

# Bornes des moments de la densité à l'intérieur de la Terre ou d'une planète

Bernard Valette<sup>a,b,\*</sup>

<sup>a</sup>LGIT Savoie, université de Savoie, 73376 Le-Bourget-du-Lac cedex, France

<sup>b</sup>IRD, Paris, France

Reçu le 12 avril 1999 ; accepté le 9 novembre 1999

Présenté par Jean-Louis Le Mouél

**Abstract — Bounds of the density moments inside the Earth or a planet.** The aim of this note is to give the upper and lower bounds of the density moments inside a spherically symmetrical mass distribution when two global moments are given. This applies to the Earth or to any planet, such as the moon and Mars, of which the mass and the mean inertia moment are known. Notably, it provides interesting bounds on the gravity inside the planet. © 2000 Académie des sciences / Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

density / gravity / inversion

**Résumé —** Cette note a pour objet de déterminer les bornes supérieures et inférieures des différents moments de la densité à l'intérieur d'une distribution de masse à symétrie sphérique dont on connaît deux des moments globaux. Cela s'applique au cas de la Terre ou des planètes (la lune et Mars) dont la masse et le moment moyen d'inertie sont connus et fournit notamment un encadrement intéressant de la gravité à l'intérieur du corps. © 2000 Académie des sciences / Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

densité / gravité / inversion

## Abridged version

The mass  $M$  and the mean moment of inertia  $I$  are the only data resulting from gravity potential observation that are relevant in order to infer a spherically averaged density model of a planet. Indeed, in the case of the Earth, besides seismic mode data, all the information available on the spherically averaged density is gathered in the set of these two quantities. The inference of the density given  $M$  and  $I$  goes back to Stieljes [4], who determined both the upper and lower envelopes of the set of all decreasing density profiles which fit  $M$  and  $I$ . More precisely, define  $\rho_n$  as  $\rho_n = (n+1) \int_0^1 \rho(x) x^n dx$ , put  $\rho$  for any minimizing value of  $\rho(1-) = \lim_{x \rightarrow 1} \rho(x)$ ,  $x_c = \sqrt{\frac{\rho_4 - \rho(1)}{\rho_2 - \rho(1)}}$ ,  $\rho_{\text{sup}}(x)$  and  $\rho_{\text{inf}}(x)$  for the upper bound of  $\rho(x-)$  and the lower bound of  $\rho(x+)$  among all the decreasing density profiles that are greater than  $\rho(1)$  and

adjust the given moments  $\rho_2$  and  $\rho_4$ . Stieljes [4] established relations (2). These relations can be easily generalized to the case where two any global moments  $\rho_n$  and  $\rho_m$  ( $n < m$ ) are given. Defining then  $x_c$  as

$\left( \frac{\rho_m - \rho(1)}{\rho_n - \rho(1)} \right)^{\frac{1}{m-n}}$ , they are replaced by (10). For any

normalized radius  $x$ , we can define the normalized moment  $\rho_n(x)$  and  $\rho'_n(x)$  corresponding to the interval  $[0, x]$  and  $[x, 1]$ , respectively, by the relations (3). Under the assumption of a decreasing density profile, the relations (4), (5) and (6) can be easily deduced. Noting that:  $\frac{d}{dx} \{ \rho_n(x) x^{n+1} \} = \frac{n+1}{m+1} x^{n-m} \frac{d}{dx} \{ \rho_m(x) x^{m+1} \}$  yields through an integration by part (9) and finally (8).

The study of the function  $\phi(\rho_m(x)) = \rho_m(x) + \frac{\rho_n - \rho(1)}{x^{n+1}} - \frac{\rho_m - \rho(1)}{x^{m+1}} \left( \frac{\rho_m(x) - \rho(1)}{\rho_m - \rho(1)} \right)^{\frac{m-n}{m+1}}$  allows us to determine, in (11) and (12), the range of

\* Correspondance et tirés à part : bvale@univ-savoie.fr



the couple  $(\rho_m(x), \rho_n(x))$  for any  $x$ , if we know the global moments  $\rho_n$  and  $\rho_m$ . Figures 1 and 2, respectively, display this range in the case where  $x \geq x_c$  and where  $x \leq x_c$ . Finally, it yields the bounds  $\rho_{n, \text{sup}}(x)$ ,  $\rho_{n, \text{inf}}(x)$ ,  $\rho_{m, \text{sup}}(x)$ , and  $\rho_{m, \text{inf}}(x)$  of  $\rho_m(x)$  and  $\rho_n(x)$  among all the decreasing density profiles that are greater than  $\rho(1)$  and that fit the given moments  $\rho_n$  and  $\rho_m$ . These bounds are given by the relationships (13), (14), (15) and are drawn in figures 3, 4 and 5 in the cases of the Earth, the moon and Mars with  $n = 2$  and  $m = 4$ .

In the case of the Earth, astronomical and gravitational potential observations give precise estimates of the precession constant  $H$ , the gravitational mass  $GM$  and the potential coefficient  $J_2$ . It yields  $\rho_2 = 5\,514.2 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  and  $\rho_4 = 4\,558.7 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ , with a relative precision of about  $10^{-4}$  due to the uncertainty on the value of  $G$ , and  $\rho_2 = 5\,545 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ,  $\rho_4 = 4\,594 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  after crust correction with  $b = 6\,349.4 \text{ km}$  and  $\rho(1) = 3\,300 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ , so that  $x_c = 0.759$ . For illustration, when  $x$  corresponds to the bottom of the transition zone of the mantle, the set of couples  $(\rho_4(x), \rho_2(x))$  is included in the domain bordered by the curve C and the line D<sub>2</sub>, between points P<sub>1</sub> and P<sub>2</sub>, in figure 1, while it is included in the domain with vertices P<sub>1</sub>, P<sub>3</sub> and P<sub>4</sub> in figure 2 when  $x$  corresponds to the core mantle boundary.

In the case of the moon, lunar laser ranging provided measurements of the lunar librations, which combined with gravitational potential observations yields  $I/MR^2 = 0.3928 \pm 0.0009$  [5] with  $R = 1\,738 \text{ km}$ , taking into account that  $GM = 4\,902.802\,95 \pm 0.002\,24 \text{ km}^3\cdot\text{s}^{-2}$  and  $b = 1\,737.14 \text{ km}$  [6] leads through (1) to  $\rho_2 = 3\,346 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  and  $\rho_4 = 3\,289 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ , and assuming  $\rho(1)$  to be  $2\,800 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  yields  $x_c = 0.946$ . This gives strong constraints on the gravity as shown by the bounds of  $|g|$  which are directly derived from that of  $\rho_2$  (figure 4).

In the case of Mars, the combination of Doppler measurements from the recent Pathfinder lander with those from the Viking landers provided an estimate of the precession rate of Mars' pole of rotation [1]. It yields the normalized polar moment of inertia  $C/MR_e^2$ , where  $R_e = 3\,394.2 \text{ km}$  is the mean equatorial radius, to be  $0.3662 \pm 0.0017$  when taking into account that  $J_2/H = C/MR_e^2$  and  $J_2 = 1.958\,616\cdot 10^{-3}$  [3]. The recent estimation of  $GM = 42\,828.370 \pm 0.009 \text{ km}^3\cdot\text{s}^{-2}$  [3], combined with  $b = 3\,390 \text{ km}$ , gives  $\rho_2 = 3\,933 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . With the use of the relations  $I/Mb^2 = (R_e/b)^2 J_2/H(1 - 2H/3)$  and (2) the corresponding value of  $\rho_4$  is  $3\,597 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . Finally, taking  $\rho(1) = 2\,800 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  yields  $x_c = 0.839$  and figure 5.

## 1. Introduction et généralités

Considérons une distribution de masse à symétrie sphérique à l'intérieur d'une sphère de rayon  $b$  et supposons que sa densité  $\rho(x)$  est une fonction décroissante du rayon normalisé  $x = r/b$ . Posons  $\rho_n = (n + 1) \int_0^1 \rho(x) x^n dx$ , de sorte que la masse  $M$  et le moment d'inertie moyen  $I$  de cette distribution vérifient l'équation (1) :

$$\rho_2 = \frac{3M}{4\pi b^3}, \quad \rho_4 = \frac{15I}{8\pi b^5}, \quad \frac{I}{Mb^2} = \frac{2}{5} \frac{\rho_4}{\rho_2} \quad (1)$$

L'hypothèse de décroissance de  $\rho$  assure, en chaque rayon  $x$ , l'existence d'une limite à gauche  $\rho(x-)$  et d'une limite à droite  $\rho(x+)$ , qui vérifient  $\rho(x-) \geq \rho(x) \geq \rho(x+)$ . Soit  $\rho(1)$  un minorant quelconque de  $\rho(1-)$  et

$x_c = \sqrt{\frac{\rho_4 - \rho(1)}{\rho_2 - \rho(1)}}$ . Désignons respectivement par  $\rho_{\text{sup}}(x)$  et  $\rho_{\text{inf}}(x)$  la borne supérieure et inférieure des valeurs de la densité lorsque  $\rho$  décrit l'ensemble des fonctions décroissantes qui sont supérieures à  $\rho(1)$  et

dont les deux moments globaux  $\rho_2$  et  $\rho_4$  sont donnés. Stieljes [4] a notamment démontré que (équation (2)) :

$$\rho_{\text{inf}}(x) = \begin{cases} \frac{\rho_4 - \rho_2 x^2}{1 - x^2} & 0 \leq x \leq x_c \\ \rho(1) & x_c \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\rho_{\text{sup}}(x) = \begin{cases} \rho_2 + (\rho_2 - \rho_4) \frac{1 + x + x^2}{(1 + x)x^3} & 0 \leq x \leq x_c \\ \rho(1) + \frac{\rho_4 - \rho(1)}{x^5} & x_c \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (2)$$

Jobert [2] a attiré l'attention sur les résultats peu connus de Stieljes relatifs à la densité dans la Terre et, la supposant convexe dans le noyau et le manteau, a déterminé un encadrement de la densité moyenne de ces deux zones. Nous nous proposons de déterminer, pour chaque rayon, les bornes des différents moments de la densité, en supposant seulement la décroissance de cette dernière. Définissons pour tout rayon  $x$  les moments normalisés d'ordre  $n$  (équation (3)) :

$$\rho_n(x) = \frac{n+1}{x^{n+1}} \int_0^x \rho(t) t^n dt$$

$$\rho'_n(x) = \frac{n+1}{1 - x^{n+1}} \int_x^1 \rho(t) t^n dt = \frac{\rho_n - x^{n+1} \rho_n(x)}{1 - x^{n+1}} \quad (3)$$

L'hypothèse de décroissance de la densité conduit à la proposition 1.

**Proposition 1**

Les fonctions  $\rho_n(x)$  et  $\rho'_n(x)$  sont continues, dérivables à droite et à gauche, décroissantes et vérifient, pour toute valeur de  $x$  et pour tout couple d'entiers  $n$  et  $m$  tel que  $0 \leq n \leq m$  (équations (4)-(8)) :

$$\rho_n(x) \geq \rho(x-) \geq \rho(x) \geq \rho(x+) \geq \rho'_n(x) \geq \rho(1^-) \geq \rho(1) \quad (4)$$

$$\rho_n(x) \geq \rho_m(x) \quad (5)$$

$$\rho'_n(x) \geq \rho'_m(x) \quad (6)$$

$$\rho_n(x) \geq \rho_m(x) + \frac{\rho_n - \rho(1)}{x^{n+1}} - \frac{\rho_m - \rho(1)}{x^{m+1}} \quad (7)$$

$$\rho_n(x) \geq \rho_m(x) + \frac{\rho_n - \rho(1)}{x^{n+1}} - \frac{\rho_m - \rho(1)}{x^{n+1}} \left( \frac{\rho_m(x) - \rho(1)}{\rho_m - \rho(1)} \right)^{\frac{m-n}{m+1}} \quad (8)$$

**Preuve**

La régularité des moments et les inégalités (4) découlent immédiatement des définitions et de la décroissance de  $\rho$ . La décroissance des moments résulte de  $\frac{d}{dx} \rho_n(x \pm) = \frac{n+1}{x} (\rho(x \pm) - \rho_n(x))$  et de  $\frac{d}{dx} \rho'_n(x \pm) = (n+1) \frac{x^n}{1-x^{n+1}} (\rho'_n(x) - \rho(x \pm))$ . Considérons maintenant la fonction  $f(t) = t^n x^{n+1} ((n+2)t - (n+1)x)$ . Lorsque  $t$  est positif, elle est positive ou négative suivant que  $t$  est plus grand ou plus petit que  $y = \frac{n+1}{n+2} x$  et  $\int_0^x f(t) dt = 0$ . Il en résulte que  $\int_0^x \rho(t) f(t) dt \leq (\rho(y+) - \rho(y-)) \int_y^x f(t) dt \leq 0$ ; ce qui conduit à (5). De la même manière, considérons pour  $t$  positif la fonction  $g(t) = t^n \{ (n+2)(1-x^{n+1})t - (n+1)(1-x^{n+2}) \}$ . Elle est positive ou négative suivant que  $t$  est plus grand ou plus petit que  $y = \frac{n+1}{n+2} \frac{1-x^{n+2}}{1-x^{n+1}} (\leq 1)$  et  $\int_0^1 g(t) dt = 0$ , de sorte que  $\int_0^1 \rho(t) g(t) dt \leq (\rho(y+) - \rho(y-)) \int_y^1 g(t) dt \leq 0$ ; (6) en découle. De l'inégalité :  $(1-x^{n+2}) \rho'_{n+1}(x) - (1-x^{n+1}) x \rho'_n(x) = \int_x^1 \rho(t) t^n \{ (n+2)t - (n+1)x \} dt \geq \rho(1) (1-x)$ , on induit que :  $(1-x^{m+1}) \rho'_m(x) \geq (1-x^{n+1}) x^{m-n} \rho'_n(x) + (1-x^{m-n}) \rho(1)$ , ce qui conduit à (7), grâce à (3). Remarquons enfin que d'après la définition (3) :  $\frac{d}{dx} \{ \rho_n(x) x^{n+1} \} = \frac{n+1}{m+1} x^{n-m} \frac{d}{dx} \{ \rho_m(x) x^{m+1} \}$ , en dehors de l'ensemble, au plus dénombrable, des points

où  $\rho$  est discontinue. Il s'ensuit, grâce à une intégration par partie, que (équation (9)) :

$$\rho_n - \frac{n+1}{m+1} \rho_m = x^{n+1} \left( \rho_n(x) - \frac{n+1}{m+1} \rho_m(x) \right) + (m-n) \frac{n+1}{m+1} \int_x^1 t^n \rho_m(t) dt \quad (9)$$

Il ressort des relations (3) et (4) que, pour  $x \leq t \leq 1$ ,  $\rho_m(t) \leq \text{Min} \left\{ \rho_m(x), \rho(1) + \frac{\rho_m - \rho(1)}{t^{m+1}} \right\}$ . En notant  $y = \left( \frac{\rho_m - \rho(1)}{\rho_m(x) - \rho(1)} \right)^{\frac{1}{m+1}} \geq x$ , la valeur de  $t$  pour laquelle  $\rho(1) + \frac{\rho_m - \rho(1)}{t^{m+1}} = \rho_m(x)$ , on obtient :  $\int_x^1 t^n \rho_m(t) dt \leq \rho_m(x) \int_x^y t^n dt + \rho(1) \int_y^1 t^n dt + (\rho_m - \rho(1)) \int_y^1 t^{n-m-1} dt$ . En explicitant cette dernière inégalité et en la reportant dans (9), cela conduit à (8).

**2. Variabilité et bornes des moments**

Connaissant deux des moments globaux  $\rho_n$  et  $\rho_m$  ( $n < m$ ), nous pouvons déduire de la proposition 1 le domaine de variabilité dans le plan du point de coordonnées  $(\rho_m(x), \rho_n(x))$  pour chaque rayon  $x$ . Remarquons tout d'abord que le résultat de Stieljes se généralise sans peine à un couple quelconque  $(n, m)$  de moments. Posant  $x_c = \left( \frac{\rho_m - \rho(1)}{\rho_n - \rho(1)} \right)^{\frac{1}{m-n}}$ , les relations (2) deviennent alors (équation (10)) :

$$\rho_{\text{inf}}(x) = \begin{cases} \frac{\rho_m - \rho_n x^{m-n}}{1 - x^{m-n}} & 0 \leq x \leq x_c \\ \rho(1) & x_c \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\rho_{\text{sup}}(x) = \begin{cases} \rho_n + (\rho_n - \rho_m) \frac{1 - x^{n+1}}{(1 - x^{m-n}) x^{n+1}} & 0 \leq x \leq x_c \\ \rho(1) + \frac{\rho_m - \rho(1)}{x^{m+1}} & x_c \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (10)$$

Définissons  $\rho_{k, \text{sup}}(x)$  et  $\rho_{k, \text{inf}}(x)$  comme étant les bornes supérieures et inférieures du moment  $\rho_k(x)$  lorsque  $\rho$  décrit l'ensemble des fonctions décroissantes supérieures à  $\rho(1)$  et qui admettent  $\rho_n$  et  $\rho_m$  comme moments globaux d'ordre  $n$  et  $m$ . Nous obtenons la proposition 2.

**Proposition 2**

Le couple  $(\rho_m(x), \rho_n(x))$  décrit le domaine suivant du plan. Si  $x \leq x_c$ ,  $\rho_m \leq \rho_m(x) \leq \rho_{sup}(x_c)$  et :

$$\rho_n(x) \begin{cases} \leq x^{m-n} \frac{1-x^{n+1}}{1-x^{m+1}} \rho_m(x) + \frac{\rho_n(1-x^{m+1}) - \rho_m(1-x^{n+1})}{x^{n+1}(1-x^{m+1})} \\ \geq \rho_m(x) + \frac{\rho_n - \rho(1)}{x^{n+1}} - \frac{\rho_m - \rho(1)}{x^{n+1}} \left( \frac{\rho_m(x) - \rho(1)}{\rho_m - \rho(1)} \right)^{\frac{m-n}{m+1}} \end{cases}$$

ou  $\rho_{sup}(x_c) \leq \rho_m(x) \leq \rho_{sup}(x)$  et (équation (11)) :

$$\rho_n(x) \begin{cases} \leq x^{m-n} \frac{1-x^{n+1}}{1-x^{m+1}} \rho_m(x) + \frac{\rho_n(1-x^{m+1}) - \rho_m(1-x^{n+1})}{x^{n+1}(1-x^{m+1})} \\ \geq \rho_m(x) \end{cases} \quad (11)$$

Si  $x \geq x_c$ ,  $\rho_m \leq \rho_m(x) \leq \rho(1) + \frac{\rho_m - \rho(1)}{x^{m+1}}$  et (équation (12)) :

$$\rho_n(x) \begin{cases} \leq x^{m-n} \frac{1-x^{n+1}}{1-x^{m+1}} \rho_m(x) + \frac{\rho_n(1-x^{m+1}) - \rho_m(1-x^{n+1})}{x^{n+1}(1-x^{m+1})} \\ \geq \rho_m(x) + \frac{\rho_n - \rho(1)}{x^{n+1}} - \frac{\rho_m - \rho(1)}{x^{n+1}} \left( \frac{\rho_m(x) - \rho(1)}{\rho_m - \rho(1)} \right)^{\frac{m-n}{m+1}} \end{cases} \quad (12)$$

Posant  $d = \left( \frac{m-n}{m+1} \right)^{\frac{1}{n+1}}$ , les bornes de  $\rho_m(x)$  et  $\rho_n(x)$  sont définies par les équations (13)–(15) :

$$(a) \rho_{m,inf} = \rho_m, \quad (b) \rho_{m,sup} = \rho_{sup} \quad (13)$$

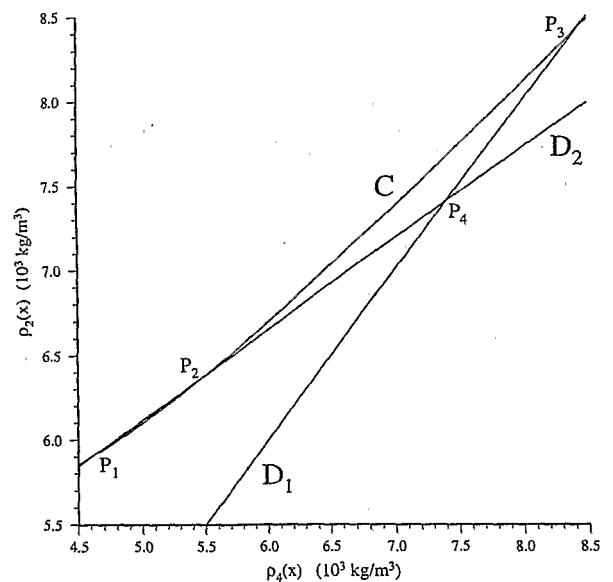
$$\rho_{n,inf}(x) = \begin{cases} \rho_{sup}(x_c) & 0 \leq x \leq dx_c \\ \rho(1) + \frac{\rho_n - \rho(1)}{x^{n+1}} - \frac{n+1}{m+1} \frac{\rho_m - \rho(1)}{x^{m+1}} d^{m-n} & dx_c \leq x \leq d \\ \rho_m + \frac{\rho_n - \rho_m}{x^{n+1}} & d \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (14)$$

$$\rho_{n,sup}(x) = \begin{cases} \rho_{sup}(x) & 0 \leq x \leq x_c \\ \rho(1) + \frac{\rho_n - \rho(1)}{x^{n+1}} & x_c \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (15)$$

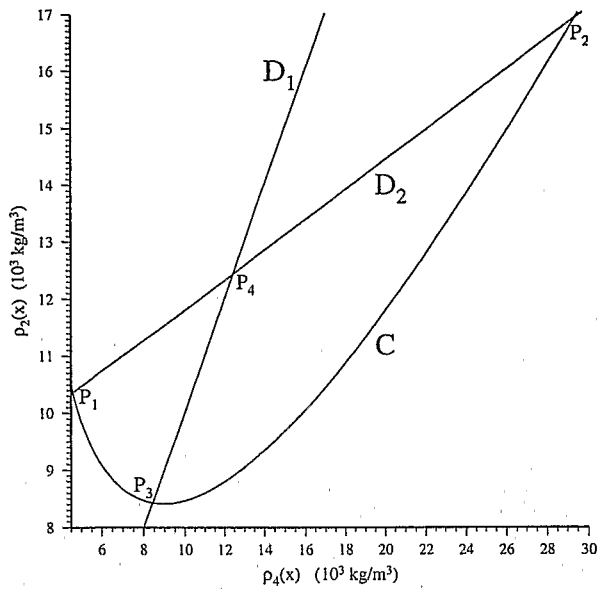
**Preuve**

Du fait des inégalités (5), (6) et (8), le point du plan de coordonnées  $(\rho_m(x), \rho_n(x))$  est au-dessous de la

droite  $D_2$  d'équation :  $\rho_n(x) = x^{m-n} \frac{1-x^{n+1}}{1-x^{m+1}} \rho_m(x) + \frac{\rho_n(1-x^{m+1}) - \rho_m(1-x^{n+1})}{x^{n+1}(1-x^{m+1})}$  au-dessus de la première bissectrice  $D_1$  et de la courbe  $C$  d'équation :  $\rho_n(x) = \phi(\rho_m(x)) = \rho_m(x) + \frac{\rho_n - \rho(1)}{x^{n+1}} - \frac{\rho_m - \rho(1)}{x^{n+1}} \left( \frac{\rho_m(x) - \rho(1)}{\rho_m - \rho(1)} \right)^{\frac{m-n}{m+1}}$ .  $C$  est concave, coupe la droite  $D_2$  en deux points  $P_1$  et  $P_2$ , de coordonnées respectives  $\left( \rho_m, \rho_m + \frac{\rho_n - \rho_m}{x^{n+1}} \right)$ ,  $\left( \rho(1) + \frac{\rho_m - \rho(1)}{x^{m+1}}, \rho(1) + \frac{\rho_n - \rho(1)}{x^{n+1}} \right)$ , la première bissectrice  $D_1$  au point  $P_3$  d'abscisse  $\rho_{sup}(x_c)$  et présente une branche parabolique de direction  $D_1$ . Les droites  $D_1$  et  $D_2$  se coupent au point  $P_4$ , d'abscisse  $\rho_n + (\rho_n - \rho_m) \frac{1-x^{n+1}}{(1-x^{m-n})x^{n+1}}$ , qui est égale à  $\rho_{sup}(x)$  quand  $x \leq x_c$ . Ainsi (figures 1 et 2), lorsque  $x \leq x_c$ , le point  $P_2$  est à droite du point  $P_4$ , qui est à droite du point  $P_3$ , tandis que  $P_2$  est à gauche de  $P_4$  qui est à gauche de  $P_3$  lorsque  $x \geq x_c$ ; (11) et (12) en résultent. L'expression de la dérivée de  $\phi$  :  $\phi'(\rho_m(x)) = 1 - \frac{m-n}{m+1} \frac{1}{x^{n+1}} \left( \frac{\rho_m(x) - \rho(1)}{\rho_m - \rho(1)} \right)^{-\frac{n+1}{m+1}}$  montre que, lorsque  $\rho_m(x) \geq \rho(1)$ , la fonction  $\phi$



**Figure 1.** Droites  $D_1$ ,  $D_2$  et courbe  $C$  dans le cas  $x \geq x_c$ . Il s'agit en fait du cas de la Terre avec  $n = 2$ ,  $m = 4$  et  $x = 0,900$  ( $\geq x_c = 0,759$ ) correspondant à la base de la zone de transition. Dans ce cas, la courbe  $C$  passe au-dessus du point  $P_4$  et le couple  $(\rho_m(x), \rho_n(x))$  est ainsi confiné au domaine limité par  $C$  et  $D_2$  entre les points  $P_1$  et  $P_2$ .  
**Figure 1.** Lines  $D_1$ ,  $D_2$  and curve  $C$  for the case  $x \geq x_c$ . The point with coordinates  $(\rho_m(x), \rho_n(x))$  belongs to the domain bordered by  $C$  and  $D_2$  between points  $P_1$  and  $P_2$ .



**Figure 2.** Figure analogue à la figure 1, dans le cas  $x \leq x_c$ . Il s'agit maintenant de l'interface noyau-manteau, avec  $x = 0,548$ . La courbe C passe au-dessous du point  $P_4$ , de sorte que le couple  $(\rho_m(x), \rho_n(x))$  se situe dans le domaine  $P_1, P_3, P_4$ .

**Figure 2.** The same as figure 1 for the case  $x \leq x_c$ . In that case  $(\rho_m(x), \rho_n(x))$  belongs to the domain bordered by  $D_1, D_2$  and C with vertices  $P_1, P_3$  and  $P_4$ .

décroît jusqu'à la valeur  $\rho_n(x) = \rho(1) + \frac{\rho_n - \rho(1)}{x^{n+1}}$  -

$\frac{n+1}{m+1} \frac{\rho_m - \rho(1)}{x^{m+1}} d^{m-n}$ , qui est atteinte pour

$\rho_m(x) = \rho(1) + \frac{\rho_m - \rho(1)}{x^{m+1}} d^{m+1}$ , puis croît jusqu'à

l'infini. De plus, puisque  $\phi'(\rho_m) = 1 - \frac{m-n}{m+1} \frac{1}{x^{n+1}}$  et

que  $\phi'(\rho_{sup}(x_c)) = 1 - \frac{m-n}{m+1} \left(\frac{x_c}{x}\right)^{n+1}$ , la fonction  $\phi$

est croissante ou décroissante en  $P_1$  et  $P_3$  respective-

ment, suivant que  $x$  est plus grand ou plus petit que  $d$  et

$x_c$  respectivement. Il s'ensuit que les expressions (13),

(14) et (15) sont, soit des majorants, soit des minorants

de  $\rho_m(x)$  ou  $\rho_n(x)$ , suivant les cas. Reste à montrer que

les bornes sont effectives. Lorsque  $x \leq x_c$ , notons  $f_x$  la

fonction qui prend la valeur  $\rho_{sup}(x)$  entre 0 et  $x$  et

$\rho_{inf}(x)$  entre  $x$  et 1. Les bornes (13b), avec  $x \leq x_c$ , (15a)

et (14a) sont respectivement atteintes par  $f_x, f_x$  et  $f_{x_c}$ . Les

bornes (13a) et (14c) sont approchées par les fonctions

$f_\varepsilon$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. Considérons maintenant  $x \geq x_c$ ,

$\varepsilon \leq x_c/x$  et la fonction décroissante en escalier  $f_{\varepsilon, x}$ , qui

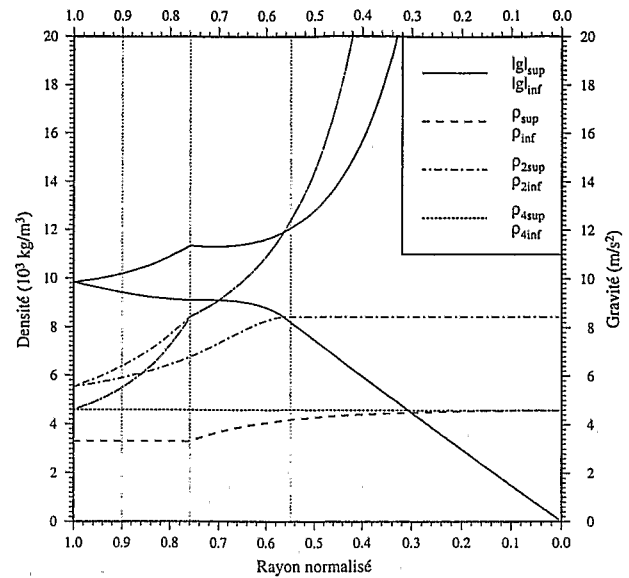
est discontinue aux points  $\varepsilon x$  et  $x$ , prend la valeur  $\rho(1)$

dans l'intervalle  $]x, 1]$  et ajuste les moments globaux  $\rho_n$

et  $\rho_m$ . L'existence d'une telle fonction résulte du fait

que, si l'on fixe la valeur à  $\rho(1)$  entre  $x$  et 1 et

si  $x \geq x_c$  :  $\rho_n(x) = \rho(1) + \frac{\rho_n - \rho(1)}{x^{n+1}} \geq \rho_m(x) = \rho(1)$



**Figure 3.** Bornes des valeurs de  $\rho(x), \rho_2(x), \rho_4(x)$  et du champ de gravité  $|g(x)|$  dans le cas de la Terre corrigée de la croûte, avec  $\rho(1) = 3\,300 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . Les lignes verticales correspondent, par ordre croissant de rayon, à l'interface noyau-manteau (cf. figure 2), au rayon critique  $x_c = 0,759$  et à l'interface marquant la base de la zone de transition (cf. figure 1). On notera que les courbes de  $\rho_{4, \text{sup}}$  et de  $\rho_{\text{sup}}$  se confondent et qu'elles coïncident avec celle de  $\rho_{2, \text{sup}}$  pour  $x \leq x_c$  (cf. (10), (13), (19) et (15)).

**Figure 3.** Upper and lower bounds of functions  $\rho(x), \rho_2(x), \rho_4(x)$  and  $|g(x)|$ , under the assumption of a decreasing density, according to equations (10), (13), (14) and (15), in the case of the Earth corrected from the crust with  $\rho(1) = 3\,300 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ .

+  $\frac{\rho_m - \rho(1)}{x^{m+1}} \geq \rho(1)$  et qu'ainsi, l'approche de Stieljes

appliquée au segment  $[0, x]$  montre qu'il existe une

fonction de cet intervalle, décroissante, en escalier, dis-

continue en  $\varepsilon x$  ( $\varepsilon \leq x_c/x$ ) et qui ajuste les moments

$\rho_n(x)$  et  $\rho_m(x)$ . Cela prouve d'emblée que les bornes

(13b), quand  $x \geq x_c$ , et (15b) sont atteintes. Par ailleurs,

les relations (10) montrent qu'entre  $\varepsilon x$  et  $x$  cette fon-

ction prend la valeur  $\rho_{\varepsilon, x} = \frac{\rho_m(x) - \rho_n(x) \varepsilon^{m-n}}{1 - \varepsilon^{m-n}}$  qui

admet  $\rho_m(x)$  pour limite lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. Soit

enfin  $d x_c \leq x \leq d$ , de sorte que  $y = x/d$  appartient à

l'intervalle  $[x_c, 1]$  et considérons la fonction  $f_{\varepsilon, y}$  avec

$\varepsilon y \leq \text{Min}(x_c, x)$ . Il résulte des définitions que pour cette

fonction :  $\rho_n(x) = \rho_{\varepsilon, y} + \left(\frac{y}{x}\right)^{n+1} (\rho_n(y) - \rho_{\varepsilon, y})$ . En

explicitant cette relation, il apparaît que  $\rho_n(x)$  converge

vers la borne (14b) lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0.

**3. Application à la Terre, à la lune**

**et à Mars**

On dispose de bonnes estimations de la masse et du

moment moyen d'inertie de la Terre, de la lune et de

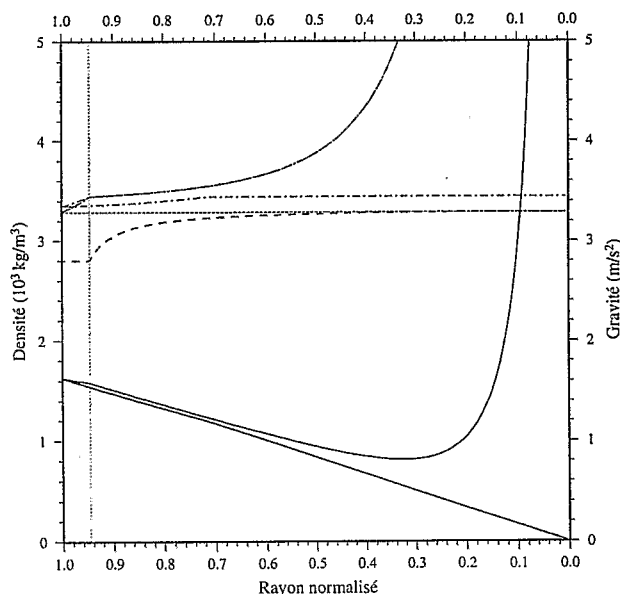


Figure 4. Figure équivalente à la figure 3 dans le cas de la lune, avec  $x_c = 0,946$ .

Figure 4. The same as figure 3 in the case of the moon with  $x_c = 0.946$ .

Mars. Dans le cas de la Terre, la mesure astronomique de la constante de précession  $H$  et les estimations de  $GM$  et  $J_2$  contenues dans les modèles du potentiel de gravité conduisent aux valeurs suivantes :  $\rho_2 = 5\,514,2$  et  $\rho_4 = 4\,558,7 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ , avec une précision relative de l'ordre de  $10^{-4}$  provenant de l'incertitude sur la valeur de  $G$ . Après correction de la croûte, les moments d'ordre 2 et 4 deviennent ainsi  $\rho_2 = 5\,545$  et  $\rho_4 = 4\,594 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ , avec  $b = 6\,349,4 \text{ km}$  et  $\rho(1) = 3\,300 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . Notons que les bornes du champ de gravité  $|g(x)| = \frac{4\pi G}{3} x \rho_2(x)$  se déduisent aisément de celles de  $\rho_2(x)$ . Les résultats sont présentés sur la figure 3. Les figures 1 et 2 présentent par ailleurs le domaine de variabilité du couple  $(\rho_4(x), \rho_2(x))$  respectivement au niveau de l'interface du manteau inférieur avec la zone de transition ( $x = 0,900$ ) et de l'interface noyau-manteau ( $x = 0,548$ ), au-delà et en deçà du

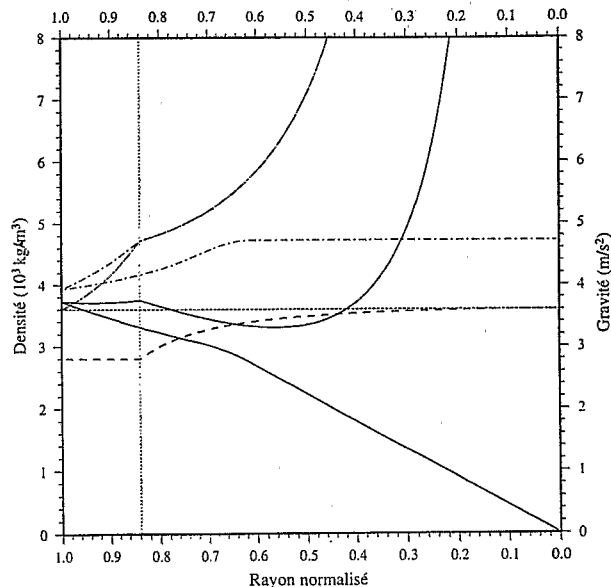


Figure 5. Figure équivalente à la figure 3 dans le cas de Mars, avec  $x_c = 0,839$ .

Figure 5. The same as figure 3 in the case of Mars with  $x_c = 0.839$ .

rayon critique  $x_c = 0,759$ . Il apparaît ainsi que, dans le cas de la base de la zone de transition, située au-delà du rayon critique  $x_c$  (figure 1), le domaine de variabilité se réduit pratiquement au segment  $P_1P_2$ . Dans le cas de la lune, ce n'est pas la constante de précession, mais les paramètres de libration qui sont observés grâce à la télémétrie laser [5]. Cela conduit à  $\rho_2 = 3\,346$ ,  $\rho_4 = 3\,289 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  avec  $b = 1\,737,14 \text{ km}$  [6],  $\rho(1) = 2\,800 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  et, dans ce cas,  $x_c = 0,946$ . La figure 4 présente l'ensemble des bornes correspondantes. On peut ainsi remarquer la bonne détermination de  $g$ . Enfin, dans le cas de Mars, la combinaison des données de la récente mission *Pathfinder* avec celles des missions *Viking* a permis d'estimer sa constante de précession  $H$  [1]. Tenant compte du dernier modèle de potentiel disponible [3], cela conduit à  $\rho_2 = 3\,933$  et  $\rho_4 = 3\,597 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ , avec  $b = 3\,390 \text{ km}$ ,  $\rho(1) = 2\,800 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  et ainsi  $x_c = 0,839$  (figure 5).

## Références

[1] Folkner W.M., Yoder C.F., Yuan D.N., Standish E.M., Preston R.A., Interior structure and seasonal mass redistribution of Mars from radio tracking of Mars Pathfinder, *Science* 278 (1997) 1749–1752.  
 [2] Jobert G., Sur la densité à l'intérieur du globe, *Ann. Géophys.* 16 (1960) 422–425.  
 [3] Konopliv A.S., Sjogren W.L., The JPL Mars gravity field, Mars50c, based upon Viking and Mariner 9 Doppler tracking data, *JPL Publ.* n° 95–5, 1995.

[4] Stieljes T.J., Quelques remarques sur la variation de la densité dans l'intérieur de la Terre (1884), in : *Œuvres complètes*, Springer Verlag, 1, 1993, pp. 488–513.

[5] Williams J.G., Newhall X.X., Dickey J.O., Lunar moments, tides, orientation, and coordinate frames, *Planet. Space Sci.* 44 (1996) 1077–1080.

[6] Zuber M.T., Smith D.E., Lemoine F.G., Neumann G.A., The shape and internal structure of the Moon from the Clementine mission, *Science* 266 (1994) 1839–1843.