OFFICE DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
ET TECHNIQUE OUTRE-MER

CENTRE DE BRAZZAVILLE

LOIS DE LA PROGRESSION D'UNE PERTUBATION THERMIQUE EN MILIEU ISOTROPE

par

Bernard POUYAUD

SERVICE HYDROLOGIQUE **JUILLET 1969**

LOIS DE LA PROGRESSION DANS UN MILIEU ISOTROPE D'UNE PERTUBATION THERMIQUE

I - MISE EN EQUATION DU PROBLEME GENERAL

Considérons un milieu isotrope et homogène dans lequel il n'y a pas de transformation de chaleur en une autre forme d'énergie, ni inversement.

soient : c la chaleur spécifique
K le coefficient de conductibilité
a la diffusivité thermique = k/c

soit T (x,y,z,t) la température en un point

soit Q la quantité d'énergie calorifique présente dans une région de frontière extérieure FV et de volume V.

- la loi de conductibilité pour une quantité de chaleur dQ traversant la surface d6 s'écrit de la façon suivante :

$$d\,Q = dt \iint_{FV} K.\ \overrightarrow{grad}\ T.\ \vec{n}\ .\ d6$$

- la loi d'échauffement du volume V s'écrit de la façon suivante :

$$d\,Q = \iiint_V c.d\,T.\ dx\ dy\ dz$$

Egalons ces deux valeurs de dQ et appliquons la formule de STOCKES, il vient :

$$\iiint_V c\ d\ t\ dx\ dy\ dz = dt.\iint_{FV} K.\ \overrightarrow{grad}\ T.\ \vec{n}.\ d6 = \iiint_V K.\ \Delta T\ dx\ dy\ dz$$

si on suppose pour simplifier K constant.

ΔT est le Laplacien de T

soit : $\iiint_V \quad (K.\, \Delta T - c \frac{\partial T}{\partial t}) \, dx\, dy\, dz = 0$

ceci devant avoir lieu quelque soit V :

$$K.\, \Delta T - c \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \text{ ou en posant } \frac{K}{c} = a$$

Il vient donc :

$$a.\, \Delta T - \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

équation connue sous le nom d'équation de la chaleur.

Nous allons étudier un certain nombre de cas particuliers.

II - CAS DU MUR SEMI-INFINI

Il s'agit d'intégrer l'équation particulière

$$a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

La propagation d'une onde calorifique dans un sol est depuis longtemps connue dans le cas d'un mur semi-infini.

Nous rappelons les résultats auxquels on aboutit.

A) Cas du mur semi-infini, initialement à la température zéro, et sur la face duquel on impose une température θ_0, pendant un temps Δt à partir de l'origine des temps.

La température $\theta_{x,t}$ en un point x et à l'instant t est donnée d'une façon approchée, d'autant plus exacte que t est grand vis-à-vis de Δt par la relation :

$$\theta_{x,t} \simeq \frac{\theta_0}{2} \quad \frac{\Delta t}{\sqrt{\pi a}} \quad \frac{x}{t\sqrt{t}}\, e^{-\frac{x^2}{4a\, t}}$$

en chaque point x la température atteint un maximum pour :

$$t = t_{s,x}$$

- On peut considérer que $t_{s,x}$ est le temps mis par la pertubation pour atteindre le point x. $t_{s,x}$ se calcule en annulant $\frac{\partial \vartheta}{\partial t}$

On trouve facilement : $t_{s,x} = \frac{x^2}{6a}$

$t_{s,x}$ est donc proportionnel au carré de la distance.

On calcule de la même façon :

- l'étalement Δt_s de la pertubation (par exemple le temps séparant les deux inflexions de part et d'autre du maximum). Δt_s est proportionnel au carré de la distance :

$$\Delta t_s = \frac{\sqrt{10}}{15} \quad \frac{x^2}{a}$$

- les valeurs des maximums sont inversement proportionnelles au carré de la distance, soit :

$$\vartheta \underset{t_{s,x}}{max} = \frac{A}{x^2}$$

B) <u>Cas du mur semi-infini, initialement à la température zéro sur la face duquel on injecte un flux de chaleur $\emptyset o/cm^2$ pendant un temps Δt très court</u>.

La température x,t en un point x à l'instant t est fournie par :

$$\vartheta_{x,t} \simeq \frac{\emptyset o . \Delta t}{\sqrt{\frac{\pi K^2}{a} t}} e^{-\frac{x^2}{4\, at}}$$

On démontre comme précédemment que :

- t_s et Δt_s sont proportionnels à x^2

$$t_s = \frac{x^2}{2a} \quad \text{et} \quad \Delta t_s = \sqrt{\frac{2}{3}} \; \frac{x^2}{a}$$

- par contre le maximum de température est inversement proportionnel à x seulement, soit :

$$\theta \max_{t_{s,x}} = \frac{B}{x}$$

III - CAS DU CYLINDRE INFINI

A) Cas cylindrique de la mise en température d'un milieu initialement à la température 0 par une source de chaleur filiforme confondue avec l'axe des z fournissant un flux de chaleur $\emptyset$ o/cm. Les isothermes sont cylindriques.

L'équation de la chaleur s'écrit dans ce cas :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \; \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)$$

a : diffusivité thermique

$\theta_{x,t}$: élévation de température à l'instant t à la distance r de l'axe des z

r : distance à l'axe des z.

Nous proposons le changement de variable

$$\eta = \frac{r^2}{4 \; at} \quad \text{soit} \quad d\eta = - \frac{r^2}{4 \; at^2} .dt \quad \text{et} \quad d\eta = \frac{r}{2 \; at} . \; dr$$

Il vient :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \left(- \frac{r^2}{4\ at^2} \right)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} \quad \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \quad \frac{r}{2\ at}$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \quad \frac{r^2}{4a^2\ t^2} + \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \quad \frac{1}{2\ at}$$

soit en remplaçant dans l'équation

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \left(- \frac{r^2}{4at^2} \right) = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \times \frac{r^2}{4a^2t^2} + \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \times \frac{1}{2r} + \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \cdot \frac{1}{2r}$$

soit :

$$\eta \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + (1 + \eta) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0$$

équation différentielle à 1 variable

Posons $\alpha = \dfrac{d\theta}{d\eta}$

soit : $\eta \dfrac{d\alpha}{\alpha} + (1 + \eta)\, \alpha = 0$

$$\frac{d\alpha}{\alpha} = - \left(\frac{1}{\eta} + 1 \right) d\eta$$

soit $\log \alpha = - \log \eta - \eta + \log A$

$$\alpha = A \frac{e^{-\eta}}{\eta}$$

et $\theta = A \displaystyle\int \frac{e^{-\eta}}{\eta}\, d\eta + B$

La fonction sous le signe somme est connue sous le nom d'exponentielle intégrale et tabulée sous la forme

$$E_1 \ (-\eta) = -\int_{-\infty}^{-\eta} \frac{e^{-\eta}}{\eta} \ d\eta$$

soit pour nous :

$$\theta = A\int_{+\infty}^{+\frac{r^2}{4at}} \frac{e^{-\eta}}{\eta} \ d\eta + B$$

<u>Calcul des constantes A et B</u>

Conditions aux limites :

$t = 0$ $\theta = o$ dans l'ensemble du milieu pour tout $r \neq 0 \Rightarrow \eta = \infty$

donc $B = 0$.

Soit $\emptyset o$ le flux de chaleur injecté par cm de l'axe des z.

Nous avons $\emptyset \ o = 2 \pi r o . K \left(\frac{d\theta}{dr} \right)_{ro}$

K : conductibilité thermique

r_o : rayon de la partie chauffante

il vient $\emptyset o = 2\pi \ ro . K \frac{d\theta}{d\eta} \left(\frac{d\eta}{dr} \right)_{ro}$

mais $\frac{d\theta}{d\eta} = \alpha = A \frac{e^{-\eta}}{\eta}$

d'où $\emptyset o = A . 4\pi . K . e^{-\eta}$

si ro est assez petit, t assez grand $\eta \rightarrow 0$ donc $e^{-\eta} \rightarrow 1$

et $\emptyset o = A . 4\pi . K$ soit $A = \frac{\emptyset o}{4\pi K}$

L'équation d'établissement de la température devient alors :

$$\theta_{r,t} = \frac{\phi o}{4 \pi K} \int_{+\infty}^{+\frac{r^2}{4at}} \frac{e^{-\eta}}{\eta} \, d\eta$$

Si nous revenons à une expression en t, il vient :

$$\theta_{r,t} = \frac{\phi o}{4 \pi K} \int_{0}^{t} \frac{e^{-\frac{r^2}{4at}}}{t} \, dt$$

B) Passons maintenan t au problème d'une <u>pertubation thermique</u>.

Pour cela imaginons les 2 états suivants :

<u>1er Etat</u>

- à l'instant 0, on injecte sur l'axe des z un flux + ϕo qui dure indéfiniment.

La loi d'établissement de la température est θ_1 (r,t)

<u>2ème Etat</u>

- à l'instant 0 + Δ t, on injecte sur l'axe des z un flux - ϕo qui lui aussi dure indéfiniment.

La loi d'établissement de la température est θ_2 (r,t)

Superposons ces deux états. Nous nous trouvons en présence d'un flux + ϕo sur l'axe des z entre l'instant 0 et l'instant 0 + Δ t. La loi d'établissement de la température est :

$$\theta(r,t) = \theta_1 \; (r,t) \; + \theta_2 \; (r,t)$$

soit :

$$\theta 1\ (r,t) = \frac{\phi o}{4\pi K} \int_0^t \frac{e^{-\frac{r^2}{4\ at}}}{t}\ dt$$

$$\theta 2\ (r,t) = \frac{\phi o}{4\pi\ K} \int_0^{t-\Delta t} e^{\frac{r^2}{4\ at}}\ dt$$

donc :

$$\theta\ (r,t) = \frac{\phi o}{4\pi\ K} \int_{t-\Delta t}^{t} \frac{e^{-\frac{r^2}{4\ at}}}{t}\ dt$$

qui est la solution du problème.

Nous avons dans tout ce qui précède supposé Δt court. Remplaçons donc l'intégrale par sa valeur moyenne, il vient :

$$\theta\ (r,t) = \frac{\phi o}{4\pi K}\ \frac{e^{-\frac{r^2}{4at}}}{t}\ (t - t + \Delta t)$$

$$\theta(r,t) = \frac{\phi o\ \Delta t}{4\pi K}\ \frac{e^{-\frac{r^2}{4at}}}{t}$$

Le maximum est atteint lorsque la dérivée $\frac{d\theta}{dt}$ s'annule, soit en posant $\frac{r^2}{4a} = \lambda$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\phi o\ \Delta t}{4\pi K}\ e^{-\frac{\lambda}{t}}\ \left(\frac{1}{t}\ \frac{\lambda}{t^2} - \frac{1}{t^2}\right)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\phi o\ \Delta t}{4\pi K}\ \frac{e^{-\frac{\lambda}{t}}}{t^3}\ (t - \lambda)$$

La dérivée s'annule donc pour $t = 0$ et $t = \infty$, mais aussi pour $t = \lambda = \frac{r^2}{4a}$ qui correspond au maximum de l'élévation de température.

Le maximum de température s'obtient donc pour

$$t_{s,r} = \frac{r^2}{4a}$$

La valeur de ce maximum est alors :

$$\vartheta_{\substack{max \\ s,r}} = \frac{\emptyset o \ . \Delta t}{4 \pi K \quad e} \cdot \frac{4a}{r^2}$$

Le maximum est donc inversement proportionnel au carré de la distance à l'axe des z.

Les calculs qui précédent sont d'autant plus justifiés que Δt est plus petit d'une part, et que t_s est grand, donc que a est petit et r grand.

IV - CAS DE LA SPHERE

A) Cas sphérique de la mise en température d'un milieu infini initialement à la température 0 par un flux de chaleur $\emptyset o$ émis ponctuellement par la surface d'une petite sphère de rayon ro. Les isothermes sont sphériques.

L'équation de la chaleur s'écrit alors :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)$$

qui avec le même changement de variable $\eta = \dfrac{r^2}{4 \ at}$ devient

$$\eta \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \left(\eta + \frac{3}{2} \right) = 0 \qquad \alpha = \frac{d\theta}{d\eta}$$

soit :

$$\frac{d\alpha}{\alpha} = - \left(\frac{3/2}{\eta} + 1 \right) d\eta$$

d'où

$$\frac{d\theta}{d\eta} = A \frac{e^{-\eta}}{\eta^{3/2}} + B$$

Les conditions aux limites conduisent à prendre B = 0, soit ϕo le flux de chaleur injecté par la source.

Il vient :

$$\phi o = 4\pi ro^2 \quad K \frac{d\theta}{dr} = 4\pi ro^2 \quad K \frac{d\theta}{d\eta} \frac{d\eta}{dr}$$

or,

$$\frac{d\theta}{d\eta} = A \frac{e^{-\eta}}{\eta^{3/2}} \qquad \frac{d\eta}{dr} = \frac{r}{2\ at}$$

soit :

$$\phi o = 8\pi ro \quad K.A \frac{e^{-\eta}}{\sqrt{\eta}}$$

de la même manière que précédemment si r est assez petit et t assez grand, on a $\eta \to o$ et $e^{-\eta} \to 1$.

$$\text{donc} \quad \phi o \simeq \frac{8\pi ro \quad K\ A}{\sqrt{\eta}} \quad \text{et} \quad A \simeq \frac{\phi o \sqrt{\eta}}{8\pi ro \quad K}$$

$$\text{soit en t} \quad A \simeq \frac{\phi o}{16\ \pi\sqrt{aK}} \quad \frac{1}{\sqrt{t}}$$

La présence de t peut paraître bizarre dans la "constante" A. En fait, il faut voir là le résultat de ce que la source de chaleur n'est pas ponctuelle, et qu'il y a eu de nombreuses approximations faites.

$$\text{Or } \theta_{r,t} = A \int_{\alpha}^{\eta} \frac{e^{-\eta}}{\eta^{3/2}} \ d\eta$$

soit en repassant en t

$$\theta r,t = A \int_0^t e^{-\frac{r^2}{4at}} \quad \frac{2\sqrt{a}}{r\sqrt{t}} \ dt$$

d'où :

$$\theta r,t \simeq \frac{\phi o}{8\pi K.r.\sqrt{t}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{r^2}{4at}}}{\sqrt{t}} \ dt$$

B) Cas de la pertubation provoquée par un $\emptyset o$ durant Δt

Nous reprenons la même superposition de 2 états d'équilibre, il vient :

$$\theta_{r,t} \simeq \frac{\emptyset o}{8 \pi K . r . \sqrt{t}} \int_{t-\Delta t}^{t} \frac{e^{-\frac{r^2}{4 at}}}{\sqrt{t}} dt$$

soit en prenant la valeur moyenne de l'intégrale :

$$\theta_{r,t} \simeq \frac{\emptyset o \ \Delta t}{8 \pi K . r} \quad \frac{e^{-\frac{r^2}{4at}}}{t}$$

Détermination du maximum

Posons $\lambda = \frac{r^2}{4a}$

$$\frac{d\theta}{dt} = \text{Cst. } e^{-\frac{\lambda}{t}} \left(\frac{1}{t} \frac{\lambda}{t^2} - \frac{1}{t^2} \right) = \text{Cst } \frac{e^{-\frac{\lambda}{t}}}{t^3} \cdot (\lambda - t)$$

Le maximum s'obtient donc pour: $\lambda = t = \frac{r^2}{4a}$

$$t_{s,r} = \frac{r^2}{4a}$$

La valeur de ca maximum est alors

$$\theta^{max}_{s,r} = \frac{\emptyset o \ \Delta t}{8 \pi K \ e} \quad \frac{4a}{r^3}$$

Le maximum est inversement proportionnel au cube de la distance au centre.

V - RESULTATS IMPORTANTS

Nous regroupons ci-après les principaux résultats pratiques :

- Temps auquel se produit le maximum de température

demi-plan $t_s = \frac{x^2}{2a}$

cylindre $t_s = \frac{r^2}{4a}$

sphère $t_s = \frac{r^2}{4a}$

- Valeur du maximum

demi-plan $\theta max = \frac{B}{x}$ en $\frac{1}{x}$

cylindre $\theta max = \frac{\phi o. \Delta t}{4 \pi K e} \cdot \frac{4a}{r^2}$ en $\frac{1}{r^2}$

sphère $\theta max = \frac{\phi o. \Delta t}{8 \pi K e} \cdot \frac{4a}{r^3}$ en $\frac{1}{r^3}$

La justification des approximations faites est délicate, surtout en ce qui concerne le cas sphérique, qui paraît assez critiquable.

Les résultats expérimentaux sont, en fait, seuls à même de valider cette théorie qui ne se veut pas exacte, mais fournit seulement une base théorique sérieuse aux expérimentations réalisées.