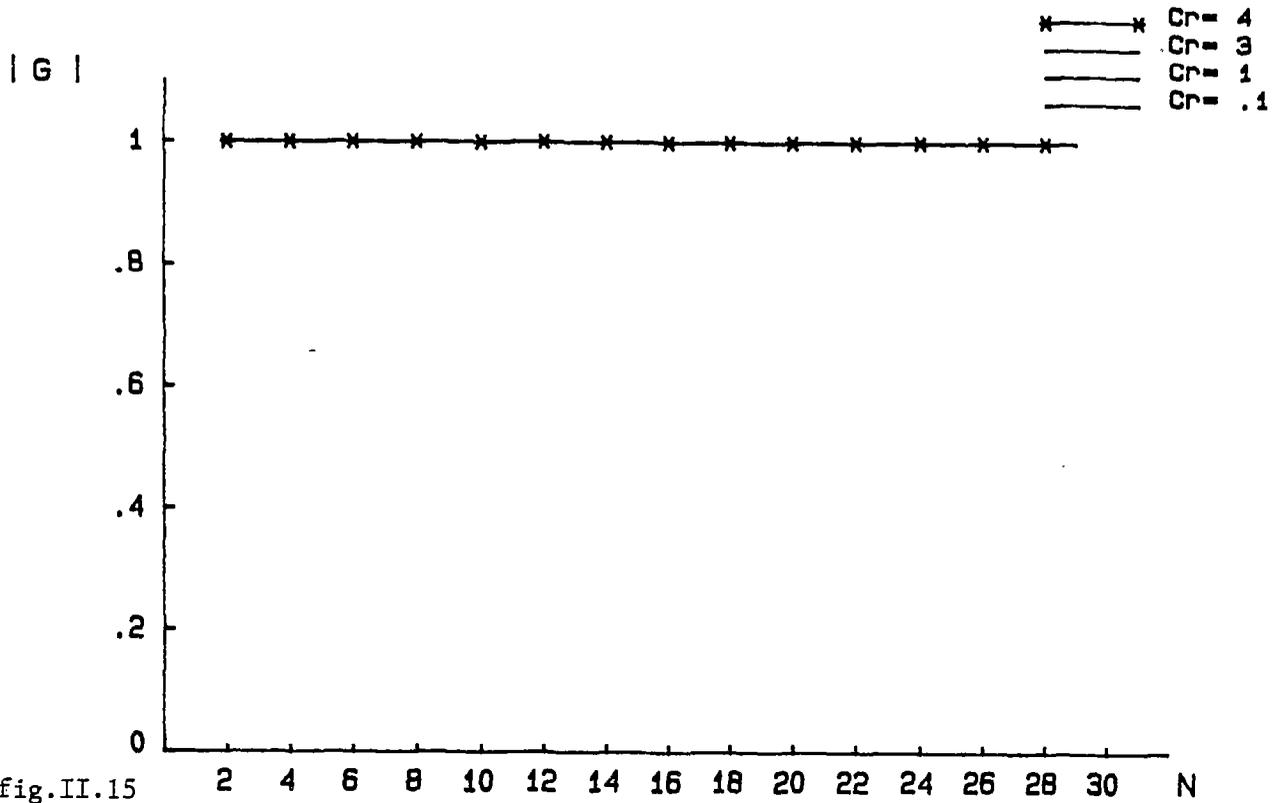


fig.II.15

Amplitude en fonction du nombre de courant (Cr)
et du nombre de points de calcul par longueur d onde (N)

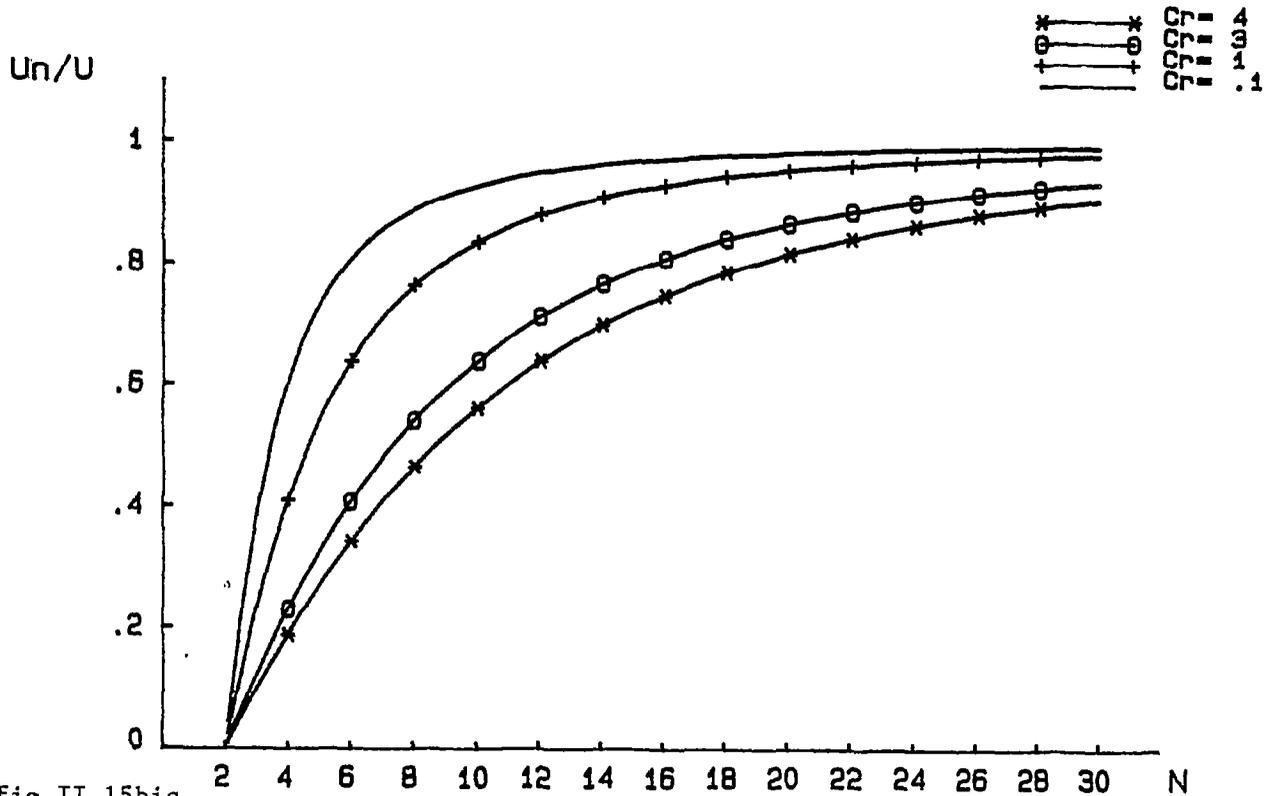


fig.II.15bis

Erreur de phase en fonction du nombre de courant (Cr)
et du nombre de points de calcul par longueur d onde (N)

Schéma A.D.I ascendant

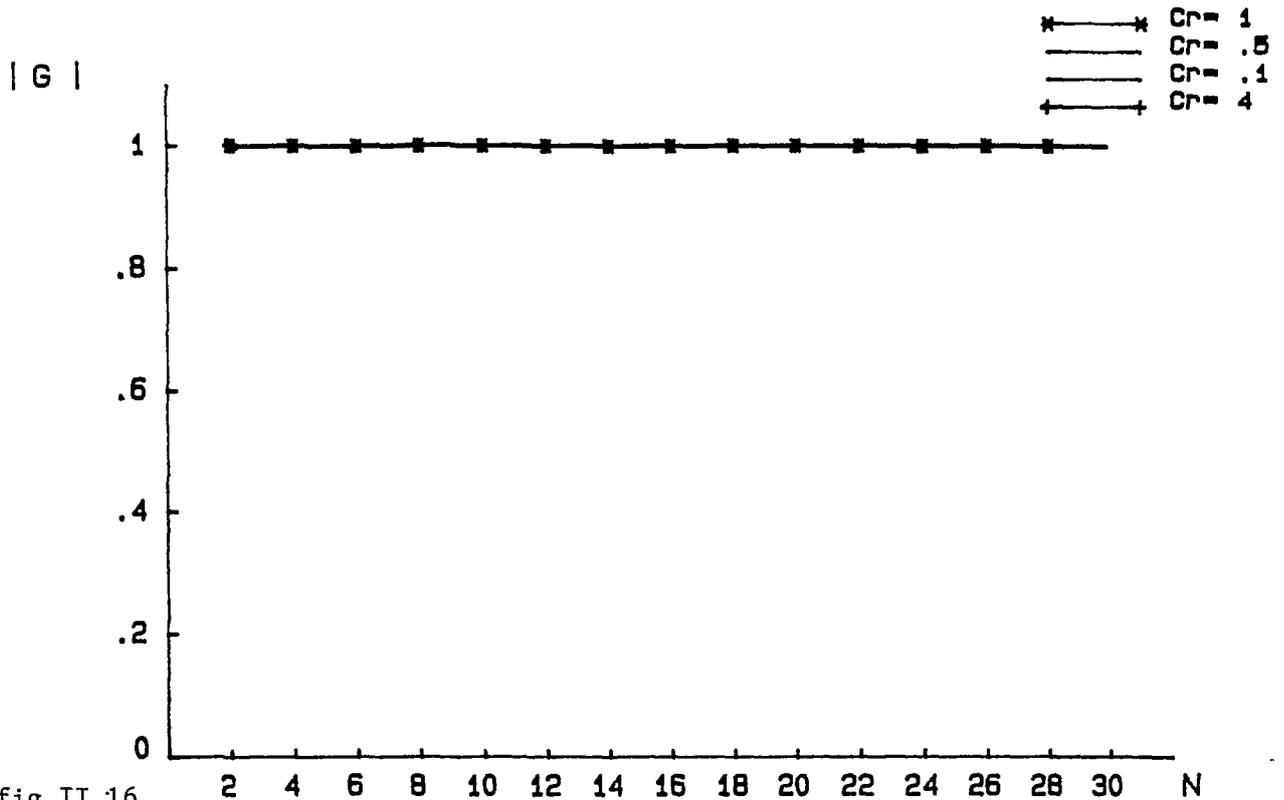


fig.II.16

Amplitude en fonction du nombre de courant (Cr)
et du nombre de points de calcul par longueur d onde (N)

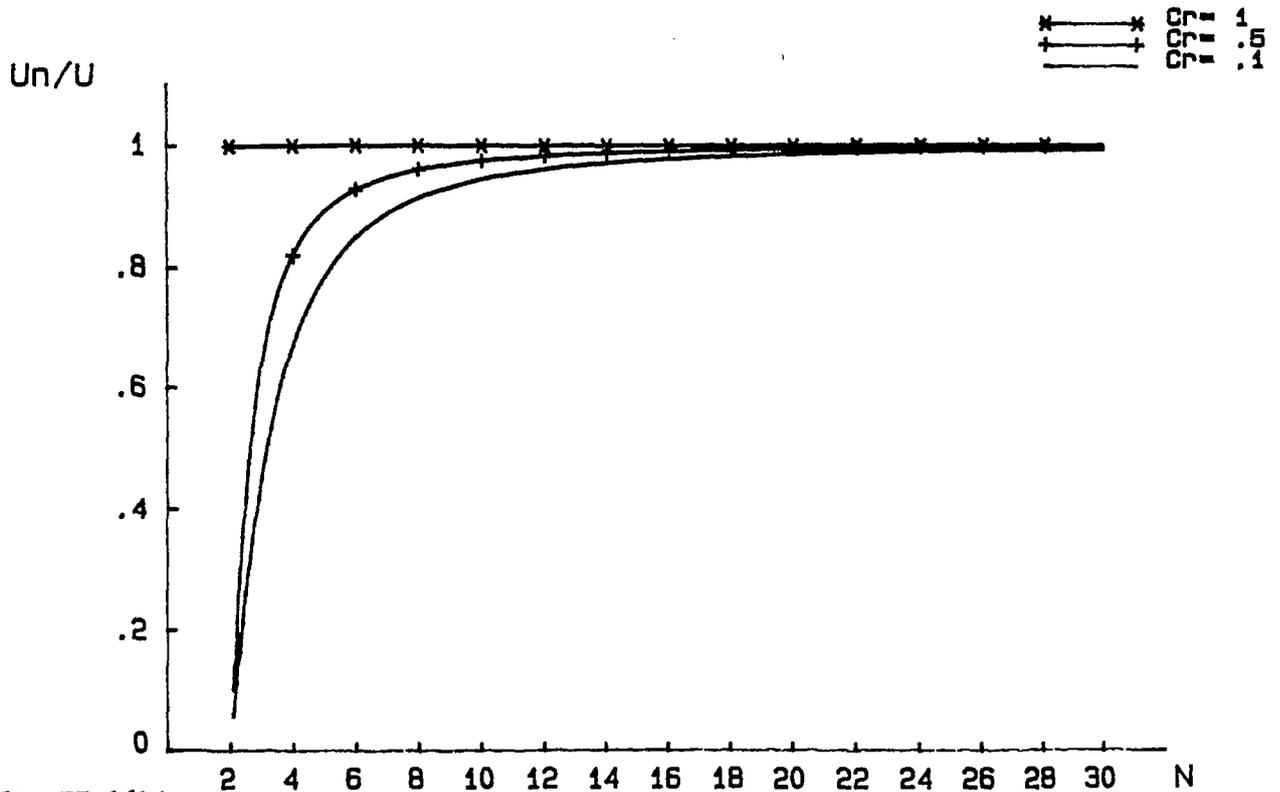


fig.II.16bis

Erreur de phase en fonction du nombre de courant (Cr)
et du nombre de points de calcul par longueur d onde (N)

II.3.2.9 Remarques

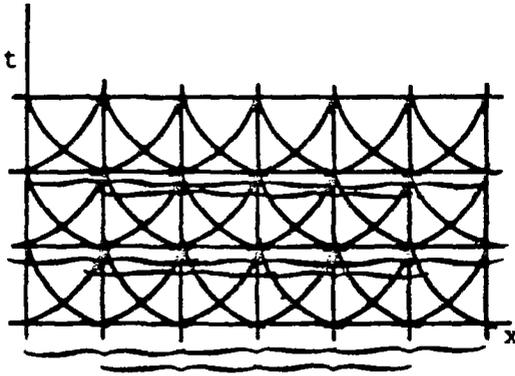
A l'exception du schéma centré explicite les divers schémas évoqués, présentent de bonnes caractéristiques de propagation quand le nombre de points par longueur d'onde est important. La condition de stabilité des schémas explicites est généralement réduite à celle de C.F.L où le rapport $\Delta T/\Delta X$ ne devrait pas excéder la pente de n'importe quelle caractéristique et, a fortiori, de la plus importante. Tout le long de chaque caractéristique la grandeur d'une certaine quantité est toujours conservée. Le problème se ramène à définir une solution de la forme:

$$\psi(x, t+\Delta T) = \psi(x-u\Delta T, t)$$

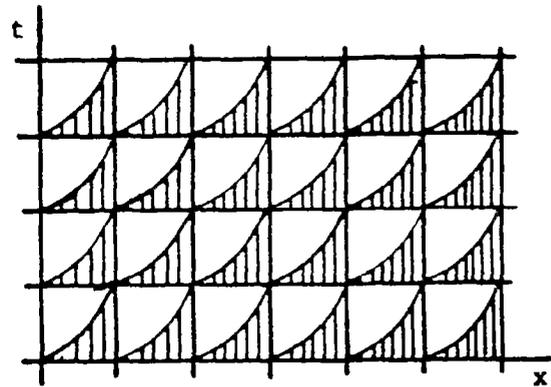
Les méthodes explicites diffèrent l'une de l'autre par la procédure utilisée dans la détermination de $\psi(x-u\Delta T, t)$. La technique la plus simple étant l'interpolation où la variation de la variable dépendante est supposée évoluer linéairement. En suivant la particule durant son déplacement, si le nombre de courant est égal à l'unité ($u\Delta T=\Delta X$), on obtient la solution exacte des équations;

$$\psi(j, n+1) = \psi(j-1, n)$$

Mais l'expression $u\Delta X/\Delta T=1$ ne peut se conserver durant le calcul que si la bathymétrie est constante et que le nombre de Froude varie lentement. Ces deux conditions sont rarement rencontrées dans les milieux naturels. Généralement c est différent de 1. Dans ces cas le calcul de la solution se fait en suivant la caractéristique jusqu'à son intersection avec la ligne correspondante à $(n+1)\Delta T$. La grandeur recherchée est par suite calculée par interpolation entre les noeuds (j, n) et $(j-1, n)$ (différence aval), ou (j, n) et $(j+1, n)$ (différence amont), ou $(j+1, n)$ et $(j-1, n)$ (différence centrée).



(Explicite centré)



(Explicite amont)

Si l'interpolation est effectuée entre les noeuds $j+1$, j et $j-1$, on obtient le schéma de Leith. Ce type de développement conduit aux expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \psi(j,n+1) = & \psi(j,n) - .5(u\Delta T/\Delta X)(\psi(j+1,n)-\psi(j-1,n)) \\ & + .5(u\Delta T/\Delta X)^2(\psi(j+1,n)-2\psi(j,n)+\psi(j-1,n)) \end{aligned} \quad (\text{II.108})$$

$$G = 1 + c^2(\cos\beta - 1) - ic\sin\beta \quad (\text{II.109})$$

D'après les figures II.17, II.17bis, on remarque que le domaine de dépendance doit contenir la caractéristique, sinon l'interpolation n'est plus exacte. Cela revient à imposer un nombre de courant inférieur à l'unité (Condition de C.F.L). Cette méthode présente l'avantage d'avoir une diffusion numérique nulle.

Dans les schémas explicites où les nombres de courant sont inférieurs à l'unité et le module des facteurs d'amplification est inférieur à 1. Dans ces cas, quelque soit la composante étudiée, le module du coefficient de Fourier de la $K^{\text{ième}}$ harmonique n'augmente pas en fonction du temps. Quand $K\pi\Delta X/L$ est petit, le module de G se rapproche de l'unité et, par conséquent, pour un grand nombre de noeuds par longueur d'onde L , la $K^{\text{ième}}$ composante serait faiblement atténuée. Pour les nombres de courant supérieurs à l'unité toutes les composantes sont amplifiées à chaque pas de

Schéma de LEITH

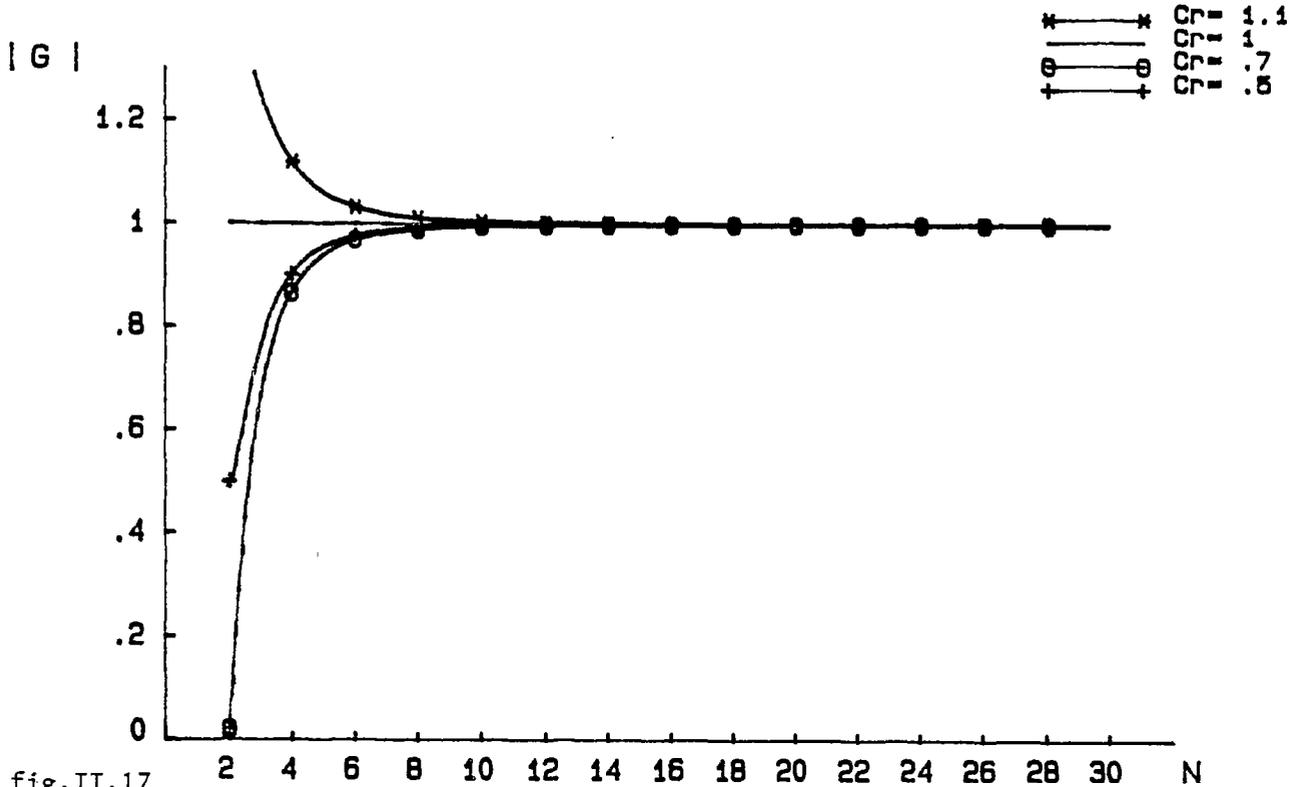


fig.II.17

Amplitude en fonction du nombre de courant (Cr)
et du nombre de points de calcul par longueur d'onde (N)

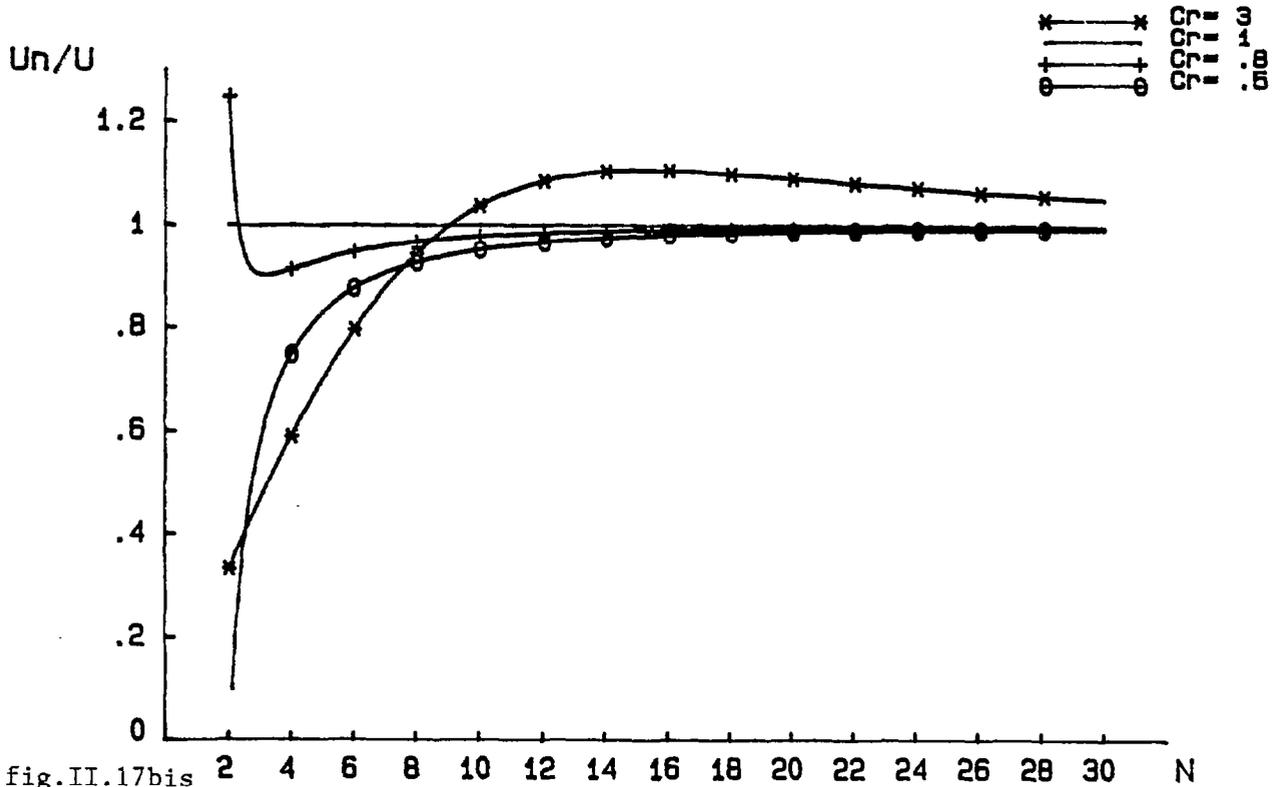


fig.II.17bis

Erreur de phase en fonction du nombre de courant (Cr)
et du nombre de points de calcul par longueur d'onde (N)

temps. Cette amplification augmente quand le nombre de points par longueur d'onde diminue.

Parmi les méthodes d'interpolation suggérées pour le calcul du terme advectif on citera la méthode de Zimmerman (1980) et la méthode de Holly et al. (1977). La première repose sur une interpolation cubique en se servant des noeuds $j-2$, $j-1$, j , $j+1$, tandis que la seconde, consiste à exprimer $\psi(j,n+1)$ en fonction des valeurs des variables dépendantes et de leurs dérivées aux noeuds j et $j-1$, suivant l'égalité polynomiale :

$$\psi(j,n+1) = A\alpha^3 + B\alpha^2 + C\alpha + D$$

$$\text{avec } \alpha = (u\Delta T/\Delta X)$$

Les schémas implicites conduisent à des conditions de stabilité moins restrictives que celles imposées par la condition de C.F.L. Leur choix est justifiable par la possibilité d'utiliser un pas temporel supérieur à celui autorisé par les méthodes explicites. Ceci conduit dans les problèmes mono-dimensionnels à une économie appréciable en temps de calcul.

Quand le nombre de noeuds par longueur d'onde est faible, les caractéristiques de propagation sont fortement détériorées. Dans ces cas, les méthodes centrées sont préférables aux autres.

Bien qu'elles soient toutes deux inconditionnellement stables, les méthodes semi-implicites présentent l'avantage, par rapport aux méthodes totalement implicites, de pouvoir toujours ramener les équations à une forme tri-diagonale. Cette forme n'est obtenue par des schémas implicites que pour les équations mono-dimensionnelles; en revanche quand on passe à deux ou trois dimensions, les résolutions algorithmiques par des méthodes de double balayage, sont généralement plus rapides que les méthodes d'inversion de matrices (penta-diagonale dans le cas bi-dimensionnel). Les expériences montrent que l'avantage des méthodes semi-implicites sur les méthodes explicites, réside en ce qu'elles permettent

L'utilisation d'un pas de temps de 2 à 3 ordres de grandeurs supérieur à celui autorisé par la condition de C.F.L.

La méthode A.D.I est la plus utilisée des méthodes semi-implicites. Bien qu'elle conduise à une erreur de phase supérieure à celle de Cranck Nicholson, la rapidité de sa convergence la rend préférable surtout dans les problèmes bi ou tri dimensionnels.

II.3.3 Problèmes des harmoniques supérieures

La méthode des séries de Fourier impose un nombre d'onde maximal égal au nombre maximal de noeuds dans le domaine d'intégration de façon à pouvoir faire passer une fonction par tout les points de la grille. Ceci est généralement effectué par un choix judicieux des coefficients de Fourier. Il s'ensuit que la plus faible harmonique que l'on peut représenter aura une longueur d'onde égale à $2\Delta X$. Toutes les harmoniques de longueur d'onde inférieure à $2\Delta X$ ne sont pas reconnues par le système. Ces harmoniques courtes sont à l'origine des oscillations spatiales dues à l'énergie échangée entre les diverses composantes des séries de Fourier. Cette interaction est liée au caractère non linéaire des équations du mouvement.

Physiquement, ce phénomène est interprété par le fait que l'énergie due à la turbulence se déplace généralement des grands tourbillons vers les petits à travers de petites turbulences. Ces dernières se dégradent en énergie interne par l'intermédiaire des termes dissipatifs (Phillips, 1958). Si aucun mécanisme dissipatif n'est présent, l'énergie accumulée dans ces ondes courtes est retransmise aux ondes longues, tendant ainsi à détruire ces composantes de grands intérêt. Cette confusion des fréquences est une conséquence inévitable de la discrétisation (Hamming, 1962).

Afin de remédier à ces parasites numériques plusieurs possibilités existent:

- 1°- réduire le pas d'espace ΔX ,
- 2°- introduire un coefficient de viscosité artificielle (Roday, 1975),
- 3°- donner plus d'importance aux termes de frottements (Salomon, 1976),
- 4°- utiliser une interface dissipative (Cunge et al., 1980).

II.3.3.1 Réduction de ΔX

La réduction du pas spatial est conditionnée par la grandeur du milieu étudié et par le support informatique disponible. Cette solution appliquée sur un espace à n dimensions et pour une méthode explicite conduit à une augmentation du temps de calcul d'un facteur égal à:

$$\left[\frac{\Delta X(\text{initiale})}{\Delta X(\text{réduit})} \right]^{2+n} \quad (\text{II.110})$$

Cette solution permet la minimisation de l'erreur de troncature par l'utilisation d'un grand nombre de points par longueur d'onde mais conduit inévitablement à une augmentation du coût de la simulation.

II.3.3.2 Viscosité artificielle

La méthode de Hirt appliquée aux diverses discrétisations précédentes, montre que pour certains développements, un nouveau terme vient s'ajouter à l'expression du coefficient de viscosité. Ce terme n'étant pas physique, il est habituellement défini comme une pseudo viscosité ou une viscosité artificielle, ν_a .

L'interprétation de ce terme découle du fait que pour un nombre de Reynolds (relatif à une maille), la structure de la solution ne peut être qualitativement résolue. La plus faible harmonique reconnue par

Le système étant celle de longueur d'onde égale au double de la dimension de la maille à laquelle correspond un nombre de Reynolds égal à 2. La pseudo-viscosité représentera l'augmentation artificielle du coefficient de viscosité réel qui permet de réduire le nombre de Reynolds de $U\Delta X/\nu$ à $U\Delta X/(\nu+\nu_a)$. Ce terme supplémentaire quadratique, est une erreur de troncature particulière.

Von Neumann et Richtmyer (1950) furent les premiers à utiliser la correction effectuée par l'introduction d'un terme de viscosité artificielle afin de réduire les oscillations qui apparaissent dans les simulations des ondes de chocs. Richtmyer (1978) a montré que l'utilisation de ce terme est équivalent à l'introduction d'un coefficient de viscosité faible pour les petites oscillations et important pour les grandes.

Les essais effectués par Owen (1984) sur l'équation de transport montrent qu'un bon accord avec les solutions analytiques est obtenu quand le coefficient de viscosité artificielle est plus faible que le coefficient de viscosité réel.

Généralement ce qui est important n'est pas l'ordre de l'erreur qui est strictement applicable quand ΔX et ΔT tendent vers zéro, mais plutôt la grandeur de cette erreur pour certaines valeurs de ΔX et ΔT . L'ajout d'une viscosité artificielle détériore dans certains schémas l'ordre de troncature mais la grandeur de l'erreur reste négligeable.

II.3.3.3 Terme de frottement

Le frottement au fond est le terme dissipatif le plus important des équations du mouvement. Il constitue un processus dissipatif "physique" en contraste avec la viscosité artificielle qui, elle, représente un processus d'atténuation "numérique". Son expression est fonction de la vitesse et (en théorie) de la hauteur de l'eau.

Afin de mettre en évidence son rôle, nous nous proposons de résoudre l'équation (II.111), en supposant une profondeur localement constante.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + K.U. |U| = 0 \quad (\text{II.111})$$

$$K = \frac{g}{C^2 H} \quad \text{pour une expression du type Chezy.}$$

$$K = \frac{g}{M^2 H^{4/3}} \quad \text{pour une expression du type Manning-Strikler.}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U(j,n+1) - U(j,n)}{\Delta T} \quad (\text{II.112})$$

$$K.U. |U| = K.U(j,n). |U(j,n+\theta)| \quad \text{avec } 0 \leq \theta \leq 1$$

A- Si $\theta = 0$ (développement explicite)

$$U(j,n+1) = U(j,n). (1 - K.\Delta T. |U(j,n)|)$$

L'instabilité se fera sentir quand:

$$\Delta T > \frac{2}{K. |U(j,n)|}$$

B- Si $\theta = 1$ (développement implicite)

$$U(j,n+1) = U(j,1). \left(\frac{1}{1 + K. |U(j,n)|. \Delta T} \right) = U(j,1) * B$$

Pour toutes les valeurs de ΔT , B est inférieur à 1; cette formulation conduira donc toujours à la stabilisation de l'équation. Il s'ensuit qu'une discrétisation implicite du terme de frottement est préférable afin de lui attribuer les caractéristiques dissipatives nécessaires.

II.3.3.4 Interface dissipative

Outres les possibilités évoquées précédemment, certains auteurs suggèrent l'utilisation d'une interface dissipative, (Cunge, 1981,

Abbott, 1979). Cette technique, suppose une variation linéaire de la propriété fluide considérée. Elle consiste à faire une moyenne d'une ou de plusieurs variables dépendantes avant de les utiliser au pas de temps suivant. La moyenne peut être :

$$\text{Centrée:} \quad 0 \leq \alpha \leq 1/2 \quad \psi'(i) = \alpha\psi(i+1) + (1-2\alpha)\psi(i) + \alpha\psi(i-1)$$

$$\text{Amont :} \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad \psi'(i) = \alpha\psi(i+1) + (1-\alpha)\psi(i)$$

$$\text{Aval :} \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad \psi'(i) = (1-\alpha)\psi(i) + \alpha\psi(i-1)$$

L'interface représente une procédure de réajustement périodique de la solution. Dans cette procédure, la quantité totale d'une variable n'est pas changée mais uniquement sa distribution dans le domaine d'intégration. Cet artefact numérique, nécessaire à la stabilisation des schémas non dissipatifs, est assez répandu dans les simulations des phénomènes rapides (rupture de barrage, onde de choc, ressaut hydraulique ...). Un des schémas les plus répandu utilisant cette technique est celui de Lax-Wendroff (1960) qui n'est autre que le schéma non dissipatif connu sous le nom de "Leapfrog" à qui est appliqué une interface dissipative centrée ($\alpha = 1/2$).

II.3.4 Propriété de transport du terme advectif

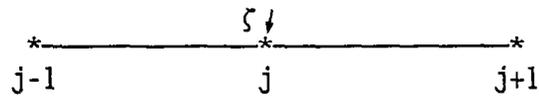
Outre les problèmes induits par le caractère numérique, la discrétisation du terme non linéaire advectif doit respecter la propriété de transport qui caractérise l'advection.

Une discrétisation en différences finies respecte la propriété de transport si l'effet d'une perturbation est entraîné uniquement suivant la direction de l'écoulement. Cette propriété sera analysée par la méthode de la perturbation discrète pour deux types de discrétisations, l'une centrée et l'autre amont.

Pour illustrer ce problème, supposons qu'une perturbation ζ est introduite au noeud j :

$$\begin{aligned} \psi'(j) &= \psi(j) + \zeta \\ \text{et} \\ \psi'(k) &= \psi(k) \quad \text{quel que soit } k \text{ différent de } j \end{aligned}$$

La vitesse d'écoulement u est positive et constante.



----> direction de l'écoulement

L'équation différentielle étant:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + u \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

II.3.4.1 Discrétisation centrée

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\psi(j, n+1) - \psi(j, n)}{\Delta T} \quad (\text{II.113})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\psi(j+1, n) - \psi(j-1, n)}{2\Delta X} \quad (\text{II.114})$$

$$\text{au noeud } j+1 \quad \frac{\psi(j+1, n+1) - \psi(j+1, n)}{\Delta T} = - \frac{(0 - u\zeta)}{2\Delta X} = \frac{u\zeta}{2\Delta X}$$

$$\text{au noeud } j \quad \frac{\psi(j, n+1) - \psi(j, n)}{\Delta T} = - \frac{(0 - 0)}{2\Delta X} = 0$$

$$\text{au noeud } j-1 \quad \frac{\psi(j-1, n+1) - \psi(j-1, n)}{\Delta T} = - \frac{(u\zeta - 0)}{2\Delta X} = - \frac{u\zeta}{2\Delta X}$$

On remarque que la perturbation introduite au noeud j a disparu de ce point, ce qui est absurde. Une partie de la perturbation suit le mouvement réel et l'autre partie est entraînée dans la direction opposée à l'écoulement. Au pas de temps suivant, la perturbation réapparaîtra au noeud $j-2$ et ainsi de suite (fig.II.18).

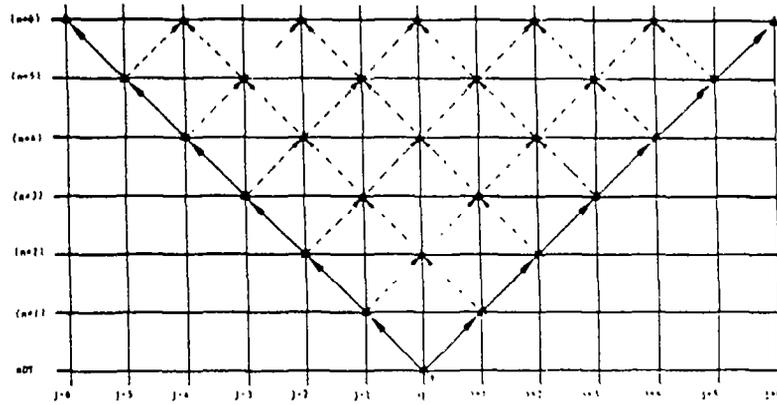


fig.II.18- Evolution d'une perturbation (schéma centré).

II.3.4.2 Discrétisation amont

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\psi(j, n+1) - \psi(j, n)}{\Delta T} \quad (\text{II.115})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\psi(j, n) - \psi(j-1, n)}{\Delta X} \quad (\text{II.116})$$

Avec les mêmes conditions que précédemment on obtient:

$$\text{au noeud } j+1 \quad \frac{\psi(j+1, n+1) - \psi(j+1, n)}{\Delta T} = - \frac{(0 - u\zeta)}{\Delta X} = \frac{u\zeta}{\Delta X}$$

$$\text{au noeud } j \quad \frac{\psi(j, n+1) - \psi(j, n)}{\Delta T} = - \frac{(u\zeta - 0)}{\Delta X} = - \frac{u\zeta}{\Delta X}$$

$$\text{au noeud } j-1 \quad \frac{\psi(j-1, n+1) - \psi(j-1, n)}{\Delta T} = - \frac{(0 - 0)}{\Delta X} = 0$$

Dans ce cas, la perturbation est entraînée suivant la direction de l'écoulement en tendant à s'éloigner de son point d'injection. Ce type de développement réaliste respecte les propriétés de transport du terme advectif et, par conséquent, son utilisation est préférable.

II.3.5 Représentativité de la discrétisation

La précision de la résolution ne dépend pas uniquement des propriétés numériques du schéma d'intégration elle est également liée à l'équation à laquelle sera appliqué le schéma. Afin de comparer la

représentativité d'une discrétisation, on a résolu l'équation de convection-diffusion linéarisée à coefficients constants et en régime permanent.

$$\rho U \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$$

Conditions aux limites:

$$\begin{aligned} - x = 0 & \implies \psi(0) = \psi_0 \\ - x = L & \implies \psi(L) = \psi_L \end{aligned}$$

A: Solution analytique.

$$\psi(x) = \frac{\psi_L - \psi_0}{(\exp(\rho U L / \nu) - 1)} (\exp(\rho U x / \nu) - 1) + \psi_0$$

B: Différence centrée.

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\psi(i+1) - \psi(i-1)}{2\Delta X} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\psi(i+1) - 2\psi(i) + \psi(i-1)}{\Delta X^2}$$

on obtient;

$$\frac{2\nu}{\Delta X} \psi(i) = \left(\frac{\nu}{\Delta X} - \frac{\rho U}{2} \right) \psi(i+1) + \left(\frac{\nu}{\Delta X} + \frac{\rho U}{2} \right) \psi(i-1)$$

On remarque que la condition de positivité des coefficients n'est pas toujours vérifiée.

C: Différence amont.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\psi(i+1) - 2\psi(i) + \psi(i-1)}{\Delta X^2}$$

$$\text{Si } U \leq 0 \implies \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\psi(i+1) - \psi(i)}{\Delta X}$$

$$\text{Si } U \geq 0 \implies \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\psi(i) - \psi(i-1)}{\Delta X}$$

d'où l'on aura;

$$\left(\frac{2\nu}{\Delta X} + \rho U(1-2\theta) \right) \psi(i) = \left(\frac{\nu}{\Delta X} - \rho U\theta \right) \psi(i+1) + \left(\frac{\nu}{\Delta X} + \rho U(1-\theta) \right) \psi(i-1)$$

Dans ce cas la condition de positivité des coefficients est vérifiée.

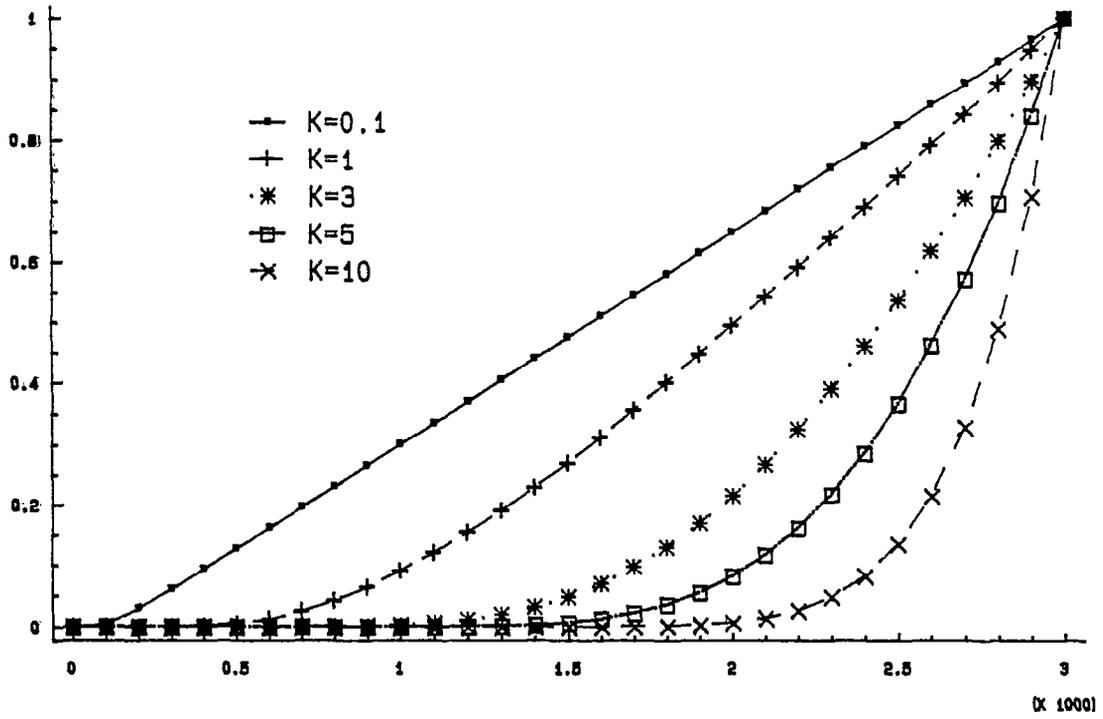


fig.II.19- Variation de la solution analytique en fonction du nombre de Peclet.

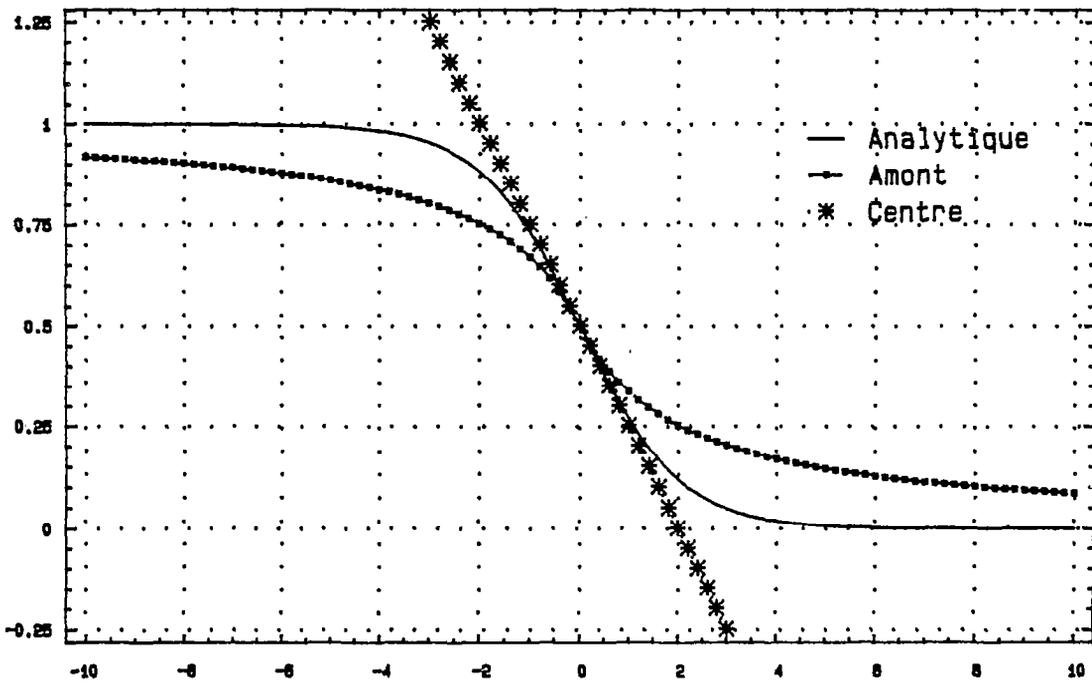


fig.II.20- Comparaison entre la solution analytique et les solutions discrètes.

D: Remarques.

La figure II.19 montre la variation de la solution exacte en fonction de $K = \rho U \Delta X / \nu$. L'allure de $\psi(x)$ n'est linéaire que pour les faibles valeurs de K . Au fur et à mesure que K augmente, $\psi(x)$ se rapproche de la valeur de la limite amont. Dans notre exemple, on a choisi des valeurs positives de K mais cette dernière peut être négative. Dans ce cas l'allure de la courbe est diagonalement symétrique par rapport aux valeurs obtenues.

La figure II.20 illustre une comparaison entre la solution continue exacte et les solutions discrètes centrées et excentrées. Il se dégage de ces résultats les conclusions suivantes:

- le schéma centré ne donnera des résultats réalistes que si les valeurs de K sont faibles; cependant quand on dépasse l'unité les valeurs divergent jusqu'au point de dépasser les valeurs imposées aux limites. En conséquence, afin de garder K dans les limites tolérables, deux éventualités sont possibles: la première consiste à augmenter la viscosité d'une valeur artificielle; la seconde consiste à réduire le pas spatial. Cette dernière possibilité n'est pas toujours une stratégie adéquate à cause de ses conséquences sur le coût et le temps des simulations.

- la discrétisation amont a conduit à des résultats qui se rapprochent de la répartition réelle de la grandeur ψ quelles que soient les valeurs de K . Quand ces dernières sont importantes les schémas amont sous-estiment la valeur exacte, ceci est dû au fait que le schéma prend toujours en compte la diffusion qui est théoriquement absente.

- si l'étude était basée sur l'approximation par des séries de Taylor, le schéma centré qui possède une erreur de troncature du 3^{ème} ordre doit être plus précis que les schémas excentrés dont l'erreur de troncature est du 2^{ème} ordre. En raison de la variation exponentielle de la fonction solution de l'équation convective-diffusive, l'approche par des séries de Taylor n'est valable que pour les très faibles pas spatiaux; dans

le cas contraire elle conduirait à des conclusions erronées. De plus, le schéma amont semble augmenter la diffusion en ajoutant une grandeur artificielle égale à $\rho U \Delta X / 2$. Cette quantité peut être souhaitable quand $\rho U \Delta X / \nu$ est important.

- d'autres développements sont proposés dans la littérature. Les meilleurs étant les schémas hybrides dont la conception repose sur la combinaison des avantages acquis par les schémas amont et centré. Ainsi pour les faibles valeurs de K , la discrétisation est centrée et dans le cas contraire elle est amont, tout en supposant une viscosité nulle. Ce type de schéma conduit à une amélioration de la représentativité de la discrétisation en ramenant la solution "discrète" vers la solution exacte. Un exemple de ce type de schéma est donné par Spalding (1972), Raithby (1976) et Patankar (1980).

II.3.6 Conclusions

La difficulté du traitement numérique de l'équation complète nous a conduit à analyser les propriétés du terme advectif à partir d'équations simplifiées et incomplètes. Ces analyses ne sont que des approches préliminaires qui facilitent la compréhension des propriétés numériques et physiques liées au caractère particulier du terme advectif. Les conditions obtenues ne constituent que des conditions souhaitables dans toute modélisation de phénomènes où l'advection joue un rôle important mais leur généralisation n'est pas valable.

Les schémas analysés ne seront applicables qu'à des propagations s'effectuant suivant les mêmes conditions que l'étude numérique. Cette dernière impose des hypothèses et simplifications qui diffèrent généralement des situations réelles. Un choix des pas spatio-temporels qui respectent le critère de stabilité de Von Neumann est conditionné par la validité et la précision de la méthode d'analyse.

D'un autre côté, l'introduction des autres termes des équations du mouvement, la variation des coefficients des équations et le traitement des limites affectent le critère de stabilité. On a démontré que le terme de frottement peut avoir un rôle déstabilisant si son expression est explicite; par contre, il joue un rôle dissipatif souhaité si sa discrétisation est implicite.

Le respect des propriétés numériques d'une discrétisation ne conduit pas forcément à la meilleure description des processus physiques étudiés. Il est évident qu'une discrétisation centrée possède une erreur de troncature inférieure à celle d'un développement amont mais ce dernier, pour des nombres de Peclet supérieurs à l'unité, décrit mieux le phénomène de transport induit par l'advection et conduit à des résultats plus réalistes.

L'introduction d'un artefact numérique dissipatif est un moyen efficace d'atténuation des harmoniques supérieures. Certains auteurs essayent de forcer ce phénomène par un choix de valeurs exagérées aux coefficients de viscosité artificielle afin de lui donner un pouvoir dissipatif important (Roday, 1976). Certes, cette technique atténue les ondes supérieures qui apparaissent dans les simulations des phénomènes rapides mais elle entraîne une diminution d'amplitude de toutes les autres harmoniques réduisant ainsi l'avantage acquis par son utilisation.

Cette étude n'a pas pris en compte l'influence des discrétisations des noeuds proches des limites. Ces dernières conduisent généralement à l'utilisation de développements d'ordre inférieur à celui utilisé à l'intérieur du domaine. La précision totale et le critère de stabilité sont en conséquence influencés par ce traitement. Ce point sera développé dans le chapitre suivant.

Chaque schéma introduit une diffusion numérique. Un certain niveau d'oscillation est tolérable. Ces faibles parasites numériques ne

sont pas importants en regard des incertitudes sur le système physique. La précision d'une méthode de discrétisation ne constitue pas le seul critère dans le choix des développements à adopter. Ces derniers sont fortement conditionnés par la nature des phénomènes étudiés d'une part, et par le coût et le temps nécessaire pour obtenir des résultats satisfaisants d'autre part. Dans certains cas, un schéma simple est préférable à une résolution complexe qui demande une programmation lourde et nécessite trop de tests aux limites.

On pourrait formuler la question fondamentale de la manière suivante: faut-il améliorer la précision d'une discrétisation en réduisant sa représentativité physique ou bien est-il préférable de respecter les propriétés physiques des termes des équations au détriment d'un développement de moindre précision?. Il est délicat de donner une réponse satisfaisante à ces questions. Les développements théoriques ne peuvent se substituer aux essais empiriques qu'il faut réaliser dans les milieux naturels avec divers types de discrétisations afin de comparer les valeurs obtenues aux valeurs théoriques ou observées tout en tenant compte des impératifs de moindre coût et de temps de calcul.

CHAPITRE 3
MOUVEMENT TRANSITOIRE

Chapitre III

CIRCULATION TRANSITOIRE

III.1 MODELES DE SIMULATIONIII.1.1 Introduction

La modélisation des phénomènes naturels doit être suffisamment précise, simple d'utilisation et économique. L'outil élaboré doit respecter les propriétés physiques et numériques des équations du mouvement, même pour les termes qui présentent une faible contribution dans les phénomènes étudiés, afin qu'il puisse être adaptable à un large éventail de problèmes pratiques.

Les chapitres précédents ont évoqués diverses conditions à respecter pour augmenter le réalisme des discrétisations. Les développements à choisir devraient réduire les erreurs de troncature et éviter l'apparition d'ondes parasites, surtout aux limites. La précision d'un schéma dépendra du niveau de respect des propriétés de consistance, de convergence et de stabilité.

Le modèle développé pour la simulation de la circulation dans l'estuaire de la Casamance se base sur les priorités suivantes:

- 1°- Résolution suivant une grille totalement imbriquée.
- 2°- Discrétisation semi-implicite à pas fractionnaires.
- 3°- Stabilité inconditionnelle de la version linéarisée.
- 4°- Précision du second ordre et au moins du premier ordre aux limites.
- 5°- Schéma dissipatif sans toutefois détériorer la précision.

Du fait de la particularité de l'estuaire de la Casamance, plusieurs discrétisations ont été essayées. Le choix s'est basé, d'une part, sur les propriétés présentées dans les chapitres précédents et,

d'autre part, sur les résultats des fréquents tests réalisés avec différents types de développements.

Chacun des trois modèles qui seront présentés dans la suite, possède quelques avantages et inconvénients par rapport aux autres. La différence entre eux est principalement liée aux discrétisations spatio-temporelles des divers opérateurs, qui conduisent selon le cas à un système à 4 ou 6 équations algébriques. Leur condition de stabilité est la même: une fois linéarisés, ils présentent une forme simplifiée équivalente. Si le facteur "temps de calcul" est à prendre en considération, le second système est préférable surtout dans les milieux qui présentent de vastes zones inondables nécessitant le recours à de fréquents tests aux limites.

Ce chapitre sera consacré à la présentation des diverses discrétisations des points internes et des points aux limites du domaine, ainsi qu'à l'algorithme de résolution. Une revue bibliographique rapide de quelques modèles bi-dimensionnels en plan suivra cette présentation, quant à la dernière partie elle sera consacrée au modèle mono-dimensionnel utilisé dans la procédure de calage des coefficients de frottement au fond.

III.1.2 Discrétisations des équations

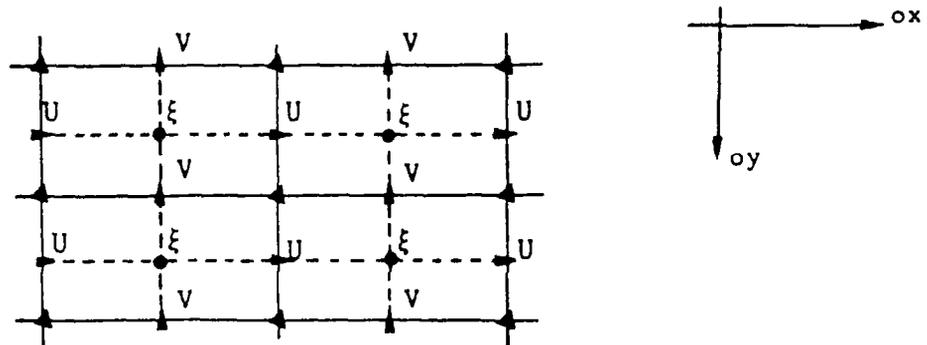


fig.III.1-Schéma d'intégration.

Le modèle élaboré repose sur la méthode du pas fractionnaire, où les différents opérateurs des équations du mouvement sont résolus en deux étapes; la première, suivant la direction ox , où on calcule les

variables ξ et U et, la deuxième, suivant l'axe oy , où on calcule les variables ξ et V .

Cette technique permet, d'une part, de se ramener à chaque étape à des résolutions sur un seul axe d'espace et, d'autre part, de conserver, par sommation directe des différentes étapes, les équations de départ, où certains termes sont calculés à des pas de temps intermédiaires.

III.1.2.1 Equation de continuité

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial(HU)}{\partial x} + \frac{\partial(HV)}{\partial y} = 0$$

$B_{\alpha} \quad B_{\alpha 1}$

L'équation de continuité et la propriété de conservation de masse, sont intimement liées. "Aucun trou ne pouvant se produire dans le fluide l'excès de masse fluide entrant, pendant un temps ΔT , dans un élément géométrique $\delta x \delta y \delta z$, qui demeure constamment au sein du fluide, doit servir à augmenter la masse pendant ce même temps" (Lacombe, 1965).

Une méthode des différences finies possède les propriétés de conservation de masse, si elle respecte certaines relations intégrales de conservation de l'équation de continuité (Roache, 1972). Cette notion s'explique par: le pourcentage d'accumulation dû à une propriété ϕ dans un volume V est égal à la somme du flux advecté et du flux diffusé à travers la section δv de V .

Dans la suite, on analysera cette propriété, suivant une approche mono-dimensionnelle, pour les diverses discrétisations testées dans l'estuaire de la Casamance.

III.1.2.1.1 Etude du terme B_α

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial(HU)}{\partial x} = 0 = \frac{\partial \xi}{\partial t} + B_\alpha$$

comme t est indépendant des variables spatiales, l'intégrale de l'équation précédente sur un volume V conduit à :

$$\int_V \frac{\partial \phi}{\partial t} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \phi dV$$

En appliquant le théorème de divergence de Gauss on obtient :

$$\int_V \nabla(vH) dV = \int_{\delta V} (vH) n dS$$

avec :

δV : frontière de V

n : vecteur normal unitaire. (positif s'il est sortant)

m : indice spatial suivant ox .

n : indice spatial suivant oy .

k : indice temporel.

Le premier terme de l'équation de continuité ne pose pas de problème. Son développement dépend de la méthode choisie pour la discrétisation temporelle des équations du système. Si cette dernière repose sur la méthode du pas fractionnaire, le choix, d'une part, des variables dépendantes à prendre aux étages de temps intermédiaires et, d'autre part, le nombre voulu d'équations à résoudre conditionneront la discrétisation de ce terme. Par contre le terme B_α est plus délicat. Il représente, suivant un axe bien déterminé, le produit de la hauteur totale d'eau par la composante de la vitesse dans la maille considérée. Il s'ensuit qu'il renferme un produit de deux variables dépendantes et d'une constante locale.

Deux grandes familles de développements existent: la première consiste à discrétiser B_α en conservant sa forme et, la deuxième consiste à développer l'expression de B_α avant la discrétisation, suivant;

$$\frac{\partial(HU)}{\partial x} = \frac{H\partial U}{\partial x} + \frac{U\partial H}{\partial x}$$

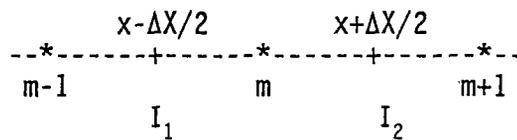
(1) (2)

On supposera en première approximation que la profondeur est constante, ce qui permet d'annuler le terme (2):

A: Etude de la première famille.

$$1- \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\phi^{k+1}(m) - \phi^k(m)}{\Delta T}$$

$$2- \frac{\partial(HU)}{\partial x} = \frac{(HU)^k(m+1) - (HU)^k(m-1)}{2\Delta X}$$



Considérons une région V, limitée par $x \in (I_1, I_2)$ et évaluons la somme S:

$$S = \frac{1}{\Delta T} \sum_{I_1}^{I_2} \phi_i \Delta X$$

$$\frac{1}{\Delta T} \left(\sum_{I_1}^{I_2} \phi_i \Delta X - \sum_{I_1}^{I_2} \phi_i \Delta X \right) = \frac{1}{2} \sum_{I_1}^{I_2} \left((U\phi)_{i-1} - (U\phi)_{i+1} \right)$$

+----- B -----+

$$\begin{array}{l}
 I1 \\
 I1+1 \\
 I1+2 \\
 \vdots \\
 I2-2 \\
 I2-1 \\
 I2
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 B = (U\phi)_{I1-1} - (U\phi)_{I1+1} \\
 \quad \quad \quad (U\phi)_{I1} - (U\phi)_{I1+2} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad (U\phi)_{I1+1} - (U\phi)_{I1+3} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \vdots \\
 \quad \quad \quad (U\phi)_{I2-3} - (U\phi)_{I2-1} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad (U\phi)_{I2-2} - (U\phi)_{I2} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad (U\phi)_{I2-1} - (U\phi)_{I2+1}
 \end{array}$$

$$B = ((U\phi)_{I1-1} - (U\phi)_{I1}) - ((U\phi)_{I2-1} - (U\phi)_{I2+1})$$

d'où l'on obtient:

$$B/2 = (U\phi)_{I1-1/2} - (U\phi)_{I2-1/2}$$

Le taux d'accumulation d'une propriété ϕ dans un volume V est égal au flux à travers sa frontière $I_{I-1/2}$, il en résulte que ce type de discrétisation respecte les propriétés de conservation.

L'application du premier choix à l'équation de continuité conduit aux discrétisations suivantes:

En $(m\Delta X, n\Delta Y, (k\Delta T))$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = (\xi(m, n, (k+0.5)\Delta T) - \xi^k(m, n, k\Delta T)) / 0.5\Delta T$$

$$\frac{\partial (HU)}{\partial x} = (K_1 U^{k+1}(m+1/2, n) - K_2 U^{k+1}(m-1/2, n)) / \Delta X$$

$$\frac{\partial (HV)}{\partial y} = (K_3 V^{k+1/2}(m, n+1/2) - K_4 V^{k+1/2}(m, n-1/2)) / \Delta Y$$

$$K1 = (h_{m+1/2, n+1/2} + h_{m+1/2, n-1/2} + \xi_{m, n} + \xi_{m+1, n}) / 2$$

$$K2 = (h_{m+1/2, n-1/2} + h_{m-1/2, n-1/2} + \xi_{m, n} + \xi_{m-1, n}) / 2$$

$$K3 = (h_{m+1/2, n+1/2} + h_{m-1/2, n+1/2} + \xi_{m, n} + \xi_{m, n+1}) / 2$$

$$K4 = (h_{m+1/2, n-1/2} + h_{m-1/2, n-1/2} + \xi_{m, n} + \xi_{m, n-1}) / 2$$

En $(m\Delta X, n\Delta Y, (k+1)\Delta T)$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = (\xi(m, n, (k+1)\Delta T) - \xi^k(m, n, (k+0.5)\Delta T)) / 0.5\Delta T$$

$$\frac{\partial (HU)}{\partial x} = (K_1 U^{k+1}(m+1/2, n) - K_2 U^{k+1}(m-1/2, n)) / \Delta X$$

$$\frac{\partial(HV)}{\partial y} = (K3 V^{k+3/2}(m,n+1/2) - K4 V^{k+3/2}(m,n-1/2)) / \Delta Y$$

$$K1 = (h_{m+1/2,n+1/2} + h_{m+1/2,n-1/2} + \xi_{m,n} + \xi_{m+1,n}) / 2$$

$$K2 = (h_{m+1/2,n-1/2} + h_{m-1/2,n-1/2} + \xi_{m,n} + \xi_{m-1,n}) / 2$$

$$K3 = (h_{m+1/2,n+1/2} + h_{m-1/2,n+1/2} + \xi_{m,n} + \xi_{m,n+1}) / 2$$

$$K4 = (h_{m+1/2,n-1/2} + h_{m-1/2,n-1/2} + \xi_{m,n} + \xi_{m,n-1}) / 2$$

Dans le cas des systèmes fermés, l'intégration numérique sur tous les noeuds (m,n) du domaine étudié, conduit à l'annulation du flux de masse aux interfaces des divers volumes de contrôle. En conséquence, il y aura conservation, d'une part, de masse et, d'autre part, de la variance moyenne de la profondeur. Cette dernière permet l'annulation de l'énergie potentielle fictive (gH^2) qui pourrait être créée ou libérée par le système à chaque pas de temps (Lamb, 1932).

B: Etude de la deuxième famille.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + U \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

$$\text{avec } \frac{\phi^{k+1}(i) - \phi^k(i)}{\Delta T} = - U_i \frac{\phi(i+1) - \phi(i-1)}{2\Delta X}$$

La somme S dans une région V, serait:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta T} \left(\sum_{I_1}^{I_2} \phi_i \Delta X - \sum_{I_1}^{I_2} \phi_i \Delta X \right) &= \frac{1}{2} \sum_{I_1}^{I_2} (U_i (\phi_{i-1} - \phi_{i+1})) \\ &= (U_{I1+2} - U_{I1}) \phi_{I1+1} \end{aligned}$$

qui, à l'exception du cas particulier d'une vitesse constante, ne respecte pas la propriété de conservation de l'équation de continuité. Pour ce type de développement, le choix de la première famille est souhaitable.

III.1.2.2 Quelques types de discrétisation testée

Bien que le premier type de discrétisation ait été utilisé, il nous est apparu intéressant de présenter d'autres développements de l'équation de continuité qui ont donné des résultats satisfaisants dans les simulations de la circulation dans l'estuaire de la Casamance. Ces discrétisations ont imposé, dans certains cas, des modifications des développements de l'équation dynamique que l'on évoquera par la suite.

III.1.2.2.1 Deuxième type de discrétisation

Le deuxième type de discrétisation repose sur le développement du terme B_α de l'équation de continuité suivant la forme:

$$\frac{\partial(HU)}{\partial x} = \frac{\partial(h+\xi)U}{\partial x} = \frac{\partial(hU)}{\partial x} + \frac{\xi\partial U}{\partial x} + \frac{U\partial\xi}{\partial x}$$

Le terme explicite est centré en conservant le produit de la hauteur d'eau par la composante de la vitesse V . L'équation de continuité se ramène à:

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{\partial(HV)}{\partial y} + \frac{\partial(hU)^{k+1/2}}{\partial x} + \xi(k-1/2) \frac{\partial U^{k+1/2}}{\partial x} + U(k-1/2) \frac{\partial\xi^{k+1/2}}{\partial x} = 0$$

+--- a ---+ +----- b -----+ +---- c -----+

avec au noeud $(m,n,k\Delta T)$.

$$a = \frac{\partial(hU)}{\partial x} = (K_1 U^{k+1/2}(m+1/2,n) - K_2 U^{k+1/2}(m-1/2,n)) / \Delta X$$

$$K1 = (h(m+1/2,n+1/2) + h(m+1/2,n-1/2))/2$$

$$K2 = (h(m-1/2,n+1/2) + h(m-1/2,n-1/2))/2$$

$$b = \frac{\xi\partial U}{\partial x} = (U^{k+1/2}(m+1/2,n) - U^{k+1/2}(m-1/2,n)) * \xi^{k-1/2}(m,n) / \Delta X$$

$$c = \frac{U\partial\xi}{\partial x} = A_1/\Delta X$$

$$A_1 = U^{k-1/2}(m+1/2, n) * (\xi^{k+1/2}(m+1, n) - \xi^{k+1/2}(m, n)) \quad \text{si } U(m, n) > 0$$

$$A_1 = U^{k-1/2}(m-1/2, n) * (\xi^{k+1/2}(m, n) - \xi^{k+1/2}(m-1, n)) \quad \text{si } U(m, n) \leq 0$$

$$\frac{\partial(HU)}{\partial x} = a + b + c$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = (\xi^{k+1/2}(m, n) - \xi^k(m, n)) / .5\Delta T$$

avec,

$$\xi(m, n, k) = (1-\alpha)\xi_{m, n} + \alpha(\xi_{m+1, n} + \xi_{m-1, n} + \xi_{m, n+1} + \xi_{m, n-1})$$

$$\text{et } \alpha = (1, 1/4, 0)$$

$$\frac{\partial(HV)}{\partial y} = (H^k(m, n+1/2) V^k(m, n+1/2) - H^k(m, n-1/2) V^k(m, n-1/2)) / \Delta Y$$

avec:

$$H^k(m, n+1/2) = h^k(m, n+1/2) + \xi^k(m, n+1/2)$$

$$H^k(m, n-1/2) = h^k(m, n-1/2) + \xi^k(m, n-1/2)$$

$$H(m, n+1/2) = H(m-1/2, n+1/2) + H(m+1/2, n+1/2) / 2$$

$$H(m, n-1/2) = H(m-1/2, n-1/2) + H(m+1/2, n-1/2) / 2$$

$$\xi(m, n+1/2) = \xi(m, n+1) + \xi(m, n) / 2$$

$$\xi(m, n-1/2) = \xi(m, n-1) + \xi(m, n) / 2$$

A: Etude de la conservation.

Terme $\partial\xi/\partial t$: C1

$$\frac{1}{\Delta T/2} \left(\sum_{I_1}^{I_2} \xi(i, k+1/2) \Delta X - \sum_{I_1}^{I_2} \xi(i, k) \Delta X \right)$$

Terme $\partial(hU)/\partial x$: C2

$$.5 \int_{I_2}^{I_2} ((K_1 U(i+1/2, k+1/2)) - (K_2 U(i-1/2, k+1/2)))$$

avec

$$K_1 = h(m+1/2, n+1/2) + h(m+1/2, n-1/2)$$

$$K_2 = h(m+1/2, n+1/2) + h(m-1/2, n-1/2)$$

Terme $\xi \partial U / \partial x$: C3

$$\int_{I_2}^{I_2} (\xi(i, k-1/2) U(i+1/2, k+1/2) - \xi(i, k-1/2) U(i-1/2, k+1/2))$$

Terme $U \partial \xi / \partial x$: C4

$$.5 \int_{I_2}^{I_2} ((K_1 U(i+1/2, k-1/2)) - (K_1 U(i-1/2, k-1/2)))$$

avec:

$$K_1 = \xi(m+1, n, k+1/2) - \xi(m, n, k+1/2) \quad \text{si } U(m, n) > 0$$

$$K_1 = \xi(m, n, k+1/2) - \xi(m-1, n, k+1/2) \quad \text{si } U(m, n) \leq 0$$

L'intégrale entre I_1 et I_2 de l'équation de continuité conduit à:

$$\begin{array}{cccc} \frac{\partial \xi}{\partial t} & = & - \frac{\partial(hU)}{\partial x} & - \xi \frac{\partial U}{\partial x} & - U \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ A_1 & & A_2 & A_3 & A_4 \end{array}$$

$$A_1 = \frac{1}{\Delta T/2} (\int_{I_1}^{I_2} \xi(i, k+1/2) \Delta X - \int_{I_1}^{I_2} \xi(i, k) \Delta X)$$

$$A_2 = .5 \int_{I_2}^{I_2} ((K_1 U(i+1/2, k+1/2)) - (K_2 U(i-1/2, k+1/2)))$$

avec

$$K_1 = h(m+1/2, n+1/2) + h(m+1/2, n-1/2)$$

$$K_2 = h(m+1/2, n+1/2) + h(m-1/2, n-1/2)$$

$$\begin{array}{rcl}
i = I_1 & .5(K_2U)_{I_1-1/2} - .5(K_1U)_{I_1+1/2} \\
i = I_1+1 & .5(K_2U)_{I_1+1/2} - .5(K_1U)_{I_1+3/2} \\
i = I_1+2 & .5(K_2U)_{I_1+3/2} - .5(K_1U)_{I_1+5/2} \\
i = I_1+3 & .5(K_2U)_{I_1+5/2} - .5(K_1U)_{I_1+7/2} \\
. & . \\
. & . \\
. & . \\
i = I_2-3 & .5(K_2U)_{I_2-7/2} - .5(K_1U)_{I_2-5/2} \\
i = I_2-2 & .5(K_2U)_{I_2-5/2} - .5(K_1U)_{I_2-3/2} \\
i = I_2-1 & .5(K_2U)_{I_2-3/2} - .5(K_1U)_{I_2-1/2} \\
i = I_2 & .5(K_2U)_{I_2-1/2} - .5(K_1U)_{I_2+1/2} \\
\hline
\sum_{I_1}^{I_2} & = & (.5 K_2U)_{I_1-1/2} - (.5 K_1U)_{I_2+1/2}
\end{array}$$

D'où il vient que l'accumulation d'une propriété ϕ dans un volume V est égale au flux de ϕ dans V à travers la limite $I_1-1/2$.

$$A_3 = \sum_{I_2}^{I_1} (\xi(i, k-1/2)U(i+1/2, k+1/2) - \xi(i, k-1/2)U(i-1/2, k+1/2))$$

$$\begin{array}{rcl}
i = I_1 & \xi(I_1)(U(I_1-1/2) - U(I_1+1/2)) \\
i = I_1+1 & \xi(I_1+1)(U(I_1+1/2) - U(I_1+1/2)) \\
i = I_1+2 & \xi(I_1+2)(U(I_1+1/2) - U(I_1+1/2)) \\
i = I_1+3 & \xi(I_1+3)(U(I_1+1/2) - U(I_1+1/2)) \\
. & . \\
. & . \\
. & . \\
i = I_2-3 & \xi(I_2-3)(U(I_2-1/2) - U(I_2-1/2)) \\
i = I_2-2 & \xi(I_2-2)(U(I_2-1/2) - U(I_2-1/2)) \\
i = I_2-1 & \xi(I_2-1)(U(I_2-1/2) - U(I_2-1/2)) \\
i = I_2 & \xi(I_2)(U(I_2-1/2) - U(I_2+1/2)) \\
\hline
\sum_{I_1}^{I_2} & \text{est différent de zéro}
\end{array}$$

Ce type de développement est non-conservatif, Il en est de même pour A_4 ; malgré cela, il a donné des résultats satisfaisants dans

l'estuaire de la Casamance. Ceci est peut être dû à la faible contribution des termes a et b par rapport au terme c. En effet :

$$\left. \begin{array}{l} \xi \lll h \\ \text{et} \\ \partial U / \partial x \lll \end{array} \right\} \implies \frac{\partial(hU)}{\partial x} \ggg \xi \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Le développement de la forme précédente conduit aux expressions suivantes:

En (m,n) suivant ox:

$$\begin{aligned} & \xi(m+1, n, k+1/2) \frac{(K3\Delta T U(m+1/2, n, k-1/2))}{2\Delta X} + \\ & \xi(m-1, n, k+1/2) \frac{(1-K3)\Delta T U(m-1/2, n, k-1/2)}{2\Delta X} + \\ & \xi(m, n, k+1/2) \frac{1+K3\Delta T U(m+1/2, n, k-1/2)}{2\Delta X} + \frac{(1-K3)\Delta T U(m-1/2, n, k-1/2)}{2\Delta X} \\ & + U(m-1/2, n, k+1/2) \frac{(-K2\Delta T - \Delta T \xi(m, n, k-1/2))}{2\Delta X} + \\ & U(m+1/2, n, k+1/2) \frac{(K1\Delta T + \Delta T \xi(m, n, k-1/2))}{2\Delta X} + \\ & = \xi(m, n, k) - \frac{\Delta T (H^k(m, n+1/2) V^k(m, n+1/2) - H^k(m, n-1/2) V^k(m, n-1/2))}{2\Delta Y} \end{aligned}$$

NB: La discrétisation suivant oy est symétrique.

Remarque: Afin de remédier au problème de conservation dans le schéma du second type, un test a été réalisé avec le développement conservatif suivant:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial(HV)}{\partial y} + \frac{\partial(hU)^{k+1/2}}{\partial x} + \xi(k) \frac{\partial U^k}{\partial x} + U(k) \frac{\partial \xi^k}{\partial x} = 0$$

mais les résultats étaient instables et peu satisfaisants.

Il s'ensuit que la propriété de conservation est une condition souhaitable dans toute modélisation, mais elle n'implique pas forcément une meilleure précision. Ces conclusions rejoignent celles d'Abbott (1981), Roache (1972) et Stelling (1983), qui ont montré que l'utilisation d'une forme non conservatrice pour résoudre l'équation de diffusion à coefficients variables, conduit à des résultats plus précis qu'une discrétisation qui respecte cette propriété. Dans ces cas le critère de conservation devient un indicateur sur la grandeur de l'erreur de troncature.

III.1.2.2.2 Troisième type de discrétisation

Le troisième type de discrétisation repose sur un développement implicite pour la composante de la vitesse perpendiculaire à l'axe considéré et explicite pour les autres variables dépendantes, tel que:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial (HV)}{\partial y} + \frac{\partial (hU)^{k+1/2}}{\partial x} + \xi(k) \frac{\partial U^{k+1/2}}{\partial x} + U(k+1/2) \frac{\partial \xi^k}{\partial x} = 0$$

avec;

$$\xi(k) \frac{\partial U^{k+1/2}}{\partial x} = \xi^k(m, n) * \frac{U(m+1/2, n) - U(m-1/2, n)}{\Delta X} |^{k+1/2}$$

$$U(k+1/2) \frac{\partial \xi^k}{\partial x} = \begin{cases} \left(U(m-1/2, n, k+1/2) * \frac{\xi(m, n) - \xi(m-1, n)}{\Delta X} \right)^k & \text{Si } \underline{U} \leq 0 \\ \left(U(m+1/2, n, k+1/2) * \frac{\xi(m+1, n) - \xi(m, n)}{\Delta X} \right)^k & \text{Si } \underline{U} > 0 \end{cases}$$

avec

$$\underline{U} = (U(m+1/2, n) + U(m-1/2, n)) / 2$$

A: Etude de la conservation.

L'intégrale de $U\partial\xi/\partial x + \xi\partial U/\partial x$ entre I_1 et I_2 amène à:

Pour $U > 0$

$$\begin{aligned}
 i = I_1 & \quad -U_{I_1-1/2} (\xi_{I_1} - \xi_{I_1-1}) - \xi_{I_1} U_{I_1+1/2} + \xi_{I_1} U_{I_1-1/2} \\
 i = I_{1+1} & \quad -U_{I_1+1/2} (\xi_{I_1+1} - \xi_{I_1}) - \xi_{I_1+1} U_{I_1+3/2} + \xi_{I_1+1} U_{I_1+1/2} \\
 i = I_{1+2} & \quad -U_{I_1+3/2} (\xi_{I_1+2} - \xi_{I_1+1}) - \xi_{I_1+2} U_{I_1+5/2} + \xi_{I_1+2} U_{I_1+3/2} \\
 i = I_{1+3} & \quad -U_{I_1+5/2} (\xi_{I_1+3} - \xi_{I_1+2}) - \xi_{I_1+3} U_{I_1+7/2} + \xi_{I_1+3} U_{I_1+5/2} \\
 & \quad \cdot \quad \cdot \\
 & \quad \cdot \quad \cdot \\
 & \quad \cdot \quad \cdot \\
 i = I_{2-3} & \quad -U_{I_2-7/2} (\xi_{I_2-3} - \xi_{I_2-4}) - \xi_{I_2-3} U_{I_2-5/2} + \xi_{I_2-3} U_{I_2-7/2} \\
 i = I_{2-2} & \quad -U_{I_2-5/2} (\xi_{I_2-2} - \xi_{I_2-3}) - \xi_{I_2-2} U_{I_2-3/2} + \xi_{I_2-2} U_{I_2-5/2} \\
 i = I_{2-1} & \quad -U_{I_2-3/2} (\xi_{I_2-1} - \xi_{I_2+2}) - \xi_{I_2-1} U_{I_2-1/2} + \xi_{I_2-1} U_{I_2-3/2} \\
 i = I_2 & \quad -U_{I_2-1/2} (\xi_{I_2} - \xi_{I_2+1}) - \xi_{I_2} U_{I_2+1/2} + \xi_{I_2} U_{I_2-1/2}
 \end{aligned}$$

$$\sum_{I_1}^{I_2} = (U(I_1-1/2)\xi(I_1-1) - U(I_2-1/2)\xi(I_2))$$

Il en est de même pour $U \leq 0$ où l'on obtient:

$$\sum_{I_1}^{I_2} = (U(I_1-1/2)\xi(I_1) - U(I_2+1/2)\xi(I_2+1))$$

B: Etude de la propriété de transport.

$$\begin{array}{ccc}
 & \Psi & \\
 * & \xrightarrow{\quad} & * \\
 m-1 & & m & & m+1
 \end{array}$$

Dans le cas mono-dimensionnel et pour $U > 0$ on aura :

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = - \frac{\partial(hU)}{\partial x} - \xi \frac{\partial U}{\partial x} - U \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\frac{\xi_j(k+1/2) - \xi_j(k)}{\Delta T/2} = \frac{\xi_j (U_{j+1/2} - U_{j-1/2})}{\Delta X} + \frac{U_{j-1/2} (\xi_j - \xi_{j-1})}{\Delta X}$$

$$j = m+1 \quad \frac{\xi_j(k+1/2) - \xi_j(k)}{\Delta T/2} = 0 + \frac{U_{m+1/2} * \Psi}{\Delta X}$$

$$j = m \quad \frac{\xi_j(k+1/2) - \xi_j(k)}{\Delta T/2} = - \frac{U_{m-1/2} * \Psi}{\Delta X}$$

$$j = m-1 \quad \frac{\xi_j(k+1/2) - \xi_j(k)}{\Delta T/2} = 0$$

Une perturbation Ψ qui rentre au noeud m de la grille va évoluer suivant la direction de l'écoulement, par conséquent cette discrétisation respecte les propriétés de transport. Le résultat étant symétrique pour $U < 0$, ou pour l'équation de continuité suivant oy .

Les fréquents tests effectués avec ce type de discrétisations ont donné de très bons résultats. Dans ce cas, l'équation de continuité se mettra sous la forme:

Suivant ox en $(m\Delta X, n\Delta Y, k\Delta T)$:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial(HV)}{\partial y} + \frac{\partial(hU)^{k+1/2}}{\partial x} + \xi(k) \frac{\partial U^{k+1/2}}{\partial x} + U(k+1/2) \frac{\partial \xi^k}{\partial x} = 0$$

avec:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\xi(m, n, k+1/2) - \xi(m, n, k)}{\Delta T/2}$$

avec,

$$\xi(m, n, k) = (1-\alpha)\xi_{m,n} + \alpha(\xi_{m+1,n} + \xi_{m-1,n} + \xi_{m,n+1} + \xi_{m,n-1})$$

et $\alpha = (1, 1/4, 0)$

$$\frac{\partial(HV)}{\partial y} = (H^k(m, n+1/2) V^k(m, n+1/2) - H^k(m, n-1/2) V^k(m, n-1/2)) / 2\Delta Y$$

$$H(m, n+1/2) = h(m-1/2, n+1/2) + \xi(m, n) + h(m+1/2, n+1/2) + \xi(m, n+1)$$

$$H(m, n-1/2) = h(m-1/2, n-1/2) + \xi(m, n) + h(m+1/2, n-1/2) + \xi(m, n-1)$$

$$\frac{\partial(hU)}{\partial x} = (K_1 U^{k+1/2}(m+1/2, n) - K_2 U^{k+1/2}(m-1/2, n)) / \Delta X$$

$$K_1 = (h(m+1/2, n+1/2) + h(m+1/2, n-1/2))/2$$

$$K_2 = (h(m+1/2, n+1/2) + h(m+1/2, n-1/2))/2$$

$$\xi^{(k)} \frac{\partial U^{k+1/2}}{\partial x} = \xi^{k(m,n)} * \frac{U(m+1/2, n) - U(m-1/2, n)}{\Delta X} |^{k+1/2}$$

$$U^{(k+1/2)} \frac{\partial \xi^k}{\partial x} = \begin{cases} \left(U(m-1/2, n, k+1/2) * \frac{\xi(m, n) - \xi(m-1, n)}{\Delta X} \right)^k & \text{Si } \underline{U} \leq 0 \\ \left(U(m+1/2, n, k+1/2) * \frac{\xi(m+1, n) - \xi(m, n)}{\Delta X} \right)^k & \text{Si } \underline{U} > 0 \end{cases}$$

avec

$$\underline{U} = (U(m+1/2, n) + U(m-1/2, n)) / 2$$

Suivant oy en (mΔX, nΔY, (k+1/2)ΔT):

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial (HU)}{\partial x} + \frac{\partial (hV)^{k+1}}{\partial y} + \xi^{(k+1/2)} \frac{\partial V^{k+1}}{\partial y} + V^{(k+1)} \frac{\partial \xi^{k+1/2}}{\partial y} = 0$$

avec:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\xi(m, n, k+1) - \xi(m, n, k+1/2)}{\Delta T/2}$$

$$\frac{\partial (HU)}{\partial x} = (H^{k+1/2}(m+1/2, n) U^{k+1/2}(m+1/2, n) - H^{k+1/2}(m-1/2, n) U^{k+1/2}(m-1/2, n)) / 2\Delta X$$

$$H(m+1/2, n) = h(m+1/2, n+1/2) + \xi(m, n) + h(m+1/2, n-1/2) + \xi(m+1, n)$$

$$H(m-1/2, n) = h(m-1/2, n-1/2) + \xi(m, n) + h(m-1/2, n+1/2) + \xi(m-1, n)$$

$$\frac{\partial (hV)}{\partial y} = (K_3 V^{k+1}(m, n+1/2) - K_4 V^{k+1}(m, n-1/2)) / \Delta Y$$

$$K_3 = (h(m+1/2, n+1/2) + h(m-1/2, n+1/2))/2$$

$$K_4 = (h(m+1/2, n-1/2) + h(m-1/2, n-1/2))/2$$

$$\xi^{(k+1/2)} \frac{\partial V^{k+1}}{\partial y} = \xi^{k+1/2}(m, n) * \frac{V(m, n+1/2) - V(m, n-1/2)}{\Delta Y} |^{k+1}$$

$$V^{(k+1)} \frac{\partial \xi^{k+1/2}}{\partial x} = \begin{cases} \left(V(m, n+1/2, k+1) * \frac{\xi(m, n+1) - \xi(m, n)}{\Delta Y} \right)^{k+1/2} & \text{Si } \underline{V} \leq 0 \\ \left(V(m, n-1/2, k+1) * \frac{\xi(m, n) - \xi(m, n-1)}{\Delta Y} \right)^{k+1/2} & \text{Si } \underline{V} > 0 \end{cases}$$

avec:

$$V = (V(m, n+1/2) + V(m, n-1/2)) / 2$$

III.1.2.3 Conclusions

Les trois types de discrétisation évoqués précédemment, diffèrent par les techniques utilisées dans la discrétisation spatio-temporelle de leurs divers opérateurs. La méthode du pas fractionnaire admet les mêmes analyses de stabilité que les méthodes reposant sur un seul pas de temps, mais elles diffèrent dans la méthodologie de résolution du système algébrique qui en découle.

L'application de cette technique sur les deux variables dépendantes (ξ, U) puis (ξ, V) dans les systèmes 1 et 3 et, uniquement pour la variable dépendante ξ dans le système 2, permet de ramener le système bi-dimensionnel à une succession de deux systèmes mono-dimensionnels résolus séparément et simultanément suivant l'axe ox puis l'axe oy .

Le premier et le troisième systèmes conduisent directement à des expressions dont l'ensemble se met sous une forme matricielle tri-diagonale. Les inconnues du système sont: $\xi_{m,n}$, $U_{m+1/2,n}$, $U_{m-1/2,n}$ (suivant ox). Par contre, le second système renferme cinq inconnues; $\xi_{m,n}$, $\xi_{m-1,n}$, $\xi_{m+1,n}$, $U_{m+1/2,n}$, $U_{m-1/2,n}$, dont la résolution dépend du développement de l'équation dynamique. Dans notre cas, on a préféré une résolution algorithmique à la résolution d'une matrice penta-diagonale, ce qui a conduit à des restrictions dans les discrétisations de l'équation dynamique du second système.

III.1.2.4 Equation dynamique

La discrétisation de l'équation dynamique est toujours accompagnée de problèmes physiques et numériques liés aux termes d'advection, de diffusion et de frottement. Les paragraphes précédents présentent des conditions nécessaires qui permettent d'augmenter le réalisme des discrétisations de ces termes, mais ces études sont effectuées sur des équations simplifiées et ne peuvent se substituer aux essais empiriques qu'il faut réaliser à partir de divers types de discrétisations sur le milieu étudié.

Les différents schémas d'intégration analysés au paragraphe II.3, montrent que les discrétisations excentrées représentent mieux le mécanisme advectif, surtout pour des nombres de courant importants.

Le terme advectif et le terme de frottement doivent être discrétisés de façon à s'annuler quand la profondeur de l'eau tend vers zéro. L'expression du frottement étant inversement proportionnelle à la profondeur, son développement explicite impose la définition d'une profondeur seuil en-dessous de laquelle ce terme est annulé, (ceci étant aussi le cas de l'advection), sinon sa valeur croît vers l'infini au fur et à mesure que la profondeur de l'eau diminue; ce problème ne se pose pas dans un développement implicite qui favorise l'effet dissipatif recherché (Cf. II.3.3.3).

La diffusion longitudinale est de moindre importance dans l'équation dynamique. Son utilisation permet, de par sa forme quadratique, de stabiliser la résolution en réduisant l'erreur de troncature et par conséquent de conduire à une meilleure approximation des équations.

III.1.2.4.1 Terme d'inertie

$$\text{En } (m+1/2, n) \quad \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U^{k+1/2} - \underline{U}^k}{1/2\Delta T} \quad \text{Systèmes 3,2(ox)}$$

$$\text{En } (m+1/2, n) \quad \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U^{k+1} - \underline{U}^k}{\Delta T} \quad \text{Système 1}$$

$$\text{En } (m, n+1/2) \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{V^{k+1/2} - \underline{V}^k}{1/2\Delta T} \quad \text{Système 2(oy)}$$

$$\underline{U}(m, n, k) = (1-\alpha)U_{m, n, k} + \alpha(U_{m+1, n, k} + U_{m-1, n, k} + U_{m, n+1, k} + U_{m, n-1, k})$$

et $\alpha = (1, 1/4, 0)$

$$\text{En } (m, n+1/2) \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{V^{k+1} - \underline{V}^{k+1/2}}{1/2\Delta T} \quad \text{Systèmes 3,2(oy)}$$

$$\text{En } (m, n+1/2) \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{V^{k+3/2} - \underline{V}^{k+1/2}}{\Delta T} \quad \text{Système 1}$$

$$\text{En } (m+1/2, n) \quad \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U^{k+1} - U^{k+1/2}}{1/2\Delta T} \quad \text{Système 2(ox)}$$

III.1.2.4.2 Force de Coriolis

En $(m+1/2, n)$

$$-f V = -f \underline{V}(m, n+1/2, k) \quad \text{Systèmes 3,2(ox)}$$

$$-f V = -f \underline{V}(m, n+1/2, k+1/2) \quad \text{Système 1}$$

$$f U = f \underline{U}(m+1/2, n, k+1/2) \quad \text{Système 2(oy)}$$

$$\underline{V} = \frac{V(m+1, n+1/2) + V(m, n+1/2) + V(m+1, n-1/2) + V(m, n-1/2)}{4}$$

En (m,n+1/2)

$$f U = f \underline{U}(m+1/2, n, k+1/2) \quad \text{Systèmes 3,2(oy)}$$

$$f U = f \underline{U}(m+1/2, n, k+1) \quad \text{Système 1}$$

$$f V = f \underline{V}(m, n+1/2, k+1) \quad \text{Système 2(ox)}$$

$$\underline{U} = \frac{U(m-1/2, n) + U(m-1/2, n+1) + U(m+1/2, n) + U(m+1/2, n+1)}{4}$$

III.1.2.4.3 Tension en surface

La tension en surface est exprimée par:

$$\frac{\tau^S}{\rho H} = \frac{\rho_a \Omega W^2}{\rho(h+\xi)}$$

ρ_a : densité de l'air

Ω : coefficient de cisaillement du vent

W : vitesse du vent

ψ : angle (oy, direction du vent)

$$\text{En (m+1/2, n)} \quad \frac{\rho_a \Omega W^2 \sin\psi}{\rho(m+1/2, n) H(m+1/2, n)} \quad \text{Systèmes 1,3,2(ox)}$$

$$\text{En (m, n+1/2)} \quad \frac{\rho_a \Omega W^2 \cos\psi}{\rho(m, n+1/2) H(m, n+1/2)} \quad \text{Système 2(oy)}$$

$$\text{En (m, n+1/2)} \quad \frac{\rho_a \Omega W^2 \cos\psi}{\rho(m, n+1/2) H(m, n+1/2)} \quad \text{Systèmes 1,3,2(oy)}$$

$$\text{En (m+1/2, n)} \quad \frac{\rho_a \Omega W^2 \sin\psi}{\rho(m+1/2, n) H(m+1/2, n)} \quad \text{Système 2(ox)}$$

III.1.2.4.4 Terme de pression

$$\text{En (m+1/2, n)} : \quad \frac{g H(m+1/2, n)}{2 \rho(m+1/2, n)} \delta_x \rho(m+1/2, n) + g \frac{\xi(m+1, n, k+1/2) - \xi(m+1, n, k+1/2)}{\Delta X} \quad \text{Systèmes 1,3,2(ox)}$$

$$\text{En } (m, n+1/2) : \frac{g \underline{H}(m, n+1/2)}{2 \underline{\rho}(m, n+1/2)} \delta_y \rho(m, n+1/2) + g \frac{\xi(m, n+1, k) - \xi(m, n, k)}{\Delta Y} \quad \text{Système 2(oy)}$$

$$\text{En } (m, n+1/2) : \frac{g \underline{H}(m, n+1/2)}{2 \underline{\rho}(m, n+1/2)} \delta_y \rho(m, n+1/2) + g \frac{\xi(m, n+1, k+1) - \xi(m, n, k+1)}{\Delta Y} \quad \text{Systèmes 1,3,2(oy)}$$

$$\text{En } (m+1/2, n) : \frac{g \underline{H}(m+1/2, n)}{2 \underline{\rho}(m+1/2, n)} \delta_x \rho(m+1/2, n) + g \frac{\xi(m+1, n, k+1/2) - \xi(m+1, n, k+1/2)}{\Delta X} \quad \text{Système 2(ox)}$$

III.1.2.4.5 Terme de diffusion

$$\text{En } (m+1/2, n) : v \nabla^2 U = v \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|^{k+} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \Big|^k \right) \quad \text{Systèmes 3,2(ox)}$$

$$v \nabla^2 U = v \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|^{k+1} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \Big|^k \right) \quad \text{Système 1}$$

$$\text{En } (m, n+1/2) : v \nabla^2 V = v \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \Big|^k + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \Big|^k \right) \quad \text{Système 2(oy)}$$

avec ,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U(m+3/2, n) - 2U(m+1/2, n) + U(m-1/2, n)}{\Delta X^2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{U(m+1/2, n+1) - 2U(m+1/2, n) + U(m+1/2, n-1)}{\Delta Y^2}$$

$$\text{En } (m, n+1/2) : v \nabla^2 V = v \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \Big|^{k+1/2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \Big|^{k+3/2} \right) \quad \text{Système 1}$$

$$v \nabla^2 V = v \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \Big|^{k+1/2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \Big|^{k+1/2} \right) \quad \text{Systèmes 3,2(oy)}$$

$$\text{En } (m+1/2, n) : v \nabla^2 U = v \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|^{k+1/2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \Big|^{k+1/2} \right) \quad \text{Système 2(ox)}$$

avec ,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{V(m+1/2, n+1/2) - 2V(m, n+1/2) + V(m-1/2, n+1/2)}{\Delta X^2}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{V(m, n+3/2) - 2V(m, n+1/2) + V(m, n-1/2)}{\Delta Y^2}$$

III.1.2.4.6 Terme de frottement

$$\text{En } (m+1/2, n) : \frac{g U(m+1/2, n, k+1/2) (\underline{V}^2(k+1/2) + \underline{U}^2(k))^{1/2}}{\underline{C}^2(m+1/2, n) \underline{H}(m+1/2, n)} \quad \text{Systèmes 3,2(ox)}$$

$$\frac{g U(m+1/2, n, k+1) (\underline{V}^2(k+1/2) + \underline{U}^2(k))^{1/2}}{\underline{C}^2(m+1/2, n) \underline{H}(m+1/2, n)} \quad \text{Système 1}$$

$$\text{En } (m, n+1/2) : \frac{g V(m, n+1/2, k+1/2) (\underline{U}^2(k) + \underline{V}^2(k+1/2))^{1/2}}{\underline{C}^2(m, n+1) \underline{H}(m, n+1/2)} \quad \text{Système 2(oy)}$$

avec ,

$$C(m+1/2, n) = \frac{C(m+1, n) + C(m, n)}{2}$$

$$\underline{U} = U(m+1/2, n, k) \quad \text{1er essai}$$

$$\underline{U} = (U(m+1/2, n, k) + U(m-1/2, n, k)) / 2 \quad \text{2ème essai}$$

$$\underline{U} = \frac{U(m+1/2, n-1) + U(m-1/2, n) + U(m+1/2, n+1) + U(m+3/2, n) \Big|^k}{4} \quad \text{3ème essai}$$

$$\text{En } (m, n+1/2) : \frac{g V(m, n+1/2, k+1) (\underline{U}^2(k) + \underline{V}^2(k+1/2))^{1/2}}{\underline{C}^2(m, n+1) \underline{H}(m, n+1/2)} \quad \text{Systèmes 3,2(oy)}$$

En (m,n+1/2) :
$$\frac{g V(m,n+1/2,k+3/2) (\underline{U}^2(k) + \underline{V}^2(k+1/2))^{1/2}}{\underline{C}^2(m,n+1) \underline{H}(m,n+1/2)}$$
 Système 1

En (m+1/2,n) :
$$\frac{g U(m+1/2,n,k+1) (\underline{V}^2(k+1/2) + \underline{U}^2(k))^{1/2}}{\underline{C}^2(m+1/2,n) \underline{H}(m+1/2,n)}$$
 Système 2(ox)

avec:

$$\underline{C}(m,n+1/2) = \frac{\underline{C}(m,n+1) + \underline{C}(m,n)}{2}$$

$\underline{V} = V(m,n+1/2,k+1/2)$ 1^{er} essai

$\underline{V} = (V(m,n+1/2,k+1/2) + V(m-1/2,n,k+1/2))/2$ 2^{ème} essai

$\underline{V} = \frac{V(m-1,n+1/2) + V(m,n-1/2) + V(m+1,n+1/2) + V(m,n+3/2)}{4} |^{k+1/2}$ 3^{ème} essai

III.1.2.4.7 Terme advectif

En (m+1/2,n) :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} = \begin{cases} \left(U(m+1/2,n,k+\theta) * \frac{U(m+1/2,n) - U(m-1/2,n)}{\Delta X} \right)^k & \text{Si } \underline{U} > 0 \\ \left(U(m+1/2,n,k+\theta) * \frac{U(m+3/2,n) - U(m+1/2,n)}{\Delta X} \right)^k & \text{Si } \underline{U} \leq 0 \end{cases}$$

$\theta = 1/2$ Systèmes 3,2(ox)

$\theta = 1$ Système 1

$$\frac{1}{H} \frac{\partial (HUV)}{\partial y} = \begin{cases} \left(\frac{1}{\underline{H}(m+1/2,n)} (\underline{HUV}_{m+1/2,n} - \underline{HUV}_{m+1/2,n-1}) \right)^k / \Delta Y & \text{Si } \underline{V} > 0 \\ \left(\frac{1}{\underline{H}(m+1/2,n)} (\underline{HUV}_{m+1/2,n+1} - \underline{HUV}_{m+1/2,n}) \right)^k / \Delta Y & \text{Si } \underline{V} \leq 0 \end{cases}$$

avec ,

$$\underline{U} = (U(m+1/2, n) + U(m+3/2, n) + U(m-1/2, n)) / 3$$

$$\underline{V} = \frac{V(m, n+1/2) + V(m+1, n-1/2) + V(m+1, n+1/2) + V(m, n-3/2)}{4} \Big|^k$$

En $(m, n+1/2)$:

$$V \frac{\partial V}{\partial y} = \begin{cases} V(m, n+1/2, k+\theta) * \frac{V(m, n+1/2) - V(m, n-1/2)}{\Delta Y} \Big|^{k+1/2} & \text{Si } \underline{V} > 0 \\ V(m, n+1/2, k+\theta) * \frac{V(m, n+3/2) - V(m, n+1/2)}{\Delta Y} \Big|^{k+1/2} & \text{Si } \underline{V} \leq 0 \end{cases}$$

$$\partial(HVU)/H\partial x = \begin{cases} \frac{1}{H(m, n+1/2)} (HVU_{m, n+1/2} - HVU_{m, n-1/2}) \Big|^{k+1/2} / \Delta X & \text{Si } \underline{U} > 0 \\ \frac{1}{H(m, n+1/2)} (HVU_{m, n+3/2} - HVU_{m, n+1/2}) \Big|^{k+1/2} / \Delta X & \text{Si } \underline{U} \leq 0 \end{cases}$$

$\theta = 1$ Systèmes 3,2(oy)

$\theta = 3/2$ Système 1

avec:

$$\underline{V} = (V(m, n+1/2) + V(m, n+3/2) + V(m, n-1/2)) / 3$$

$$\underline{U} = \frac{U(m, n-1/2) + U(m+1, n+1/2) + U(m-1, n+1/2) + U(m, n+3/2)}{4} \Big|^{k+1/2}$$

III.2 TRAITEMENT AUX LIMITES

III.2.1 Introduction

Une équation différentielle spécifie la solution d'un problème à une constante additive près. Les conditions aux limites permettent de déterminer la valeur de cette constante. Tout les mouvements des fluides, sont représentés par la solution d'un même système d'équations différentielles qui est celui de Navier Stokes. La différence entre les

diverses modélisations est due, d'une part, aux hypothèses et simplifications apportées aux équations et, d'autre part, aux conditions initiales, aux limites et à certains paramètres de l'écoulement.

Les hypothèses simplificatrices apportées aux équations de Navier-Stokes, sont généralement validées à partir des campagnes de mesures sur le terrain. Ces dernières permettent de simplifier le problème, par intégration des équations de base sur un des axes du système, si les propriétés fluides étudiées présentent de faibles variations sur l'axe en question. Par ailleurs, les hypothèses semi-empiriques généralement adoptées, bien qu'elles soient criticables pour certains types d'écoulements, amènent à des expressions réalistes dans le cas où les mouvements des fluides se produisent suivant des conditions proches de celles qui ont donné naissance à ces diverses formules. Il s'ensuit que les hypothèses et simplifications apportées aux équations ainsi que les coefficients "physiques" à caler, ne se prêtent pas à trop de critiques, si l'écoulement est conforme aux conditions qui ont permis leur élaboration.

Les conditions initiales jouent un rôle peu important dans les écoulements induits par la marée, vu que la solution est recherchée un certain temps après le démarrage de la simulation. Ces conditions peuvent être arbitraires, généralement on prend un état calme ($U=0$, $V=0$), mais d'autres conditions peuvent être choisies sans que cela ait des repercussions sur le résultat final.

Il n'est donc pas étonnant que les conditions aux limites et le traitement des noeuds limitrophes, aient un rôle très important dans la modélisation. En conséquence, leurs effets sur la précision et la stabilité de la résolution conditionneront la réussite de la modélisation.

Le domaine d'intégration constitue la configuration géométrique qu'il faut séparer d'un milieu naturel plus important. Cette délimitation implique la définition des frontières et des échanges

susceptibles de se produire entre le support et l'extérieur. La technique des différences finies conduit à une schématisation du milieu continue à partir d'une grille constituée d'un assemblage d'un nombre fini de mailles, chacune d'entre elles étant caractérisée par trois frontières : les limites au fond, en surface et transversales (fig.III.2).

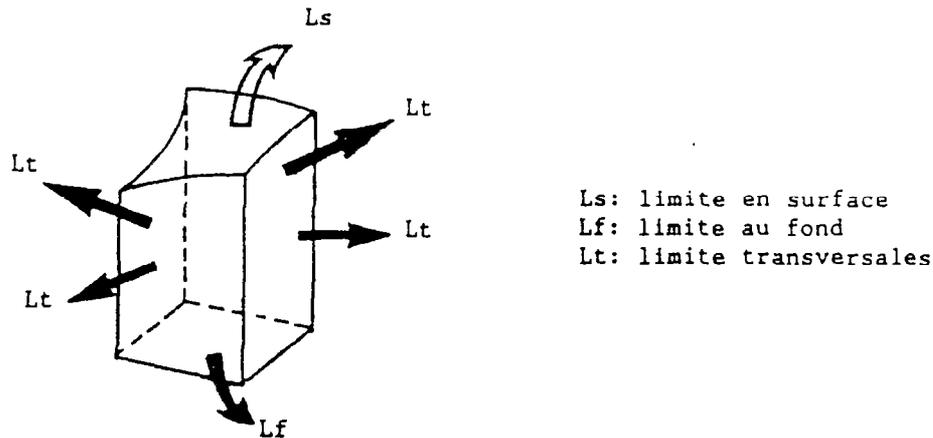


fig.III.2-Frontières d'un volume de contrôle.

Les limites au fond et en surface ont été matérialisées par des surfaces lisses données par les équations (II.9) et (II.10). Les tensions exercées sur ces types de frontières sont généralement reliées, d'une part, à la vitesse moyenne de l'écoulement sur la verticale et, d'autre part, à un coefficient empirique de tension (rugosité du fond, cisaillement en surface). Quant aux limites transversales elles sont de deux types:

1- Les limites "physiques", qui sont des réalités physiques existantes et non imposées.

2- Les limites "numériques" ou "artificielles", qui représentent une notion mathématique introduite afin de limiter le domaine d'intégration.

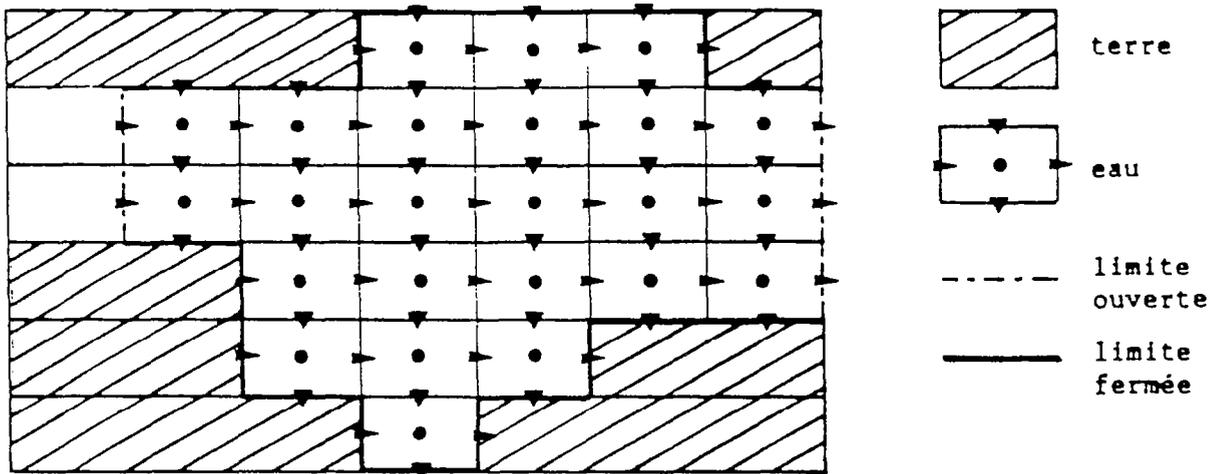


fig.III.3-Schématization des frontières avec une grille totalement imbriquée.

Plusieurs approches ont été développées et la littérature abonde d'expressions aux limites. Ces discrétisations s'adaptent bien à certains types de géométrie mais conduisent à des résultats trop approximatifs pour d'autres; ceci les ramène aux singularités numériques spécifiques à chaque milieu. Ces conditions ne pouvant pas être obtenues à partir des équations différentielles, elles devraient être introduites en fonction des caractéristiques numériques et physiques du champ d'étude (nature du phénomène, régime de l'écoulement, géométrie du milieu, schéma d'intégration, type d'équations utilisées, coût de la simulation et bien d'autres).

Les expressions des conditions aux limites sont de trois types:

1°- condition de Dirichlet, où les variables sont données explicitement sur toutes les limites du domaine d'intégration, même aux limites irrégulières.

2°- condition de Neumann qui consiste à spécifier les dérivées normales aux limites.

3°- condition Mixte qui est une combinaison linéaire de 1° et 2°,

d'où l'expression générale des grandeurs aux limites serait:

$$\alpha\psi + (1-\alpha) \frac{\partial\psi}{\partial n} = K$$

avec:

- $\alpha = 0$ condition de Newmann
- $\alpha = 1$ condition de Dirichlet
- $\alpha \neq 0,1$ condition Mixte

L'objectif des études des conditions aux limites, est la recherche des expressions adéquates qui permettent, à partir d'une norme bien définie, d'arriver à une solution unique, continûment dépendante des conditions initiales et aux limites et telle qu'une perturbation créée à l'intérieur du domaine d'intégration puisse traverser les limites ouvertes de ce domaine avec un minimum de réflexion. Dans ce cas le problème est dit "bien posé".

Le retard dans l'évaluation du comportement aux limites est essentiellement dû au manque de support de calcul efficace et leur essor n'a commencé qu'avec l'apparition des nouvelles machines électroniques.

Le problème d'existence et d'unicité a été traité par Daubert et al. (1967). En se basant sur la théorie des caractéristiques, ces auteurs ont démontré que pour des valeurs données des inconnues du système sur une surface (S) de l'espace (x,y,t), on peut déduire une solution des équations au voisinage de cette surface. Leur méthodologie de résolution du problème de Cauchy consiste à ramener les équations différentielles à un système matriciel où l'annulation du déterminant caractéristique conduit à deux expressions qui lient les cosinus directeurs de la normale à (S). Chacune de ces relations définit une famille de surfaces, telle que l'enveloppe de la première famille est un cône et l'enveloppe de la seconde famille est constituée de plans pivotants autour du lieu des centres des cercles, sections horizontales du cône enveloppe. A chaque famille de

caractéristiques correspond un vecteur L et une relation caractéristique correspondante. En transformant ces relations caractéristiques, Daubert et al. ont montré que celles-ci ne font intervenir que des dérivées intérieures à la surface caractéristique correspondante, notamment des dérivées le long de la génératrice du cône appelée bicaractéristique.

Un point de l'espace (x,y,t) est lié par les relations caractéristiques à ses voisins appartenant aux surfaces caractéristiques passant par ce point. Il est donc lié à l'enveloppe de ces surfaces. Une perturbation en un point (x_0,y_0) à l'instant t_0 va influencer les points du cône caractéristique de sommet (x_0,y_0,t_0) pour $t > t_0$, ces points à leur tour auront le rôle de perturbateurs, ainsi la région intérieure au cône caractéristique futur sera perturbée; cette région est appelée "région d'influence" du point (x_0,y_0,t_0) . Pour $t < t_0$, ce point est influencé par tous ceux qui se trouvent dans son cône caractéristique passé; cette région est appelée "région de dépendance" qui seule conditionne l'état du point étudié (fig.III.4).

Daubert et al. (1967), ont montré que pour un système linéarisé, le nombre minimal des conditions aux limites à définir en un point est égal au nombre de demi-plan caractéristiques qui à l'instant $t=t_1$ sont localement tangents à la limite et pour $t = t_0 < t_1$ étaient extérieurs au volume $S^*(0,T)$ (fig.III.5).

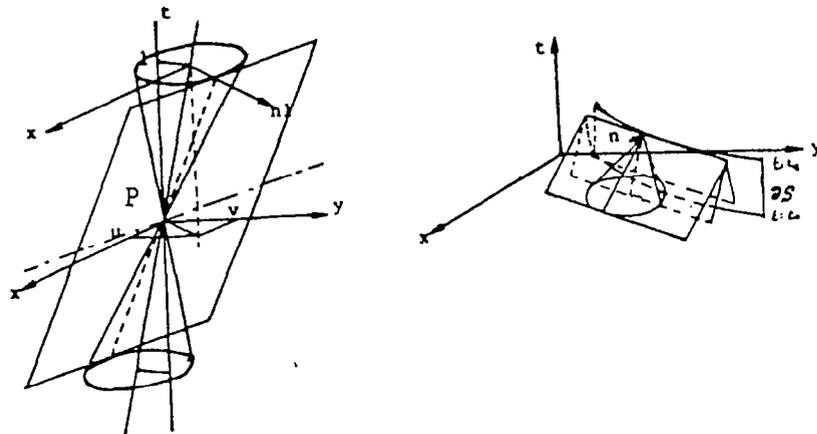


fig.III.4-Domains de dépendance et d'influence du point P.

S: ensemble de points du domaine d'intégration.

C: contour de S

T: maximum du pas de temps

En chaque point de la surface $C^*(0,T)$, les surfaces caractéristiques s'appuient sur C et sont contenues dans le demi-espace ($t < t_{\text{initial}}$). Si l'écoulement n'est pas torrentiel, la position du demi-plan caractéristique est donnée par le signe de $-v \cdot n$. Deux cas se présentent:

1°- Si $-v \cdot n > 0$ le courant pénètre dans S et impose deux conditions sur C.

2°- Si $-v \cdot n < 0$ le courant sort de S et impose une condition sur C.

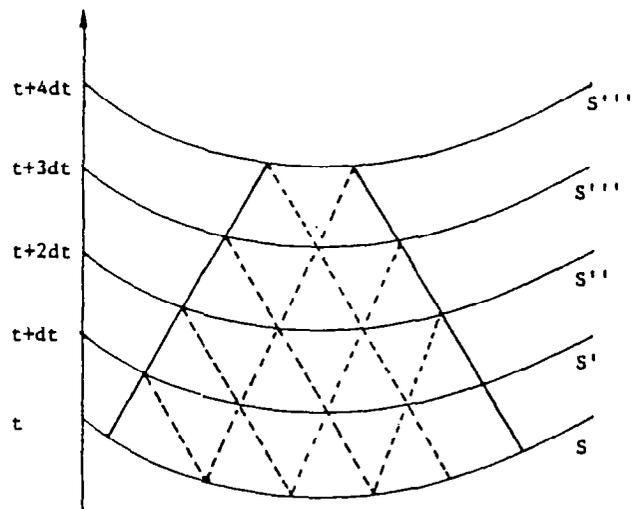


fig.III.5-Surfaces caractéristiques.

v: vitesse du courant

n: normale au contour

Si les conditions aux limites sont bien définies, un léger changement aux limites, conduira à une faible variation aux noeuds à l'intérieur du domaine. Par contre une mauvaise définition des limites conduira, même avec des petits changements, à des instabilités numériques et à une fausse convergence du système.

Le type et le nombre de conditions aux limites nécessaires afin de bien poser le problème, dépend du régime de l'écoulement et de la nature des équations. Le nombre de conditions aux limites dans le cas le plus général est:

	type	limite fermée	limite ouverte
Continuité fluvial	Hyperbolique	1	entrée : 2 sortie : 1
Continuité torrentiel	Hyperbolique	1	entrée : 3 sortie : 0
Dynamique fluvial	Parabolique incomplète	2	entrée : 3 sortie : 2
Dynamique torrentiel	Parabolique incomplète	2	entrée : 3 sortie : 2

Afin que la solution soit continûment dépendante des conditions initiales et aux limites, la solution devrait être stable (Richtmyer, 1978). L'instabilité est un phénomène d'ondes supérieures. Une condition nécessaire de la stabilité d'un schéma de résolution d'une équation non-linéaire est que la version linéarisée de l'équation soit stable. Or pour une grille suffisamment dense, l'approche faite sur des équations linéarisées est assez significative.

La méthode la plus utilisée pour ce type de problème est la méthode de l'énergie (Richtmyer *et al.*, 1967). L'idée de base de cette technique est le choix d'une norme adéquate de la solution, telle que cette norme augmente à chaque pas de temps d'un facteur qui doit rester inférieur à l'unité. On suppose que la solution bornée existe, on perturbe cette solution à l'instant t_0 et on dérive une équation d'énergie ou toute autre quantité positive, définie comme étant fonction de la perturbation. Le problème consiste à prouver la stabilité pour cette perturbation.

Une faible erreur dans les valeurs initiales ou dans les termes non-homogènes ne devrait pas conduire à une augmentation non-bornée de la solution. L'erreur doit donc satisfaire la même équation d'évolution

de la solution non perturbée. Si les équations aux différences finies sont formulées d'une façon conservatrice, le système linéarisé admet comme loi de conservation d'énergie (Richtmyer *et al.*, 1967):

$$\int \frac{U^2 + V^2}{2} \psi + \frac{\psi^2}{2} dx dy = \text{constante} \quad \text{avec } \psi = g(H+\xi)$$

A partir de la méthode de l'énergie, Verboom *et al.* (1982), ont démontré que pour un écoulement sous-critique et dans le cas d'un système hyperbolique, les conditions d'entrée et de sortie du système, peuvent être exprimées à partir des invariants de Riemann (ou variables caractéristiques), qui représentent une combinaison d'ondes progressives et rétro-progressives. La spécification d'une condition en élévation et de la composante de la vitesse parallèle aux limites, devient suffisante pour rendre le problème bien posé. Bien que, dans certains cas et pour certaines types de discrétisations, le schéma de "leapfrog" par exemple, cette formulation n'aboutisse pas à des résultats concluants, l'expérience a montré l'adaptation et la réussite de cette technique sur divers cas de figure, d'où son intérêt.

Les erreurs induites par les traitements aux limites sont essentiellement dues à la méconnaissance des variables à l'extérieur du domaine d'intégration. Si la spécification des valeurs aux limites devait se faire à partir des valeurs internes au domaine, une faible erreur d'estimation entre les valeurs exactes et celles supposées conduit à l'apparition d'ondes parasites aux limites qui sont transmises à l'intérieur du domaine où elles sont interprétées comme étant des ondes longues. Par ailleurs, si la variation de l'erreur aux limites est faible et lente et si la région étudiée est assez grande, la source principale des erreurs reste celle due à la troncature. Il s'ensuit que le choix des conditions aux limites devrait se baser plus sur leur capacité et leur

facilité à contrôler l'évolution d'une perturbation, que sur leur précision dans la description des mouvements.

Il est toujours délicat de construire une discrétisation des variables proches des limites, surtout si le type de discrétisation impose la connaissance de variables qui se trouvent en dehors du domaine d'intégration et, par conséquent, où aucune information ne peut les atteindre. Ceci conduit dans la majorité des cas à utiliser des opérateurs de différences spéciaux, qui ont un ordre de troncature inférieur à ceux des points internes. Ainsi quelle que soit la précision de la solution recherchée des points internes, la précision totale du système est largement influencée par la précision des expressions aux limites.

Les noeuds internes du domaine sont équivalents car ils sont reliés entre eux par des équations de forme identique, donc on peut se contenter d'analyser un seul point. Le problème qui se pose aux limites est que les équations aux différences présentent des développements différents de ceux des points internes, par conséquent ils ne sont pas reliés à ces points par les mêmes relations. Trapp *et al.* (1976), suggèrent d'étendre la méthode locale de Von-Neumann jusqu'aux points limitrophes, de façon que la condition de stabilité à choisir soit celle qui conduit à la condition la plus restrictive.

Une forte réduction de l'ordre des discrétisations aux limites est un handicap. Gustafsson (1975), a montré que l'ordre de convergence d'un schéma aux différences finies avec des solutions suffisamment lissées, est au moins égal à k , si la consistance aux noeuds internes est au moins de l'ordre k et celles des noeuds limitrophes est au moins de l'ordre $k-1$. Cette importante conclusion permet, pour des discrétisations qui présentent une erreur de troncature du second ordre, d'utiliser des développements du premier ordre aux points limitrophes, sans toutefois pénaliser la précision du schéma (Beam *et al.*, 1982).

Les termes d'inertie et de pression, qui sont les plus importants de l'équation dynamique, ne nécessitent pas un traitement spécial aux limites. Les problèmes sont essentiellement dus aux termes advectifs et diffusifs.

III.2.2 Discrétisations des noeuds limitrophes

Les frontières du domaine seront décomposées en trois types:

- 1°- Limites fermées
- 2°- Limites ouvertes
- 3°- Limites mobiles

III.2.2.1 Limites fermées

Ces frontières représentent les limites imperméables du milieu. Les variables dépendantes des équations discrétisées sont les vitesses et les élévations. Ces deux grandeurs étant facilement mesurables, leur implantation dans le modèle est simple.

L'utilisation d'une maille imbriquée a facilité la délimitation du domaine. Les frontières fermées seront toujours approchées de façon à assurer que la terre parallèle à oy passe par u et celle qui est parallèle à ox passe par v .

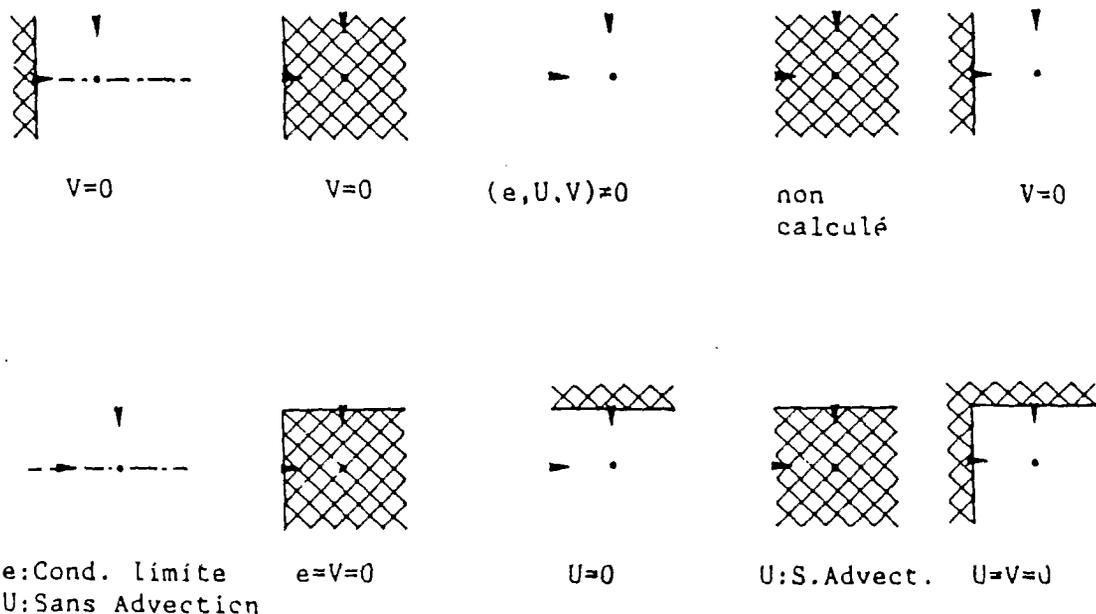


fig.III.6- Quelques exemples de traitement aux limites.

La grille passant par une seule variable et cette variable étant nulle, les noeuds aux limites ne demandent pas le recours à des discretisations spéciales; par contre le problème se pose pour les noeuds limitrophes.

La vitesse du fluide contre une paroi immobile doit être uniquement tangentielle. La composante normale est nulle. Cette condition d'imperméabilité freine la vitesse jusqu'à son annulation. Il reste deux autres possibilités; la première consiste à annuler la vitesse tangentielle (condition de Dirichlet), dans ce cas la limite est dite non glissante, quant à la deuxième, la dérivée normale de la vitesse tangentielle est nulle (condition de Neumann), dans ce cas la limite est glissante. La forme générale des conditions aux limites fermées serait donc:

$$U(\text{perp}) = 0$$

$$(1-\alpha)U(\text{para}) + \alpha \frac{\partial U(\text{para})}{\partial n} \Delta s = 0$$

$$\Delta s = \Delta X_j \quad n: \text{normale}$$

$$\alpha = 1 \quad \text{=====> \textit{limite glissante}}$$

$$\alpha = 0 \quad \text{=====> \textit{limite non glissante}}$$

Dans le modèle de la Casamance, le terme de diffusion est pris en compte et la condition de non glissement s'impose. L'expérience a montré que cette condition conduit à des résultats satisfaisants pour les fluides peu-visqueux; dans le cas contraire, une couche limite peut apparaître et contraint alors à une réduction de la taille des mailles en ces zones, d'où à une diminution du pas de temps.

Afin de mettre en évidence certains problèmes numériques dus à la discrétisation du terme advectif aux noeuds proches des limites, on a choisi deux type de discrétisations l'une amont et l'autre centrée.

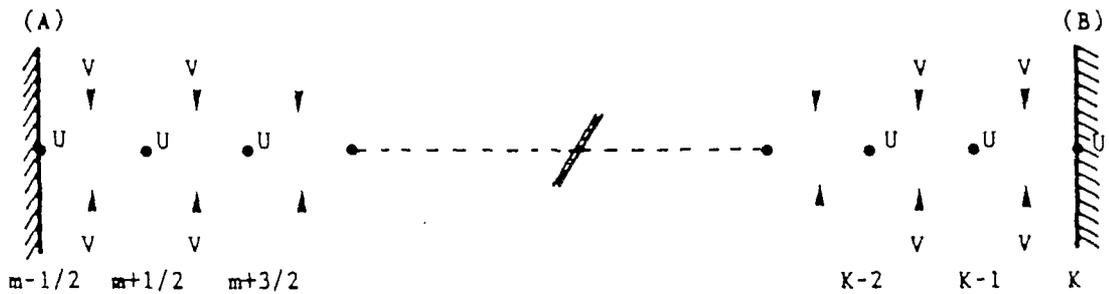


fig.III.7-Traitement des limites parallèles à oy.

La composante normale étant supposée nulle aux limites, nous n'analyserons que le cas où la frontière est parallèle à oy, le cas où elle est parallèle à ox est déduit par symétrie, on obtient:

A: Traitement de $u\partial u/\partial x$ (fig.III.7).

1- Frontière A $u(m-1/2,n) = 0$

a : discrétisation centrée au point $(m+1/2,n)$.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = u(m+1/2,n) * (u(m+3/2,n) - u(m-1/2,n)) / 2\Delta X$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(m+1/2,n) * u(m+3/2,n)}{2\Delta X}$$

2- Frontière B $u(k,n) = 0$

b : discrétisation centrée au point $(k-1,n)$.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = u(k-1,n) * (u(k,n) - u(k-2,n)) / 2\Delta X$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{u(k-1,n) * u(k-2,n)}{2\Delta X}$$

3- Frontière A $u(m-1/2,n) = 0$

b : discrétisation amont au point $(m+1/2,n)$.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = u(m+1/2,n) * \frac{(u(m+3/2,n) - u(m+1/2,n))}{\Delta X}$$

4- Frontière B $u(k,n) = 0$

b : discrétisation amont au point (k-1,n).

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = u(k-1,n) * (u(k,n) - u(k-1,n)) / \Delta X$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{u(k-1,n)^2}{\Delta X}$$

Pour un écoulement dans le sens opposé, on obtient :

Frontière	Amont	Centrée
(B) k-1,n	$U_{k-1} \frac{(U_{k-2} - U_{k-1})}{\Delta X}$	$\frac{U_{k-1} * U_{k-2}}{2\Delta X}$
(A) m+1/2,n	$- \frac{(U_{m+1/2})^2}{\Delta X}$	$- \frac{U_{m+3/2} * U_{m+1/2}}{2\Delta X}$

Dans les deux cas la discrétisation centrée conduit à des problèmes numériques. Pour la frontière (A), si l'écoulement se dirige de la limite vers l'intérieur du domaine, le terme $u\partial u/\partial x$ agit comme un terme de frottement local et conduit à une augmentation de l'élévation. Cet effet s'amplifie si le gradient transversal de la vitesse est important. Pour la frontière (B), si l'écoulement se dirige de l'intérieur vers la frontière, on aura une accumulation locale d'énergie qui tend à déstabiliser la solution.

Dans l'estuaire de la Casamance, les discrétisations des termes d'advection et de diffusion aux nœuds proches des limites fermées, ont été choisies selon deux critères:

1°- assurer la stabilité locale en ces points tout en évitant l'apparition d'une diffusion négative dans l'erreur de troncature.

2°- respecter la direction de l'écoulement en utilisant autant que possible un nombre réduit de nœuds spatiaux.

Dans les cas où ces hypothèses n'étaient pas réalisables, les termes en question étaient mis à zéro.

$$\frac{\begin{matrix} m-1/2 & & m & & m+1/2 \\ * & & * & & * \\ \hline j-1 & & j & & j+1 \end{matrix}}$$

$$u \partial u / \partial x =$$

a: si $\underline{U}(m+1/2, n) > 0$

$$K3 * U^{k+\theta}(m+1/2, n) * \frac{(U(m+1/2, n) - U(m-1/2, n))^k}{\Delta X} = A$$

b: si $\underline{U}(m+1/2, n) \leq 0$

$$(1-K3) * U^{k+\theta}(m+1/2, n) * \frac{(U(m+3/2, n) - U(m+1/2, n))^k}{\Delta X} = B$$

Si $U(m-1/2, n) = 0$ $\implies A = 0$ ($K3 = 0$)

Si $U(m+3/2, n) = 0$ $\implies B = 0$ ($K3 = 1$)

Si $U(m-1/2, n) = U(m+3/2, n) = 0$ $\implies u \partial u / \partial x = 0$

Si $U(m+1/2, n) > 0$ $\implies K3 = 1$

Si $U(m+1/2, n) \leq 0$ $\implies K3 = 0$

avec $0 \leq \theta \leq 1$

Le même traitement est effectué pour $v \partial v / \partial y$, on aura:

$$\begin{array}{c} | \\ k+1 * n+3/2 \\ | \\ k * n+1/2 \\ | \\ k-1 * n-1/2 \\ | \end{array}$$

$$v \partial v / \partial y =$$

a: si $\underline{V}(m, n+1/2) > 0$

$$K4 * V^{k+\theta}(m, n+1/2) * \frac{(V(m, n+1/2) - V(m, n-1/2))^k}{\Delta Y} = A1$$

b: si $\underline{V}(m, n+1/2) \leq 0$

$$(1-K4) * \underline{V}^{k+\theta}(m, n+1/2) * \frac{(V(m, n+3/2) - V(m, n+1/2))^k}{\Delta Y} = B1$$

Si $V(m, n-1/2) = 0$ =====> $A1 = 0$ ($K4 = 0$)

Si $V(m, n+3/2) = 0$ =====> $B1 = 0$ ($K4 = 1$)

Si $V(m, n-1/2) = V(m, n+3/2) = 0$ =====> $v\partial v/\partial y = 0$

Si $V(m, n+1/2) > 0$ =====> $K4 = 1$

Si $V(m, n+1/2) \leq 0$ =====> $K4 = 0$

Avec:

$$\underline{U}(m+1/2, n) = \frac{U(m-1/2, n) + U(m+1/2, n) + U(m+3/2, n)}{3}$$

$$\underline{V}(m, n+1/2) = \frac{V(m, n-1/2) + V(m, n+1/2) + V(m, n+3/2)}{3}$$

$$\underline{\theta}(r, s) = \frac{\theta(r, s+1) + \theta(r, s-1) + \theta(r+1, s) + \theta(r-1, s)}{4}$$

B: Traitement de $\frac{1}{H} \frac{\partial(HUV)}{\partial y}$

en $(m+1/2, n)$ $\left(\frac{1}{H} \left(\frac{\partial(HUV)}{\partial y} \right) \right)^k =$

a: Si $\underline{V}(m+1/2, n) > 0$

$$\frac{1}{H(m+1/2, n)} \left((HUV)_{m+1/2, n} - (HUV)_{m+1/2, n-1} \right) / \Delta Y$$

b: Si $\underline{V}(m+1/2, n) \leq 0$

$$\frac{1}{H(m+1/2, n)} \left((HUV)_{m+1/2, n+1} - (HUV)_{m+1/2, n} \right) / \Delta Y$$

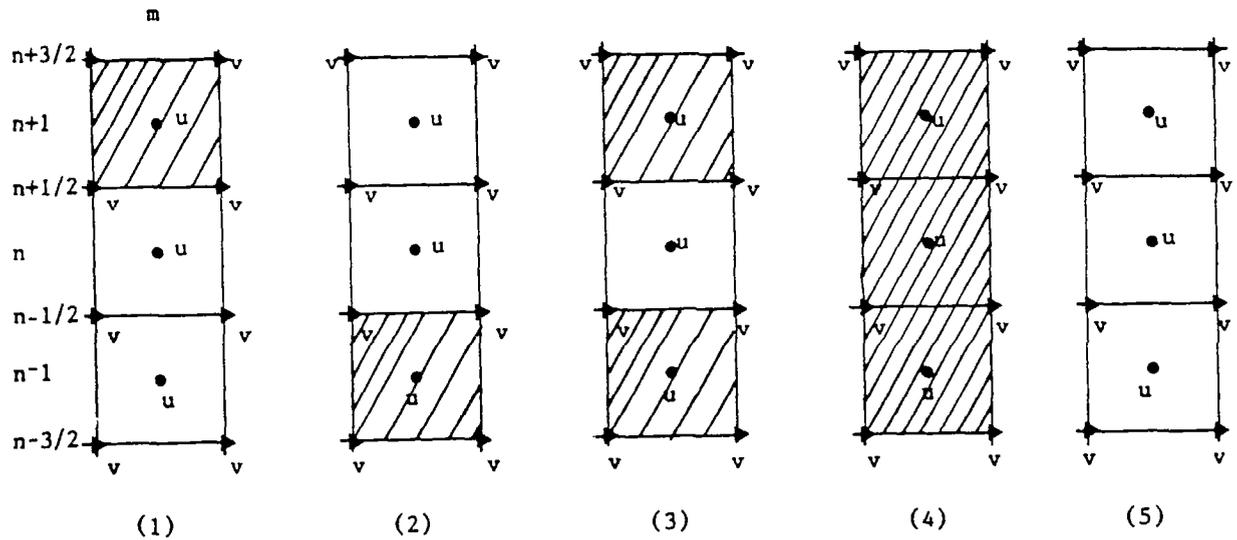


fig.III.8-Plusieurs cas de figure possibles suivant l'axe oy

1er cas de figure :

$U(m+1/2, n-1) \neq 0$, $U(m+1/2, n) \neq 0$ et $U(m+1/2, n+1) = 0$

a: Si $\underline{V}(m+1/2, n) > 0$

$$\frac{1}{H(m+1/2, n)} ((H\underline{U\underline{V}})_{m+1/2, n} - (H\underline{U\underline{V}})_{m+1/2, n-1}) / \Delta Y$$

b: Si $\underline{V}(m+1/2, n) \leq 0$

$$\left(\frac{1}{H} \left(\frac{\partial(H\underline{U\underline{V}})}{\partial y} \right) \right)^k = 0$$

2ème cas de figure :

$U(m+1/2, n) \neq 0$, $U(m+1/2, n+1) \neq 0$ et $U(m+1/2, n-1) = 0$

a: Si $\underline{V}(m+1/2, n) > 0$

$$\left(\frac{1}{H} \left(\frac{\partial(H\underline{U\underline{V}})}{\partial y} \right) \right)^k = 0$$

b: Si $\underline{V}(m+1/2, n) \leq 0$

$$\frac{1}{H(m+1/2, n)} ((H\underline{U\underline{V}})_{m+1/2, n+1} - (H\underline{U\underline{V}})_{m+1/2, n}) / \Delta Y$$

3ème cas de figure :

$U(m+1/2, n) \neq 0$, $U(m+1/2, n+1) = 0$ et $U(m+1/2, n-1) = 0$

$$\left(\frac{1}{H} \left(\frac{\partial(HUV)}{\partial y} \right) \right)^k = 0$$

4ème cas de figure :

$U(m+1/2, n) = 0$, $U(m+1/2, n+1) = 0$ et $U(m+1/2, n-1) = 0$

$$\left(\frac{1}{H} \left(\frac{\partial(HUV)}{\partial y} \right) \right)^k = 0$$

5ème cas de figure :

$U(m+1/2, n) \neq 0$, $U(m+1/2, n+1) \neq 0$ et $U(m+1/2, n-1) \neq 0$

$$\left(\frac{1}{H} \left(\frac{\partial(HUV)}{\partial y} \right) \right)^k = \text{développement normal.}$$

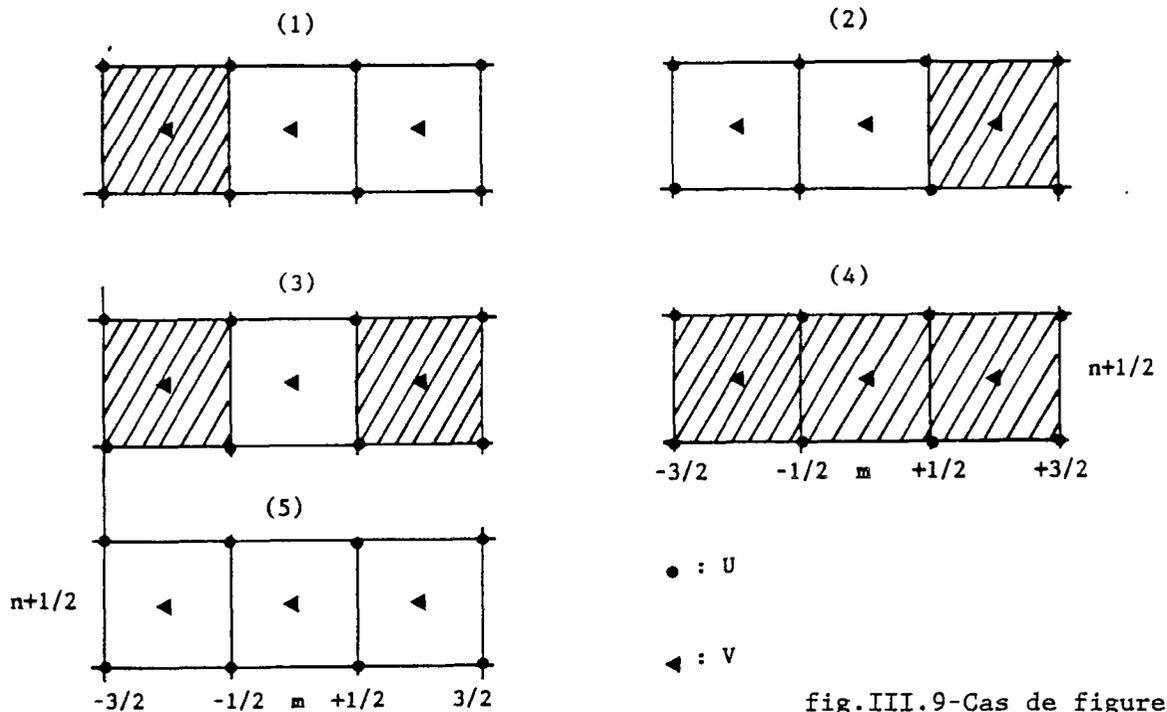


fig.III.9-Cas de figure suivant l'axe ox

C: Traitement de la diffusion suivant (ox).

1er cas de figure :

$U(m-1/2, n) = 0$, $U(m+1/2, n) \neq 0$ et $U(m+3/2, n) \neq 0$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U(m+3/2, n) - U(m+1/2, n)}{\Delta X^2}$$

2ème cas de figure :

$$U(m-1/2, n) \neq 0, U(m+1/2, n) \neq 0 \text{ et } U(m+3/2, n) = 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial^2 x} = \frac{U(m+1/2, n) - U(m-1/2, n)}{\Delta X^2}$$

3ème cas de figure :

$$U(m-1/2, n) = 0, U(m+1/2, n) \neq 0 \text{ et } U(m+3/2, n) = 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial^2 x} = 0$$

4ème cas de figure :

$$U(m-1/2, n) = 0, U(m+1/2, n) = 0 \text{ et } U(m+3/2, n) = 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial^2 x} = 0$$

5ème cas de figure :

$$U(m-1/2, n) \neq 0, U(m+1/2, n) \neq 0 \text{ et } U(m+3/2, n) \neq 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial^2 x} = \text{Traitement normal}$$

D: Traitement de la diffusion suivant (oy).

1er cas de figure :

$$U(m+1/2, n-1) \neq 0, U(m+1/2, n) \neq 0 \text{ et } U(m+1/2, n+1) = 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial^2 y} = \frac{U(m+1/2, n) - U(m+1/2, n-1)}{\Delta Y^2}$$

2ème cas de figure :

$$U(m+1/2, n-1) = 0, U(m+1/2, n) \neq 0 \text{ et } U(m+1/2, n+1) \neq 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial^2 y} = \frac{U(m+1/2, n+1) - U(m+1/2, n)}{\Delta Y^2}$$

3ème cas de figure :

$$U(m+1/2, n-1) = 0, U(m+1/2, n) \neq 0 \text{ et } U(m+1/2, n+1) = 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial^2 y} = 0$$

4ème cas de figure :

$$U(m+1/2, n-1) = 0, U(m+1/2, n) = 0 \text{ et } U(m+1/2, n+1) = 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial^2 y} = 0$$

5ème cas de figure :

$$U(m+1/2, n-1) \neq 0, U(m+1/2, n) \neq 0 \text{ et } U(m+1/2, n+1) \neq 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial^2 y} = \text{Traitement normal}$$

III.2.2.2 Limites ouvertes

Ce type de limite représente les diverses ouvertures du domaine. Ces dernières sont, éventuellement, l'embouchure à la mer, la jonction avec les divers affluents, ou même une source qui déverse un débit d'eau douce dans le milieu étudié. Ces limites sont généralement représentées par une fonction d'élévation ou de vitesse (débit); deux grandeurs fréquemment disponibles et facilement mesurables. La première a été choisie comme condition aval d'entrée du système, quant à la seconde elle a été adoptée comme condition amont calculée à partir des débits d'eau douce concomitant avec l'entrée aval utilisée.

A: Condition en élévation (fig.III.10).

$$1: \xi = f(t)$$

$$2: v = 0$$

$$3: \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{si } v \neq 0$$

A l'embouchure à la mer, les mesures limnimétriques sont le plus souvent disponibles. Dans ces cas, la frontière doit passer par les noeuds correspondants aux élévations. Pour les composantes de la vitesse, deux hypothèses sont possibles:

1°- la vitesse est supposée perpendiculaire à la frontière, (calcul par continuité)

2°- le gradient de la vitesse est nul sur la frontière, (calcul par égalisation des deux grandeurs limitrophes)

Ces deux hypothèses reviennent à supposer que:

- quand le fluide sort du domaine d'intégration, la vitesse à la première maille fictive, extérieure au domaine, est la même que celle de la première maille de la grille d'intégration.

- quand le fluide rentre dans le domaine, on calcule par continuité la vitesse à l'extérieur.

B: Condition en vitesse (fig.III.11).

1: $U = f(t)$

2: $V = 0$

3: $\frac{\partial V}{\partial n} = 0 \quad \text{si } \nu \neq 0$

Cette condition est d'habitude utilisée à la limite amont du domaine où des jaugeages du débit fluvial sont disponibles (ou des mesures courantométriques sont réalisées). Dans ces cas, la frontière devrait passer par les noeuds correspondant aux composantes de la vitesse. Si ces dernières sont disponibles, il n'y a pas à introduire de conditions supplémentaires, sinon les deux hypothèses évoquées auparavant sont aussi valables dans ce cas.

La partie amont de l'estuaire de la Casamance présente un plan d'eau étroit qui impose certaines contraintes limitant le choix des pas spatio-temporels du modèle bi-dimensionnel. On a donc procédé à un

couplage du modèle de la partie aval avec un modèle mono-dimensionnel qui traite la partie amont. Cette procédure a conduit à l'utilisation d'une condition aval en élévation et d'une condition amont en débit introduite au dernier noeud du maillage, tout en supposant que la vitesse est perpendiculaire à la frontière.

L'application de ces deux hypothèses conduit à :

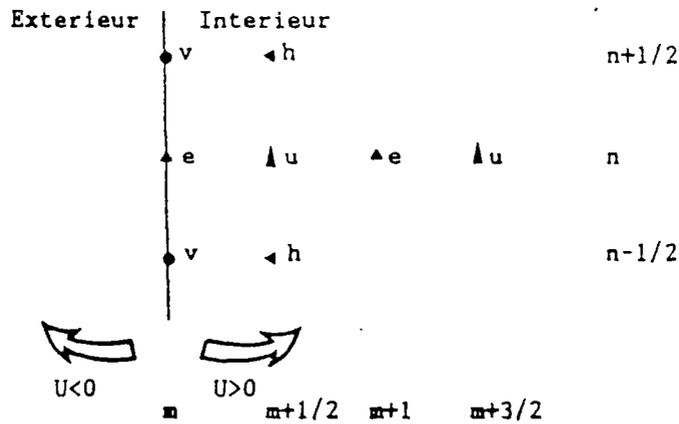


fig.III.10-Condition en élévation.

$$U \frac{\partial U}{\partial x} =$$

En (m+1/2,n)

Si $U(m+1/2,n) > 0$ (écoulement rentrant)

$$U \partial U / \partial x = 0$$

Si $U(m+1/2,n) \leq 0$ (écoulement sortant)

$$U \partial U / \partial x = U(m+1/2,n) * \frac{(U(m+3/2,n) - U(m+1/2,n))}{\Delta X}$$

Dans le cas où le modèle bi-dimensionnel fonctionne seul on impose une condition en vitesse à la frontière amont où les noeuds

limitrophes sont calculés par :

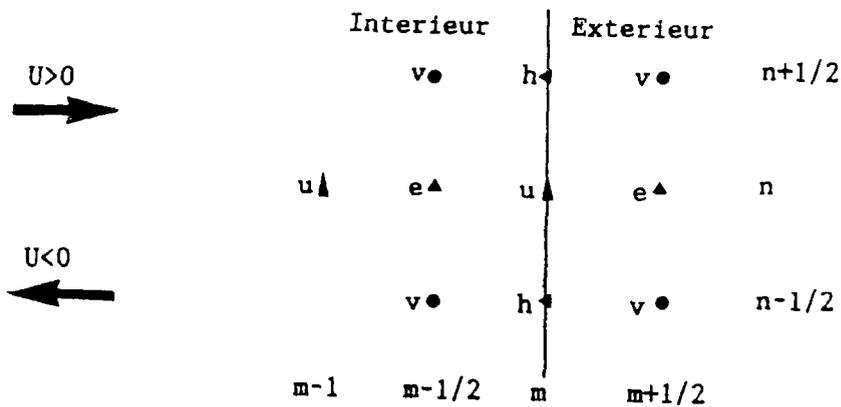


fig.III.11-Condition en vitesse.

En (mmax-1,n)

Si $U(m_{max-1},n) \leq 0$ (écoulement rentrant)

$$U \frac{\partial U}{\partial x} = U(m_{max-1},n) * \frac{(U(m_{max},n) - U(m_{max-1},n))}{\Delta X}$$

Si $U(m_{max-1},n) > 0$ (écoulement sortant)

$$U \frac{\partial U}{\partial x} = U(m_{max-1},n) * \frac{(U(m_{max-1},n) - U(m_{max-2},n))}{\Delta X}$$

L'extrapolation aux frontières ouvertes est uniquement réalisée à partir des noeuds internes du domaine quand le mouvement se dirige de l'intérieur vers l'extérieur. En conséquence, la discrétisation suit l'information. Bien qu'elle soit du premier ordre, cette procédure n'a pas conduit à des instabilités. Ceci rejoint les conclusions de Gustafsson (1975) et Beam et al. (1982) évoquées auparavant.

Certes l'annulation des termes diffusifs et advectifs aux points limitrophes réduit l'ordre de consistance de l'équation dynamique en ces noeuds. Les divers tests effectués ont montré que cette erreur locale est rapidement atténuée et n'affecte pas la stabilité de la résolution.

D'autres formulations aux noeuds limitrophes ont été essayée et ont montré que l'augmentation de consistance ou l'extrapolation à partir

des noeuds internes, surtout quand le fluide entre dans le domaine, font apparaître des instabilités en ces noeuds.

Le traitement des frontières ouvertes forme actuellement une des principales préoccupations des hydrodynamiciens. Les expressions choisies sont généralement conditionnées par la morphologie du milieu étudié et la qualité des données disponibles. Les conditions à choisir doivent être représentatives du comportement naturel de ces limites fictives. Dans les milieux qui présentent une frontière ouverte assez large, les mesures ponctuelles, même si elles sont réalisées en quelques noeuds de la limite, ne peuvent être indicatives que pour les mailles avoisinantes. Une faible erreur dans l'estimation des conditions en ces noeuds conduira à des perturbations locales qui se propageront à l'intérieur du domaine d'intégration.

Par ailleurs, une perturbation créée à l'intérieur du domaine doit traverser ces limites sans subir de changement. Il est donc important de représenter ce comportement non réfléchitif. Certains auteurs suggèrent l'utilisation des invariants de Riemann (Abbott, 1979, Oliger *et al.*, 1978, Verboom *et al.*, 1982): ces conditions d'absorption de l'énergie aux frontières sont effectuées en imposant une expression sous la forme d'une combinaison linéaire entre les vitesses et les élévations aux limites. Bien que les tests rencontrés dans la littérature montrent l'efficacité de ce type de conditions, ces études ne fournissent pas de réponses concluantes sur ce problème.

Les études complètes des conditions aux limites ouvertes n'existent que pour les cas de figure trop élémentaires qui ne reflètent pas la majorité des cas rencontrés dans les études des milieux naturels. C'est pourquoi l'on se contente, généralement, de justifier certaines conditions faiblement réfléchissantes pour lesquelles le coefficient de

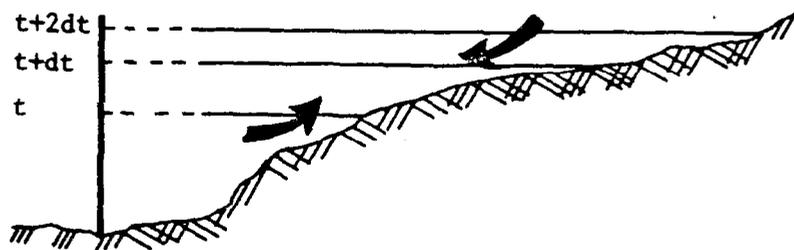
réflexion est inférieure à l'unité, mais reste toujours plus important que zéro.

III.2.2.3 limites mobiles

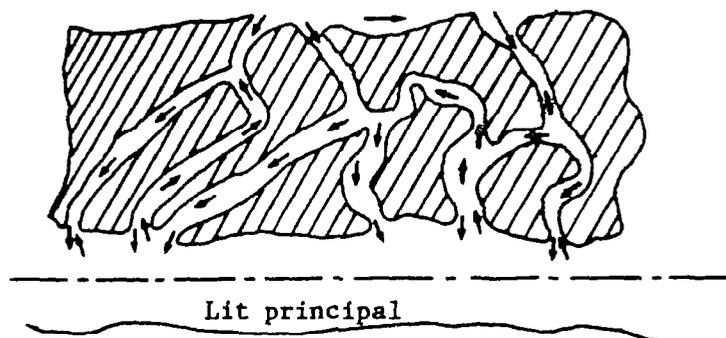
L'estuaire de la Casamance se caractérise par la présence de vastes zones limitrophes dont le comportement dynamique diffère de celui qui règne dans le chenal principal. La sécheresse qui sévit depuis plus de quinze ans dans la région, la sursalure, ainsi que les autres facteurs cités aux chapitres précédents, ont provoqué un net recul de la végétation en ces zones et une extension de tannes vifs rendant certaines de ces régions sujettes à une invasion plus brutale de la marée.

La dimension de ces zones excède largement celle de la grille de calcul utilisée (500, 250 et 150 mètres), mais leur fonctionnement est assez varié:

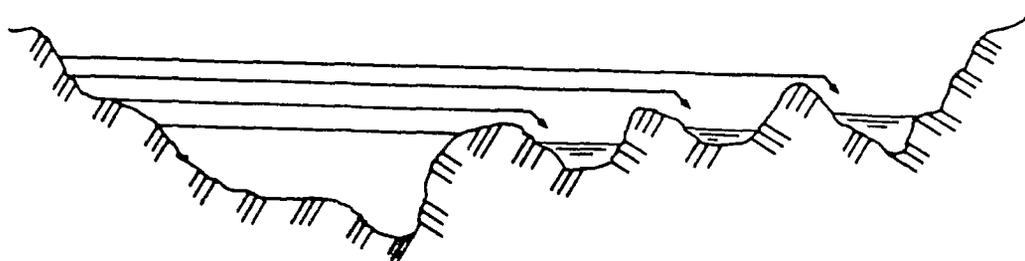
- Certaines s'inondent et se vidangent rapidement suivant l'état de la marée.



- D'autres présentent un ressuyage lent et progressif et parfois suivant des écoulements préférentiels conditionnés par la densité de la végétation.



- D'autres favorisées par une topographie irrégulière, stockent une quantité d'eau qui n'est restituée au lit principal qu'après un certain retard.



Il s'ensuit qu'une modélisation fine qui prend en compte les caractéristiques de chaque type de mangrove est assez complexe. A ces difficultés physiques s'ajoute une complexité numérique due au traitement des équations du mouvement. Certaines hypothèses admises dans l'intégration des équations du mouvement se trouvent fortement approximatives. L'advection augmente (Dronkers, 1964) et le terme de frottement devient prépondérant dans les équations. L'expression de ce dernier étant inversement proportionnelle à la profondeur pose un problème quand le tirant d'eau devient trop faible. De même son expression quadratique est critiquable (Willis, 1978, 1985). Dans ces zones, peu de particules suivent la vitesse intégrée sur la verticale et les hypothèses d'uniformité des profils de vitesses sont peu représentatives de la réalité.

Par ailleurs, la technique des différences finies, appliquée à des variables continues et finies, suppose des variations spatio-temporelles graduelles et lentes. Si dans certaines mailles un changement brutal se produit ($U = V = 0 \iff U \neq 0 \neq V$), des discontinuités locales apparaissent, des ondes courtes prennent naissance et sont susceptibles d'engendrer des dissipations numériques affectant la stabilité de la résolution.

Plusieurs procédures ont été développées pour traiter les zones de faible profondeur qui se couvrent et se découvrent suivant l'état

de la marée. Reid et al. (1968) ont appliqué avec succès sur la baie de Galveston (Texas) une méthode reposant sur la théorie empirique des déversoirs latéraux. Flather et al. (1975) ont utilisé des conditions d'avancement et de recul des limites en fonction des profondeurs d'eau et de la pente en surface. Ce procédé idéaliste du mouvement des limites se résume à l'organigramme suivant:

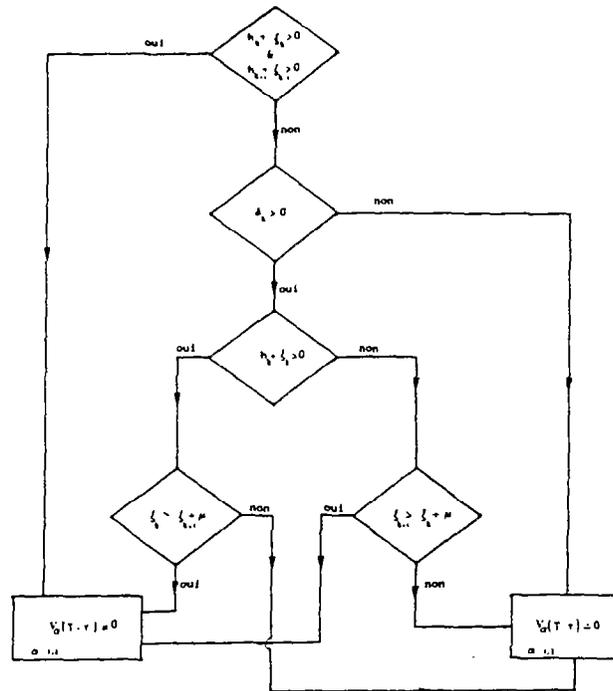


fig.III.12-Organigramme de Flather & Heaps.

Pour le calcul de la deuxième composante de la vitesse V , les mêmes tests sont répétés mais suivant la direction oy . Cette procédure est facilitée par l'utilisation d'une résolution explicite des équations du mouvement, donc la recherche des variables dépendantes s'effectue progressivement à chaque pas de temps à partir des valeurs connues au pas de temps précédent. Si les noeuds sont "secs" la composante de la vitesse est mise à zéro, sinon les nouvelles valeurs de U ou de V sont calculées à partir de l'équation dynamique.

Une procédure similaire à celle développée par Leendertse et Gritton (1967) a été adaptée à notre milieu. Dans cette procédure on impose

une élévation seuil minimale (h_{seuil}) dans toutes les mailles du calcul. Un test est effectué à chaque maille sur la valeur des hauteurs d'eau, si cette dernière est supérieure à h_{seuil} la maille est gardée dans le calcul, sinon elle est retirée et le coefficient de frottement relatif à la maille en question est mis à zéro. La valeur du coefficient de frottement est l'indicateur qui permettra de spécifier si la maille est retirée ou si elle est gardée dans le calcul. On supposera en outre qu'une mince plaque d'eau est conservée dans la maille et qu'elle est égale à la valeur atteinte juste avant le seuil d'effacement, ceci en vue de respecter la conservation de volume. La résolution du même pas de temps est reprise en supposant que la maille n'y existait pas. Quand durant le flot la valeur des élévations excède la valeur seuil, la maille est réintroduite dans le calcul. L'inondation de cette maille pouvant provenir des quatres mailles qui l'entourent, plusieurs combinaisons sont alors possibles et par conséquent plusieurs tests sont effectués afin d'attribuer à la maille en question une élévation correspondante à la moyenne des élévations qui règnent dans les mailles avoisinantes (fig.III.13).

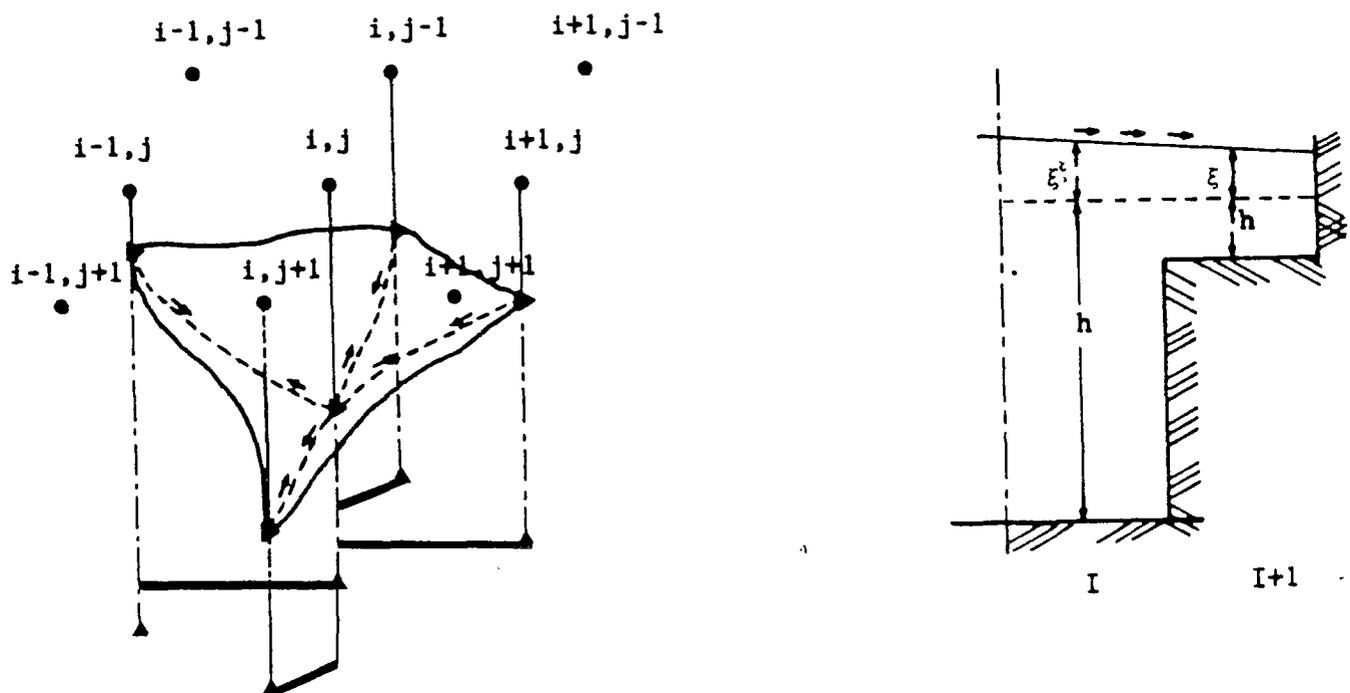


fig.III.13-Profil du fond en (2-D) et (1-D).

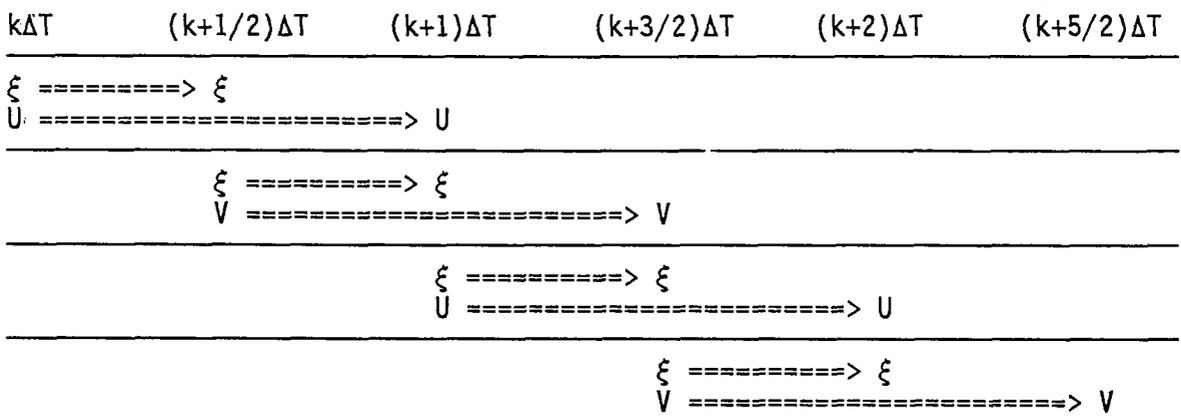
Cette procédure, reliée à l'évolution de la marée au voisinage des frontières, exige certaines précautions dans son utilisation:

- Une marée qui présente des variations fortes et rapides amène à des changements rapides des frontières. Ces changements étant reliés au pas de calcul, des parasites numériques peuvent apparaître durant la résolution nécessitant une réduction de ΔT .

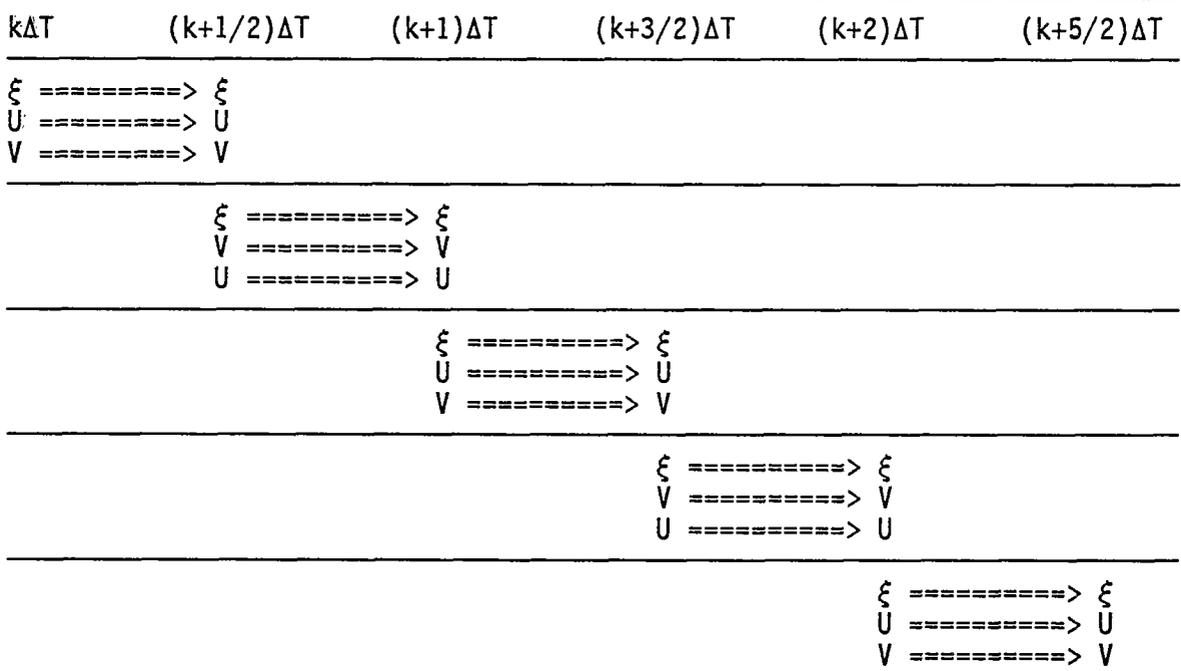
- La variation continue des limites n'est pas possible en différences finies et la progression des frontières ne peut être représentée qu'à partir d'une succession de gradins. Le recul des frontières est approximé en admettant que le terrain devient sec lorsque la hauteur de l'eau est inférieure à une hauteur seuil fixée auparavant. Cette schématisation représente assez bien la réalité physique, par contre l'avancement des limites est plus délicat à traiter (Pochat, 1981).

Les courants et les élévations de la marée, dans la partie étudiée de l'estuaire, présentent des amplitudes relativement faibles. Ceci nous a permis d'adopter une fréquence de recherche suffisamment espacée et grande comparée au pas de temps de calcul. Ainsi les instabilités susceptibles d'apparaître ont eu le temps nécessaire pour s'atténuer et n'ont pas affecté la résolution. Le terme advectif a été négligé dans tout les cas où la profondeur de l'eau devenait inférieure à 35 centimètres.

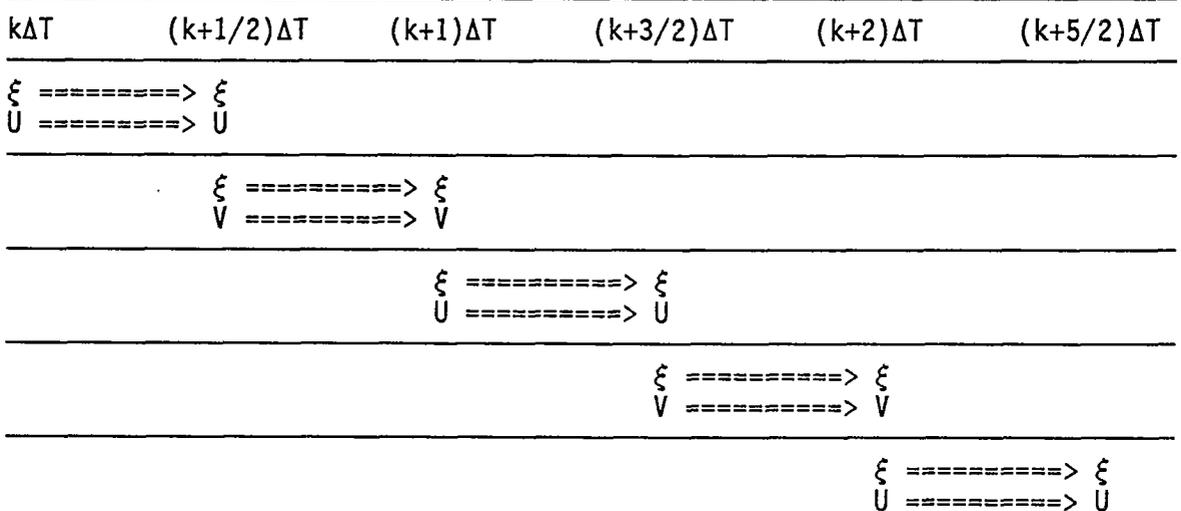
1er Système:



2ème Système:



3ème Système:



III.3 RESOLUTION DU SYSTEME

III.3.1 Ecriture algébrique des divers systèmes

Les équations de continuité (suivant ox) développées précédemment se ramènent aux systèmes suivant :

III.3.1.1 Equation de continuité (1er système: $m+1/2, n, k$)

$$- \alpha_{j-1/2} U^{k+1}(m-1/2, n) + \xi^{k+1/2}(m, n) + \alpha_{j+1/2} U^{k+1}(m+1/2, n) = A^k(j)$$

$$\alpha_{j-1/2} = \frac{\Delta T}{4\Delta X} (h(m-1/2, n+1/2) + h(m-1/2, n-1/2) + \xi^k(m, n) - \xi^k(m-1, n))$$

$$\alpha_{j+1/2} = \frac{\Delta T}{4\Delta X} (h(m+1/2, n+1/2) + h(m+1/2, n-1/2) + \xi^k(m+1, n) - \xi^k(m, n))$$

$$A^k(j) = \xi^k(m, n) - \frac{\Delta T}{2\Delta Y} (V^{k+1/2}(m, n+1/2)H(m+1/2, n) - V^{k+1/2}(m, n-1/2)H(m+1/2, n-1/2))$$

III.3.1.2 Equation de continuité (2ème système: $m+1/2, n, k$)

$$-\beta_{j-1/2} U_{m-1/2, n} + \beta_{j-1} \xi_{m-1, n} + \beta_{j+1} \xi_{m+1, n} + \beta_j \xi_{m, n} + \beta_{j+1/2} U_{m+1/2, n} = A^k(j)$$

$$\beta_{j-1/2} = \left(- \frac{\Delta T}{4\Delta X} (h(m-1/2, n+1/2) + h(m-1/2, n-1/2)) + \frac{\Delta T}{2\Delta X} \xi(m, n) \right)$$

$$\beta_{j+1/2} = \left(\frac{\Delta T}{4\Delta X} (h(m+1/2, n+1/2) + h(m+1/2, n-1/2)) + \frac{\Delta T}{2\Delta X} \xi(m, n) \right)$$

$$\beta_{j+1} = \frac{K3\Delta T}{2\Delta X} U(m+1/2, n)$$

$$\beta_{j-1} = \frac{(1-K3)\Delta T}{2\Delta X} U(m-1/2, n)$$

$$\beta_j = 1 + \frac{K3\Delta T}{2\Delta X} U(m+1/2, n) + \frac{(1-K3)\Delta T}{2\Delta X} U(m-1/2, n)$$

$$A^k(j) = \xi^k(m,n) - \frac{\Delta T}{2\Delta Y} (V^k(m,n+1/2)H(m+1/2,n) - V^k(m,n-1/2)H(m+1/2,n-1/2))$$

avec

$$k_3 = 1 \quad \text{si } \underline{u} > 0$$

$$k_3 = 0 \quad \text{si } \underline{u} \leq 0$$

III.3.1.3 Equation de continuité (3ème système: m+1/2,n,k)

$$-\phi_{j-1/2} U^{k+1/2}(m-1/2,n) + \xi^{k+1/2}(m,n) + \phi_{j+1/2} U^{k+1/2}(m+1/2,n) = A^k(j)$$

$$\phi_{j-1/2} = \left(\frac{\Delta T}{4\Delta X} (h(m-1/2,n+1/2) + h(m-1/2,n-1/2)) + \frac{\Delta T}{2\Delta X} \xi^k(m,n) - \frac{k_1 \Delta T}{2\Delta X} (\xi^k(m,n) - \xi^k(m-1,n)) \right) +$$

$$\phi_{j+1/2} = \left(\frac{\Delta T}{2\Delta X} (h(m+1/2,n+1/2) + h(m+1/2,n-1/2)) + \frac{\Delta T}{2\Delta X} \xi^k(m,n) + \frac{(1-k_1)\Delta T}{2\Delta X} (\xi^k(m+1,n) - \xi^k(m,n)) \right) +$$

$$A^k(j) = \xi^k(m,n) - \frac{\Delta T}{4\Delta Y} (V^k(m,n+1/2)H(m+1/2,n) - V^k(m,n-1/2)H(m+1/2,n-1/2))$$

avec

$$k_1 = 1 \quad \text{si } \underline{u} > 0$$

$$k_1 = 0 \quad \text{si } \underline{u} \leq 0$$

III.3.1.4 Equation dynamique (3ème Système: m+1/2,n,k)

L'équation dynamique suivant ox se ramène au système suivant :

$$-\alpha_j \xi^{k+1/2}(m,n) + \alpha'_{j+1/2} U^{k+1/2}(m+1/2,n) + \alpha_{j+1} \xi^{k+1/2}(m+1,n) = B^k(j+1/2)$$

$$\alpha_j = \alpha_{j+1} = \frac{g\Delta T}{2\Delta X}$$

$$\alpha'_{j+1/2} = 1 + \frac{g\Delta T ((U^k)^2(m+1/2,n) + (\underline{v}^k)^2(m+1/2,n))^{1/2}}{2 C^2(m+1/2,n) H(m+1/2,n)} +$$

$$\begin{aligned}
& \frac{K3 \Delta T (U_{(m+1/2,n)} - U_{(m-1/2,n)}) |^k}{2\Delta X} + \\
& \frac{(1-K3) \Delta T (U_{(m+3/2,n)} - U_{(m+1/2,n)}) |^k}{2\Delta X} \\
B^k(j+1/2) = & U^k_{(m+1/2,n)} + f \frac{\Delta T}{2} \underline{V}_{(m+1/2,n)} \\
+ v & \frac{\Delta T (U_{m+3/2,n} + U_{m-1/2,n} - 4U_{m+1/2,n} + U_{m+1/2,n+1} + U_{m+1/2,n-1})}{2\Delta X^2} \\
- & \frac{K4 \Delta T ((\underline{HUV}_{m+1/2,n} - \underline{HUV}_{m+1/2,n-1}) |^k)}{2H_{m+1/2,n} \Delta Y} \\
- & \frac{(1-K4) \Delta T ((\underline{HUV}_{m+1/2,n+1} - \underline{HUV}_{m+1/2,n}) |^k)}{2H_{m+1/2,n} \Delta Y} + \frac{\Delta T \rho_a \Omega W^2 \sin \psi}{2\rho_{(m+1/2,n)} H_{(m+1/2,n)}} \\
+ & \frac{\Delta T g H_{(m+1/2,n)}}{4\rho_{(m+1/2,n)}} \delta_{x\rho}
\end{aligned}$$

III.3.1.5 Equations dynamiques (2ème Système)

Les équations dynamiques au premier demi-pas de temps se ramènent au système suivant :

$$\begin{cases}
-\alpha_j \xi^{k+1/2}(m,n) + \alpha'_{j+1/2} U^{k+1/2}(m+1/2,n) + \alpha_{j+1} \xi^{k+1/2}(m+1,n) = B^k(j+1/2) \\
\hspace{20em} \text{En } (m+1/2,n) \\
\lambda_{s+1/2} V^{k+1/2}(m,n+1/2) = G'(s+1/2) \\
\hspace{20em} \text{En } (m,n+1/2)
\end{cases}$$

$$G'(s+1/2) = V(m,n+1/2) - \frac{\Delta T}{2} f \underline{U}_{(m+1/2,n)} - \frac{\Delta T}{2} \frac{\rho_a \Omega W^2 \cos \psi}{\rho_{(m,n+1/2)} H_{(m,n+1/2)}}$$

$$- \frac{g\Delta T}{2} (\xi(m,n+1) - \xi(m,n)) - \frac{g\Delta T H(m,n+1/2)}{4 \rho_{(m,n+1/2)}} \delta_{y\rho}(m,n+1/2)$$

$$+ v \frac{\Delta T (V_{m,n+3/2} + V_{m,n-1/2} - 4V_{m,n+1/2} + V_{m+1/2,n+1/2} + V_{m+1/2,n-1/2})}{2\Delta X^2}$$

$$\lambda_{s+1/2} = 1 + \frac{K2\Delta T((HUV_{m,n+1/2} - HUV_{m,n-1/2}))}{2H_{m,n+1/2} \Delta Y} - \frac{(1-K2) \Delta T ((HUV_{m,n+3/2} - HUV_{m,n+1/2}))}{2H_{m,n+1/2} \Delta Y} + \frac{g\Delta T(U^2(k) + V^2(k+1/2))^{1/2}}{2C^2(m,n+1)H(m,n+1/2)} + \frac{\Delta T(K1(V_{m,n+3/2} - V_{m,n+1/2}) + (1-K1)(V_{m,n+1/2} - V_{m,n-1/2}))}{2\Delta X}$$

$$K1 = 1 \quad \text{si } \underline{V} > 0$$

$$K1 = 0 \quad \text{si } \underline{V} \leq 0$$

$$K2 = 1 \quad \text{si } \underline{U} > 0$$

$$K2 = 0 \quad \text{si } \underline{U} \leq 0$$

III.3.1.6 Equation dynamique (1er Systeme: m+1/2,n,k)

L'équation dynamique suivant ox se ramène au système suivant :

$$-\alpha_j \xi^{k+1/2}(m,n) + \beta_{j+1/2} U^{k+1}(m+1/2,n) + \alpha_{j+1} \xi^{k+1/2}(m+1,n) + \beta_{j+3/2} U^{k+1}(m+3/2,n) + \beta_{j-1/2} U^{k+1}(m-1/2,n) = B^k(j+1/2)$$

$$-\alpha_j = \alpha_{j+1} = \frac{g\Delta T}{\Delta X}$$

$$\beta_{j+3/2} = \beta_{j-1/2} = \frac{v\Delta T}{\Delta X^2}$$

$$\beta_{j+1/2} = 1 + \frac{2v\Delta T}{\Delta X^2} + \frac{\Delta T g((U^k)^2(m+1/2,n) + (\underline{V}^k)^2(m+1/2,n))^{1/2}}{C^2(m+1/2,n) H(m+1/2,n)} +$$

$$\frac{(1-K3)\Delta T(U(m+1/2,n) - U(m-1/2,n))|^k}{\Delta X} +$$

$$\frac{K3\Delta T(U(m+3/2,n) - U(m+1/2,n))|^k}{\Delta X}$$

$$\begin{aligned}
B^k(j+1/2) &= U^k(m+1/2, n) + \Delta T f \underline{V}(m+1/2, n) \\
&- v \frac{\Delta T (U_{m+1/2, n+1} - 2U_{m+1/2, n} + U_{m+1/2, n-1}) |^k}{\Delta Y^2} \\
&- \frac{K4 \Delta T ((HUV_{m+1/2, n} + HUV_{m+1/2, n-1}) |^k)}{H_{m+1/2, n} \Delta Y} \\
&- \frac{(1-K4) \Delta T ((HUV_{m+1/2, n+1} + HUV_{m+1/2, n}) |^k)}{H_{m+1/2, n} \Delta Y} \\
&+ \frac{\Delta T \rho_a \Omega W^2 \sin \psi}{\rho(m+1/2, n) H(m+1/2, n)} + \frac{g H(m+1/2, n) \Delta T}{2 \rho(m+1/2, n)}
\end{aligned}$$

III.3.2 Technique de résolution

Les systèmes algébriques qui découlent des diverses discrétisations des équations du mouvement, se mettent sous la forme:

$$\text{Système 1 : } a_i \xi_{m, n} + b_i U_{m+1/2, n} + c_i U_{m-1/2, n} = A_i \quad (\text{III.1})$$

$$d_i \xi_{m+1, n} + e_i \xi_{m, n} + f_i U_{m+3/2, n} + g_i U_{m+1/2, n} + h_i U_{m-1/2, n} = B_i \quad (\text{III.2})$$

$$\text{Système 2 : } a_i \xi_{m+1, n} + b_i \xi_{m-1, n} + c_i \xi_{m, n} + d_i U_{m+1/2, n} + e_i U_{m-1/2, n} = A'_i \quad (\text{III.3})$$

$$f_i \xi_{m+1, n} + g_i \xi_{m, n} + h_i U_{m+1/2, n} = B'_i \quad (\text{III.4})$$

$$k_i V_{m, n+1/2} = C_i \quad (\text{III.5})$$

$$\text{Système 3 : } a_i \xi_{m, n} + b_i U_{m+1/2, n} + c_i U_{m-1/2, n} = A''_i \quad (\text{III.6})$$

$$d_i \xi_{m+1, n} + e_i \xi_{m, n} + f_i U_{m+1/2, n} = B''_i \quad (\text{III.7})$$

Par substitution, les systèmes 1 et 2 se ramènent à la même forme du système 3:

A: Système 1

A partir de l'équation de continuité (III.1), on tire les

valeurs de $U_{m-1/2,n}$ et $U_{m+3/2,n}$, qui seront utilisées par la suite dans l'équation dynamique:

$$U_{m-1/2,n} = \frac{A_i - a_i \xi_{m,n} + b_i U_{m+1/2,n}}{c_i} \quad (\text{III.8})$$

$$U_{m+1/2,n} = \frac{A_i - a_i \xi_{m,n} + b_i U_{m-1/2,n}}{b_i} \quad (\text{III.9})$$

$$U_{m+3/2,n} = \frac{A_{i+1} - a_{i+1} \xi_{m+1,n} + b_{i+1} U_{m+1/2,n}}{b_{i+1}} \quad (\text{III.10})$$

En remplaçant (III.8) et (III.10) dans l'équation dynamique (III.2), on aura:

$$\alpha_i \xi_{m+1,n} + \beta_i U_{m+1/2,n} + \gamma_i \xi_{m,n} = \delta_i \quad (\text{III.11})$$

avec,

$$\begin{aligned} \alpha_i &= c_i d_i b_{i+1} - f_i c_i a_{i+1} \\ \beta_i &= c_i g_i b_{i+1} - h_i b_i - f_i c_i c_{i+1} \\ \gamma_i &= b_{i+1} c_i e_i - h_i a_i \\ \delta_i &= c_i b_{i+1} B_i - f_i c_i A_{i+1} - h_i A_i \end{aligned}$$

B: Système 2

La même méthode est appliquée aux équations (III.3) et (III.4) où à partir de l'équation dynamique (III.4) on obtient:

$$\xi_{m+1,n} = \frac{B'_i - g_i \xi_{m,n} - h_i U_{m+1/2,n}}{f_i}$$

$$\xi_{m,n} = \frac{B'_i - f_i \xi_{m+1,n} - h_i U_{m+1/2,n}}{g_i}$$

$$\xi_{m-1,n} = \frac{B'_{i-1} - f_{i-1} \xi_{m,n} - h_{i-1} U_{m-1/2,n}}{g_{i-1}}$$

Par substitution des valeurs de $\xi_{m+1,n}$ et $\xi_{m-1,n}$ on ramène l'équation (III.3) à la forme:

$$\alpha_i \xi_{m,n} + \beta_i U_{m+1/2,n} + \gamma_i U_{m-1/2,n} = \delta_i$$

avec,

$$\alpha_i = c_i f_i g_i - f_i b_i f_{i-1} - a_i g_i g_i$$

$$\beta_i = d_i f_i g_i - g_i a_i h_i$$

$$\gamma_i = e_i f_i g_i - f_i b_i h_{i-1}$$

$$\delta_i = A'_i - g_i a_i B'_i - f_i b_i B'_{i-1}$$

Ainsi, par substitution directe, les systèmes 1 et 2, sont ramenés à la même forme que le système 3 et; par conséquent, à une écriture matricielle qui permet d'aligner sur les trois diagonales les coefficients non nuls des formules de récurrences.

Certes les propriétés numériques des discrétisations des équations du mouvement, évoquées précédemment, jouent un rôle essentiel dans la construction et la réussite de la modélisation, mais la résolution du système algébrique qui en découle devrait se faire suivant un algorithme simple qui présente une faible sensibilité aux erreurs d'arrondissement.

Les techniques les plus performantes pour la résolution des systèmes 1, 2 et 3, sont les méthodes algorithmiques (Godounov *et al.*, 1964, Abbott *et al.*, 1978). Ces dernières nécessitent une capacité de stockage et un temps de calcul proportionnels au nombre maximal de points à calculer, en opposition avec d'autres méthodes de résolution matricielle (Gauss, Jacobi, Seidel) dont les facteurs précédents sont proportionnels à N^2 ou N^3 (Gourdin *et al.*, 1964)

Les équations prennent la forme:

$$\text{Continuité: } a_i \xi_{i+1} + b_i U_{i+1} + c_i \xi_{i-1} = d_i \quad (\text{III.12})$$

$$\text{Dynamique: } \alpha_i U_{i+1} + \beta_i \xi_i + \gamma_i U_{i-1} = \delta_i \quad (\text{III.13})$$

Posons:

$$\xi_{i+1} = E_i U_i + F_i \quad (\text{III.14})$$

$$U_{i+1} = G_i \xi_i + H_i \quad (\text{III.15})$$

En remplaçant (III.14) dans (III.12) on obtient:

$$a_i E_i U_i + b_i U_i + c_i \xi_{i-1} = d_i - a_i F_i$$

$$\text{où } U_j = \frac{-c_j}{a_j E_j + b_j} \xi_{j-1} + \frac{d_j - a_j F_j}{a_j E_j + b_j} \quad (\text{III.16})$$

En remplaçant (III.15) dans (III.13) on obtient:

$$\alpha_j G_j \xi_j + \beta_j \xi_j + \gamma_j U_{j-1} = \delta_j - \alpha_j H_j$$

$$\text{où } \xi_j = \frac{-\gamma_j}{\alpha_j G_j + \beta_j} U_{j-1} + \frac{\delta_j - \alpha_j H_j}{\alpha_j G_j + \beta_j} \quad (\text{III.17})$$

En comparant (III.14) et (III.15) à (III.16) et (III.17) respectivement on déduit par identification:

$$E_{j-1} = \frac{-\gamma_{j-1}}{\alpha_{j-1} G_{j-1} + \beta_{j-1}} \quad (\text{III.18})$$

$$F_{j-1} = \frac{\delta_{j-1} - \alpha_{j-1} H_{j-1}}{\alpha_{j-1} G_{j-1} + \beta_{j-1}} \quad (\text{III.19})$$

$$G_{j-1} = \frac{-c_{j-1}}{a_{j-1} E_{j-1} + b_{j-1}} \quad (\text{III.20})$$

$$H_{j-1} = \frac{d_{j-1} - a_{j-1} F_{j-1}}{a_{j-1} E_{j-1} + b_{j-1}} \quad (\text{III.21})$$

L'algorithme est initié à partir de la limite où l'on connaît une des variables dépendantes. Supposons que l'on connaisse la valeur de ξ au noeud limite J, on obtient:

$$\xi_J = E_{J-1} U_{J-1} + F_{J-1}$$

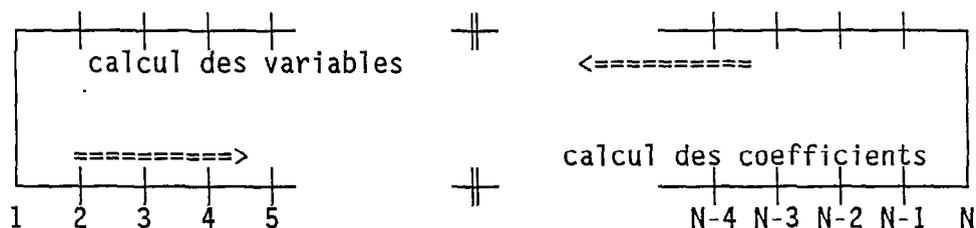
$$\xi_J = \frac{-\gamma_{J-1}}{\beta_{J-1}} U_{J-1} + \frac{\delta_{J-1} - \alpha_{J-1} H_{J-1}}{\beta_{J-1}}$$

$$\text{or } \gamma_{J-1} = 0$$

$$\implies \xi_J = F_{J-1} \quad \text{avec } E_{J-1} = 0$$

A partir des récurrences (III.18,19,20 et 21), on pourra déterminer les divers coefficients des récurrences. Si la condition de démarrage est une élévation, l'algorithme s'achève par le calcul des deux

coefficients de la formule de récurrence des vitesses. Une deuxième étape consistera à remplacer les coefficients successivement par leurs valeurs et déduire les valeurs des élévations et vitesses.



Afin de minimiser l'erreur de l'algorithme précédent, deux conditions s'imposent (Godounov et al., 1964): la première concerne les coefficients de l'équation de départ, la deuxième, ceux des formules de récurrences, tel que;

$$a_n \psi_{n-1} + b_n \psi_n + c_n \psi_{n+1} = d_n$$

$$\Rightarrow |b_n| \geq |a_n| + |c_n| \quad (\text{III.22})$$

et

$$\psi_n + K_n \psi_{n+1} = A_n \quad n = 1, 2, \dots, M-1$$

$$\Rightarrow |K_n| \leq 1 \quad (\text{III.23})$$

III.3.3 Conclusions

La méthode évoquée repose sur un simple algorithme récursif qui résout une matrice tri-diagonale (algorithme de Thomas). La résolution est initiée d'une des deux conditions aux limites. La procédure de substitution se fait par un double balayage, le mouvement est en conséquence supposé sous-critique. Par contre, si on est dans un cas de régime sur-critique, les deux conditions sont données sur une même limite, les substitutions ne nécessitent qu'un simple balayage suivant la direction de l'écoulement. Il en résulte que l'utilisation d'une structure inappropriée peut amener à certaines instabilités. Abbott et Grubert (1973) ont mis au point un algorithme général de résolution qui prend en compte le changement du régime de l'écoulement en adoptant la condition de

l'annulation d'une des caractéristiques. Ainsi, si $H = U^2 - gh$ change de signe, on passe d'un algorithme à un autre. Cette dernière expression est dite fonction de contrôle. Dans le cas de l'estuaire de la Casamance le régime étant sous-critique l'algorithme adopté était suffisant.

III.4 REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

III.4.1 Introduction

Jusqu'au milieu des années soixante la méconnaissance de certains aspects des approches discrètes et le manque de développement de l'informatique ont souvent conduit les modélisateurs à se contenter d'approches simplifiées, où certains termes des équations du mouvement étaient soit linéarisés, soit négligés.

Le premier modèle qui traita les équations du mouvement dans leur totalité fut celui d'Hansen qui, en 1966, développa une approche explicite prenant en compte les termes non linéaires, les forces de Coriolis, les effets du vent et des frottements au fond. Depuis, la réflexion sur ce type de problèmes a progressé, d'une part, par l'essor des méthodes numériques et le développement de l'informatique et, d'autre part, grâce aux fréquentes campagnes de mesures réalisées dans les milieux côtiers qui ont permis de mieux comprendre certains processus physiques.

Même en se contentant des approches semi-implicites les modèles sont trop nombreux pour être tous évoqués dans le cadre de ce travail. Nous avons limité cette présentation bibliographique à quelques approches assez répandues, qui regroupent les principaux aspects des modèles bi-dimensionnels en plan, résolus suivant ce type de développement.

Les discrétisations semi-implicites reposent sur la séparation des dérivées spatiales et des termes d'ordre zéro des équations du mouvement en deux groupes: le premier regroupe les termes responsables des restrictions sur le pas temporel, traités par une méthode implicite à

pas de temps fractionné et le second regroupe les autres termes traités explicitement.

III.4.2 Modèle d'Elvius et Sundström (1972)

Les équations du système sont résolues par une méthode semi-implicite suivant deux répartitions spatiales;



La discrétisation des auteurs permet d'aboutir aux équations

algébriques suivantes:

$$\frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\Delta T} = -D_{0x} \frac{\psi^{n+1} + \psi^{n-1}}{2} - (U^n)_{xy} D_{0x}(U^n)_y - (V^n) D_{0y}(U^n)_x + FV^n$$

$$\frac{v^{n+1} - v^{n-1}}{2\Delta T} = -D_{0y} \frac{\psi^{n+1} + \psi^{n-1}}{2} - U^n D_{0x}(V^n)_y - (V^n)_{xy} D_{0y}(V^n)_x - FU^n$$

$$\frac{\psi^{n+1} - \psi^{n-1}}{2\Delta T} = -(\psi^n)_{xy} \left(D_{0x} \frac{u^{n+1} + u^{n-1}}{2} + D_{0y} \frac{v^{n+1} + v^{n-1}}{2} \right) - (U^n)_y D_{0x}(\psi^n)_y - (V^n)_x D_{0y}(\psi^n)_x$$

avec:

$$D_{0x}\psi)_{j,k} = \frac{\psi(j+1,k) - \psi(j-1,k)}{2\Delta s} \quad ; \quad \Delta s = \Delta X = \Delta Y$$

$$\psi(j,k) = \frac{\psi(j+1,k) + \psi(j-1,k)}{2} \quad ; \quad \psi : \text{terme de pression.}$$

Cette méthode présente plusieurs avantages par rapport aux approches qui utilisent des grilles non-imbriquées, tels que les modèles de Gustafsson (1971) ou de Fairweather et Navon (1980). D'une part le nombre

de variables dépendantes nécessaires est réduit dans la grille de résolution et, d'autre part, les problèmes numériques (aux limites) induits par l'utilisation des mailles non-imbriquées sont éliminés. La méthode de l'énergie appliquée au système précédent linéarisé à coefficients constants, permet d'aboutir au critère de stabilité:

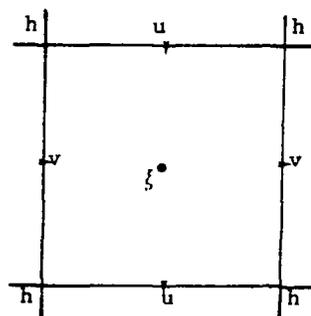
$$\frac{\tau}{\Delta X} \max (|U|, |V|) < 1$$

Ces mêmes hypothèses testées sur d'autres types de discrétisations (Leapfrog) ou suivant d'autres grilles d'intégration, ont montré que le schéma d'Elvius et Sundström offre la possibilité d'utiliser un pas de temps supérieur à celui imposé par les conditions de stabilité des autres schémas testés. Le terme advectif est discrétisé suivant une combinaison de la méthode du point central ("*mid point rule*") et de la méthode trapézoïdale (Lambert, 1977).

Malgré les qualités numériques que présente ce modèle l'utilisation d'une maille totalement imbriquée pourrait améliorer ces performances. Un des exemples les plus connus est celui de Leendertse (1967).

III.4.3 Modèle de Leendertse (1967)

Cette approche repose sur une résolution semi-implicite suivant une maille totalement imbriquée:



qui ramène le système à:

$$U^{n+1/2} = U^n + .5\Delta T f \underline{V}^n - .5\Delta T U^{n+1/2} (\partial U / \partial x)^n - .5\Delta T \underline{V}^n (\partial U / \partial y)^n \\ - .5(\Delta T / \Delta x) g \xi^{n+1/2} - \tau(x) s^n - F(x)^{n+1/2}$$

$$\xi^{n+1/2} = \xi^n - .5(\Delta T / \Delta X) ((h_y + \xi_x) U)^{n+1/2} - .5(\Delta T / \Delta X) ((h_x + \xi_y) V)^n$$

$$V^{n+1/2} = V^n - .5\Delta T f \underline{U}^{n+1/2} - .5\Delta T \underline{U}^{n+1/2} (\partial V / \partial x)^n - .5\Delta T V^{n+1/2} (\partial V / \partial y)^n \\ - .5(\Delta T / \Delta x) g \xi^n - \tau(y) s^{n+1/2} - F(y)^n$$

$$U^{n+1} = U^{n+1/2} + .5\Delta T f \underline{V}^{n+1} - .5\Delta T U^{n+1/2} (\partial U / \partial x)^{n+1/2} - .5\Delta T \underline{V}^{n+1} (\partial U / \partial y)^{n+1/2} \\ - .5(\Delta T / \Delta x) g \xi^{n+1/2} - \tau(x) s^{n+1} - F(x)^{n+1/2}$$

$$\xi^{n+1} = \xi^{n+1/2} - .5(\Delta T / \Delta X) ((h_y + \xi_x) U)^{n+1/2} - .5(\Delta T / \Delta X) ((h_x + \xi_y) V)^{n+1}$$

$$V^{n+1} = V^{n+1/2} - .5\Delta T f \underline{U}^{n+1/2} - .5\Delta T \underline{U}^{n+1/2} (\partial V / \partial x)^{n+1/2} - .5\Delta T V^{n+1/2} (\partial V / \partial y)^{n+1/2} \\ - .5(\Delta T / \Delta x) g \xi^{n+1} - \tau(y) s^{n+1} - F(y)^{n+1/2}$$

Le modèle de Leendertse, une des premières résolutions semi-implicites, est, sans doute, le plus répandu et par conséquent le plus analysé. Les diverses études réalisées suivant cette approche soulignent, d'une part, le rôle stabilisant du terme de frottement et, d'autre part, la stabilité conditionnelle de la méthode RK2, utilisée pour la discrétisation temporelle du terme advectif (Weare, 1976).

Ce modèle a été remanié plusieurs fois par son auteur dont la version de 1970 ne comporte plus que quatre équations au lieu de six et où la composante explicite de la vitesse est calculée par simple interpolation. Ceci ramène le système précédent à :

$$\delta_t U - f \underline{V} + U \delta_x U + \underline{V} \delta_y U + g \delta_x \xi + g \frac{U^t ((U)^2 + (V)^2)^{1/2}}{(h_y + \xi_x) (C_x)^2} \\ - \frac{1}{\rho (h_y + \xi_x)} \tau_x s = 0$$

$$\delta_{1/2t} \xi + \delta_x ((h_y + \xi_x) U) + \delta_y ((h_x + \xi_y) V) = 0$$

$$\delta_t V + \underline{fV} + U \delta_x V + \underline{V} \delta_y V + g \delta_y \xi + g \frac{V^t ((U)^2 + (V)^2)^{1/2}}{(h_x + \xi_y) (C_y)^2} - \frac{1}{\rho (h_x + \xi_y)} \tau_{ys} = 0$$

$$\delta_{1/2t} \xi + \delta_x ((h_y + \xi_x) U) + \delta_y ((h_x + \xi_y) V) = 0$$

Abbott *et al.* (1978), ont utilisé une discrétisation équivalente à celle de Leendertse qui conduit, pour sa version linéarisée, aux mêmes critères de stabilité que cette dernière.

Les deux premières équations permettent de relier U au temps $n\Delta T$ à U au temps $(n+1)\Delta T$ et ξ au temps $n\Delta T$ à ξ au temps $(n+1/2)\Delta T$. Quant aux deux dernières elles lient V au temps $n\Delta T$ à V au temps $(n+1)\Delta T$ et ξ au temps $(n+1/2)\Delta T$ à ξ au temps $(n+1)\Delta T$. Ce schéma a été testé avec succès sur plusieurs milieux, dont la Mer du Nord. De précision du second ordre, il ne permet pas le centrage du terme de Coriolis.

Plusieurs auteurs ont développé des techniques similaires à celles de Leendertse et d'Abbott, dont Falconer *et al.* (1984), Neves (1985), Rodrigues *et al.* (1982), Salomon (1976) et bien d'autres.

Une caractéristique commune des modèles reposant sur la technique A.D.I est leur faible performance quand le nombre de courant c devient important. Au fur et à mesure que c augmente le nombre de points nécessaires par longueur d'onde augmente (Cf. II.3.2). Dans ces cas, deux éventualités se présentent: réduire le pas de temps ou choisir une autre méthode. Une des techniques de substitution proposée est celle de Benqué *et al.* (1982).

III.4.4 Modèle de Benqué *et al.* (1981)

L'idée directrice de cette approche est que les équations du mouvement renferment des opérateurs paraboliques ($K \partial^2 U / \partial x^2$) et surtout des opérateurs hyperboliques ($\partial U / \partial x$), qui nécessitent des conditions aux

limites qui ne sont pas les mêmes. Les équations sont résolues, suivant la méthode du pas fractionnaire, en distinguant plusieurs étapes. Cette technique, comme la méthode des directions alternées, permet de se ramener, à chaque pas de temps, à des solutions sur un seul axe de l'espace.

Chaque étape a un sens physique: la convection à caractère hyperbolique est résolue en premier, puis la diffusion à caractère parabolique et enfin la propagation, où est incluse l'équation de continuité. Le système se ramène à:

Advection:

$$\frac{u^{n+1/3} - u^n}{\Delta T} + \frac{\partial}{\partial x} (Uu^n) + \frac{\partial}{\partial y} (Uv^n) = 0 \quad (\text{III.24})$$

$$\frac{v^{n+1/3} - v^n}{\Delta T} + \frac{\partial}{\partial x} (Vu^n) + \frac{\partial}{\partial y} (Vv^n) = 0 \quad (\text{III.25})$$

avec:

$$U = uh \quad \text{et} \quad V = vh$$

Diffusion:

$$\frac{u^{n+2/3} - u^{n+1/3}}{\Delta T} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial u^{n+2/3}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial u^{n+2/3}}{\partial y} \right) + Fv^{n+1/3} \quad (\text{III.26})$$

$$\frac{v^{n+2/3} - v^{n+1/3}}{\Delta T} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial v^{n+2/3}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial v^{n+2/3}}{\partial y} \right) - Fu^{n+1/3} \quad (\text{III.27})$$

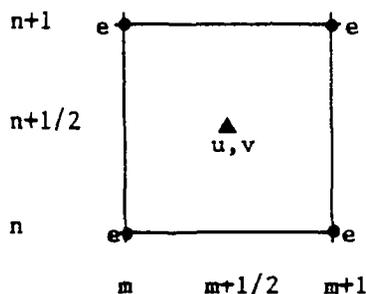
Propagation:

$$\frac{z^{n+1} - z^n}{\Delta T} + \alpha \operatorname{div} U^{n+1} + (1-\alpha) \operatorname{div} U^n = 0 \quad (\text{III.28})$$

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^{n+2/3}}{\Delta T} + g(\alpha h^{n+1} \operatorname{grad} z^{n+1} + (1-\alpha) h^n \operatorname{grad} z^n) \\ + g(\alpha (\frac{u|u|}{c^2 h^2})^{n+1} + (1-\alpha) (\frac{u|u|}{c^2 h^2})^{n+2/3}) = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.29})$$

Les équations (III.24,III.25) sont résolues par la méthode des caractéristiques, explicite mais inconditionnellement stable.

Les équations (III.26,III.27) sont résolues par un schéma implicite aux différences finies conduisant à une résolution par double balayage.



Les deux composantes de la vitesse, regroupées aux mêmes noeuds sont ainsi déterminées dans les deux premières étapes. Leurs valeurs sont replacées dans l'étape de propagation, où les auteurs ont introduit un coefficient d'implicitation α ($\alpha=0$ explicite, $\alpha=1$ implicite). Après élimination de U^{n+1} , la troisième étape est résolue par la méthode d'éclatement des opérateurs par coordination (Lions et al., 1975) en se servant de la méthode itérative du gradient conjugué.

Bien que les tests sur des milieux théoriques et réels aient montrés l'excellente performance de cette approche, les méthodes itératives demeurent assez coûteuses dans les milieux à bathymétrie mouvementée qui imposent une restriction sur le choix de la grille spatiale et augmentent considérablement le nombre d'itérations nécessaires pour la convergence, ce qui est équivalent à réduire le pas de temps dans les méthodes directes. De plus, le regroupement des deux composantes de la vitesse aux mêmes noeuds augmente le nombre de valeurs calculées par interpolation; procédure susceptible d'engendrer des viscosités numériques (Abbott, 1979, Roache, 1972).

Plusieurs modèles présentent des développements similaires à ceux utilisés par Benqué et al. Un des exemples de ce type d'approche est celui de Backhaus (1983), où la méthode du gradient conjugué est remplacée par la méthode de relaxation.

III.4.5 Conclusions

Dans l'état actuel des connaissances et des possibilités informatiques, il n'existe pas de type de modèle susceptible d'être appliqué à tous les problèmes que l'on rencontre. Les modélisations sont particulières suivant l'échelle et la nature des phénomènes que l'on cherche à étudier. La supériorité d'un modèle par rapport à un autre, n'est mesurée qu'en fonction de la qualité des réponses qu'il fournit aux objectifs proposés.

Les divers modèles évoqués précédemment, indiquent les lignes directrices à suivre dans une approche bi-dimensionnelle en plan. Parmi les diverses possibilités valables, la simplicité et les performances des résolutions se servant de mailles totalement imbriquées et d'une discrétisation du type A.D.I, les rend préférables aux méthodes itératives. Ce choix devient criticable pour des nombres de courants importants.

Tous les modèles évoqués sont équivalents si les équations sont linéarisées et leurs coefficients supposés constants; deux hypothèses couramment admises dans les études théoriques de stabilité, de convergence et de consistance. De par l'impossibilité d'une description complète et générale de certains aspects importants de la modélisation tels que les conditions aux limites ou le comportement de certains termes des équations du mouvement, le choix à faire parmi les diverses possibilités offertes reste fortement conditionné par les tests semi-empiriques réalisés sur le milieu étudié.

III.5 MODELE MONO-DIMENSIONNEL

III.5.1 Introduction

L'estuaire de la Casamance se caractérise par une topographie particulière. Le plan d'eau subit des étranglements et des élargissements successifs de Ziguinchor à Diana-Malari. Un modèle bi-dimensionnel en plan se révèle inadéquat pour la simulation de tout l'estuaire. A partir de la section d'Hamdalaye le plan d'eau se rétrécit progressivement et la profondeur excède rarement trois mètres. Réduire le pas spatial en utilisant un modèle bi-dimensionnel aura pour effet de nécessiter un support informatique adéquat et, augmente le coût et le temps des simulations. On a opté en conséquence pour un couplage du modèle bi-dimensionnel avec un modèle mono-dimensionnel qui aura un double rôle. Outre son utilité dans la simulation de la partie amont de l'estuaire, le modèle mono-dimensionnel a servi d'approche préliminaire, d'une part, dans la compréhension des phénomènes physiques qui gèrent le mouvement des eaux et, d'autre part, dans le calage des coefficients empiriques des équations du mouvement.

III.5.2 Modèle mono-dimensionnel

Les modèles mono-dimensionnels, constituent l'approche la plus répandue, dans les études de circulation en milieux côtiers. Ils décrivent le mouvement des masses d'eau, à des intervalles de temps successifs. Leur conception repose sur une schématisation du milieu naturel où on applique une vision simplifiée des phénomènes dynamiques répondant aux lois de base de la physique: la quantité d'eau qui rentre ou sort d'un réservoir est égale à la quantité stockée ou perdue.

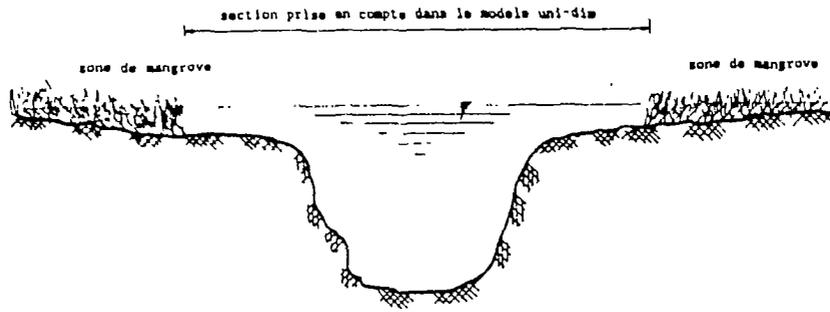


fig.III.14-Section prise en compte dans le modèle (1-D).

La schématisation du milieu étudié consiste à subdiviser le domaine d'intégration en un nombre fini d'éléments intercommunicants, telles que les caractéristiques géométriques et hydrauliques moyennes de chaque élément soient définies en fonction des élévations et des vitesses. Cette schématisation repose sur un jugement personnel qui aura des conséquences sur la capacité prédictive du modèle à simuler des événements naturels; une représentation approximative conduit à des résultats peu réalistes.

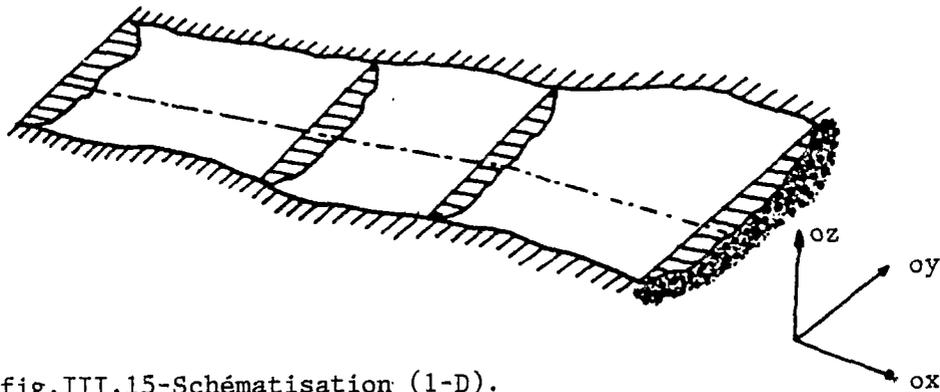


fig.III.15-Schématization (1-D).

La première étape consiste à identifier les caractéristiques géomorphologiques du milieu: confluences, bathymétrie, zones de stockage, mangroves, apports d'eau douce Les mesures effectuées par l'équipe de l'ORSTOM de Dakar (Pagès et al., 1987), ainsi que celles réalisées par Lemoalle et al. (comm. pers., 1986), ont permis de tracer l'évolution des

sections en fonction de la distance par rapport à l'embouchure. Ce tracé permet de vérifier, pour une cote uniforme, si les éléments choisis sont capables de représenter les principaux aspects reliés aux variations des sections du chenal principal (fig.III.16).

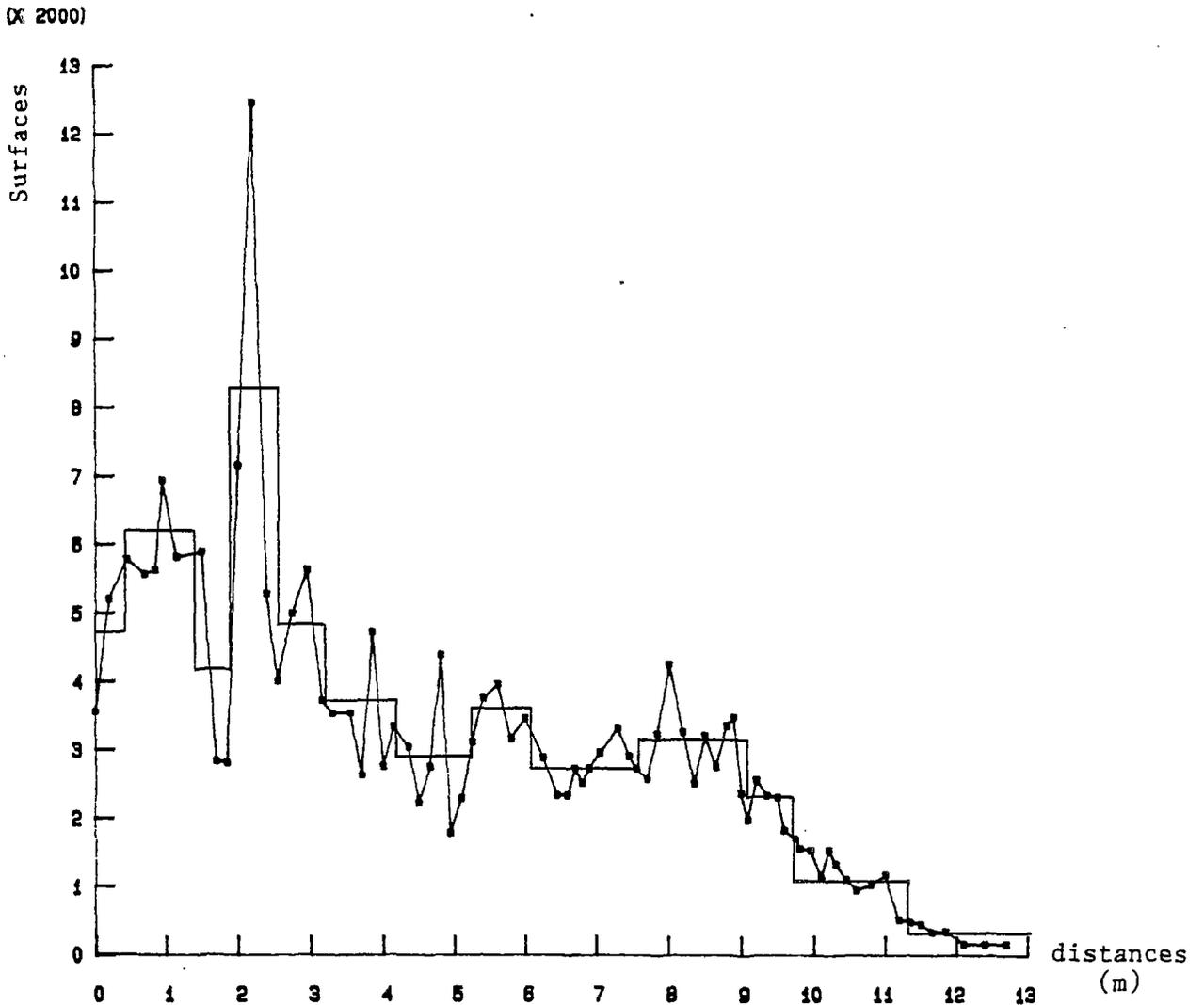


fig.III.16-Répartition longitudinale des surfaces mouillées par rapport à la distance.

(x 10000)

Un lissage est nécessaire afin, d'une part, que les sections transversales ne soient pas trop accidentées et, d'autre part, d'annuler les changements brutaux d'un élément à un autre afin d'éviter les variations rapides des caractéristiques de propagation (fig.III.17-III.22).

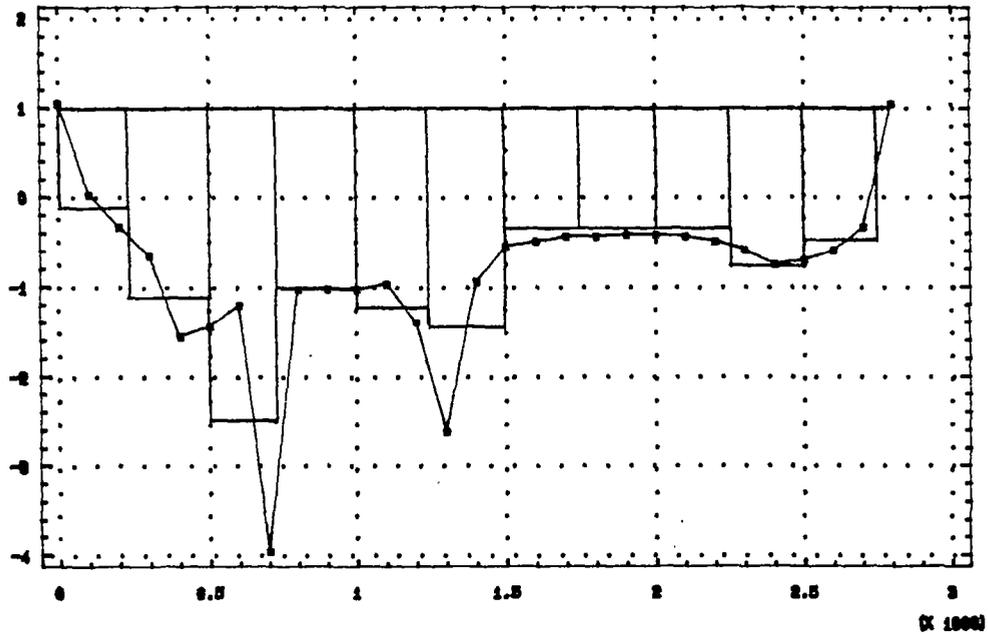


fig.III.17-Sections transversales de la station Goudomp.
(réelle et approchée)

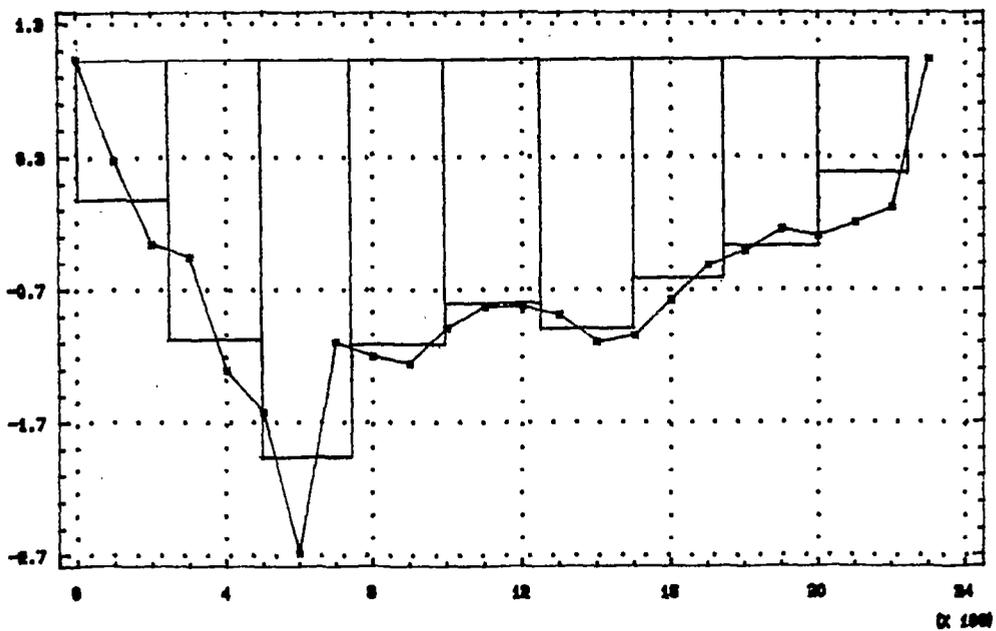


fig.III.18-Section transversales de la station Kaour.
(réelle et approchée)

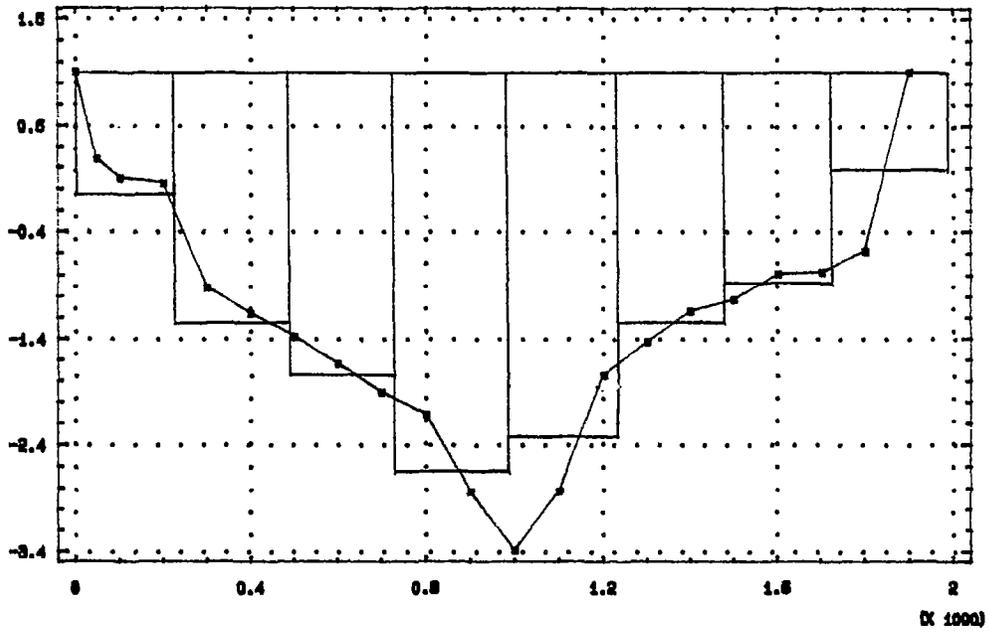


fig.III.19-Sections transversales de la station Diattakounda.
(réelle et approchée)

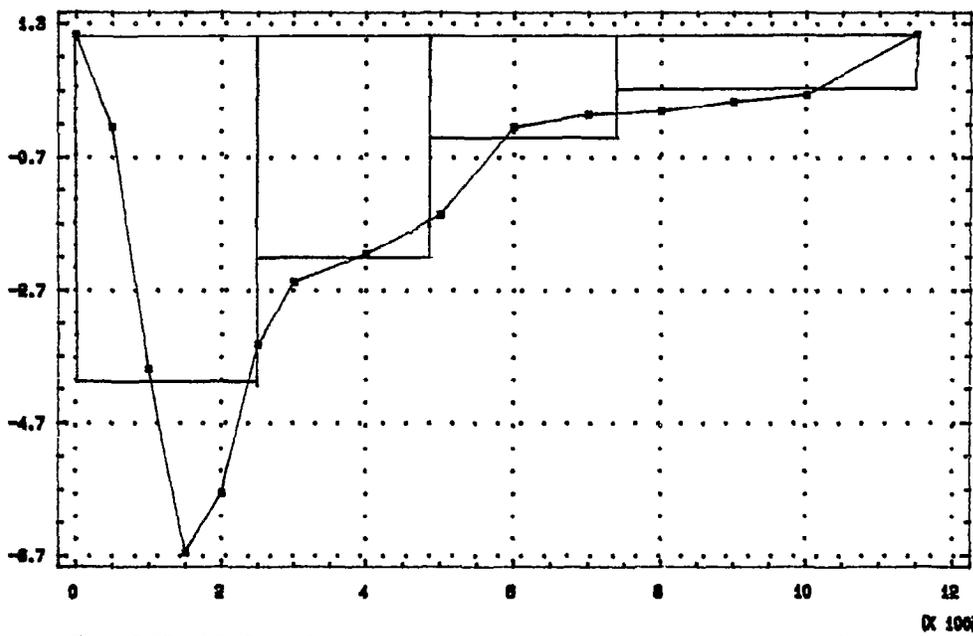


fig.III.20-Sections transversales de la station d'Hamdalaye.
(réelle et approchée)

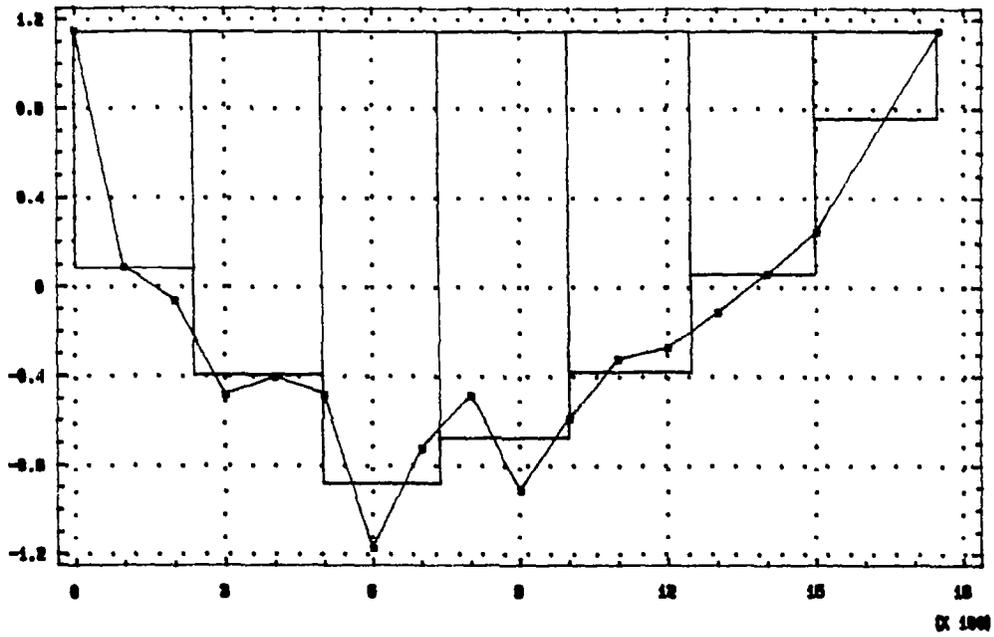


fig.III.21-Sections transversales de la station Sédhiou.
(réelle et approchée)

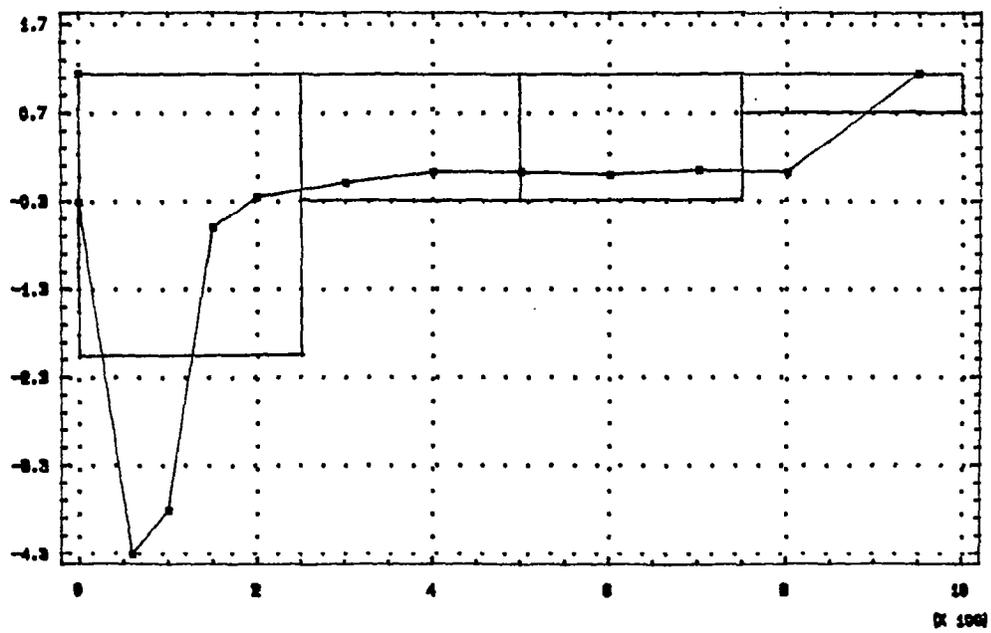


fig.III.22-Sections transversales de la station Sēfa.
(réelle et approchée)

III.5.2.1 Equations du mouvement

En vitesse et élévation :

$$\frac{S}{V.L} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{1}{V} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{q}{V.S} = 0$$

$$\alpha \frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial x} + \beta \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial x} = (S_0 - S_f) - \beta \frac{Vq}{Sg} = 0$$

ou en débit et élévation:

$$L \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gS \frac{\partial \xi}{\partial x} + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{S} \right) + \frac{SR \partial \rho}{2\rho_0 \partial x} + \frac{\tau_0 P}{\rho_0} = 0$$

$$\frac{\tau_0 P}{\rho_0} = \frac{\alpha_2 K Q |Q|}{8RS}$$

avec :

- L : largeur de la section de l'écoulement
- V : vitesse moyenne
- Q : débit moyen
- ξ : élévation
- y : profondeur de l'eau
- x : distance par rapport à l'origine
- S : section de l'écoulement
- q : débit latéral
- K : coefficient de frottement
- R : rayon hydraulique
- P : périmètre mouillé
- ρ : densité moyenne de référence
- α, β : coefficients de distribution de la vitesse
- S_0 : pente du chenal
- S_f : pente de la ligne de charge
- R_e : nombre de Reynolds

Les systèmes précédents sont formés à partir d'équations aux dérivées partielles, dans lesquelles les variables indépendantes sont x et t et les variables dépendantes sont $Q(x,t), \xi(x,t)$ ou $(V(x,t), y(x,t))$. Ces équations renferment des coefficients de correction et des paramètres empiriques à ajuster. La réussite de l'approche mono-dimensionnelle dépendra de la façon dont ces coefficients sont utilisés, de manière à contrebalancer les erreurs introduites par l'utilisation des grandeurs moyennes et par le lissage effectué sur les sections d'écoulement.

III.5.2.2 Méthode de résolution

Les équations étant non linéaires à coefficients variables, les solutions analytiques ne sont obtenues qu'à partir d'hypothèses simplificatrices qui limitent leur utilisation à très peu de cas réels. Les solutions habituellement retenues consistent à :

- 1°- linéariser les équations,
- 2°- supposer que les coefficients sont constants,
- 3°- rechercher des expressions mathématiques en fonction de l'allure de l'hydrogramme d'entrée (courbe cloche, fonction gamma).

Un exemple des premières solutions analytiques élaborées est celle de Barré de St Venant qui a traité le cas d'un canal rectangulaire de grande dimension en supposant que les frottements sont négligeables. Il s'ensuit que les résolutions analytiques n'ont pu être obtenues qu'au prix d'importantes simplifications et leur généralisation n'est pas acceptable dans la résolution des problèmes pratiques.

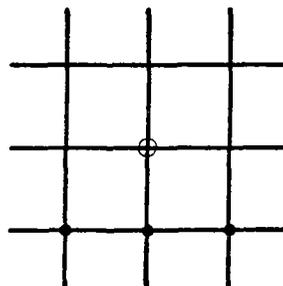
En raison des difficultés mathématiques permettant d'obtenir des solutions analytiques aux équations générales, les solutions numériques sont le plus fréquemment utilisées.

En l'état actuel des connaissances une analyse précise des systèmes non-linéaires n'est pas possible. Toutefois d'utiles informations peuvent être dégagées des études de stabilité, de consistance, de conservation, d'onde de chocs, de diffusion numérique, de propagation d'onde linéaire et bien d'autres. En conséquence, une comparaison peut s'effectuer entre divers schémas d'intégration et il en ressort que certaines discrétisations, bien qu'elles ne soient pas les plus performantes pour une propriété bien déterminée, peuvent conduire, suivant l'objectif de l'étude, à d'excellents résultats. La recherche de la discrétisation optimale ne paraît donc pas primordiale, l'important est d'avoir un outil simple d'utilisation, économique et qui puisse répondre d'une façon précise aux objectifs de l'étude.

La littérature abonde de résolutions mono-dimensionnelles, dont les plus utilisées sont celles de Godunov, Lax, Fromm, Leith, Lax-Wendroff, Vreugdenhill, Leapfrog, ... pour les schémas explicites et celles de Cranck-Nicholson, Lawsonen, Cunge et Perdreau, Chen et Simons, ... pour les cas implicites (Richtmyer *et al.*, 1967). Dans le cas de l'estuaire de la Casamance et pour l'étape de calage, une résolution suivant le schéma de Lax Wendroff a été choisie. Bien que ce schéma soit caractérisé par une faible diffusion numérique, son caractère explicite nécessite le respect de la condition restrictive de stabilité de C.F.L.

III.5.2.3 Schéma de Lax-Wendroff

Schéma de LAX-WENDROFF



⊗ : valeurs à calculer

⊙ : valeurs connues

On suppose que toutes les fonctions sont continues. Les développements suivant des séries de Taylor des divers opérateurs seront limité au second ordre. On adoptera une notation à deux indices, j: indice spatial et n: indice temporel. Les inconnues au temps $(n+1)\Delta T$ et au noeud $j\Delta X$ seront calculées en fonction des variables dépendantes aux noeuds $(j-1)\Delta X$, $j\Delta X$ et $(j+1)\Delta X$ au pas de temps $n\Delta T$.

$$\psi(x+\Delta x) = \psi(x) + \frac{\partial\psi}{\partial x} \Delta X + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \frac{\Delta X^2}{2} + o(\Delta X^3) \quad (\text{III.30})$$

$$\psi(x-\Delta x) = \psi(x) - \frac{\partial\psi}{\partial x} \Delta X + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \frac{\Delta X^2}{2} - o(\Delta X^3) \quad (\text{III.31})$$

Les dérivées spatiales sont centrées :

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\psi(x+\Delta X) - \psi(x-\Delta X)}{2\Delta X} + o(\Delta X^3) \quad (\text{III.32})$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\psi(x+\Delta X) - 2\psi(x) + \psi(x-\Delta X)}{\Delta X^2} + o(\Delta X^4) \quad (\text{III.33})$$

Il sera supposé dans la suite que le produit des dérivées premières ainsi que les dérivées du gradient d'énergie par rapport aux coordonnées spatiales et temporelles sont négligeables.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right) \frac{S V}{L} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\frac{gS}{\beta L} + v^2\right) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (\text{III.34})$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \left(\frac{\alpha^2 v^2}{\beta^2} + \frac{gS}{\beta L}\right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{gV}{\beta} \left(\frac{\alpha}{\beta} + 1\right) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (\text{III.35})$$

où

$$V(t+\Delta T) = V(t) + \frac{\partial V}{\partial t} \Delta T + \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \frac{\Delta T^2}{2} + o(\Delta T^3) \quad (\text{III.36})$$

$$y(t+\Delta T) = y(t) + \frac{\partial y}{\partial t} \Delta T + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \frac{\Delta T^2}{2} + o(\Delta T^3) \quad (\text{III.37})$$

En remplaçant les expressions (III.32), (III.33), (III.34), (III.35) dans (III.36) et (III.37) on trouve :

$$\begin{aligned}
 V(t+\Delta T) = V(t) &- \frac{\Delta T}{\beta} \left(\alpha V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial y}{\partial x} + g(S_f - S_0) \right) \\
 &+ \frac{\Delta T^2}{2} \left(\left(\frac{\alpha^2 V^2}{\beta^2} + \frac{gS}{\beta L} \right) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \left(g \frac{V}{\beta} \left(1 + \frac{\alpha}{\beta} \right) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \right) \quad (III.38)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y(t+\Delta T) = y(t) &- \left(\frac{S \partial V}{L \partial x} + V \frac{\partial y}{\partial x} \right) \Delta T \\
 &+ \frac{\Delta T^2}{2} \left(\left(1 + \frac{\alpha}{\beta} \right) \frac{S V}{L} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \left(\frac{Sg}{L\beta} + V^2 \right) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \quad (III.39)
 \end{aligned}$$

on retrouve :

$$\begin{aligned}
 V(i,n+1) = V^n(i) &- \frac{\Delta T}{2\beta\Delta X} \left(\alpha V^n(i) (V^n(i+1) - V^n(i-1)) \right. \\
 &\quad \left. + g(Y^n(i+1) - Y^n(i-1)) + 2g\Delta X(S_f - S_0) \right) \\
 &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta T}{\Delta X} \right)^2 \left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} V^{2n}(i) + \frac{gS}{\beta L} \right) (V^n(i+1) - 2V^n(i) + V^n(i-1)) \\
 &+ \left(1 + \frac{\alpha}{\beta} \right) \frac{g}{\beta} V^n(i) (Y^n(i+1) - 2Y^n(i) + Y^n(i-1)) \quad (III.40)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y(i,n+1) = Y^n(i) &- \frac{\Delta T}{2\Delta X} \left(\frac{S}{L} (V^n(i+1) - V^n(i-1)) + V^n(i) (Y^n(i+1) - Y^n(i-1)) \right) \\
 &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta T}{\Delta X} \right)^2 \left((V^{2n}(i) + \frac{gS}{\beta L}) (Y^n(i+1) - 2Y^n(i) + Y^n(i-1)) \right. \\
 &\quad \left. + \left(1 + \frac{\alpha}{\beta} \right) \frac{S}{L} V^n(i) (V^n(i+1) - 2V^n(i) + V^n(i-1)) \right) \quad (III.41)
 \end{aligned}$$

La formulation explicite de Lax-Wendroff facilite sa mise en oeuvre mais nécessite certaines précautions dans son emploi. Nous allons évoquer quelques unes des propriétés numériques de ce schéma:

III.5.2.3.1 Propagation d'une onde linéaire

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + k \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

avec,

$$\psi_{j,n} = \phi \rho^n \exp(ijk\Delta X) \quad (\text{III.42})$$

k: nombre d'onde.

ρ : facteur complexe de propagation.

La solution numérique peut être comparable à la solution exacte en analysant les deux quantités suivantes:

a: Facteur d'amortissement.

$$A = |\rho|^{2\pi/\sigma\xi}$$

b: Célérité relative de propagation.

$$C_r = -(\sigma\xi)^{-1} \arg(\rho)$$

$\xi = k\Delta X$; nombre de pas de temps pour chaque période: $2\pi/\sigma\xi$

$$\rho = 1 + \alpha(\cos\xi - 1) - i\sigma\sin\xi \quad (\text{III.43})$$

avec,

$$\alpha = \sigma^2 ; \sigma = c\Delta T/\Delta X$$

III.5.2.3.2 Stabilité

Il est nécessaire qu'aucune composante du train d'onde exprimée par (III.42) ne s'amplifie dans le temps. La méthode de Von-Neumann permet d'aboutir aux conclusions suivantes:

$$|\rho| < 1 \text{ et } 0 \leq \xi \leq \pi \quad (\text{III.44})$$

qui se traduit par la condition de C.F.L; $\sigma \leq 1$

III.5.2.3.3 Ondes de chocs

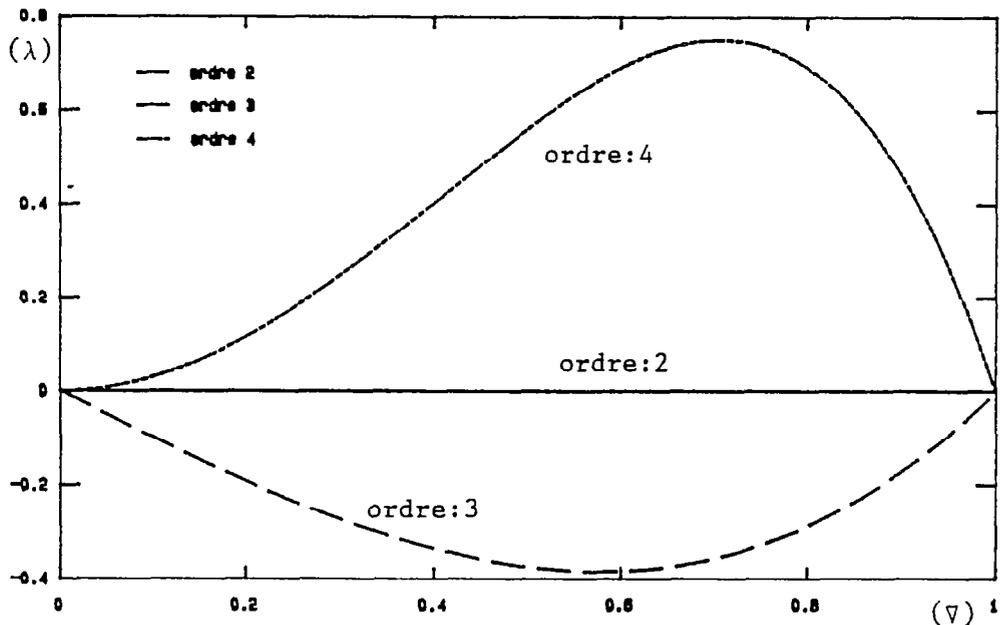
Dans les écoulements fortement non-linéaires, il se peut que les caractéristiques se croisent créant ainsi des discontinuités. Richtmyer et Morton (1967), ont démontré que ces ondes peuvent être reproduites par

une méthode des différences finies à condition que cette dernière soit conservative et dissipative. Vreugdenhil (1969,1981) a démontré que l'amplitude de ces ondes secondaires et le nombre de mailles où le choc se fait sentir dépendent de l'erreur de troncature. Ainsi pour le cas linéaire l'équation de départ s'écrit:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + k \frac{\partial \psi}{\partial x} = \theta_1 \frac{\Delta x^2}{2\Delta T} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \theta_2 \frac{\Delta x^3}{6\Delta T} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \theta_3 \frac{\Delta x^4}{24\Delta T} \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + \dots$$

Les termes d'ordre supérieur à deux, forment l'erreur de troncature. La dérivée du second ordre représente la diffusion numérique et la dérivée d'ordre trois est à l'origine des ondes secondaires (Vreugdenhil 1981, Abbott 1981). Pour le schéma de Lax-Wendroff, on retrouve:

$$\theta_1 = 0 ; \theta_2 = -\sigma(1-\sigma^2) ; \theta_3 = 3\sigma^2(1-\sigma^2) \quad (\text{III.45})$$



III.5.3 Calage du modèle

Les équations différentielles décrivant le mouvement des fluides incompressibles, font intervenir certains aspects qui ne peuvent être étudiés qu'à partir des relations empiriques. La distribution des tensions de cisaillement aux limites n'est pas connue. Exprimer ces

grandeurs par des fonctions analytiques est impensable, on a recours généralement à des fonctions empiriques qui renferment des coefficients dont l'ajustement aura une grande influence sur les solutions recherchées. Le but du calage est d'estimer ces valeurs de façon qu'une fois introduites dans l'équation différentielle et le système étant résolu, la solution obtenue soit la plus proche des observations.

Il est important de noter que le calage ne signifie pas l'utilisation de paramètres physiquement peu réalistes en vue de forcer le modèle à reproduire les valeurs observées.

La majorité des écoulements dans les estuaires à faible profondeur sont dominés par les termes de frottement aux limites qui, eux, sont intimement liés au critère adopté dans le choix de leurs coefficients. Ces termes dissipatifs dus à la rugosité jouent un rôle prépondérant dans le mouvement des masses d'eau. Leur effet est de contrôler les vitesses maximales et ils conduisent généralement à un ralentissement ou à une atténuation de l'onde.

Une estimation préliminaire de l'importance des forces de frottement peut être obtenue à partir du coefficient adimensionnel D_s de Harder (1963) qui s'exprime par:

$$D_s = \frac{K T U_{\max}}{64 R} \quad (\text{III.46})$$

k : Coefficient de frottement.

T : Période de la marée.

R : Rayon hydraulique.

U_{\max} : Vitesse maximale

Si

- $D_s < 1$ Faible contribution du terme de frottement
- $D_s > 5$ La contribution des termes dissipatifs est importante dans les équations du mouvement.

Dans le cas de la Casamance, la valeur de D_s excède largement 5, par conséquent, la contribution du terme dissipatif de frottement est assez importante, surtout dans les zones de faible profondeur. Les divers études rencontrées dans la littérature montrent que, généralement, le flot est contrôlé par le terme d'inertie et le jusant par le terme de frottement.

Plusieurs formulations empiriques existent pour exprimer les termes de tension aux fond. Les plus utilisées sont celles de Manning-Strikler, Weishbach et Chezy:

$$\text{Manning-Strikler : } V = \frac{1.49}{n} R^{2/3} S^{1/2} \quad \text{ou} \quad KR^{2/3} S^{1/2}$$

$$\text{Chezy} \quad : \quad V = C.(RS)^{1/2}$$

$$\text{Weishbach} \quad : \quad V^2 = (8gRS)/f$$

Les divers coefficients peuvent être théoriquement reliés en régime permanent uniforme par:

$$\frac{C}{g} = \frac{1.49 R}{n g} = (8/f)^{1/2} \quad (\text{III.47})$$

Le coefficient de Chezy a l'inconvénient d'être dimensionnel et de varier significativement avec la profondeur de l'écoulement, d'où la nécessité d'un calage fin. Le coefficient de Weishbach, dépend du nombre de Reynolds et de la profondeur. Quant au coefficient de Manning, il varie comme la puissance 1/6 de la profondeur et, par conséquent, reste sensiblement constant sur une plage assez grande de profondeurs. Des travaux expérimentaux ont montré que l'erreur résultant de l'hypothèse d'un coefficient de Manning constant n'est significative que si les profondeurs sont supérieures à 30 mètres ou inférieures à 10 mm, ce qui rend son utilisation préférable (Yen, 1975).

Prouver une modélisation consiste à ajuster les coefficients empiriques jusqu'à ce que les valeurs calculées coïncident avec les valeurs observées. Le calage d'un modèle est relativement complexe car les coefficients de frottement choisis pour chaque maille doivent être représentatifs de toute la maille en question. En général, la vérification est effectuée par une analyse de la sensibilité du modèle aux variations de ce coefficient.

III.5.3.1 Méthode d'optimisation

La détermination des paramètres d'un système d'équations différentielles soumis à des conditions initiales et aux limites est connue dans la littérature comme le problème inverse. La résolution du problème inverse peut être directe ou itérative. Cette dernière méthode, la plus utilisée, a été retenue dans notre travail.

L'algorithme d'optimisation doit satisfaire les conditions de précisions voulues tout en étant simple d'utilisation. Plusieurs techniques ont été développées à cette fin. Bekey (1970) a présenté une synthèse de plusieurs techniques d'identifications d'un système dynamique et a effectué une comparaison entre l'analyse spectrale, la méthode du gradient, la méthode de la quasi-linéarisation et les approximations stochastiques. Plus récemment Yih et Davidson (1975) ont appliqué les méthodes du gradient conjugué et la méthode de Marquardt pour identifier la distribution des paramètres de qualité des eaux dans l'estuaire du Delaware. En 1972, Becker et Yeh publièrent une méthode qui repose sur le critère de minimisation de l'écart maximal en se servant d'un algorithme de programmation linéaire. Cet algorithme dit "du coefficient d'influence" a montré son efficacité surtout en présence des termes non linéaires de l'équation hydrodynamique. Yeh et Tauxe (1971) ont utilisé la technique de la quasi-linéarisation pour résoudre le problème d'identification des paramètres d'un aquifère en se

servant des observations des fluctuations du niveau en réponse à une crue. Les paramètres identifiés sont la transmissivité et le coefficient d'emmagasinement. Marino et Yeh (1973) ont étendu cette technique en l'adaptant à la méthode des différences finies.

Le calage le plus simple consisterait à prendre une valeur unique du coefficient de rugosité, ce qui est assez fréquemment effectué dans les modèles de propagation d'onde. Cette technique consiste à répéter une simulation pour diverses grandeurs du coefficient de frottement. Les valeurs qui amèneront aux résultats les plus proches des grandeurs observées sont sélectionnées comme valeurs correctes du coefficient de frottement K . Même lorsque K est considéré indépendant du débit et des élévations, la démarche est assez laborieuse et s'adapte mal aux milieux à topographie irrégulière.

Les tests effectués à partir de coefficients constants tout le long de l'estuaire de la Casamance n'ont pas abouti à des résultats satisfaisants, surtout dans la partie comprise entre Goudomp et Diana-Malari. Ceci est probablement dû à :

- la présence de vastes zones "marginales" de faible profondeur limitrophes au chenal principal et dont la schématisation par un modèle mono dimensionnel est fortement approximative.

- l'élargissement du cours au niveau de la confluence avec le Soungrougrou où l'onde subit une forte atténuation.

- la topographie du fond qui présente des hauts fonds et des singularités hydrauliques.

- la faible représentativité des grandeurs intégrées, dans une section où l'écoulement n'est pas toujours uniforme.

La technique de calage développée ici consiste en un ajustement systématique des coefficients de frottement dans chaque bief suivant un schéma prédicteur-correcteur de façon à reproduire les valeurs

observées. Cette méthode repose sur la minimisation de l'écart entre les valeurs observées et calculées.

La schématisation de l'estuaire de la Casamance a été réalisée à partir de 23 profils en travers et d'un profil longitudinal du lit mineur. Le niveau moyen des eaux a été calculé sur les six stations limnimétriques et une interpolation linéaire a permis de reconstituer les profondeurs aux autres noeuds du maillage. Les conditions aux limites étaient en hauteurs d'eau, les vitesses étant calculées par résolution du système constitué par les équations dynamique et continuité. Pour faciliter le calcul, un lissage a été effectué au début et à la fin d'un cycle de marée, afin d'obtenir un cycle répétitif de période 12h40mn. Le débit fluvial étant connu à partir de jaugeages effectués sur la station de Kolda (à l'amont de Diana-Malari), concomittant avec la période de la marée choisie.

III.5.3.2 Technique d'optimisation

L'estuaire a été découpé en 5 biefs, dont les entrées correspondent aux emplacements des limnigraphes: Ziguinchor, Banganga, Kaour (puis Goudomp), Hamdalaye et Sefa.

5^{ème} bief : Ziguinchor -----> Banganga
 4^{ème} bief : Banganga -----> Kaour (Goudomp)
 3^{ème} bief : Kaour -----> Hamdalaye
 2^{ème} bief : Hamdalaye -----> Sefa
 1^{er} bief : Sefa -----> Diana Malari

L'optimisation est effectuée en 5 étapes :

1°: On étudie la propagation depuis l'entrée à Sefa jusqu'à Diana Malari, tout en imposant les conditions initiales d'un état calme. Une première estimation du coefficient de frottement est utilisé. Cette

première valeur ne doit pas être trop forte sinon le modèle mettra trop longtemps pour converger.

2°: Les élévations obtenues sont comparées aux élévations observées, on recherche alors le maximum d'écart entre les valeurs observées et calculées. Si ce maximum d'écart est inférieur au critère de convergence (1.0 cm), on passe à la 4^{ème} étape, sinon on passe à la 3^{ème} étape.

3°: Le but de cette étape est de minimiser le maximum d'écart obtenu; on procède alors à une rectification du coefficient de Manning suivant le critère :

$$M(i+1) = M(i) - K \frac{dM}{dK}$$

et on reprend la première étape jusqu'à convergence.

4°: On rajoute au n^{ème} tronçon, le n-1^{ème} tronçon, c'est à dire au tronçon (Sefa-Diana Malari) on rajoute (Hamdalaye-Sefa) et on reprend la première étape en propageant de Hamdalaye jusqu'à Diana Malari, tout en gardant la valeur du coefficient déjà calé.

5°: En cas de divergence du système, la valeur initiale est rectifiée et on recommence la 1^{ère} étape, sinon on passe en 4.

Ce procédé est répété jusqu'au dernier bief (Ziguinchor-Banganga), ceci nous a permis d'obtenir la répartition suivante du coefficient de frottement:

Cf: Manning

Repartition du coefficient de Manning

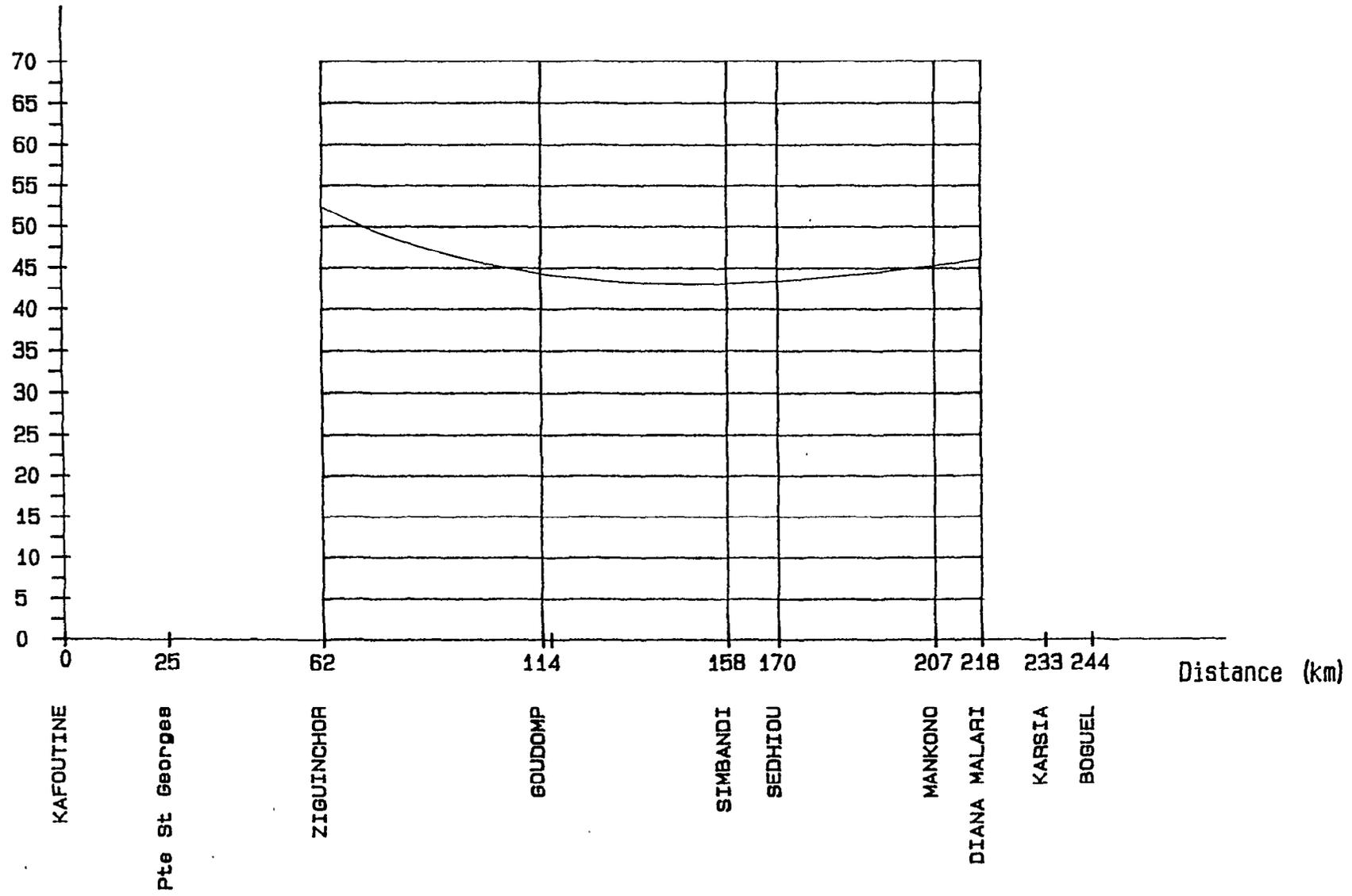


fig.III.23-Répartition longitudinale des coefficients de Manning.

III.5.4 Conclusion

Une schématisation correcte de l'estuaire de la Casamance est difficile en raison de sa géométrie très irrégulière. L'utilisation d'un modèle mono-dimensionnel est généralement très approximative dans de tels milieux, surtout dans la reproduction des zones marginales et des hauts fonds.

La fonction empirique de résistance (Manning-Strikler), choisie repose sur l'hypothèse que la distribution instantanée des vitesses suit un profil logarithmique. Cette hypothèse se trouve fortement détériorée dans les milieux peu profonds, où certaines surfaces se couvrent et se découvrent suivant l'état de la marée. Dans les régions caractérisées par une faible profondeur, la représentation des processus dissipatifs par un terme quadratique devient trop approximative. Le profil des vitesses n'est pas spatialement uniforme et les élévations sont comparables aux profondeurs. En conséquence, peu de particules fluides suivront la vitesse intégrée sur la profondeur. L'approximation de Prandtl, la théorie de longueur de mélange ainsi que les diverses expressions des termes de frottements basées sur l'approximation de Boussinesq, se trouvent peu représentatives des tensions qui se produisent en ces régions (Dronkers, 1964). Dans certains milieux les coefficients de frottement, perdent leur caractère physique et se transforment en paramètres de contrôle. Le problème se complique si la schématisation du milieu est trop approximative car le coefficient optimal peut varier suivant le plan de représentation adopté. L'approche qui, pour reproduire les élévations observées, conduit à faire varier la schématisation de l'estuaire amène généralement à des géométries irréelles. Dans ce cas les modélisateurs tendent à faire varier ces paramètres d'une façon arbitraire, indépendamment des caractéristiques de l'écoulement, afin d'arriver à une coïncidence des résultats.

L'écoulement dans l'estuaire de la Casamance n'a pas partout les mêmes caractéristiques. Ceci est dû aux irrégularités des pentes et sections et à l'existence de vastes zones de mangroves; ces dernières dans la majorité des cas n'influent que sur la partie limitrophe au chenal principal. Ceci conduit à des variations transversales importantes des vitesses. Ces zones auront un coefficient de frottement différent de celui du chenal principal (généralement plus rugueux). Les variations du coefficient de frottement peuvent dépasser 40% dans le cas où les zones limitrophes sont des mangroves, d'où l'importance d'une représentation réaliste de la géométrie dans les modèles mono-dimensionnels. Cette schématisation repose généralement sur un jugement personnel qui pourrait avoir une influence considérable, d'une part, sur la validité du calage effectué et, d'autre part, sur la capacité du modèle à simuler les mouvements réels. Une représentation peu réaliste du milieu conduit inévitablement à des résultats trop approximatifs.

Mis à part les problèmes dus à l'influence des zones marginales limitrophes sur la répartition du coefficient de frottement, la géométrie assez complexe, avec des pentes variables, favorise dans certains endroits l'écoulement en flot plus que celui en jusant (ou l'inverse). Il en résulte que le calage d'un tronçon peut affecter celui qui le précède (ou le suit) et ainsi remettre tout en cause.

Il s'ensuit que la performance de la méthode de calage utilisée dépend du degré de représentativité d'un modèle mono-dimensionnel dans des milieux comme l'estuaire de la Casamance. Une schématisation mono-dimensionnelle correcte est difficilement réalisable, en raison de la géométrie très irrégulière et du manque d'informations concernant l'étendue des zones marginales qui entourent l'estuaire. La répartition longitudinale du coefficient de frottement du lit principal a été complétée dans le modèle bi-dimensionnel par un choix empirique des coefficients de

frottement dans les mailles correspondant aux zones de faibles profondeurs.

Le choix des emplacements des stations de mesure est un travail important qui conditionne la réussite de la technique de calage. Cette tâche dépend de plusieurs contraintes dont la facilité d'accès, la disponibilité d'appareillages et bien d'autres facteurs. Dans certaines études pluridisciplinaires les objectifs intermédiaires diffèrent parfois et les "bons" emplacements pour une étude ne sont pas forcément les meilleurs pour une autre. Certains endroits peuvent présenter des singularités hydrauliques locales qui ne sont pas importantes pour une approche biologique globale, mais qui présentent un grand intérêt pour certaines approches hydrodynamiques. L'optimisation des paramètres est, en conséquence, localement sensible et nécessite une certaine expérience du terrain de la part du modélisateur.

L'algorithme d'optimisation étant initié à partir de valeurs supposées, leur grandeur devra être comprise dans un intervalle logique de grandeurs admissibles. L'erreur tolérée dans l'estimation initiale dépend de la sensibilité du processus physique aux variations des paramètres à ajuster. Dans le cas où les paramètres atteignent des valeurs non réalistes, la fonction critère peut être trop importante et nécessiter trop d'itérations pour ramener les paramètres à des valeurs raisonnables; ceci conduit inévitablement à un ralentissement de la procédure.

La procédure de calage dépend du nombre de stations de mesures et de la qualité des observations recueillies. Dans les séries d'observations une certaine marge d'erreurs est tolérable. Au contraire si les bruits numériques sont importants, une non-unicité de la solution se manifeste et contraint le système vers une fausse convergence.

Un modèle ne peut être prédictif pour des événements pour lesquels il n'a pas été spécifiquement calé car les paramètres des équations ne sont pas uniquement reliés aux propriétés physiques du champ

d'étude. Par conséquent ils ne constituent pas des caractéristiques fixes de l'estuaire, mais dépendent de plusieurs paramètres dont, essentiellement, la géométrie, la distribution des vitesses et les diverses singularités qui diffèrent d'un endroit à un autre.

La technique de calage utilisée nous a permis d'identifier les coefficients de frottement dans le chenal principal de l'estuaire et ainsi de reproduire avec une estimation satisfaisante les élévations observées dans les stations limnimétriques. L'outil élaboré est facile à utiliser grâce à une discrétisation explicite des équations du mouvement et à la technique simple d'optimisation. Cette dernière a permis de montrer que l'utilisation d'un coefficient de frottement constant tout le long de l'estuaire ne conduit pas à une bonne reproduction des observations et qu'une variation spatiale s'impose. Cette méthode utilisée pour l'identification des coefficients de frottement pourrait être étendue à d'autres paramètres concernant la qualité des eaux.

CHAPITRE 4
APPLICATIONS ET TESTS

Chapitre IV

APPLICATIONS ET TESTS

IV.1 Introduction

La simulation des écoulements dans les milieux naturels, à partir d'un modèle bi-dimensionnel intégré sur la profondeur, est assez contraignante si le domaine d'intégration présente dans certains endroits un étranglement du plan d'eau. Si l'option choisie est d'utiliser des mailles de taille constante, ceci impose une réduction générale des pas spatiaux, augmentant, en conséquence, le nombre des noeuds de calcul et rendant prohibitif le coût des simulations.

Afin de résoudre ce problème, fréquemment rencontré dans les milieux estuariens de moyenne et de faible envergure, deux éventualités se présentent:

- La première consiste à utiliser des mailles de taille variable.

- La seconde consiste à incorporer dans la résolution un modèle mono-dimensionnel, qui sera appliqué aux régions qui présentent un écoulement essentiellement uni-directionnel.

Dans les paragraphes précédents, on a démontré que l'utilisation de mailles de grandeurs variables peut conduire à des distorsions de ces dernières et, par conséquent à des erreurs de troncature importantes. Afin de ne pas privilégier une direction par rapport à une autre par un jeu sur la taille des mailles, la deuxième possibilité a été choisie dans l'étude de l'estuaire de la Casamance.

Les premiers essais ont été réalisés avec le modèle explicite de Lax-Wendroff, qui a servi auparavant à l'optimisation des coefficients de frottement. Bien que les deux modèles (1-D et 2-D) soient construits à

partir de la technique des différences finies, leur discrétisation ne conduit pas aux mêmes critères de stabilité. Pour le modèle mono-dimensionnel, la condition de "bon fonctionnement" est celle de Courant, Freidrich et Lewy; par contre, le modèle bi-dimensionnel semi-implicite amène à des conditions de stabilité moins restrictives. Même avec l'utilisation du terme de viscosité artificielle, des instabilités sont apparues à l'interface des deux modèles. En conséquence, le modèle mono-dimensionnel a été rectifié et un développement similaire à celui utilisé pour le bi-dimensionnel a été fait; dans ce cas les instabilités ont disparu.

La résolution des équations du modèle mono-dimensionnel, s'effectue en deux étapes; les élévations (ou sections mouillées) sont calculées explicitement par résolution de l'équation de continuité et les vitesses (ou débits) le sont implicitement, par résolution de l'équation dynamique.

Ce modèle recouvre la partie de l'estuaire qui s'étend de l'amont de Sefa jusqu'à Kolda. Les sections mouillées, ainsi que les pentes ont été établies en fonction des diverses campagnes de mesures réalisées par l'équipe de l'ORSTOM de Dakar (Pagès, Debenay, Le Reste 1986). Les jaugeages des débits à Kolda ont constitué la condition d'entrée du système et le pas spatial choisi est de l'ordre du kilomètre.

Bien que les sections réelles se caractérisent par de nombreuses zones d'eau morte et de vasières, une schématisation faite à partir de sections rectangulaires a été adoptée. Cette technique amène forcément à un lissage des phénomènes induits par les irrégularités brutales du lit principal. Mais le faible marnage dans cette zone (<5 cm) et les faibles apports fluviaux (<10m³/s), rendent les résultats peu sensibles à ces approximations de la géométrie. Les sections mouillées sont calculées en fonction des hauteurs d'eau ($s=f(h+\xi)$).

IV.2 Site de la modélisation

Le domaine à modéliser a été choisi en fonction des sites où sont disponibles des mesures susceptibles d'être utilisées comme conditions aux limites ou comme mesures de contrôle et de calage. C'est pour cela que le champ d'intégration a été limité aux stations de Ziguinchor et l'aval de Kolda (fig.IV.1).

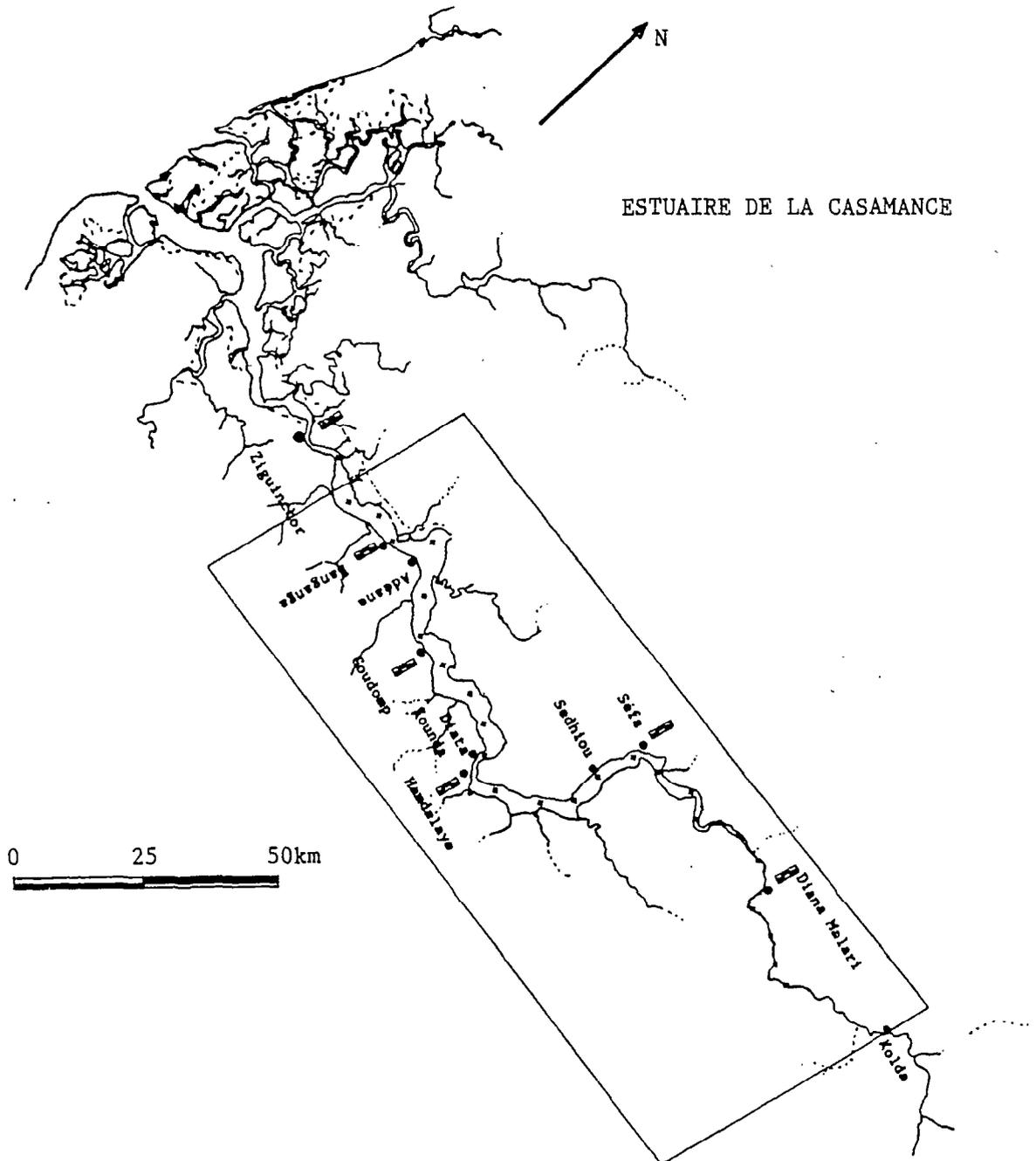


fig.IV.1-Site de modélisation.

Cette partie de l'estuaire se caractérise par une topographie irrégulière qui, même avec les possibilités offertes par les conditions de stabilité des systèmes 1, 2 et 3 évoqués au chapitre précédent, limite le choix des pas de discrétisation.

L'entrée du système à Ziguinchor se caractérise par un étranglement du plan d'eau où la largeur des sections de l'écoulement passent de 700 mètres à Ziguinchor à plus de 2500 mètres à l'aval de Banganga (fig.IV.2).

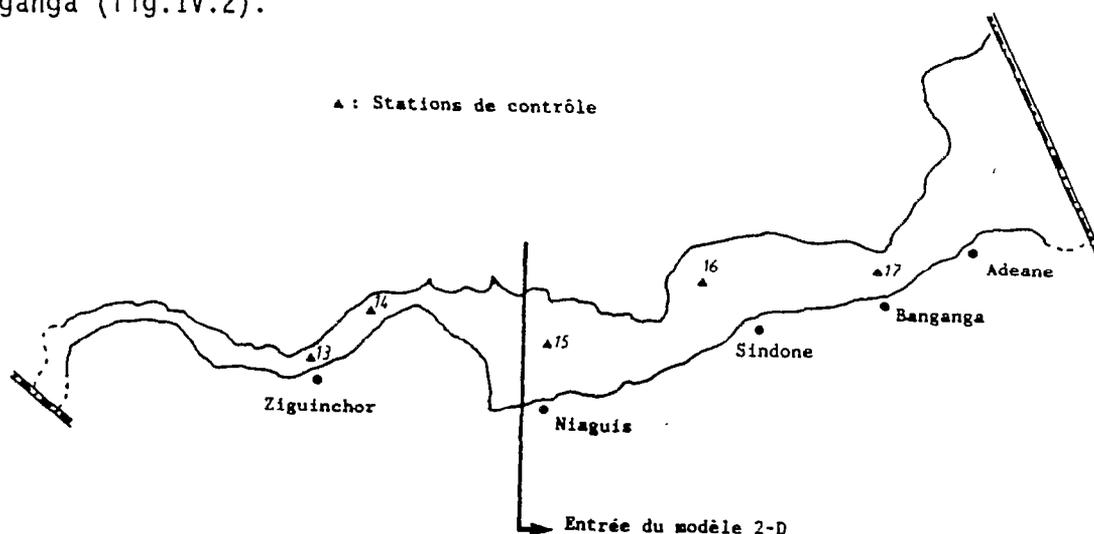


fig.IV.2-Entrée du domaine d'intégration.

Ce retrécissement ne pouvait pas être schématisé convenablement à partir de mailles de dimensions constantes susceptibles d'être utilisées pour tout l'estuaire; le rapport qualité/prix serait trop désavantageux.

Pour pallier cet inconvénient, deux cas de figure étaient possibles:

- Démarrer les simulations par le modèle mono-dimensionnel, puis le coupler au modèle bi-dimensionnel.

- Décaler l'entrée du domaine d'intégration en un endroit qui n'est pas affecté par des conditions géomorphologiques pénalisantes, en se

basant sur une reconstruction des nouvelles conditions aux limites à partir des données disponibles.

Dans l'estuaire de la Casamance, la dernière possibilité a été préférée. Une simulation, avec un pas constant égal à 70 mètres a permis d'obtenir l'hydrogramme d'entrée du système qui a été fixé à l'aval de la station 15.

Cette procédure a permis, d'une part, d'augmenter la grandeur des mailles de la grille d'intégration et, d'autre part, d'éviter de démarrer les simulations à partir d'une singularité hydraulique.

IV.3 Procédure de couplage

Le modèle 1-D pourrait fonctionner seul, mais le but est de pouvoir le coupler au modèle 2-D. Les propriétés numériques des deux modèles n'étant pas les mêmes, un facteur de pondération a été appliqué aux variables avant de les transférer de l'un à l'autre système. En termes mathématiques la pondération est résolue comme suit:

$$\underline{\psi}(t+\Delta T) = \alpha \underline{\psi}(t+\Delta T) + (1-\alpha)\underline{\psi}(t) \quad (\text{IV.1})$$

$\underline{\psi}$: Valeur à l'interface.

α : Paramètre de relaxation ($0 \leq \alpha \leq 1$). Dans notre cas $\alpha=0.4$

Chacun des modèles fonctionne séparément, mais a besoin des résultats de l'autre pour les utiliser comme conditions aux frontières. Le raccordement est résolu suivant le schéma suivant:

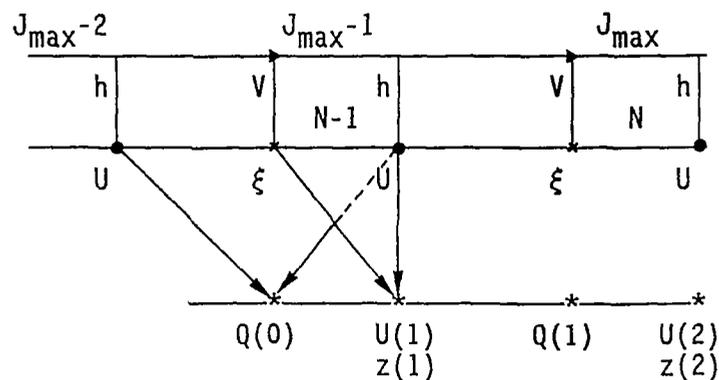


fig.IV.3-Procédure de couplage.

$$Q(0) = H_{J_{\max-1}} \left[\frac{U_{J_{\max-1}} + U_{J_{\max-2}}}{2} \right] \Delta X \quad (\text{IV.2})$$

$z(1) = \langle \xi_{J_{\max-1}} \rangle$ moyenne sur toutes les mailles transversales du 2-D

$U(1) = \langle U_{J_{\max-1}} \rangle$ moyenne sur toutes les mailles transversales du 2-D

Le débit au noeud 0 du modèle 1-D est calculé par la formule (IV.2), quant à l'élévation et la vitesse au noeud 1 ils sont calculés en supposant une répartition uniforme de ces deux grandeurs dans le modèle 2-D. D'où, l'importance du choix du site de couplage où, notamment, les vitesses transversales sont supposées nulles.

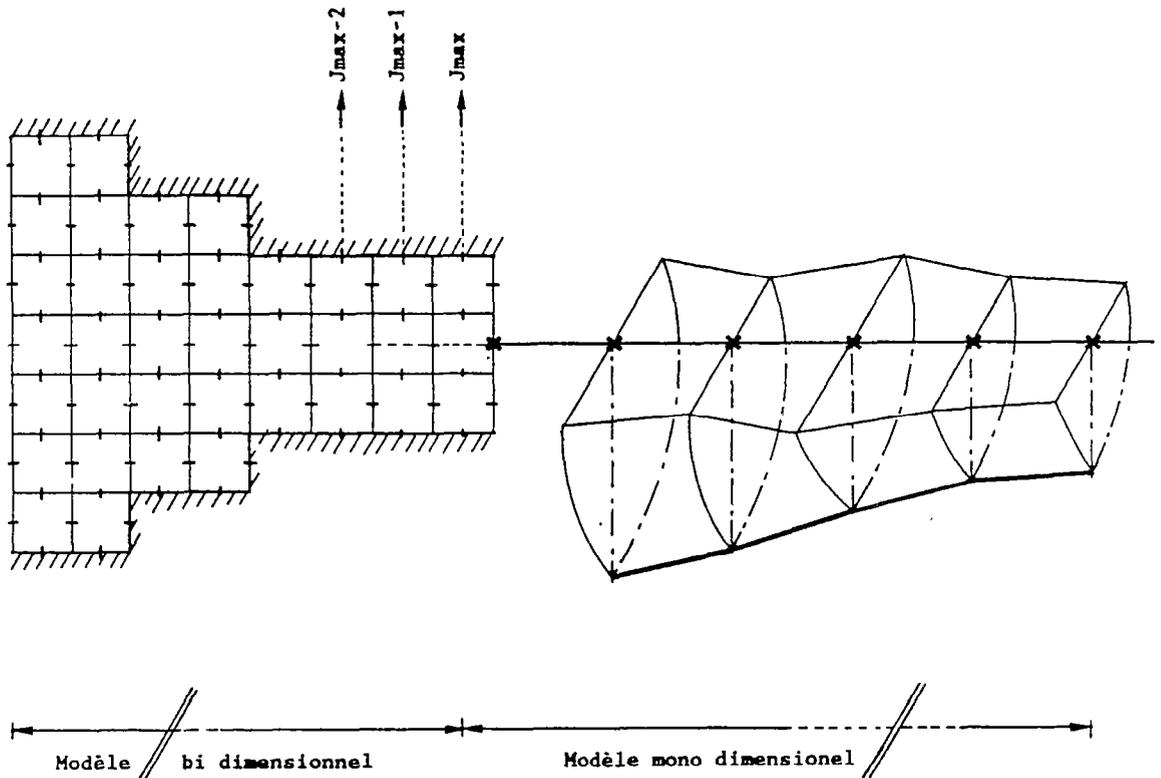


fig.IV.4-Schématization du couplage des modèles (2-D) et (1-D).

IV.4 Fonction de forçage

La composante semi-diurne principale M2 est l'onde dominante du train d'ondes qui forment la marée dans l'estuaire de la Casamance. Pour des raisons de temps de calcul, c'est cette grandeur qui a servi comme condition d'entrée du système dans l'étape de calage:

$$\xi(t) = \xi_0 \cos(\omega t + \psi) \quad (V.3)$$

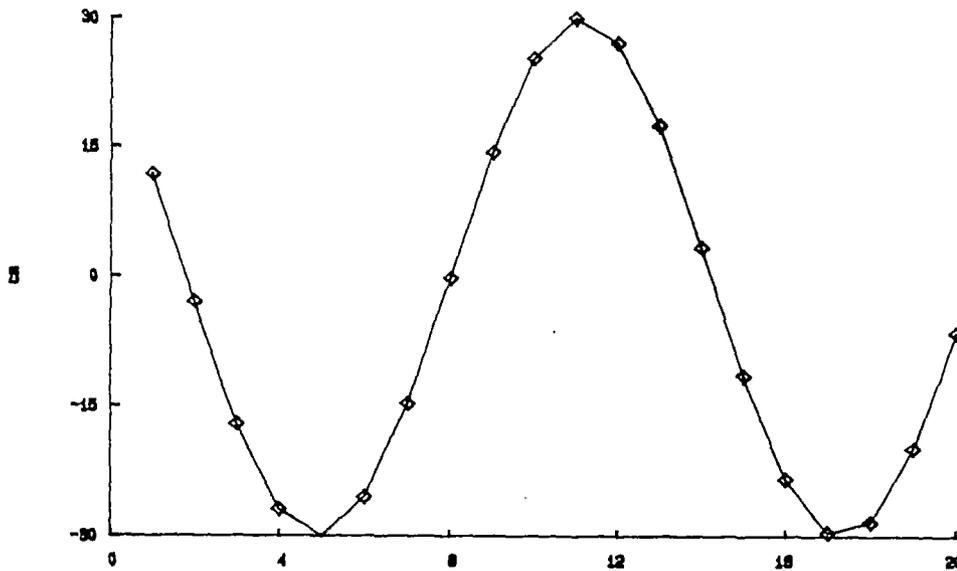


fig.IV.5-Condition d'entrée du domaine d'intégration.

IV.5 Condition initiale

Dans les études des milieux qui subissent l'action de la marée, la condition initiale joue un rôle peu important par rapport à la condition aux limites. Cette dernière alimente la grille d'intégration par les informations que l'on propage, durant le calcul, dans tout le domaine. La recherche de la solution s'effectue un certain temps après le démarrage de la simulation. En conséquence, le choix de la condition initiale est arbitraire. Dans le cas de la Casamance, on a choisi l'état calme ($U = V = \xi = 0$). Le calibrage est réalisé par comparaison des valeurs calculées avec les valeurs observées aux diverses stations de contrôle.

IV.6 Choix des pas spatio-temporels

Les trois modèles évoqués auparavant, conduisent à des schémas linéairement stables. Par conséquent, ils peuvent théoriquement fonctionner quel que soit le nombre de courant, permettant ainsi l'utilisation d'un pas de temps important comparé aux possibilités offertes par les schémas explicites.

Leendertse (1967), Weare (1976), Abbott (1979) ont étudié les caractéristiques numériques de la forme linéarisée des équations traitées par des discrétisations similaires à celles utilisées dans notre travail. La méthode de Leendertse permet d'analyser l'erreur de phase à partir d'un facteur dit de propagation qui s'exprime en terme de nombre d'onde par:

$$P(x, \Delta T, k) = \frac{\exp((i2\pi k(x - \delta t)/\Delta T))}{\exp((i2\pi k(x - \lambda t)/\Delta T))} \quad (\text{IV.4})$$

λ : Célérité de l'onde physique de l'équation différentielle.

δ : Célérité de l'onde numérique de l'équation discrète.

Quelle que soit la période choisie, le module de P indique l'atténuation de la $k^{\text{ième}}$ composante sur cette période et l'argument de P indique l'erreur de phase correspondante.

Le suivi de P sur un intervalle de temps, dans lequel la composante du nombre d'onde K se propage sur toute sa longueur d'onde, tel que $t = \Delta T / \lambda k$, permet de ramener l'expression de P à:

$$P = \exp(-2i\pi(\delta/\lambda - 1)) \quad (\text{IV.5})$$

Si δ est complexe et $|\exp(i\phi)| = 1$ quelle que soit ϕ réelle, on aura:

$$|P| = \exp(2\pi \text{Im}(\delta)/\lambda) \quad \text{Arg}(P) = 2\pi(\lambda - \text{Re}(\delta))/\lambda$$

Le rapport entre les célérités numérique et réelle est exprimé par:

$$Q = \frac{\operatorname{Re}(\delta)}{\lambda}$$

L'erreur de phase est mesurée en fonction de l'écartement de l'unité de Q, exprimée par la quantité:

$$\frac{\lambda - \operatorname{Re}(\delta)}{\lambda}$$

L'écriture matricielle du système linéarisé conduit à:

$$\left[G(x, \Delta T, k) - I \exp(-2i\pi k \delta \Delta T / 2l) \right] \xi_k = 0 \quad (\text{IV.6})$$

où,

$\exp(-2i\pi k \delta \Delta T / 2l)$: valeur propre correspondante à ξ_k

G : matrice d'amplification

ξ_k : vecteur propre de G

Abbott (1979) a montré que les équations du mouvement linéarisées et écrites sous la forme matricielle (IV.6) conduisent aux valeurs propres unitaires, données par:

$$* \lambda_1 = 1 \quad (\text{Onde stationnaire})$$

$$* \lambda_2 = \frac{1 + iA}{1 - iA} \quad (\text{Onde progressive})$$

$$* \lambda_3 = \frac{1 - iA}{1 + iA} \quad (\text{Onde régressive})$$

avec $|g_1| = |g_2| = |g_3| = 1$

$$A^2 = \alpha^2/4 + \beta^2/4 + \beta^2\alpha^2/16$$

$$\alpha^2 = gh_0 \frac{\Delta T^2}{\Delta X} \sin^2 \sigma_1$$

$$\beta^2 = gh_0 \frac{\Delta T^2}{\Delta X} \sin^2 \sigma_2$$

σ_1 et σ_2 , sont les nombres d'onde suivant ox et oy respectivement.

D'où pour une propagation qui se fait suivant la direction de la grille (par exemple ox):(fig.IV.6)

$$\beta = 0 \quad A^2 = \alpha^2/4 \quad A = \alpha/2 = c\text{Sin}(\sigma\Delta X/2) \quad (\text{IV.7})$$

et pour une propagation qui fait un angle de 45° avec l'axe des x , on obtient: (L :longueur d'onde) (fig.IV.6bis)

$$\beta = 0 \quad \sigma_1 = \sigma_2 = 2\pi/L \quad A = c\text{Sin}\sigma_1(2 + c^2\text{Sin}^2\sigma)^{1/2} \quad (\text{IV.8})$$

Quel que soit le nombre d'onde, les célérités des autres ondes sont limitées par ces 2 valeurs extrêmes. En se référant au développement ultérieur, le facteur d'amplification donné par le rapport entre les vitesses numérique et réelle, s'exprime par:

$$\frac{\text{Vitesse Numérique}}{\text{Vitesse réelle}} = \frac{\text{Arctg}(2A/(1-A^2))}{c^2\pi\Delta X/L} \quad (\text{IV.9})$$

L'étude des équations générales intégrées sur la profondeur dans leur forme complète est compliquée en raison des difficultés qui entourent la détermination des valeurs propres de l'équation caractéristique. Certaines méthodes permettent de déterminer les valeurs des pas spatio-temporels pour chaque variable des équations (Coefficient de frottement, viscosité, profondeur, Coriolis). Ces approches empiriques sont généralement peu recommandées dans des milieux à géométrie complexe, comme c'est le cas de l'estuaire de la Casamance; certaines conditions géométriques imposent des restrictions supplémentaires dans le choix des pas de discrétisations. C'est pour cela que l'étude, évoquée précédemment et effectuée sur des équations simplifiées, ne constitue qu'un guide préliminaire des bonnes caractéristiques de propagation des schémas utilisés.

|G|

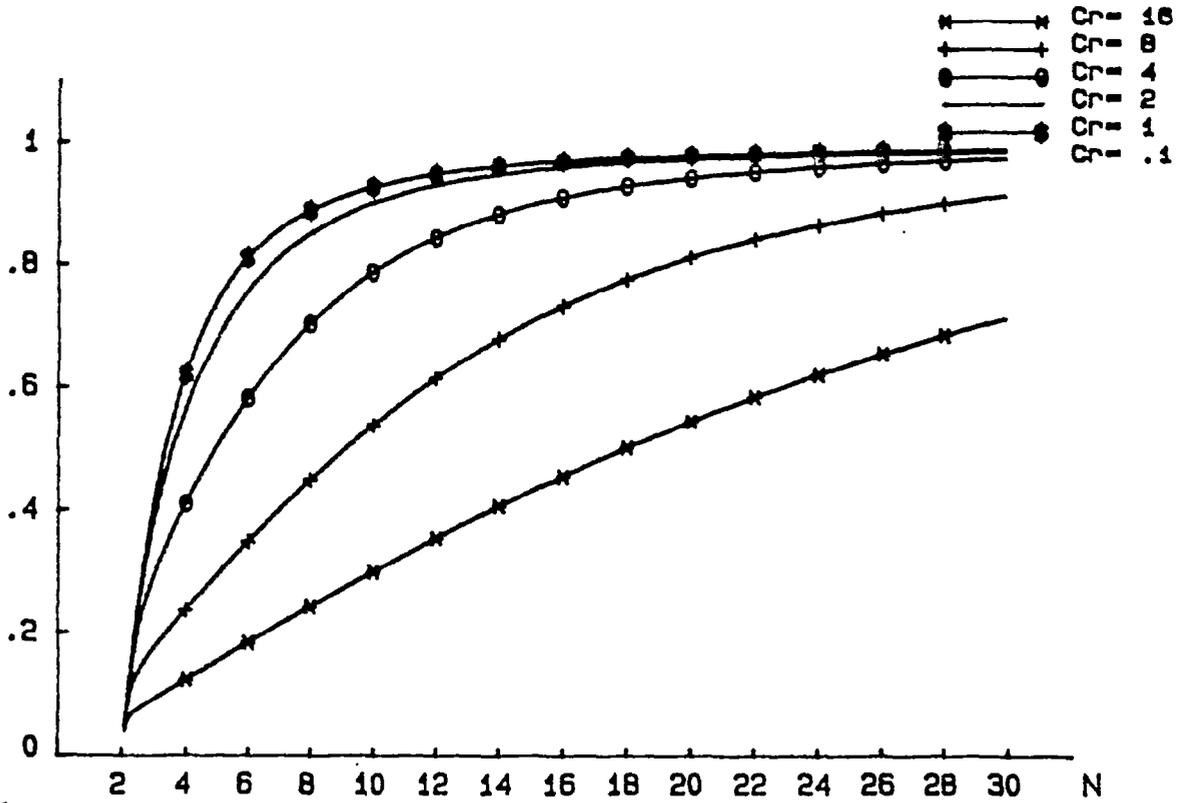


fig.IV.6

Erreur de phase en fonction du nombre de courant (C_r) et du nombre de points de calcul par longueur d'onde (N)

0°

U_n/U

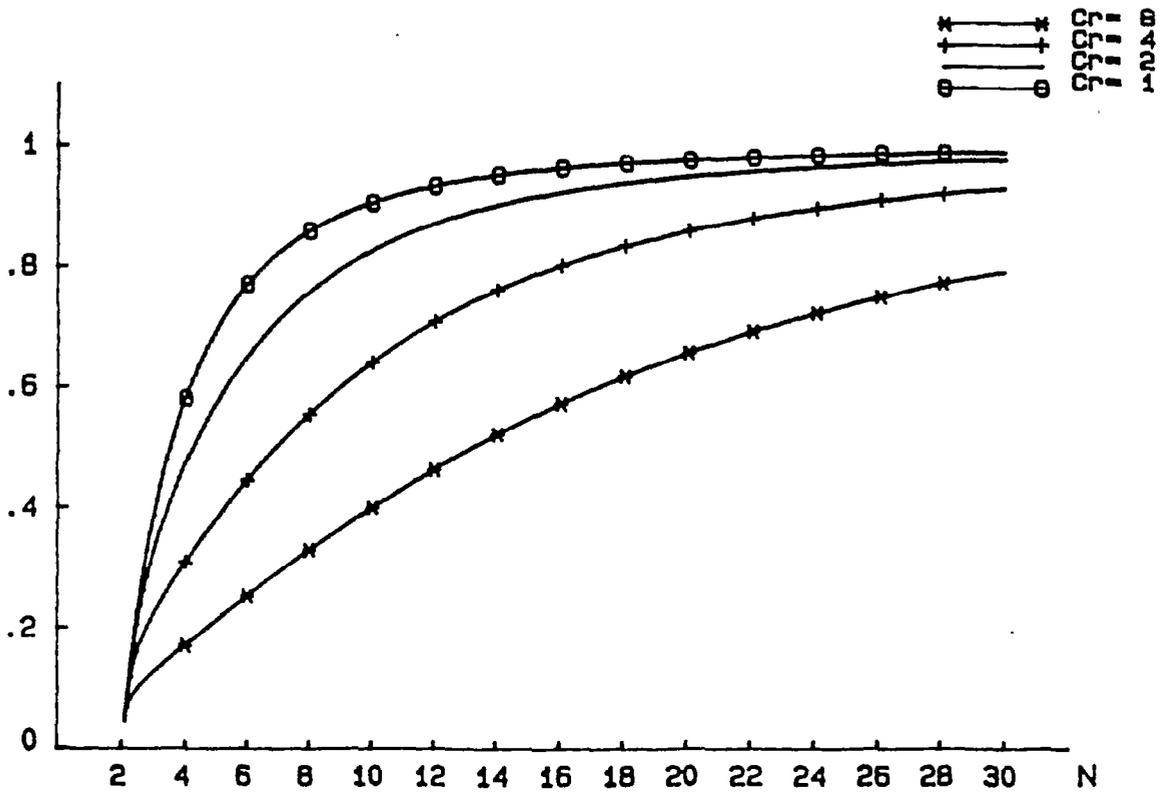


fig.IV.6bis

Erreur de phase en fonction du nombre de courant (C_r) et du nombre de points de calcul par longueur d'onde (N)

45°

Par conséquent, les critiques vis à vis des approches reposant sur le traitement des équations du mouvement par une méthode semi-implicite, résolue suivant la technique de la direction alternée, n'est justifiable que si le milieu naturel permet l'utilisation de valeurs élevées du nombre de courant; généralement, dans les milieux estuariens et spécialement ceux rencontrés tout le long de la cote Ouest Africaine, les restrictions géométriques rendent ce critère peu significatif.

En première approximation la règle de positivité des coefficients (Godunov et al., 1964, Patankar, 1980), permet d'obtenir un guide pratique. Cette règle appliquée aux systèmes 2 et 3 conduit à la condition suivante:

$$\frac{\nu \Delta T}{2\Delta X^2} + \frac{U \Delta T}{2\Delta X} \leq 1 \quad (\text{IV.10})$$

Les tableaux suivants renferment les valeurs de ΔT pour différentes valeurs de ΔX , ν et U :

$\Delta X=200$

U \ ν	0	10	50	100	200	400	1000	2000
0.0	----	4000	800	400	200	100	40	20
0.1	2000	1333	571	333	181	95	39	20
0.2	1000	800	444	285	166	90	38	20
0.3	667	571	363	250	153	87	37	19
0.4	500	444	307	222	142	83	37	19
0.5	400	363	266	200	133	80	36	19
0.6	333	307	235	181	125	76	35	19
0.7	285	266	210	167	118	74	35	19
0.8	250	235	190	153	111	71	34	18
0.9	222	210	173	142	105	69	34	18
1.0	200	190	160	133	100	66	33	18

Tableau IV.1-Variation de ΔT en fonction de ν et U pour $\Delta X=200m$

$\Delta X=300$

U \ ν	0	10	50	100	200	400	1000	2000
0.0	----	9000	1800	900	450	250	90	45
0.1	3000	2250	1125	692	391	209	87	44
0.2	1500	1285	818	562	346	195	84	43
0.3	1000	900	642	473	310	183	82	43
0.4	750	692	529	409	281	173	80	42
0.5	600	562	450	360	257	163	78	41
0.6	500	573	391	321	236	155	76	41
0.7	428	409	346	290	219	147	74	40
0.8	375	360	310	264	204	140	72	40
0.9	333	321	281	243	191	134	70	39
1.0	300	290	257	225	180	128	69	39

Tableau IV.2-Variation de ΔT en fonction de ν et U pour $\Delta X=300m$ $\Delta X=400$

U \ ν	0	10	50	100	200	400	1000	2000
0.0	----	16000	3200	1600	800	400	160	80
0.1	4000	3200	1777	1142	666	363	153	78
0.2	2000	1777	1230	888	571	333	148	76
0.3	1333	1230	941	727	500	307	142	75
0.4	1000	941	761	615	444	285	137	74
0.5	800	761	740	533	400	266	133	72
0.6	666	640	551	470	363	250	129	71
0.7	571	551	484	421	333	235	125	70
0.8	500	484	432	381	307	222	121	69
0.9	444	432	390	347	285	210	117	67
1.0	400	390	355	320	266	200	114	66

Tableau IV.3-Variation de ΔT en fonction de ν et U pour $\Delta X=400m$

Tableau IV.4-Variation de ΔT en fonction de v et U pour $\Delta X=500m$

$U \backslash v$	0	10	50	100	200	400	1000	2000
0.0	-----	25000	5000	2500	1250	625	250	125
0.1	5000	4166	2500	1666	1000	555	238	122
0.2	2500	2272	1666	1250	833	500	227	119
0.3	1666	1562	1250	1000	714	454	217	116
0.4	1250	1190	1000	833	625	416	208	113
0.5	1000	961	833	714	555	384	200	111
0.6	833	806	714	625	500	357	192	108
0.7	714	694	625	555	454	333	185	106
0.8	625	609	555	500	416	312	178	104
0.9	555	543	500	454	384	294	172	102
1.0	500	490	454	416	357	277	166	100

Les premières contraintes dans l'application du modèle de simulation, sont les possibilités offertes par le support informatique utilisé. La programmation avait débuté sur le mini ordinateur Domain Apollo DN3000, qui travaille suivant le système d'exploitation AEGIS. Un pas de stockage de 500 mètres a été choisi vu les possibilités de stockage sur le disque dur de 70 Mégaoctets. Par la suite les modèles ont été implantés sur l'ordinateur SUN-MATRA du centre ORSTOM (Montpellier), travaillant sous le système d'exploitation UNIX et permettant un stockage d'informations sur disque de capacité 1 Gigaoctets.

Outre les possibilités de stockage d'une grande quantité d'information, cette machine nous a permis de réaliser de fréquents tests permettant, d'une part, d'étudier les réactions du milieu vis à vis de certains aménagement hydrauliques (barrages, dragage ...) et d'autre part, d'étudier la sensibilité du modèle pour divers types de discrétisation et pour différentes valeurs des paramètres de l'écoulement.

Les simulations étant effectuées sur un mini ordinateur, bien qu'il soit un des plus performant dans sa gamme, la rapidité du calcul reste inférieure aux possibilités offertes par les gros centres de calcul. Il s'ensuit que la recherche de l'optimisation des programmes est une nécessité, afin d'arriver à réaliser plusieurs objectifs en même temps.

Malgré les inconvénients d'un pas spatial de 500 m, ce choix a été utilisé d'une part, pour tester la sensibilité du modèle à la variation de certains paramètres de l'écoulement et, d'autre part afin d'évaluer la contribution de chaque terme des équations dans la circulation. Par la suite le pas spatial a été successivement réduit à 400, 250 et 200 mètres.

Une des premières vérifications est de suivre l'évolution du courant au fur et à mesure de l'avancement du calcul. Dans le cas d'une variation trop brutale, la schématisation locale de la section en travers a été revue; ceci étant en accord avec le comportement réel du milieu.

Par contre le choix du pas temporel est plus délicat. L'estuaire de la Casamance étant caractérisé par une faible profondeur sur une grande partie de son lit principal, la répartition des élévations en ces zones est plus sensible aux variations du pas de temps. A cette contrainte s'ajoute celle due à la topographie du milieu, dont la variation de la section d'écoulement, surtout dans les zones inondables, est calculée explicitement. Le pas de temps à choisir doit en conséquence, tenir compte des conditions naturelles de l'écoulement. Le domaine d'influence d'un point doit englober le domaine de dépendance du point recherché durant le pas de temps choisi, sinon, le calcul numérique de la propagation s'écartera progressivement de la description du phénomène physique réel et conduit à de fausses convergences.

L'amplitude de l'onde augmente quand le pas de temps augmente et la propagation subit un léger déphasage. Ce résultat est prévisible à partir de l'analyse du facteur de propagation présenté ultérieurement. Le pas de temps a été fixé à 60 s. Le stockage des résultats a commencé à la fin du troisième jours de simulation.

Les figures qui suivent montrent une reproduction satisfaisante de la composante semi-diurne de la marée observée aux stations de contrôle de l'estuaire.

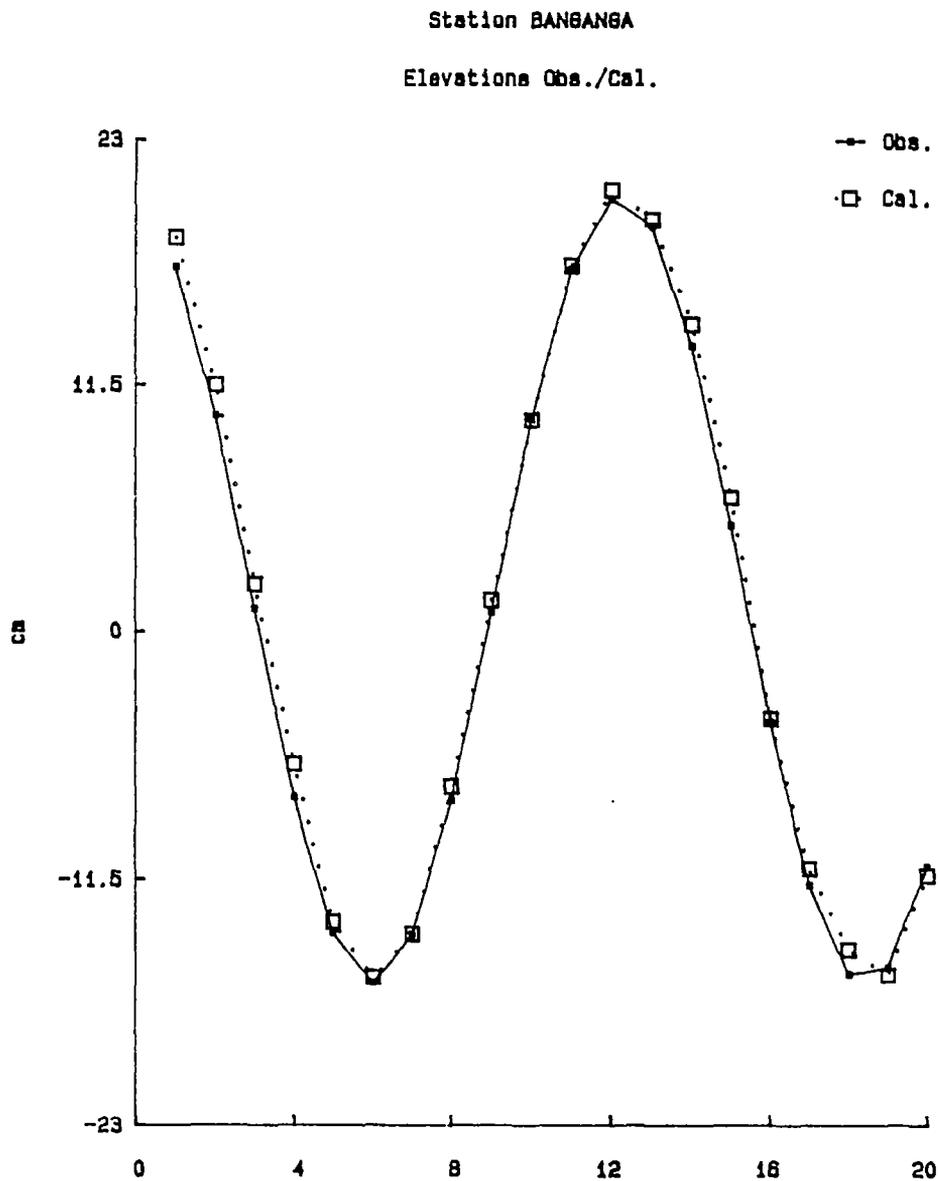


fig.IV.7-Elévations observées et calculées à la station de Banganga.

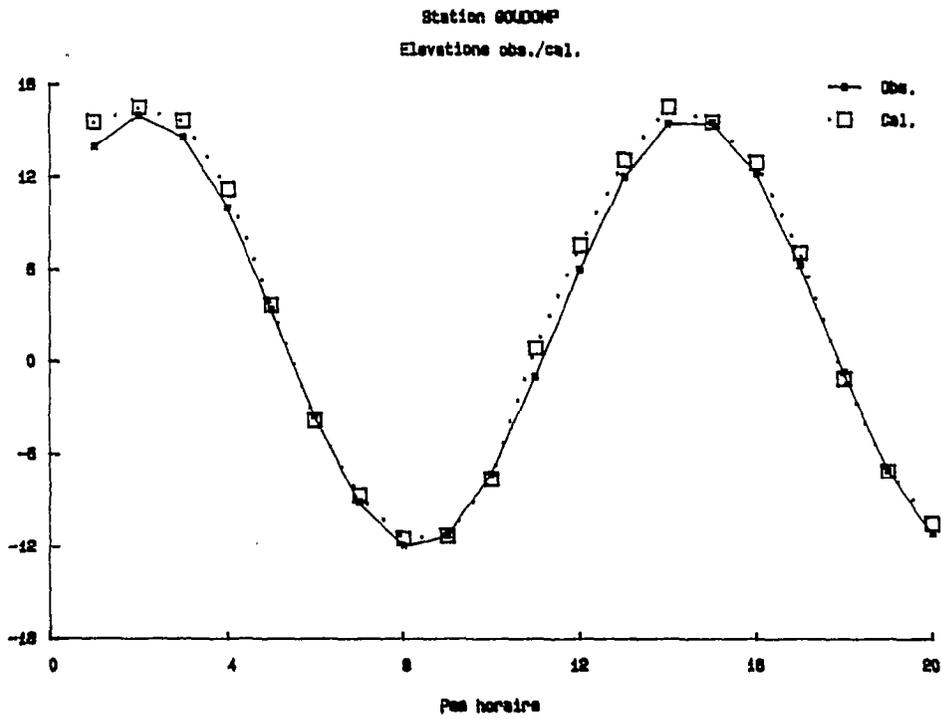


fig.IV.8-Elévations observées et calculées à la station de Goudomp.

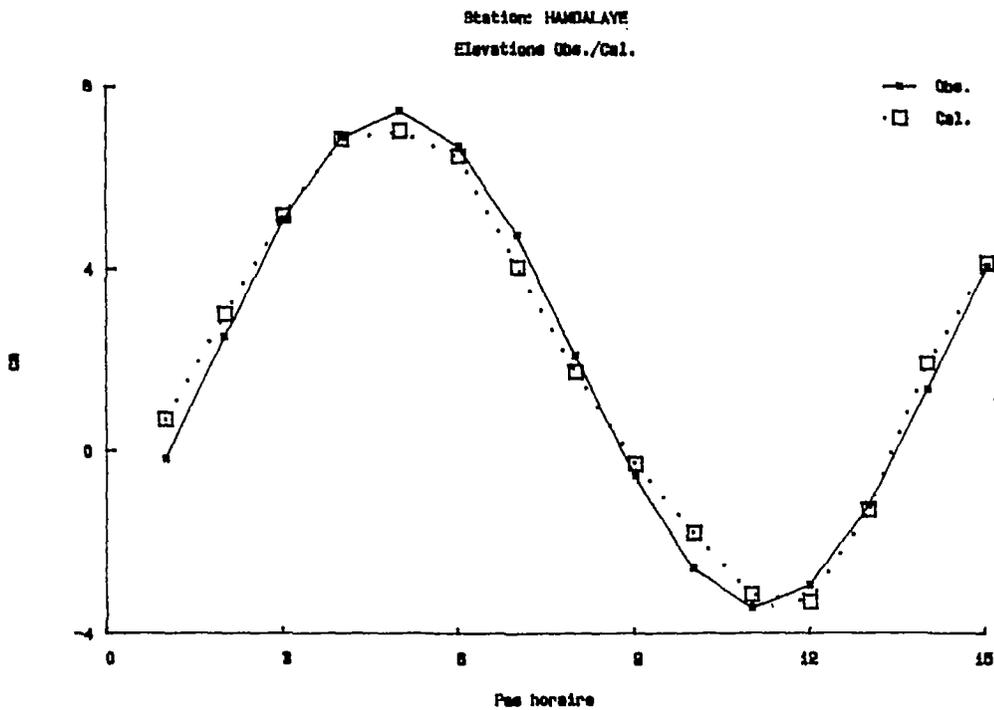


fig.IV.9-Elévations observées et calculées à la station d'Hamdalaye.

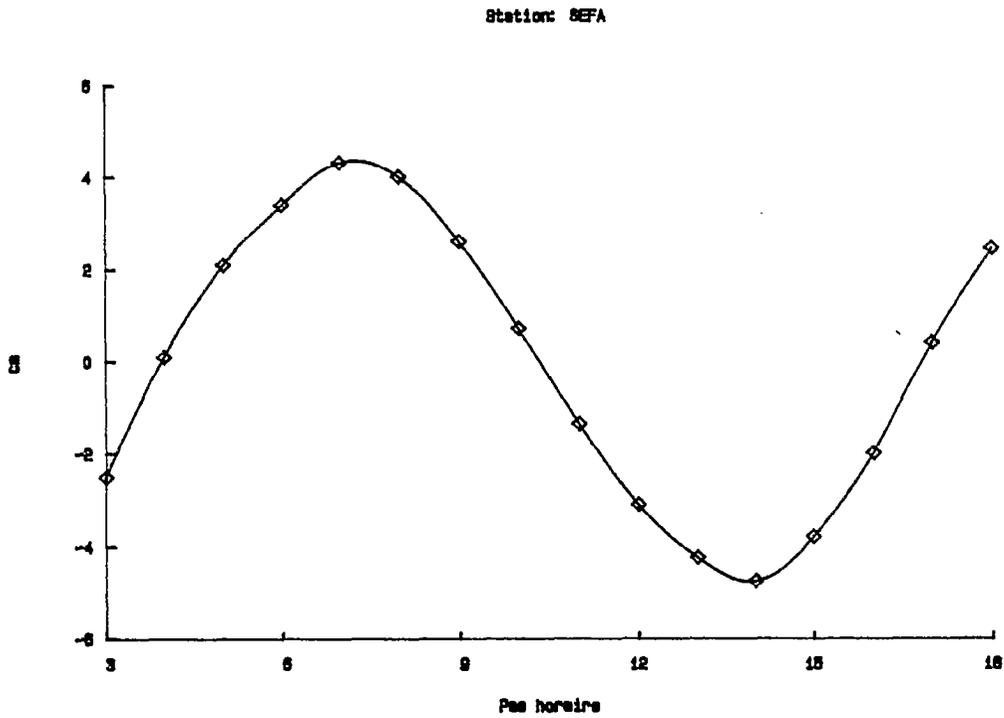


fig.IV.10-Elévations calculées à la station de Séfa.

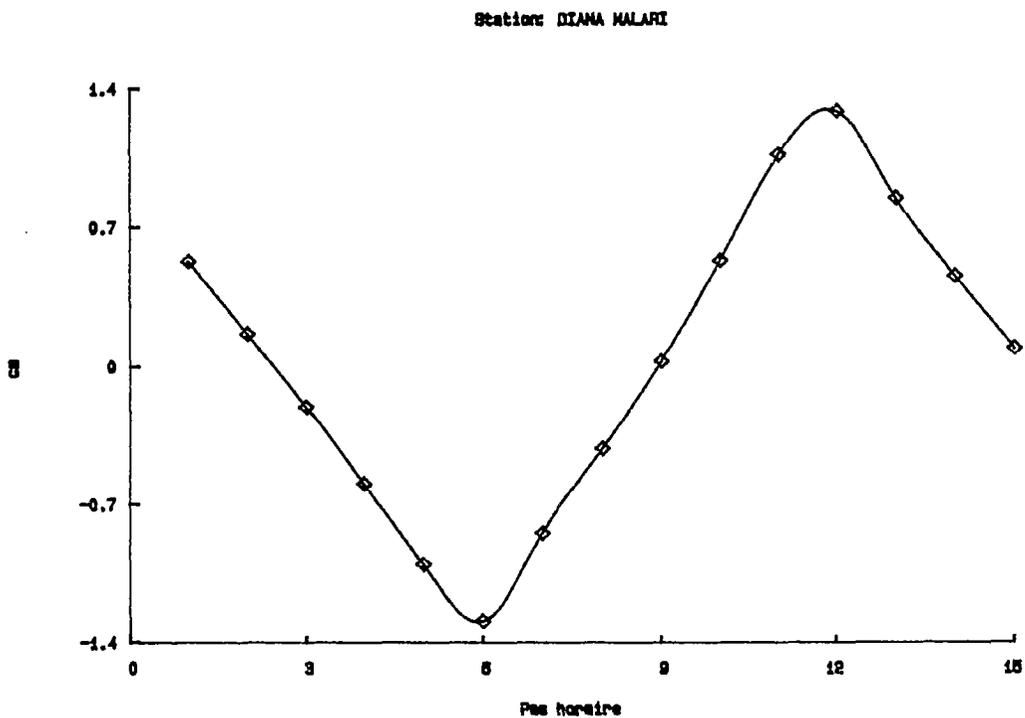


fig.IV.11-Elévations calculées à la station de Diana Malari

On remarque qu'au fur et à mesure que l'on remonte l'estuaire, une légère dégradation des résultats se manifeste; ceci est dû au fait que l'outil utilisé découle d'un certain nombre d'hypothèses et de simplifications et repose sur une schématisation approximative du domaine. On ne pouvait pas s'attendre à une reproduction exacte de la réalité.

On n'a pas tenté de forcer le modèle à donner une superposition parfaite des courbes observées et calculées, car la composante étudiée est certes la plus importante dans le train d'ondes qui constituent la marée dans le milieu, mais elle ne représente que le phénomène dominant. D'autre part, les essais présentés auparavant montrent que les perturbations météorologiques peuvent jouer un rôle important à partir d'Hamdalaye et sur toute la partie haute de l'estuaire. Cette région possède un marnage trop faible rendant les résultats trop sensibles à la schématisation et à la précision des techniques de discrétisation susceptibles d'être utilisées.

fig.IV.12-Courant transitoire induit par la marée.

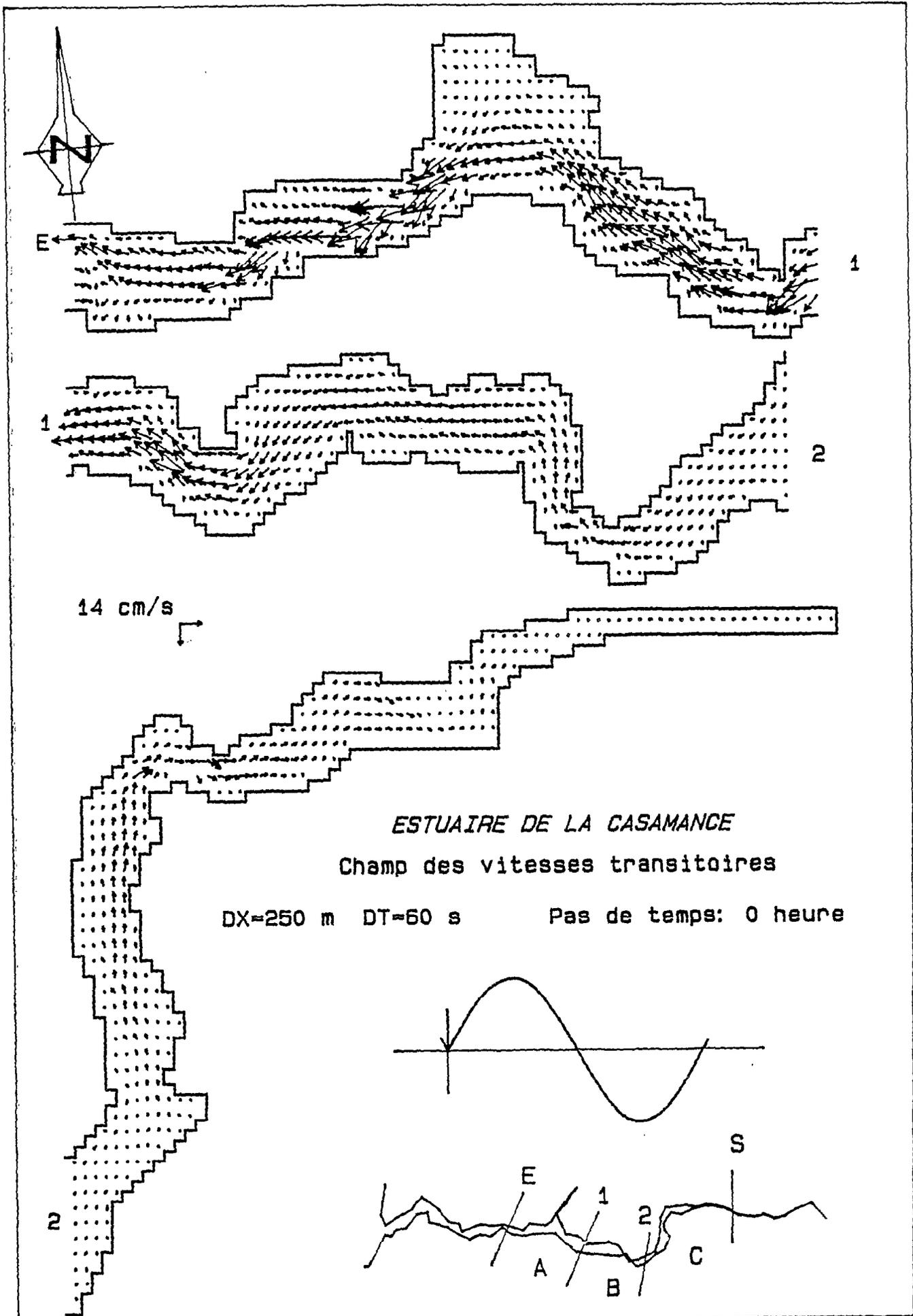


fig.IV.13-Courant transitoire induit par la marée.

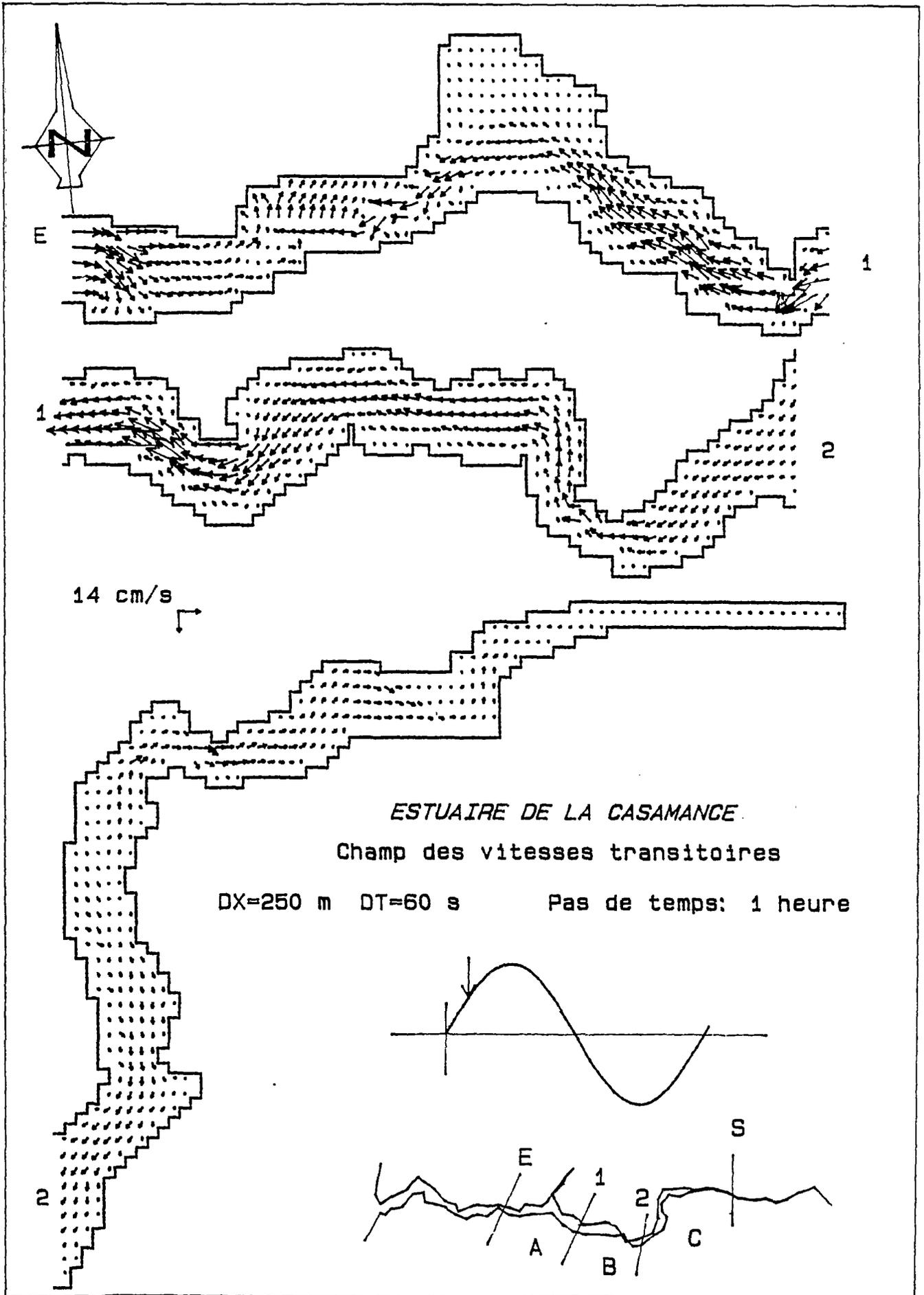


fig.IV.14-Courant transitoire induit par la marée.

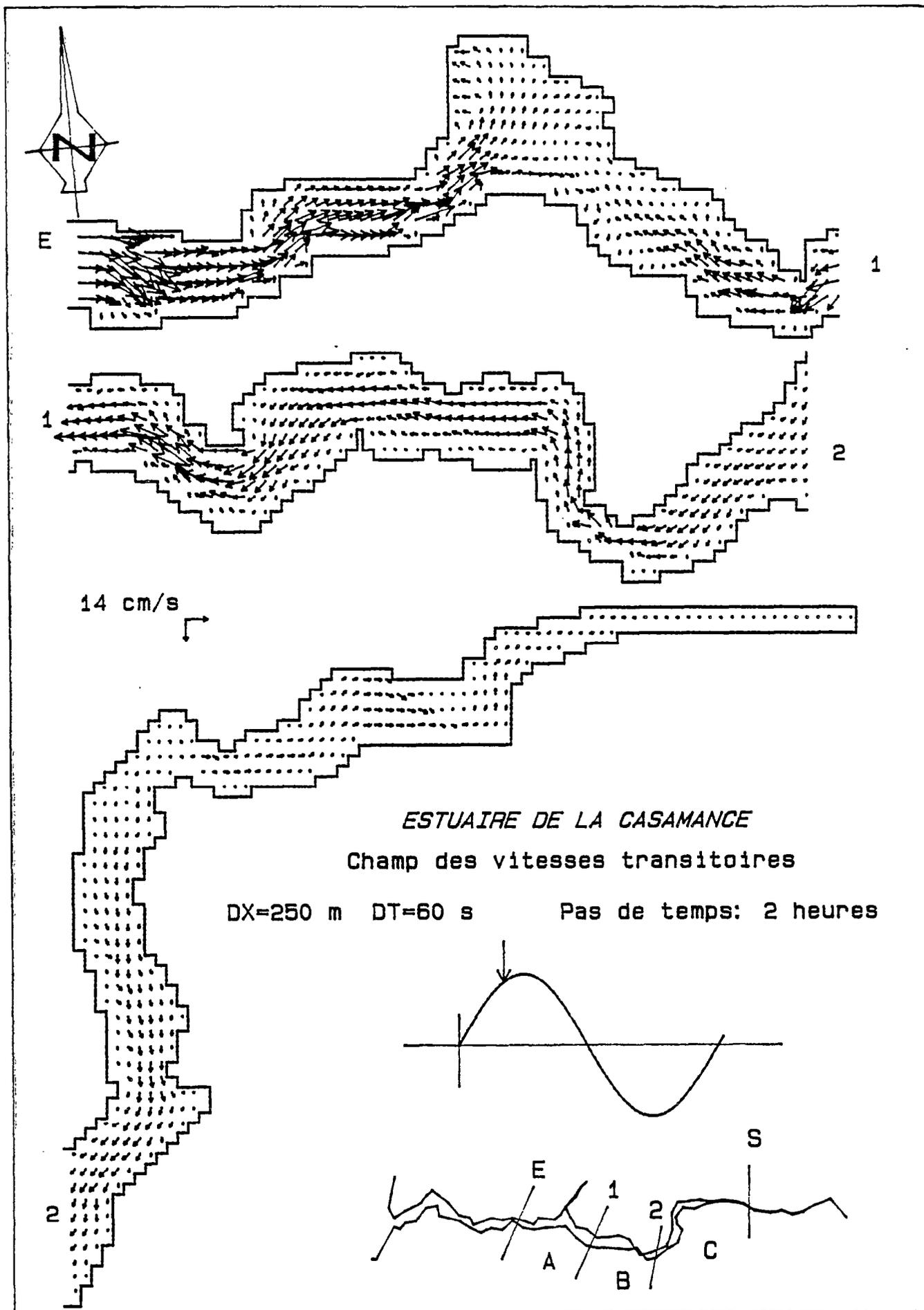


fig.IV.15-Courant transitoire induit par la marée.

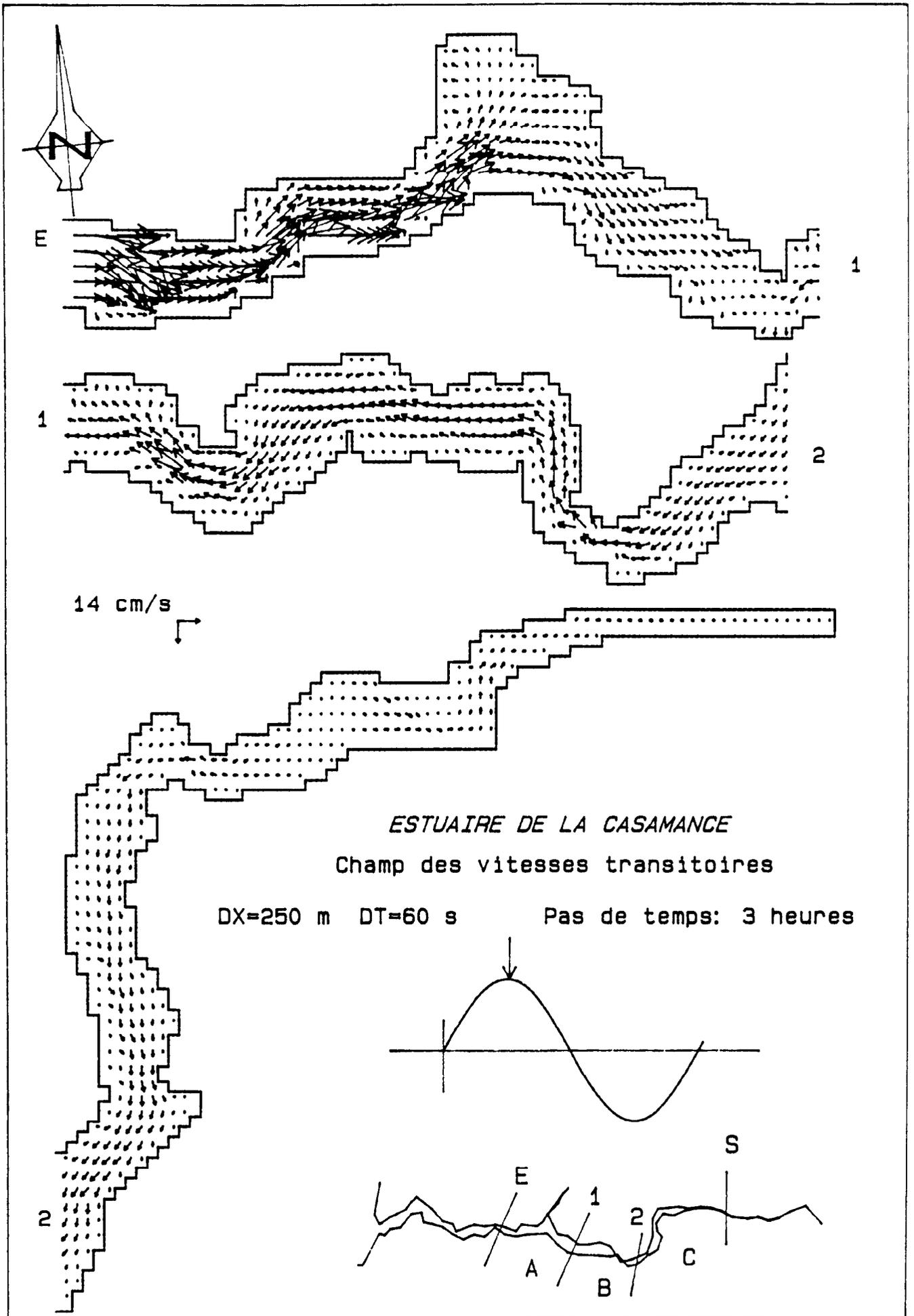


fig.IV.16-Courant transitoire induit par la marée.

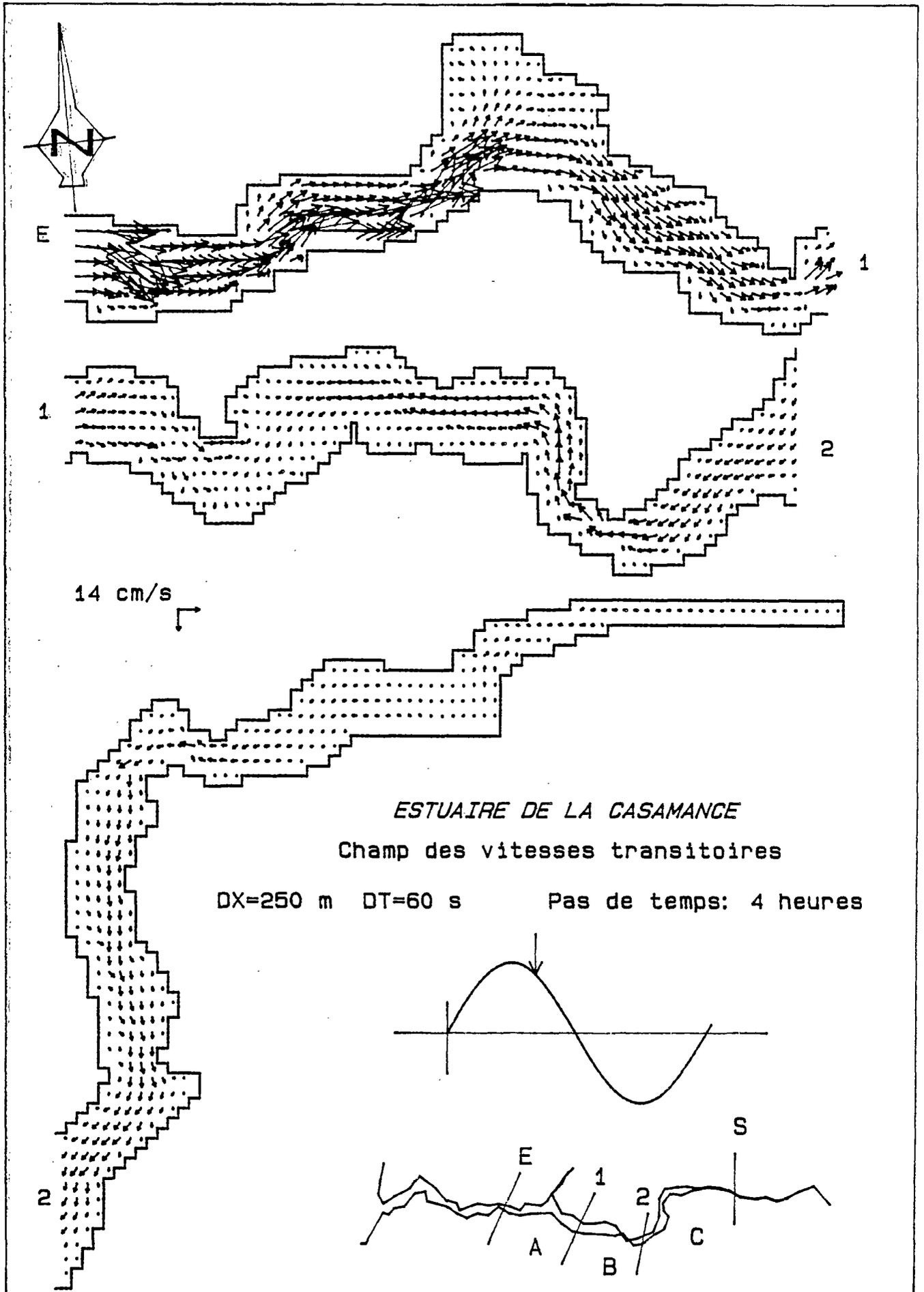


fig.IV.17-Courant transitoire induit par la marée.

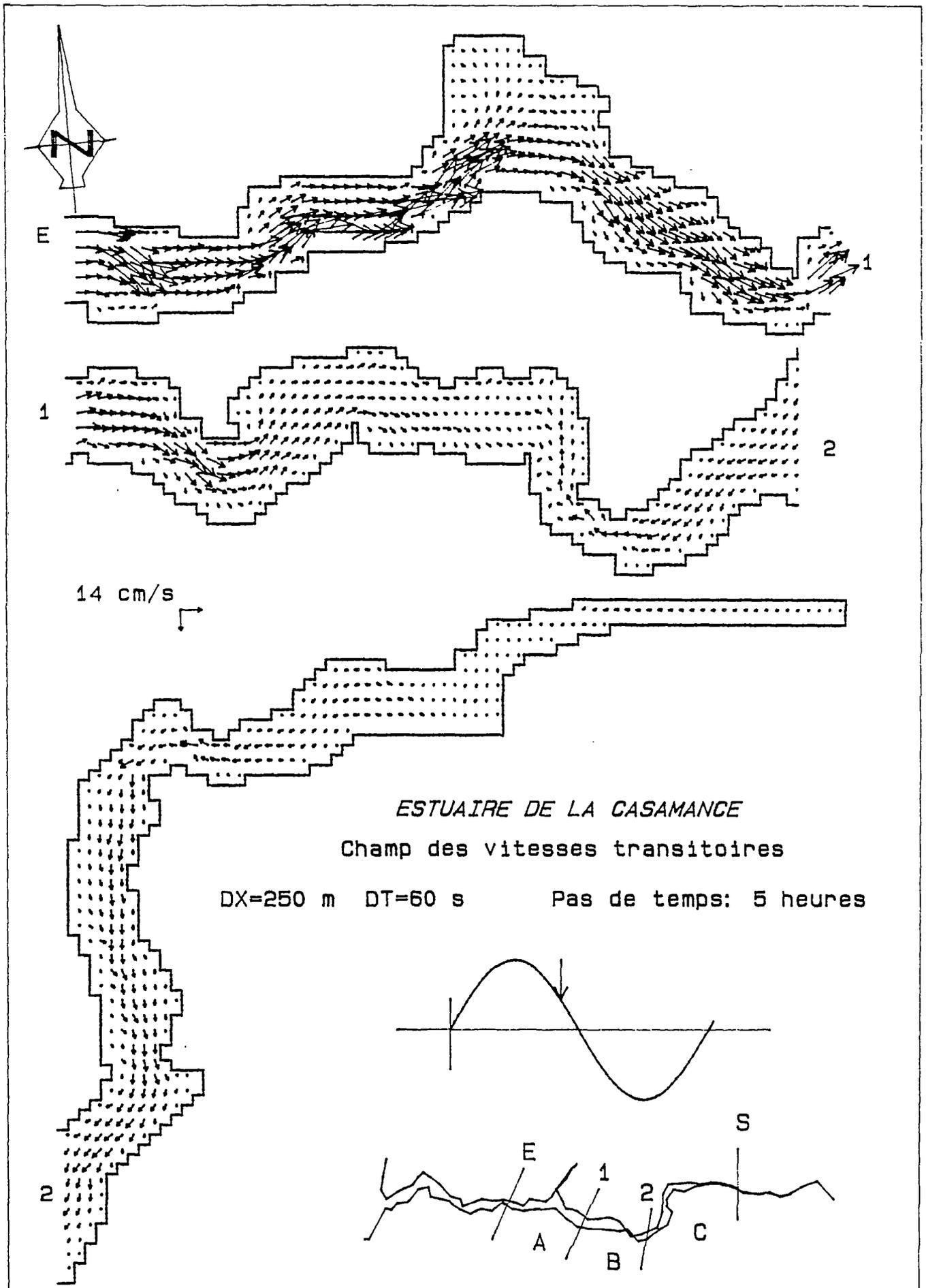


fig.IV.18-Courant tansitoire induit par la marée.

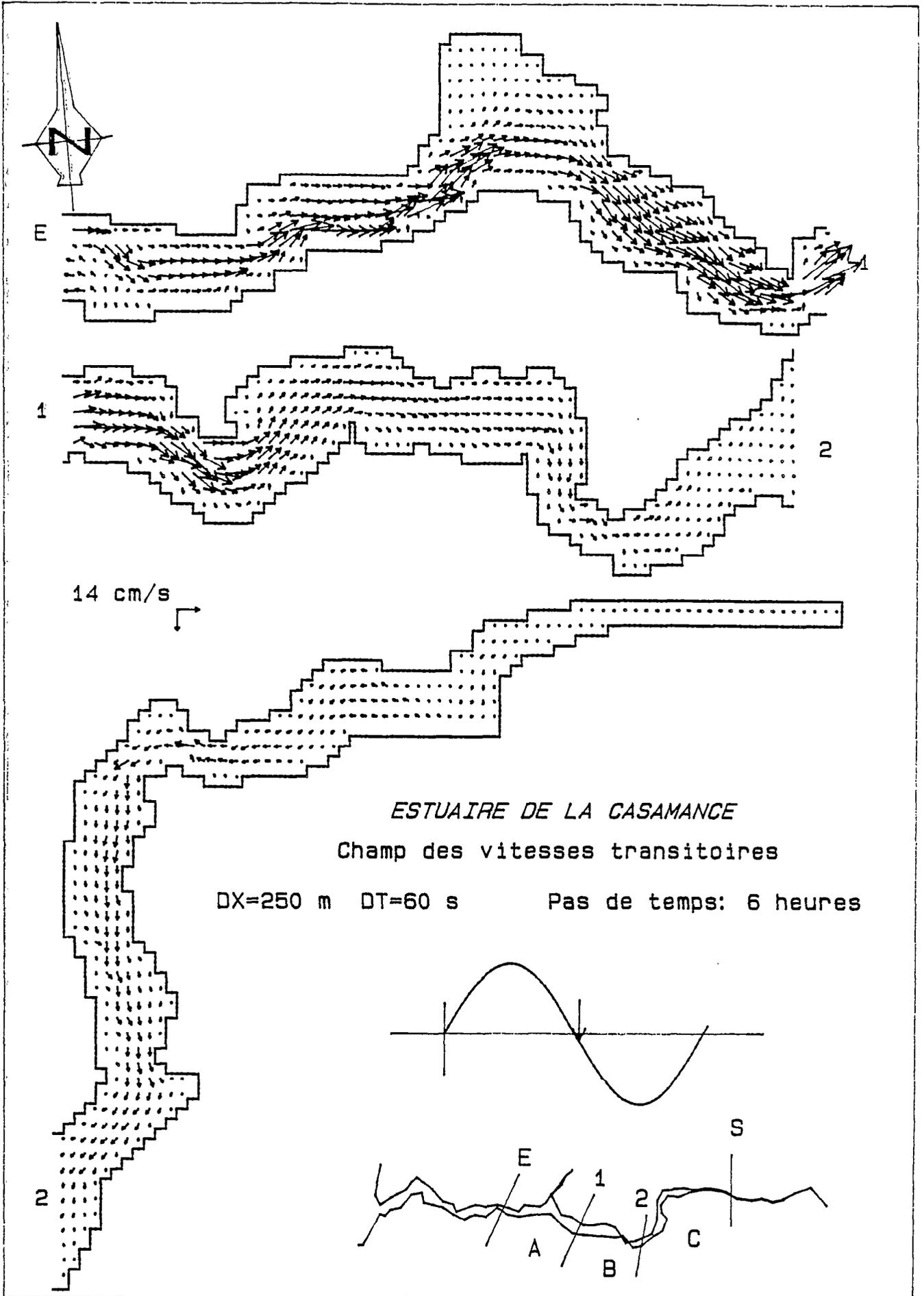


fig.IV.19-Courant transitoire induit par la marée.

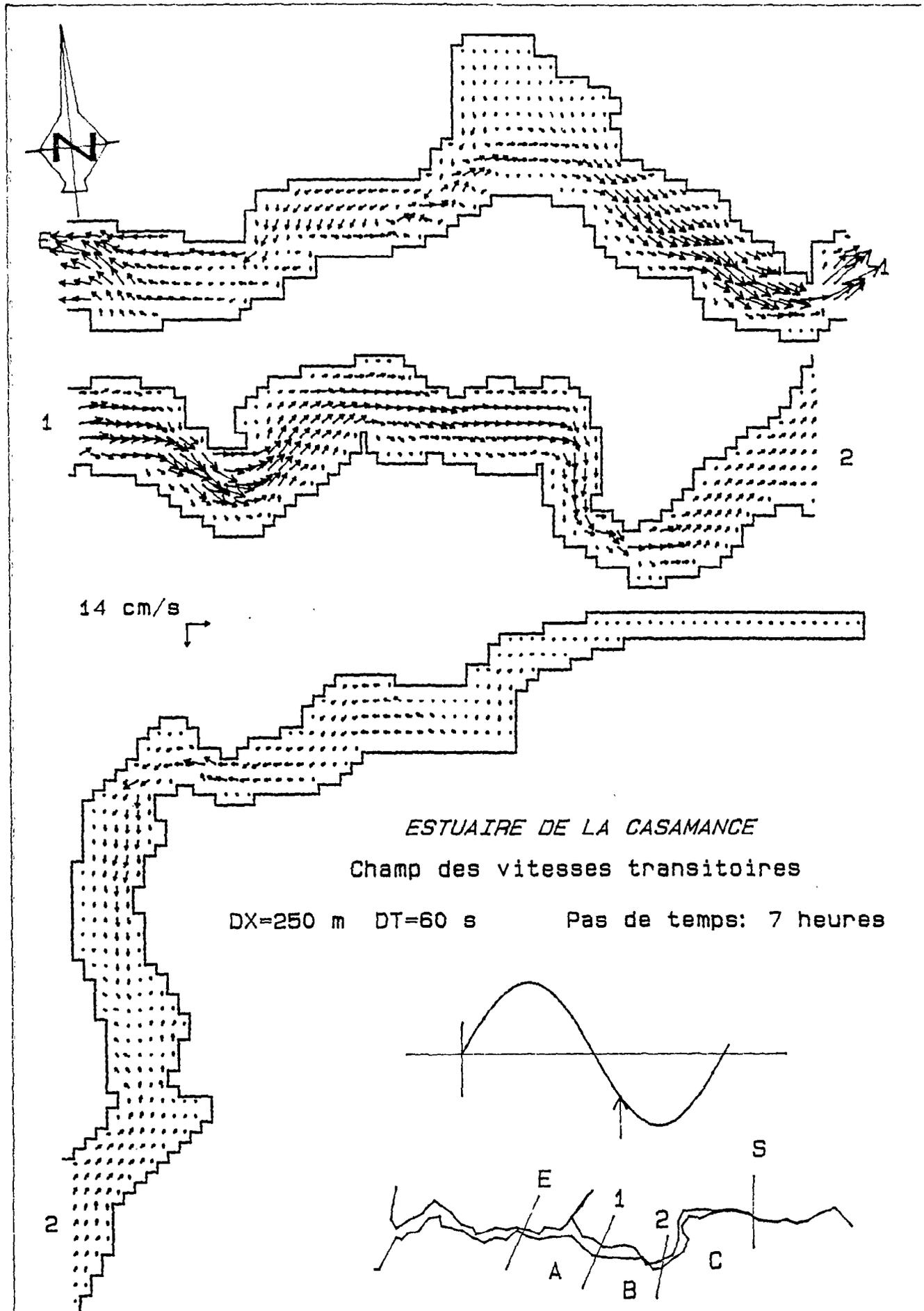


fig.IV.20-Courant transitoire induit par la marée.

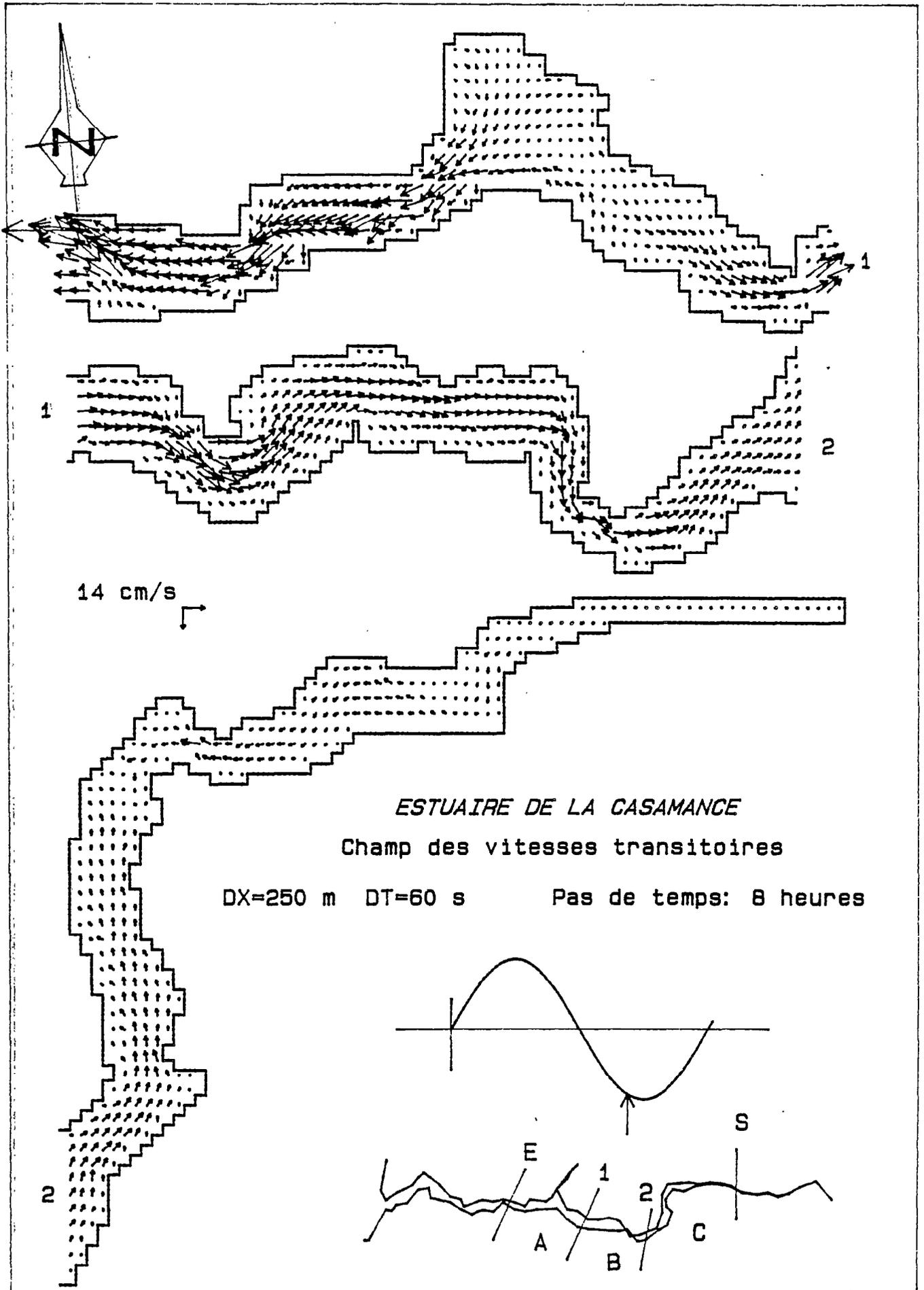


fig.IV.21-Courant transitoire induit par la marée.

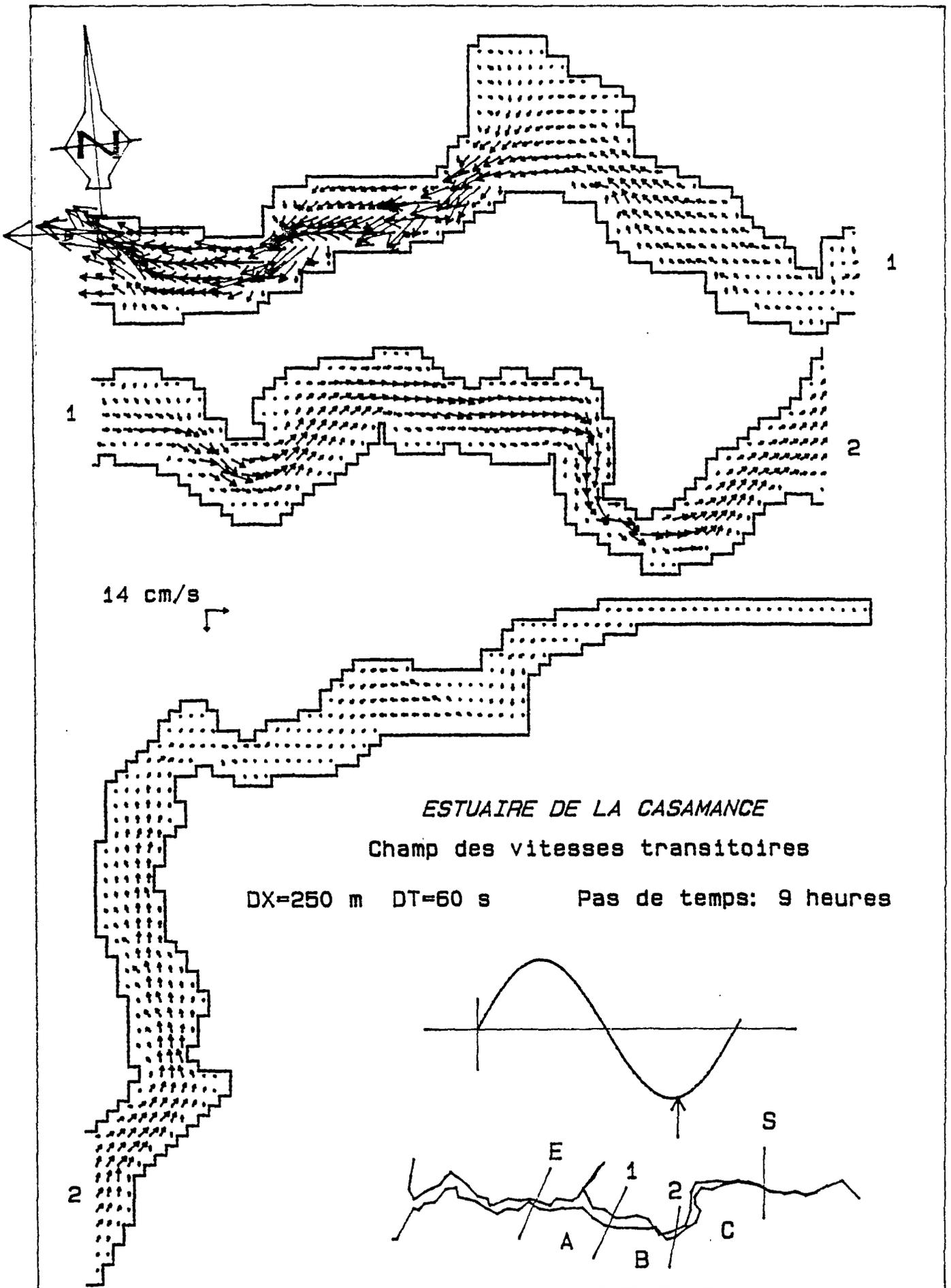


fig.-IV.22-Courant transitoire induit par la marée.

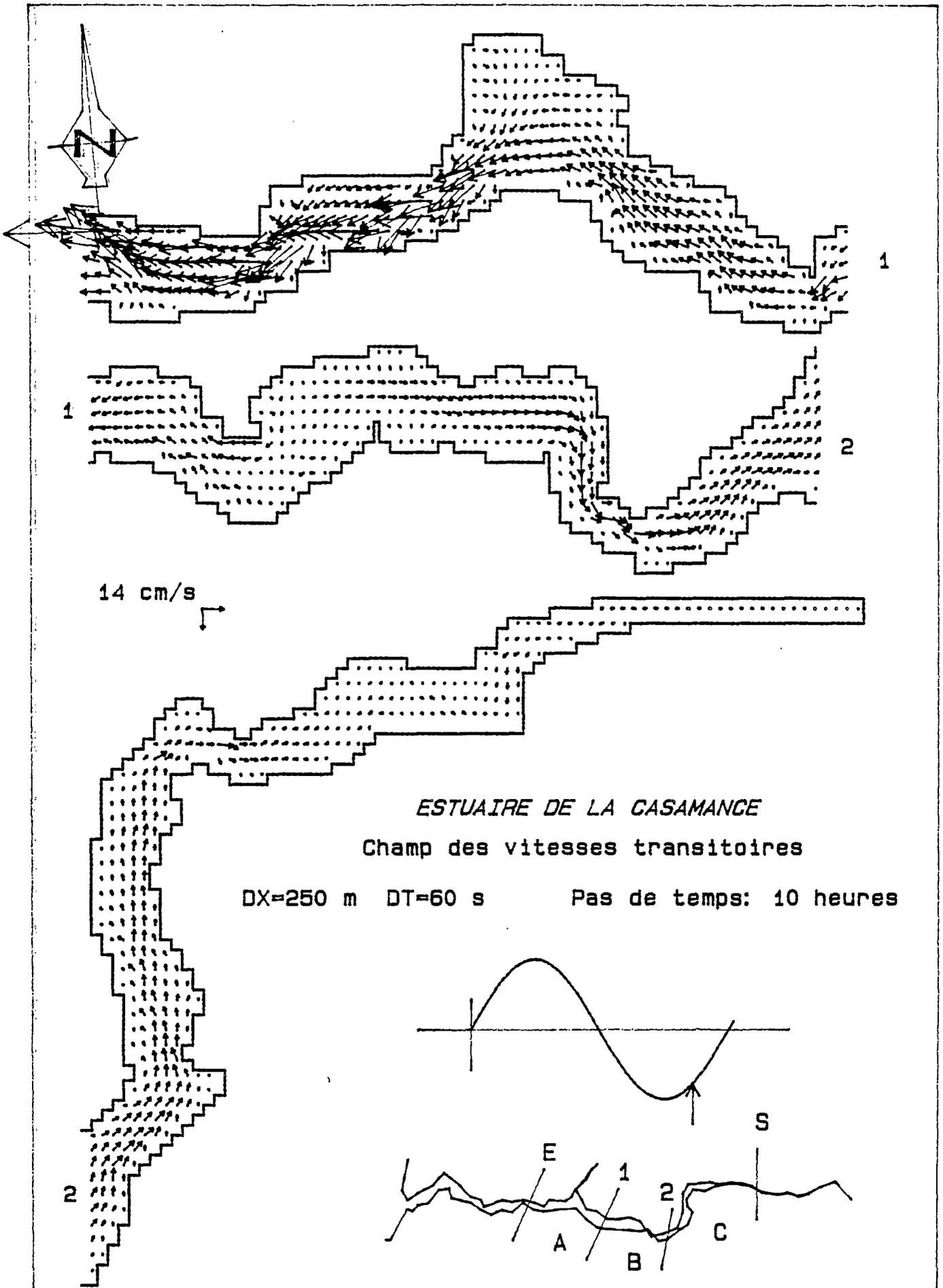
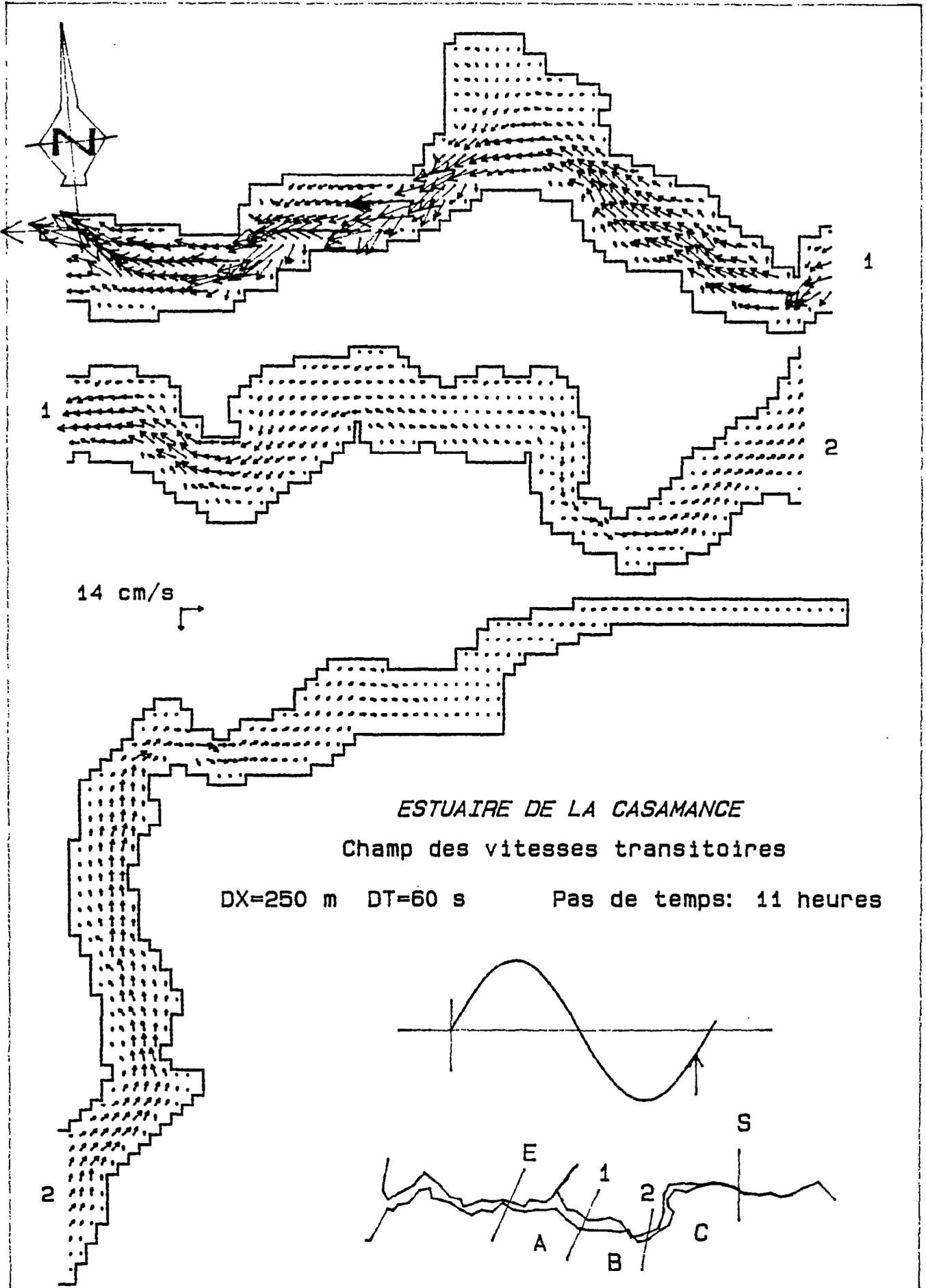


fig.IV.23-Courant transitoire induit par la marée.



IV.7 Rôle de la force de Coriolis

La théorie des ondes progressives se propageant dans un canal de section uniforme et en l'absence de frottement a été présentée pour la première fois par Kelvin (1879). Ces ondes sont de type:

$$U = U_0 \exp(\alpha + i\beta)$$

avec, $\xi = \xi_0 \exp(\alpha + i\beta)$

$$\alpha = -2\Omega_y / (gh)^{1/2}$$

$$\beta = \omega t - K_x$$

c: Célérité = $(gh)^{1/2}$

Quand on néglige l'influence de la rotation sur les mouvements verticaux la solution est valable pour n'importe quelle latitude sur une sphère tournante. Du fait de la rotation de la terre et de l'existence de la force de Coriolis, la différence d'amplitude entre les deux rives d'un canal est donnée par:

$$\xi(\text{droite}) - \xi(\text{gauche}) = \xi_0 (1 - \exp(-2l\Omega \sin\psi / (gh)^{1/2}))$$

$2\Omega \sin\psi$: force de Coriolis

l : largeur du chenal

$$\xi(\text{droite}) - \xi(\text{gauche}) = \xi_0 (1 - \exp(-fl/c)) \quad (\text{IV.11})$$

Dans le cas de l'estuaire de la Casamance, on aura:

$$c_{\text{moy}} = (gh_{\text{moy}})^{1/2} \approx 5.5$$

$$l_{\text{moy}} \approx 1000 \text{ m}$$

$$f \approx 10^{-5}$$

$$1 - \exp(-fl/c) = 1 - 0.998 = 2 \text{ mm} \quad (\text{IV.12})$$

Bien que ce terme ait été conservé dans le modèle, on remarque que sa contribution dans le mouvement des masses fluides dans l'estuaire de la Casamance est très faible.

Cependant il est à noter qu'il est très difficile d'évaluer son importance à partir des études théoriques, car dans les milieux naturels les résultats sont influencés par l'influence de la bathymétrie, la faible profondeur près des rives, l'importance du marnage, les irrégularités locales dans les sections transversales, la courbure du chenal et bien d'autres facteurs. Généralement, une comparaison des résultats obtenus en négligeant le terme de Coriolis et en le conservant dans les équations, permet d'évaluer sa contribution dans le mouvement. Dans l'estuaire de la Casamance peu de changements ont été observés.

IV.8 Rôle de la viscosité

Le mouvement des fluides réels est caractérisé par la présence de tourbillons de diverses tailles qui échangent leur énergie. Ces tourbillons entraînent l'apparition de vitesses différentes de la vitesse moyenne, d'une quantité dont la valeur moyenne est nulle.

Boussinesq (1884), se basant sur la loi de Newton, introduit un nouveau coefficient qu'il a appelé "facteur de turbulence" ν ou coefficient de viscosité virtuelle (eddy viscosity), dont la valeur est beaucoup plus importante que celle du coefficient de viscosité moléculaire:

$$F = \nu \frac{\partial U}{\partial z} \quad (\text{IV.13}).$$

Reynold's (1894), a montré que l'effet des fluctuations de la composante turbulente de la vitesse est de créer des tensions. Cet accroissement de tension résulte de l'effort tangentiel des particules animées de mouvements transversaux aléatoires.

Ces cisaillements entre les couches fluides conduisent à des échanges qui ne se limitent pas aux transferts de quantité de mouvement, mais aussi à toutes les autres propriétés fluides. Sur la verticale, les échanges sont freinés par la pesanteur et par conséquent très limités; par contre dans le sens horizontal ils sont très importants. Cette dissymétrie entre les échanges horizontaux et verticaux aura des conséquences essentielles sur les phénomènes dispersifs qui se déroulent dans le milieu.

Après les importantes déductions de Reynold's, la théorie des fluctuations turbulentes et leurs effets sur les fluides, fut par la suite développée par Richardson (1926), Von Karman (1930), Taylor (1931) et Prandtl (1925-1942). Ce dernier, après décomposition de la vitesse en deux grandeurs (moyenne et fluctuante turbulente), a démontré qu'une particule fluide qui quitte sa position d'origine (x,y,z) avec une vitesse $U(x,y,z)$ se déplacera d'une quantité $l(x,y,z)$, dite "longueur de mélange" et sera animée à la fin de son parcours d'une vitesse $U(x+l_x,y+l_y,z+l_z)$. La différence entre la vitesse d'origine et celle de la fin de parcours, est égale à la somme des trois composantes de la vitesse fluctuante u'_x, u'_y, u'_z . Il s'ensuit que les coefficients de viscosité sont proportionnels à la vitesse moyenne de cisaillement, au carré de la longueur de mélange et à la densité.

La détermination des valeurs numériques de la viscosité turbulente demande la connaissance des forces de frottement et du gradient des vitesses. Vu la difficulté qui entoure la détermination des forces de frottement, les mesures des tensions de Reynold's offrent la possibilité d'obtenir les coefficients de viscosité turbulente. Mais la complexité persiste parce que ces coefficients dépendent des échelles spatio-temporelles et varient dans l'espace et dans le temps.

Dans le spectre de la turbulence, Kolmogorov (1941) postula que le rôle de la viscosité turbulente est de dissiper l'énergie cinétique en chaleur par l'action de fortes tensions. Il établit une formulation universelle du spectre de la turbulence qui dépend uniquement de deux fonctions ϵ et γ , ϵ étant le pourcentage de l'énergie cinétique dissipée par unité de masse du u'^2/dt et γ étant la viscosité cinétique. L'énergie est donc distribuée sur diverses échelles du mouvement suivant la loi:

$$E(l) \approx \epsilon^{2/3} l^{5/3} \quad (\text{IV.14})$$

l : longueur caractéristique du mouvement.

Le coefficient de viscosité sera exprimé en fonction des échelles spatio-temporelles par les formules suivantes:

$$\gamma \approx \epsilon^{1/3} l^{4/3} \approx \epsilon \tau^2 \quad (\text{IV.15})$$

Plusieurs auteurs ont essayé de tracer l'évolution du facteur ϵ , dont Ozmidov (1965) et Gibson (1963).

Passage au modèle de simulation.

Le passage du modèle mathématique au modèle de simulation sacrifie certaines finesses du modèle mathématique. Ceci est dû au fait que les relations qui existent entre les échelles spatio-temporelles qui caractérisent les processus physiques des équations différentielles, ne sont pas en accord avec les pas spatio-temporels pratiques adoptés dans les discrétisations du domaine d'intégration.

Ces grandeurs n'étant pas les mêmes, les mouvements relatifs aux petites échelles ne peuvent être décrits en détail. Par exemple, la moyenne sur un pas de temps t , lissera les phénomènes dont la longueur caractéristique est inférieure à $l \approx \epsilon^{1/3} \tau^{3/2}$. Par contre leurs effets cumulatifs sont incorporés aux modèles et interprétés comme des facteurs qui augmenteront les phénomènes dispersifs.

Nihoul (1975) a montré que pour les modèles reposant sur la technique des différences finies, la longueur caractéristique est celle du pas spatial de la grille d'intégration.

Il s'ensuit que, pour conserver le meilleur rapport qualité/prix, le modèle de simulation est forcé à s'écarter des descriptions fines de certains processus physiques, quitte à détériorer la finesse du modèle mathématique avec lequel il reste consistant.

Le caractère numérique de la viscosité turbulente sera prédominant par rapport à son caractère physique. Son utilisation n'est autre qu'un artefact numérique susceptible de réduire l'erreur de troncature. Ce type d'erreur du second ordre est généralement responsable des oscillations spatiales de la surface, dont l'existence réelle ne peut pas être vérifiée par les données expérimentales disponibles. Notamment parce que la vérification de ce phénomène est rendue difficile du fait de la dissipation de l'énergie due à la turbulence induite par la bathymétrie.

En se basant sur la théorie de Kolmogorov et en adoptant les conclusions de Nihoul sur quelques exemples, on remarque que:

Pour $\Delta X = 5$ m et $\Delta T = 300$ s, on obtient $\nu \approx 10^{-1}$

Pour $\Delta X = 5000$ m et $\Delta T = 60$ s, on obtient $\nu \approx 10^2$

Dans le cas de l'estuaire de la Casamance, la partie amont est caractérisé par un marnage assez faible, les oscillations de la surface sont aussi faibles. Pour les simulations avec des pas spatiaux de 500 et 400 mètres, les résultats étaient peu sensibles aux valeurs de la diffusion turbulente; ν a été fixée à $10 \text{ m}^2/\text{s}$. Par contre, les simulations effectuées avec des pas spatiaux de 250 et 200 mètres, nous ont obligés à augmenter la valeur du coefficient de viscosité jusqu'à $150 \text{ m}^2/\text{s}$ afin d'éliminer les oscillations spatiales. Ceci est peut être une conséquence d'une meilleure résolution de la grille spatiale qui augmente la contribution du terme advectif (fig.IV.24).

Le coefficient de viscosité turbulente n'a pas été considéré comme paramètre de calage, car son influence sur la répartition des élévations est très faible. Les divers tests effectués ont montré qu'une augmentation de sa valeur conduit à une légère atténuation des amplitudes.

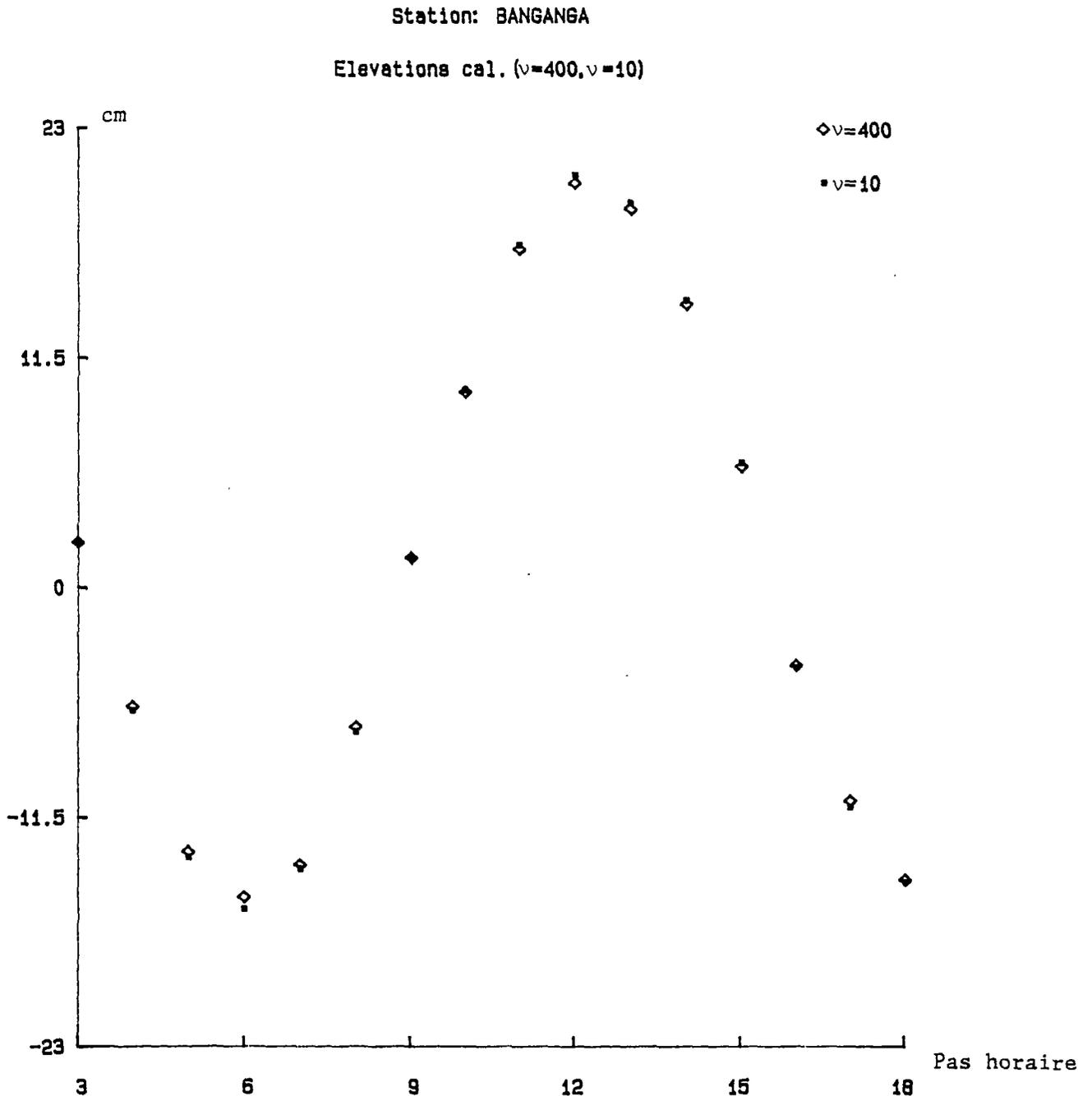


fig.IV.24-Variation temporelle des élévations à la station de Banganga pour différentes valeurs du coefficient de viscosité. ($\nu=400, \nu=10$)

IV.9 Rôle du frottement au fond

La dissipation de l'énergie des ondes due à la viscosité se limite aux ondes capillaires (Newmann, 1966). Dans le cas des ondes longues, l'influence de la viscosité prédomine, d'une part, dans la couche très fine proche de la surface et, d'autre part, dans les zones peu profondes, sur la tranche proche du fond. Sa contribution dans les mécanismes dissipatifs est négligeable par rapport au frottement au fond.

Dans un écoulement où la densité du fluide peut être considérée constante et en l'absence de frottement, le courant serait indépendant des profondeurs. Il s'ensuit que l'effet des frottements au fond est de dissiper l'énergie du système et de permettre ainsi au courant d'atteindre sa valeur maximale avant que le maximum des élévations ne se produise. Leur influence étant plus forte au fond qu'en surface, les courants commenceront à changer de direction au fond bien avant qu'ils ne changent en surface (Lamb, 1932, Bowden, 1983).

Les mesures courantométriques réalisées aux diverses stations de l'estuaire, montrent que le courant est maximal près de la surface et décroît d'abord progressivement avec la profondeur puis assez rapidement quand le fond s'approche.

Dans l'équation du mouvement, les tensions de cisaillement ont été reliées aux composantes de la vitesse par l'introduction d'un nouveau coefficient dit de pseudo-viscosité N_z . La résolution du système qui en découle, même pour des conditions élémentaires, est assez complexe. Toutefois, un des résultats généraux de ce type d'approche indique que l'influence du frottement s'étend à une profondeur H exprimée par:

$$H = \pi \left[\frac{2 N_z}{\sigma} \right]^{1/2} \quad (\text{IV.16})$$

Comme on l'a dit précédemment, la grandeur de N_z est assez mal connue; mais pour mettre en évidence la contribution du terme de frottement, supposons le cas d'une onde semi-diurne M2 (on aura $\sigma = 1.4 \cdot 10^4$), ce qui conduit à la répartition suivante: (fig.IV.25)

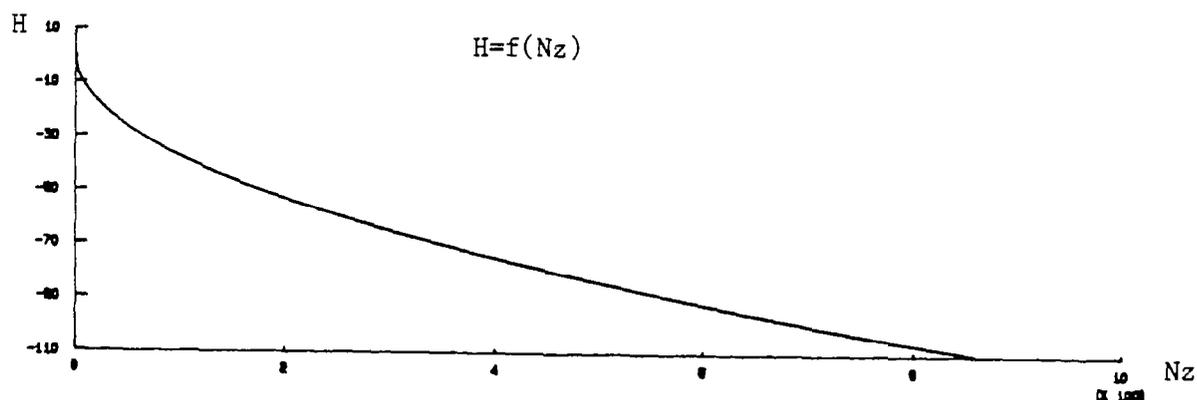


fig.IV.25-Variation des tensions au fond par rapport à la profondeur.

On remarque que pour $N_z=200 \text{ cm}^2/\text{s}$ on obtient $H \approx 50 \text{ m}$. Il en résulte que, pour les milieux où les profondeurs sont inférieures à 50 mètres, les frottements sont prédominants dans le mécanisme dissipatif et leur effet s'étend sur toute la profondeur. Par contre, pour une profondeur supérieure à 100 m, les frottements n'influent que sur la partie inférieure et la vitesse, dans toute la tranche supérieure (<50m), reste sensiblement constante (Bowden, 1983).

L'estuaire de la Casamance se caractérise par de faibles profondeurs (<10 m), surtout dans la partie amont, où le terme de frottement aura un rôle essentiel dans le mouvement des masses fluides. Pour cette raison une attention particulière a été accordée à ce terme.

La procédure de calage présentée au paragraphe III.5.3, a permis d'obtenir les valeurs moyennes du coefficient de frottement de Manning tout le long de l'estuaire. Bien que cette reconstruction des coefficients de frottement ait permis d'aboutir à des résultats

satisfaisants à partir du modèle mono-dimensionnel, les résultats sont fortement dépendants de la schématisation adoptée pour le milieu.

Afin de pouvoir utiliser les résultats de la procédure de calage effectuée, une répartition spatiale "plausible" des coefficients de frottement a été réalisée dans les grilles du modèle bi-dimensionnel. Les problèmes se sont posés dans les zones de faible profondeur (<40 cm) et dans les zones de mangroves qui ont un fonctionnement hydrodynamique particulier.

Dans tous les cas où la profondeur de l'eau était inférieure à 40 cm, le coefficient de frottement a été fixé à 20; par contre dans les zones inondables, l'eau circule à travers un certain type de végétation qui aura une grande influence sur l'écoulement. Certaines formulations rencontrées dans la littérature (Petryk et Bosmajian, 1975), expriment les coefficients de frottement en fonction de la densité de la végétation et de la surface occupée par la végétation par longueur et par unité de surface. Les essais réalisés par ces auteurs, montrent que les coefficients de frottement diminuent pour une végétation dense, d'un facteur égal au rayon hydraulique à la puissance $2/3$.

Dans le cas de Casamance, ce type de formulation n'était pas applicable, par manque de données adéquates (type et densité de la végétation, surface d'occupation ...). Le coefficient de Manning a été fixé dans toutes les zones de mangroves à la valeur de 7.

IV.9.1 Tests sur les variations des coefficients de Manning

Plusieurs tests ont été réalisés afin d'étudier la sensibilité de l'écoulement aux variations des valeurs des coefficients de frottement.

fig.IV.26-Circulation transitoire avec une diminution de 20% du coef. de Manning.

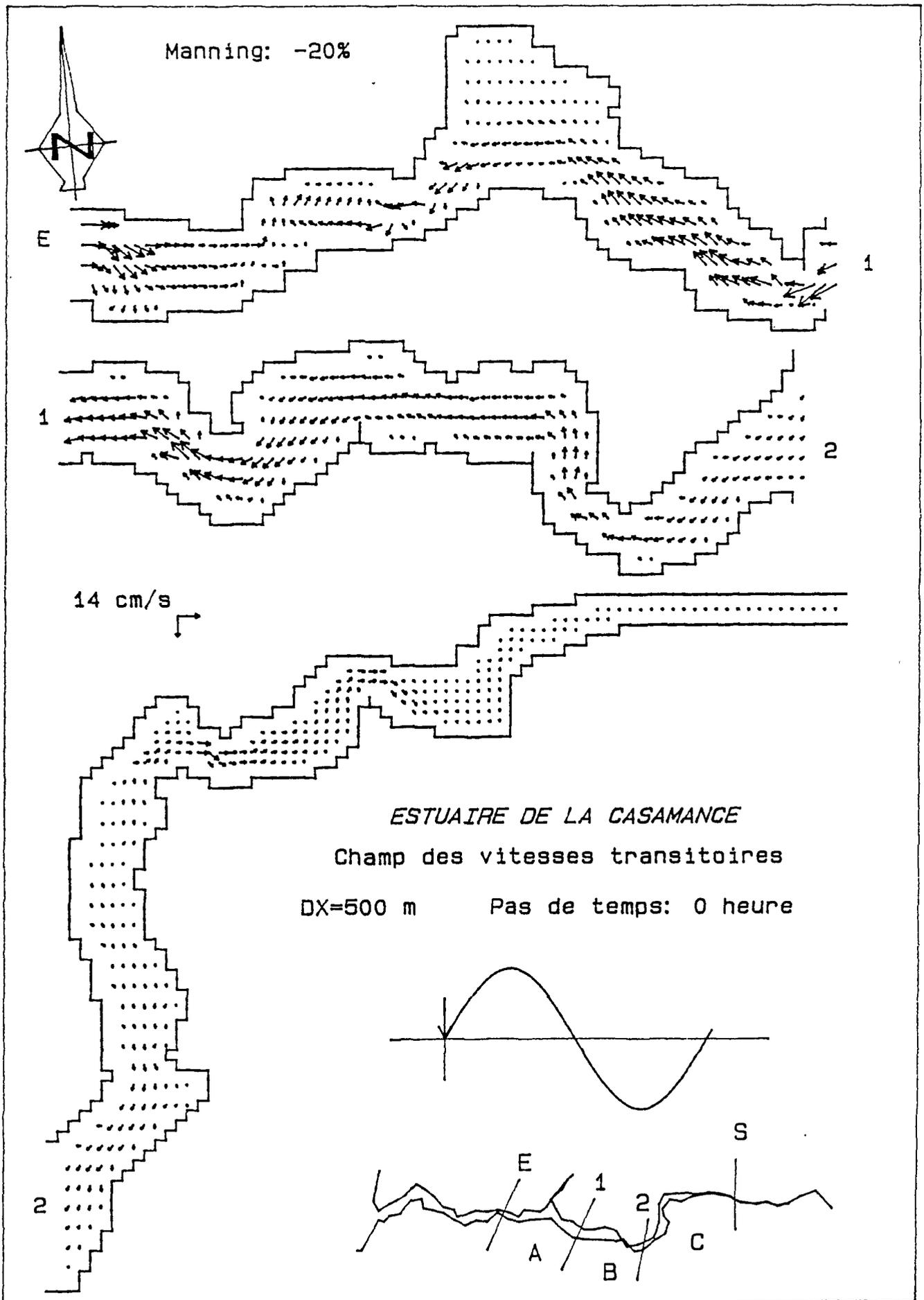


fig.IV.27-Circulation transitoire avec une augmentation de 20% du coef. de Manning.

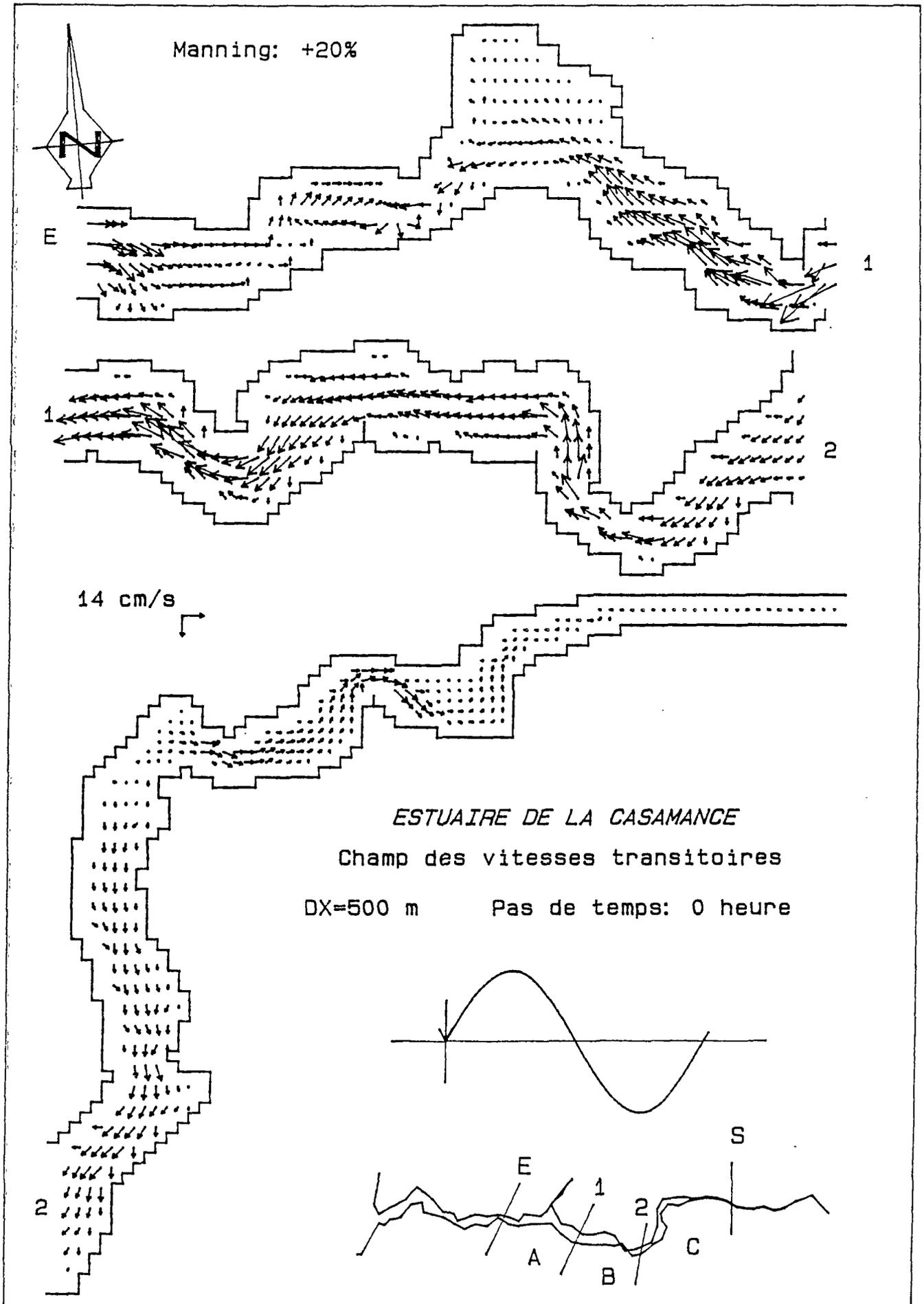


fig.IV.28-Circulation transitoire avec une diminution de 20% du coef. de Manning.

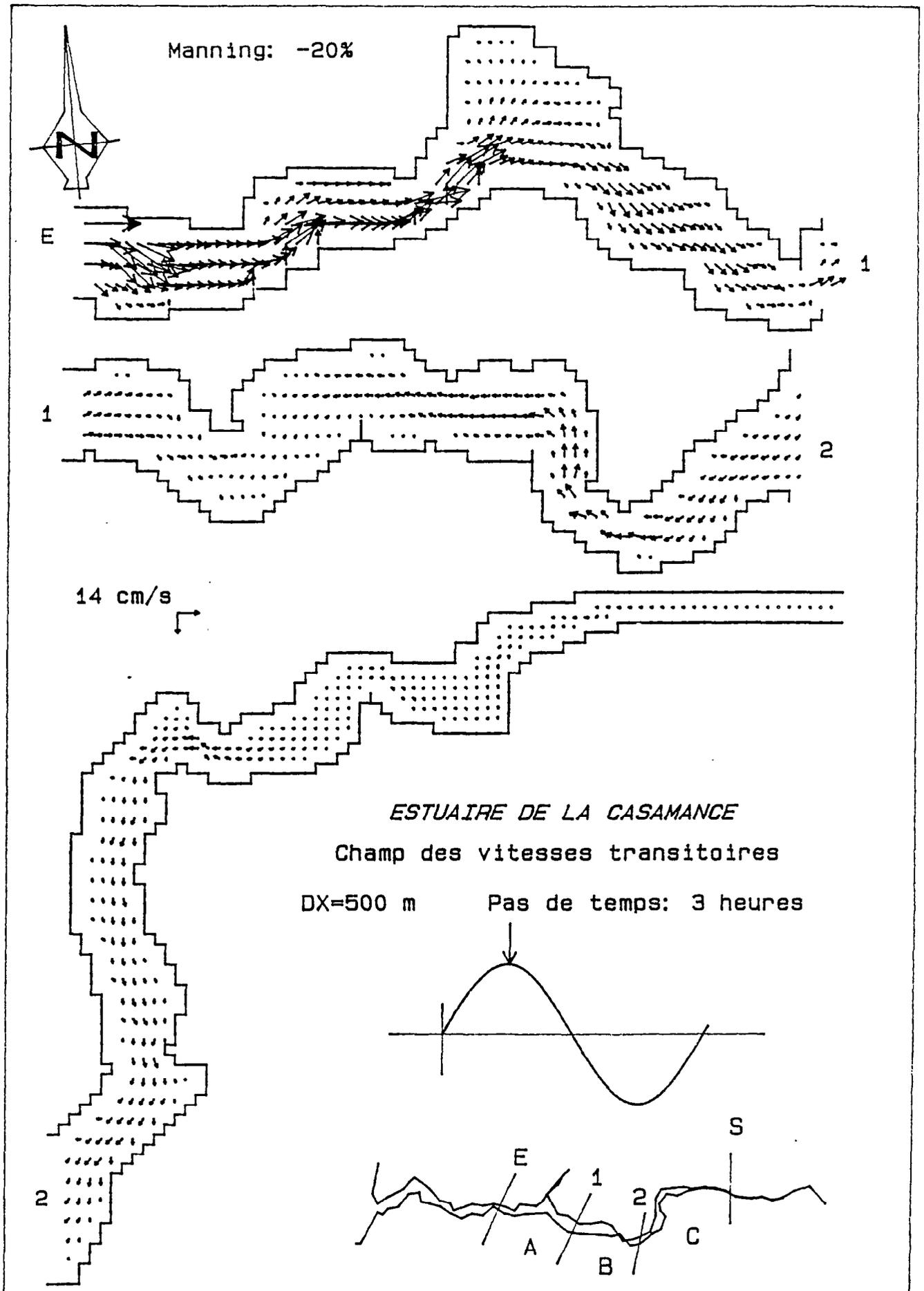


fig.IV.29-Circulation transitoire avec une augmentation de 20% du coef. de Manning.

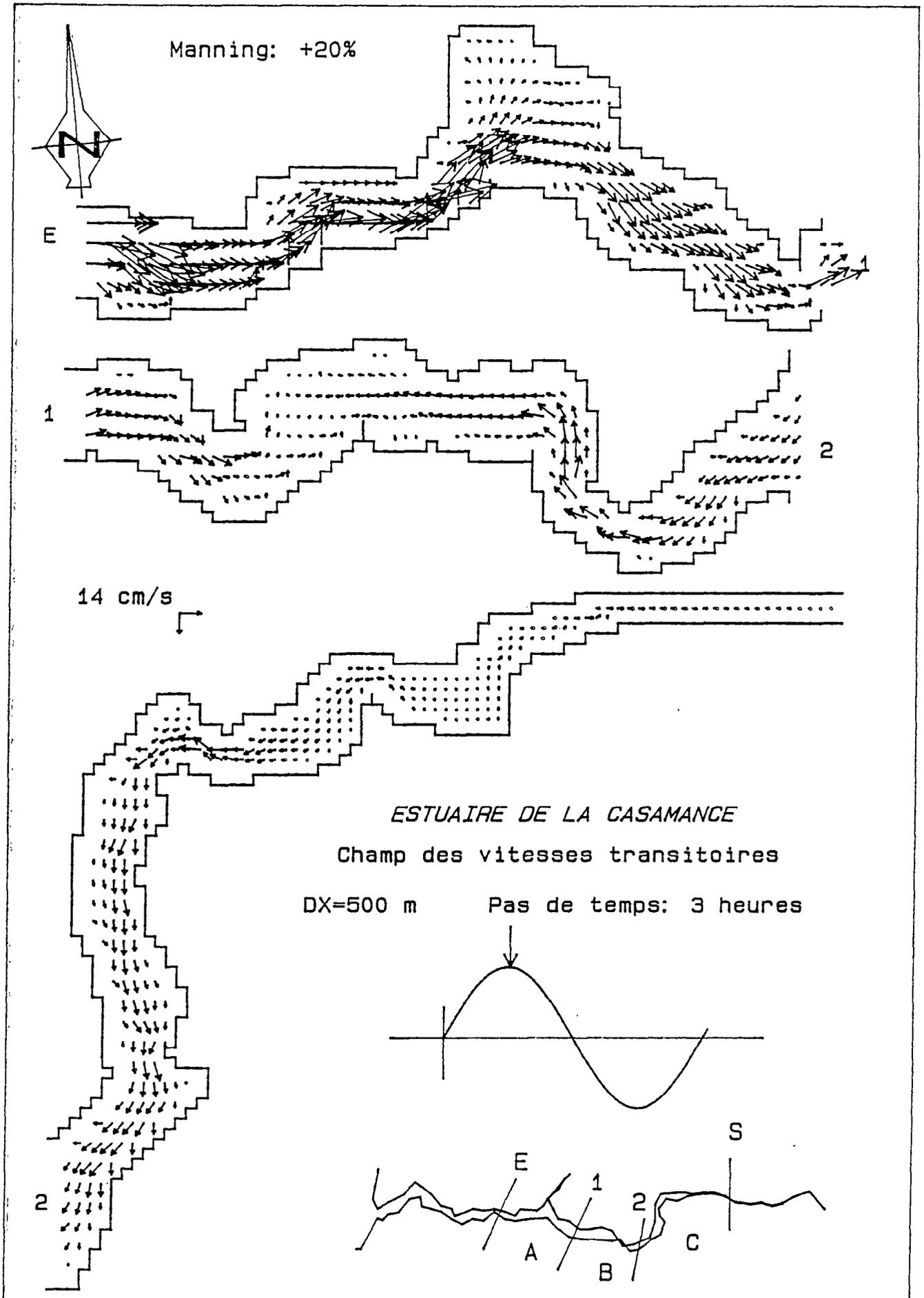


fig.IV.30-Circulation transitoire avec une diminution de 20% du coef. de Manning.

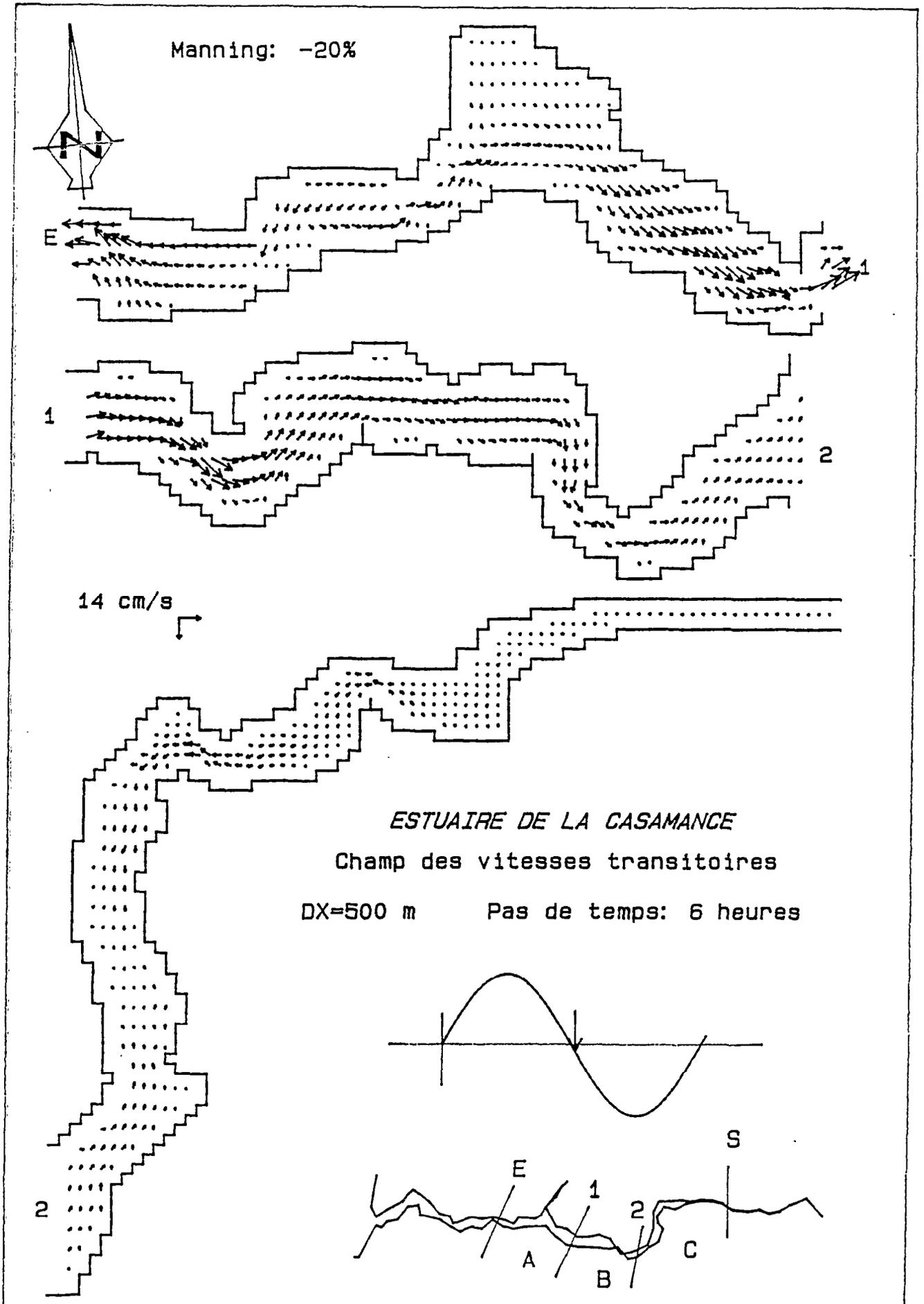


fig.IV.31-Circulation transitoire avec une augmentation de 20% du coef. de Manning.

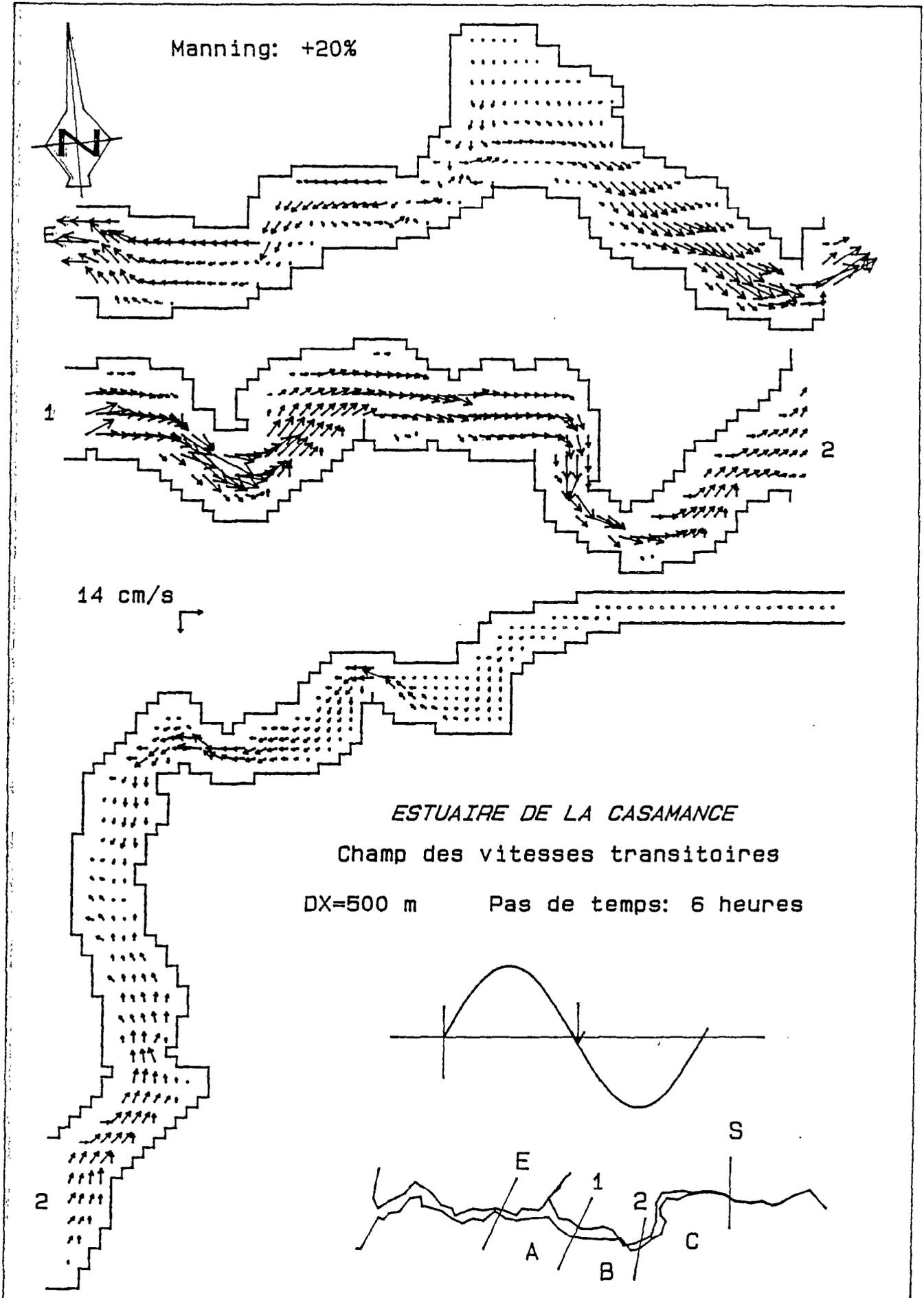


fig.IV.32-Circulation transitoire avec une diminution de 20% du coef. de Manning.

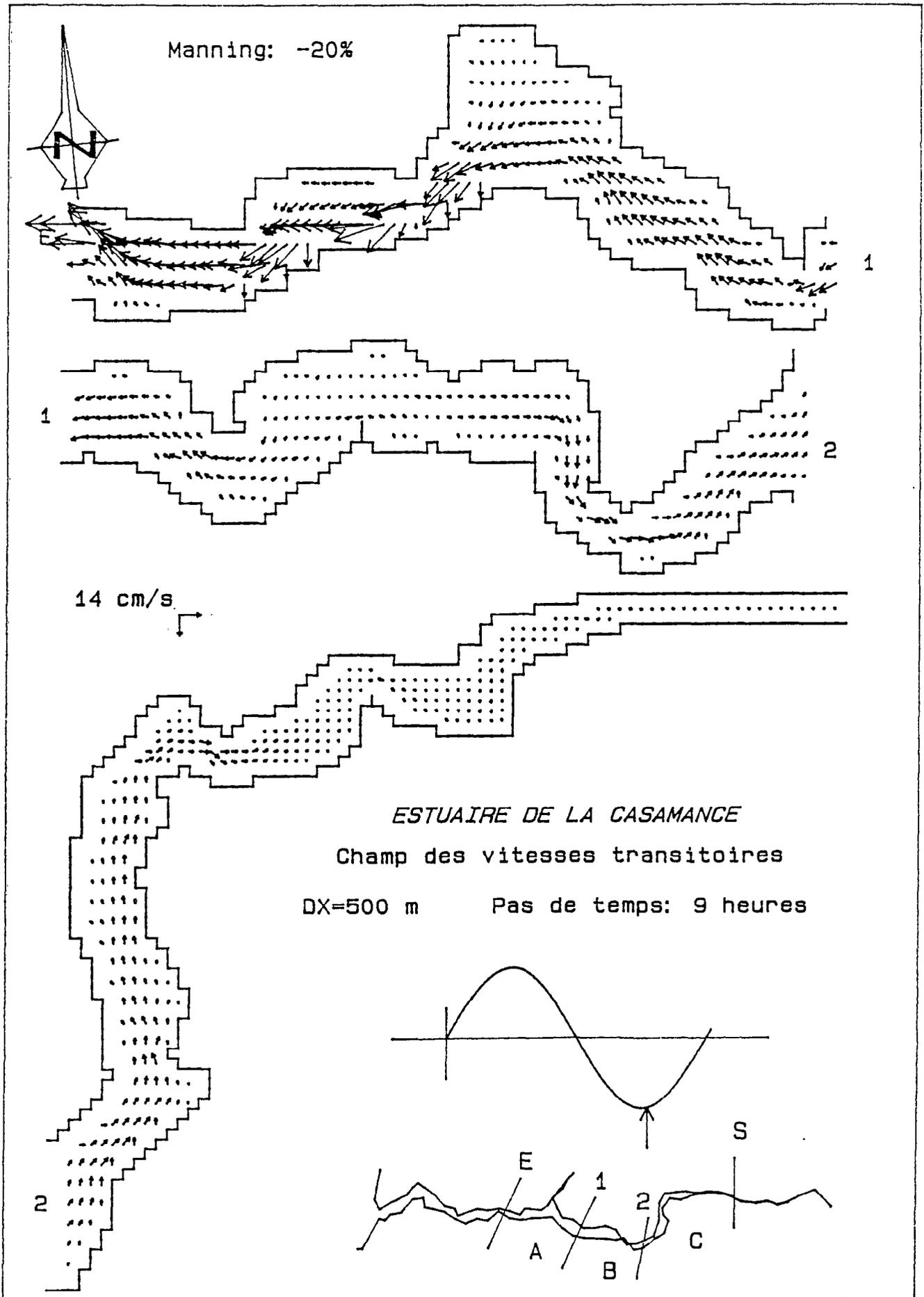
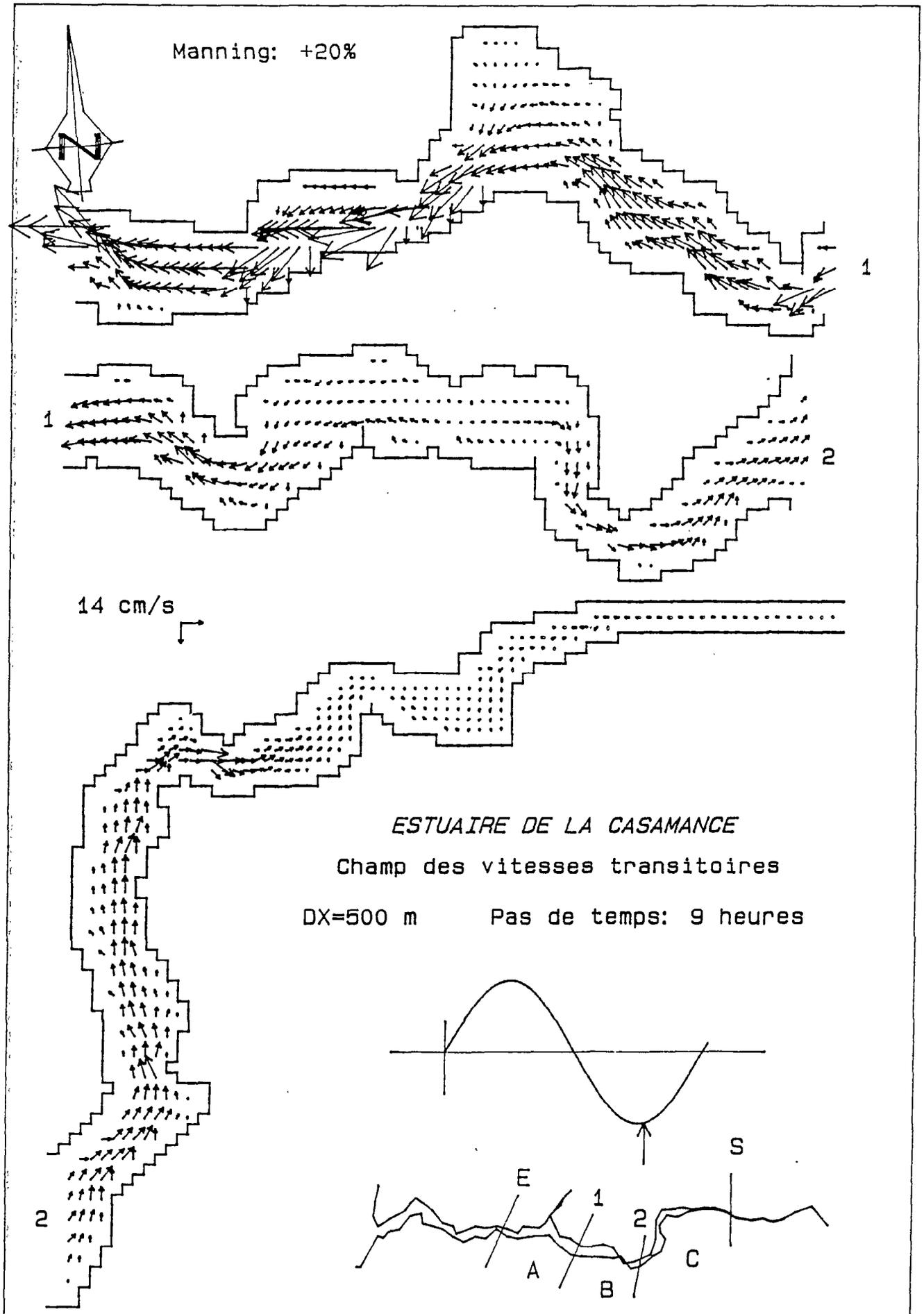


fig.IV.33-Circulation transitoire avec une augmentation de 20% du coef. de Manning.



ESTUAIRE DE LA CASAMANCE (Sénégal)

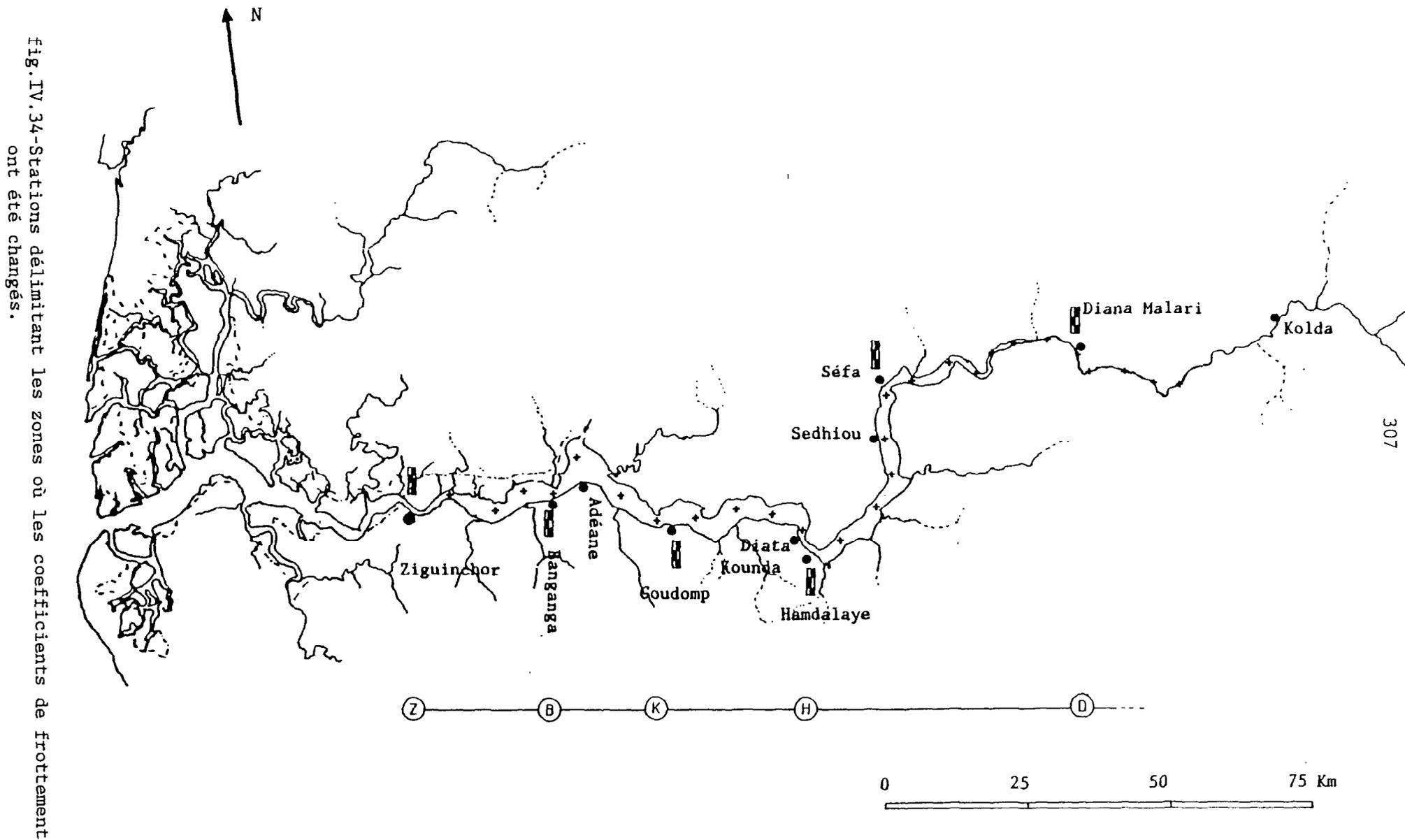
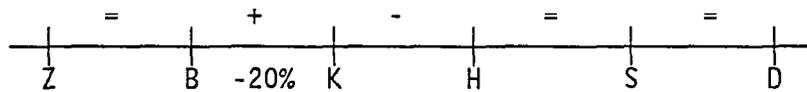
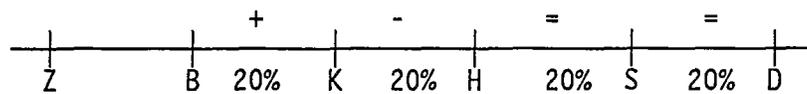


fig. IV.34- Stations délimitant les zones où les coefficients de frottement ont été changés.

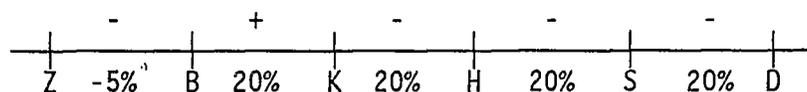
Test 1: La réduction des coefficients de frottement de 20% entre les stations de Banganga et Kaour a conduit à une augmentation des élévations dans les mailles proches de la station Banganga et à une réduction des élévations assez forte dans la zone de la station de Kaour; cette atténuation diminue ensuite progressivement en remontant l'estuaire.



Test 2: Mêmes conditions que le test 1, mais en augmentant le coefficient de frottement de 20% à partir de Kaour jusqu'à la limite amont. Ces conditions ont conduit à une augmentation moins forte des élévations à Baganga, comparées à celles obtenues dans le test 1, mais l'atténuation était plus importante dans la partie de l'estuaire s'étalant de (l'aval de) Kaour jusqu'à (l'amont) d'Hamdalaye. Par contre toute la région amont n'a pas été affectée.



Test 3: Mêmes conditions que le test 2, mais en réduisant de 5% les coefficients de frottement de la zone s'étalant de l'entrée du domaine d'intégration à la station Banganga. Dans ce cas les élévations dans la zone de Banganga ont augmenté et partout ailleurs dans l'estuaire la diminution était assez sensible spécialement dans la zone entre Kaour et Hamdalaye.



Test 4: Dans ce test on a réduit les valeurs des coefficients de frottement de 20% dans la zone de Ziguinchor à Kaour, les coefficients des autres zones de l'estuaire ont été gardés égaux à ceux obtenus dans la procédure de calage. On a obtenu une réduction des élévations dans tout l'estuaire, avec une forte influence sur la zone de Kaour.



Remarque: Tout les tests effectués avec des changements locaux des coefficients de frottement avaient peu d'influence sur les résultats. Ceci est en accord avec le type de discrétisation utilisée.

IV.10 Dissipation d'énergie et stratification

Le produit du coefficient de frottement par la vitesse moyenne donne la distribution de la tension moyenne durant la période de la marée considérée. Cette évaluation permet d'isoler les zones susceptibles de subir des érosions ou des dépôts (Saunders, 1977) (fig.IV.35).

$$\text{Tensions maximales: } \tau_f(\text{max}) = \frac{\rho g}{c^2} U^2(\text{max}) \quad (\text{IV.17})$$

$$\text{Tensions moyennes: } \tau_f(\text{moy}) = \frac{\rho g}{c^2} U^2(\text{moy}) \quad (\text{IV.18})$$

La valeur cubique moyenne de la vitesse multipliée par le coefficient de frottement au fond, donne une estimation du travail moyen induit par le courant de la marée en opposition aux tensions aux fonds (Kagan, 1971). La moyenne de l'énergie dissipée par cm^2 est égale au divergent du flux d'énergie moyenne. Il en résulte que la moyenne sur le temps du produit scalaire de l'équation dynamique par la vitesse (Pingree

et al., 1977), amène à l'expression: (fig.IV.36)

$$\begin{aligned} \text{avec } E_T &= \rho K U^3 = \nabla(\rho g E U) & (IV.19) \\ K &= g/C^2 \end{aligned}$$

L'intégration de (IV.19) dans tout le domaine étudié conduit à une estimation de la dissipation de l'énergie dans tout le milieu.

Les études réalisées par Fearnhead (1975) et Simpson et al. (1974), sur l'évolution des interfaces qui séparent les milieux bien mélangés des milieux stratifiés, les ont conduit à définir un indice semi-empirique de stratification S exprimé par: (fig.IV.37)

$$S = \frac{h}{U^3} \quad (IV.20)$$

Ce coefficient donne une estimation de la stratification sur une colonne d'eau. Les fortes valeurs de S correspondent aux régions stratifiées et les faibles valeurs aux régions bien mélangées où la dissipation de l'énergie est assez forte. Ceci confirme le caractère bien mélangé de l'estuaire de la Casamance.

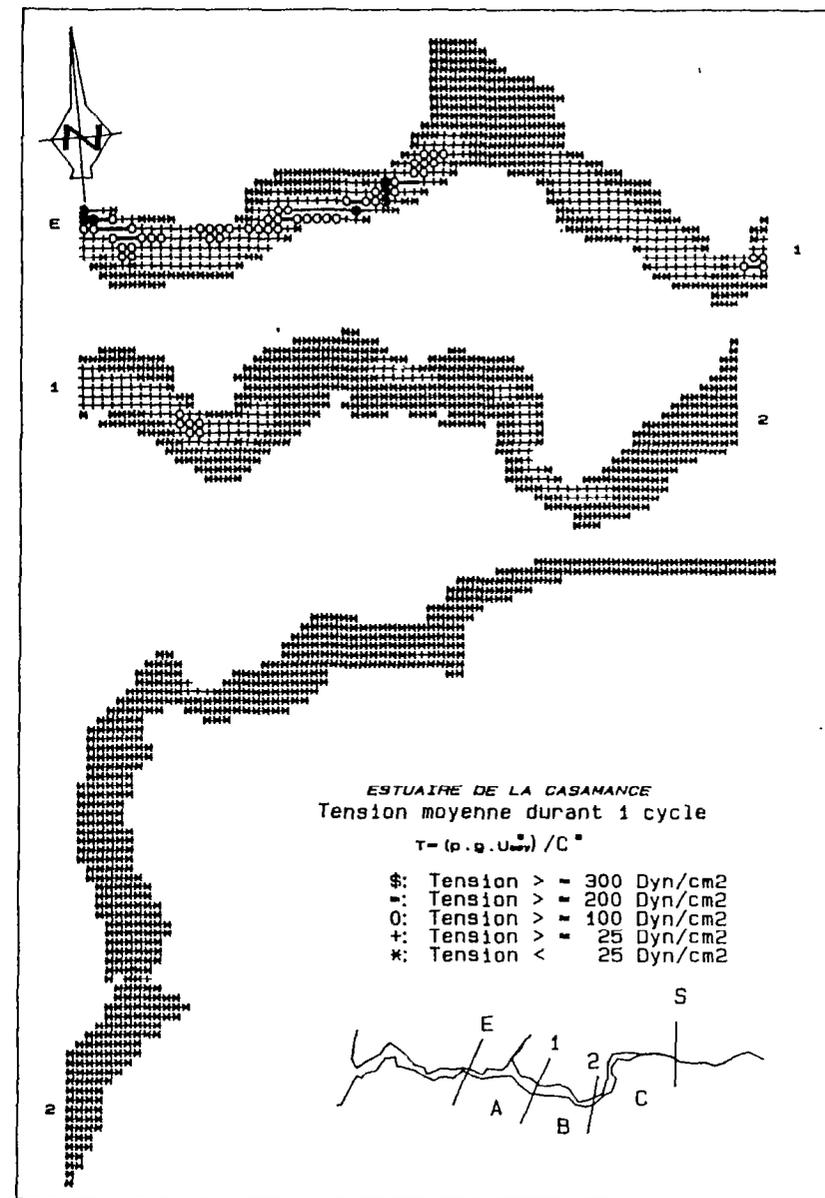
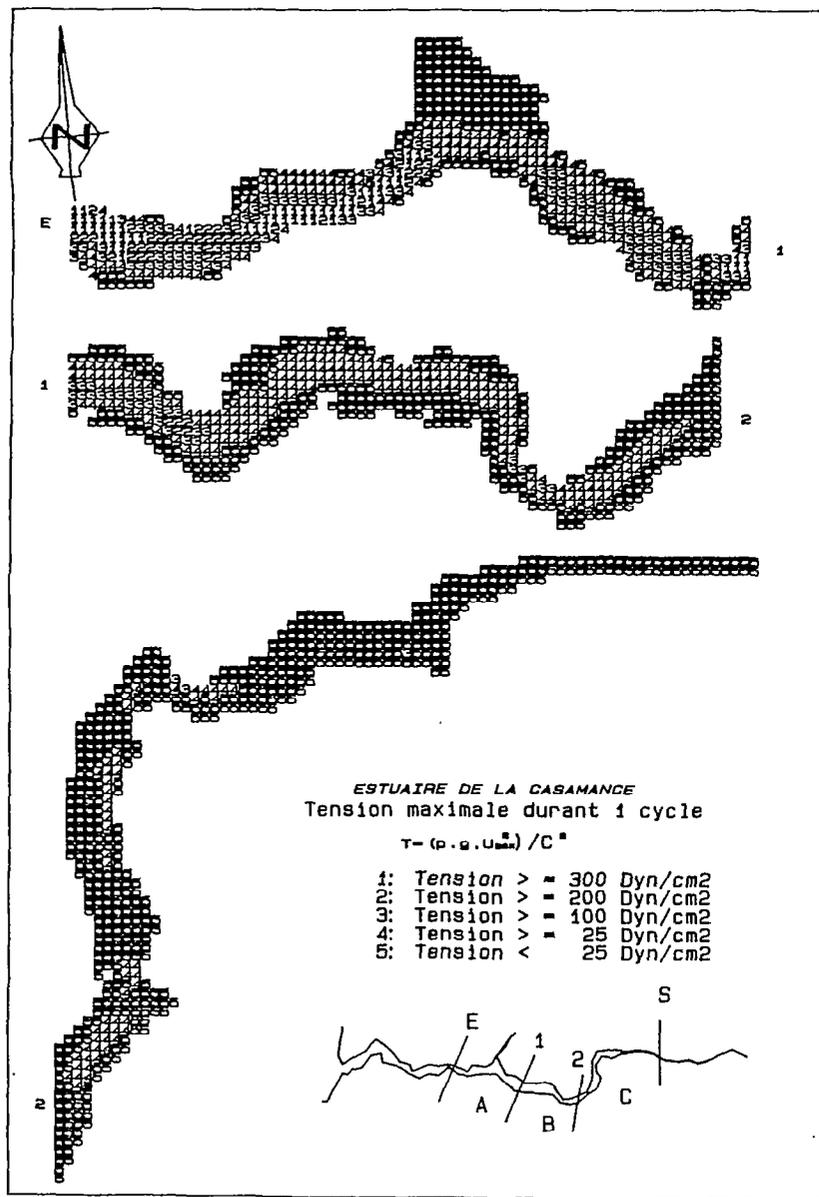


fig.IV.35-Tensions maximales et moyennes durant 1 cycle de la composante semi-diurne M2

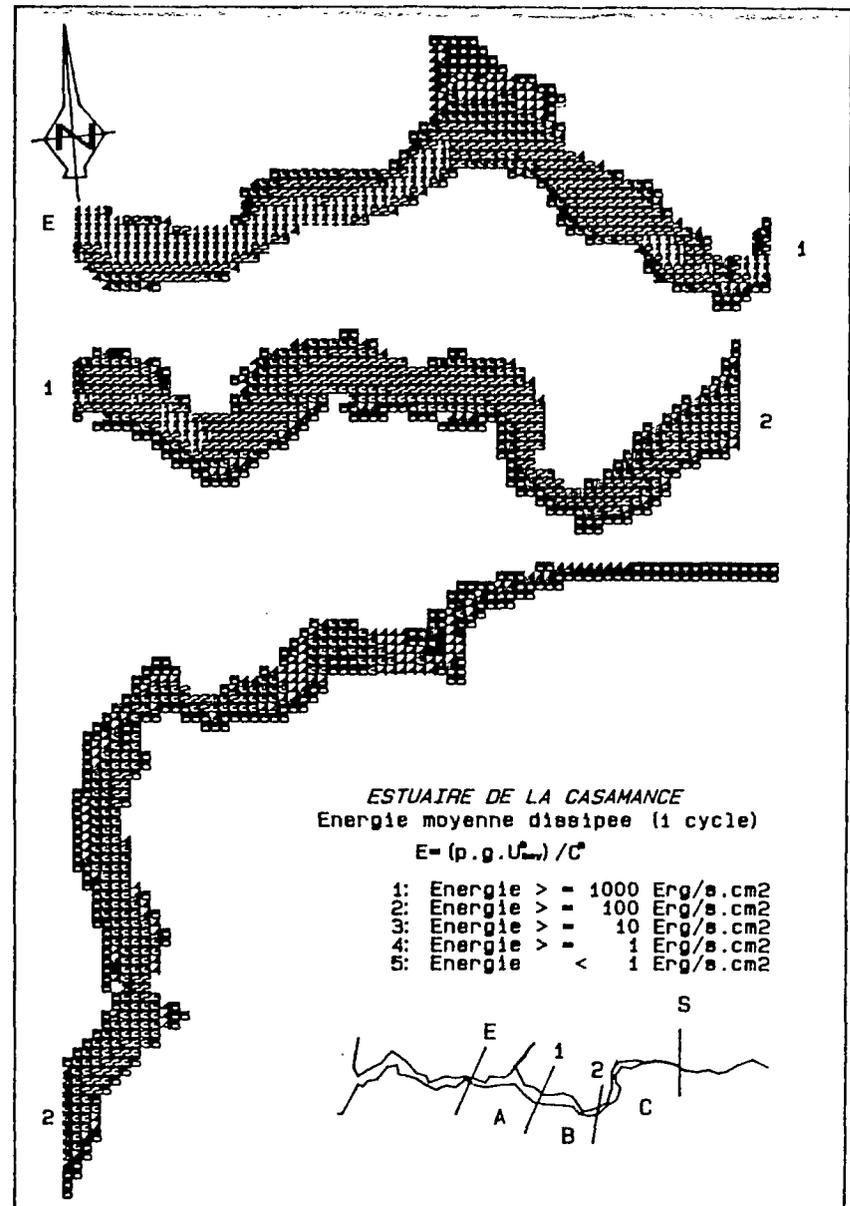
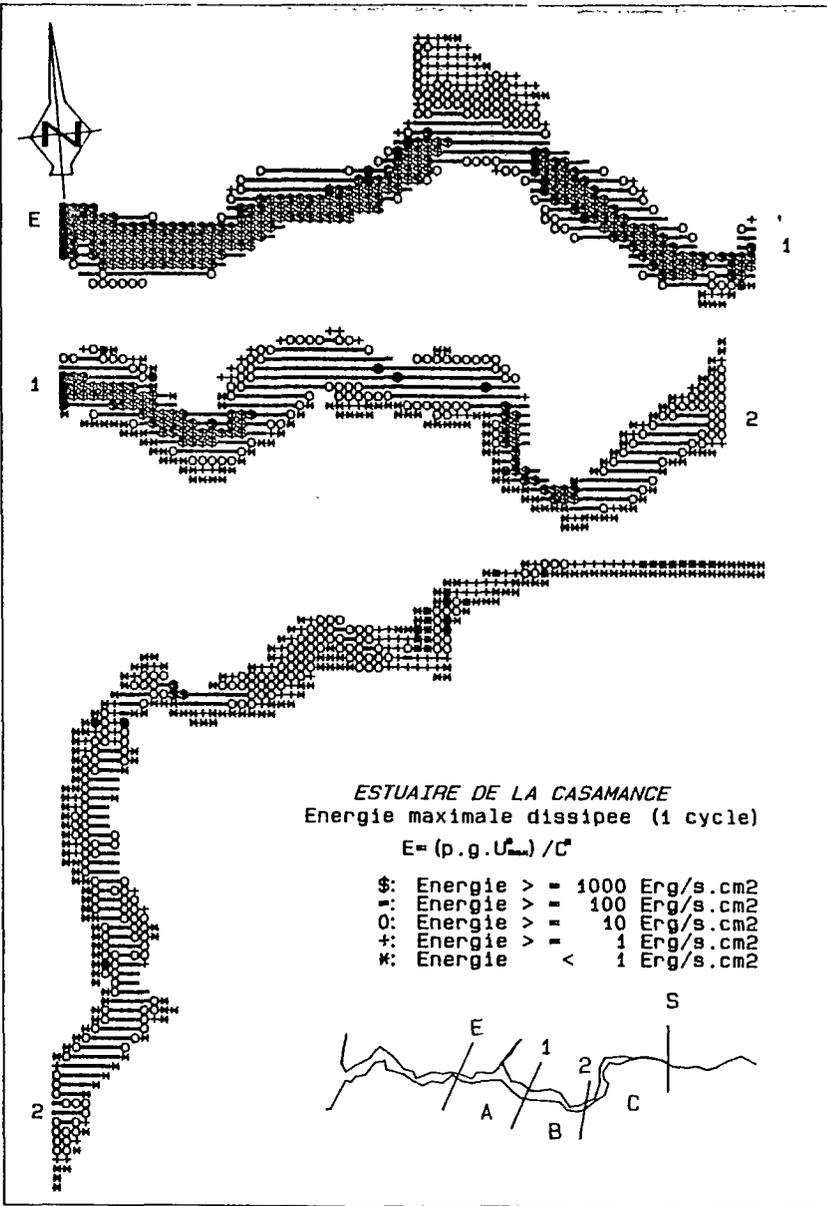


fig.IV.36-Dissipation maximale et moyenne de l'énergie durant 1 cycle de la composante semi-diurne M2

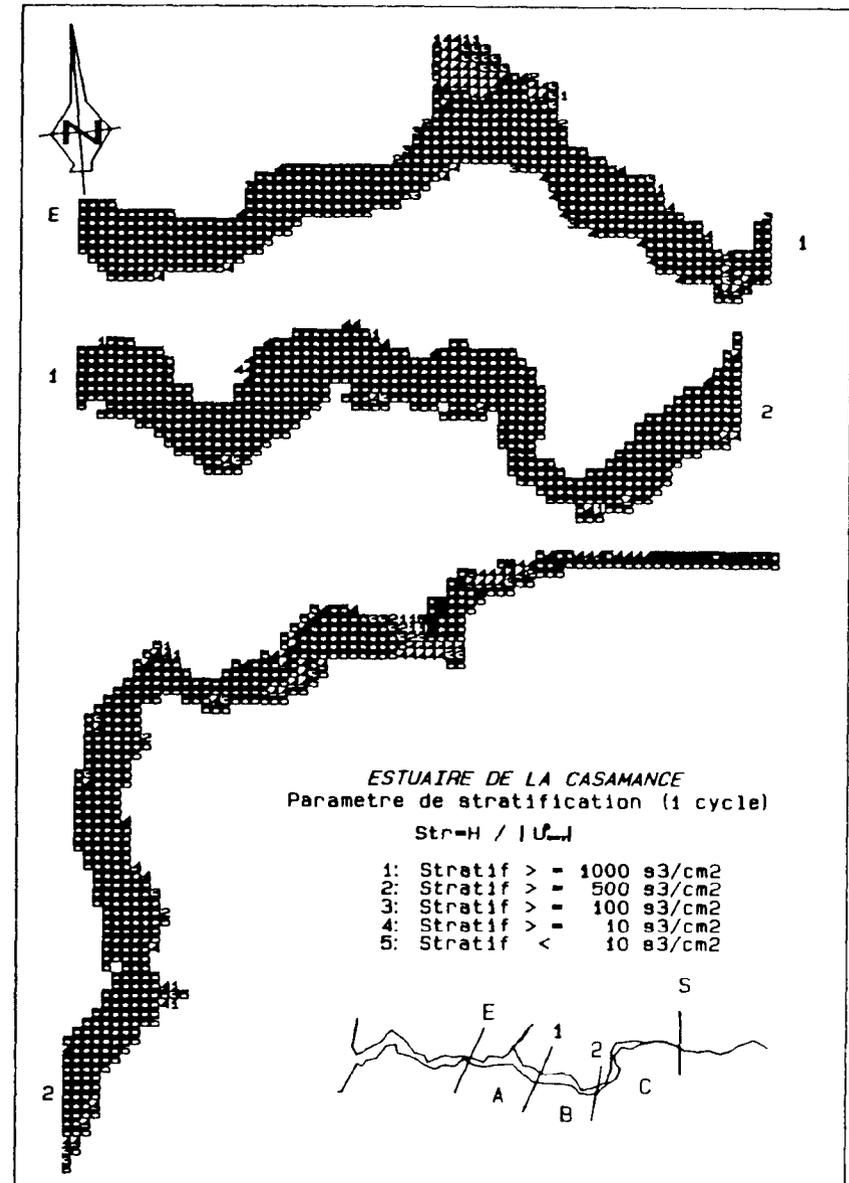
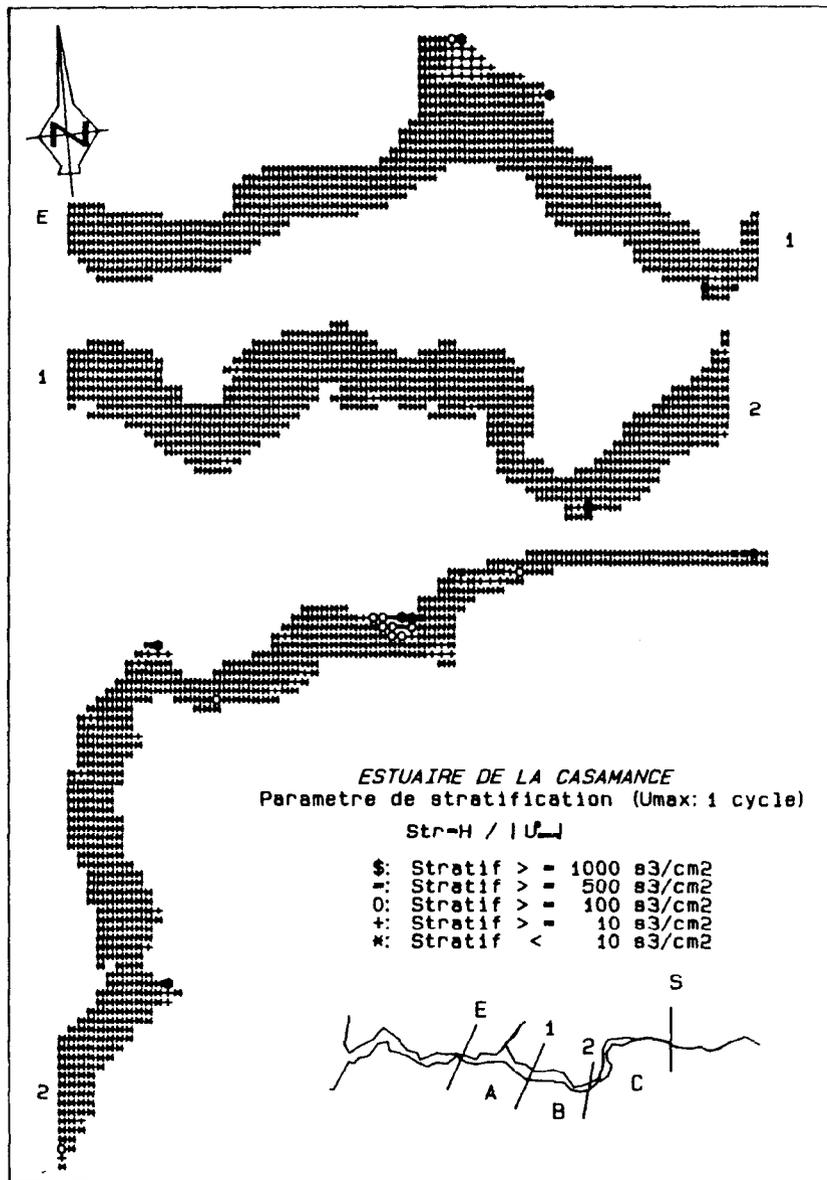


fig.IV.37-Stratification pour U(max.) et U(moy.) durant 1 cycle de la composante semi-diurne M2

IV.11 Influence du vent

Les données en intensité et direction du vent n'étant pas disponibles, plusieurs tests ont été réalisés avec divers cas de figure, afin d'évaluer la contribution de la tension en surface dans le mouvement des masses fluides. Le choix des directions n'est pas arbitraire, il se base sur des informations générales recueillies dans les diverses études réalisées sur le milieu (Brunet Moret, 1970, Marius, 1984, Pagès, 1987).

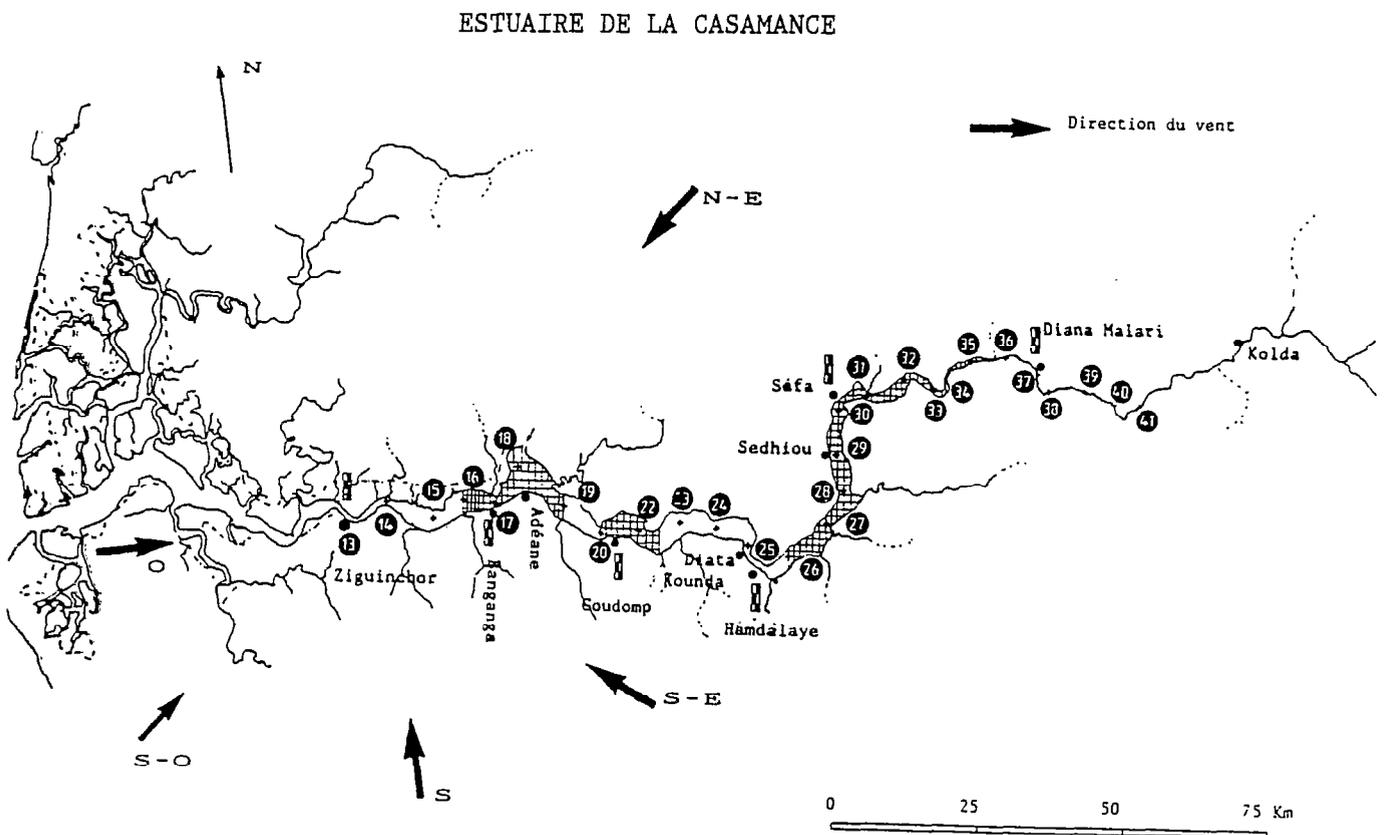


fig.IV.38-Directions des vents dominants et stations de contrôle.

fig.IV.39-Circulation transitoire induite par la marée et le vent (N-E; Vit.=3m/s)

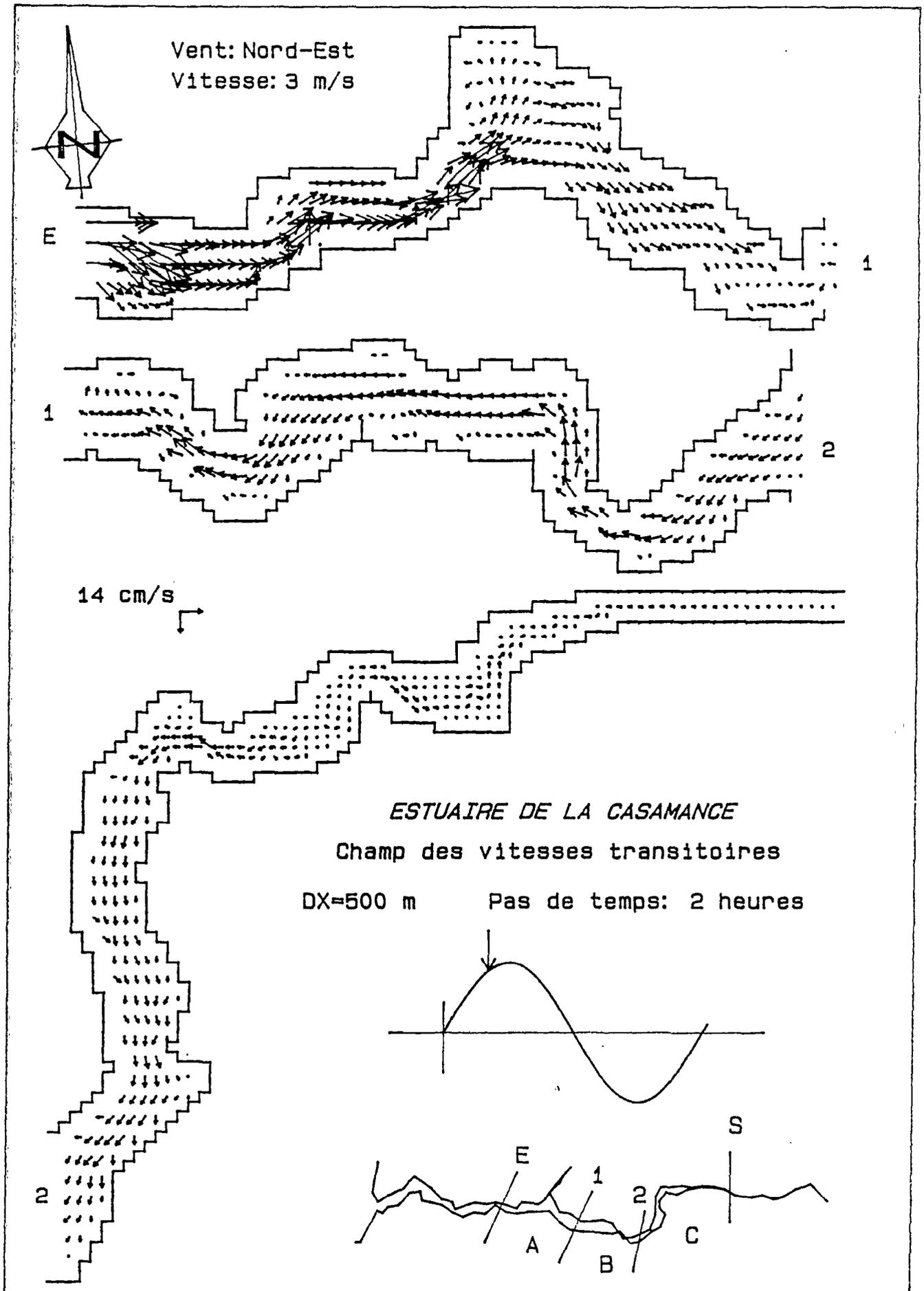


fig.IV.40-Circulation transitoire induite par la marée et le vent (S-E; Vit. ≈ 3 m/s).

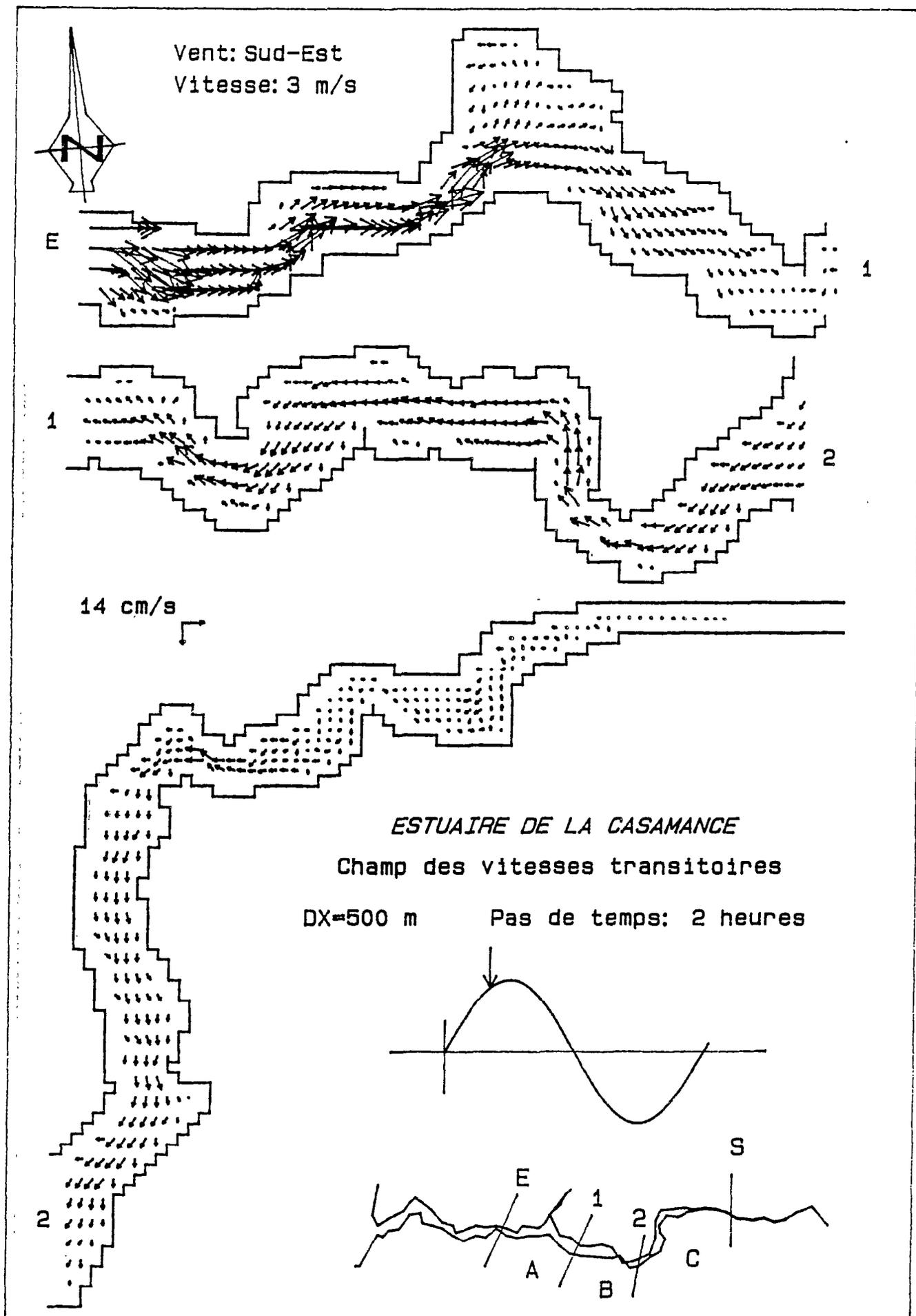


fig.IV.41-Circulation transitoire induite par la marée et le vent (N-E; Vit.=3m/s).

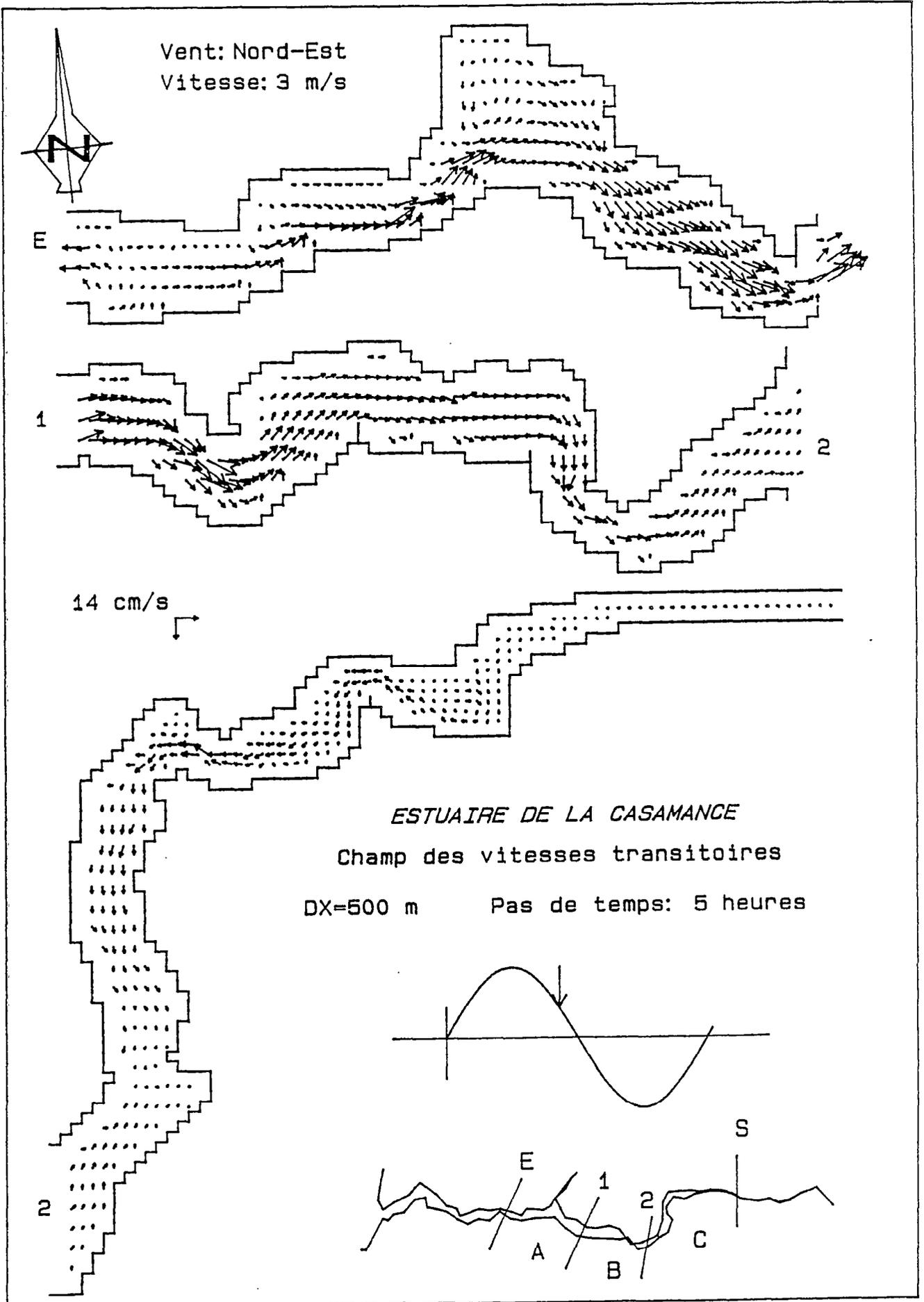


fig.IV.42-Circulation transitoire induite par la marée et le vent (S-E;Vit.=3m/s).

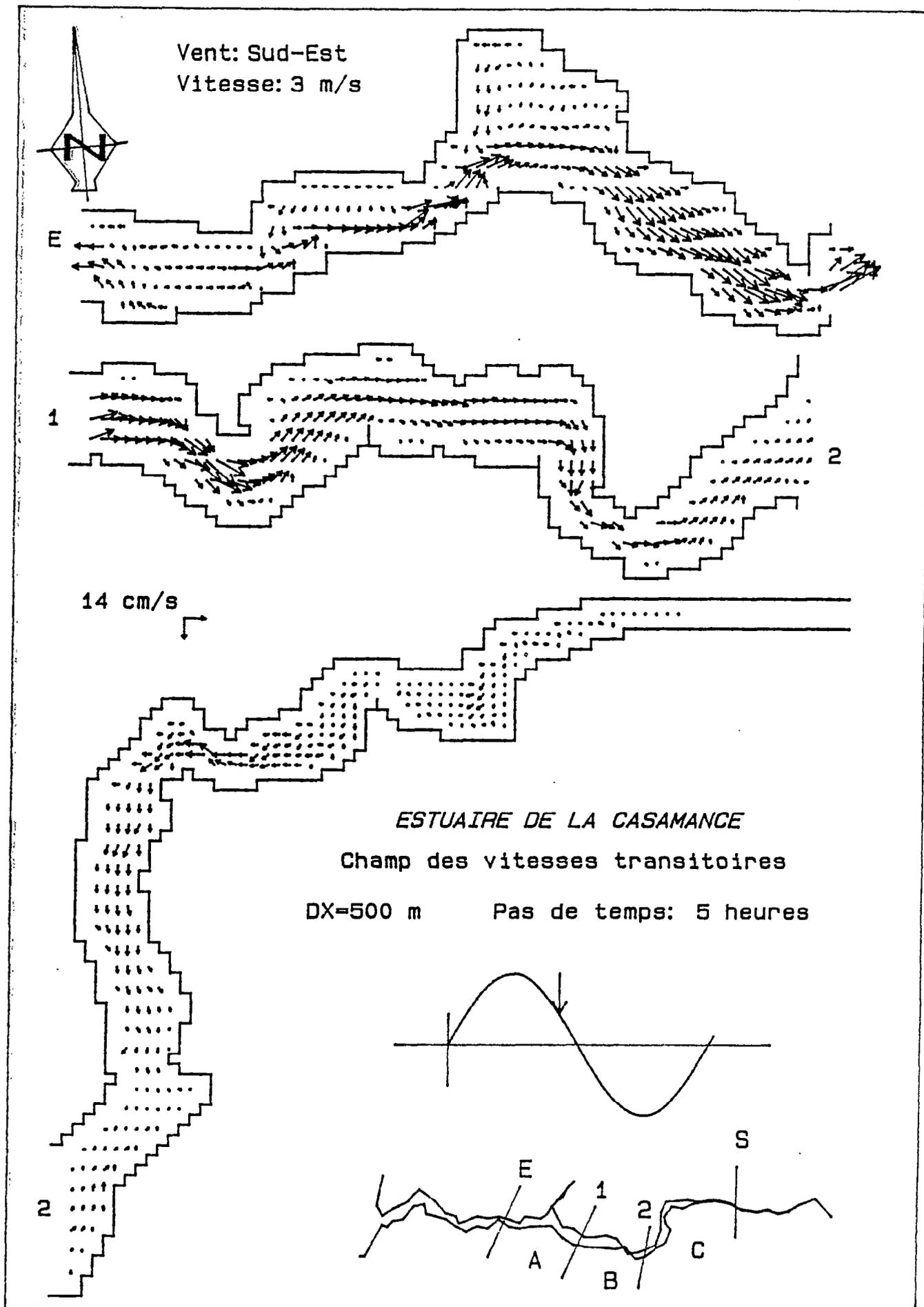


fig.IV.43-Circulation transitoire induite par la marée et le vent (N-E; Vit.=3m/s).

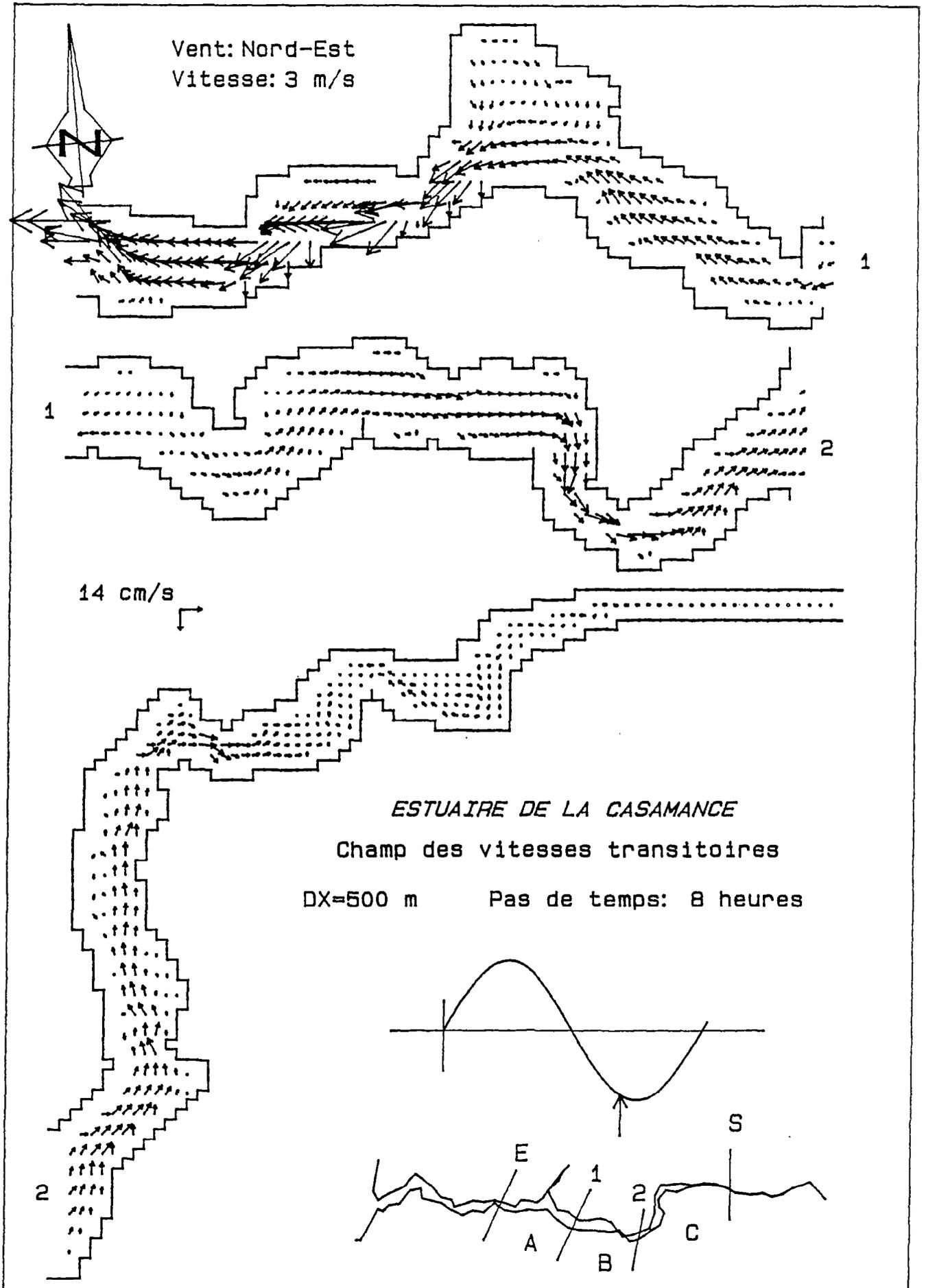


fig.IV.44-Circulation transitoire induite par la marée et le vent (S-E; Vit.3m/s).

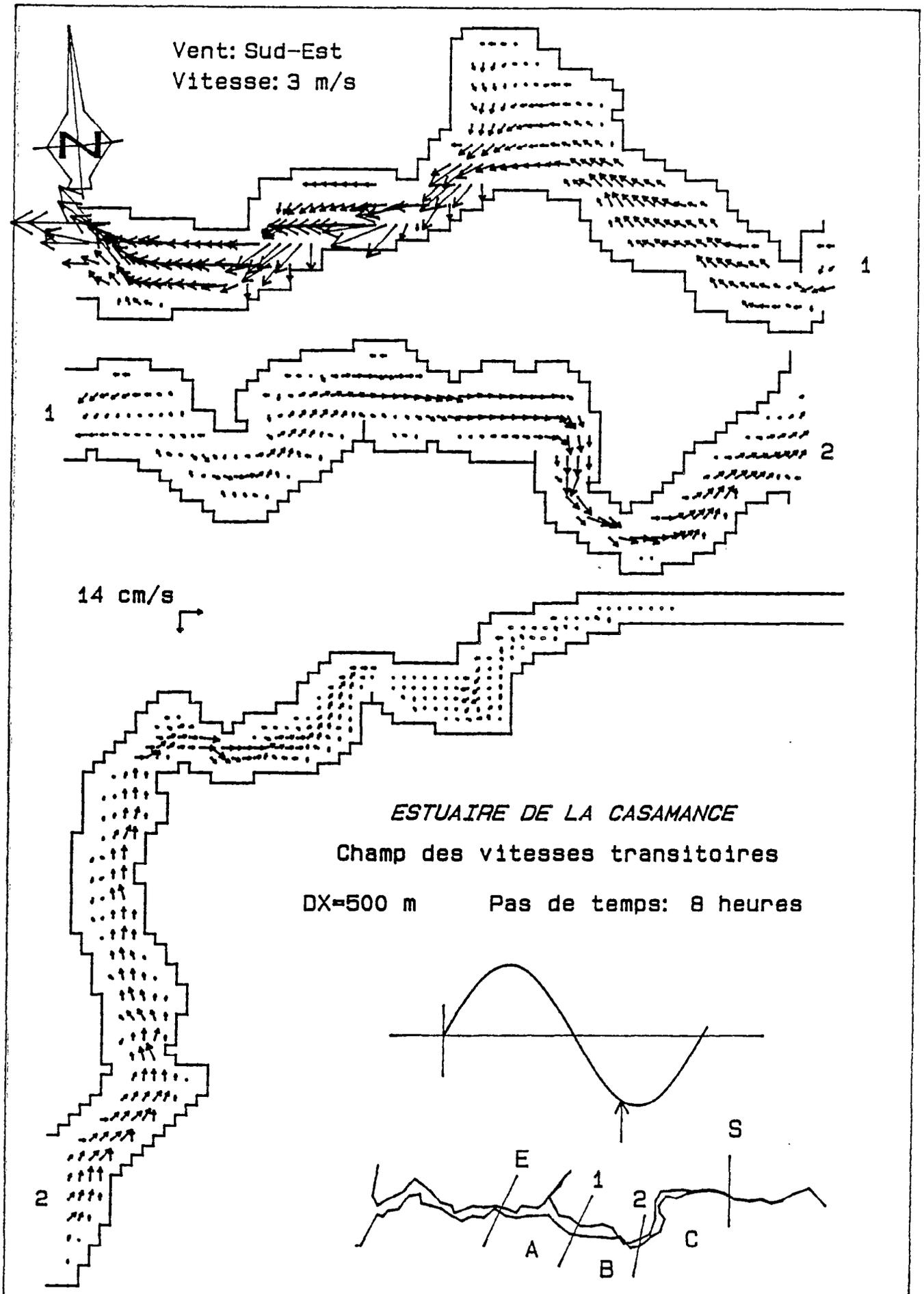


fig.IV.45-Circulation transitoire induite par la marée et le vent (N-E; Vit.3m/s).

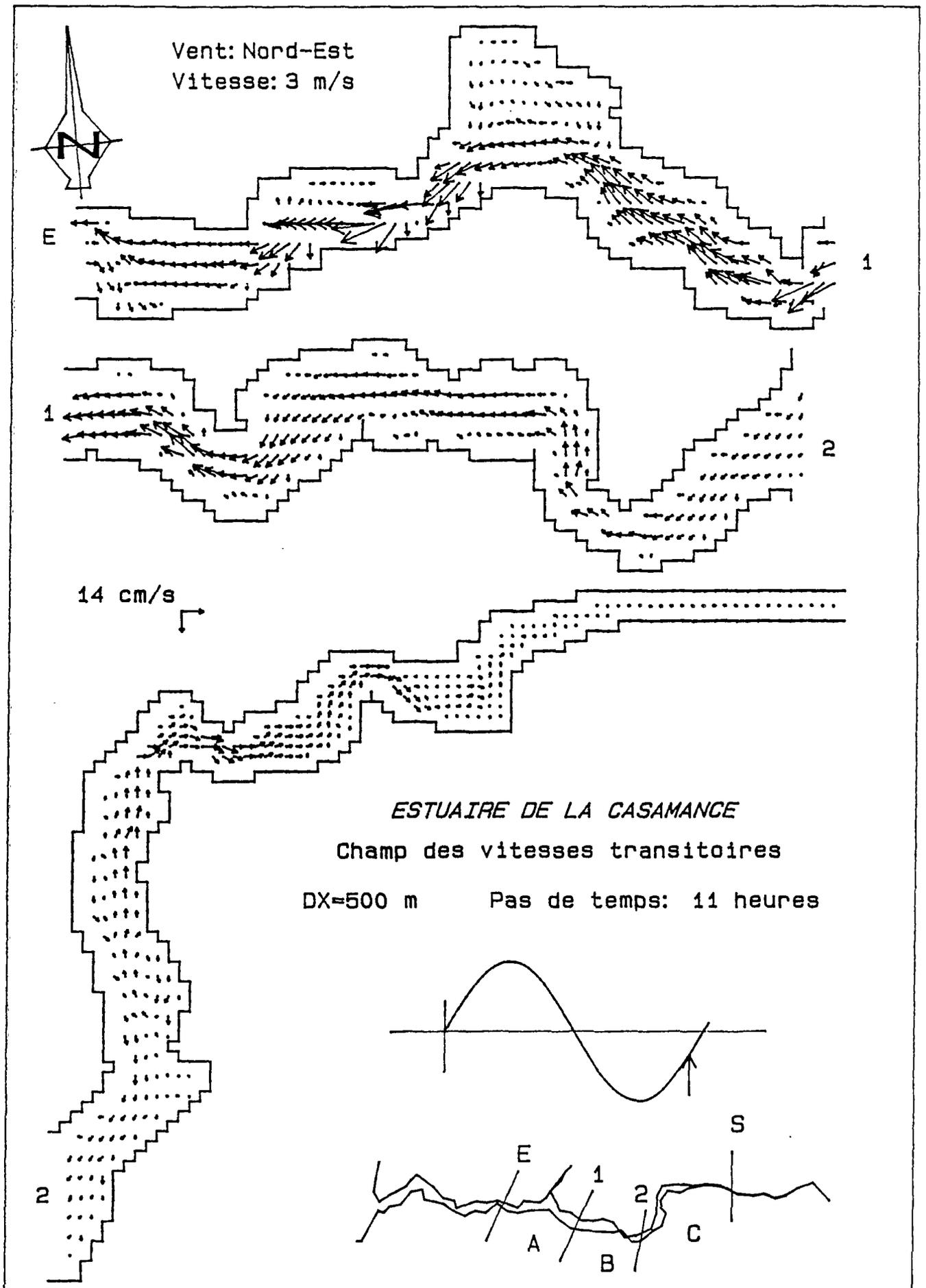
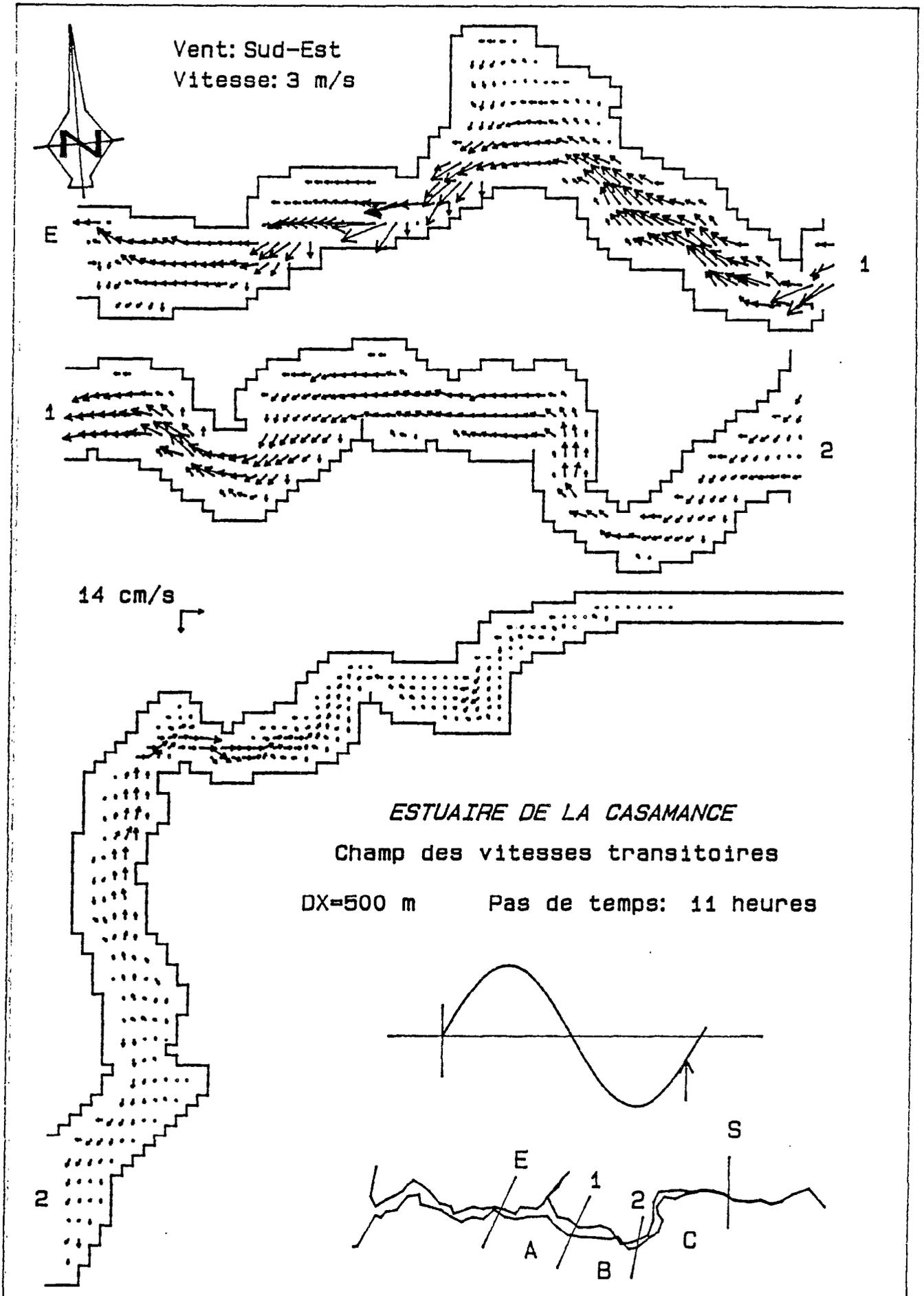


fig.IV.46-Circulation transitoire induite par la marée et le vent (S-E; Vit. 3m/s).



Les résultats sont regroupés dans les tableaux suivants:

Variation du niveau moyen (cm) par rapport aux simulations où $\tau^S=0$

Vt \ St	BAGANGA	GOUDOMP	HAMDALAYE	SEFA	DIANA MALARI
S 3	0	0	0	0	0
U 7	-6	-4.5	-4	+3	0
D 10	-12.5	-9.5	-8		
S 3	-2	-1.5	-2	2	0
E 7	-13.5	-8	-11	10	-2.5
10	-28	-16.5	-23		
S 3	-5	-3	-4	4	-1
O 7	SEC	-17	SEC	21	-4
10	SEC	SEC	SEC		
N 3	-6	-7	-2	2	3
E 7	SEC	SEC	-11	12	13
10	SEC	SEC	SEC		
O 3	-14	-14	-7	5	6
7	SEC	SEC	SEC	27	28
10	SEC	SEC	SEC		

Variation du courant par rapport aux simulations où $\tau^S=0$

Vt \ St	BAGANGA	GOUDOMP	HAMDALAYE	SEFA	DIANA MALARI
S 3	0%	0%	0%	0%	0%
U 7	4%	2.3%	3.4%	-2.3%	0%
D 10	10.7%	5.2%	7.9%		
S 3	1%	2.3%	-3.3%	2.6%	-4%
E 7	4.7%	20%	-10.7%	22.4%	-17.5%
10	14.2%	51%	-16.9%		
S 3	2%	-1%	3.5%	-5.5%	2.5%
O 7	SEC	-10%	SEC	-8.5%	2.5%
10	SEC	SEC	SEC		
N 3	40%	100%	156%	156%	197%
E 7	SEC	SEC	500%	460%	660%
10	SEC	SEC	SEC		
O 3	-48%	-52%	-10%	16%	10%
7	SEC	SEC	SEC	-20%	-16%
10	SEC	SEC	SEC		

Tableau IV.5-Variation du niveau et du courant moyen par rapport aux simulations où la tension en surface est nulle.

Les tableaux précédents regroupent les maximums d'écart d'amplitude et de vitesse entre les simulations qui prennent en compte l'effet du vent et celles où cet effet a été négligé.

Il se dégage de ces études que l'influence du vent devient importante quand son intensité est supérieure à 7m/s, durant toute la période de la composante de la marée considérée. Les parties les plus affectées de l'estuaire sont, d'une part, celles relatives à l'élargissement au niveau d'Adéane et, d'autre part, toute la région s'étalant de l'amont d'Hamdalaye jusqu'à Sefa. Ceci est en accord avec le type de circulation qui se produit en ces zones où la marée subit une forte atténuation et où la profondeur de l'eau est assez faible. Mais, des vitesses dépassant 7m/s sont très rares dans le milieu où l'intensité du vent dominant est rarement supérieure à 2m/s. Dans ces cas la contribution du vent dans les mouvements reste faible.

IV.12 Etude de quelques aménagements hydrauliques

IV.12.1 Construction de barrages

Afin d'évaluer l'influence de la construction d'un barrage sur le lit principal de l'estuaire, trois simulations ont été réalisées. Les barrages étaient supposés construits aux stations de Goudomp, Diatakounda et Sefa. Dans tous les cas, la partie aval était sous l'influence de l'onde semi-diurne, quant à la partie amont elle était considérée au repos.

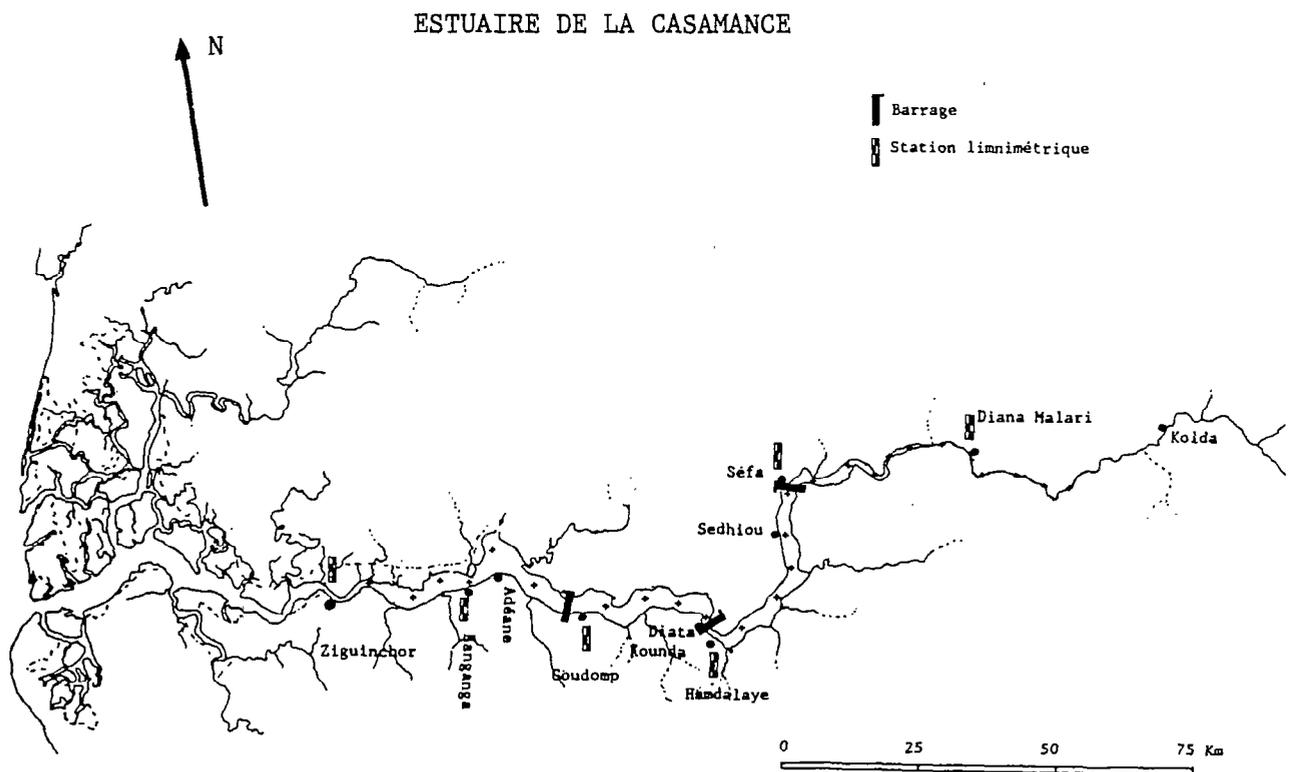


fig.IV.47-Emplacement des barrages.

L'analyse des conséquences d'un éventuel aménagement a été faite par comparaison, d'une part, des champs de vitesses et des variations du niveau et du courant sur 8, 13 et 18 stations de contrôle et, d'autre part, par comparaison du suivi des trajectoires de 10, 17 et 27 particules réparties tout le long de la zone étudiée. La figure IV.47 indique l'emplacement des stations de contrôle et des particules suivies.

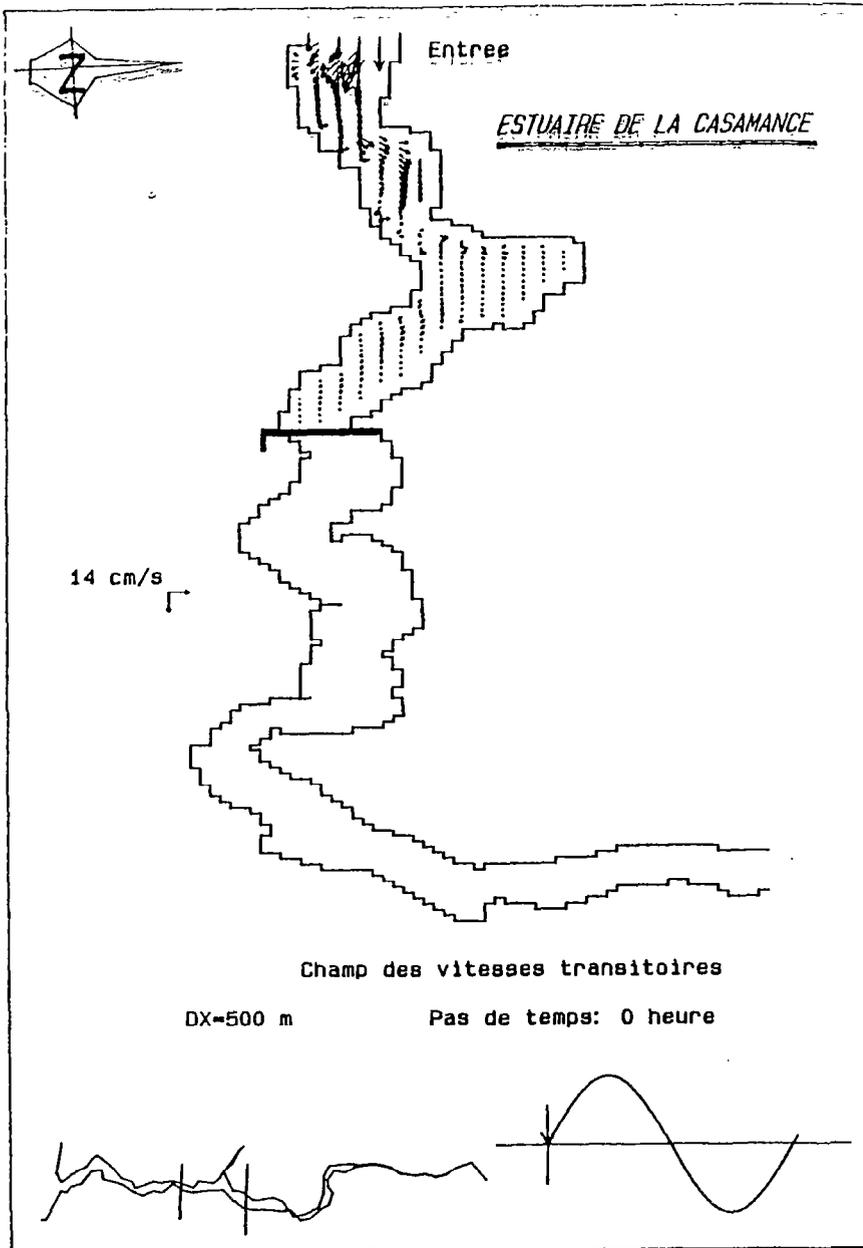
Les résultats des diverses simulations sont regroupés dans le tableau suivant:

	Goudomp	Diatakounda	Sefa
ZONE 1	Pas de changement	Pas de changement	Pas de changement
ZONE 2	Moyenne influence	Pas de changement	Pas de changement
ZONE 3		Pas de changement	Pas de changement
ZONE 4		Faible influence	Pas de changement
ZONE 5			Très faible influence

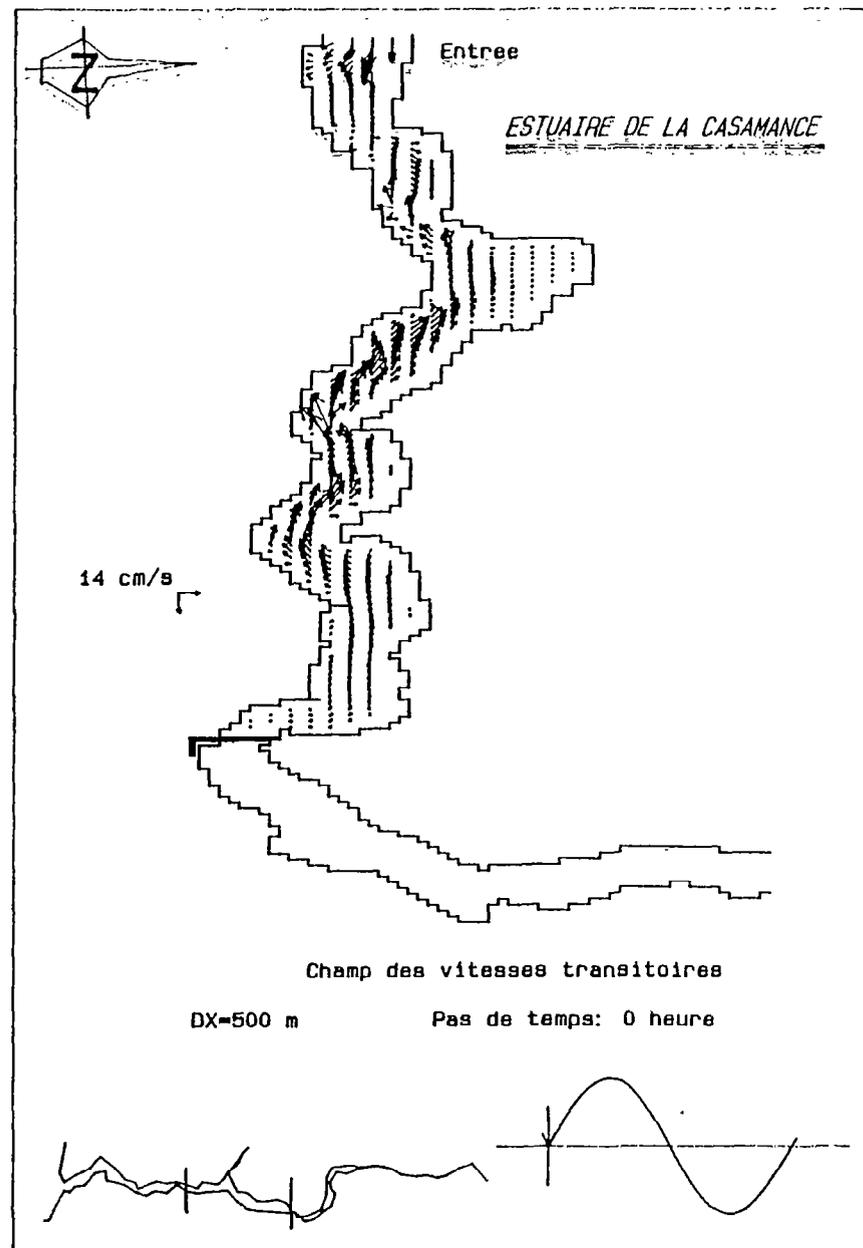
Dans les trois cas étudiés, la partie de l'estuaire comprise entre Adéane et Ziguinchor était peu influencée par la présence d'un barrage. Ce dernier affectera une région limitrophe dont l'extension dépend de la position du barrage. Par exemple, celui de Goudomp, étend son influence sur une longueur de 27 km, celui de Diatakounda n'influe les élévations et les vitesses que sur les vingt derniers kilomètres, quant au barrage de Sefa, il n'affecte les variables que sur une région limitrophe qui s'étend sur 15 kilomètres. Dans tous les cas, l'élévation augmente et la vitesse diminue, toutes les deux d'un facteur qui décroît de l'aval vers

l'amont. Ceci est en accord avec le comportement hydrodynamique de l'estuaire, dont les grandeurs des courants et des élévations diminuent progressivement en remontant son cours d'eau et subissent une forte atténuation au niveau de la baie d'Adéane.

Donner une estimation de l'influence des barrages sur la salinité, ou sur les ressources halieutiques du milieu sort du cadre de l'étude. Nous nous sommes contenté d'étudier les variations de la circulation et des élévations induites par un aménagement sur le lit principal qui, dans tous les cas, coupe l'estuaire en deux régions. Il s'est avéré que le barrage n'influe que sur une région limitée proche de son emplacement.



a: Barrage à Goudomp.



b: Barrage à Diattakounda.

fig.IV.48. Circulations transitoires dans les cas de barrage à Goudomp et Diattakounda.

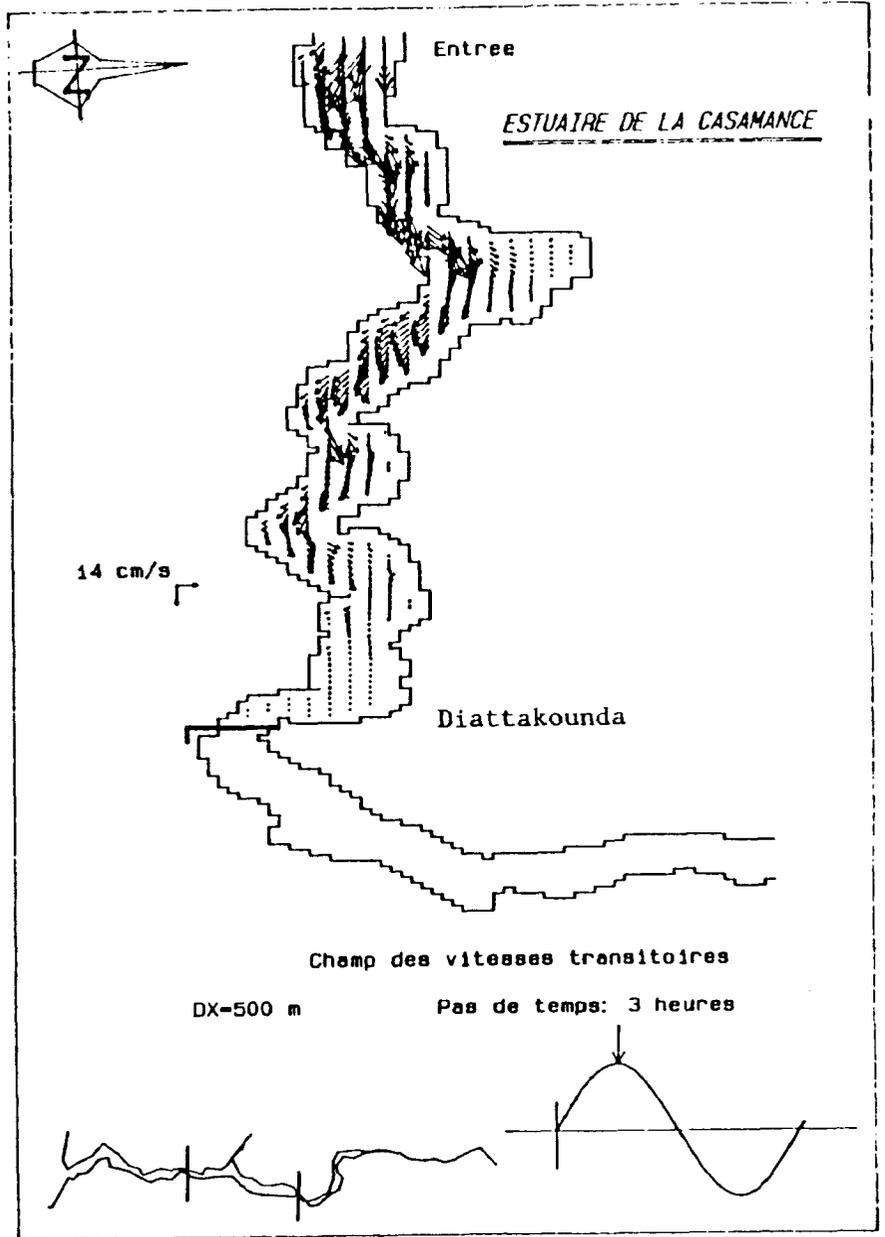
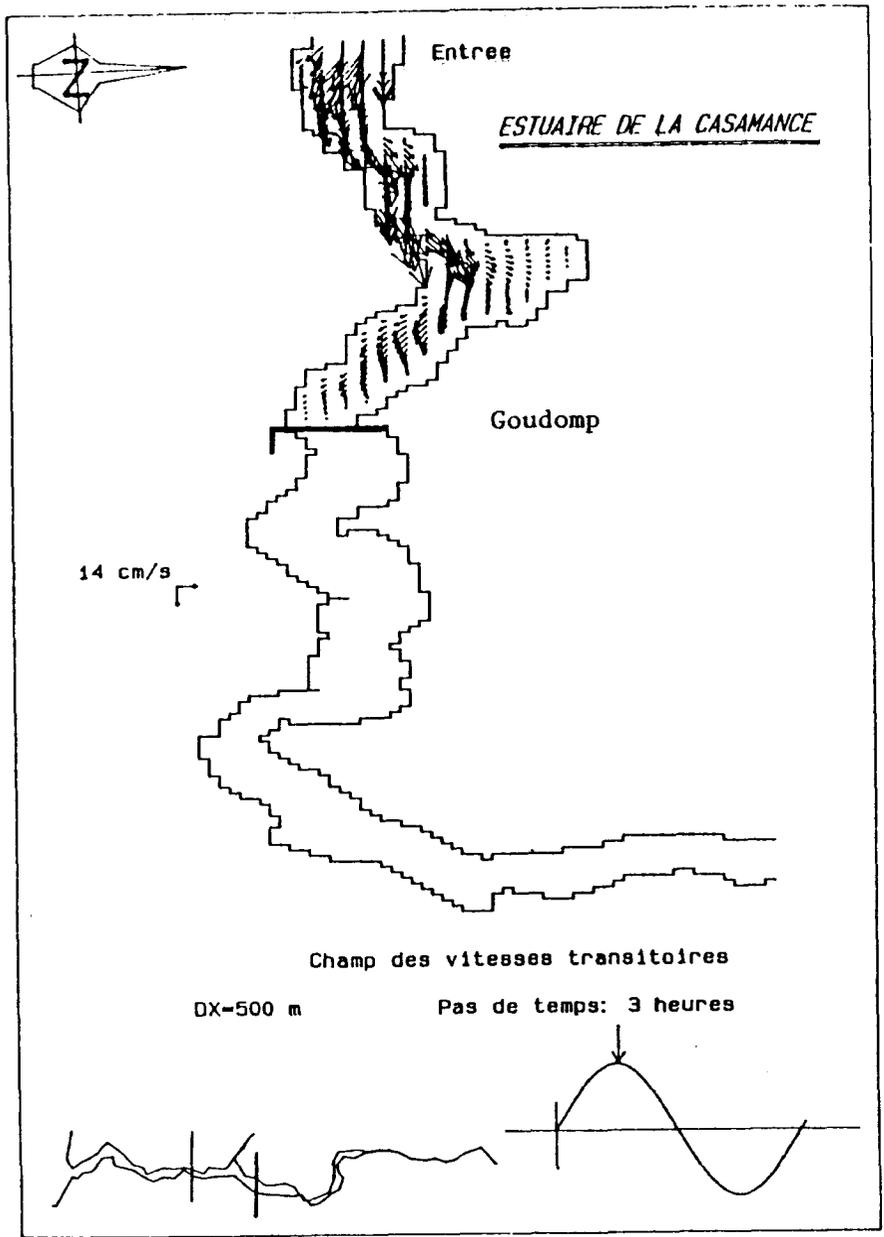
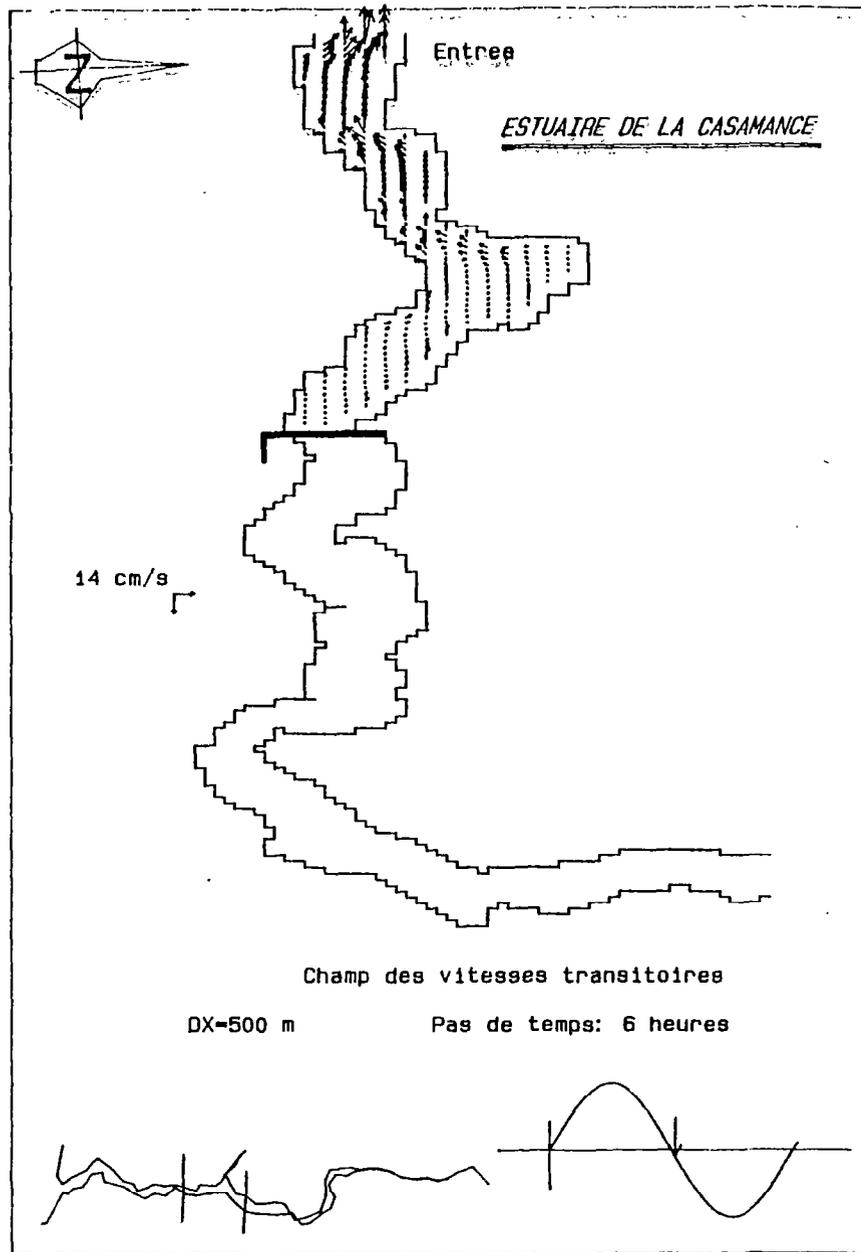
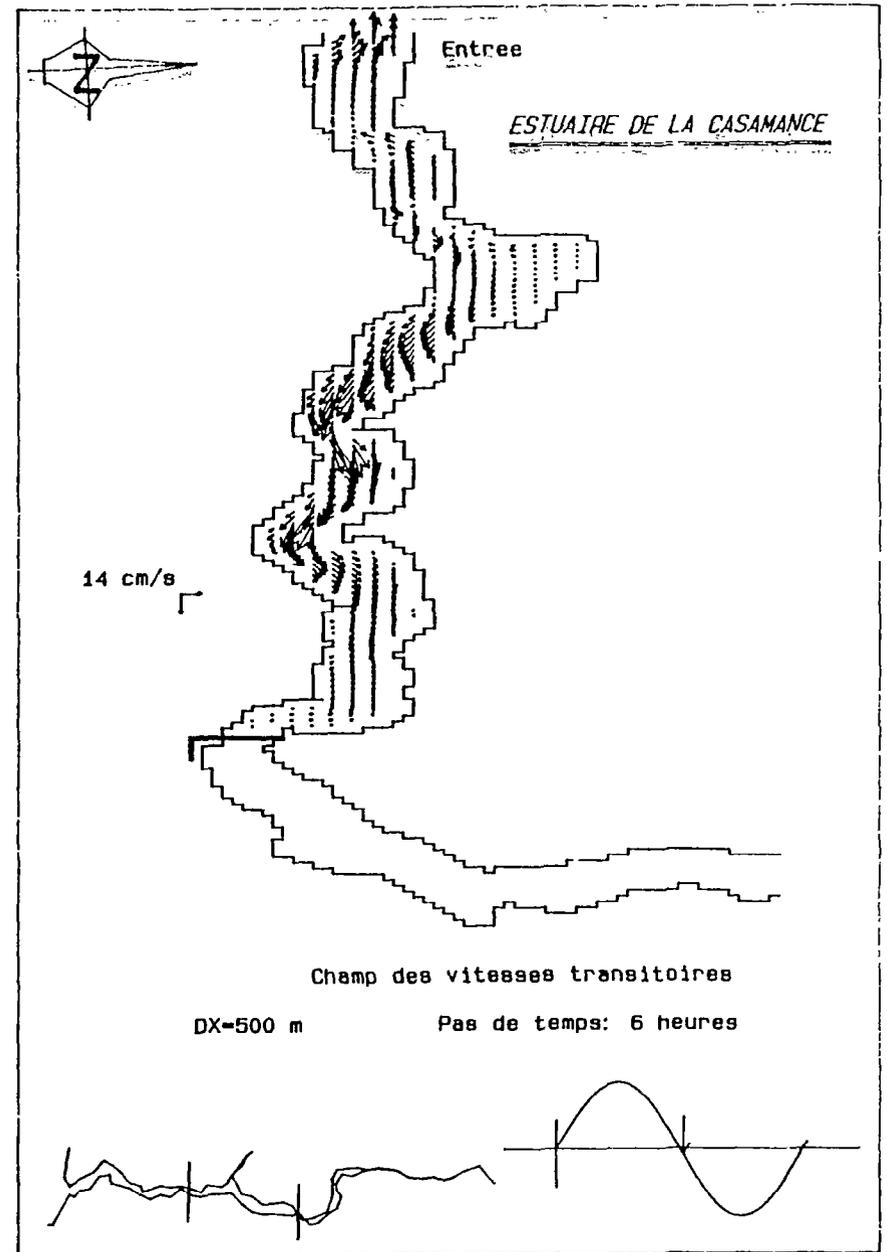


fig.IV.49-Circulation transitoire dans les cas de barrage à Goudomp et Diattakounda.

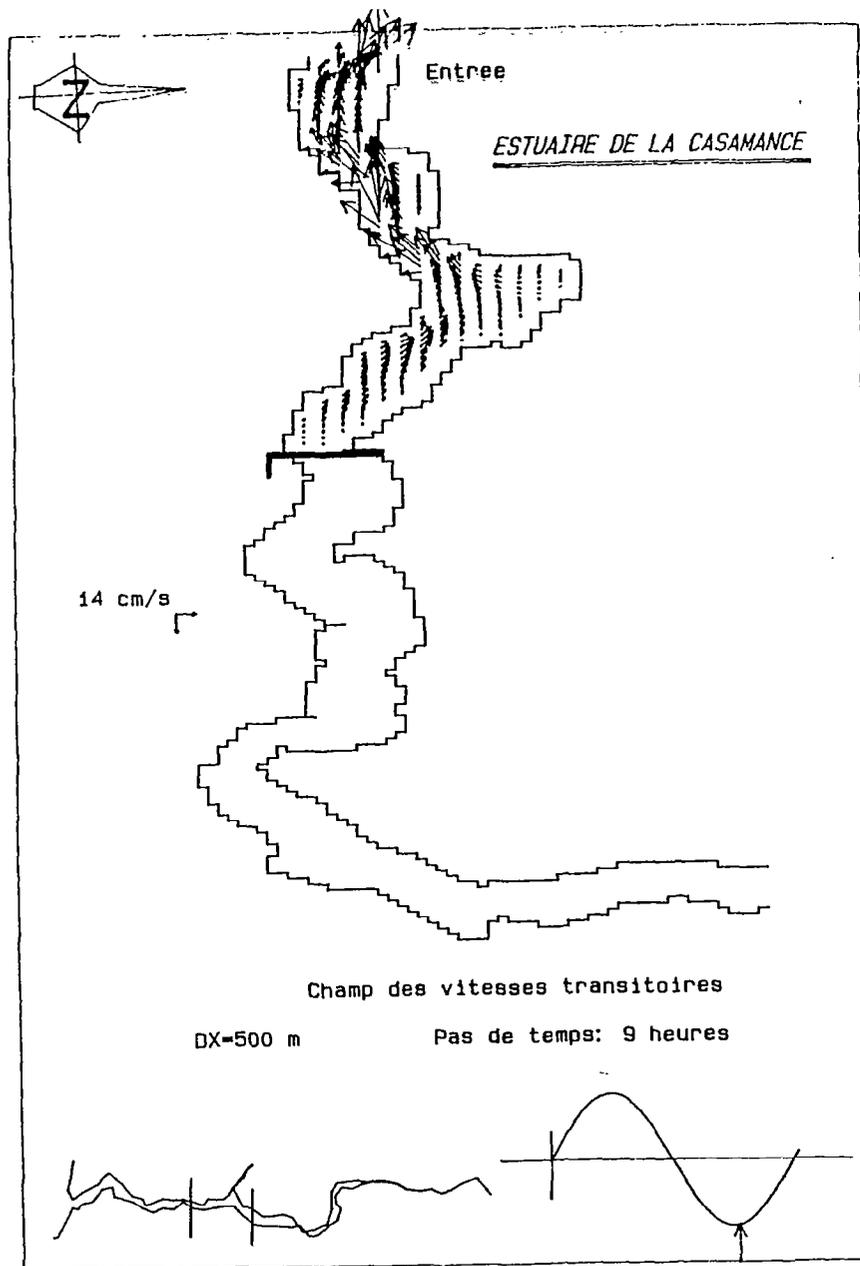


a: barrage à Goudomp

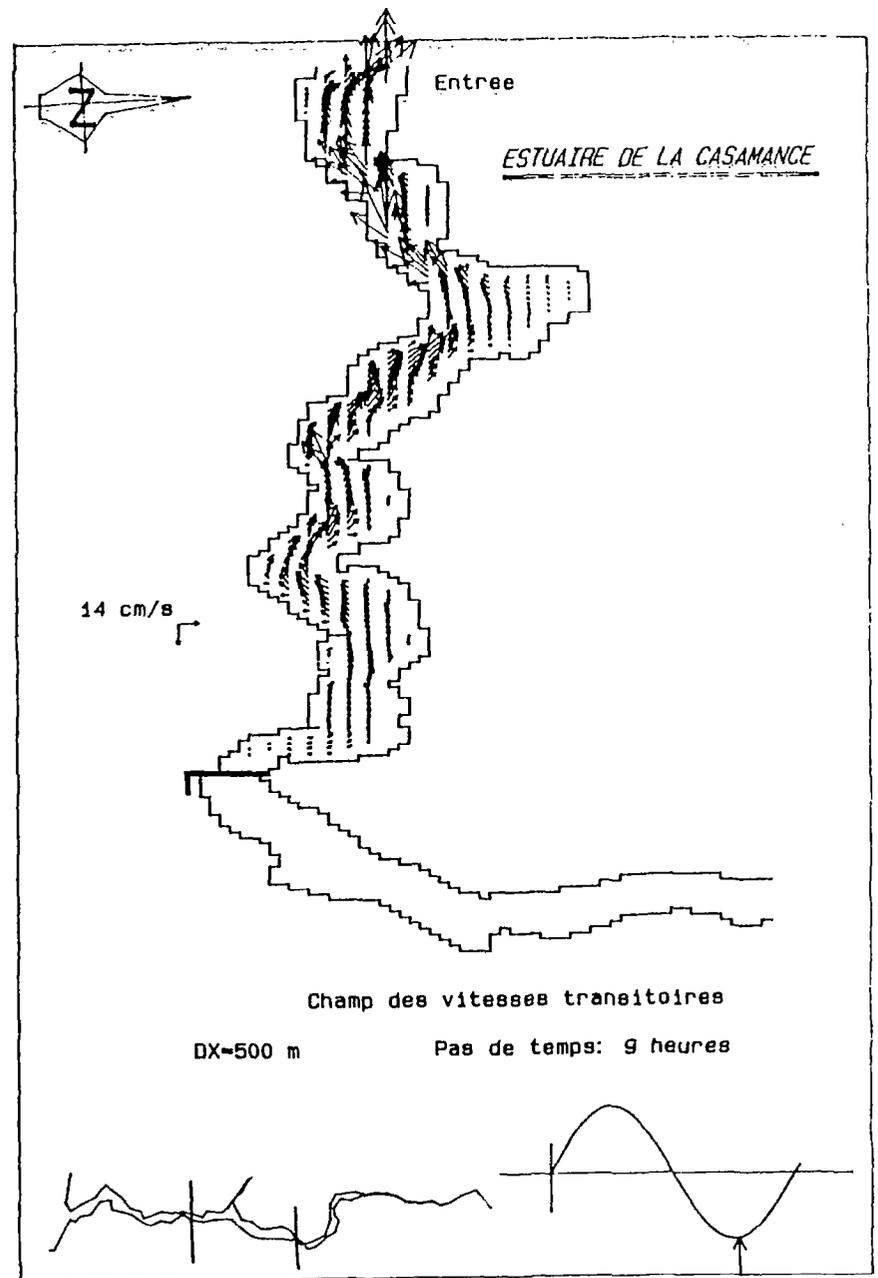


b: barrage à Diattakounda

fig.IV.50-Circulation transitoire dans les cas de barrage à Goudomp et Diattakounda.

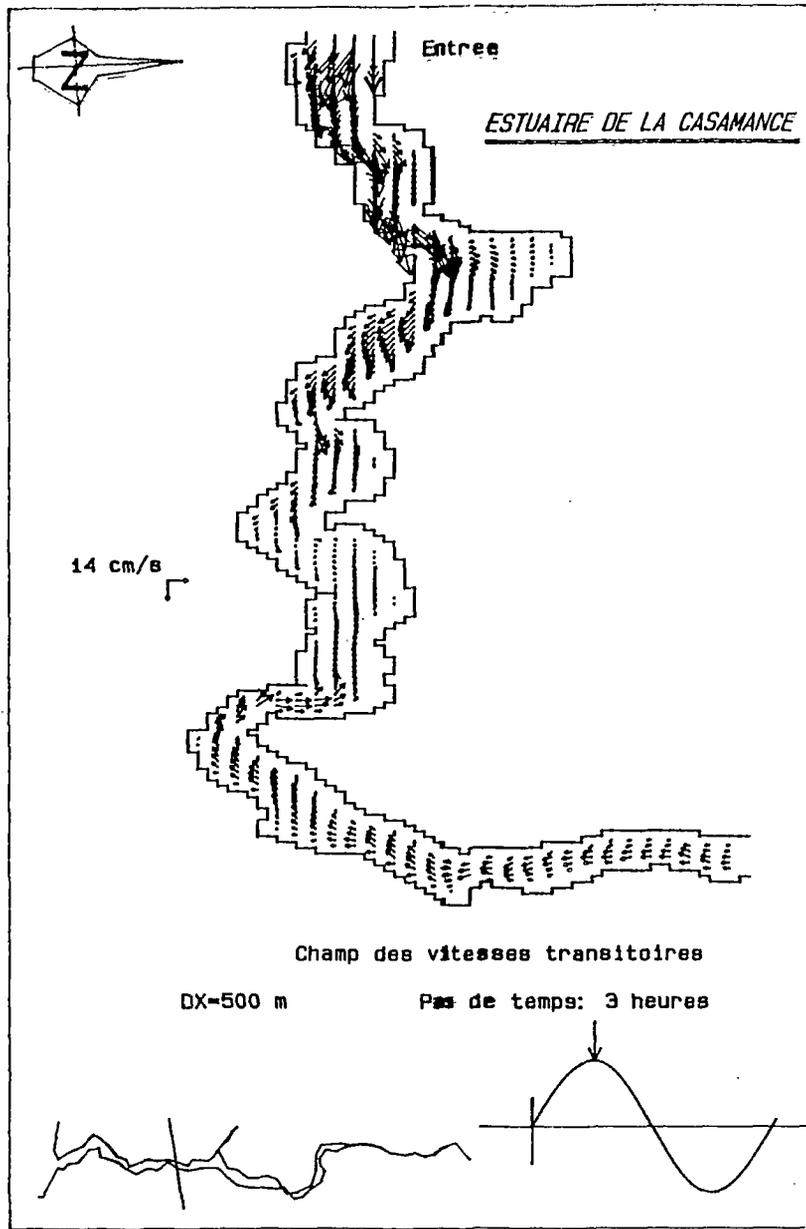


a: barrage à Goudomp

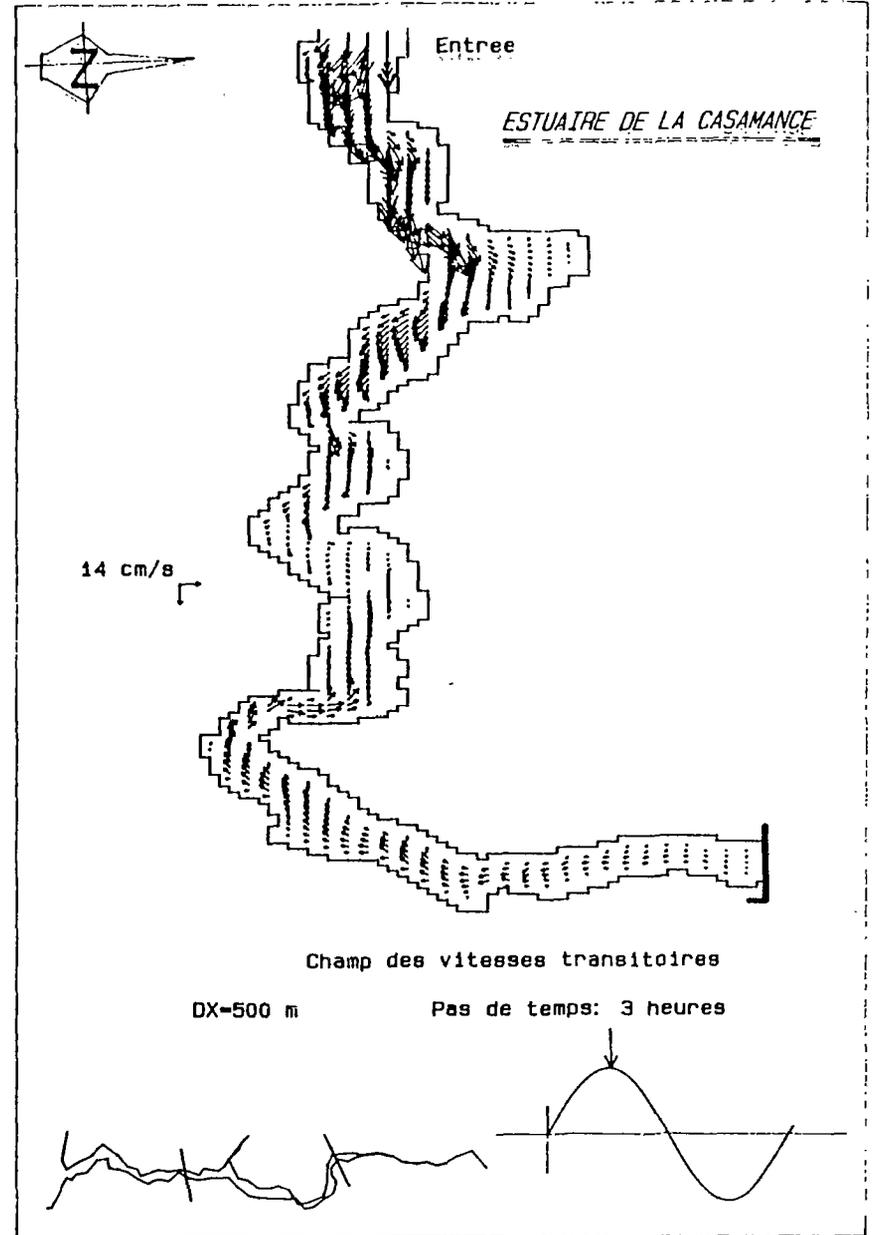


b: barrage à Diattakounda

fig.IV.51-Circulation transitoire dans les cas de barrage à Goudomp et Diattakounda.

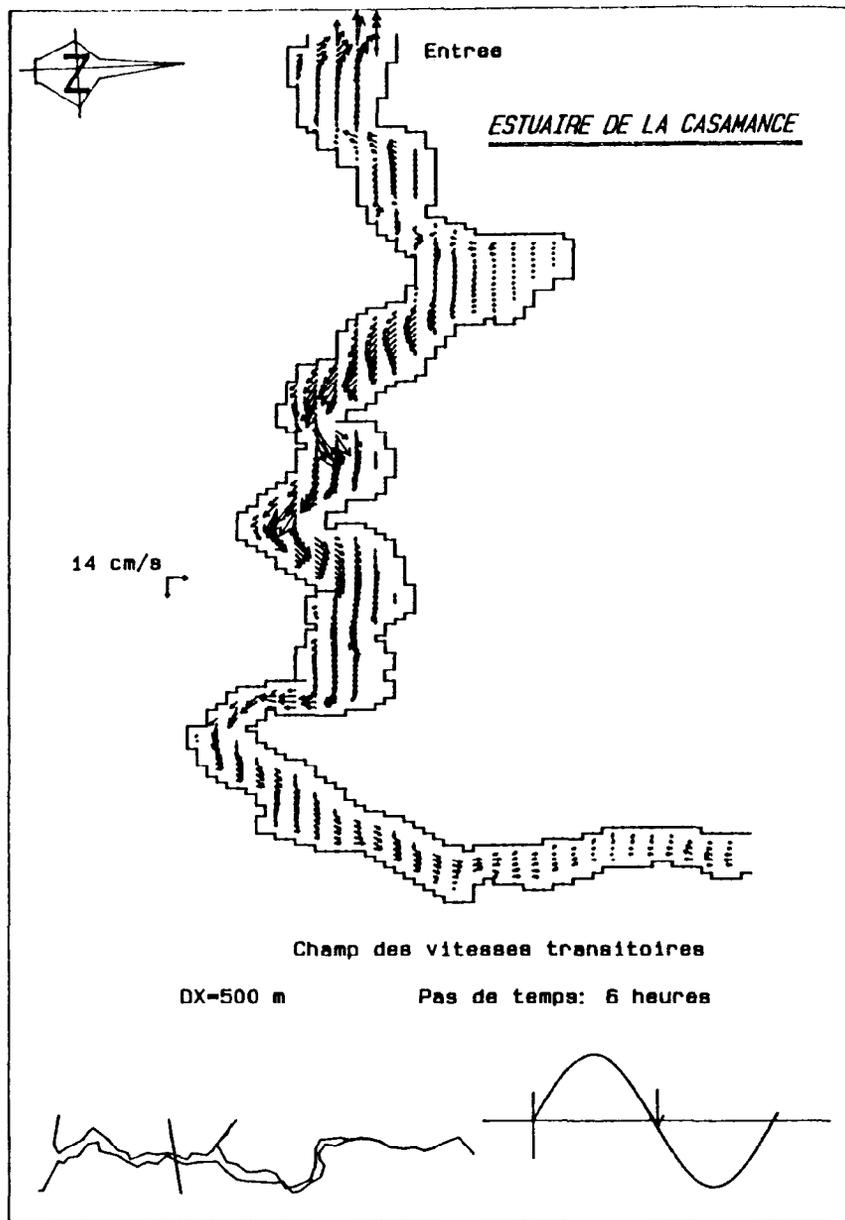


a:sans barrage

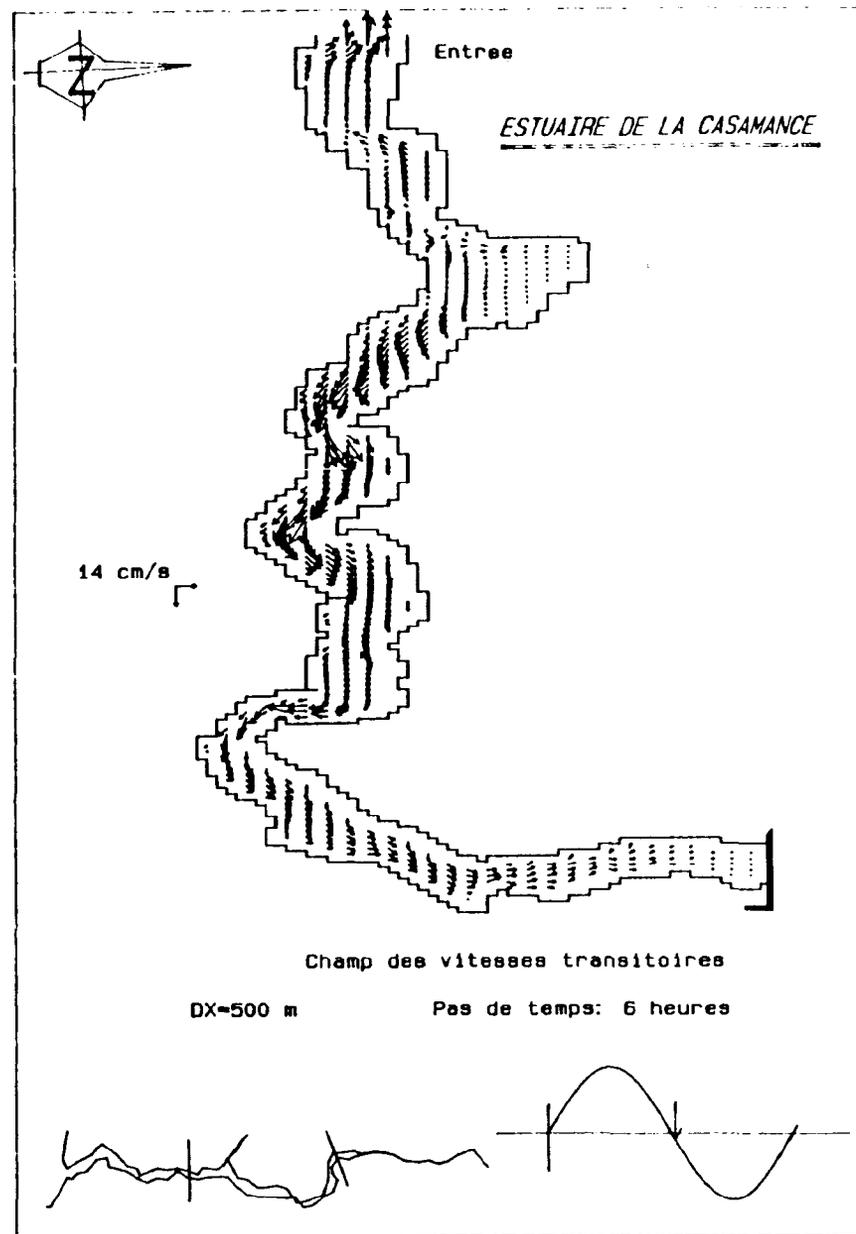


b:barrage à Séfa

fig.IV.52-Circulation transitoire dans les cas:sans barrage et avec barrage à Séfa.

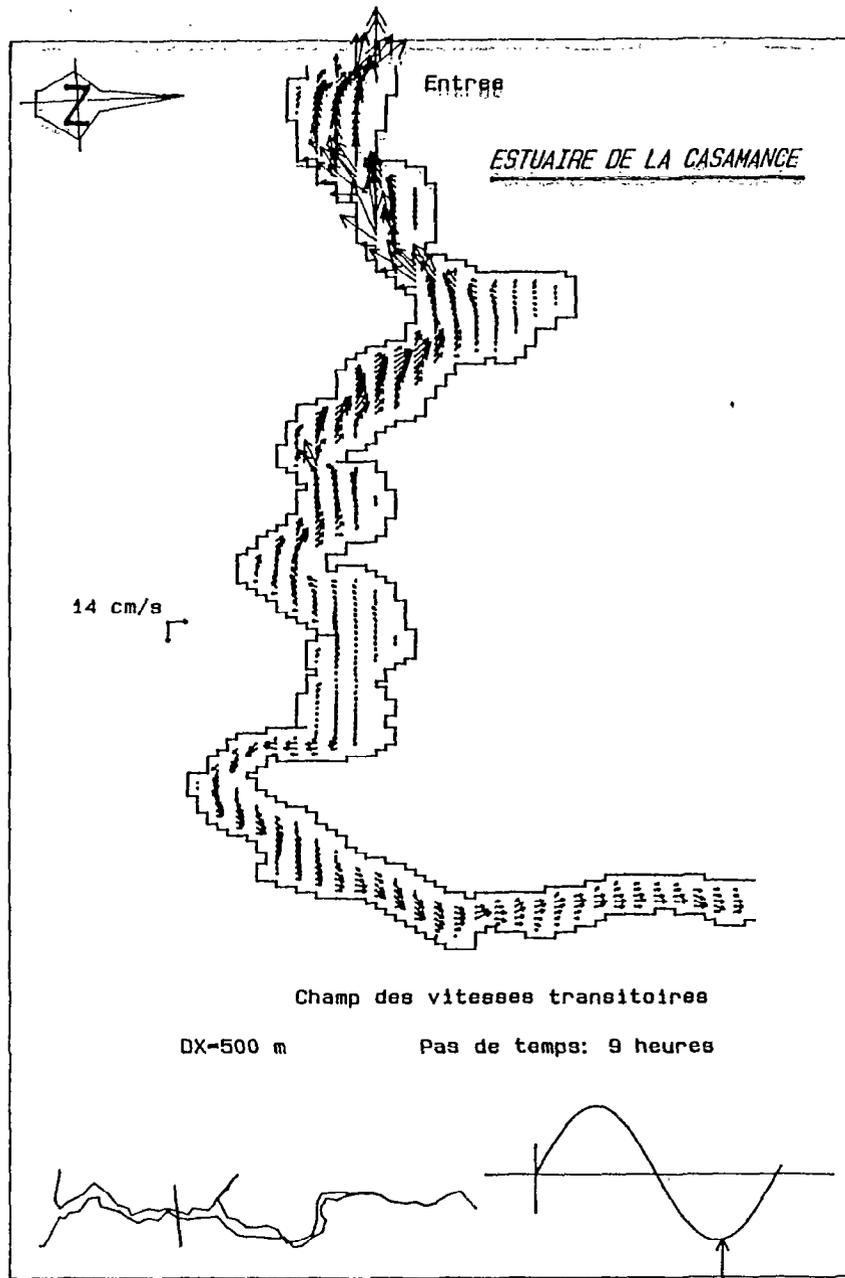


a:sans barrage

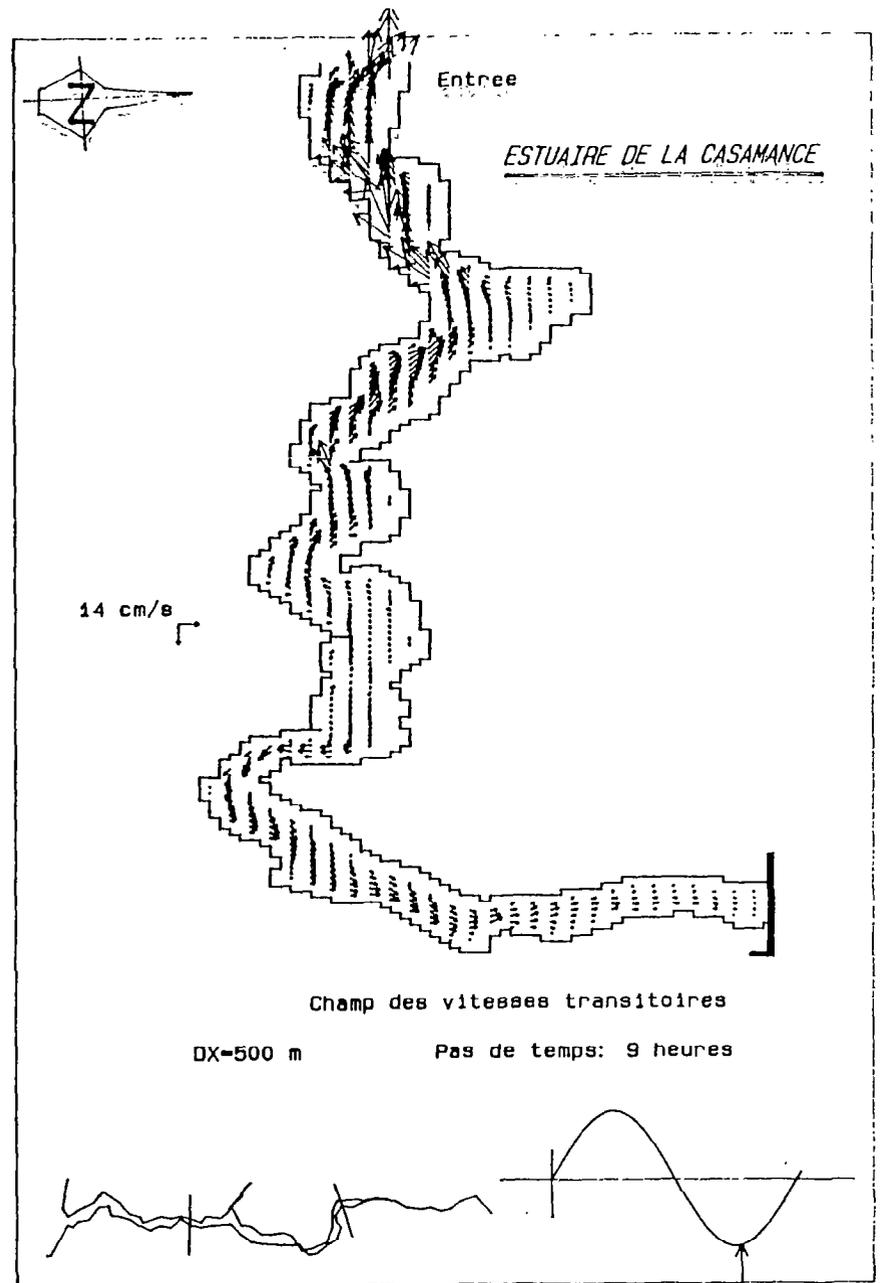


b:barrage à Séfa

fig.IV.53-Circulation transitoire dans les cas: sans barrage et avec barrage à Séfa.



a:sans barrage



b:barrage à Séfa

fig.IV.54-Circulation transitoire dans les cas: sans barrage et avec barrage à Séfa.

IV.12.2 Variation des profondeurs du lit principal

La bathymétrie des zones comprises entre les stations 16 et 19, les stations 20 et 24 et toute la partie amont à partir de la station 26 ont été modifiées comme indiqué sur la figure IV.55, pour tester l'influence des incertitudes sur la bathymétrie réelle, ou l'influence de modifications dues à des dragages éventuels.

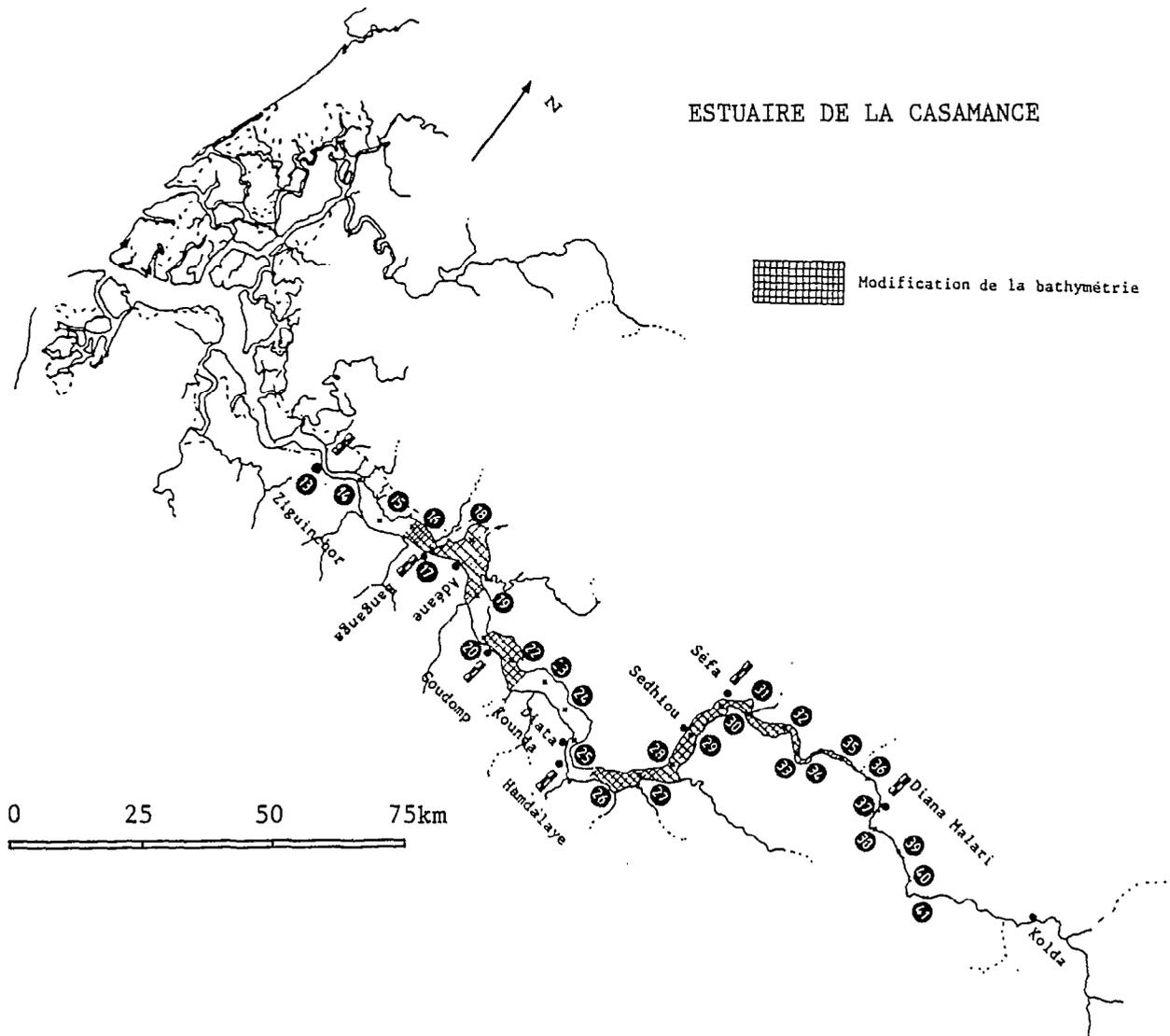


fig.IV.55-Zones où la bathymétrie a été modifiée.

Les divers tests ont conduit aux conclusions suivantes:

- La réduction des profondeurs dans la zone des stations 20, 21 et 22 conduit à une augmentation de l'amplitude de l'onde dans la région comprise entre l'aval de la station 17, à l'amont de la station 23. Son influence diminue progressivement en remontant l'estuaire; les parties comprises en amont de la station 32 et en aval de la station 17 sont peu sensibles.

- L'augmentation de la profondeur dans la zone comprise entre les stations 20 et 22, conduit à une atténuation de l'onde dans la partie comprise entre l'aval de la station 17 et la station 23. Par contre, une augmentation très forte se produit dans la zone des stations 24 et 25; celle-ci diminue progressivement d'ampleur mais se fait sentir sur toute la zone amont.

- Les variations de profondeurs ponctuelles sur quelques mailles du domaine d'intégration n'ont eu que des effets locaux, sans aucune influence sur le mécanisme général, même pour des valeurs excessives.

- Une augmentation des profondeurs dans la zone des stations 17, 18 et 19, a conduit à une réduction de l'amplitude de la marée dans la zone des stations 16 à 20, mais a faiblement influencé l'écoulement dans toute la partie amont.

- L'augmentation des profondeurs dans toute la partie amont de l'estuaire, à partir de la station 26 conduit à une diminution de l'amplitude de la marée assez nette dans toute la région modifiée, son influence diminue progressivement de la station 25 à la station 19 et la partie aval est peu influencée. Quant à la réduction des profondeurs dans la même zone, elle a eu l'effet d'augmenter sensiblement les amplitudes dans cette zone.

IV.13 Validation

La validation du modèle a été réalisée à partir d'une simulation d'observations récentes (du 14/02/1987 au 16/02/1987). Les résultats satisfaisants obtenus démontrent les bonnes performances du modèle pour la description de la circulation dans l'estuaire à mangroves du Sénégal (fig.IV.56, IV.57, IV.58, IV.59).

On ne pouvait s'attendre à une reproduction parfaite de la réalité, car l'outil élaboré repose sur un certain nombre d'hypothèses et de simplifications, notamment celles relatives à la tension en surface. En effet, les divers tests hypothétiques réalisés montrent, dans ce cas, une importante contribution du vent dans la circulation dans la partie amont de l'estuaire.

L'analyse des courbes obtenues montre que l'onde calculée est en phase avec l'onde observée et que les erreurs sur les amplitudes sont assez faibles. Il s'ensuit que les incertitudes sur les prévisions ne peuvent entraîner de conséquences importantes sur les bilans de masse d'eau échangée.

En conséquence, le bon comportement du modèle valide les hypothèses choisies, la répartition spatiale des coefficients de frottement et surtout les divers traitements numériques à l'intérieur et aux frontières du domaine d'intégration.

CONDITION D'ENTREE

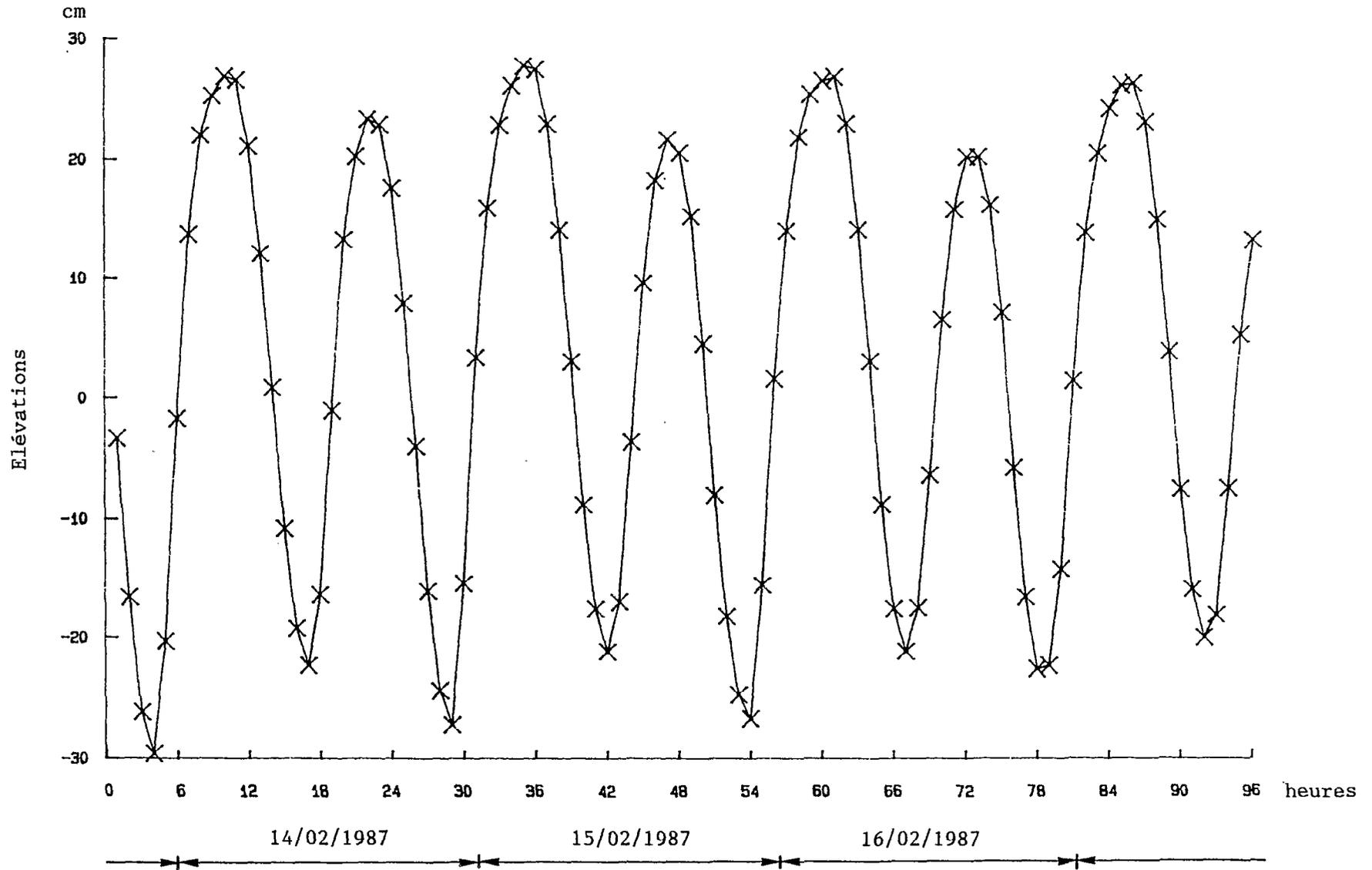


fig.IV.56- Condition d'entrée du système.

BANGANGA

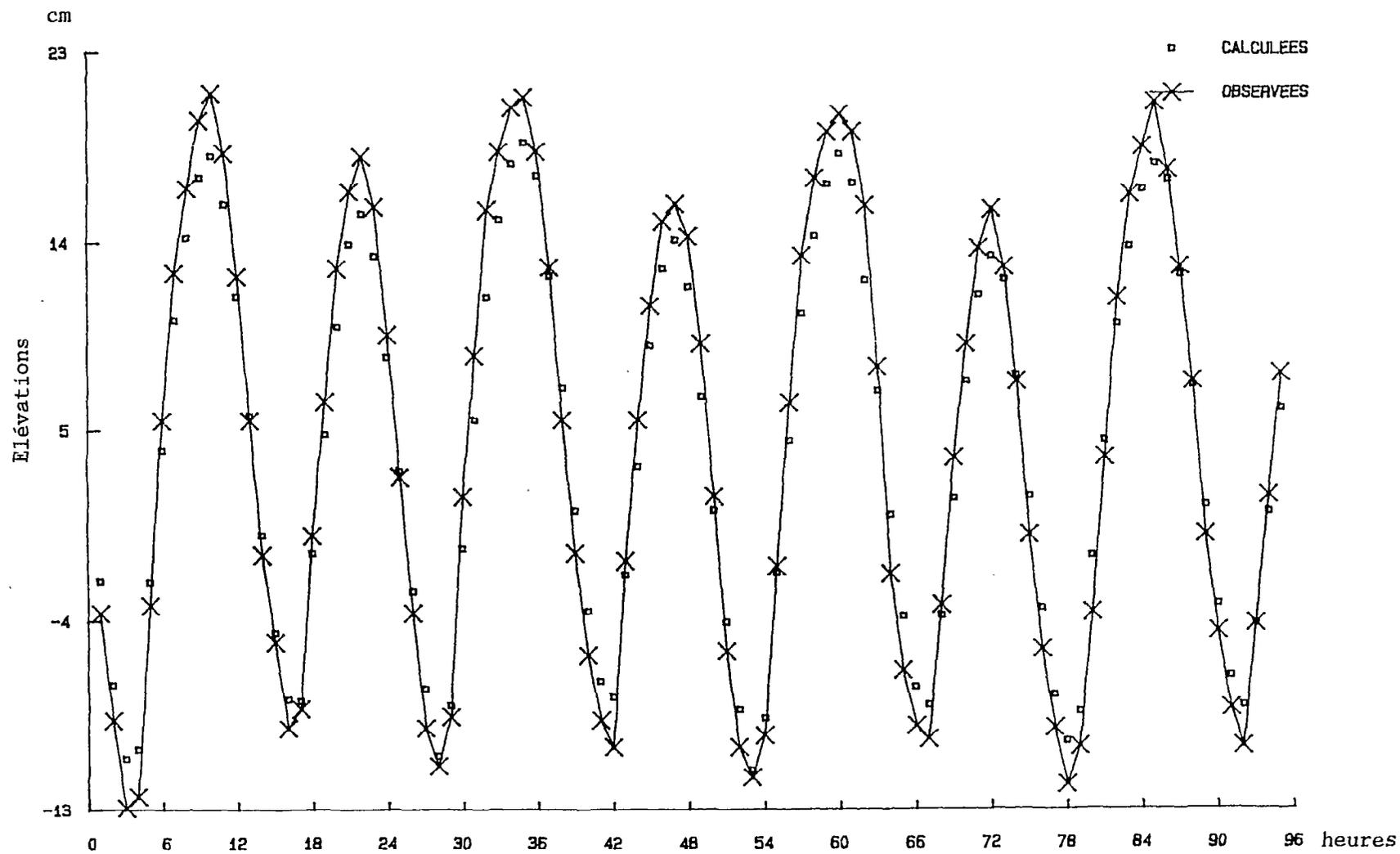


fig.IV.57- Elévations calculées et observées à la station de Banganga.

GOULDOMP

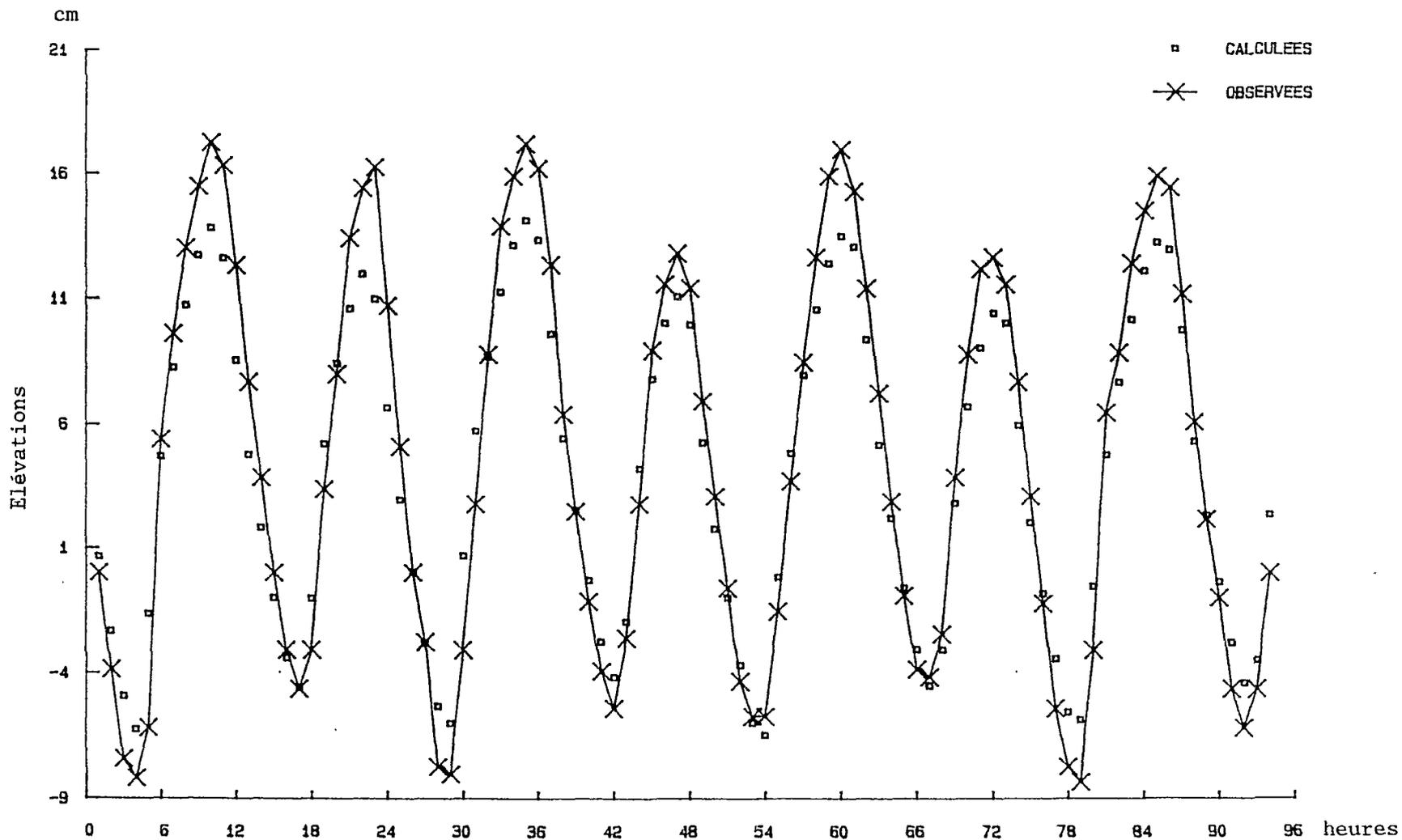


fig.IV.58- Elévations calculées et observées à la station de Goudomp

HAMDALAYE

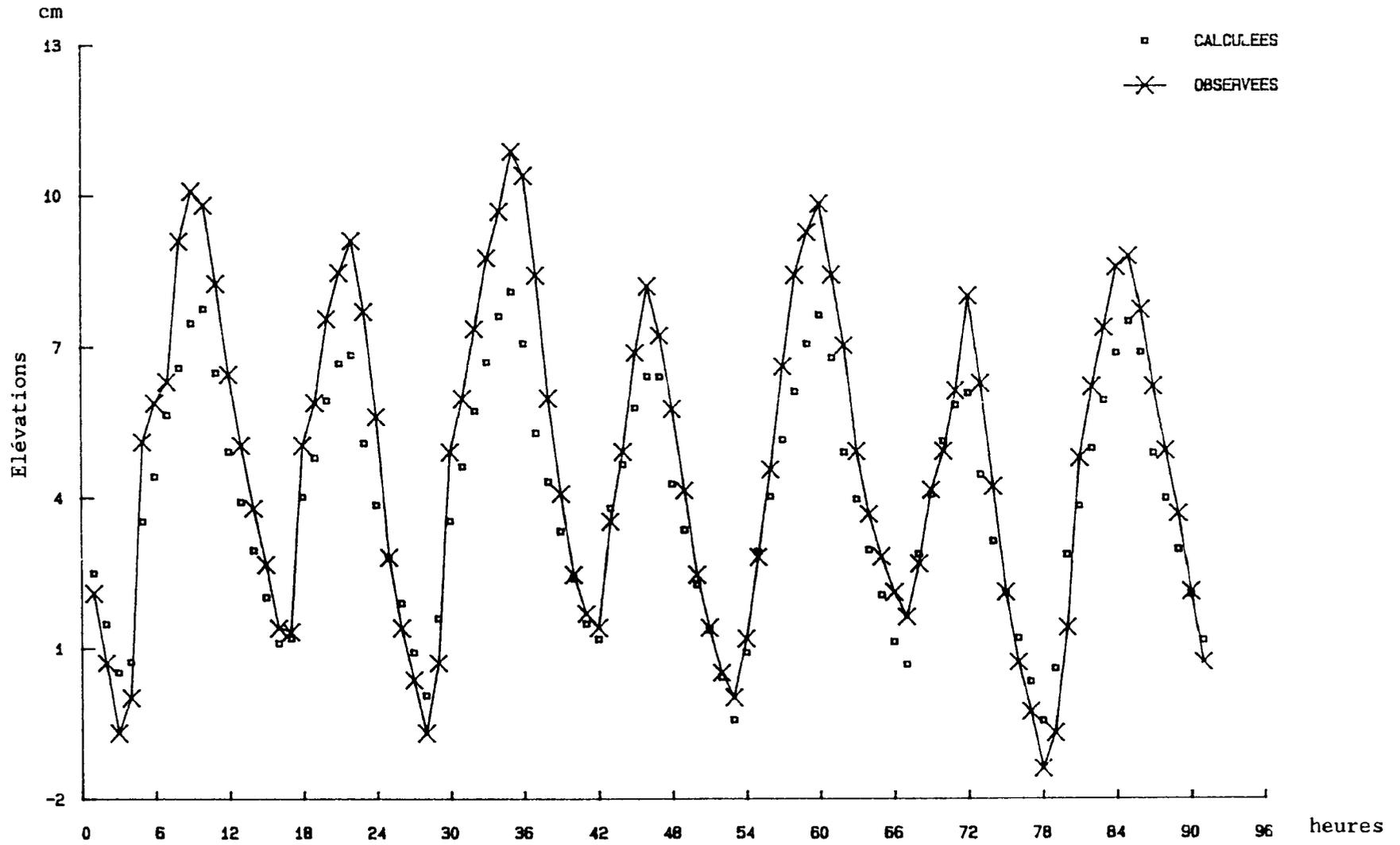


fig.IV.59- Elévations calculées et observées à la station d'Hamdalaye.

IV.14. Conclusion

A l'issue de ce travail nous disposons d'un modèle bi-dimensionnel capable de simuler la propagation de la marée dans l'estuaire à mangrove du Sénégal. Ce modèle a été confronté à un certain nombre de cas schématiques qui ont permis d'étudier son comportement vis à vis de problèmes pratiques et surtout ses qualités numériques.

L'onde semi-diurne M2, composante dominante de la marée en Casamance, a été utilisée comme fonction de forçage et a permis d'évaluer, d'une part, la contribution des divers termes des équations dans la circulation des masses d'eau et, d'autre part, de simuler les conséquences de certains aménagements du lit principal. La validation de nos hypothèses a enfin été réalisée à partir de la simulation d'une marée réelle; les résultats satisfaisants obtenus mettent en évidence les performances de la méthode utilisée.

Le modèle développé repose sur une schématisation du domaine d'intégration à partir de mailles imbriquées. Cela permet de réduire le nombre de variables dépendantes nécessaires ainsi que l'apparition d'ondes parasites de longueur inférieur à $2\Delta X$. Malgré certaines limitations sur le pas de temps imposées par la structure de la résolution basée sur la technique A.D.I., la stabilité inconditionnelle de la discrétisation utilisée, et les différents traitements numériques des noeuds internes, des noeuds limitrophes et des frontières mobiles, rend le modèle proposé adaptable à plusieurs cas de figures.

L'ensemble des études présentées nous a apporté une confiance certaine en la méthode proposée ainsi qu'une estimation de la qualité des prédictions que l'on peut réaliser à partir des paramètres choisis.

CHAPITRE 5
MOUVEMENT RESIDUEL

Chapitre V

MOUVEMENT RESIDUEL

V.1 Introduction

Les courants assez forts qui se produisent sous l'action de la marée ou des perturbations climatiques sont relativement transitoires. Les mécanismes décrits par les modèles hydrodynamiques numériques changent et évoluent quitte même à disparaître laissant derrière eux une contribution résiduelle très petite comparée à la circulation qui s'est déjà produite. L'intérêt des biologistes est généralement plus porté sur ces phénomènes qui évoluent à des échelles spatio-temporelles différentes.

Le transport de masse est un phénomène qui évolue à des échelles de temps plus longues que celles qui caractérisent les mouvements transitoires. Quand on parle de transport, on sous-entend le phénomène hydrodynamique de dispersion, qui découle de l'interaction de la convection différentielle et de la diffusion turbulente, toutes les deux étant fonction du champ de vitesses qui règne dans le milieu. Les origines des phénomènes dispersifs sont nombreuses: les diffusions moléculaires et turbulentes (Patankar *et al.*, 1980), la convection différentielle due à la distribution non-uniforme des vitesses (Nihoul *et al.*, 1981), la variation de la concentration sur la verticale (Verboon *et al.*, 1982), et la variation de température (Zimmerman, 1976).

La connaissance des mouvements transitoires qui résultent de l'action oscillante de la marée sur un milieu côtier, n'est pas toujours suffisante pour déterminer les caractéristiques du transport de masse qui y est induit. Si la distribution moyenne des matières dissoutes ou en suspension est largement influencée par le mouvement oscillatoire de la

marée qui contribue à la dispersion de leur concentration, par contre, le transport moyen est contrôlé par le mouvement résiduel.

Les courants résiduels peuvent avoir divers origines, dont les tensions de cisaillement dues au vent, l'entraînement par un gradient de densité dû à une répartition non-uniforme de la salinité ou de la température. Cependant, l'interaction des termes non-linéaires des équations du mouvement, surtout dans les milieux de faible profondeur, peut conduire à l'apparition de mouvements résiduels.

Le mécanisme suivant lequel les courants résiduels sont créés à travers le terme advectif dans les équations dynamiques est facile à visualiser dans des régions comme l'estuaire de la Casamance où l'ellipticité des courants semi-diurnes dominants est négligeable. Les forces d'entraînement perpendiculaires aux lignes de courant sont les forces centrifuges qui ont la même direction en flot ou en jusant; elles sont ainsi capables de maintenir un courant résiduel établi.

V.2 Divers types d'approche

Depuis le début des années soixante dix, plusieurs chercheurs et laboratoires se sont penchés sur l'étude des mouvements résiduels en essayant de leur trouver une explication plus complète, mais on se heurte dans la littérature à plusieurs définitions, parfois contradictoires, de ces mouvements. Les interprétations rencontrées se regroupent en trois approches:

1- Expérimentale: dans laquelle le courant résiduel est obtenu par soustraction du courant calculé au mouvement observé.

2- Mathématique: où le résiduel est défini par le mouvement obtenu à partir des équations fondamentales moyennes (réduites), où on suppose que l'état final est quasi-permanent.

3- Hydrodynamique: où le courant résiduel est calculé à partir de la moyenne mobile du courant transitoire, sur une période suffisamment longue pour éliminer la totalité de la contribution de la marée.

L'approche expérimentale présente quelques inconvénients en particulier le fait de retrancher aux courants observés les courants calculés qui, eux, sont déduits d'un calcul approximatif. Les données observées et leur dépouillement doivent être de très bonne qualité. De plus, il n'est pas clair actuellement comment seront éliminés les courants induits par le vent ou par des perturbations climatiques de longue période.

L'approche mathématique est valable dans le cas où la circulation résiduelle varie sur une période de temps assez grande pour être considérée comme indépendante du temps. Par ailleurs, la recherche des solutions de l'état permanent demande des fonctions de forçage de ce même état, donc nécessite une moyenne temporelle à long terme. La linéarisation du terme de frottement, hypothèse couramment admise dans ce type de résolution, n'est pas facilement justifiable dans tous les milieux (Hunter, 1975).

L'approche hydrodynamique s'avère la plus adéquate dans la recherche du courant résiduel. Les moyennes mobiles sur une période T suffisamment longue permettent d'éliminer les courants transitoires induits par le vent et la marée. Les grandeurs définies de cette façon, peuvent varier lentement dans le temps, rendant, dans la majorité des cas, l'hypothèse d'un état quasi-permanent largement acceptable.

En termes mathématiques, il existe deux types de modèles résiduels:

Type A: Les modèles se basant sur les résultats du modèle transitoire où le calcul des mouvements résiduels est effectué après avoir obtenu les résultats de la circulation transitoire.

Type B: L'intégration des équations hydrodynamiques de l'écoulement transitoire sur la période T , conduit au système d'équations résiduelles. Les termes de tensions de marées sont utilisés comme fonction de forçage; le système résiduel obtenu est résolu en prenant en compte les autres forces extérieures. Ainsi la moyenne est effectuée avant d'entamer le calcul du résiduel.

Chacune des ces deux approches possède des avantages et des inconvénients, leurs performances dépendant des processus étudiés et de la qualité des mesures disponibles. Pour les modèles du type B, la précision des résultats est intimement liée à l'exactitude des termes relatifs aux tensions de marée et à la représentativité d'un terme de frottement linéarisé. Quant aux modèles du type A, la conservation de masse et la précision des résultats du modèle transitoire, sont des facteurs déterminants dans leur utilisation.

V.3 Modèle de type A

V.3.1 Approche eulerienne

Dans un champ tri-dimensionnel de courant, la vitesse eulerienne est la vitesse qui se produit en un point fixe P de coordonnées (P_x, P_y, P_z) . Cette vitesse évolue dans le temps et ses valeurs $U_p = U(P_x, P_y, P_z, t)$ sont déterminées par rapport à un repère fixe (O_x, O_y, O_z) .

En supposant qu'aucune interaction non-linéaire ne se produit entre les diverses harmoniques de la marée, on peut admettre que les courants résiduels sont dus à la seule composante prise en considération (M_2 dans notre cas). Le courant ainsi calculé sera lié aux caractéristiques de la fonction de forçage due à la marée, et va donc fluctuer sur une période assez longue qui, comparée à un cycle semi-diurne, pourrait être considérée comme quasi-permanente et ainsi être relié uniquement à ce cycle.

Dans les estuaires bien mélangés tel que celui de la Casamance, on peut négliger toute structure verticale du courant. Le transport local eulerien par unité de largeur est alors exprimé par:

$$U_{TLE} = \int_{-h}^{\xi} U_E(x,y,z,t) dz \quad (V.1)$$

La vitesse de transport eulerien est définie par:

$$U_{TE} = \frac{U_{TLE}}{h + \xi} \quad (V.2)$$

Pour calculer la circulation résiduelle la description du mouvement moyen est la plus convenable. Celle-ci est obtenue en calculant la moyenne temporelle du courant sur une période T, telle qu'une grandeur ψ admet comme résiduel ψ_{RES} défini par:

$$\psi_{RES} = \frac{1}{T} \int_{t-1/2T}^{t+1/2T} \psi dt = \langle \psi \rangle \quad (V.3)$$

d'où le transport résiduel:

$$U_{TR} = \langle U_{TE} \rangle \quad (V.4)$$

et la vitesse résiduelle:

$$U_R = \langle U_{TLE} \rangle \quad (V.5)$$

Il se dégage des expressions (V.1,V.2,V.3,V.5) que le transport résiduel est lié à la vitesse résiduelle par l'expression:

$$U_{TR} = hU_R + \langle \xi U_{TE} \rangle \quad (V.6)$$

La vitesse résiduelle eulerienne de transport serait alors;

$$U_{ERT} = \frac{U_{TR}}{h + \xi} \approx \frac{U_{TR}}{h} \quad (V.7)$$

Le transport intégré sur le temps est donc fonction de la vitesse résiduelle et de l'intégration de la vitesse de transport eulerien. On obtient alors:

$$U_{ERT} = \frac{\langle \xi - \xi_0 \rangle \langle U_{TR} - U_{TE0} \rangle}{h + \xi} \approx \frac{\langle \xi \rangle \langle U_{TR} \rangle}{h} \quad (V.8)$$

V.3.2 Approche lagrangienne

La vitesse lagrangienne est celle d'une particule fluide qui a commencé son mouvement en une position P au temps t=0 et que l'on suit dans le temps. La relation entre les vitesses euleriennes et lagrangiennes serait alors:

$$U_L(P,t) = U_E(f(P,t'),t) \quad (V.9)$$

Où la position f(P,t') au temps t' est donnée par:

$$f(P,t') = P + \int_0^{t'} U_L(P,\tau) d\tau \quad (V.10)$$

donc,

$$U_L(P,t) = \frac{\partial}{\partial t} [f(P,t)] \quad (V.11)$$

La moyenne sur la période de temps T caractéristique du phénomène étudié conduit à la vitesse résiduelle lagrangienne:

$$U_{0,L} = \langle U_L(P,t) \rangle = \frac{1}{T} \Delta f(P,t) \quad (V.12)$$

Où le déplacement $\Delta f(P,t)$ est exprimé par:

$$\Delta f(P,t) = f(P,t+1/2T) - f(P,t-1/2T) \quad (V.13)$$

V.3.3 Entraînement de Stokes

Les expériences réalisées sur des milieux naturels ont montré que, dans la majorité des cas, la vitesse lagrangienne n'est pas égale à la vitesse eulerienne calculée à sa position de départ. La différence entre elles est dite "Vitesse d'entraînement de Stokes" (Longuet-Higgins, 1969, 1972).

En effet, si une colonne fluide qui occupe à l'instant t_0 une position X_0 , se déplace durant une période T , sa vitesse de déplacement est:

$$U + \left[\int_{t_0}^t U dt \right] \nabla U \quad (V.14)$$

Si le déplacement $(f-P)$ est petit par rapport à l'échelle à laquelle la vitesse change, l'équation de la vitesse lagrangienne peut être développée en des séries de Taylor, qui conduit à l'expression:

$$\begin{aligned} U_L(P, t) &= U_E(P, t) + (f-P) \nabla [U_E(P, t)] \\ &= U_E(P, t) + \left[\int_0^t U_L(P, \tau) d\tau \nabla \right] U_E(P, t) \end{aligned} \quad (V.15)$$

La moyenne temporelle de l'équation précédente conduit à:

$$U_{0L}(P, t) = U_{0E}(P, t) + \underbrace{\left[\int_{t-1/2T}^{t+1/2T} \left[\int_0^\theta U_L(P, \tau) d\tau \nabla \right] [U_E(P, \theta) d\theta] \right]}_C \quad (V.16)$$

L'expression (V.16) est due aux travaux de Longuet-Higgins (1969), qui a démontré que pour calculer le flux moyen qui passe à travers

un point fixe, il est nécessaire de connaître plus que la vitesse moyenne sur la verticale en ce point.

Le terme C (entraînement de Stokes) dépend des échelles spatio-temporelles du courant transitoire oscillant. Dans certains milieux où ce dernier est supérieur au courant moyen, la composante de Stokes peut être dominante dans les processus de transport de masse. Longuet-Higgins a montré que, dans certaines régions caractérisées par une faible pente, la vitesse de Stokes prend la même direction que la vitesse de phase, par contre, si la pente est forte, le signe de cette vitesse est inversé; sa direction est alors la même que celle de la propagation de marée, mais le transport total de masse se fait dans la direction opposée. L'application de (V.16) à des ondes gravitaires progressives fut réalisé en premier par Stokes (1847) et repris par Lamb (1932).

Il s'ensuit que la seule connaissance du courant en un point fixe, ne permet pas de déduire quelle a été la vitesse et la direction des particules fluides qui sont passées en ce point, quelle que soit la longueur de l'enregistrement. Une particule fluide n'est jamais figée en une position fixe qui est celle de l'appareil de mesure, mais elle subit une faible oscillation qui l'entraîne à d'autres endroits où règne un autre champ de vitesse qui peut être différent de celui dont elle est issue. La détermination du transport nécessite en conséquence la connaissance de la vitesse au point considéré et celle du gradient de vitesse dans le voisinage immédiat du point de mesure. Si la vitesse moyenne eulerienne en ce point fixe est nulle, la vitesse de transport de masse est généralement différente de zéro.

La variation du niveau de l'eau durant la propagation de l'onde entraîne un déplacement des particules fluides. La vitesse résiduelle de transport eulerien donnée par (V.16) exprime la vitesse nécessaire pour transporter le même volume fluide qui a été déjà entraîné

en une position X_0 . Cette vitesse dépend de la géométrie du milieu, elle augmente quand la profondeur et la largeur du chenal diminuent, afin de satisfaire la conservation de masse. Le champ des courants calculé à partir de (V.16) n'est, en général, pas celui que suivrait un nuage de traceur; Pingree et Maddock (1977), ont montré que ce n'est le cas que pour une onde simple où le mouvement est uni-directionnel avec un gradient spatial de vitesses assez faible.

Dans les régions de faible profondeur, où le mouvement résiduel est influencé par la topographie du milieu, le gradient de vitesse n'est pas une fonction simple à déterminer. L'approche classique qui consiste à considérer le mouvement lagrangien comme la somme des mouvements euleriens et de l'entraînement de Stokes devient trop approximative. Il a été démontré, d'une part, par des observations sur le terrain (Dooley, 1974) et, d'autre part, par une analyse théorique (Zimmerman, 1978) qu'une forte variation spatiale du champ de vitesse, rend l'équation (V.16) peu représentative.

Le déplacement des matières en suspension ou dissoutes est un phénomène purement lagrangien, mais les courants mesurés dans la majorité des cas sont de caractère eulerien; il s'agit donc de relier ces deux champs de vitesses, surtout dans l'étude des circulations résiduelles.

Dans le cas où une information eulerienne doit être transformée en lagrangienne, un problème assez complexe apparaît du fait de la forme intégral-différentielle du courant résiduel lagrangien qui n'a pas de solution connue dans la littérature.

La relation proposée par Longuet-Higgins qui lie les courants euleriens aux courants lagrangiens par l'intermédiaire de l'entraînement de Stokes a été, à juste titre, fortement critiquée dans plusieurs travaux (Uncles, 1981, Nihoul, 1980, Cheng et al., 1982,...). Certains de ces auteurs proposent l'augmentation de l'ordre des dérivées prises en compte

(Dyer et al., 1975). Zimmerman (1976) a démontré que le rapport entre le module de déplacement horizontal dû à la marée, et l'échelle spatiale des irrégularités dans le champ des vitesses euleriennes est le paramètre sur lequel dépend l'adéquation de l'approche de Longuet-Higgins.

V.4 Modèle de type B

Toutes les approches évoquées jusqu'à présent sont de type A; c'est à dire que le résiduel est calculé en se basant sur les résultats du modèle transitoire. Ce type d'approche n'est pas le seul disponible; Nihoul (1975) et Sugimoto (1975) ont élaboré une autre technique, où le mouvement résiduel est calculé directement à partir des équations dynamiques du mouvement transitoire, écrites sous une forme réduite.

L'idée de base de cette méthode est la recherche des équations du mouvement résiduel à partir de l'intégration des équations du mouvement transitoire sur une période de temps T suffisamment longue pour éliminer la contribution de la marée.

En supposant que le résiduel est la moyenne temporelle du transitoire, le mouvement total est décomposé en un mouvement oscillant dominant et en un mouvement résiduel.

$$U_{TOT} = U_{TRA} + U_{RES} \quad V_{TOT} = V_{TRA} + V_{RES} \quad \xi_{TOT} = \xi_{TRA} + \xi_{RES}$$

ξ_0, V_0, U_0 : Grandeurs résiduelles.

Le système d'équations obtenu après la décomposition des variables, est intégré sur une période T, tel que:

$$\int_{t-1/2T}^{t+1/2T} \psi_{TRA} = \langle U_{TRA} \rangle = \langle V_{TRA} \rangle = \langle \xi_{TRA} \rangle = 0$$

Ceci conduit au système d'équations résiduelles:

$$\frac{\partial U_{RES}}{\partial t} - fV_{RES} + gh \frac{\partial \xi}{\partial x} + C_f U_{RES} - \nu \nabla^2 U_{RES} = G_{RESX}$$

$$\frac{\partial V_{RES}}{\partial t} + fU_{RES} + gh \frac{\partial \xi}{\partial y} + C_f V_{RES} + \nu \nabla^2 V_{RES} = G_{RESY}$$

$$\frac{\partial \xi_{RES}}{\partial t} + \frac{\partial U_{RES}}{\partial x} + \frac{\partial V_{RES}}{\partial y} = 0$$

avec:

$$G_{RESX} = \rho^{-1} \langle F_{sx} \rangle + \rho^{-1} \langle h \frac{\partial P_a}{\partial x} \rangle - g \langle \xi \frac{\partial \xi}{\partial x} \rangle \\ - \langle \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{U_{TRA}^2}{h + \xi} \right) \rangle - \langle \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{U_{TRA} V_{TRA}}{h + \xi} \right) \rangle$$

$$G_{RESY} = \rho^{-1} \langle F_{sy} \rangle + \rho^{-1} \langle h \frac{\partial P_a}{\partial y} \rangle - g \langle \xi \frac{\partial \xi}{\partial y} \rangle \\ - \langle \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V_{TRA}^2}{h + \xi} \right) \rangle - \langle \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{U_{TRA} V_{TRA}}{h + \xi} \right) \rangle$$

g: Accélération de la pesanteur.

U_{TRA} , V_{TRA} : Transport transitoire suivant Ox et Oy respectivement.

U_{RES} , V_{RES} : Transport résiduel suivant Ox et Oy respectivement.

h: Profondeur par rapport au plan de référence.

f: Force de Coriolis.

ν : Coefficient de viscosité turbulente.

F_{sx} , F_{sy} : Cisaillement dû au vent.

P_a : Pression atmosphérique.

Les trois derniers termes des expressions de G_{RESX} et G_{RESY} ont été définis par Nihoul et al. (1975), comme étant les termes relatifs aux "tensions de marée". Ces termes représentent les forces qui viennent s'ajouter au mouvement résiduel, et qui résultent des interactions non-linéaires du mouvement transitoire.

Ainsi l'intégrale des équations sur une période T, permet d'annuler uniquement la contribution individuelle des grandeurs U_{TRA} et V_{TRA} , mais le produit de ces deux variables n'est pas égal à zéro:

$$\langle \nabla(H^{-1}U_{TOT}U_{TOT}) \rangle \approx \nabla(H^{-1}_{RES}U_{RES}U_{RES}) + \underbrace{\langle \nabla(H^{-1}_{TRA}U_{TRA}U_{TRA}) \rangle}_A$$

et

$$\langle KH^{-2}U_{TOT}||U_{TOT}|| \rangle \approx KH^{-2}_{RES}U_{RES}||U_{RES}|| + \underbrace{KH^{-2}_{RES}U_{RES} \langle ||U_{TRA}|| \rangle}_B$$

Le courant résiduel étant généralement faible par rapport au courant transitoire, la principale contribution dans les expressions précédentes viendra des termes (A) et (B) et non des termes qui auraient dû apparaître si l'approximation de l'état permanent avait été faite directement sans passer par la moyenne de l'état transitoire (Nihoul et al., 1975).

Cette approche a permis de montrer l'importance des termes non linéaires des équations, de sorte que la distribution spatiale des tensions est due à l'existence de certaines régions où l'énergie est transférée ou enlevée au mouvement moyen. La topographie du milieu aura donc une grande influence sur le mouvement résiduel. Ceci a été à plusieurs reprises mis en évidence par Uncles (1981) et Tee (1976) qui signalent la grande différence des résultats obtenus en supposant des profondeurs constantes et des profondeurs variables.

Ce type de modèle nécessite la résolution en première étape du mouvement transitoire, afin que les coefficients des équations ainsi que les termes relatifs aux tensions de marée soient déterminés. Les équations du mouvement résiduel ne seront résolues qu'en une deuxième étape.

V.5 Quelques voies de recherche

V.5.1 Principe du mouvement aléatoire des particules

Les interactions non-linéaires de l'onde de marée se propageant dans un milieu à topographie compliquée, produisent un courant résiduel indépendant du temps et qui est une fonction quasi-aléatoire de l'espace (Zimmerman, 1978). La composante aléatoire qui apparaît contribue à une augmentation de la dispersion et par conséquent augmente la vitesse d'entraînement lagrangienne.

La non-linéarité des équations du mouvement se justifie par le fait que le mouvement lagrangien s'exprime par une somme illimitée de termes euleriens. Ceci donne naissance à un nouveau concept dit "mouvement aléatoire de la marée (random walk)", qui n'est autre qu'une caractéristique lagrangienne reliée au mécanisme de diffusion turbulente.

Le processus du "Random walk" décrit par Zimmerman (1976) pour la mer de Wadden est intimement lié à l'échelle spatiale ainsi qu'aux échelles des vitesses associées à la distribution des courants résiduels. Dans certains milieux, le mélange dispersif transversal créé par la distribution aléatoire des vitesses est supérieur à celui attribuable à d'autres mécanismes connus.

Dans les milieux peu profonds, les tensions dues aux frottements prennent de l'importance et font apparaître un mécanisme d'entraînement résiduel aléatoire amplifié par l'importance de la vorticité qui prend naissance. Le mouvement résiduel lagrangien doit donc être traité par une analyse tri-dimensionnelle de la circulation. Mais l'effet de la structure verticale du courant n'est pas connu à l'heure actuelle, bien que son importance ait été maintes fois analys e (Bowden, 1983).

La théorie du mouvement aléatoire, dont les premiers développements sont dus à Zimmerman (1976), repose sur l'hypothèse que les

déplacements successifs d'une particule fluide lors de périodes égales à la moitié d'un cycle de marée, constituent un processus Markovien du premier ordre. On étudie alors un système qui subit au cours du temps des changements d'états ou des transitions aléatoires, et qui sans être tout à fait dénué de mémoire, ne garde cependant de son passé que le souvenir le plus récent. L'évolution du système constitue un processus aléatoire. Il peut être ainsi décrit en termes de probabilité.

Le courant résiduel ayant une distribution spatiale aléatoire entraînera des déplacements successifs qui constituent une série temporelle de vecteurs aléatoires. Il en résulte, que dans un nuage de colorant soumis à l'action de la marée, chaque particule aura un déplacement aléatoire légèrement différent de celle qui l'avoisine; par conséquent, le nuage a tendance à se disperser.

Si le courant résiduel est faible, les trajectoires des particules sont petites et les perturbations dans le mouvement deviennent négligeables. En revanche, dans les milieux où cette composante est importante, un champ de courant résiduel vient se superposer au mouvement transitoire de la marée. Vu le caractère non-linéaire de l'équation (V.16), l'interaction des deux composantes de la vitesse ($U_{\text{EULER}} + U_{\text{STOKES}}$) produit un entraînement lagrangien différent de la somme des déplacements produits par chaque composante prise séparément.

V.5.2 Méthode de la vorticité

Les forces d'entraînement parallèles aux courants de la marée sont reliées au gradient de l'énergie cinétique (Zimmerman, 1976). Ce dernier donne naissance à un courant tourbillonnaire résiduel quand le mouvement de la marée interagit avec une topographie du fond irrégulière (Murty et al., 1980).

Les vitesses aléatoires lagrangiennes induites par les irrégularités de la topographie, trouvent leur justification théorique dans le transfert de vorticité entre le courant et la circulation moyenne. Les irrégularités agissent comme catalyseur.

Le courant induit par la marée qui se propage dans un milieu à topographie irrégulière, produit un champ de courants oscillatoires perturbé. Il fut démontré par Zimmerman (1976), que la vorticité créée par le frottement au fond et sur les berges obéit à l'équation:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{Kw}{H} + \frac{KU}{H^2} \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad (\text{V.17})$$

$\tau = -K\rho U$: Tension au fond.

K: Coefficient de frottement.

Cette équation découle de la soustraction des équations dynamiques projetées sur Ox et Oy après avoir effectué une différenciation croisée pour éliminer le gradient de pression. L'utilisation de l'équation de continuité permet d'aboutir à l'équation (V.17), qui exprime la conservation de la vorticité potentielle d'une colonne d'eau lors de son déplacement d'un endroit à un autre. Ceci explique pourquoi les lignes de courants sont fortes dans les baies et faibles à l'extrémité des estuaires. La vorticité ainsi que son gradient longitudinal changent de signe durant un cycle de marée. Si la vorticité relative w , est supposée partout nulle, pour maintenir un mouvement où il n'y a pas de dissipation d'énergie (mouvement irrotationnel), il est nécessaire que les lignes de courant décroissent dans les élargissements.

En intégrant l'expression (V.17) sur un cycle de marée et en adoptant une expression linéaire du frottement, Pingree et al. (1977) ont abouti à l'équation de vorticité moyenne, donnée par:

$$\overline{U \frac{\partial w}{\partial x}} + UH \nabla \left[\frac{\bar{w}}{H} \right] = - \frac{K}{H} \bar{w} + \nu \nabla^2 \bar{w}$$

(1) (2) (3) (4)

où,

- (1): représente le transfert de vorticité au mouvement résiduel du courant moyen périodique de la marée
- (2): redistribution de la vorticité moyenne par le mouvement transitoire
- (3): dissipation de la vorticité par frottement au fond
- (4): redistribution de la vorticité moyenne par la turbulence horizontale

En négligeant les termes (2) et (4), on remarque que le terme (1) ne change pas de signe durant un cycle de marée. Il s'ensuit que des tourbillons cycloniques ou anticycloniques se produiront dans les régions de faibles profondeurs où les tensions augmentent. Dans les situations réelles la perturbation, de caractère aléatoire, donne ce même caractère au courant résiduel.

Plusieurs auteurs ont utilisé la méthode de la vorticité pour étudier les tourbillons observés dans certains milieux. Huthnance (1981) a adopté la linéarisation des équations du mouvement. Loder (1980) a développé une approche similaire pour étudier le mécanisme des tourbillons résiduels autour du George Bank à l'entrée du golfe de Main, il aboutit aux mêmes conclusions que l'on retrouve chez Zimmerman (1985), où dans les régions de faibles profondeurs, comme l'estuaire de la Casamance, les tourbillons apparaissent mais ils sont rapidement détruits par la dissipation due aux frottements au fond, ce qui ne permet pas à la vorticité de se conserver durant un cycle de marée. La largeur des sections en travers de la Casamance limite la grandeur des tourbillons et par conséquent règle la dispersion pour des valeurs données du courant.

V.6 Choix de la période de temps

L'hypothèse de départ, dans laquelle on a supposé qu'aucune interaction non linéaire ne se produit entre les diverses harmoniques, permet d'admettre que les courants résiduels sont uniquement dus à la composante semi-diurne (dominante) prise en compte, dont l'amplitude est modulée par la relation de changement de phase qui lie M2 à S2 ainsi qu'aux autres composantes semi-diurne. Le résiduel ainsi défini sera lié à la fonction de forçage due à la marée, et va fluctuer sur une période assez longue comparée à un cycle semi-diurne.

Cette définition néglige les changements climatiques qui se produisent à des échelles temporelles inférieures à celles qui caractérisent les diverses composantes de la marée. Il en résulte que la moyenne sur une période T lisse 90% des courants transitoires résultant de l'action de la marée, mais le résultat final est de même ordre de grandeur que l'erreur introduite par l'instrument de mesure. En conséquence, le choix de la période T reste intimement lié aux objectifs de l'étude et aux caractéristiques du milieu. Dans l'étude de la composante semi-diurne M2, la période T est de l'ordre de 12H 40mn.

V.7 Application en Casamance

L'approche qualitative réalisée sur l'estuaire de la Casamance a permis d'étudier l'influence de chaque terme des équations du mouvement, et sa contribution dans le mouvement résiduel. Les tests ont concerné les termes relatifs à:

- 1°- La force de Coriolis.
- 2°- La viscosité turbulente.
- 3°- Le gradient de salinité.
- 4°- Le terme de frottement.
- 5°- Le terme advectif.

fig.V.1-Courant résiduel eulerien induit par la composante M2 de la marée.

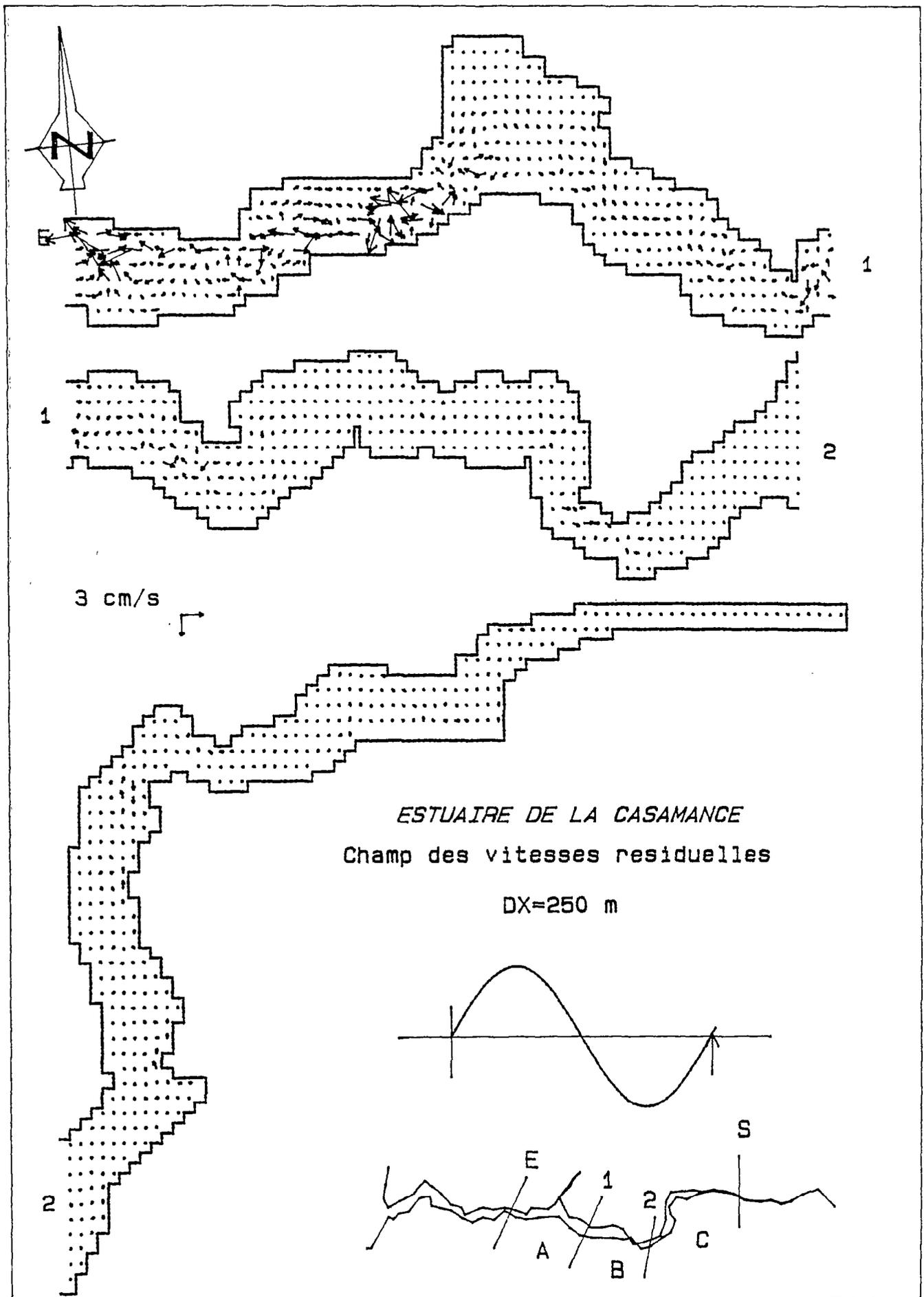


fig.V.2-Transport résiduel eulerien induit par la composante M2 de la marée.

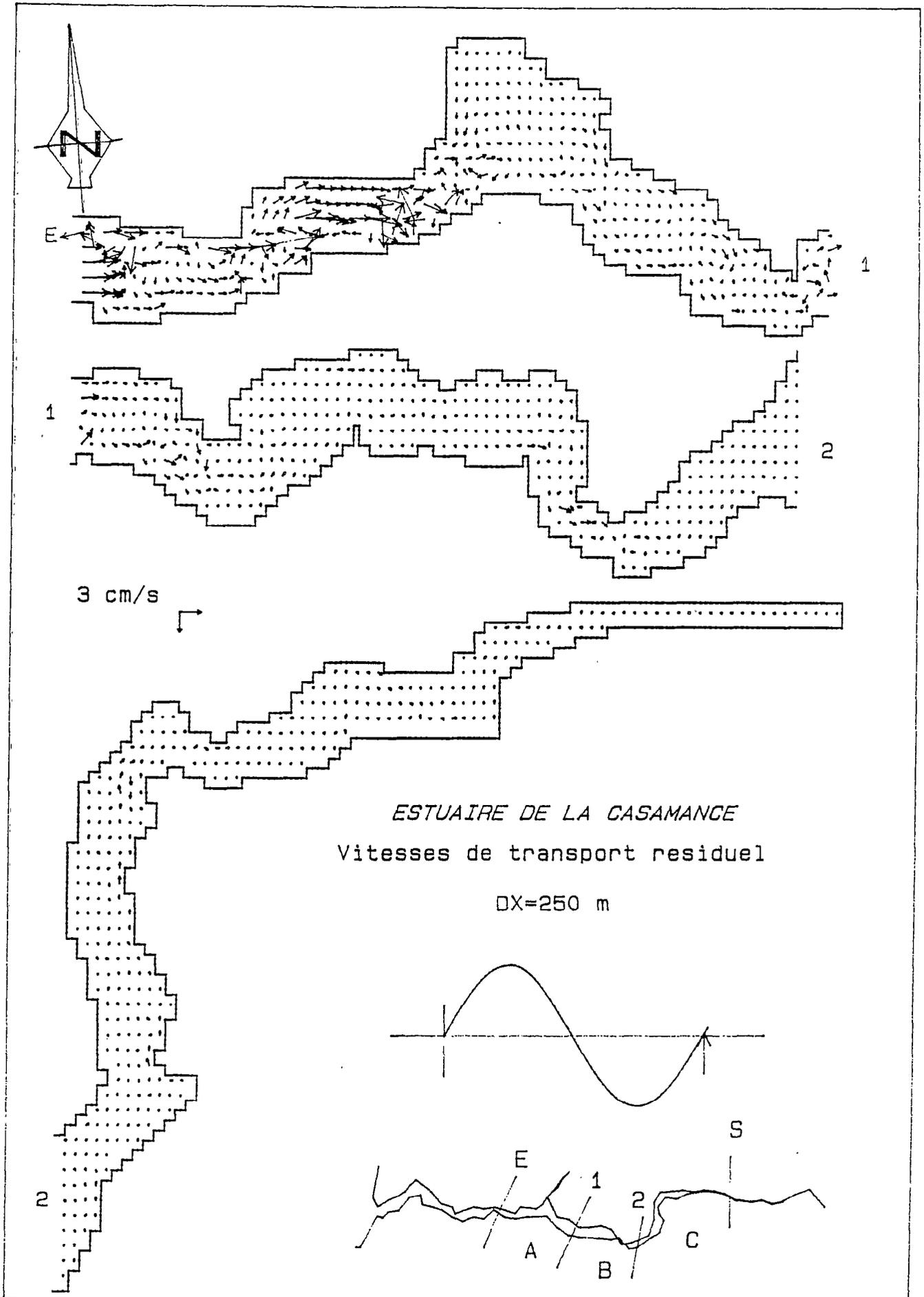
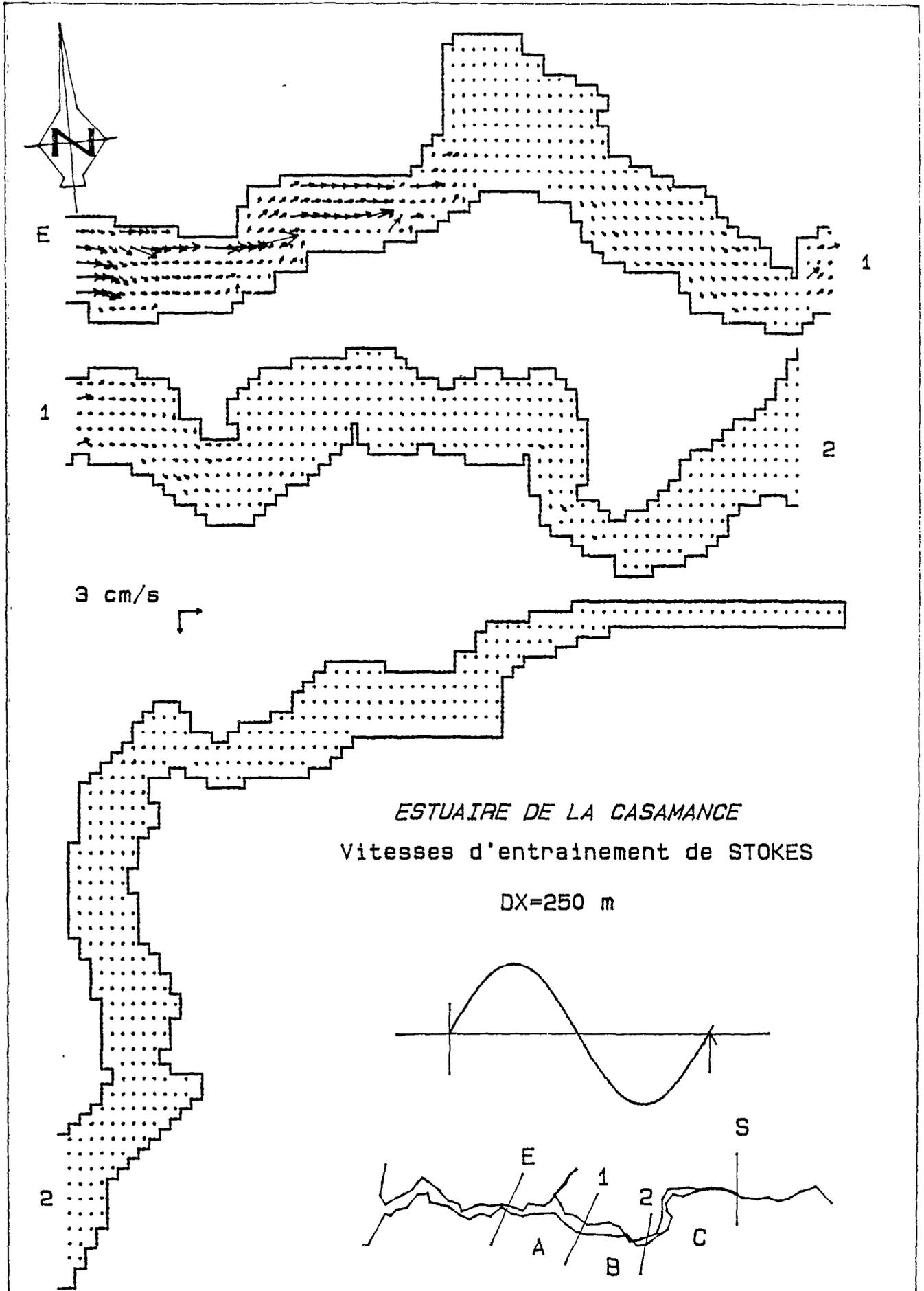


fig.V.3-Vitesses d'entraînement de Stokes induites par la composante M2 de la marée.



Il n'y a pas de changements significatifs dans l'allure des vecteurs vitesse pour diverses valeurs des coefficients de viscosité et de frottement. En revanche, une faible augmentation des valeurs du courant est remarquée quand on réduit la valeur de ν et surtout quand on augmente la valeur du coefficient de frottement. Ceci est dû à l'atténuation de l'influence des termes dissipatifs.

Les effets climatiques peuvent être négligés: si leur période est de quelques heures le système ne garde qu'une très faible mémoire de ces termes. Par contre, un vent d'intensité supérieure à 7 m/s qui souffle sur tout l'estuaire d'une façon continue et sur une période de temps comparable à celle de la composante de la marée, conduit à de grandes modifications dans l'intensité et l'allure des champ de courants résiduels. L'influence du terme de tension en surface se superposera à celle due au forçage de la marée créant ainsi des basculements du plan d'eau et surtout une modification des champ de courants transitoires et par conséquent résiduels.

Le terme advectif est très important dans le calcul du mouvement résiduel dans l'estuaire de la Casamance. Les élévations résiduelles sont réduites de 3% à 5%, par contre son influence sur la circulation dépasse les 40%.

Les diverses mesures réalisées dans l'estuaire de la Casamance montrent que les courants transitoires et les trajectoires des particules durant un cycle de marée sont assez faibles pour induire un courant résiduel eulerien ou lagrangien d'une certaine importance. Les faibles valeurs de ce courant sont du même ordre de grandeur que l'erreur des instruments de mesure. De même, le calcul du résiduel a été effectué sur la base des résultats du modèle transitoire, donc suivant une approche du type A. Ceci laisse à supposer que la faible valeur des grandeurs

résiduelles les rend assez sensibles à l'accumulation des erreurs d'arrondis ou de troncature.

Dans l'estuaire de la Casamance les profondeurs et la largeur du cours d'eau sont assez faibles, la dissipation par le frottement au fond et sur les berges limite le développement de tourbillons. L'influence de la vorticité n'est importante qu'au voisinage des zones inondables.

V.7.1 Circulation résiduelle lagrangienne

Une particule fluide, en l'absence d'un courant résiduel ou autres perturbations, devrait retourner à sa position initiale après chaque cycle de marée. Si l'effet du courant résiduel est pris en compte, la position de la particule après un flot ou un jusant est légèrement différente de sa position en l'absence d'un courant résiduel. La différence entre ces deux positions constitue le déplacement résiduel. Les déplacements successifs sont supposés partiellement corrélés.

La méthode utilisée consiste à suivre la particule durant son déplacement. La vitesse résiduelle peut être ainsi déterminée à partir du courant transitoire, si l'on imagine qu'une particule fluide lâchée à partir d'une grille évoluera en fonction du champ de vitesse qui l'entoure durant son mouvement. Les vitesses qu'elle prendra seront fonction du gradient spatio-temporel des vitesses qui règnent dans les champs qui l'avoisinent.

La vitesse lagrangienne est reliée à la vitesse eulerienne par l'expression:

$$u_{LAG}(X_0, t) = u_{EUL}(Y(X_0, t), t) \quad (V.18)$$

où $Y(X_0, t)$ représente la trajectoire de la particule.

L'intégration de (V.18) sur la verticale permet d'obtenir la relation qui lie les deux vitesses:

$$\int_{-h}^{\xi} u_{LAG}(X_0, t) = U_{LAG}(X_0, t) = U_{EUL}(Y(X_0, t), t) \quad (V.19)$$

La résolution de l'expression (V.18) se fait en deux étapes:

1^{ère} Etape: On détermine d'abord la trajectoire des différentes particules aux pas de temps successifs:

$$\begin{aligned} Y(X_0, t) &= X_0 + \int_{t_0}^t U_{LAG}(X_0, t') dt' \\ &= X_0 + \int_{t_0}^t U_{EUL}(Y(X_0, t'), t') dt' \end{aligned} \quad (V.20)$$

avec,

- Y = Trajectoire.
- X₀ = Position initiale.
- t₀ = Pas de temps initial.
- t = Pas de temps final.

2^{ème} Etape: La vitesse résiduelle lagrangienne est déterminée en fonction du déplacement de la particule durant la période de temps considérée. Pour l'onde semi-diurne utilisée dans l'estuaire de la Casamance, T est égale à 12h 40mn.

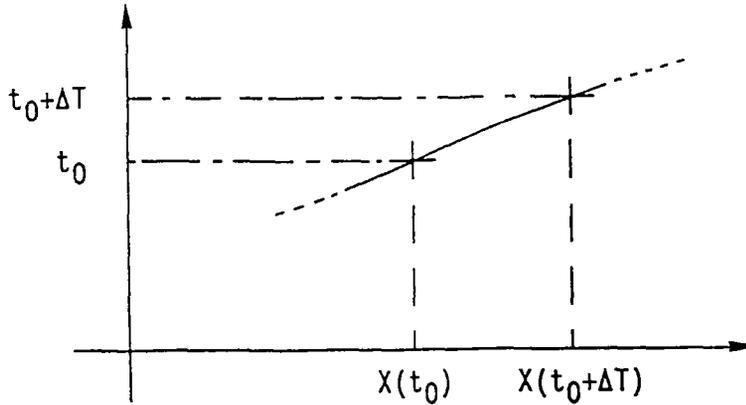
$$\begin{aligned} U_{LAG}(X_0, t_0) &= \frac{Y_0(X_0, t_0+T) - Y_0(X_0, t_0)}{T} \\ &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(X_0, t') dt' \end{aligned} \quad (V.21)$$

Les deux étapes précédentes sont reprises jusqu'à la position finale correspondante à la fin de la période de temps T choisie. La vitesse résiduelle lagrangienne est calculée à partir de:

$$U_{RLAG} = \frac{\text{position finale} - \text{position initiale}}{\text{période de temps}} \quad (V.21bis)$$

La vitesse lagrangienne ainsi définie sera fonction de la position initiale X_0 , du pas de temps de départ t_0 , et de la trajectoire Y_0 décrite par la particule durant la période de temps considérée.

Résolution de l'intégrale.



En supposant que l'évolution de la courbe des vitesses est faible durant le pas de temps ΔT considéré, la formule des trapèzes conduit à:

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta T} u(X_0, t) dt = \frac{U(X_1, t_1) + U(X_0, t_0)}{2} \Delta T \quad (\text{V.22})$$

avec

$$X_1 = X_0 + \delta X$$

$$t_1 = t_0 + \Delta T$$

$U(X_0, t_0)$ étant connue, il faudrait rechercher les valeurs de $U(X_1, t_1)$.

Calcul de $U(X_1, t_1)$.

En appliquant un développement de Taylor autour du point (X_0, t_0) , en se limitant au premier ordre, on obtient:

$$U(X_1, t_1) = U(X_0, t_0) + \left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{X_0, t_0} \Delta T + \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{X_0, t_0} \delta X + O(\Delta T \delta X, \delta X^2, \Delta T^2) \quad (\text{V.23})$$

or

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + U(X_0, t_0) \frac{\partial U}{\partial x} \quad (\text{V.24})$$

En reportant les expressions (V.23,V.24) dans (V.22) on obtient:

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta T} u(X,t)dt = U(X_0,t_0) + \left[\frac{1}{2} U(X_0,t_0) \frac{dU}{dt} \right] \Delta T \quad (V.25)$$

avec

$$\left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{X_0,t_0} = \frac{U(X_0,t_0+\Delta T) - U(X_0,t_0)}{\Delta T}$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{X_0,t_0} = \frac{U(X_0+\delta X,t_0) - U(X_0,t_0)}{\delta X}$$

Les composantes de la vitesse sont fournies par les résultats du modèle transitoire, qui utilise des mailles excentrées. Une interpolation est donc nécessaire afin de ramener les composantes de la vitesse au centre de chaque maille, qui sera le point de départ de la particule au temps initial t_0 de la période considérée (fig.V.4).

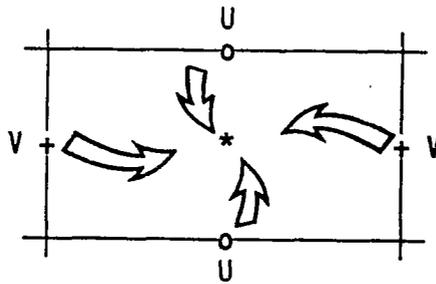
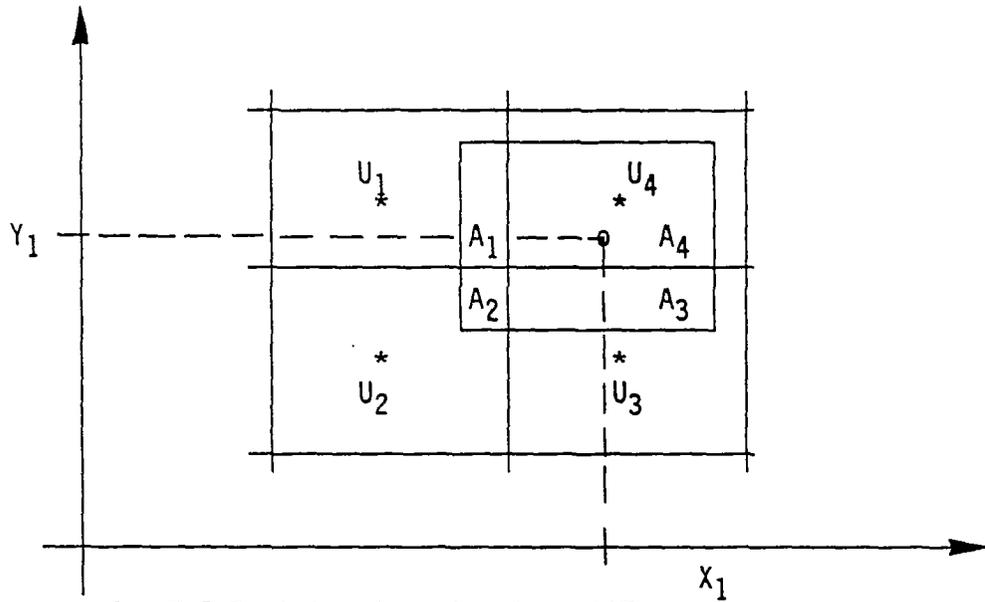


fig.V.4-Point de départ à $t=0$

La particule au point (X_0,Y_0) , animée d'une vitesse initiale de composantes $(U(X_0,Y_0),V(X_0,Y_0))$ sera, à la fin du premier pas de temps $t_0 + \Delta T$, dans une autre maille de la grille et aux coordonnées X_1,Y_1 .

fig.V.5-Position du point à $t=t+\Delta T$

Les méthodes discrètes ne donnent les variables dépendantes du système que sur les noeuds de la grille d'intégration. Une interpolation est nécessaire pour rechercher les valeurs des variables dans des positions intermédiaires. Pour cela, trois méthodes ont été testées: la méthode des splines, la méthode du "Marker And Cell" (M.A.C) et une méthode d'interpolation linéaire qui se sert des 4 points qui entourent le point recherché P quelle que soit la position de P par rapports à ces 4 points.

Ces trois méthodes sont conceptuellement différentes: la méthode des splines minimise l'énergie de flexion de la plaque qui passe par les 4 points qui entourent la position recherchée (Atteia, 1966).

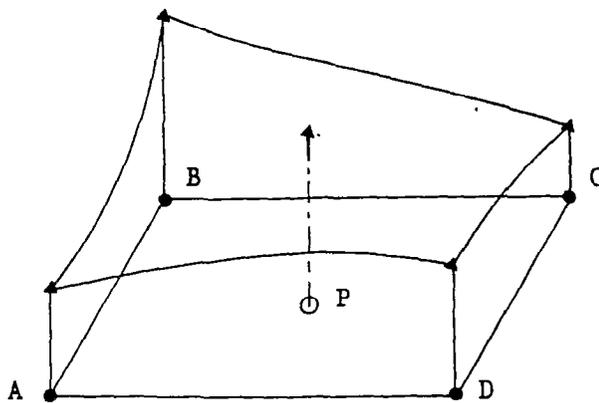
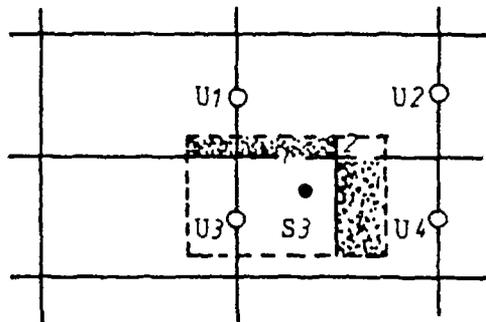


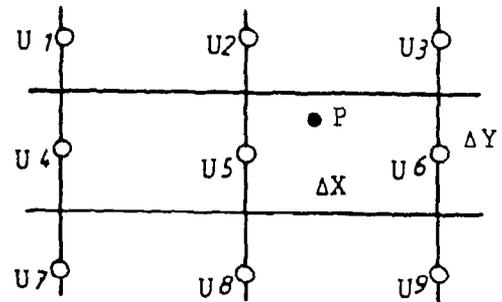
fig.V.6-Méthode des Splines

Quant à la méthode du "Marker And Cell" (Harlow et al., 1965), elle peut être du premier ou du second ordre (Nicholas et al., 1973):(fig.V.7)



$$U_P = \frac{U_1 S_1 + U_2 S_2 + U_3 S_3 + U_4 S_4}{\Delta X \Delta Y}$$

(Ordre:1)



$$U_P = f(U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6, U_7, U_8)$$

(Ordre:2)

fig.V.7-Méthodes du M.A.C.

La dernière méthode est la plus approximative, surtout en présence d'un gradient spatial de vitesse important. Elle se traduit par:

$$\psi_P = \frac{\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4}{4}$$

quelle que soit la position du point P (fig.V.8).

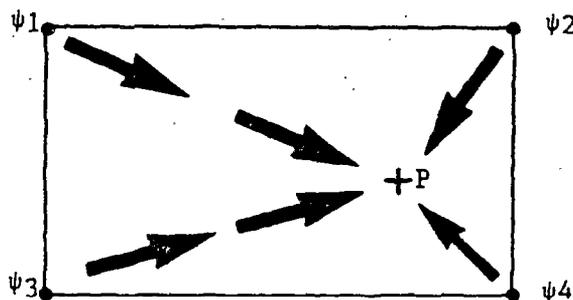


fig.V.8-Méthode de la moyenne

Dans l'estuaire de la Casamance, où les courants sont relativement faibles, les trois méthodes ne présentent pas une différence significative. On a choisi, en fonction des divers cas de figure théoriques étudiés, la méthode des splines.

fig.V.9-Courant résiduel lagrangien avec t initial = 0heure

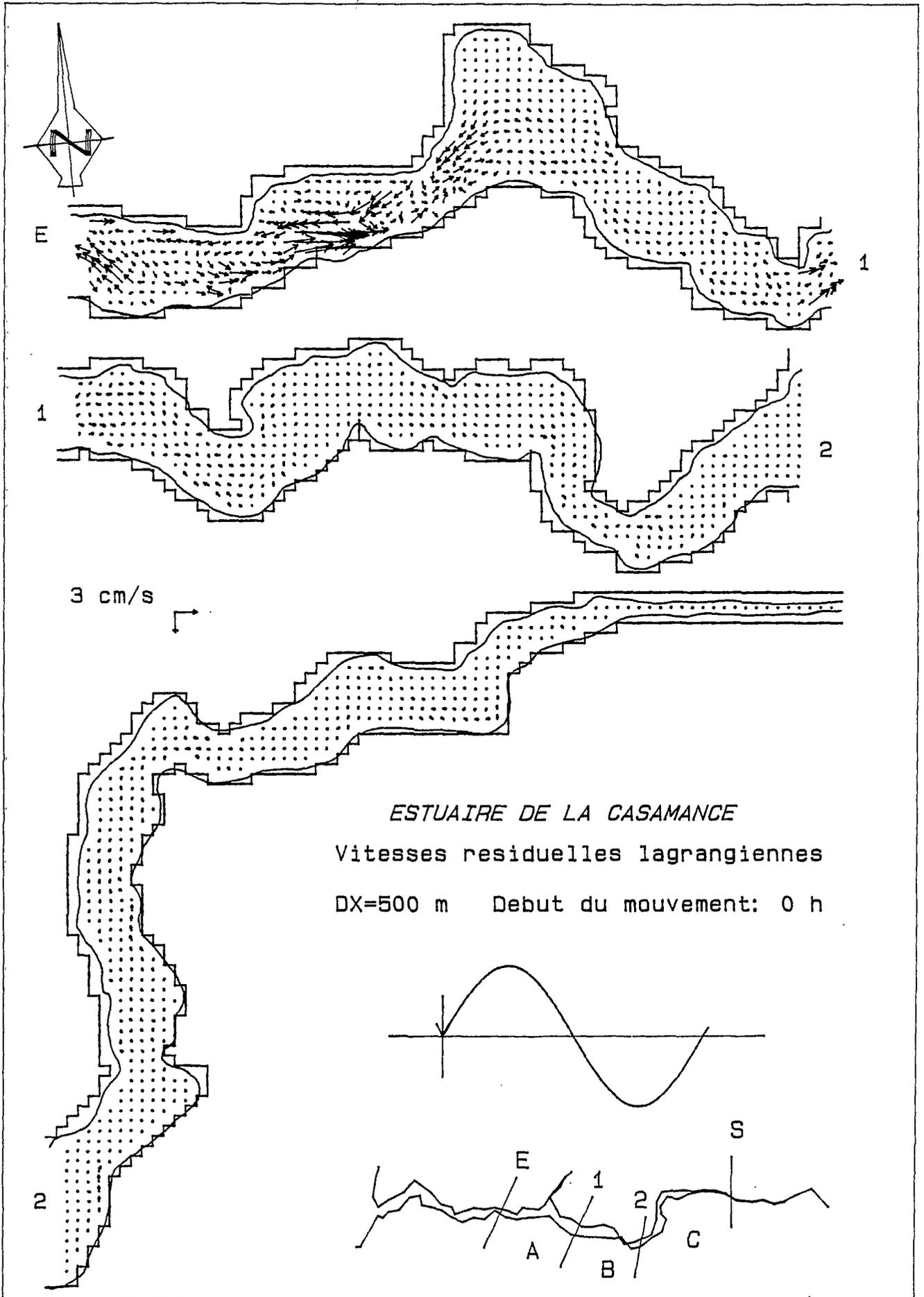


fig.V.10-Courant résiduel lagrangien avec t initial = 3 heures

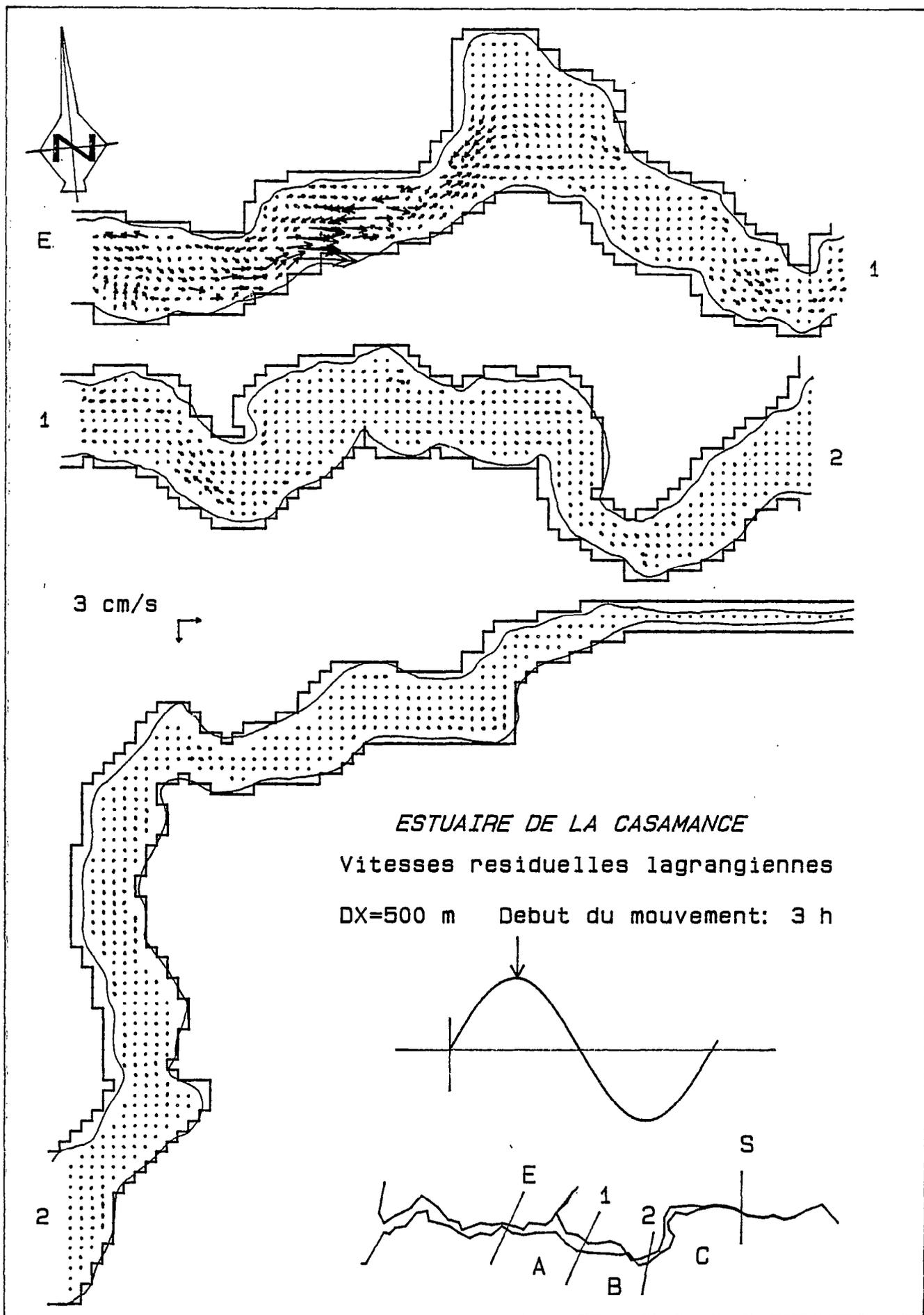


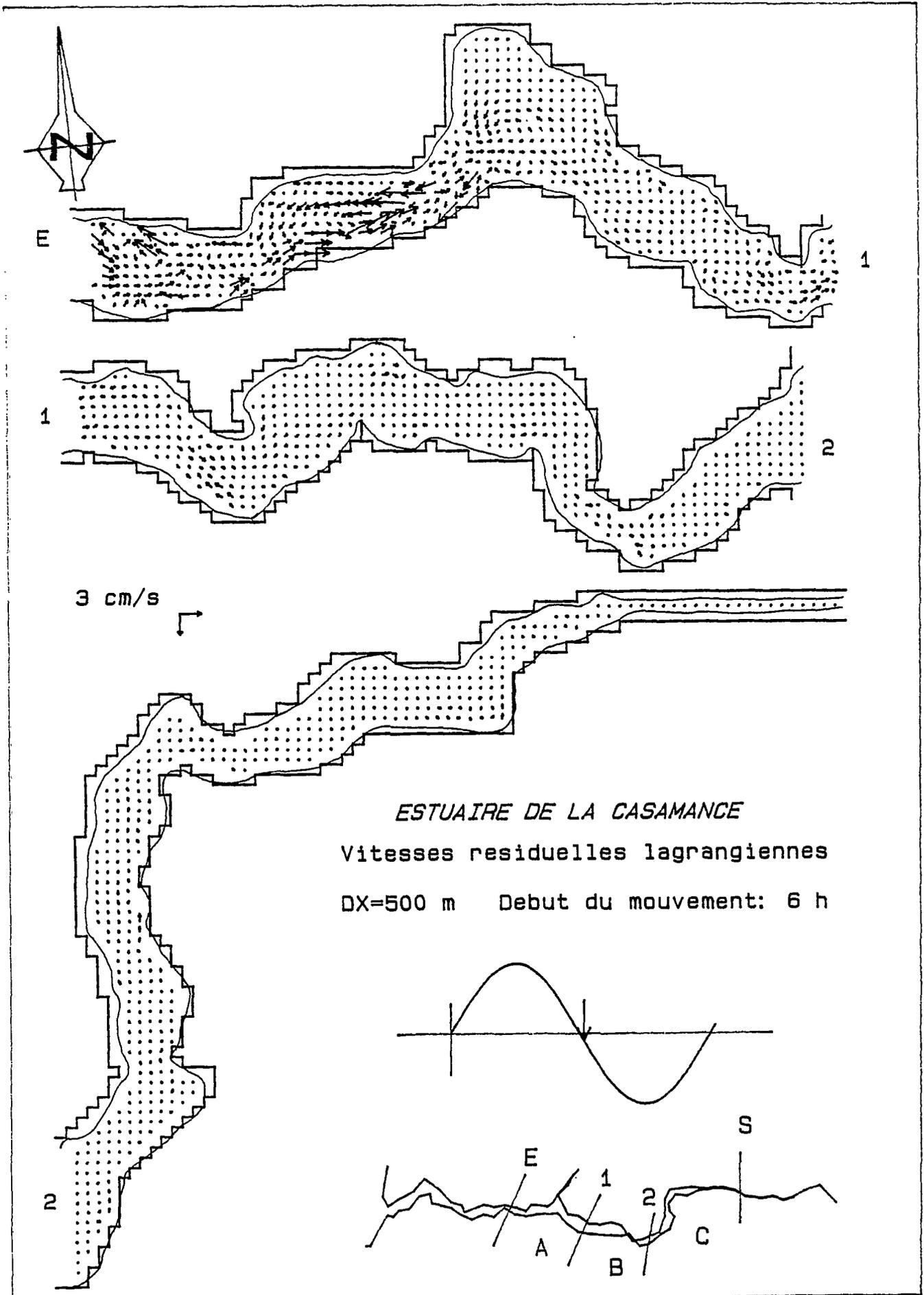
fig.V.11-Circulation résiduelle lagrangienne avec t initial = 6 heures

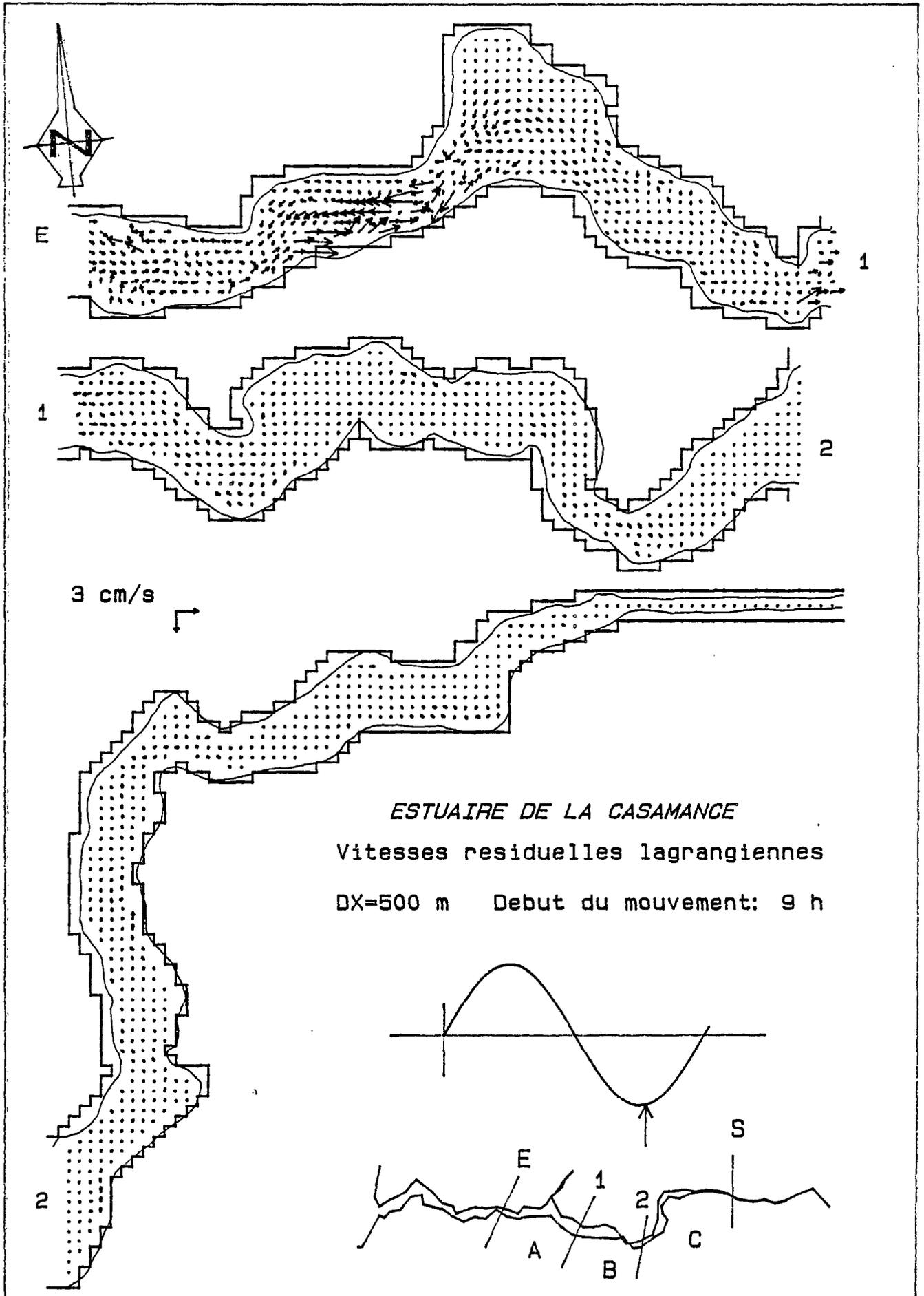
fig.V.12-Circulation résiduelle lagrangienne avec t initial = 9 heures

fig.V.13-Trajectoires de particules avec t initial = 0 heure

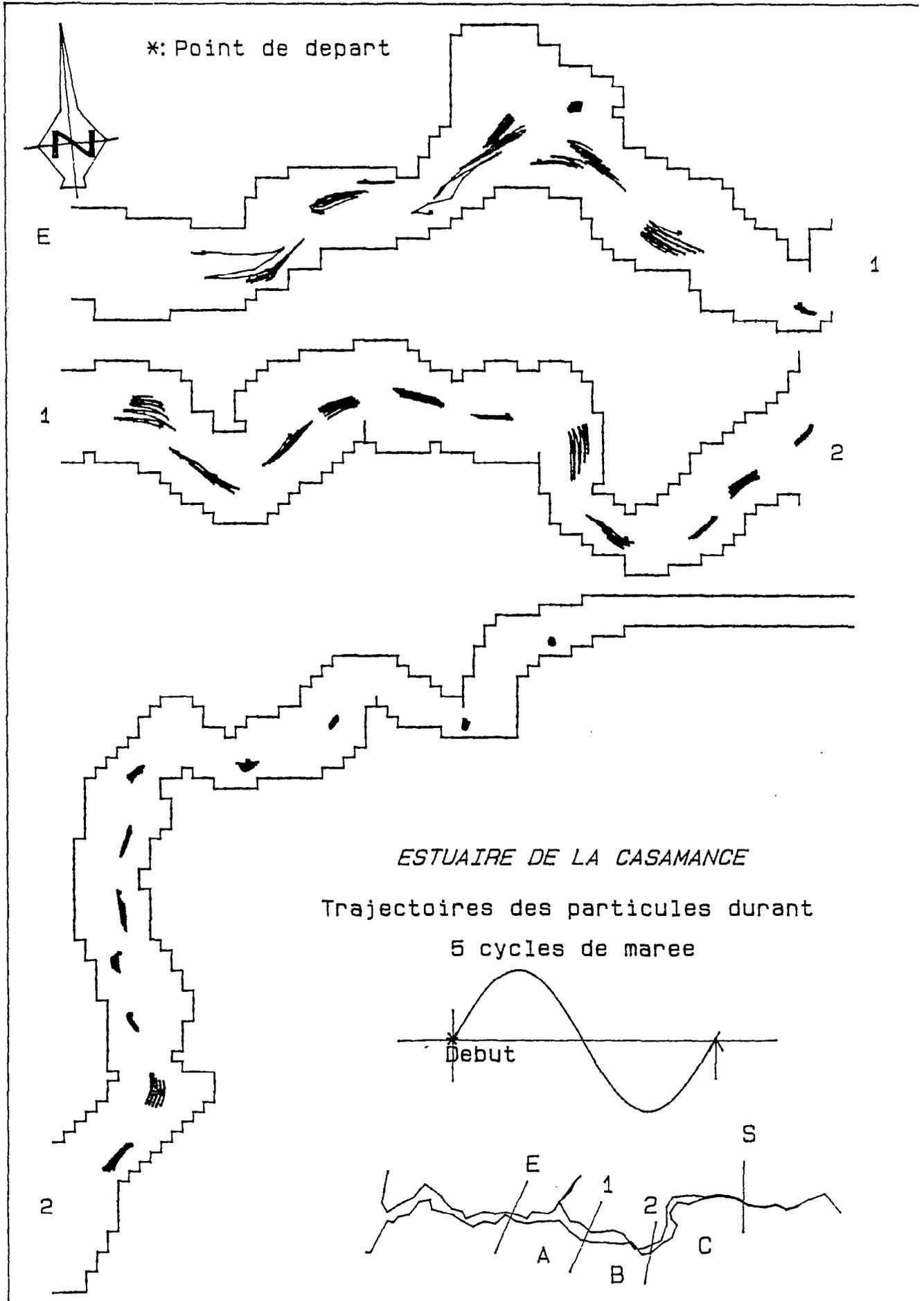


fig.V.14-Trajectoires des particules avec t initial = 3 heures

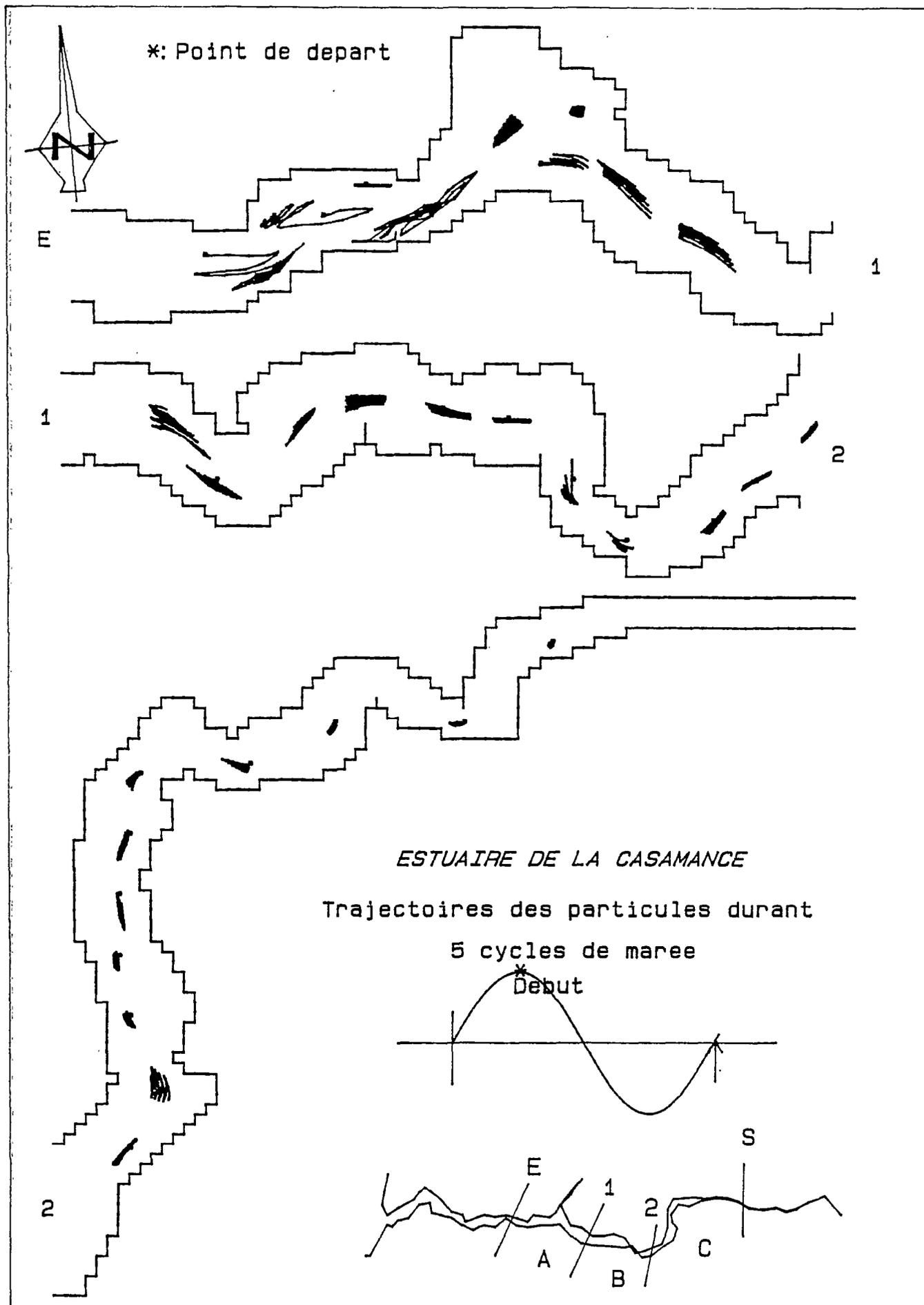


fig.V.15-Trajectoires des particules avec t initial = 6 heures

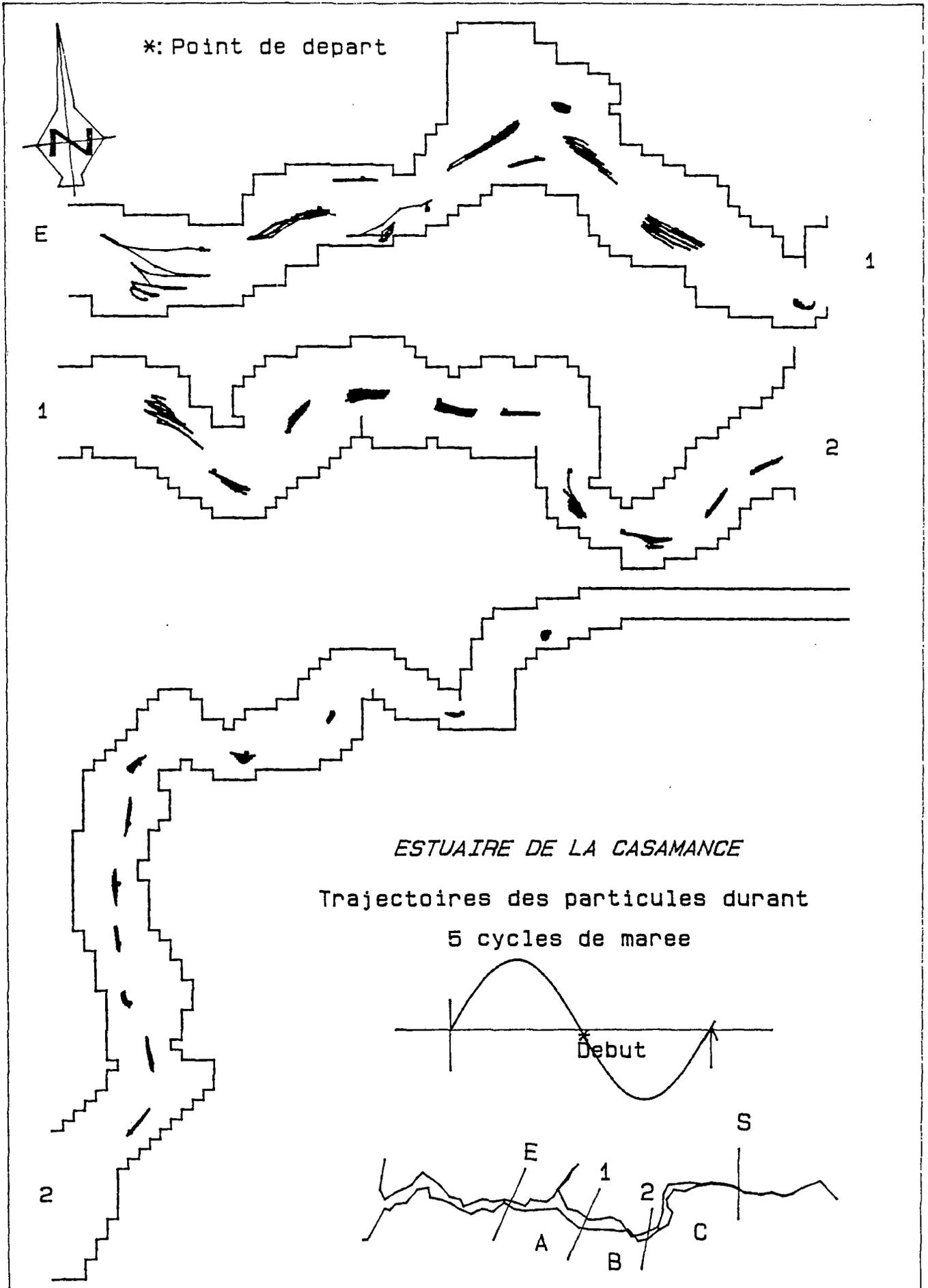
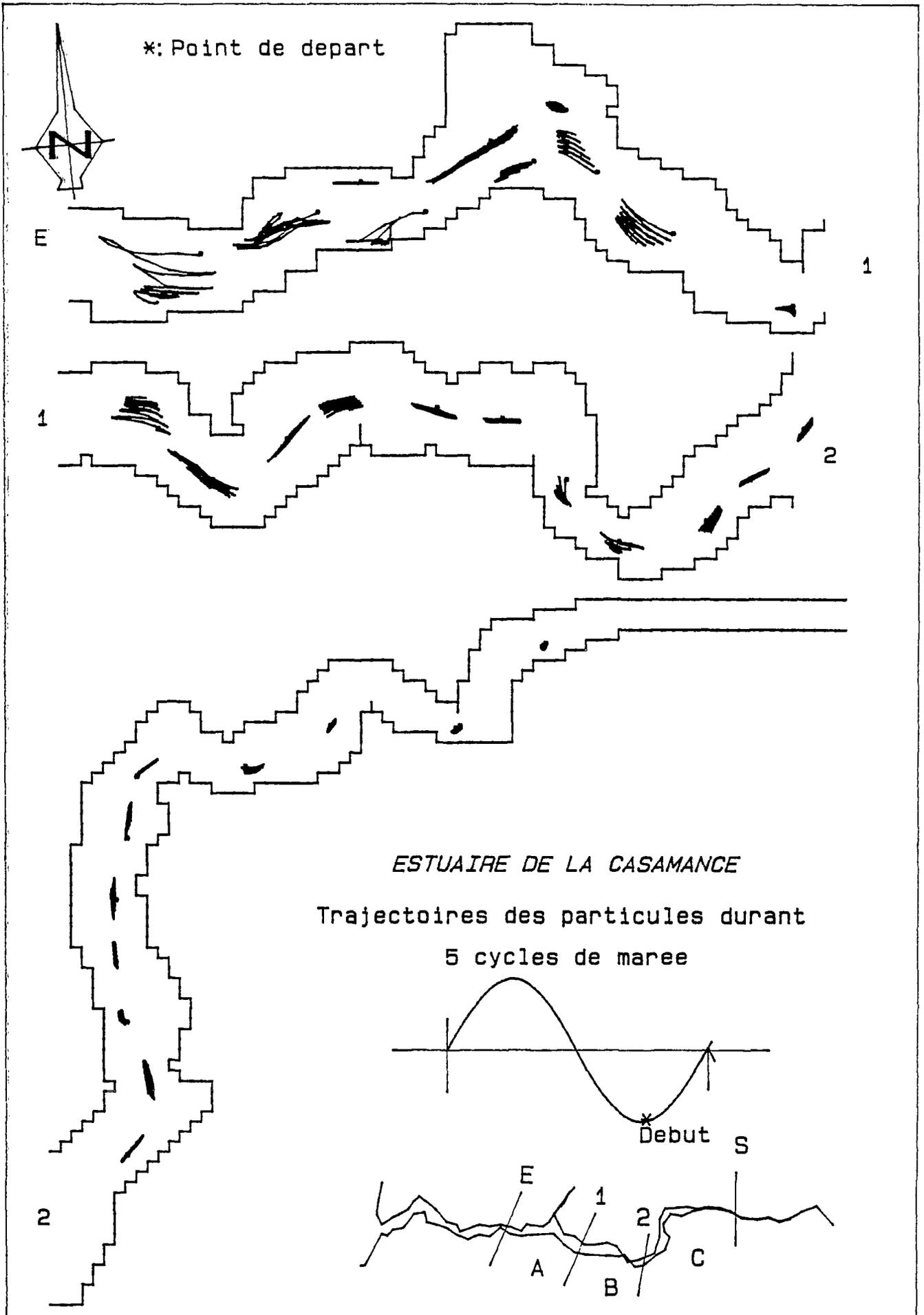


fig.V.16-Trajectoires des particules avec t initial = 9 heures



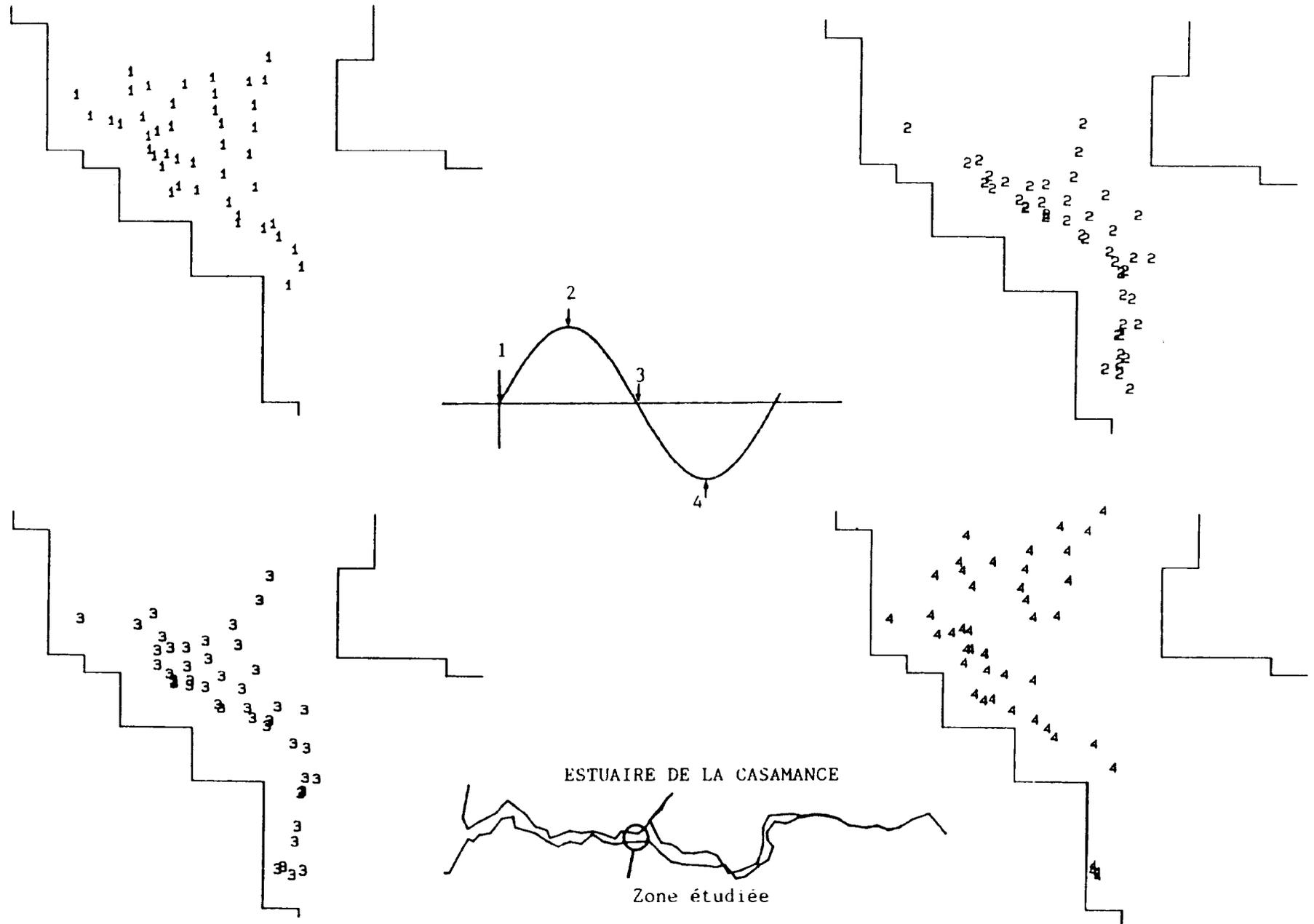


fig.V.17 - Mouvement d'un nuage de particules durant un cycle de marée.

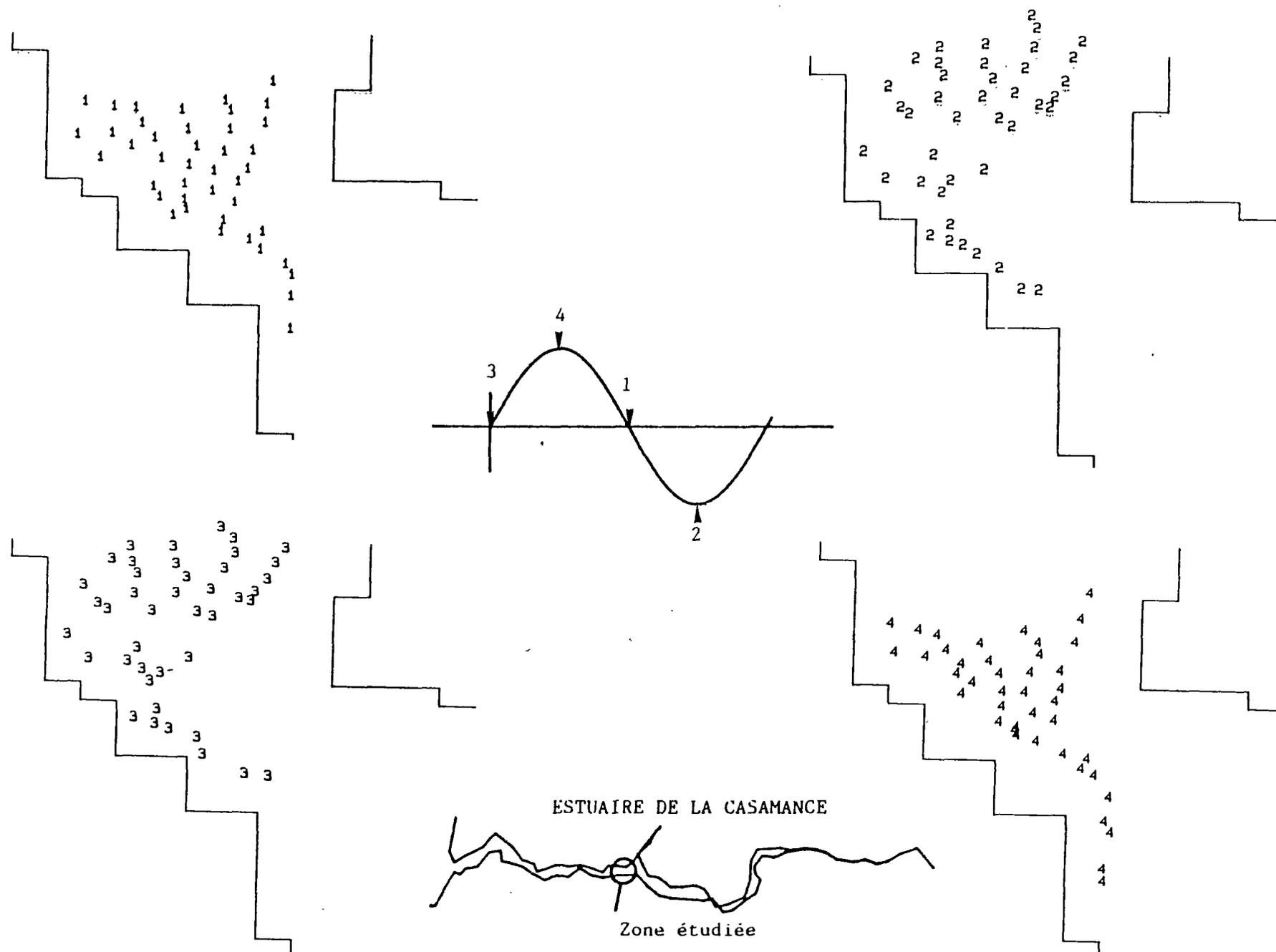


fig.V. 18 - Mouvement d'un nuage de particules durant un cycle de marée.

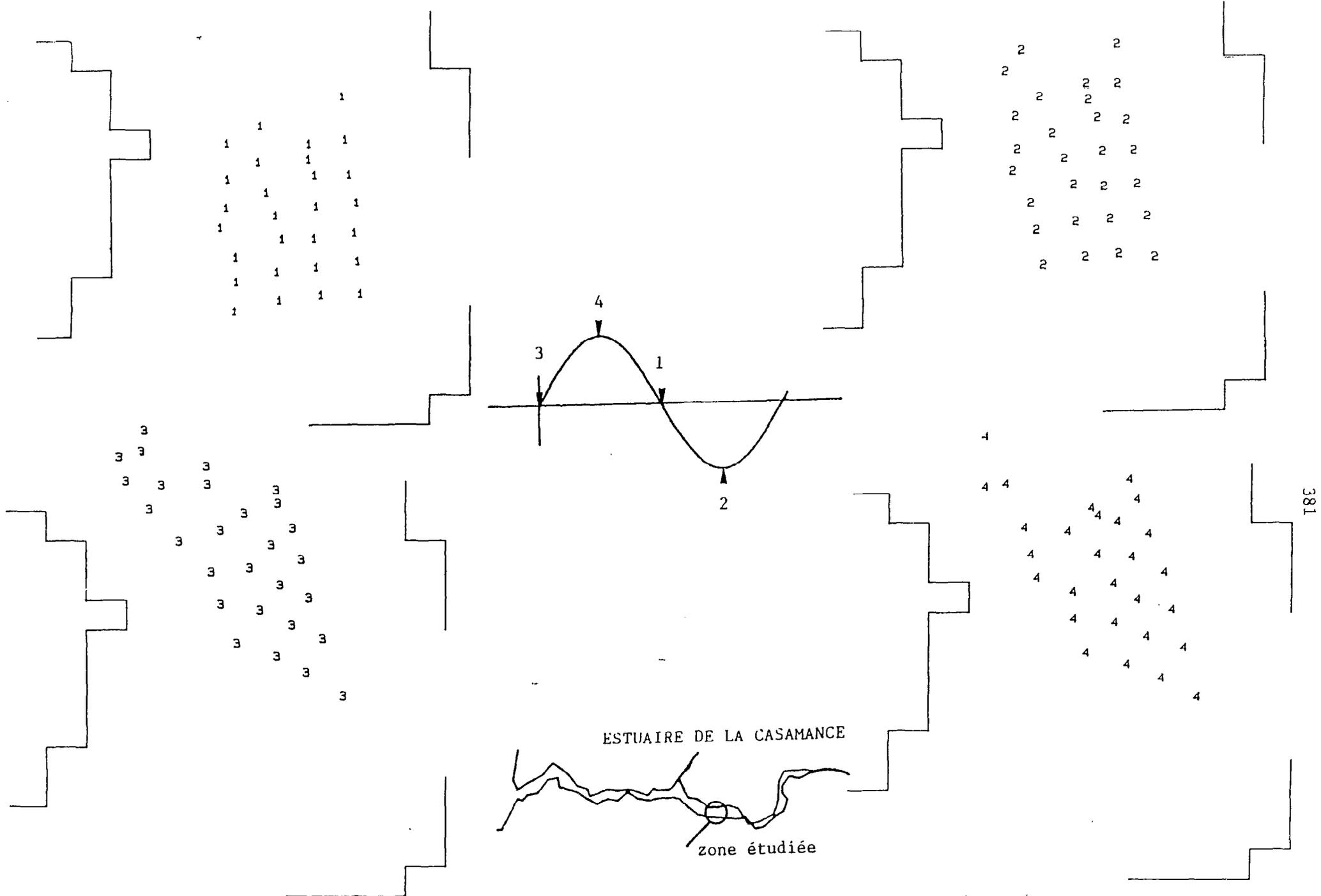


fig.V. 19 - Mouvement d'un nuage de particules durant un cycle de marée.

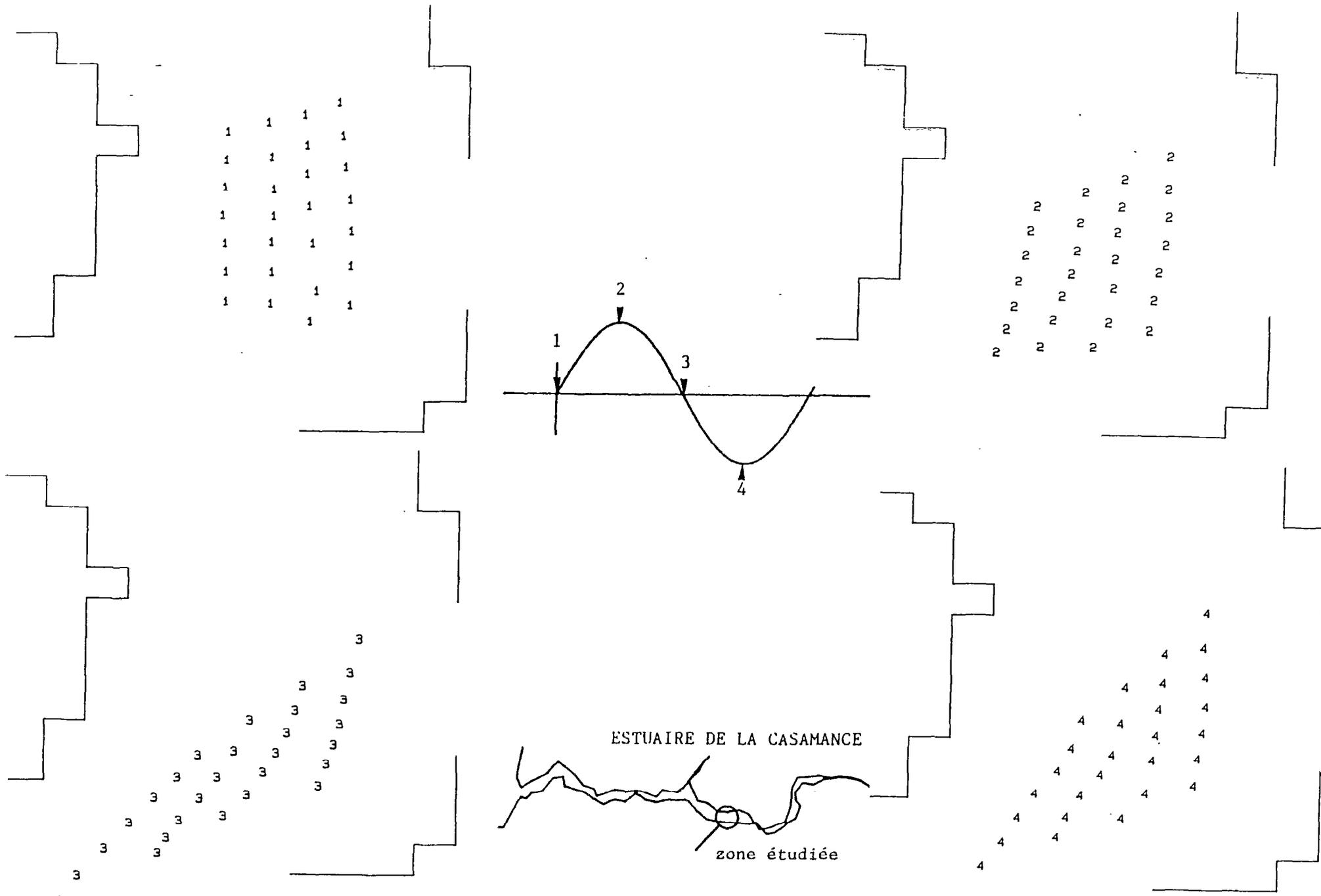


fig.V. 20 - Mouvement d'un nuage de particules durant un cycle de marée.

V.8 Conclusions

Il émane de cette présentation que les courants résiduels restent difficilement justifiables par la diversité des approches susceptibles de les calculer.

L'objectif des modèles résiduels n'est pas le mouvement proprement dit mais le transport des diverses substances. Bien que le problème de conservation de masse ne soit pas très clair, l'interprétation des résultats liés aux transports est généralement compliquée si la conservation de masse n'est pas respectée.

Il est certain que la vitesse résiduelle eulerienne n'est pas égale au transport résiduel divisé par la profondeur moyenne, contrairement à ce que certains auteurs suggèrent. De plus, la différence n'est pas égale à la vitesse d'entraînement de Stokes.

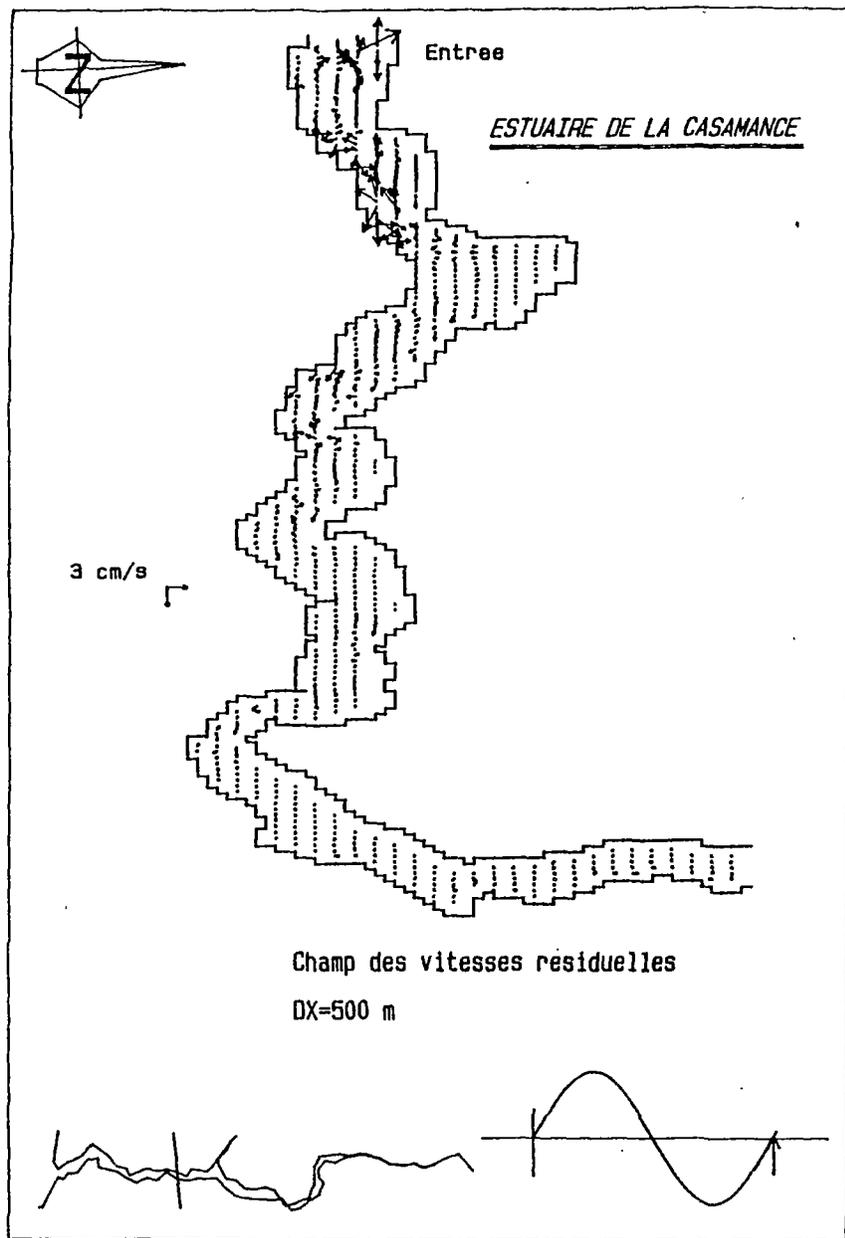
Les modèles du type A ou B ne sont pas équivalents au niveau de la sensibilité des résultats aux erreurs numériques. L'accumulation des erreurs d'arrondis ou de troncature dans les modèles du type A et pour des faibles courants conduit à un calcul approximatif des résiduels.

Pour les modèles du type B, la moyenne sur une période T effectuée sur les équations du mouvement transitoire élimine le courant induit par la marée et lisse les fluctuations du courant dues aux variations climatiques qui évoluent à des échelles de temps inférieures à T . La précision de ce type de modèle est essentiellement liée à la possibilité d'obtenir une estimation correcte des tensions de marée et surtout du terme de frottement. La solution de l'état permanent (ou quasi-permanent) étant toujours recherchée, cette approximation conduit à des équations du type elliptiques (Smith, 1969) et n'est valable que si la variation dans le temps du courant résiduel est très faible. Dans ce cas,

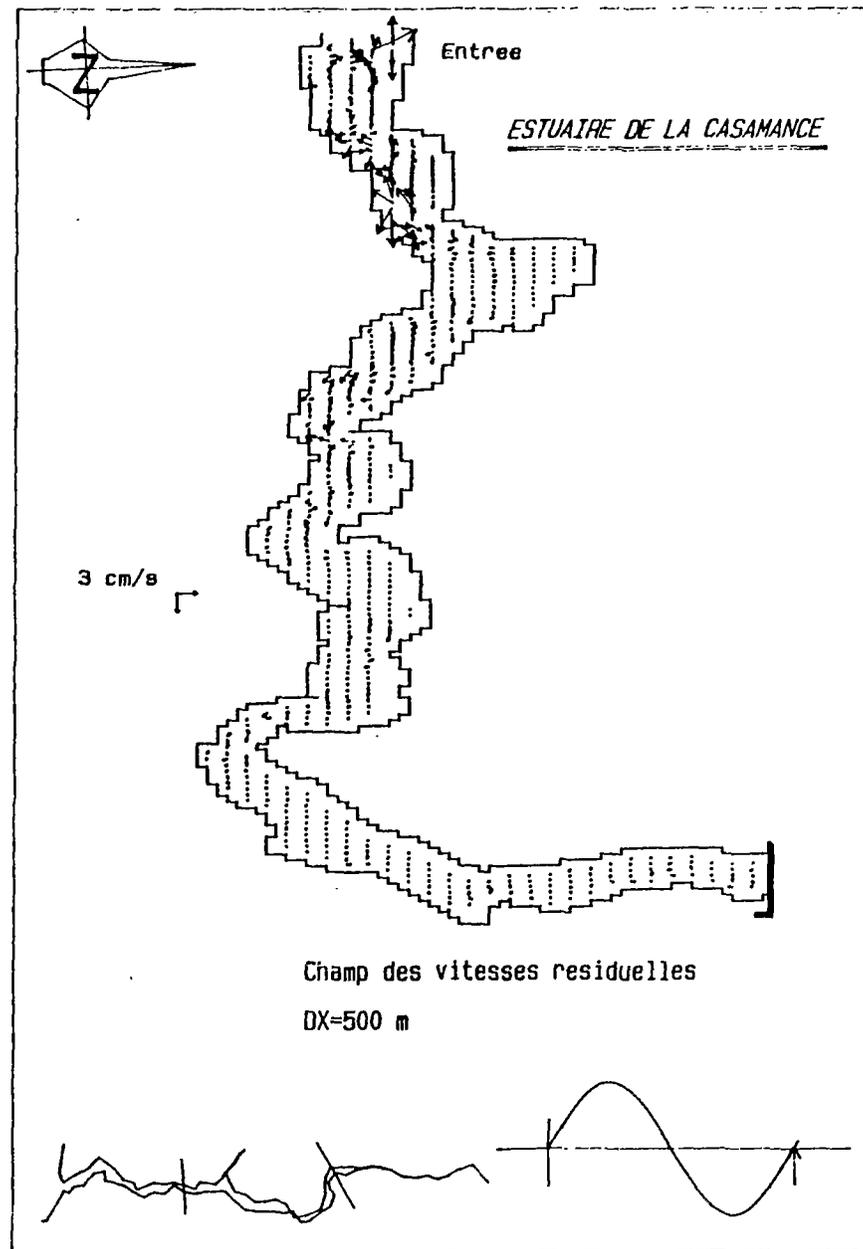
Les tensions de marée sont calculées une fois pour toutes.

Les modèles du type A utilisent une expression du terme de frottement "exacte", dans le cas où une formulation quadratique du frottement au fond est valable (Alfrink et al., 1981). Par contre, dans les modèles du type B le frottement est linéarisé avant son utilisation, la base théorique de cette moyenne est l'approximation de Lorentz basée sur la dissipation moyenne de l'énergie sur la période de temps considérée (Dronkers, 1964, Heaps, 1978). Les écoulements dans les milieux côtiers étant généralement turbulents, certains problèmes dus à cette approximation peuvent apparaître (Hunter, 1975).

Le choix entre ces deux résolutions reste lié à l'objectif de l'étude, aux qualités des mesures, à la précision du modèle transitoire et aux caractéristiques climatiques et hydrodynamiques du milieu étudié. Une grande part est accordée au bon sens et à l'expérience du modélisateur. Les recherches sont encore nécessaires pour approfondir notre compréhension des écoulements résiduels et dégager le mérite de chacune des deux approches susceptibles de le décrire.

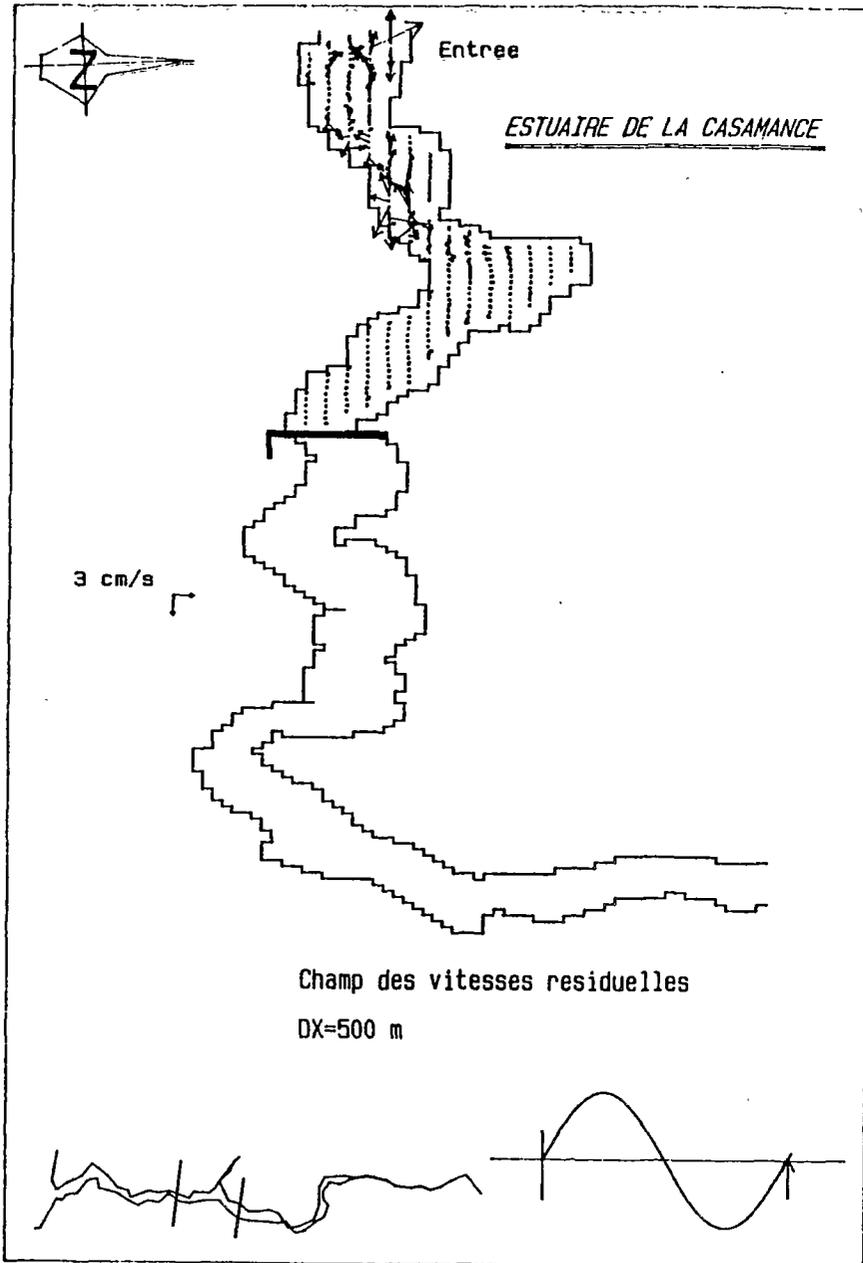


a:sans barrage

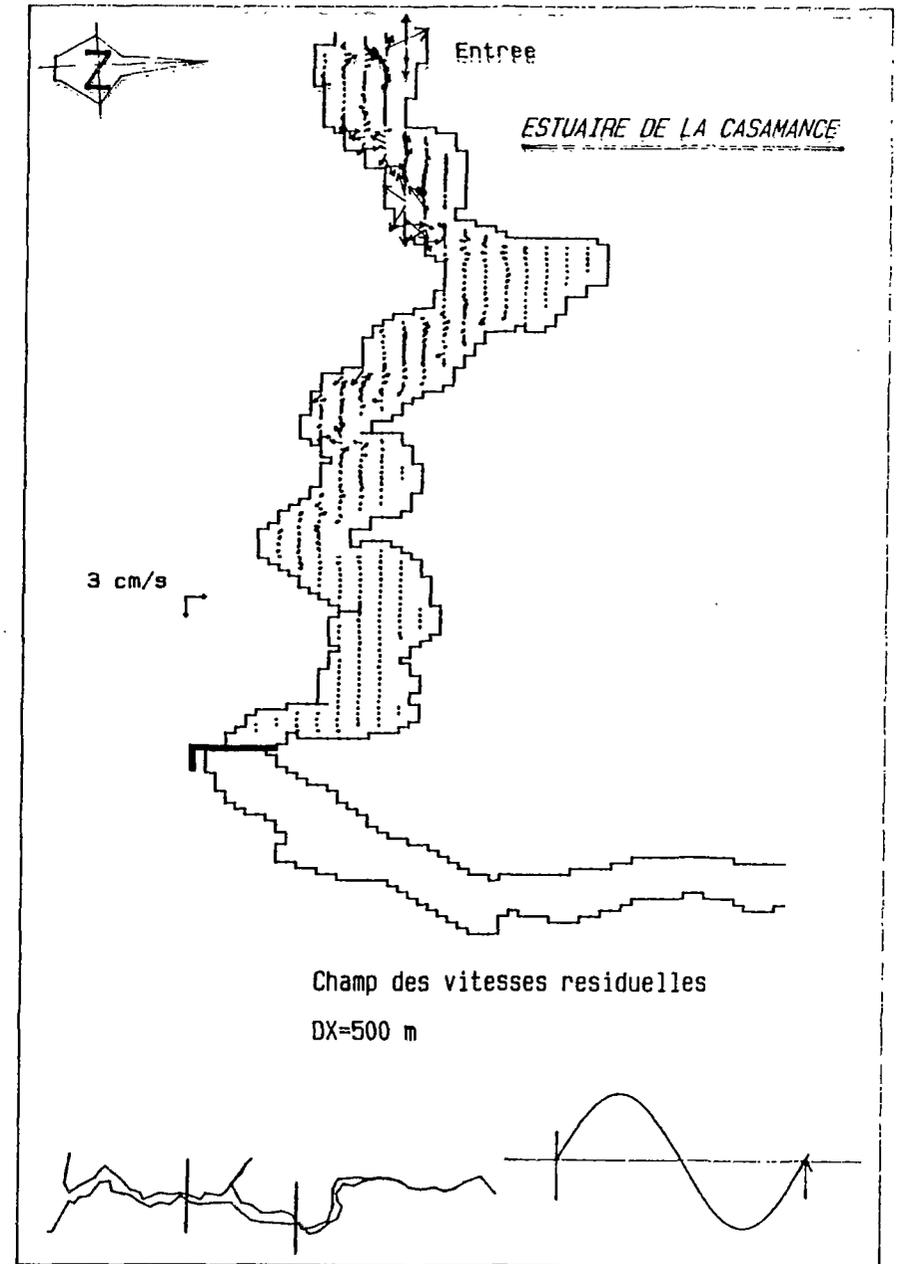


b:barrage à Séfa

fig.V.21-Circulation résiduelle eulerienne dans les cas: (a)sans barrage-(b)avec barrage à Séfa



a: barrage à Goudomp



b: barrage à Diattakounda

fig.V.22-Circulation résiduelle eulerienne dans les cas d'un barrage à Goudomp ou Diattakounda

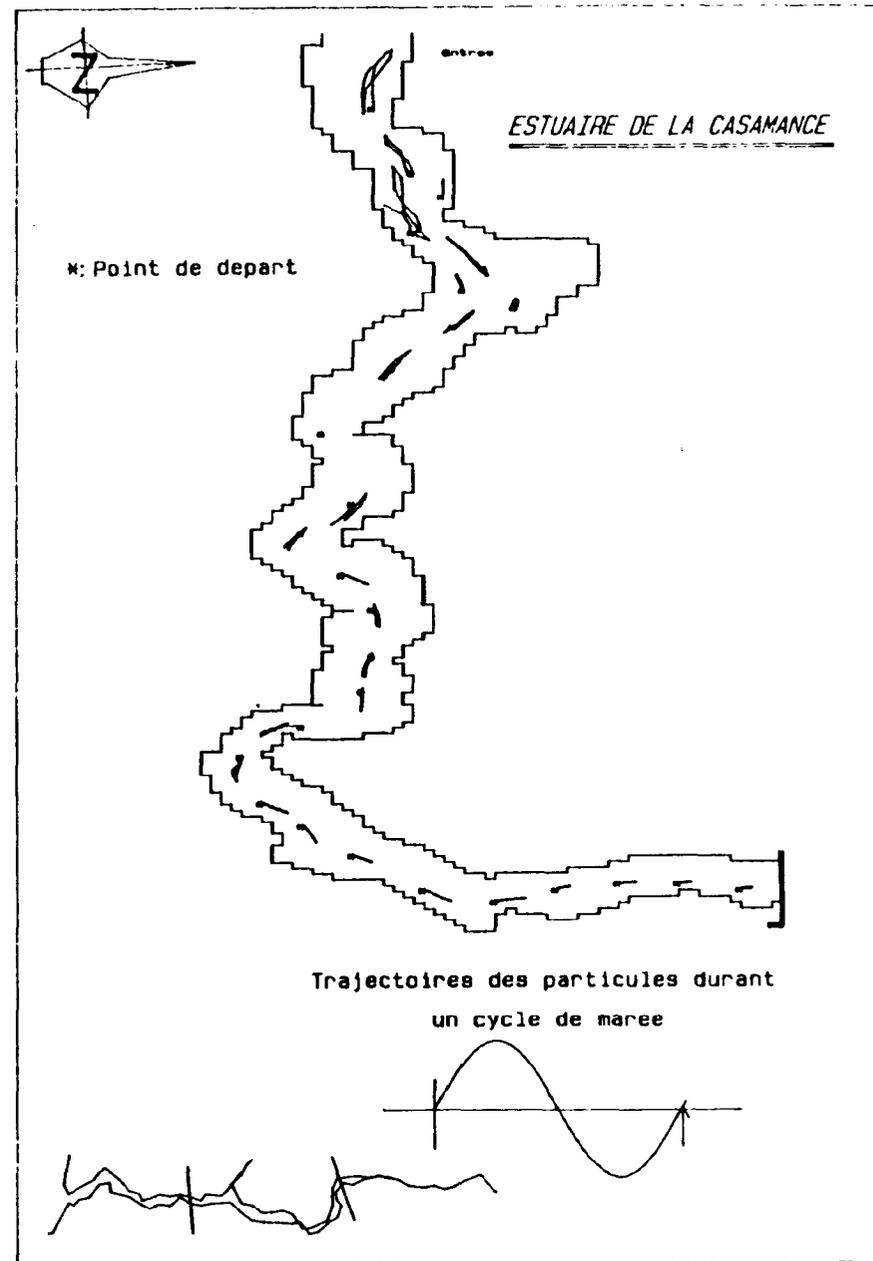
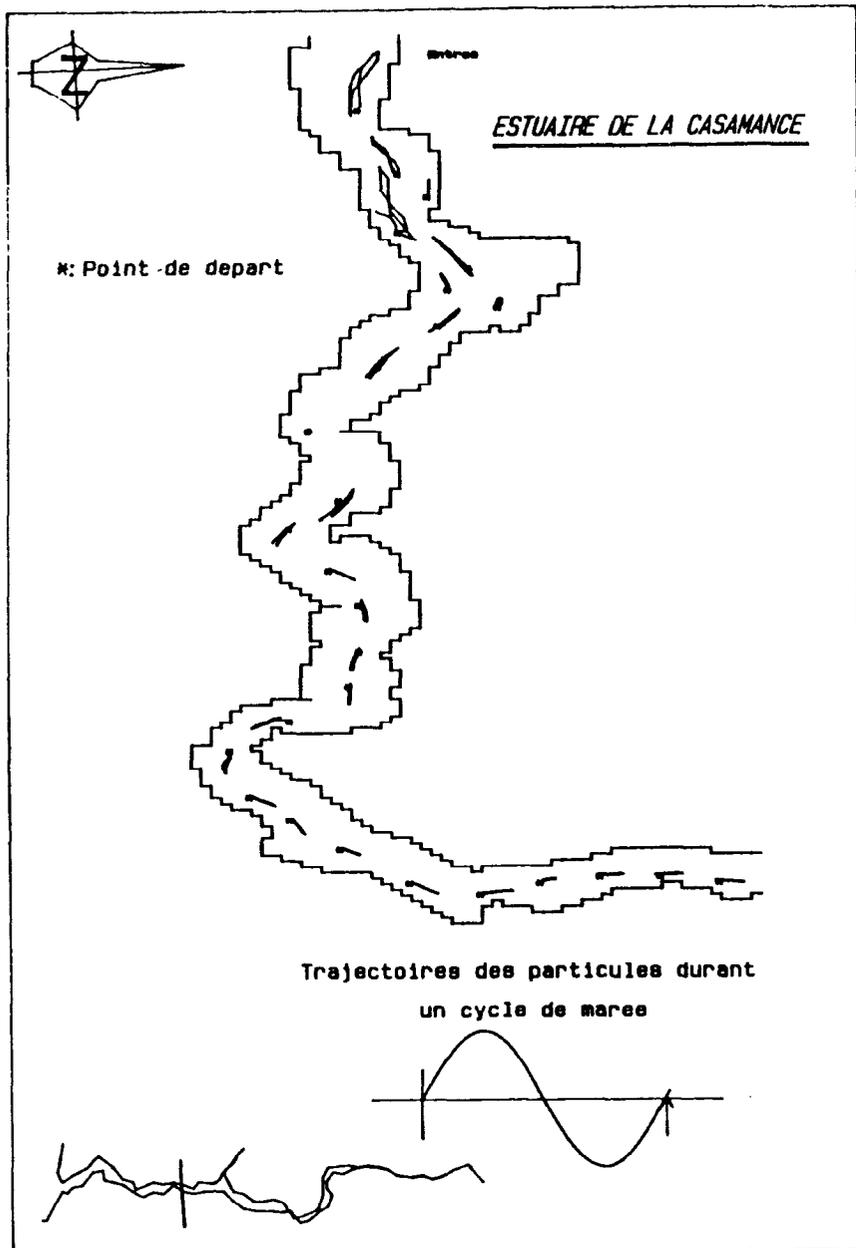


fig.V.23-Trajectoires des particules durant 1 cycle de marée (M2)

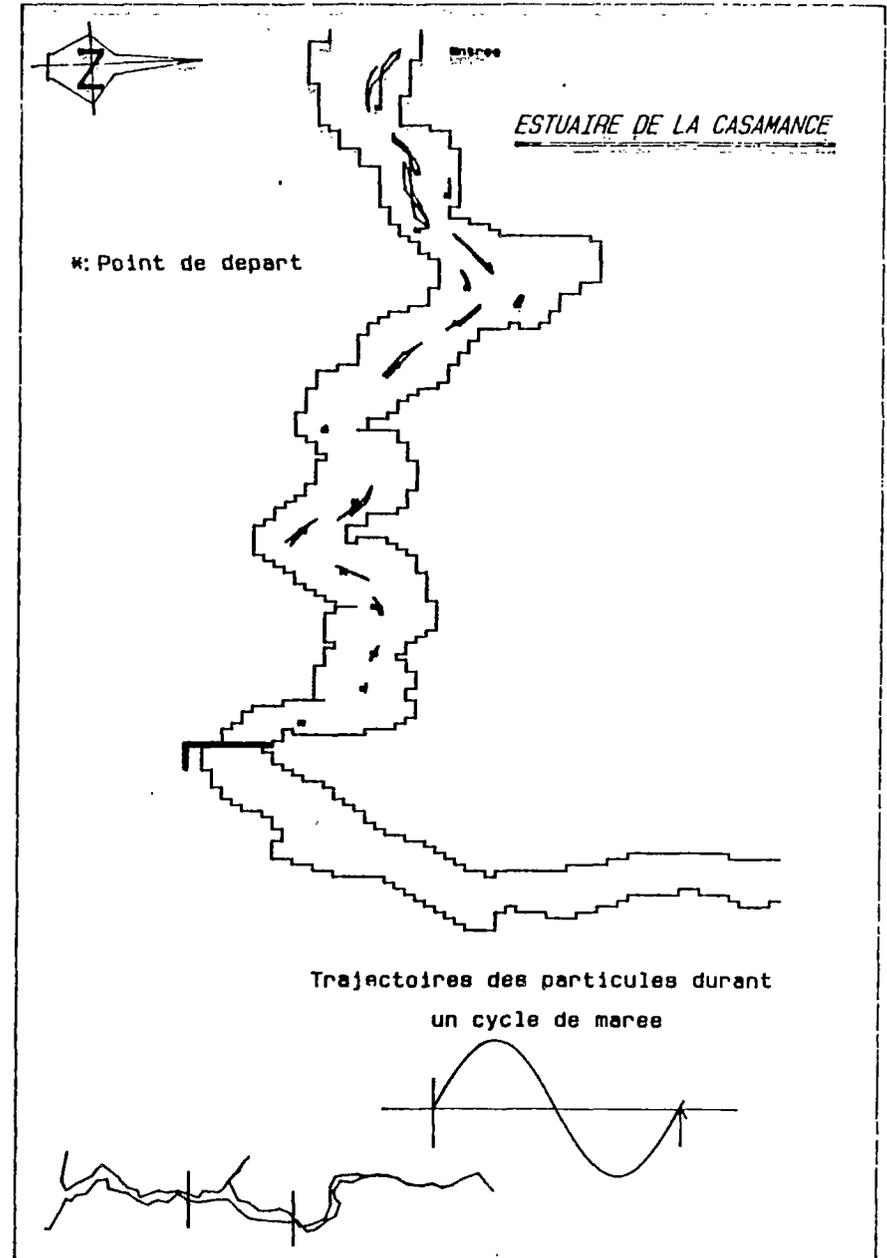
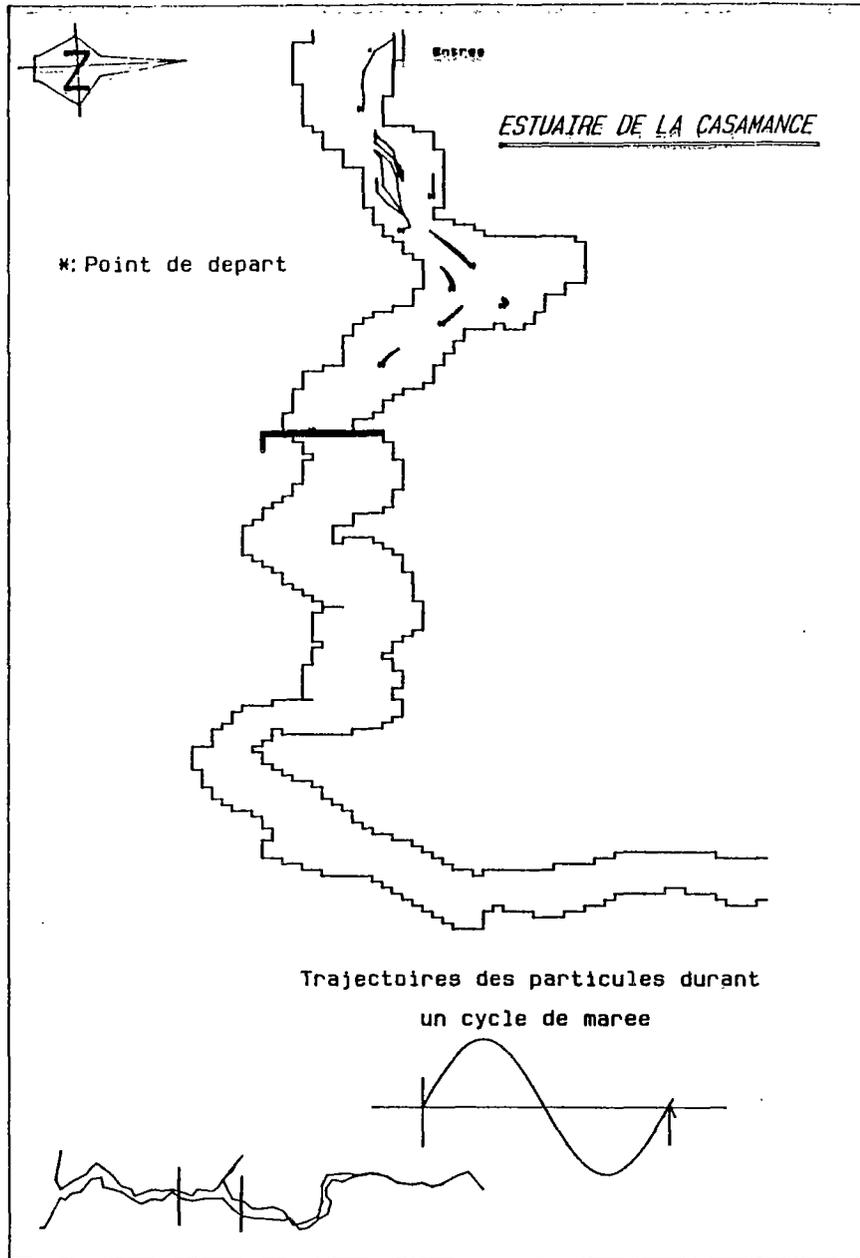


fig.V.24-Trajectoires des particules durant 1 cycle de marée (M2)

fig.V.25-Trajectoires des particules induites par la marée et un vent (N-E;Vit.=3)

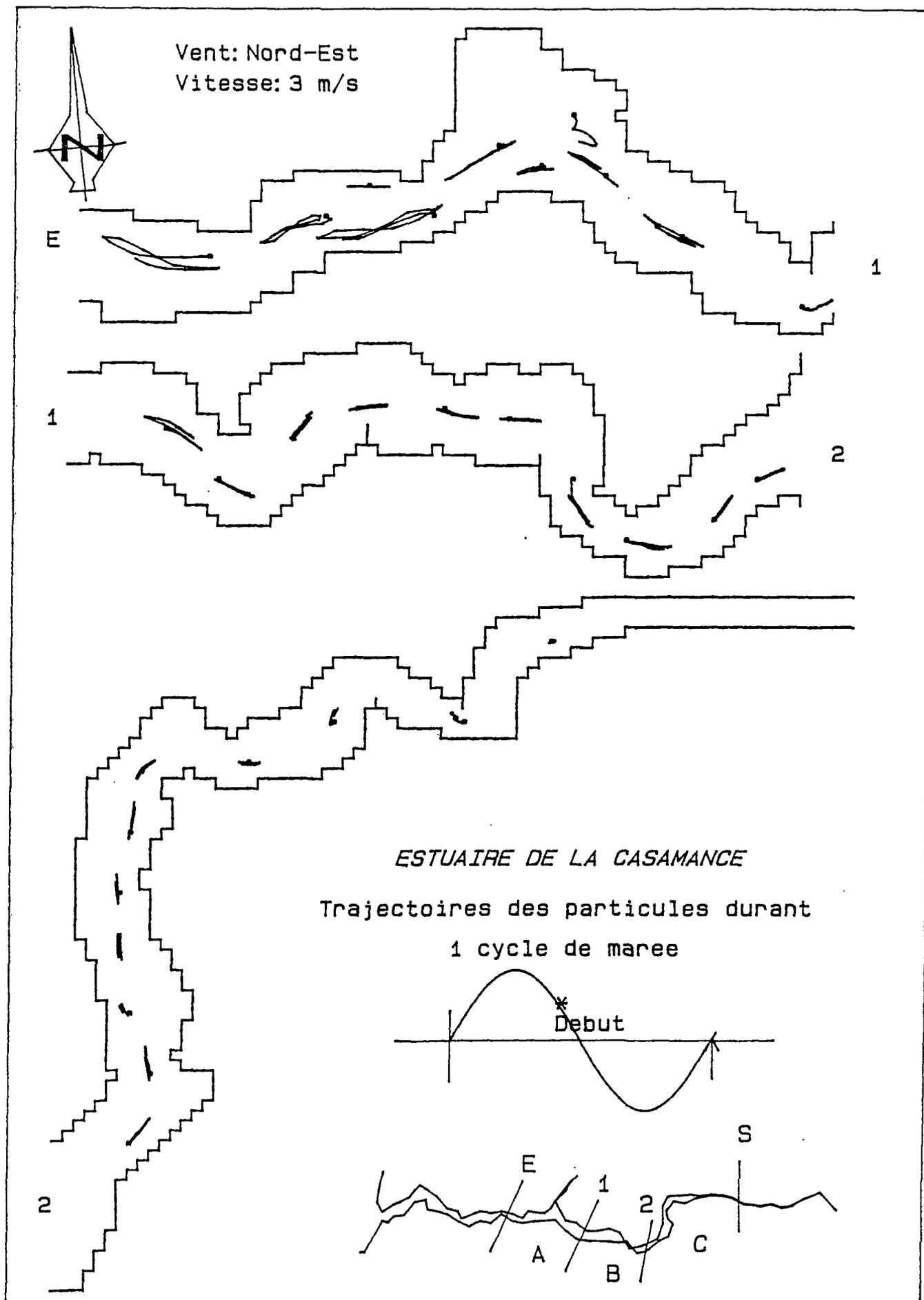


fig.V.26-Trajectoires des particules induites par la marée et un vent (S-E;Vit.=3m/s)

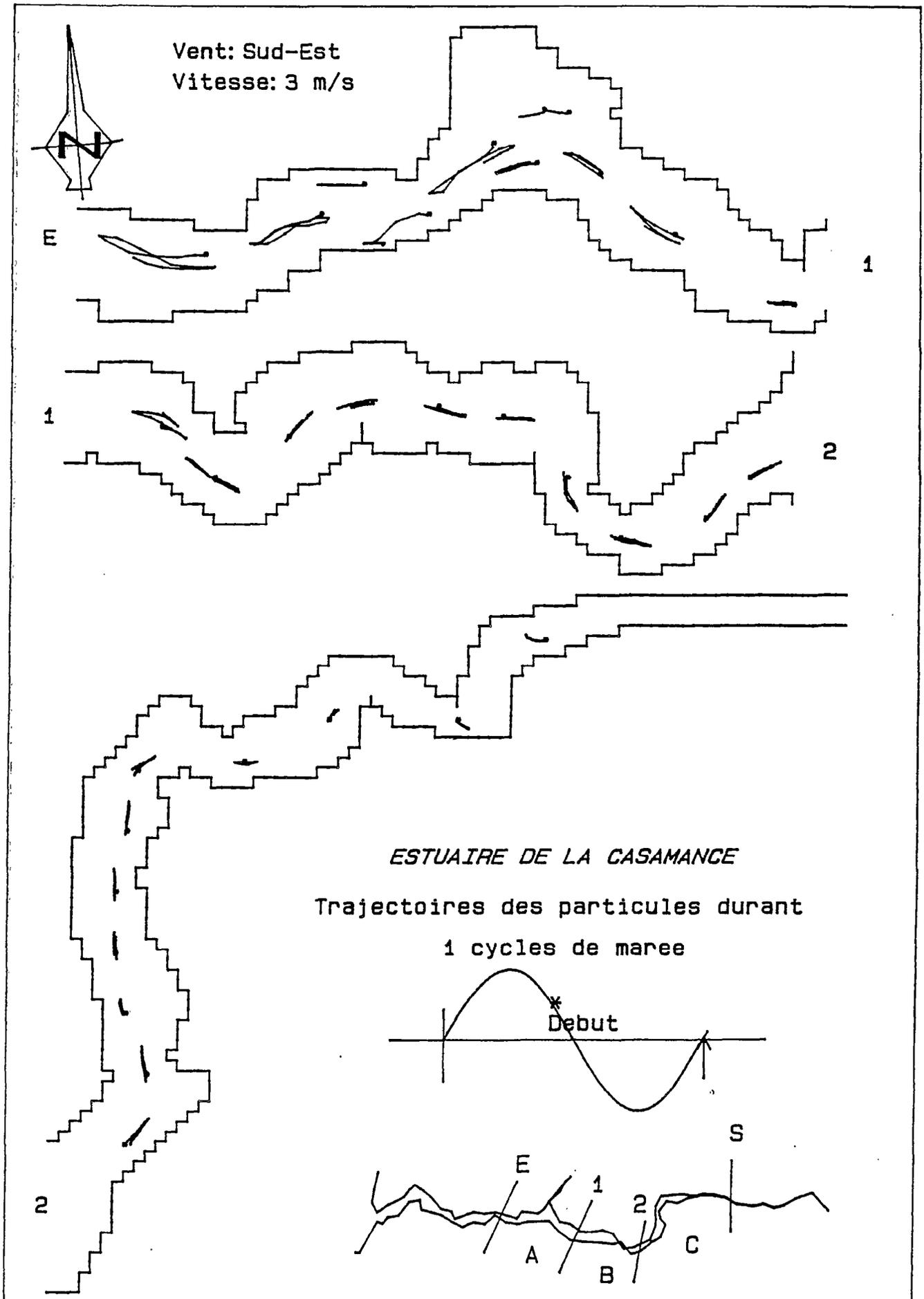


fig.V.27-Circulation résiduelle eulerienne (coef. de Manning: +20%)

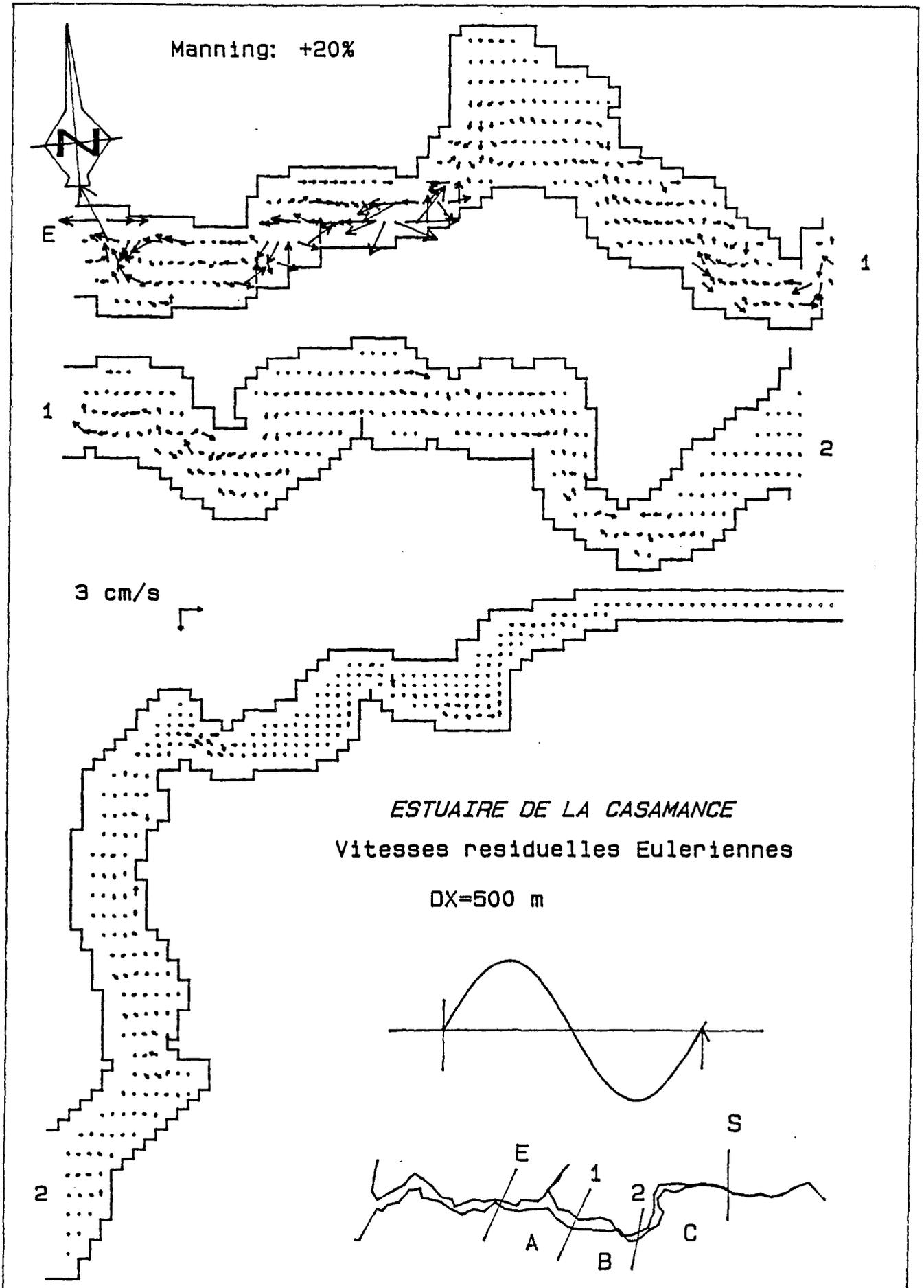


fig.V.28-Circulation résiduelle eulerienne (coef. de Manning: -20%)

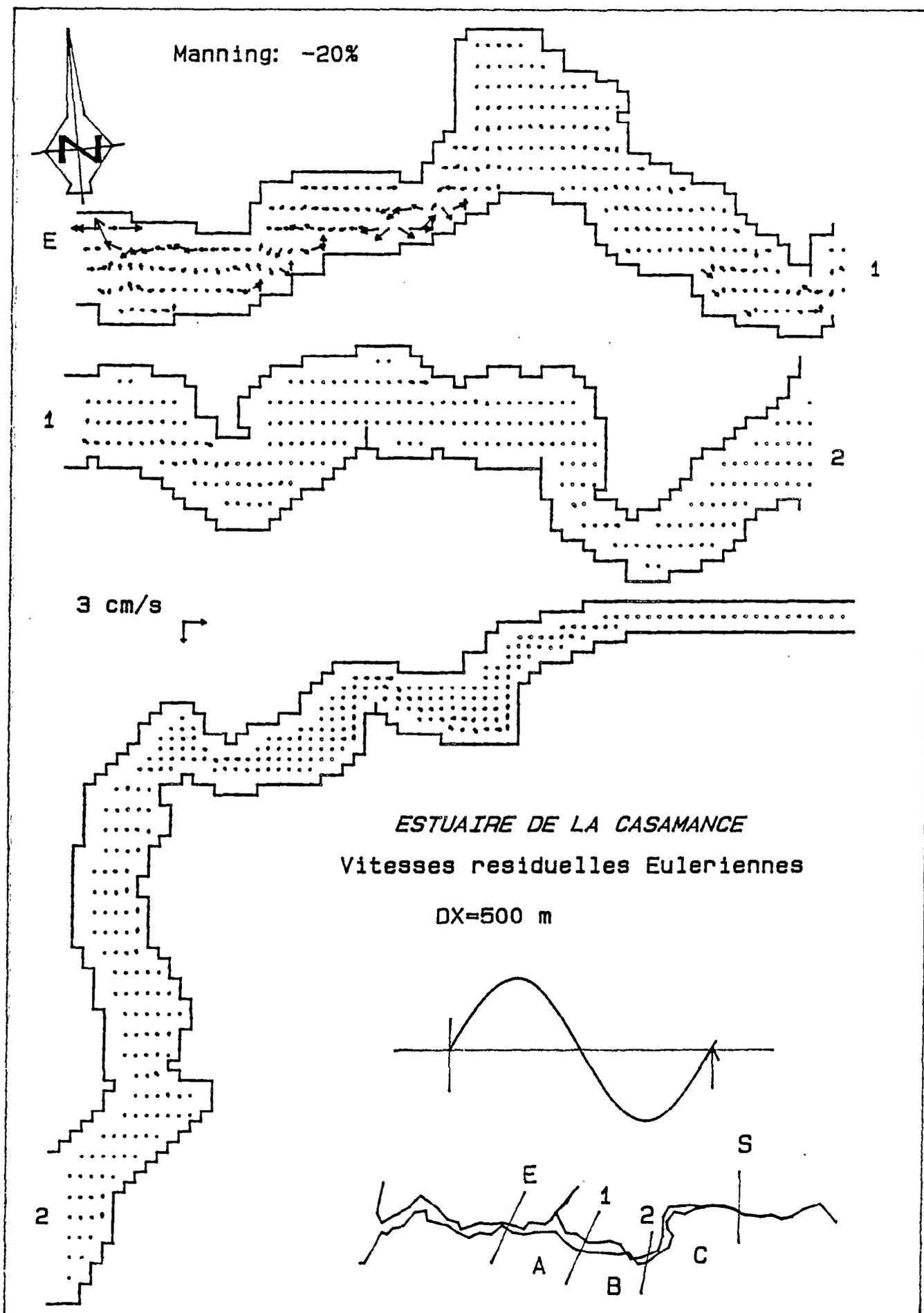


fig.V.29-Trajectoires des particules (coef. de Manning: +20%)

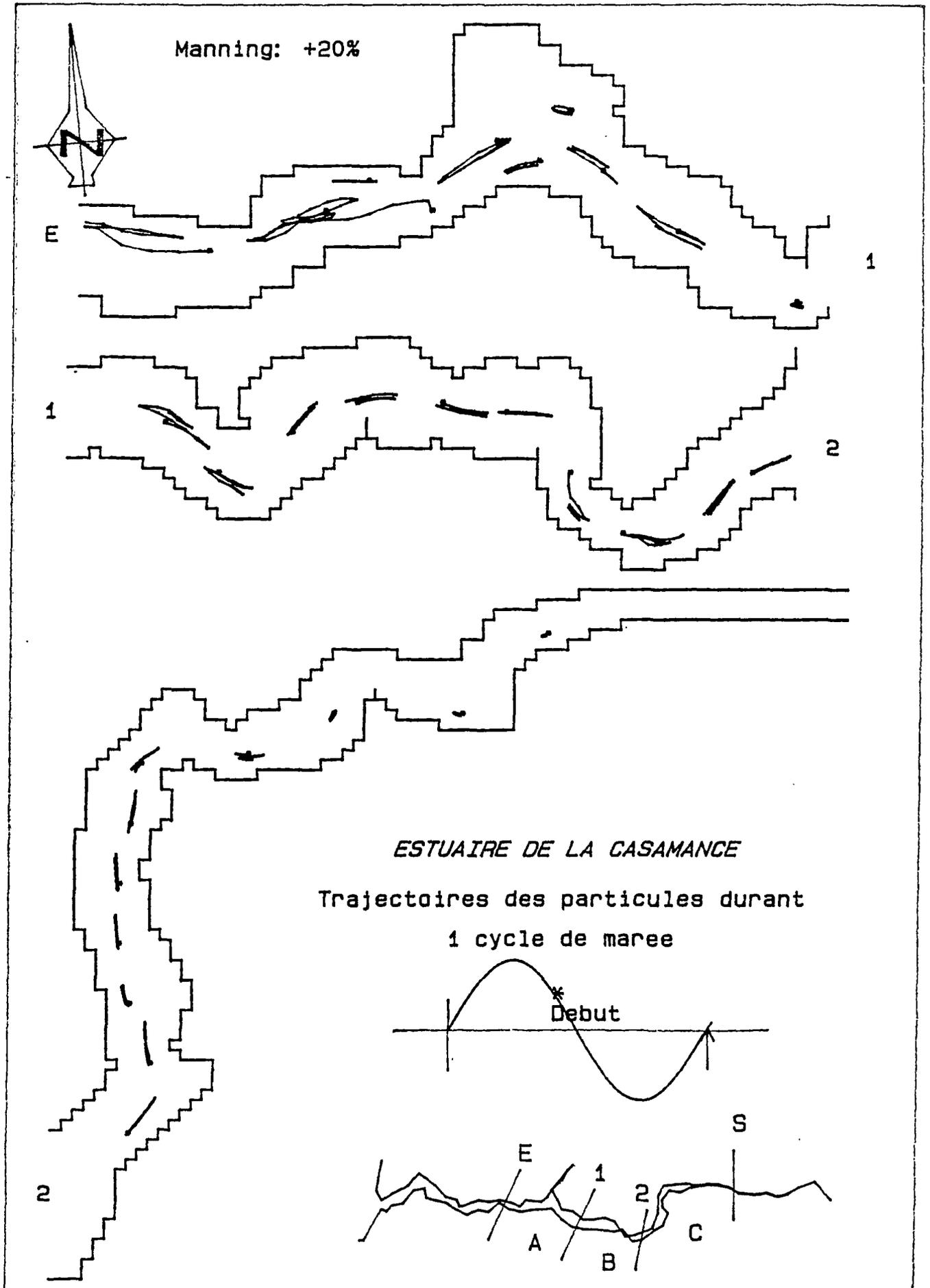
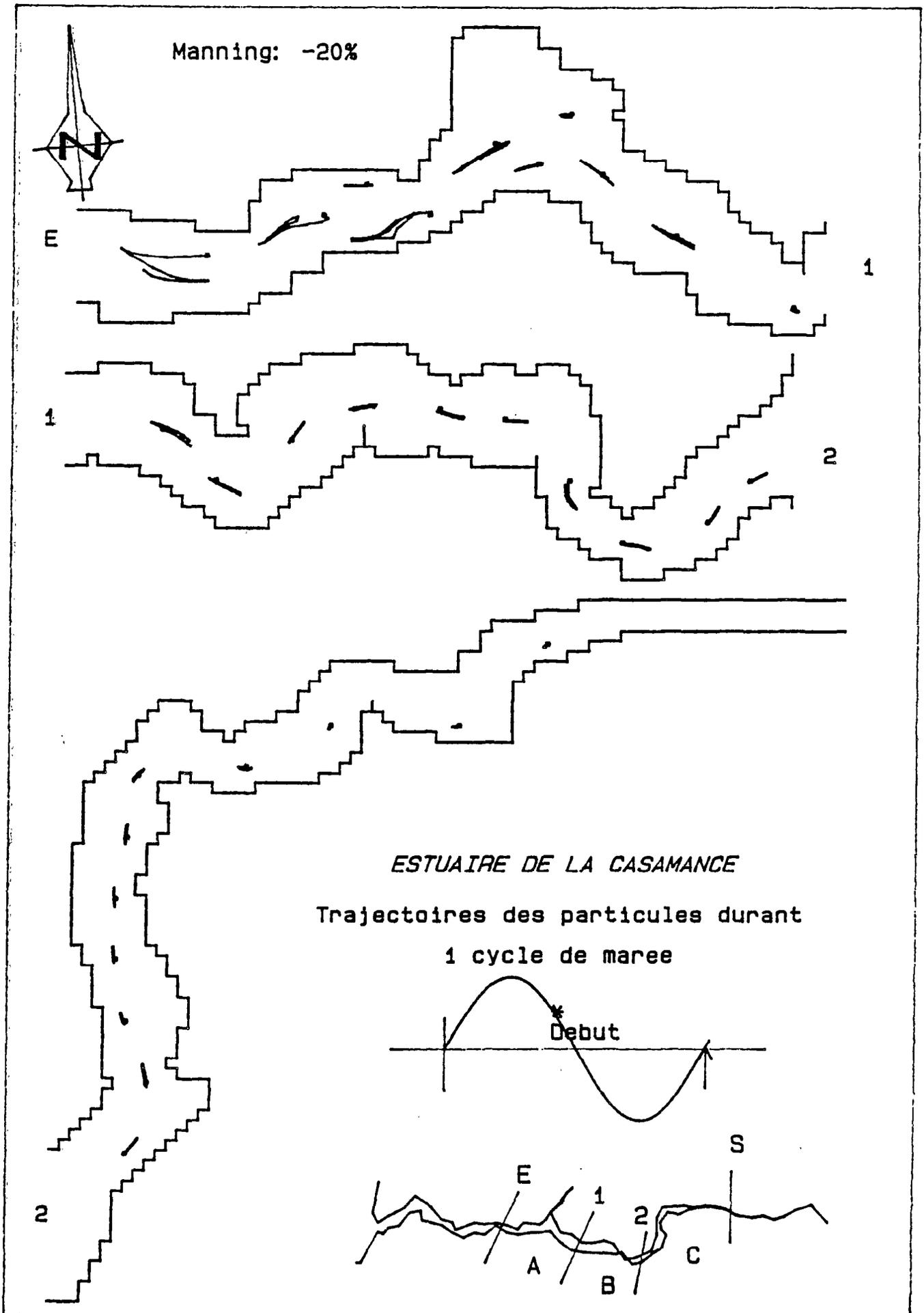


fig.V.30-Trajectoires des particules (coef. de Manning: -20%)



CONCLUSION

CONCLUSION

Ce travail présente une mise au point de modèles d'environnement basés sur une procédure itérative qui évolue suivant quatre étapes interdépendantes: la récolte des données qui a fourni la base indispensable au choix des processus physiques à analyser; ces derniers ont été décrits par un modèle mathématique dont les équations différentielles traitées selon la méthode de discrétisation des différences finies ont conduit à l'outil utilisé pour les simulations de divers cas de figures. La comparaison des résultats de cette dernière étape avec les données observées a permis de rendre compte de la performance de l'approche. Dans chacune des étapes précitées, des études complémentaires se sont imposées suivant un protocole de priorités étroitement adapté à l'objectif de l'étude, au support de calcul disponible et surtout à la qualité des données récoltées.

Bien que la réflexion soit issue des équations générales de Navier-Stokes, elle reste néanmoins représentative des écoulements simulés selon les hypothèses et les simplifications adoptées dans ce travail.

La réflexion sur les mouvements des masses d'eau dans l'estuaire de la Casamance repose sur une étude menée pas à pas qui a conduit à des modèles de traitement des circulations transitoire et résiduelle dans le milieu. Les différents choix effectués ont été justifiés à partir d'une analyse détaillée des schémas d'intégration utilisés et des propriétés numériques associées aux discrétisations spatio-temporelles des équations du mouvement.

Les données expérimentales recueillies sur le terrain ont permis d'autre part, de dégager les caractéristiques géomorphologiques du milieu puis, de fournir les informations indispensables concernant la bathymétrie et la fonction de forçage.

La circulation transitoire induite par la marée a été traitée suivant deux approches, l'une bi-dimensionnelle et l'autre mono-dimensionnelle. Toutes les deux reposent sur un développement semi-implicite des équations du mouvement. La grille totalement imbriquée a été choisie en fonction de ses performances dans le traitement des limites. Quant au terme advectif, une discrétisation amont s'est avérée plus efficace dans le cas de l'estuaire de la Casamance.

L'approche résiduelle, reposant sur les résultats du transitoire, montre la différence entre la circulation résiduelle eulerienne et celle obtenue à partir d'une approche lagrangienne. Rappelons pour mémoire que cette dernière est fonction de l'instant initial choisi et de l'importance du gradient spatial des vitesses.

Les outils présentés tout au long de ce travail nous ont permis d'atteindre nos objectifs initiaux: dégager les principaux aspects de l'écoulement dans l'estuaire de la Casamance ainsi que les conséquences d'éventuels aménagements dans le lit principal. Cependant, si la modélisation est bien, selon Abbott (1981), la reproduction d'un objet, d'un système ou d'une idée suivant une forme différente de l'identité elle-même, il s'ensuit que les modèles développés pour étudier les écoulements dans l'estuaire de la Casamance sont loin d'être une reproduction de la réalité. Ils ne sont donc qu'un outil simple d'utilisation, adaptable à divers cas de figure, et un moyen efficace d'aide à la réflexion, à l'expérimentation et à la compréhension; ils constituent surtout un instrument de prédiction rendu robuste par les propriétés numériques associées aux discrétisations utilisées.

Les performances des modèles appliqués ici à l'étude de la circulation observée dans l'estuaire de la Casamance nous apparaissent satisfaisantes. Cela, toutefois, ne devrait pas mettre un terme à l'étude hydrodynamique du milieu, mais au contraire engager vers d'autres voies de réflexion, en particulier celles qui concernent la qualité des eaux et, plus généralement, l'écologie du milieu. Il restera alors à élaborer une nouvelle méthodologie de mesure, outil primordial de la justification des modèles destinés à des buts d'ingénierie.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Références Bibliographiques

- ABBOTT (M.A.), 1966.
An Introduction to the Method of Characteristics.
American Elsevier, New York, pp:243.
- ABBOTT (M.A.) et GRUBERT (J.P.), 1973.
Towards a design system for stratified flows.
IARH, Int. Symp. on strat. flows, Novosibirsk, New York, pp:113-124.
- ABBOTT (M.A.), 1979.
Computational Hydraulics: Elements of theory of free surface flows.
Pitman, Publ. limited, London, pp:324.
- ABBOTT (M.A.), McCOWAN (A.) et WARREN (I.R.), 1981.
Numerical modeling of free surface flows that are two dimensional in plan.
in: Transport Models for Inlands and Coastal Waters. Proceeding of a Symp. on Pred. Ability. Editeur: FISHER (H.B.), pp:222-283.
- ABBOTT (M.A.) et CUNGE (J.A.), 1982.
Engineering applications of computational hydraulics Vol.1
Homage to Alexandre Preissmann.
Pitman Adv. Publ. Prog., London, pp:262.
- ALFRINK (B.J.) et VREUGDENHIL (C.B.), 1981.
Residual currents analysis of mechanisms and model types.
Report: R1469-II, Delft Hydraulics Laboratory.
- ARAKAWA (A.), 1966.
Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion: Two-dimensional incompressible flow. Part 1
J. Comp. Physics, 1, pp:119-143.
- ATTEIA (M.), 1966.
Etude de certains noyaux et théorie des fonctions "spline" en analyse numérique.
Inst. Math. Appl. de GRENOBLE, pp:101.
- BACKHAUS (J.D.), 1983.
A semi implicit scheme for the shallow water equations for application to shelf sea modelling.
Cont. Shelf Sea Res., 2, pp:243-254.
- BADIANE (S.), 1986.
La mangrove de Casamance.
Dans: L'estuaire de la Casamance environnement, pêche, socio-économie, Actes du séminaire tenu à Ziguinchor, Juin 1986, ORSTOM, pp:207-218.
- BEAM (R.M.), WARMING (R.F.) et YEE (H.C.), 1982.
Stability analysis of numerical boundary conditions and implicit difference approximations for hyperbolic equations.
J. Comp. Physics, 48, pp:200-222.

- BECKER (L.) et YEH (W.W.G.), 1972.
Identification of parameters in unsteady open channel flows.
Water Resources Research, 8, N°4, pp:956-965.
- BEKEY (G.A.), 1970.
System identification: An introduction and a survey.
Simulation, 15, pp:151-166.
- BENNETT (A.F.), 1974.
Parametric representation of tidal shallows.
Geophys. J. Roy. Astr. Soc., 38, pp:389-396.
- BENQUE (J.P.), HAUGUEL(A.) et VIOLLET (P.L.), 1981.
Quelques modélisations numériques de fluides dans l'environnement.
E.D.F, Lab. Nat. d'Hydraulique, Rapports: HE041/81.12, HE042/81.03, HE044/81.05.
- BENQUE (J.P.), CUNGE (J.A.), FEUILLET (J.), HAUGUEL(A.) et HOLLY (F.M.).
New method for tidal current computation.
J. Waterway Port Coast Oc. Div., 108, N°3, pp:396-417, 1982.
- BITSADZE (A.V.), 1964.
Equations of mixed type.
Pergamon Press, Oxford, pp:160.
- BLUMBERG (A.F.), 1977.
Numerical tidal model of Chesapeake Bay.
J. of Hyd. Div., 1, P:1-9.
- BOUSSINESQ (M.J.), 1869.
Théorie des ondes liquides periodiques.
Paris, Imprimerie Nat., MDCCC LXXII, pp:113.
- BOWDEN (K.F.), 1983.
Physical oceanography of coastal waters.
John Wiley & Sons, New York, pp:302.
- BRUCH Jr. (J.C.), LAM (C.M.) et SIMUNDICH (T.M.), 1974.
Parameter identification in field problems.
Water Resources Research, 10, N°1, pp:73-79.
- BRUNET-MORET (Y.), 1970.
Etudes hydrologiques en Casamance.
Rapport définitif, ORSTOM, Paris, pp:52.
- CHENG (R.T.) et CASULLI (V.), 1982.
On lagrangian residual currents with applications in south
san francisco bay, California.
Water Resources Research, 18, N°6, pp:1652-1662.
- Comité Centrale d'Océanographie et d'études des cotes,(C.O.E.C), 1953.
Bulletin d'information 5° année, Septembre-Octobre.
Min. Def. Nat., Secrétariat d'Etat à la Marine.
- Comité Centrale d'Océanographie et d'études des cotes,(C.O.E.C), 1955.
Bulletin d'information 7° année, Juillet-Aout.
Min. Def. Nat., Secrétariat d'Etat à la Marine.

- COURANT (R.), FRIEDRICHS (K.) et LEWY (H.), 1967.
On the partial difference equations of mathematical physics.
IBM Journal, pp:215-234.
traduit par FOX (PH.) de "Uber Die Partiellen Differenzen Gleichungen der Mathematischen Physics".
Mathematische Annalen, 1928, N°100, pp:32-74.
- CUNGE (J.A.), HOLLY (F.M.) et VERWEY (A.), 1980.
Practical aspects of computational river hydraulics.
Pitman, London, pp:420.
- DAUBERT (A.), GRAFFE (O.), 1967.
Quelques aspects des écoulements presque horizontaux à deux dimensions en plan et non permanents Application aux estuaires.
La houille blanche, N°8, pp:847-860.
- DAVIDSON (B.), VICHNEVETSKY (R.) et WANG (H.T.), 1978.
Numerical techniques for estimating best distributed Manning's roughness coefficients for open estuarial river systems.
Water Resources Research, 14, N°5, pp:777-789.
- DEBENAY (J.P.), PAGES (J.) et DIOUF (P.S.), 1986.
Zonation de la Casamance basée sur les peuplements de foraminifères et de thécamoebiens. Comparaison avec d'autres zonations écologiques.
Dans: *L'estuaire de la Casamance environnement, pêche, socio-économie, Actes du séminaire tenu à Ziguinchor, Juin 1986, ORSTOM*, pp:85-90.
- DIOUF (P.S.), PAGES (J.) et SAOS (J.L.), 1986.
Géographie de l'estuaire de la Casamance.
Dans: *L'estuaire de la Casamance environnement, pêche, socio-économie, Actes du séminaire tenu à Ziguinchor, Juin 1986, ORSTOM*, pp:13-22.
- DOOLEY (H.D.), 1974.
A comparison of gogue and current meter measurements in shallow waters.
Rapp. P.-v Reun. Cons. int. Explor. Mer, 167, pp:225-230.
- DRONKERS (J.J.), 1964.
Tidal computations in rivers and coastal seas.
North Holland Pub. Co., Amsterdam.
- DYER (K.R.) et LASTA KING (H.) 1975.
The residual water flow through the solent South England.
Geophys. J. R. astr. Soc., 42, pp:97-106.
- EDGE (B.L.) et LIU (P.C.), 1970.
Comparing power spectra computed by Blackman-Tukey and Fast Fourier Transform.
Water Resources Research, 6, N°6, pp:1601-1610.
- ELVIUS (T.) et SUNDSTRÖM (A.), 1973.
Computationally efficient schemes and boundary conditions for a fine-mesh barotropic model based on the shallow water equations.
Tellus, 25, 2, pp:132-156.
- FAIRWEATHER (G.), NAVON (I.M.), 1980.
A linear A.D.I method for the shallow water equations.
J. Comp. Physics, 37, pp:1-18.

- FALCONER (R.A.), 1980.
Numerical modeling of tidal circulation in harbors.
J. Waterway Port Coast Oc. Div., 106, N°1, pp:31-48.
- FALCONER (R.A.) et OWENS (P.H.), 1984.
Mathematical modelling of tidal currents in the Humber estuary.
J.I.W.E.S., 38, pp:528-542.
- FEARNHEAD (P.G.), 1975.
On the formation of fronts by tidal mixing around the british isles.
Deep Sea Research, 22, pp:311-321.
- FLATHER (R.A.) et HEAPS (N.S.), 1975.
Tidal computation for Morecambe bay.
Geophys. J. Roy. Astr. Soc., 42, pp:489-517.
- FOREMAN (M.G.G.), 1984.
A two dimensional analysis of the wave equation model for finite element tidal computations.
in: Finite elements in water resources.
Proceeding 5th Int. Conf., Burlington, Vermont, U.S.A, Eds: LAIBLE (J.P.), BREBBIA (C.A.), GRAY (W.) et PINDER (G.), pp:447-456.
- FREAD (D.L.) et SMITH (G.F.), 1978.
Calibration technique for 1-D unsteady flow models.
J. Hyd. Div., HY7, pp:1027-1044.
- FROMM (J.E.), 1968.
A method for reducing dispersion in convective difference schemes.
J. Comp. Physics, 3, pp:176-189.
- GERRITSEN (H.), STELLING (G.S.) et VREUGDENHIL (C.B.), 1981.
Numerical viscosity in A.D.I schemes for shallow water equations.
Delft Hydraulics Laboratory.
- GERRITSEN (H.), 1982.
Accurate boundary treatment in shallow water flow computations.
Ph.D Thesis Technische Hogeschool, Delft.
- GODUNOV (S.K.), et RYABENKI (V.S.), 1964.
Theory of Difference Schemes: An Introduction.
North Holland Publ. Comp., pp:289.
- GOURDIN (A.), et BOUMAH RAT (M.), 1983.
Méthodes numériques appliquées.
Lavoisier, Paris, pp:423.
- GREMY (J.P.), 1985.
"Simulation".
Encyclopaedia Universalis, France S.A.
- GUSTAFSON (B.), 1971.
A alternating direction implicit method for solving the shallow water equations.
J. Comp. Physics, 7, pp:239-253.

- GUSTAFSON (B.), KREISS (H.O.) et SUNDSTRÖM (A.), 1972.
Stability theory of difference approximations for mixed initial boundary value problems.
Math. Comp., 26, pp:649-686.
- GUSTAFSON (B.), 1975.
The convergence rate for difference approximations to mixed initial boundary value problems.
J. Comp. Physics, 26, pp:396-406.
- GUSTAFSON (B.) et KREISS (H.O.), 1979.
Boundary conditions for time dependent problems with an artificial boundary.
J. Comp. Physics, 30, pp:333-351.
- HAHN (S.G.), 1958.
Stability criteria for difference schemes.
Comm. on Pure and Applied Mathematics, 11, pp:243-255
- HANSEN (D.V.) et RATTRAY Jr (M.), 1966.
New dimensions in estuary classification.
Limnology and Oceanography, 11, pp:319-326.
- HARLOW (F.H.) et WELCH (J.E.), 1965.
Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface.
Phys. Fluids, 8, pp:2182.
- HEAPS (N.S.), 1969.
A two dimensional numerical model.
Phil. Roy. Soc., London A265, pp:93-137.
- HEAPS (N.S.), 1978.
Linearized vertically integrated equations for residual circulation in coastal seas.
Dt. Hydrogr. Z., 31, H.5.
- HIRT (C.W.), 1968.
Heuristic stability theory for finite-difference equations.
J. Comp. Physics, 2, pp:339-355.
- HOLLY (F.M.) et PREISSMAN (A.), 1977.
Accurate calculation of transport in two dimensions.
JHYD, ASCE, 103, N°11, pp:1259-1278.
- HUNTER (J.R.), 1975.
A note on quadratic friction in the presence of tides.
Est. Coast. Mar. Sci., 3, pp:473-475.
- HUTHNANCE (J.M.), 1981.
On mass transport generated by tides and long waves.
J. Fluid. Mech., 102, pp:367-388.
- IPPEN (A.T.), 1966.
Estuarine and coastline hydrodynamics.
Mc Graw-Hill Book Company, New York.

- KAGAN (B.A.), 1971
Sea-bed friction in one dimensional tidal current.
Izvestia Atm. and Oceanic Physics, 7, pp:780-785.
- KOLMOGOROV (A.N.), 1941
The local structure of turbulence in an incompressible viscous fluid for very large Reynolds Numbers.
C. R. Dokl. Acad. Sci. USSR, 30, pp:301-305.
- KRAVTCHENKO (J.)
Cours de marées.
ENSTA, Paris.
- KREISS (H.O.), 1966
Difference approximations for the initial boundary problem for hyperbolic differential equations.
Proc. Adv. Symp. Madison, Wis, Wiley New York, pp:141-166.
- KREISS (H.O.), 1970
Initial boundary value problems for hyperbolic equations.
Comm. Pure Appl. Math., 23, pp:277-298.
- KUSIC (G.L.) et LAVI (A.), 1969.
Stability of difference methods for initial-value type differential equations.
J. Comp. Physics, 3, pp:358-378.
- LACOMBE (H.), 1965.
Cours d'océanographie physique.
Gauthier-Villars, Paris, pp:392.
- LAMB (H.), 1935.
Hydrodynamics.
Cambridge University press, VI^{ème} Edition.
- LAMBERT (J.D.), 1977.
Computational Methods in ordinary differential equations.
John Wiley and Sons, Inc., London, pp:278.
- LAHOUD (A.), 1985.
Conditions d'application d'un modèle de propagation d'onde en zones inondables.
D.E.A, Lab. d'Hydrologie Math., U.S.T.L Montpellier (France).
- LAX (P.) et WENDROFF (B.), 1960.
Systems of conservation laws.
Comm. pure Appl. Math., 9, pp:217-237.
- LEENDERTSE (J.J.), 1967.
Aspects of a computational model for long-period water-wave propagation.
The Rand Corp., RM-5294-PR.
- LEENDERTSE (J.J.) et GRITTON (E.C.), 1971.
A water quality simulation model for well-mixed estuaries and coastal seas: Vol. 2, Computation procedures.
The Rand Corp., R-708-NYC.

- LE PREDOUR (F.), 1828.
Description de la côte occidentale d'Afrique depuis le cap de Naze jusqu'au cap Roxo.
Paris, Juin, pp:29.
- Le PROVOST (C.), 1974.
Contribution à l'étude des marées dans les mers littorales.
Application à la Manche.
Thèse d'Etat, Grenoble.
- LE RESTE (L.), 1986.
Contribution à l'étude des variations quantitatives et qualitatives de la production de crevettes en fonction de la salinité dans l'estuaire de la Casamance.
Dans: L'estuaire de la Casamance environnement, pêche, socio-économie, Actes du séminaire tenu à Ziguinchor, Juin 1986, ORSTOM, pp:97-110.
- LIGGETT (J.A.) et WOOLHISER (D.A.), 1967.
Difference solutions of the Shallow-Water equations.
J. Eng. Mechanics Div., ASCE, 93, N°2, pp:39-71.
- LILLY (D.K.), 1965.
On the computational stability of numerical solutions of time-dependent non-linear geophysical fluid dynamics problems.
Monthly Weather Review, 93, N°1, pp:11-26.
- LIONS (J.L.) et MARCHOUCK (G.I.), 1975.
Sur les méthodes numériques en sciences physiques et économiques.
DUNOD, Paris.
- LODER (J.W.), 1980.
Topographic rectification of tidal currents on the sides of Georges Bank.
J. Phys. Oceanogr., 10, pp:1399-1416.
- LONGUET-HIGGINS (M.S.), 1969.
On the transport of mass by time-varying ocean currents.
Deep Sea Res., 16, pp:431-447.
- LONGUET-HIGGINS (M.S.), 1972.
On the interpretation of records of time-varying currents.
Rapp. P.-v Reun. Cons. int. Explor. Mer, 162, pp:35-41.
- MANGEOT (G.), 1985.
"Mangroves".
Encyclopaedia Universalis, France S.A.
- MARINO (M.A.) et YEH (W.W-G.), 1973.
Identification of parameters in finite leaky aquifer system.
J. Hyd. Division, ASCE, 99, pp:319-336.
- MARIUS (C.), 1985.
Mangroves du Sénégal et de la Gambie.
Editions de l'ORSTOM, Paris, N°193, pp:357.

- MILLET (B.), OLIVRY (J.C.) et LETROQUER (Y.), 1986.
Etude du fonctionnement hydrologique de la Casamance maritime.
Dans: L'estuaire de la Casamance environnement, pêche, socio-économie, Actes du séminaire tenu à Ziguinchor, Juin 1986, ORSTOM, pp:23-38.
- MORETTI (G.), 1969.
Importance of boundary conditions in numerical treatment of hyperbolic equations.
Phys. Fluids, Suppl. 2, pp:13-20.
- MURTY (T.S.), BARBER (F.G.) et TAYLOR (J.D.), 1980.
Role of advective terms in tidally generated residual circulation.
Limnol. Oceanogr., 25, pp:529-533.
- NEVES (R.J. DE J.), 1985.
Etudes expérimentales et modélisation mathématique des circulations transitoire et résiduelle dans l'estuaire du Sado.
Thèse, Université de Liège.
- NEWMANN (G.) et PIERSON Jr. (W.J.), 1966.
Principles of physical oceanography.
Prentice Hall Int., Inc., New Jersey, pp:544.
- NICHOLAS (B.D.) et HIRT (C.W.), 1973.
Calculating three dimensional free surface flows in the vicinity of submerged and exposed structure.
J. Comp. Physics, 12, pp:234-246.
- NIHOUL (J.C.J.), 1975.
Modelling of marine systems, (Part 1).
Elsevier Scient. Pub. Comp., New York, pp:23-66.
- NIHOUL (J.C.J.) et RONDAY (F.C.), 1975.
The influence of the "tidal stress" on the residual circulation, Application to the Southern Bight of the North Sea.
Tellus, XXVII, pp:484-489.
- NIHOUL (J.C.J.), 1980.
Residual circulation, long waves and mesoscales eddies in the North Sea
Oceanol. Acta, 3, pp:309-316.
- NIHOUL (J.C.J.) et RUNFOLA (Y.), 1981.
The residual circulation in the north sea.
in: Ecohydrodynamics, Ed. NIHOUL (J.C.J.), Elsevier Scient. Pub. Comp., Amsterdam.
- NIHOUL (J.C.J.), 1982.
Hydrodynamic models of shallow continental seas.
Elsevier Scient. Pub. Comp., New York, pp:103-153.
- NOYE (J.), 1981.
Numerical Solution of Partial Differential Equations.
North Holland Publ. Comp., pp:643.
- O'BRIEN (G.G.), HYMAN (M.A.), KAPLAN (S.), 1965.
A study of the numerical solution of partial differential equations.
J. of Math. Phys. 29, pp:223-251.

- OLIGER (J.) et SUNDSTRÖM (A.), 1978.
Theoretical and practical aspects of some initial boundary value problems in fluid dynamics.
J. Appl. Math., 35, pp:419-446.
- OWEN (A.), 1984.
Artificial diffusion in on the numerical modelling of the advective transport of salinity.
Appl. Math. Modelling, 8, pp:116-120.
- OZMIDOV (R.V.), 1980.
Small scale oceanic turbulence.
in: Marine Turbulence. Editeur: NIHOUL (C.J.), Elsevier Scientific Pub. Comp., Amsterdam, pp:167-174.
- PAGES (J.), DEBENAY (J.P.) et LE BRUSQ (J.Y.), 1987.
L'environnement estuarien de la Casamance.
Rev. Hydrobiol. trop., 20 (3-4), pp:191-202.
- PAGES (J.) et DEBENAY (J.P.), 1987.
Evolution saisonnière de la salinité de la Casamance. Description et essai de modélisation.
Rev. Hydrobiol. trop., 20 (3-4), pp:203-218.
- PATANKAR (S.V.), 1980.
Numerical heat transfer and fluid flow.
Hemisph. Pub. Comp., New York, pp:197.
- PATANKAR (S.V.) et SPALDING (D.B.), 1972.
A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three dimensional parabolic flows.
Int. J. Heat Mass Transfer, 15, pp:787.
- PELISSIER (P.), 1966.
Les paysans du Sénégal.
Imprimerie Fabrègue, St Yrieix, pp:939.
- PETRYK (S.) et BOSMAJIAN (G.), 1975.
Analyse of flow through vegetation.
Journal of Hydraulics Division, N°7, 101, pp:871-884.
- PHILLIPS (N.A.), 1958.
An example of non-linear computational instability.
in, The Atmosphere and Sea in Motion, Rockefeller Inst. Press, New York, pp:501-504.
- PINGREE (R.D.) et MADDOCK (L.), 1977.
Tidal eddies and coastal discharge.
J. Mar. Biol. Ass., U.K, 57, pp:869-875.
- PINGREE (R.D.) et MADDOCK (L.), 1977.
Tidal residuals in the english channel.
J. Mar. Biol. Ass., U.K, 57, pp:339-354.
- PINGREE (R.D.), 1978.
The formation of the shambles and other banks by tidal stirring of the sea.
J. Mar. Biol. Ass., U.K, 58, pp:211-226.

- PINGREE (R.D.), 1979.
Baroclinic eddies bordering the celtic sea in late summer.
J. Mar. Biol. Ass., U.K., 59, pp:689-698.
- PISKUNOV (N.), 1974.
Differential and integral calculus, (Vol. 1).
Mir Publishers, Moscou, pp:471.
- PLATZMAN (G.W.), 1958.
A solution of the nonlinear vorticity equation.
in: The Atmosphere and Sea in Motion.
Rockefeller Inst. Press, New York, pp:326-332.
- RADIX (J.C.), 1970.
Introduction au filtrage numérique.
Edition EYROLLES, pp:239.
- RAITHBY (G.D.), 1975.
Skew upstream differencing schemes for problems involving fluid flow.
Comp. Methods in Applied Mech. Eng., 5, pp:153-164.
- RAITHBY (G.D.), 1976.
A critical evaluation of upstream differencing applied to problems involving fluid flow.
Comp. Methods in Applied Mech. Eng., 9, pp:75.
- RAMMING (H.G.), 1972.
Reproduction of physical processes in coastal areas.
Proc. Thirteenth conf. on Coast. Eng., Vancouver ASCE.
- REID (K.O.) et BODINE (B.R.), 1968.
Numerical model for storm surges in Galveston bay.
J. Waterways Harbors Div., Proc. A.S.C.E., 94, N°1, pp:33-57.
- RICHTMYER (T.D.) et MORTON (K.W.), 1967.
Difference methods for initial value problems (2nd edition).
J. Wiley and Sons, New York, pp:405.
- RICHTMYER (T.D.), 1978.
Principles of advanced mathematical physics, Vol. 1.
Springer-Verlag, New York.
- ROACHE (P.J.), 1972.
Computational Fluid Dynamics.
Hermosa Publishers, pp:446.
- ROACHE (P.J.), 1972.
On artificial viscosity.
J. Comp. Physics, 10, pp:169-184.
- ROBERTS (K.V.) et WEISS (N.O.), 1966.
Convective difference schemes.
Maths. Comput., 20, pp:272-299.
- ROCHE (C.), 1985.
Histoire de la Casamance: "Conquête et Résistance 1850-1920".
Paris, Karthala, pp:401.

- RODRIGUES (D.A.), TELES (M.) et LEENDERTSE (J.J.), 1982.
Numerical modeling of the Tejo estuary for currents and water quality predictions.
Rand Corp. Paper Series: P-6842, pp:15.
- RONDAY (F.C.), 1975.
Modèles de circulation hydrodynamique en mer du Nord.
Ph.D Dissertation, Université de Liège.
- RONDAY (F.C.), 1979.
Tidal and residual circulations in the english channel.
in: Marine forecasting. Editeur: NIHOUL (C.J.), Elsevier Scientific Pub. Comp., Amsterdam, pp:351-384.
- ROSS (D.) et ROBERTSON (J.M.), 1950.
Shear stress in a turbulent boundary layer.
J. Applied Physics, 21, pp:557-561.
- RUSSELL (R.C.H.) et MACMILLAN (D.H.), 1954.
Waves and Tides.
Hutchinson's Sci. Tech. Pub., (2nd Edition).
- SALOMON (J.C.), 1976.
Modèle mathématique de la propagation de la marée en estuaire et et des transports sableux associés. Application aux estuaires de la Loire et de la Seine.
Thèse d'Etat, Univ. Bretagne Occidentale, BREST 1976.
- SAUNDERS (P.M.), 1977.
Average drag in an oscillatory flow.
Deep Sea Research, 24, pp:381-384.
- SCHMITZ (G.) et SEUS (G.J.), 1984.
Simulating flood flows by coupled 1-D and 2-D models
in: Finite elements in water resources. Proceeding 5th Int. Conf., Burlington, Vermont, U.S.A, Eds: LAIBLE (J.P.), BREBBIA (C.A.), GRAY (W.) et PINDER (G.), pp:555-566.
- SHURMAN (P.), 1958.
Manuel of harmonic analysis and prediction of tides.
Spe. Pub., N°98, U.S Dept. of Com., Coast and Geoditic Survey, U.S.A.
- SIMPSON (J.H.) et HUNTER (J.R.), 1974.
Fronts in the irish sea.
Nature, 1250, pp:404-406.
- SMITH (G.D.), 1969.
Numerical solution of partial differential equation.
Oxford University Press, London, pp:175.
- SPALDING (D.B.), 1972.
A novel finite-difference formulation for differential expressions involving both first and second derivatives.
Int. J. Num. Methods Eng., 4, pp:551.

- STELLING (G.S.), 1983.
On the construction on computational methods for shallow water flow problems.
Thèse Delft University of technology, pp:223.
- STOKES (G.G.), 1847.
On the theory of oscillatory waves.
Trans. Camb. Phil. Soc., 8, pp:441-455.
- STRIKWERDA (J.C.), 1980.
Initial boundary value problems for the method of lines.
J. Comp. Physics, 34, pp:94-107.
- SUGIMOTO (T.), 1975.
Effect of boundary geometries on tidal currents and tidal mixing.
J. Oceanogr. Soc. Jap., 31, pp:1-14.
- TRAPP (J.A.) et RAMSHAW (J.D.), 1976.
A simple heuristic method for analyzing the effect of boundary conditions on numerical stability.
J. Comp. Physics, 20, pp:238-242.
- TEE (K.T.), 1976.
Tide-induced residual current, a 2-D nonlinear numerical tidal model.
J. Marine Research, 34, N°4, pp:603-628.
- UNCLES (R.J.), 1982.
Computed and observed residual currents in Bristol Channel.
Oceanologica Acta, 5, N°1, pp:11-20.
- UNCLES (R.J.), 1982.
Residual currents in the Severn estuary and their effects on dispersion.
Oceanologica Acta, 5, N°4, pp:403-410.
- VAN (T.C.), 1959.
Open channel hydraulics.
McGraw-Hill Book Comp. Inc., New York.
- VERBOOM (G.K.), STELLING (G.S.) et OFFICER (M.J.), 1982.
Boundary conditions for the shallow water equations.
in: Engineering applications of computational hydraulics, Vol.1
Homage to Alexandre Preissmann. Editeurs: ABBOTT (M.B.) et CUNGE (J.A.)
Pitman Adv. Publ. Prog., London, pp:230-262.
- VIGNES (J.), 1967.
Méthodes numériques d'optimalisation d'une fonction de plusieurs variables.
Chimie Industrie, Génie chimique, 97, pp:1264-1276.
- VILLERMAUX (J.) et ANTOINE (B.), 1978.
Construction ou ajustement des modèles mathématiques: une science ou un art.
Bull. B.R.G.M, Sect. 3, N°4, pp:327-339.

- VIOLLET (P.L.), 1979.
 Quelques mots sur la méthode d'éclatement d'opérateurs avec coordination.
E.D.F, Lab. Nat. d'Hydraulique, Rapports: HE044/78.8.
- VON NEWMANN (J.) et RICHTMYER (R.D.), 1950.
 A method for the numerical calculation of hydrodynamics shocks.
J. Applied Physics, 21, pp:232-237.
- VREUGDENHIL (C.B.), 1969.
 On the effect of artificial-viscosity methods in calculating shocks.
J. Eng. Maths., 3, pp:285-288.
- WEARE (T.J.), 1976.
 Instability in tidal flow computational schemes.
J. of Hyd. Div., 5, pp:569-580.
- WENDROFF (B.), 1961.
 On the structure of certain finite difference schemes.
S.I.A.M., Rev., 3, pp:37-46.
- WENDROFF (B.), 1965.
 Theoretical numerical analysis.
Academic Press., New York, pp:239.
- WIENER (N.), 1949.
 The extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series with engineering applications.
John Wiley and Sons, Inc., New York.
- WILLIS (J.C.), 1978.
 Analytical velocity distribution.
J. of Hyd. Div., 104, N°11, pp:1543-1549.
- WILLIS (J.C.), 1985.
 Near bed velocity distribution.
J. of Hyd. Engineering, 111, N°5, pp:741-753.
- YEH (W.W-G.) et TAUXE (G.W.), 1971.
 Optimal identification of aquifer diffusivity using quasilinearisation
Water Res. Research, 7, pp:955-962.
- YEN (B.C.), 1975.
 Numerical model of St Lawrence River estuary.
J. of Hyd. Div., 1, pp:202-203.
- YIH (S.M.) et DAVIDSON (B.), 1975.
 Identification in nonlinear distributed parameter water quality models
Water Res. Research, 11, pp:693-704.
- ZIMMERMAN (J.T.F.), 1976.
 Mixing and flushing of tidal embayments in the western dutch wadden sea. Part I: Distribution of salinity and calculation of mixing time scales.
Netherlands J. Sea Res., 10, N°2, pp:149-191.

ZIMMERMAN (J.T.F.), 1976.

Mixing and flushing of tidal embayments in the western dutch wadden sea. Part II: Analysis of mixing processes.
Netherlands J. Sea Res., 10, N°4, pp:397-439.

ZIMMERMAN (J.T.F.), 1978.

On the Euler-Lagrange transformation and Stokes' drift in the presence of oscillatory and residual currents.
Deep Sea Res., 26, pp:505-520.

ZIMMERMAN (J.T.F.), 1980.

Vorticity transfer by tidal currents over an irregular topography.
J. Mar. Res., 38, N°4, pp:601-630.

LISTE DES FIGURES

CHAPITRE I

- Figure I.1-Carte générale du réseau de la Casamance.
 Figure I.2-Estuaire de la Casamance.
 Figure I.3-Carte de situation et profils bathymétriques.
 Figure I.4-Pluviométrie moyenne à la station de Sédhiou.
 Figure I.5-Pluviométrie moyenne à la station de Ziguinchor.
 Figure I.6-Débit journalier à la station de Kolda (1967-1984).
 Figure I.7-Répartition longitudinale de la salinité.
 Figure I.8-Evaporation mensuelle à Ziguinchor mesurée en bac "Colorado classe A".
 Figure I.9-Températures mensuelles moyennes, maximales et minimales en Casamance.
 Figure I.10-Régime moyen des vents à Ziguinchor.
 Figure I.11-Débit fluvial à Kolda (1969-1984).
 Figure I.12-Profil longitudinal de l'estuaire de la Casamance.
 Figure I.13-Quelques exemples de sections transversales.
 Figure I.14-Emplacement des stations de contrôle dans l'estuaire.
 Figure I.15-Variation horaire du champ des vitesses.
 Figure I.16-Variations longitudinales des vitesses maximales du courant de marée.
 Figure I.17-Quelques exemples de la structure verticale du champ de vitesse.
 Figure I.18-Zone de l'étude hydrodynamique avec la position des stations de contrôle.
 Figure I.19-Représentation des forces d'attraction luni-solaire.
 Figure I.20-Représentation des ondes diurnes et semi-diurnes à la station de Diogué (1951).
 Figure I.21-Représentation des composantes diurnes à la station de Diogué (1951).
 Figure I.22-Représentation des composantes semi-diurnes à la station de Diogué (1951).
 Figure I.23-Représentation des ondes diurnes et semi-diurnes à la station de Ziguinchor (1953).
 Figure I.24-Représentation des composantes diurnes à la station de Ziguinchor (1953).
 Figure I.25-Représentation des composantes semi-diurnes à la station de Ziguinchor (1953).
 Figure I.26-Marée annuelle (1970).
 Figure I.27-Marée semi-mensuelle (1970).
 Figure I.28-Amplitudes minimales, maximales et moyennes de la marée en Casamance (1970).
 Figure I.29-Représentation des ondes diurnes, semi-diurnes et quart-diurnes à la station de Ziguinchor (1968).
 Figure I.30-Représentation des ondes diurnes, semi-diurnes et quart-diurnes à la station de Banganga (1968).
 Figure I.31-Représentation des ondes diurnes, semi-diurnes et quart-diurnes à la station de Kaour (1968).
 Figure I.32-Représentation des ondes diurnes, semi-diurnes et quart-diurnes à la station d'Hamdalaye (1968).
 Figure I.33-Représentation des ondes diurnes, semi-diurnes et quart-diurnes à la station de Sefa (1968).

- Figure I.34-Représentation des ondes diurnes, semi-diurnes et quart-diurnes à la station de Diana Malari (1968).
- Figure I.35-Représentation de la composante diurne (O1) à toutes les stations de contrôle (1968).
- Figure I.36-Représentation de la composante diurne (K1) à toutes les stations de contrôle (1968).
- Figure I.37-Représentation de la composante semi-diurne (M2) à toutes les stations de contrôle (1968).
- Figure I.38-Représentation de la composante semi-diurne (K2) à toutes les stations de contrôle (1968).
- Figure I.39-Représentation de la composante quart-diurne (M4) à toutes les stations de contrôle (1968).
- Figure I.40-Représentation de la composante quart-diurne (MS4) à toutes les stations de contrôle (1968).
- Figure I.41-Représentation des composantes semi-diurnes et diurnes à la station de Ziguinchor (1968).
- Figure I.42-Représentation des composantes semi-diurnes et diurnes à la station de Banganga (1968).
- Figure I.43-Représentation des composantes semi-diurnes et diurnes à la station de Kaour (1968).
- Figure I.44-Représentation des composantes semi-diurnes et diurnes à la station d'Hamdalaye (1968).
- Figure I.45-Représentation des composantes semi-diurnes et diurnes à la station de Sefa (1968).
- Figure I.46-Représentation des composantes semi-diurnes et diurnes à la station de Diana Malari (1968).
- Figure I.47-Représentation des ondes diurnes, semi-diurnes et quart-diurnes à la station de Ziguinchor (1986).
- Figure I.48-Représentation des ondes diurnes, semi-diurnes et quart-diurnes à la station de Banganga (1986).
- Figure I.49-Représentation des ondes diurnes, semi-diurnes et quart-diurnes à la station de Goudomp (1986).
- Figure I.50-Représentation des ondes diurnes, semi-diurnes et quart-diurnes à la station d'Hamdalaye (1986).
- Figure I.51-Représentation de la composante diurne (K1) à toutes les stations de contrôle (1986).
- Figure I.52-Représentation de la composante diurne (O1) à toutes les stations de contrôle (1986).
- Figure I.53-Représentation de la composante semi-diurne (M2) à toutes les stations de contrôle (1986).
- Figure I.54-Représentation de la composante semi-diurne (K2) à toutes les stations de contrôle (1986).
- Figure I.55-Représentation de la composante quart-diurne (M4) à toutes les stations de contrôle (1986).
- Figure I.56-Représentation de la composante quart-diurne (MS4) à toutes les stations de contrôle (1986).
- Figure I.57-Représentation des composantes semi-diurnes et diurnes à la station de Ziguinchor (1986).
- Figure I.58-Représentation des composantes semi-diurnes et diurnes à la station de Banganga (1986).
- Figure I.59-Représentation des composantes semi-diurnes et diurnes à la station de Goudomp (1986).
- Figure I.60-Représentation des composantes semi-diurnes et diurnes à la station d'Hamdalaye (1986).

CHAPITRE II

- Figure II.1-Référentiel utilisé.
 Figure II.2-Spirale d'Ekman.
 Figure II.3-Courant de retour induit par le vent.
 Figure II.4-Schéma A.D.I.
 Figure II.5-Maille non-imbriquée.
 Figure II.6-Répartition non-uniforme de c résolue par un schéma centré.
 Figure II.7-Schéma 3-D du domaine de dépendance du point R.
 Figure II.8-Flux à travers une frontière de deux volumes de contrôle adjacents.
 Figure II.9-Schéma explicite centré.
 Figure II.10-Schéma explicite amont.
 Figure II.11-Schéma implicite centré.
 Figure II.12-Schéma implicite amont.
 Figure II.13-Schéma de Cranck Nicolson.
 Figure II.14-Schéma semi-implicite amont.
 Figure II.15-Schéma A.D.I descendant.
 Figure II.16-Schéma A.D.I ascendant.
 Figure II.17-Schéma de Leith.
 Figure II.18-Evolution d'une perturbation (Schéma centré).
 Figure II.19-Variation de la solution analytique en fonction du nombre de Peclet.
 Figure II.20-Comparaison entre la solution analytique et les solutions discrètes.

CHAPITRE III

- Figure III.1-Schéma d'intégration.
 Figure III.2-Frontière d'un volume de contrôle.
 Figure III.3-Schématisation des frontières avec une grille totalement imbriquée.
 Figure III.4-Domaine de dépendance et d'influence du point P.
 Figure III.5-Surfaces caractéristiques.
 Figure III.6-Quelques exemples de traitement aux limites.
 Figure III.7-Traitement des limites parallèles à oy .
 Figure III.8-Plusieurs cas de figures suivant oy .
 Figure III.9-Cas de figures suivant l'axe ox .
 Figure III.10-Condition en élévation.
 Figure III.11-Condition en vitesse.
 Figure III.12-Organigramme de Flather & Heaps.
 Figure III.13-Profil du fond en 2-D et 1-D.
 Figure III.14-Section prise en compte dans le modèle 1-D.
 Figure III.15-Schématisation 1-D.
 Figure III.16-Répartition longitudinale des surfaces mouillées par rapport à la distance.
 Figure III.17-Sections transversales à la station de Goudomp (réelle et approchée).
 Figure III.18-Sections transversales à la station de Kaour (réelle et approchée).
 Figure III.19-Sections transversales à la station de Diattakounda (réelle et approchée).
 Figure III.20-Sections transversales à la station d'Hamdalaye (réelle et approchée).
 Figure III.21-Sections transversales à la station de Sédhiou (réelle et approchée).

- Figure III.22-Sections transversales à la station de Séfa (réelle et approchée).
 Figure III.23-Répartition longitudinale du coefficient de Manning.

CHAPITRE IV

- Figure IV.1-Site de modélisation.
 Figure IV.2-Entrée du domaine d'intégration.
 Figure IV.3-Procédure de couplage.
 Figure IV.4-Schématisation du couplage des modèles 2-D et 1-D.
 Figure IV.5-Condition d'entrée du domaine d'intégration.
 Figure IV.6-Diagramme des erreurs de phase à 0° et 45°.
 Figure IV.7-Élévations observées et calculées à la station de Banganga.
 Figure IV.8-Élévations observées et calculées à la station de Goudomp.
 Figure IV.9-Élévations observées et calculées à la station d'Hamdalaye.
 Figure IV.10-Élévations calculées à la station de Séfa.
 Figure IV.11-Élévations calculées à la station de Diana-Malari.
 Figure IV.12-Courant transitoire induit par la marée t=0 h.
 Figure IV.13-Courant transitoire induit par la marée t=1 h.
 Figure IV.14-Courant transitoire induit par la marée t=2 h.
 Figure IV.15-Courant transitoire induit par la marée t=3 h.
 Figure IV.16-Courant transitoire induit par la marée t=4 h.
 Figure IV.17-Courant transitoire induit par la marée t=5 h.
 Figure IV.18-Courant transitoire induit par la marée t=6 h.
 Figure IV.19-Courant transitoire induit par la marée t=7 h.
 Figure IV.20-Courant transitoire induit par la marée t=8 h.
 Figure IV.21-Courant transitoire induit par la marée t=9 h.
 Figure IV.22-Courant transitoire induit par la marée t=10 h.
 Figure IV.23-Courant transitoire induit par la marée t=11 h.
 Figure IV.24-Variation temporelle des élévations à la station de Banganga pour différentes valeurs du coefficient de viscosité.
 Figure IV.25-Variation des tensions au fond par rapport à la profondeur.
 Figure IV.26-Courant transitoire avec une diminution de 20% du coefficient de Manning (t=0 h).
 Figure IV.27-Courant transitoire avec une augmentation de 20% du coef. de Manning (t=0 h).
 Figure IV.28-Courant transitoire avec une diminution de 20% du coefficient de Manning (t=3 h).
 Figure IV.29-Courant transitoire avec une augmentation de 20% du coef. de Manning (t=3 h).
 Figure IV.30-Courant transitoire avec une diminution de 20% du coefficient de Manning (t=6 h).
 Figure IV.31-Courant transitoire avec une augmentation de 20% du coef. de Manning (t=6 h).
 Figure IV.32-Courant transitoire avec une diminution de 20% du coefficient de Manning (t=9 h).
 Figure IV.33-Courant transitoire avec une augmentation de 20% du coef. de Manning (t=9 h).
 Figure IV.34-Stations délimitant les zones où les coefficients de frottement ont été changés.
 Figure IV.35-Tensions maximales et moyennes durant 1 cycle de la composante semi-diurne M2.
 Figure IV.36-Dissipations maximales et moyennes de l'énergie durant 1 cycle de la composante semi-diurne M2.
 Figure IV.37-Stratifications pour U_{max} et U_{moy} durant 1 cycle de la composante semi-diurne M2.
 Figure IV.38-Directions des vents dominants et stations de contrôle.

- Figure IV.39-Circulation transitoire induit par la marée et le vent (N-E, Vitesse=3m/s, t=2 h).
- Figure IV.40-Circulation transitoire induit par la marée et le vent (S-E, Vitesse=3m/s, t=2 h).
- Figure IV.41-Circulation transitoire induit par la marée et le vent (N-E, Vitesse=3m/s, t=5 h).
- Figure IV.42-Circulation transitoire induit par la marée et le vent (S-E, Vitesse=3m/s, t=5 h).
- Figure IV.43-Circulation transitoire induit par la marée et le vent (N-E, Vitesse=3m/s, t=8 h).
- Figure IV.44-Circulation transitoire induit par la marée et le vent (S-E, Vitesse=3m/s, t=8 h).
- Figure IV.45-Circulation transitoire induit par la marée et le vent (N-E, Vitesse=3m/s, t=11 h).
- Figure IV.46-Circulation transitoire induit par la marée et le vent (S-E, Vitesse=3m/s, t=11 h).
- Figure IV.47-Emplacement des barrages.
- Figure IV.48-Circulations transitoires dans les cas de barrage à Goudomp et Diattakounda (t=0 h).
- Figure IV.49-Circulations transitoires dans les cas de barrage à Goudomp et Diattakounda (t=3 h).
- Figure IV.50-Circulations transitoires dans les cas de barrage à Goudomp et Diattakounda (t=6 h).
- Figure IV.51-Circulations transitoires dans les cas de barrage à Goudomp et Diattakounda (t=9 h).
- Figure IV.52-Circulations transitoires dans les cas:sans barrage et avec barrage à Séfa (t=3 h).
- Figure IV.53-Circulations transitoires dans les cas:sans barrage et avec barrage à Séfa (t=6 h).
- Figure IV.54-Circulations transitoires dans les cas:sans barrage et avec barrage à Séfa (t=9 h).
- Figure IV.55-Zones où la bathymétrie a été modifiée.
- Figure IV.56-Condition d'entrée du système.
- Figure IV.57-Elévations observées et calculées à la station de Banganga.
- Figure IV.58-Elévations observées et calculées à la station de Goudomp.
- Figure IV.59-Elévations observées et calculées à la station d'Hamdalaye.

CHAPITRE V

- Figure V.1-Courant résiduel eulerien induit par la composante M2 de la marée.
- Figure V.2-Transport résiduel eulerien induit par la composante M2 de la marée.
- Figure V.3-Vitesses d'entraînement de Stokes induites par la composante M2 de la marée.
- Figure V.4-Point de départ à t=0.
- Figure V.5-Position du point à t = t+ΔT.
- Figure V.6-Méthode des splines.
- Figure V.7-Méthodes du M.A.C.
- Figure V.8-Méthode de la moyenne.
- Figure V.9-Courant résiduel lagrangien avec t(initial)=0 h.
- Figure V.10-Courant résiduel lagrangien avec t(initial)=3 h.
- Figure V.11-Courant résiduel lagrangien avec t(initial)=6 h.
- Figure V.12-Courant résiduel lagrangien avec t(initial)=9 h.
- Figure V.13-Trajectoires de particules avec t(initial) = 0 h.
- Figure V.14-Trajectoires de particules avec t(initial) = 3 h.
- Figure V.15-Trajectoires de particules avec t(initial) = 6 h.

- Figure V.16-Trajectoires de particules avec $t(\text{initial}) = 9 \text{ h}$.
Figure V.17-Mouvement d'un nuage de particules durant un cycle de marée.
Figure V.18-Mouvement d'un nuage de particules durant un cycle de marée.
Figure V.19-Mouvement d'un nuage de particules durant un cycle de marée.
Figure V.20-Mouvement d'un nuage de particules durant un cycle de marée.
Figure V.21-Circulation résiduelle eulerienne dans les cas: (a) sans barrage - (b) avec barrage à Séfè.
Figure V.22-Circulation résiduelle eulerienne dans les cas d'un barrage à Goudomp ou Diattakounda.
Figure V.23-Trajectoires de particules durant 1 cycle de marée (M2).
Figure V.24-Trajectoires de particules durant 1 cycle de marée (M2).
Figure V.25-Trajectoires de particules induites par la marée et un vent (N-E, Vitesse=3m/s).
Figure V.26-Trajectoires de particules induites par la marée et un vent (S-E, Vitesse=3m/s).
Figure V.27-Circulation résiduelle eulerienne (Coef. de Manning: +20%).
Figure V.28-Circulation résiduelle eulerienne (Coef. de Manning: -20%).
Figure V.29-Trajectoires de particules (Coef. de Manning: +20%).
Figure V.30-Trajectoires de particules (Coef. de Manning: -20%).

LISTE DES TABLEAUX

CHAPITRE I

- Tableau I.1-Constantes harmoniques à la station de Diogué (1951).
Tableau I.2-Constantes harmoniques à la station de Ziguinchor (1953).
Tableau I.3-Caractéristiques des ondes.
Tableau I.4-Amplitudes des ondes (1968).
Tableau I.5-Phases (degré) des ondes (1968).
Tableau I.6-Amplitudes des ondes (1986).
Tableau I.7-Phases (degré) des ondes (1986).

CHAPITRE IV

- Tableau IV.1-Variation de ΔT en fonction de ν et U pour $\Delta X=200m$.
Tableau IV.2-Variation de ΔT en fonction de ν et U pour $\Delta X=300m$.
Tableau IV.3-Variation de ΔT en fonction de ν et U pour $\Delta X=400m$.
Tableau IV.4-Variation de ΔT en fonction de ν et U pour $\Delta X=500m$.
Tableau IV.5-Variations du niveau et du courant moyen par rapport aux simulations où la tension en surface est nulle.

TABLE DES MATIERES

SOMMAIRE	6
<u>INTRODUCTION</u>	7
<u>CHAPITRE I: ESTUAIRE DE LA CASAMANCE</u>	
I.1 PRESENTATION DU MILIEU	
I.1.1 Introduction	12
I.1.2 Caractéristiques géomorphologiques	13
I.1.3 Caractéristiques hydrologiques	18
I.1.4 Etudes et mesures réalisées	25
I.1.5 Choix du modèle	34
I.2 ANALYSE HARMONIQUE	
I.2.1 Introduction	36
I.2.2 Marée dans les milieux peu profonds	40
I.2.3 Marée en Casamance	41
I.2.4 Etudes réalisées	42
I.2.5 Traitement des données	50
I.2.5.1 <i>Analyse des observations de 1967 à 1970</i>	
I.2.5.2 <i>Caractéristiques des ondes choisies</i>	
I.2.5.2.1 Ondes semi-diurnes	
I.2.5.2.2 Ondes diurnes	
I.2.5.2.3 Ondes quart-diurnes	
I.2.5.3 <i>Méthode de résolution</i>	
I.2.5.4 <i>Analyse des observations de 1986</i>	
I.2.6 Conclusions	81
<u>CHAPITRE II: HYPOTHESES ET APPROXIMATIONS</u>	
II.1 EQUATIONS DU MOUVEMENT	
II.1.1 Equations générales	84
II.1.1.1 <i>Moyennes temporelles</i>	
II.1.1.2 <i>Représentation des tensions</i>	
II.1.1.3 <i>Conditions aux limites</i>	

II.1.2 Approche bi-dimensionnelle en plan	90
II.1.2.1 <i>Approximation quasi-statique</i>	
II.1.2.2 <i>Forces astronomiques</i>	
II.1.2.3 <i>Force de Coriolis</i>	
II.1.3 Intégration suivant la profondeur	95
II.1.3.1 <i>Equation dynamique</i>	
II.1.3.2 <i>Equation de continuité</i>	
II.1.4 Equations du mouvement	101
II.1.4.1 <i>Etude comparative</i>	
 II.2 MODELE DE SIMULATION	
II.2.1 Méthodes numériques	105
II.2.2 Méthode des différences finies	107
II.2.3 Mise en oeuvre	109
II.2.3.1 <i>Choix du type d'approche</i>	
II.2.3.2 <i>Choix du type de développement</i>	
II.2.3.3 <i>Choix de la grille</i>	
II.2.4 Propriétés numériques de la discrétisation	117
II.2.4.1 <i>Divers types d'erreurs</i>	
II.2.4.2 <i>Propriétés numériques des schémas d'intégration</i>	
II.2.5 Conclusions	127
 II.3 PROPRIETES NUMERIQUES DU TERME ADVECTIF	
II.3.1 Introduction	129
II.3.2 Diverses discrétisations du terme advectif	132
II.3.2.1 <i>Schéma explicite centré</i>	
II.3.2.2 <i>Schéma explicite amont</i>	
II.3.2.3 <i>Schéma implicite centré</i>	
II.3.2.4 <i>Schéma implicite amont</i>	
II.3.2.5 <i>Schéma semi-implicite centré (Cranck-Nicholson)</i>	
II.3.2.6 <i>Schéma semi-implicite amont</i>	
II.3.2.7 <i>Schéma A.D.E (explicite: diagonale descendante)</i>	
II.3.2.8 <i>Schéma A.D.I (implicite: diagonale ascendante)</i>	
II.3.2.9 <i>Remarques</i>	
II.3.3 Problèmes des harmoniques supérieures	150
II.3.3.1 <i>Réduction de ΔX</i>	
II.3.3.2 <i>Viscosité artificielle</i>	
II.3.3.3 <i>Terme de frottement</i>	

II.3.3.4	<i>Interface dissipative</i>	
II.3.4	Propriété de transport du terme advectif	154
II.3.4.1	<i>Discrétisation centrée</i>	
II.3.4.2	<i>Discrétisation amont</i>	
II.3.5	Représentativité de la discrétisation	156
II.3.6	Conclusions	160

CHAPITRE III: MOUVEMENT TRANSITOIRE

III.1 MODELES DE SIMULATION

III.1.1	Introduction	164
III.1.2	Discrétisations des équations	165
III.1.2.1	<i>Equation de continuité</i>	
III.1.2.1.1	Etude du terme $B\alpha$	
III.1.2.2	<i>Quelques types de discrétisation testée</i>	
III.1.2.2.1	Deuxième type de discrétisation	
III.1.2.2.2	Troisième type de discrétisation	
III.1.2.3	<i>Conclusions</i>	
III.1.2.4	<i>Equation dynamique</i>	
III.1.2.4.1	Terme d'inertie	
III.1.2.4.2	Force de Coriolis	
III.1.2.4.3	Tension en surface	
III.1.2.4.4	Terme de pression	
III.1.2.4.5	Terme de diffusion	
III.1.2.4.6	Terme de frottement	
III.1.2.4.7	Terme advectif	

III.2 TRAITEMENT AUX LIMITES

III.2.1	Introduction	187
III.2.2	Discrétisations des noeuds limitrophes	197
III.2.2.1	<i>Limites fermées</i>	
III.2.2.2	<i>Limites ouvertes</i>	
III.2.2.3	<i>Limites mobiles</i>	

III.3 RESOLUTION DU SYSTEME

III.3.1	Ecriture algébrique des divers systèmes	217
III.3.1.1	<i>Equation de continuité (1er système)</i>	

III.3.1.2	<i>Equation de continuité (2ème système)</i>	
III.3.1.3	<i>Equation de continuité (3ème système)</i>	
III.3.1.4	<i>Equation dynamique (3ème Système)</i>	
III.3.1.5	<i>Equations dynamiques (2ème Système)</i>	
III.3.1.6	<i>Equation dynamique (1er Système)</i>	
III.3.2	Technique de résolution	221
III.3.3	Conclusions	225
III.4 REVUE BIBLIOGRAPHIQUE		
III.4.1	Introduction	226
III.4.2	Modèle d'Elvius et Sundström (1972)	227
III.4.3	Modèle de Leendertse (1967)	228
III.4.4	Modèle de Benqué et al. (1981)	230
III.4.5	Conclusions	233
III.5 MODELE MONO-DIMENSIONNEL		
III.5.1	Introduction	234
III.5.2	Modèle mono-dimensionnel	234
III.5.2.1	<i>Equations du mouvement</i>	
III.5.2.2	<i>Méthode de résolution</i>	
III.5.2.3	<i>Schéma de Lax-Wendroff</i>	
III.5.2.3.1	Propagation d'une onde linéaire	
III.5.2.3.2	Stabilité	
III.5.2.3.3	Ondes de chocs	
III.5.3	Calage du modèle	246
III.5.3.1	<i>Méthode d'optimisation</i>	
III.5.3.2	<i>Technique d'optimisation</i>	
III.5.4	Conclusion	254
<u>CHAPITRE IV: APPLICATIONS ET TESTS</u>		
IV.1	Introduction	259
IV.2	Site de la modélisation	261
IV.3	Procédure de couplage	263
IV.4	Fonction de forçage	265
IV.5	Condition initiale	265
IV.6	Choix des pas spatio-temporels	266
IV.7	Rôle de la force de Coriolis	290

IV.8 Rôle de la viscosité	291
IV.9 Rôle du frottement au fond	296
IV.9.1 Tests sur les variations des coefficients de Manning	
IV.10 Dissipation d'énergie et stratification	309
IV.11 Influence du vent	314
IV.12 Etude de quelques aménagements hydrauliques	325
IV.12.1 Construction de barrages	
IV.12.2 Variation des profondeurs du lit principal	
IV.13 Validation	337
IV.14 Conclusions	342

CHAPITRE V: MOUVEMENT RESIDUEL

V.1 Introduction	344
V.2 Divers Types d'approche	345
V.3 Modèle de type A	347
V.3.1 Approche eulerienne	
V.3.2 Approche lagrangienne	
V.3.3 Entraînement de Stokes	
V.4 Modèle de type B	353
V.5 Quelques voies de recherche	356
V.5.1 Principe du mouvement aléatoire des particules	
V.5.2 Méthode de la vorticité	
V.6 Choix de la période de temps	360
V.7 Application en Casamance	360
V.7.1 Circulation résiduelle lagrangienne	
V.8 Conclusions	383

<u>CONCLUSIONS</u>	395
--------------------------	-----

<u>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES</u>	399
--	-----

Liste des figures	414
-------------------------	-----

liste des tableaux	420
--------------------------	-----

Table des matières	421
--------------------------	-----

Résumé

*Office d' Edition de la
Recherche Scientifique et
Coopération Internationale*



**REPROGRAPHIE INDUSTRIELLE
EDITIONS - DUPLICATIONS -**

**MINIPARC N° 7-ZOLAD- 34100 MONTPELLIER
67.52.20.05**

ANNEE : 1988

NOM DE L'AUTEUR : LAHOUD Antoine

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC (MONTPELLIER II)

TITRE : MODELISATION DES CIRCULATIONS TRANSITOIRE ET RESIDUELLE:

APPLICATION A L'ESTUAIRE DE LA CASAMANCE (SENEGAL).

RESUME

Ce travail présente une mise au point de modèles d'environnement basés sur une procédure itérative qui évolue suivant quatre étapes interdépendantes: la récolte des données qui a fourni la base indispensable au choix des processus physiques à analyser; ces derniers ont été décrits par un modèle mathématique dont les équations différentielles traitées selon la méthode de discrétisation des différences finies ont conduit à l'outil utilisé pour les simulations de divers cas de figures. La comparaison des résultats de cette dernière étape avec les données observées a permis de rendre compte de la performance de l'approche. Dans chacune des étapes précitées, des études complémentaires se sont imposées suivant un protocole de priorités étroitement adapté à l'objectif de l'étude, au support de calcul disponible et surtout à la qualité des données récoltées. La réflexion sur les mouvements des masses d'eau dans l'estuaire de la Casamance repose sur une étude menée pas à pas qui a conduit à des modèles de traitement des circulations transitoire et résiduelle dans le milieu. Les différents choix effectués ont été justifiés à partir d'une analyse détaillée des schémas d'intégration utilisés et des propriétés numériques associées aux discrétisations spatio-temporelles des équations du mouvement.

MOTS-CLES:

Estuaire

Marée

Mangrove

Mécanique des fluides

Modélisation mathématique

Différences finies

Circulation transitoire

Circulation résiduelle