

Análisis fractal de los tepetates

Klaudia OLESCHKO, María E. MIRANDA, Christian PRAT

Abstract

The degree of fragmentation and irregularity of tepetate areas can be measured with fractal parameters. A lot of different empirical fractal dimensions can be used with this purpose. Some of these dimensions were estimated and compared in the present work. The tepetates lineal and mass fractal dimensions were independent of the scale of measurement. These data indicate the near ideal fractal dimensionality of tepetate areas. The double value of lineal fractal dimension was similar to the mass fractal dimension. The tepetate surface fractal dimensions indicate the considerable irregularities of tepetate areas boundaries related with advanced erosion in the studied area.

Keywords : *Fractal Analysis - Dimension - Irregularity*

INTRODUCCIÓN

Los métodos probabilístico-estadísticos constituyen una base sólida para el análisis de la variabilidad de los sistemas naturales. Sin embargo, ni la estadística clásica ni la geoestadística, permiten caracterizar el patrón de heterogeneidad de un sistema natural a diferentes escalas. Tampoco son útiles para describir las relaciones fundamentales entre las propiedades de un sistema, los procesos que se operan en él y los mecanismos de estos últimos. Una nueva técnica analítica, la geometría fractal promete ser la herramienta necesaria para resolver los problemas anteriormente mencionados y proporcionar además la información sobre los procesos responsables de la heterogeneidad original de un sistema determinado. Una de las principales ventajas del uso de los parámetros fractales consiste en la posibilidad de describir no solo las propiedades geométricas estáticas de las estructuras fractales sino también sus propiedades dinámicas y sus interacciones con el medio exterior (Orbach, 1986).

La heterogeneidad en el espacio de los tepetates aflorantes representa uno de los principales problemas para el diseño de las prácticas de recuperación. Hasta el momento, tal heterogeneidad ha sido estudiada parcialmente y solo desde el punto de vista cartográfico —mapa morfopedológico de la vertiente occidental de la Sierra Nevada elaborado por Peña y Zebrowski (1992)—. En ese mapa, los tepetates que afloran a la superficie forman manchas de tamaño variable y morfología irregular. A primera vista, el mosaico general del paisaje tiene un carácter autosimilar, y puede ser descrito mediante los parámetros fractales. Se sabe que los rasgos morfológicos del paisaje, creados por el efecto acumulativo de diferentes eventos de magnitud similar (erosión, depósito, sedimentación,

etc.), tienden hacia las propiedades fractales (las fronteras de las áreas de tepetates aflorantes) —Hlavka, 1992—.

En el caso de demostrar el carácter fractal del conjunto de las áreas tepetatosas, estas pueden ser representadas como una «colección de islas geoméricamente similares» (Mandelbrot, 1993), con lo que se puede simplificar su representación cartográfica, especular sobre los procesos responsables de su formación (geológicos o pedogénicos) y pronosticar su desarrollo en el tiempo y en el espacio.

Los objetivos principales del presente estudio son: a) describir, mediante los parámetros fractales empíricos, la fragmentación y la irregularidad de las fronteras del conjunto de áreas de tepetates aflorantes (escala macro), con el propósito de demostrar su origen autosimilar; b) estimar el grado de fragmentación y de irregularidad de la superficie de la fracción gruesa de algunos tepetates (escala micro) para confirmar su origen (geológico o pedogénico); c) establecer, de ser posible, un vínculo entre los parámetros fractales de los niveles micro y macro.

MATERIALES

Nivel macro

Para el análisis fractal del conjunto de las áreas tepetatosas que afloran, se tomó como base el mapa morfopedológico (a escala 1:50.000) de la vertiente occidental de la Sierra Nevada elaborado por Peña y Zebrowski (1992), en el que se efectuaron dos tipos de análisis. Por un lado, se analizó la distribución en el espacio de todas las unidades cartográficas que pertenecen a los piedemontes y glacis, y que comprenden la existencia de las capas tepetatosas, tanto a cierta profundidad dentro del perfil (unidades 23, 24, 26-28), como aflorantes (unidades 31-39). Por otro lado, se estimó de manera individual el grado de irregularidad de las fronteras de cada área de tepetate aflorante, así como su grado de fragmentación. El análisis fractal se realizó utilizando los mapas originales (método manual) y digitalizados —métodos automatizados, programas Linfrac y Fractal, desarrollados por Parrot y Rico (1997)—. Para la digitalización de los mapas se utilizó un *scanner* comercial con resolución de 600 dpi. Cada imagen obtenida tenía un tamaño de 216 x 216 píxeles.

Nivel micro

Para el análisis fractal, se utilizaron las láminas delgadas preparadas para el estudio micromorfológico. La descripción detallada del procedimiento de preparación de las láminas se encuentra en Oleschko y Miranda (1997).

MÉTODOS

Dimensiones fractales empíricas de capacidad

El concepto básico de la geometría fractal es la dimensión fractal (D) —Mandelbrot, 1993— y el procedimiento empírico común para su estimación es el conteo de caja (*box counting*). En términos generales, los fractales que se encuentran en el espacio euclidiano E -dimensional se caracterizan por tener un espectro infinito de dimensiones D_q , donde q es un número íntegro. Hentschel y Procaccia (1983) definen las dimensiones fractales en términos probabilísticos mediante p_i que representa la probabilidad de encontrar un pedazo del fractal en la i -ma caja de las N de lado r que se necesitan para

cubrir el fractal completamente. Sin embargo, según Falconer (1990), de un modo aproximado, se puede decir que todas las dimensiones reflejan de alguna manera el grado de ocupación del espacio por el conjunto fractal.

a. Dimensión fractal lineal

Para el análisis fractal de suelos, se desarrollaron algunos métodos para determinar las dimensiones fractales empíricas que reflejan simultáneamente el grado de fragmentación del sistema y la irregularidad de las interfases sólido-poro. Todos los métodos propuestos son variantes de la técnica común del conteo de caja que, hasta el momento, han sido utilizados solo a nivel micro. En el presente trabajo, el análisis fractal se realizó tanto a nivel macro como a escala micro, utilizando los mismos procedimientos. Los métodos empleados se dividen en lineales y areales y sirven para estimar el grado de ocupación del espacio euclidiano uni y bidimensional por parte del conjunto fractal.

El análisis lineal ($E = 1$) se basó en el modelo de los conjuntos fractales de puntos sobre la recta (Korvin, 1992). La siguiente regla expresa la propiedad general de estos conjuntos: si la resolución del método de análisis es ε , cualquier intervalo de longitud L de la recta, contiene N puntos del conjunto fractal, por lo que:

$$N \propto (L/\varepsilon)^D$$

donde D es la dimensión fractal lineal de la capacidad del conjunto.

Al mapa mencionado se superpuso un conjunto de rectas paralelas, de longitud similar (L), trazadas sobre una mica. A varias distancias regulares (ε , escala del análisis o tamaño del divisor) se estimó el número total de divisiones de cada línea (N_t mas N_0) y el número de intersecciones entre las líneas y áreas de tepetates (N_i). La pendiente de la recta que relaciona los logaritmos de las variables mencionadas representa la dimensión fractal lineal (D) de los tepetates. N_0 corresponde al número de divisores que tocaron áreas libres de tepetates.

El mismo procedimiento se utilizó a nivel micro, donde en lugar del mapa se analizaron las imágenes microscópicas y en lugar de las áreas de tepetates se estimó la distribución de los conjuntos sólidos (N_s) y de los poros (N_p). La pendiente de la recta que relaciona el logaritmo del N_s o N_p y el logaritmo del número total de divisores utilizados para el análisis, da la dimensión fractal lineal del conjunto de sólidos o de poros.

Posteriormente, los datos del análisis fractal manual se compararon con los del análisis automatizado de los mapas digitalizados. Para tal propósito se utilizó el programa Linfrac.

b. Dimensión fractal areal (D_a)

Tanto a nivel macro como a escala micro, para obtener la D_a se utilizó primeramente la regla de Mandelbrot (1983). Esta, definida para un conjunto de figuras fractales planas con una frontera fractal autosimilar de dimensión D_a , relaciona el perímetro del objeto fractal con su área. La siguiente ecuación establece la relación entre el perímetro (P_i) de la figura, medido con una regla de longitud ε (la resolución del método), y el área de cada una de las figuras (A_i) medida en las unidades de ε_2 :

$$P_i \propto A_i^{D_a/2}$$

En lugar de las rectas, se utilizó una mica con cuadros de tamaño variable de lado (ε). Como dimensión fractal areal del conjunto analizado se tomó la pendiente de la recta que relaciona el logaritmo del número total de cuadros que tocan la superficie de las

áreas tepetatosas (en el mapa) o los bordos de las partículas gruesas (en la imagen microscópica), y el número de cuadros completos que caben dentro del área de interés.

c. Dimensión de la superficie o de la frontera fractal (D_b o dimensión de Minkowski)

Según varios autores, la caracterización de la estructura fractal de un conjunto autosimilar no es completa si no se determina la dimensión empírica de la superficie fractal (D_b) —Anderson *et al.*, 1996— Esta última dimensión refleja el grado de irregularidad de las fronteras del objeto fractal y se determina según el siguiente procedimiento técnico: se calcula el número de cuadros (o píxeles) de lado ϵ (resolución del método) que tocan la frontera de un fractal. La pendiente de la recta que se obtiene en el papel logarítmico y que relaciona al logaritmo del número total de píxeles que tocan la frontera del objeto con el logaritmo de la resolución del método (ϵ), es igual a uno menos la dimensión de la frontera fractal (D_b).

d. Dimensión de la masa fractal

Para disminuir el sesgo del análisis manual realizado, se compararon todos los valores de los parámetros fractales obtenidos con los datos del análisis fractal automatizado de las imágenes (macro y micro) digitalizadas. Para este último propósito, se utilizaron los programas Linfrac y Fractal, especialmente para el análisis fractal de las imágenes del suelo. Ambos programas, escritos en el ambiente Borland (lenguaje C++), sirven para estimar la dimensión de la masa fractal del conjunto. Las áreas cubiertas de tepetates y las ocupadas por otros suelos se cubrieron sucesivamente con los intervalos del tamaño de r píxeles (Linfrac) o con las cajas del lado r píxeles (Fractal), de tamaño creciente. En total, se utilizan 16 diferentes tamaños de intervalo (o de caja), empezando con 1 píxel y terminando con el tamaño máximo de 216 píxeles. Se calculó el número de r píxeles (intervalos o cajas) que caben dentro de las áreas evaluadas. La pendiente de la recta que relaciona el número de intervalos (o de cajas) con su tamaño es la dimensión de la masa fractal del conjunto analizado. Si este conjunto se comporta como masa fractal (M), se cumple la siguiente proporcionalidad:

$$M \propto r^{D_m}$$

donde el exponente D_m se refiere a la dimensión de la masa fractal y es siempre menor a la dimensión del espacio euclidiano, dentro del cual está sumergido el conjunto fractal (Anderson *et al.*, 1996).

Al final del análisis, todas las dimensiones estimadas se compararon entre sí.

e. Modelo fractal de áreas

El modelo fractal unificado, propuesto por Oleschko (1997) para la recuperación de las imágenes bi y tridimensionales a partir de los datos de la distribución del conjunto fractal a lo largo de las líneas analizadas, fue utilizado para estimar el área de los tepetates aflorantes. Dicho modelo se basa en dos variables de entrada: el número total ($N_t + N_0$) de los puntos que se analizan a lo largo de la línea de una longitud conocida (L) a distancias regulares (r , el paso del análisis), y la dimensión fractal del conjunto de interés (D_f). Esta última variable refleja el grado de ocupación de la línea por parte del objeto fractal. Se modelizó el área de los tepetates aflorantes (ATA) a lo largo de las líneas de longitud de 12 cm, tomando el valor medio de la dimensión lineal (D_f) de las áreas de los tepetates aflorantes y utilizando la siguiente ecuación:

$$ATA = (N_t + N_0)^{2(D_f - 1)}$$

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Nivel macro

Análisis lineal

La distribución de las áreas de tepetates en el mapa morfopedológico, analizada manualmente aplicando a cuatro diferentes escalas la técnica lineal diseñada, tiene un carácter claramente fractal, aproximadamente ideal, con una dimensión D_t media igual a 0,84 (figuras 1 a 3). La variación de los valores de D_t es reducida y siempre menor al 10 % (cuadro 1). Todos los valores de D_t son superiores a la dimensión fractal del modelo clásico de polvo de Cantor (0,63), pero siempre menores a 1. Los datos de Korvin (1992) permiten suponer que existe una relación entre el valor de D_t y el grado de erosión en el área del estudio.

Figura 1 - Dimensión fractal lineal de los tepetates (D_t) y de las áreas con tepetate a profundidad (D_0)

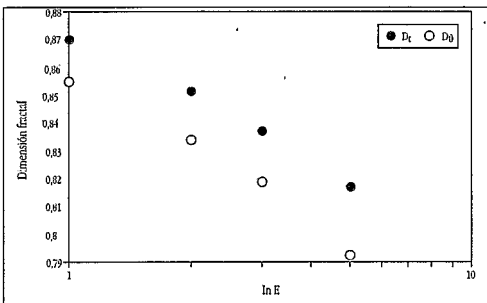
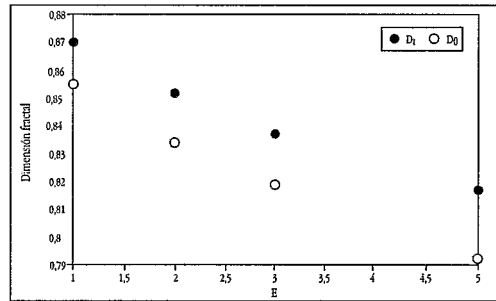
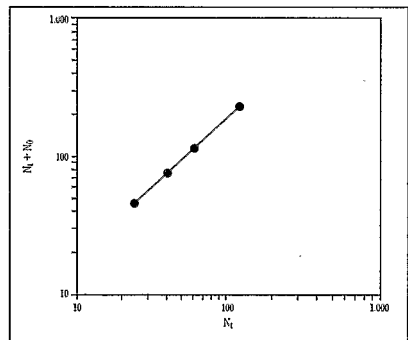


Figura 2 - Relación entre la dimensión fractal lineal (D_t y D_0) y el logaritmo de la escala del análisis (ϵ)

Figura 3 - Relación entre el número total de divisores de tamaño ϵ que ocupan las líneas analizadas ($N_t + N_0$) y el número de divisores que tocan los tepetates (N_t)



Hoja	N_t (C.V. ¹)	N_0 (C.V.)	D_t^2 (C.V.)	D_t^3 (C.V.)
1	120,5 (0,29)	110,8 (0,32)	0,871 (7,3)	0,855 (1,6)
2	60,4 (0,29)	55,6 (0,32)	0,852 (8,6)	0,863 (2,7)
3	40,0 (0,29)	37,0 (0,32)	0,837 (9,7)	0,849 (5,2)
5	24,1 (0,29)	21,9 (0,32)	0,817 (11,2)	0,832 (6,7)

Cuadro 1 - Dimensión fractal lineal de los tepetates aflorantes (D_t) y de las áreas con tepetates a diferente profundidad (D_0)

¹: coeficiente de variación (C.V.)

²: datos del método manual

³: datos del análisis automatizado (programa Fractal)

Los resultados del análisis automático de los mapas digitalizados fueron similares a los del análisis fractal manual: las áreas de los tepetates aflorantes se caracterizaron por una dimensión fractal lineal media de 0,85, mientras las áreas cubiertas con los suelos tenían una dimensión de 0,97 (cuadro 1).

El área total de tepetates modelizada a partir de los datos del análisis fractal lineal utilizando el modelo propuesto por Oleschko (1997) y refiriéndose solamente a un área de 986 km² (la máxima concentración de los tepetates), fue de 300 km², o aproximadamente 30 % del territorio considerado. Zebrowski (1992), para el doble del área y una distribución no homogénea de las capas cementadas, reporta una cobertura de alrededor de 450 km² de tepetates.

Análisis areal

Los datos del análisis areal, basado en la regla del Mandelbrot (1983) que relaciona el perímetro con el área, se presentan en el cuadro 2 y muestran una dimensión fractal areal media de 2,28. Este valor puede ser considerado erróneo, ya que las dimensiones de los conjuntos fractales dentro del plano son menores a 2 (dimensión del espacio euclidiano en el cual está sumergido el fractal). Posiblemente, la razón de este error es la poca exactitud del análisis del conteo de caja realizado de manera manual con un solo tamaño del cuadrado (t). En general, la variación de los datos del análisis fractal areal fue mayor que en el caso del análisis lineal, por lo que D_a fluctuó entre 2,02 (hoja 2) y 2,84 (hoja 5), refiriéndose a las hojas del mapa morfopedogénico de Peña y Zebrowski (1992). Se concluyó que la aplicación de la regla de Mandelbrot al análisis de los datos cartográficos requiere el desarrollo de un procedimiento específico de conteo.

Hoja	P_i (km)	A_i (km ²)	D_a	D_m	D_b
11	204	114	2,246	1,603	1,896
2	211	203	2,015	1,650	1,911
3	89	34	2,546	1,685	1,892
4	204	74	2,471	1,323	1,864
5	351	62	2,840	1,758	1,939
6	77	28	2,607	1,727	1,903
7	253	76	2,555	-	1,901
8	57	1	-	-	-
9	0	0	0	0	0

Cuadro 2 - Dimensión fractal areal (D_a), calculada con base en la relación entre el perímetro (P_i) y el área (A_i) del conjunto, la dimensión de la masa fractal (D_m) y de la superficie fractal (D_b)

¹: Los números de las hojas corresponden al Informe del mapa morfopedológico de la vertiente occidental de la Sierra Nevada (Peña y Zebrowski, 1992)

El análisis de la masa fractal (D_m) del conjunto de áreas de tepetates realizado por el método alterno automático (aplicando el programa Fractal) dio un valor medio de la dimensión fractal de 1,65 para las áreas de los tepetates aflorantes (cuadro 2). Este último valor parece correcto, ya que cumple con la regla general establecida anteriormente para los conjuntos fractales estadísticos (Oleschko, 1997): la dimensión fractal calculada dentro del área es aproximadamente igual al doble de la dimensión fractal estimada a lo largo de las líneas. Las áreas cubiertas con diferentes suelos y con los tepetates enterrados tuvieron un valor promedio de la dimensión fractal de 1,97. La diferencia entre los valores señalados puede ser relacionada con diferentes grados de erosión que se presenta en ambas áreas del estudio. Consecuentemente, es lógico esperar los menores valores de las dimensiones fractales en el caso las áreas de los tepetates aflorantes.

Con el propósito de relacionar el valor de la dimensión fractal con la génesis de los diferentes tepetates, se realizó el análisis por grupos de tepetates, según la clasificación adoptada en el proyecto (Peña y Zebrowski, 1992). Sin embargo, no se encontró correlación alguna entre la magnitud de la dimensión fractal y el tipo de tepetate analizado. Por ejemplo, las áreas cubiertas con los tepetates t3 sin y con carbonatos presentaron una dimensión fractal similar, de un rango de 1,68 a 1,77, sin mostrar ninguna tendencia clara (cuadro 2).

Análisis de las fronteras fractales

La dimensión media de la frontera (D_b) fue de 1,90 para áreas de tepetates aflorantes, lo que puede relacionarse con un elevado grado de irregularidad de sus fronteras y con efectos pronunciados de los procesos erosivos (cuadro 2).

Nivel micro

Las mediciones geométricas de las distribuciones de los granos de arena de diferente tamaño a lo largo de las líneas y dentro de las áreas, refiriéndose a los tepetates del perfil 30, no mostraron evidencias claras de su carácter fractal. Las propiedades geométricas tanto de los granos de feldespatos, como de los de vidrios volcánicos, ambos minerales predominantes en la fracción gruesa de los tepetates analizados, tienen dimensiones regulares, cercanas a las euclidianas. Esto último se cumple para las mediciones de las dimensiones tanto lineales como areales y de la frontera fractal. Por ejemplo, la dimensión lineal media de las arenas es de 0,98, mientras que la dimensión areal es de 1,99. Los datos mencionados confirman que la alteración de los minerales gruesos en los tepetates analizados es poco avanzado, y que en ellos los procesos pedológicos son incipientes.

La comparación de los datos del análisis fractal realizado a nivel macro y micro permite llegar a una conclusión relevante. Mientras a nivel macro existen claras indicaciones de las altas tasas de erosión en las áreas de los tepetates aflorantes, a nivel micro se detectó una meteorización poco importante de los minerales de poca estabilidad. Esta visible contradicción puede ser indicativa de la reciente aparición de la mayor parte de las capas tepetatosas aflorantes, y de su origen relacionado con los eventos volcánicos catastróficos de corta duración.

CONCLUSIONES

Nivel macro

1. Los resultados del análisis fractal de algunos tepetates de la vertiente occidental de la Sierra Nevada evidencian su carácter fractal casi ideal: la dimensión fractal del conjunto

de las áreas de tepetates tanto aflorantes, como profundos, no depende de la escala de análisis.

2. Los valores de las dimensiones fractales obtenidos a lo largo de las líneas analizadas y dentro de las áreas se correlacionan entre sí, cumpliendo con la regla establecida para los fractales autosimilares: el valor de la dimensión calculada dentro del área se aproxima al doble del valor de la dimensión fractal lineal.
3. Con base en la dimensión fractal lineal (de 0,844 en promedio para tepetates aflorantes) se modelizó el área total ocupada por los tepetates, mostrándose claras evidencias del funcionamiento satisfactorio del modelo fractal, ya que los resultados son comparables con las estimaciones directas del campo. Este resultado confirma el carácter fractal casi ideal del conjunto estudiado.
4. Las áreas con tepetates localizados a diferente profundidad presentan una dimensión fractal significativamente mayor al de aquellas con tepetates aflorantes, lo que confirma la hipótesis inicial según la cual la dimensión fractal puede servir de indicador del grado de erosión.

Nivel micro

El análisis geométrico de la distribución de las fracciones gruesas de los tepetates estudiados no mostraron evidencias de su carácter fractal. Sus propiedades geométricas se ajustaron más a las dimensiones euclidianas regulares.

Comparación de los datos a diferentes escalas

Al comparar los parámetros fractales obtenidos a nivel macro y a nivel micro, se llegó a la conclusión de que la mayor parte de las áreas de tepetates aflorantes es de formación reciente y su origen se relaciona con los eventos volcánicos catastróficos de corta duración.

Referencias bibliográficas

- ANDERSON, A.N.; McBRATNEY, A.B.; FITZ, P., 1996: Soil Mass, Surface, and Spectral Fractal Dimensions Estimated from Thin Section Photographs, in *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 60, p. 962-969.
- FALCONER, K., 1990: *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, John Wiley Sons, 288 p.
- HENTSCHEL, H.G.E.; PROCACCIA, I., 1983: The Infinite Number of Generalized Dimensions of Fractals and Strange Attractors, in *Physica*, 8D, p. 435-444.
- Hlavka, Ch.; STRONG, L., 1992: Assessing Deforestation and Habitat Fragmentation in Uganda Using satellite Observations and Fractal Analysis, in *Journal of Imaging Science and Technology*, 36, 5, p. 440-445.
- KORVIN, G., 1992: *Fractal Models in the Earth Science*, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, Netherlands, 395 p.
- MANDELBROT, B.B., 1983: *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman, San Francisco, 488 p.
- OLESCHKO, K.; MIRANDA, M.E., 1997: Calibración de los métodos no destructivos en los tepetates del estado de México, en este volumen.
- OLESCHKO, K., 1997: The Dellese Principle and Statistical Fractal Sets, *Soil Technology* (en revisión).
- ORBACH, R., 1986: *Dynamics of Fractal Networks*, Science, 231, p. 814-819.
- PARROT, J.F.; RICO, J., 1997: *Implementación y operación de un algoritmo para las mediciones fractales de las imágenes del suelo*, UNAM, Instituto de Geología, Proyecto DGAPA, Informe final.
- PEÑA, D.; ZEBROWSKI, C., 1992: *Estudio de los suelos volcánicos endurecidos (tepetates) de las cuencas de México y Tlaxcala (México)*. Informe del mapa morfológico de la vertiente occidental de la Sierra Nevada, anexo al informe final, Contrato CCE-ORSTOM N° TS2-0212, 101 p.