

Mordechai Ben-Ari

Traduction : Nicolas Bacaër

Surprises mathématiques



Surprises mathématiques

Mordechai Ben-Ari

Traduction : Nicolas Bacaër

MORDECHAI BEN-ARI

Département de didactique des sciences

Institut Weizmann

Rehovot, Israël

moti.ben.ari@gmail.com

NICOLAS BACAËR

Institut de recherche pour le développement

nicolas.bacaer@ird.fr

Couverture : ROBERT DELAUNAY, *Rythme, Joie de vivre* (1930). Centre Pompidou, Paris.

Titre original : *Mathematical Surprises*

Publié par Springer, Cham, 2022

© <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Pour l'édition française :

© Nicolas Bacaër, Paris, 2023

ISBN : 979-10-396-4380-1

Dépôt légal : avril 2023

2^e tirage revu et corrigé

Préface

Si tout le monde était exposé aux mathématiques dans leur état naturel, avec tous les défis, les plaisirs et les surprises que cela comporte, je pense que nous verrions un changement spectaculaire à la fois dans l'attitude des élèves envers les mathématiques et dans notre conception de ce que signifie être « bon en maths ».

Paul Lockhart

J'ai vraiment faim de surprises, car elles nous rendent plus intelligents, même si c'est de manière très légère.

Tadashi Tokieda

Les mathématiques, lorsqu'elles sont abordées de manière appropriée, peuvent nous réserver de nombreuses surprises agréables. C'est ce que confirme une recherche sur internet de l'expression « surprises mathématiques », qui donne près d'un demi-milliard de résultats. Qu'est-ce qu'une surprise ? Les origines du mot remontent au vieux français avec des racines latines : « sur » et « prendre ». Littéralement, surprendre, c'est dépasser. En tant que substantif, la surprise est à la fois un événement ou une circonstance inattendue ou déconcertante, ainsi que l'émotion qu'elle provoque.

Prenons par exemple l'extrait d'une conférence de Maxim Bruckheimer ¹ sur le cercle de Feuerbach : « Deux points se trouvent sur une même droite, ce n'est pas une surprise. Cependant, trois points ne sont pas nécessairement sur une même droite et si, au cours d'une exploration géométrique, trois points « tombent » sur une droite, c'est une surprise et nous devons souvent nous référer à ce fait comme à un théorème à démontrer. Trois points qui ne sont pas sur une droite se trouvent sur un cercle. En revanche, si quatre points se trouvent sur le même cercle, il s'agit d'une surprise qui doit être formulée comme un théorème... Dans la mesure où le nombre de points sur une droite est supérieur à 3, le théorème est d'autant plus surprenant. De même, si le nombre de points situés sur un cercle est supérieur à 4, le théorème est d'autant plus

1. Maxim Bruckheimer était un mathématicien qui a été l'un des fondateurs d'*Open University* au Royaume-Uni et le doyen de sa faculté de mathématiques. Il a dirigé le département de didactique des sciences à l'Institut Weizmann.

surprenant. Ainsi, l'affirmation selon laquelle, pour tout triangle, il existe neuf points sur le même cercle ... est très surprenante. De plus, malgré l'ampleur de la surprise, sa démonstration est élégante et facile. »

Dans ce livre, Mordechai Ben-Ari propose une riche collection de surprises mathématiques, pour la plupart moins connues que le cercle de Feuerbach et avec de bonnes raisons de les inclure. Tout d'abord, bien qu'elles soient absentes des manuels scolaires, les perles mathématiques de ce livre sont accessibles avec un simple bagage de lycée (et de la patience, ainsi que du papier et un crayon, car le plaisir n'est pas gratuit). Deuxièmement, lorsqu'un résultat mathématique remet en question ce que nous tenons pour acquis, nous sommes effectivement surpris (chap. 1 et 13). De même, nous sommes surpris par : l'intelligence d'un argument (chap. 2 et 3), la justification de la possibilité d'une construction géométrique par des moyens algébriques (chap. 16), une démonstration s'appuyant sur un sujet apparemment sans rapport (chap. 4 et 5), une étrange démonstration par récurrence (chap. 6), de nouvelles façons de considérer un résultat bien connu (chap. 7), un théorème apparemment mineur devenant le fondement de tout un domaine des mathématiques (chap. 8), des sources d'inspiration inattendues (chap. 9), des formalisations riches qui émergent d'activités purement récréatives comme l'origami (chap. 10–12). Ce sont là autant de raisons différentes d'inclure dans ce beau livre des surprises mathématiques agréables, belles et mémorables.

Jusqu'à présent, j'ai abordé la manière dont le livre se rapporte à la première partie de la définition de la surprise, à savoir les raisons cognitives et rationnelles de l'inattendu. Quant au deuxième aspect, l'aspect émotionnel, ce livre est un exemple de ce que de nombreux mathématiciens affirment concernant la raison première de faire des mathématiques : c'est fascinant ! De plus, ils affirment que les mathématiques stimulent à la fois notre curiosité intellectuelle et notre sensibilité esthétique, et que la résolution d'un problème ou la compréhension d'un concept constitue une récompense spirituelle, qui nous incite à continuer à travailler sur d'autres problèmes et concepts.

On a dit que la fonction d'un avant-propos était de dire aux lecteurs pourquoi ils devraient lire le livre. J'ai essayé de le faire, mais je crois que la réponse la plus complète viendra de vous, lecteur ou lectrice, après l'avoir lu et avoir fait l'expérience de ce que l'étymologie du mot « surprise » suggère : être dépassé par elle !

Introduction

L'article de Godfried Toussaint sur le « compas éphémère » [60] m'a fait une profonde impression. Il ne me serait jamais venu à l'esprit que le compas moderne à charnière n'est pas celui utilisé à l'époque d'Euclide. Dans ce livre, je présente une sélection de résultats mathématiques qui ne sont pas seulement intéressants, mais qui m'ont surpris lorsque je les ai rencontrés pour la première fois.

Les mathématiques nécessaires à la lecture de ce livre sont celles du lycée, mais cela ne signifie pas que le contenu soit simple. Certaines démonstrations sont assez longues et exigent que le lecteur soit prêt à persévérer dans son étude. La récompense est la compréhension de certains des plus beaux résultats des mathématiques. Ce livre n'est pas un manuel scolaire, car le large éventail de sujets abordés ne s'intègre pas facilement dans un programme d'études. Il convient aux activités d'enrichissement pour les lycéens, aux séminaires de niveau universitaire et aux professeurs de mathématiques.

Les chapitres peuvent être lus indépendamment les uns des autres. Une exception : le chapitre 10 sur les axiomes de l'origami est nécessaire aux chapitres 11 et 12, les autres chapitres sur l'origami. On présente les remarques relatives à tous les chapitres ci-dessous sous forme de liste.

Qu'est-ce qu'une surprise ?

Il y avait trois critères pour inclure un sujet dans le livre :

- Le théorème m'a surpris. Les théorèmes sur la constructibilité à la règle et au compas étaient particulièrement surprenants. Les mathématiques extrêmement riches de l'origami étaient presque choquantes : lorsqu'un professeur de mathématiques m'a proposé un projet sur l'origami, j'ai d'abord refusé parce que je doutais qu'il puisse y avoir des mathématiques sérieuses associées à cette forme d'art. D'autres sujets ont été inclus parce que, même si je connaissais les résultats, leurs démonstrations étaient surprenantes par leur élégance et leur accessibilité, en particulier la démonstration purement algébrique de Gauss qu'il est possible de construire un heptadécagone régulier.

- Ce sujet n'apparaît pas dans les manuels du lycée et du supérieur, et je n'ai trouvé ces théorèmes et démonstrations que dans des manuels avancés et dans la littérature de recherche. Il existe des articles Wikipédia sur la plupart des sujets, mais il faut savoir où chercher et les articles sont souvent sommaires.
- Les théorèmes et les démonstrations sont accessibles avec une bonne connaissance des mathématiques du lycée.

Chaque chapitre se termine par un paragraphe « Quelle est la surprise ? » qui explique mon choix du sujet.

Un aperçu du contenu

Le chapitre 1 présente la démonstration d'Euclide que toute construction possible avec un compas à charnière est possible avec un compas éphémère. De nombreuses démonstrations ont été données, mais la plupart ne sont pas correctes, car elles dépendent de figures qui ne représentent pas toujours correctement la géométrie du problème comme l'a montré Toussaint. Pour souligner qu'il ne faut pas se fier aux figures, je présente la fameuse pseudo-démonstration que tout triangle est isocèle.

Au fil des siècles, les mathématiciens ont cherché sans succès à réaliser la trisection d'un angle arbitraire (c'est-à-dire à le diviser en trois parties égales) en utilisant uniquement une règle et un compas. Underwood Dudley a fait une étude complète des « trisecteurs » qui donnent des constructions qui ne sont pas correctes ; la plupart des constructions sont des approximations que l'on prétend exactes. Le chapitre 2 commence par présenter deux de ces constructions et développe les formules trigonométriques qui montrent qu'elles ne sont que des approximations. Pour montrer que la trisection à l'aide d'une simple règle et d'un compas n'a aucune importance pratique, on présente des trisections qui utilisent des outils plus complexes : la *neusis* d'Archimède et la quadratrice d'Hippias. Le chapitre se termine par la démonstration que la trisection d'un angle arbitraire est impossible à la règle et au compas.

La quadrature du cercle (à partir d'un cercle, construire un carré de même surface) ne peut pas être réalisée à la règle et au compas, car la valeur de π ne peut pas être construite. Le chapitre 3 présente trois élégantes constructions d'approximations proches de π , une de Kochański et deux de Ramanujan. Le chapitre se termine en montrant qu'on peut utiliser une quadratrice pour résoudre la quadrature du cercle.

Le théorème des quatre couleurs stipule qu'il est possible de colorier toute carte planaire avec quatre couleurs, de sorte que deux pays ayant une frontière commune ne soient pas coloriés avec la même couleur. La démonstration de ce théorème est extrêmement compliquée, mais la démonstration du théorème des cinq couleurs est élémentaire et élégante, comme le montre le chapitre 4. Ce chapitre présente également la démonstration de Percy Heawood que la « démonstration » du théorème des quatre couleurs d'Alfred Kempe n'est pas correcte.

Combien de gardiens un musée d'art doit-il employer pour que tous les murs soient sous l'observation constante d'au moins un gardien ? La démonstration du chapitre 5 est assez astucieuse, car elle utilise la coloriage de graphes pour résoudre ce qui, à première vue, semble être un problème purement géométrique.

Le chapitre 6 présente quelques résultats moins connus et leurs démonstrations par récurrence : des théorèmes sur la suite de Fibonacci et sur les nombres de Fermat, la fonction 91 de McCarthy et le problème de Josephé.

Le chapitre 7 traite de la méthode de Po-Shen Loh pour résoudre les équations du second degré. Cette méthode est un élément essentiel de la démonstration algébrique de Gauss qu'un heptadécagone peut être construit à la règle et au compas (chap. 16). Le chapitre inclut la construction géométrique d'Al-Khwârizmî pour trouver les racines des équations du second degré et une construction géométrique utilisée par Cardan dans le développement de la formule pour trouver les racines des équations du troisième degré.

La théorie de Ramsey est un sujet de la combinatoire qui constitue un domaine de recherche actif. Elle recherche des motifs parmi les sous-ensembles de grands ensembles. Le chapitre 8 présente des exemples simples de triplets de Schur, de triplets pythagoriciens, de nombres de Ramsey et de problèmes de van der Waerden. La démonstration du théorème sur les triplets pythagoriciens a été obtenue récemment à l'aide d'un programme informatique basé sur la logique mathématique. Le chapitre se termine par une digression sur la connaissance des triplets pythagoriciens par les anciens Babyloniens.

C. Dudley Langford a observé son fils qui jouait avec des blocs de couleur et a remarqué qu'il les avait disposés dans une suite intéressante. Le chapitre 9 présente son théorème sur les conditions de possibilité d'une telle suite.

Le chapitre 10 contient les sept axiomes de l'origami, ainsi que les calculs détaillés de la géométrie analytique des axiomes et les caractérisations des

plis en tant que lieux géométriques.

Le chapitre 11 présente la méthode d'Eduard Lill et le pliage d'origami proposé par Margarita P. Beloch. Je présente la méthode de Lill comme un tour de magie, je ne vais donc pas le gâcher en donnant des détails ici.

Le chapitre 12 montre que l'origami permet de réaliser des constructions impossibles à la règle et au compas : la trisection d'un angle, la duplication d'un cube et la construction d'un enneagone (polygone régulier à neuf côtés).

Le chapitre 13 présente le théorème de Georg Mohr et Lorenzo Mascheroni selon lequel toute construction à la règle et au compas peut être réalisée en utilisant uniquement un compas.

L'affirmation correspondante selon laquelle une règle suffit n'est pas correcte, car une règle ne peut pas reproduire les longueurs qui sont des racines carrées. Jean-Victor Poncelet a conjecturé et Jakob Steiner a démontré qu'une règle est suffisante à condition qu'il existe un seul cercle fixe quelque part dans le plan (chap. 14).

Si deux triangles ont le même périmètre et la même aire, sont-ils forcément isométriques ? Cela semble raisonnable, mais il s'avère que ce n'est pas vrai, bien qu'il faille un peu d'algèbre et de géométrie pour trouver deux pareils triangles non isométriques, comme le montre le chapitre 15.

Le chapitre 16 présente le tour de force de Gauss : la démonstration qu'un heptadécagone (un polygone régulier à dix-sept côtés) peut être construit à l'aide d'une règle et d'un compas. Par un argument astucieux sur la symétrie des racines des polynômes, il a obtenu une formule qui n'utilise que les quatre opérateurs arithmétiques et les racines carrées. Gauss n'a pas donné de construction explicite d'un heptadécagone, c'est pourquoi nous présentons l'élégante construction de James Callagy. Le chapitre se termine par la construction d'un pentagone régulier basée sur la méthode de Gauss pour la construction d'un heptadécagone.

Pour que le livre soit aussi complet que possible, l'annexe A rassemble les démonstrations de théorèmes de géométrie et de trigonométrie qui ne sont peut-être pas familiers au lecteur.

Style

- Nous supposons que le lecteur a une bonne connaissance des mathématiques du lycée, notamment :

- en algèbre, les polynômes et la division de polynômes, les polynômes *unitaires* (ceux dont le coefficient de la plus haute puissance est 1), les équations du second degré, la multiplication d'expressions avec des exposants $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
- en géométrie euclidienne, les triangles isométriques $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ et les cas d'égalité des triangles, les triangles semblables $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ et les rapports de leurs côtés, les cercles et leurs angles inscrits et centraux.
- en géométrie analytique, le plan cartésien, le calcul des longueurs et des pentes des segments, l'équation d'un cercle.
- en trigonométrie, les fonctions sin, cos, tan et leurs relations, les angles dans le cercle unité, les fonctions trigonométriques des angles supplémentaires telles que $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$.
- Les énoncés à démontrer sont appelés « théorèmes » sans que l'on tente de faire la distinction entre les théorèmes, les lemmes et les corollaires.
- Lorsqu'un théorème suit une construction, les variables qui apparaissent dans le théorème font référence aux points, droites et angles marqués dans la figure qui accompagne la construction.
- Nous avons donné les noms complets des mathématiciens sans les informations biographiques qui peuvent être trouvées facilement dans Wikipédia.
- Le livre est écrit de manière à être aussi autonome que possible, mais la présentation dépend parfois de concepts mathématiques avancés et de théorèmes qui sont donnés sans démonstration. Dans ce cas, on trouvera un résumé technique dans des encadrés que l'on peut sauter.
- Il n'y a pas d'exercices, mais le lecteur ambitieux est invité à démontrer chaque théorème avant de lire la démonstration.
- Les constructions géométriques peuvent être étudiées à l'aide de logiciels tels que Geogebra.
- \overline{AB} est utilisé à la fois pour le nom d'un segment et pour la longueur du segment.
- $\triangle ABC$ est utilisé à la fois pour le nom d'un triangle et pour l'aire du triangle.

Remerciements

Ce livre n'aurait jamais vu le jour sans les encouragements d'Abraham Arcavi, qui m'a permis d'empiéter sur son domaine de l'enseignement des mathématiques. Il a aussi gracieusement rédigé l'avant-propos. Avital Elbaum Cohen et Ronit Ben-Bassat Levy ont toujours été prêtes à m'aider à (ré)apprendre les mathématiques du secondaire. Oriah Ben-Lulu m'a initié aux mathématiques de l'origami et a collaboré aux démonstrations. Je suis reconnaissant à Michael Woltermann de m'avoir permis d'utiliser plusieurs sections de son adaptation du livre de Heinrich Dörrie. Jason Cooper, Richard Kruel, Abraham Arcavi et les relecteurs anonymes ont fourni des commentaires utiles.

Je tiens à remercier l'équipe de Springer pour son soutien et son professionnalisme, en particulier l'éditeur Richard Kruel.

Ce livre est publié dans le cadre du programme « accès ouvert ». Je tiens à remercier l'Institut Weizmann des sciences pour le financement de la publication.

Les fichiers sources \LaTeX du livre (y compris la source \tikZ pour les figures) sont disponibles à l'adresse suivante :

<https://github.com/motib/surprises>

Mordechai (Moti) Ben-Ari

Introduction à la traduction

Sauver l'honneur, mais pour mourir : option Massada.
Sauver l'avenir, mais en se reniant : option Flavius
Josèphe.

Régis Debray [17]

Pour l'année 2020, la base de données zbMATH, gérée depuis l'Allemagne et désormais en accès libre, recense 2 188 livres de mathématiques publiés cette année-là.² Ce nombre évolue au fur et à mesure que de nouveaux livres sont recensés dans la base, avec plus ou moins de retard. Parmi ces livres, 2 032 sont en anglais, 107 en allemand, 34 en français, 14 en italien, 6 en espagnol, 4 en portugais, 2 en russe, 2 en polonais... Certains livres peuvent être multilingues. On remarque aussi que 1 068 livres contenaient « Springer » quelque part dans leur notice bibliographique, 116 « World Scientific », 109 « Cambridge University Press », 105 « American Mathematical Society », 77 « Birkhäuser », 52 « Oxford University Press », 48 « Wiley », 26 « Elsevier », 13 « Société mathématique de France »... Il y a évidemment un biais à la fois linguistique et éditorial, car Springer est une entreprise avec une base principale en Allemagne (comme zbMATH) qui publie principalement en anglais et secondairement en allemand. De plus, des éditeurs de nombreux pays comme en Chine, au Japon, au Brésil ou même en Europe ne signalent pas leurs publications à zbMATH. Ces chiffres donnent néanmoins une certaine idée du degré de dépendance linguistique vis-à-vis de l'anglais et de dépendance économique vis-à-vis de Springer auquel est arrivée la communauté mathématique en ce début de XXI^e siècle.

Deux tendances s'opposent depuis quelques années à ce double mouvement de concentration. La première vise à s'éloigner des éditeurs commerciaux et à favoriser des structures publiques comme le centre Mersenne à Grenoble, qui gère une vingtaine de revues scientifiques, principalement en mathématiques. C'est ainsi que l'Académie des sciences à Paris a décidé de retirer la gestion de ses Comptes rendus à Elsevier pour la confier au Centre Mersenne.

2. MathSciNet recense un moins grand nombre de livres. De plus, de manière assez significative, la langue de publication ne fait pas partie des critères de recherche.

Cela s'inscrit dans le cadre de la promotion de la « science ouverte ». Les éditeurs commerciaux se sont adaptés à cette nouvelle donne en proposant aussi des services appelés « accès ouvert », où l'auteur (plus exactement son institution) paie la publication, que ce soit sous forme d'article ou de livre.

La deuxième tendance essaie de tirer avantage des progrès récents de la traduction automatique pour promouvoir la diversité linguistique. Certes la traduction automatique est également utilisée pour produire toujours plus de livres en anglais : Springer a déjà traduit automatiquement puis relu et corrigé une douzaine de livres de mathématiques d'allemand en anglais, tandis que ISTE basé au Royaume-Uni a fait de même du français vers l'anglais pour quelques livres. Mais il y a aussi des tentatives pour traduire vers des langues autres que l'anglais : voir par exemple la traduction en une vingtaine de langues de [4] ou en cinq langues de [5].

La présente traduction se situe au carrefour de ces deux tendances. Le texte source est un livre publié en accès ouvert en anglais ³ par Springer sous une licence CC-BY. L'auteur a d'ailleurs eu la bonne idée de mettre en accès libre les fichiers sources en \LaTeX . D'autre part, on a utilisé le traducteur automatique DeepL pour faire une première traduction rapide de l'anglais vers le français, traduction que l'on a ensuite relue et corrigée. C'est la même méthode que celle utilisée pour les traductions de [4, 5], à part que cette fois la langue cible est le français.

Au cours des dernières années, peu de livres de mathématiques ont été traduits en français. Pour l'année 2020 par exemple, on n'a trouvé que six livres : quatre traduits de l'anglais (deux publiés par Cassini, un par Dunod, un par les Presses universitaires de Franche-Comté), un traduit du néerlandais (publié par Vuibert) et un traduit du russe (publié par les Éditions du Bec de l'Aigle). Nous espérons que la méthode que nous avons utilisée suscitera un plus grand nombre de traductions.

Pour compléter la bibliographie par des références en français, mentionnons par exemple [14, 34] pour les constructions à la règle et au compas, [54] pour le problème de Josèphe, [1, 27] pour le théorème des cinq couleurs et la théorie de Ramsey, ou [18, 33] pour les mathématiques de l'origami.

Nicolas Bacaër

3. Il existe également une version du livre en hébreu.

Table des matières

1	Le compas éphémère	1
1.1	Construction à la règle et au compas	2
1.2	Les compas fixes et les compas éphémères	3
1.3	Construction d'Euclide pour copier un segment	4
1.4	Une construction erronée pour copier un segment	6
1.5	Ne vous fiez pas à une figure	8
2	La trisection d'un angle	11
2.1	Trisections approximatives	11
2.2	Trisection à l'aide d'une <i>neusis</i>	16
2.3	La duplication du cube avec une <i>neusis</i>	18
2.4	Trisection à l'aide d'une quadratrice	19
2.5	Nombres constructibles	20
2.6	Nombres constructibles comme racines de polynômes	24
2.7	Impossibilité des constructions classiques	27
3	La quadrature du cercle	30
3.1	La construction de Kochański	31
3.2	La première construction de Ramanujan	33
3.3	La deuxième construction de Ramanujan	35
3.4	La quadrature du cercle à l'aide d'une quadratrice	38
4	Le théorème des cinq couleurs	41
4.1	Cartes et graphes planaires	41
4.2	La formule d'Euler	44
4.3	Graphes non planaires	46
4.4	Les degrés des sommets	47
4.5	Le théorème des six couleurs	49
4.6	Le théorème des cinq couleurs	49
4.7	La démonstration erronée de Kempe du théorème des quatre couleurs	50

5	Comment surveiller un musée	54
5.1	Coloration des polygones triangulés	55
5.2	Du coloriage de polygones à la surveillance d'un musée . . .	57
5.3	Tout polygone peut être triangulé	58
6	Le raisonnement par récurrence	62
6.1	Le principe de récurrence	62
6.2	La suite de Fibonacci	64
6.3	Les nombres de Fermat	67
6.4	La fonction 91 de McCarthy	69
6.5	Le problème de Josèphe	71
7	La résolution d'équations du second degré	76
7.1	Méthodes traditionnelles de résolution d'équations du second degré	76
7.2	La relation entre les racines et les coefficients	77
7.3	Exemples de la méthode de Loh	79
7.4	Obtention de la formule traditionnelle	81
7.5	Solution géométrique d'Al-Khwârizmî pour les équations du second degré	82
7.6	La construction de Cardan pour résoudre les équations de degré trois	83
7.7	Les nombres imaginaires ne les intimidaient pas	84
7.8	La méthode de Lill et le cercle de Carlyle	86
7.9	Calcul numérique des racines	89
8	La théorie de Ramsey	92
8.1	Les triplets de Schur	92
8.2	Les triplets pythagoriciens	94
8.3	Le problème de van der Waerden	95
8.4	Le théorème de Ramsey	96
8.5	La méthode probabiliste	98
8.6	Résolution SAT	100
8.7	Les triplets pythagoriciens dans les mathématiques babyloniennes	104

9	Le problème de Langford	110
9.1	Le problème de Langford en tant que problème de recouvrement	111
9.2	Pour quelles valeurs de n le problème de Langford est-il être résolu?	112
9.3	Solution de $L(4)$	115
10	Les axiomes de l'origami	118
10.1	Axiome 1	118
10.2	Axiome 2	120
10.3	Axiome 3	121
10.4	Axiome 4	123
10.5	Axiome 5	124
10.6	Axiome 6	126
10.7	Axiome 7	134
11	La méthode de Lill et le pli de Beloch	138
11.1	Une astuce magique	138
11.2	Spécification de la méthode de Lill	140
11.3	Démonstration de la méthode de Lill	144
11.4	Le pli de Beloch	145
12	Constructions géométriques à l'aide de l'origami	149
12.1	La trisection d'un angle proposée par Abe	149
12.2	La trisection d'un angle proposée par Martin	150
12.3	La duplication d'un cube proposée par Messer	152
12.4	La duplication d'un cube proposée par Beloch	155
12.5	Construction d'un enneagone régulier	156
13	Un compas suffit	160
13.1	Qu'est-ce qu'une construction avec seulement un compas?	160
13.2	Réflexion d'un point	161
13.3	Construction d'un cercle de rayon donné	162
13.4	Addition et soustraction de segments	163
13.5	Construction d'un segment comme rapport de segments	167
13.6	Construction de l'intersection de deux droites	169
13.7	Construction de l'intersection d'une droite et d'un cercle	170

14 Une règle et un cercle suffisent	174
14.1 Qu'est-ce qu'une construction avec seulement une règle? . . .	174
14.2 Construction d'une droite parallèle à une droite donnée . . .	175
14.3 Construction d'une perpendiculaire à une droite donnée. . .	178
14.4 Copie d'un segment dans une direction donnée	179
14.5 Construction d'un segment comme rapport de segments . . .	180
14.6 Construction d'une racine carrée	181
14.7 Construction de l'intersection d'une droite et d'un cercle . .	182
14.8 Construction de l'intersection de deux cercles	183
15 Les triangles dont les aires et les périmètres sont égaux sont-ils isométriques?	186
15.1 D'un triangle à une courbe elliptique	186
15.2 Résolution de l'équation pour la courbe elliptique	189
15.3 Détermination d'un triangle à partir de la courbe elliptique .	191
16 Construction d'un heptadécagone régulier	194
16.1 Construction des polygones réguliers	195
16.2 Le théorème fondamental de l'algèbre	196
16.3 Les racines de l'unité	196
16.4 La démonstration de Gauss qu'un heptadécagone est constructible	198
16.5 Démonstration de la formule de Gauss	203
16.6 Construction d'un heptadécagone	205
16.7 Construction d'un pentagone régulier	209
A Théorèmes de géométrie et de trigonométrie	212
A.1 Théorèmes sur les triangles	212
A.2 Formules trigonométriques	215
A.3 Les théorèmes de la bissectrice	224
A.4 Le théorème de Ptolémée	226
A.5 Le théorème de Ceva	229
A.6 Le théorème de Ménélaüs	231

Chapitre 1

Le compas éphémère

Un compas moderne est un compas fixe : la distance entre les deux branches peut être fixée de manière à pouvoir copier un segment ou un cercle d'une position à une autre (fig. 1.1). Euclide utilise un « compas éphémère » qui ne permet pas de conserver une distance fixe entre les branches (fig. 1.2). Les enseignants utilisent souvent un compas éphémère constitué d'un marqueur attaché à une ficelle pour tracer un cercle sur un tableau blanc. Il est impossible de maintenir une longueur fixe lorsque le compas est retiré du tableau blanc.

Ce chapitre commence par une discussion sur la pertinence de l'étude des constructions à la règle et au compas (sect. 1.1). Dans la section 1.2, on compare les deux types de compas dans la construction la plus élémentaire, celle d'une médiatrice. La section 1.3 présente la méthode d'Euclide pour copier un segment à l'aide d'un compas éphémère. Cela montre que toute construction qui peut être réalisée à l'aide d'un compas fixe peut l'être à l'aide d'un compas éphémère. La section 1.4 présente une démonstration de ce théorème qui semble correcte, mais qui ne fonctionne pas pour toutes les configurations de droites et de points. Pour souligner qu'il ne faut pas se fier aux figures, la section 1.5 présente une célèbre fausse démonstration que tous les triangles sont isocèles ; la démonstration semble correcte, mais elle ne l'est pas, car elle est basée sur une figure qui n'est pas correcte.

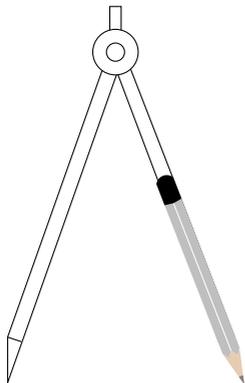


FIG. 1.1 – *Un compas fixe. Une branche est munie d'une pointe que l'on place au centre du cercle. Un crayon fixé à l'autre branche est utilisé pour tracer le cercle. Les branches sont reliées par une articulation serrée de sorte que la distance entre les branches (le rayon du cercle) est maintenue même lorsqu'on soulève le compas du papier.*

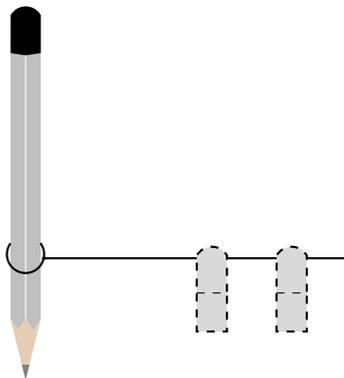


FIG. 1.2 – *Un compas éphémère. L'utilisateur tient un morceau de ficelle au centre du cercle. L'autre extrémité de la ficelle est attachée à un crayon et est utilisée pour tracer le cercle. Lorsqu'on soulève le compas du papier, les doigts (en pointillés) peuvent facilement glisser vers une nouvelle position.*

1.1 Construction à la règle et au compas

La construction à la règle et au compas était autrefois le concept fondamental enseigné en géométrie euclidienne. Récemment, elle est tombée en désuétude dans les programmes scolaires. Il est vrai que ce sujet n'a que peu voire pas d'utilité pratique. Comme nous le montrons dans les sections 2.2, 2.3, 2.4 et 3.4, les Grecs savaient réaliser des constructions impossibles à la règle et au compas en utilisant des outils à peine plus sophistiqués. Aujourd'hui, grâce à des méthodes numériques, les ordinateurs peuvent réaliser ces constructions avec toute la précision souhaitée.

Néanmoins, je pense qu'il y a des avantages à étudier ces constructions :

— Il est plus amusant et plus stimulant d'apprendre la géométrie par des

constructions que par la simple lecture de théorèmes et de démonstrations.

- D'importantes percées en mathématiques ont été réalisées en tentant de trouver de telles constructions. Le chapitre 16 présente une construction due à Gauss qui a conduit à l'algèbre abstraite moderne, en particulier à la théorie développée par Évariste Galois.
- Il est quelque peu contre-intuitif et donc très intéressant de pouvoir démontrer qu'il est impossible de construire certains objets géométriques.
- De nombreuses personnes perdent malheureusement des années de leur vie à essayer de réaliser des constructions impossibles. Les étudiants devraient certainement être conscients de la futilité de pareils efforts.

1.2 Les compas fixes et les compas éphémères

Certains manuels de géométrie présentent la construction de la médiatrice d'un segment en construisant deux cercles de même rayon centrés aux extrémités du segment de sorte que le rayon soit supérieur ou égal à la moitié de la longueur du segment (fig. 1.3). Cette opération ne peut être réalisée qu'avec un compas fixe, car après avoir tracé le cercle de centre A , la distance entre les branches du compas doit rester fixe pour tracer le cercle de centre B .

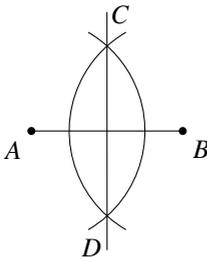


FIG. 1.3 – Construction d'une médiatrice avec un compas fixe.

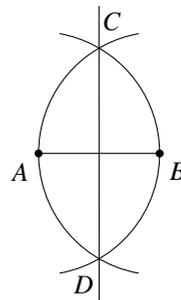


FIG. 1.4 – Construction d'une médiatrice à l'aide d'un compas fixe ou d'un compas éphémère.

La figure 1.4 montre la construction d'une médiatrice avec un compas fixe ou avec un compas éphémère. On construit deux cercles : un cercle de centre A avec un rayon \overline{AB} et un cercle de centre B avec un rayon \overline{BA} . Ceci peut être fait avec un compas éphémère, car évidemment $\overline{AB} = \overline{BA}$, donc le compas n'a pas besoin de « se souvenir » de la longueur de \overline{AB} pour construire un cercle de centre B avec le même rayon. La démonstration que la droite construite dans la figure 1.3 est la médiatrice n'est pas du tout élémentaire, car des concepts relativement avancés comme les triangles isométriques doivent être utilisés. Cependant, la démonstration que la construction d'une médiatrice illustrée dans la figure 1.4 est correcte est simple et repose sur le fait que $\triangle ABC$ est un triangle équilatéral. C'est d'ailleurs la première proposition des *Éléments* d'Euclide. $\overline{AC} = \overline{AB}$ puisque ce sont des rayons d'un même cercle et, de même, $\overline{BC} = \overline{BA}$. On a donc : $\overline{AC} = \overline{AB} = \overline{BA} = \overline{BC}$.

La figure 1.5 montre que pour la construction avec un compas fixe, le triangle sera un triangle isocèle et pas nécessairement un triangle équilatéral (fig. 1.6).

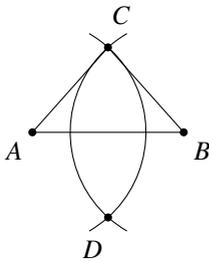


FIG. 1.5 – Construction d'un triangle isocèle avec un compas fixe.

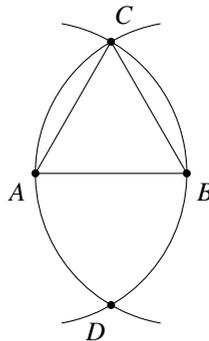


FIG. 1.6 – Construction d'un triangle équilatéral avec un compas éphémère.

1.3 Construction d'Euclide pour copier un segment

La deuxième proposition des *Éléments* d'Euclide décrit comment copier un segment donné \overline{AB} en un segment de même longueur, dont l'une des extrémités est un point donné C . Par conséquent, un compas fixe n'ajoute aucune capacité supplémentaire. Un compas éphémère est suffisant, bien que

les constructions soient plus faciles avec un compas fixe.

Théorème 1.1. *Étant donné un segment \overline{AB} et un point C , on peut construire un segment $\overline{CC'}$ à l'aide d'un compas éphémère de sorte que $\overline{AB} = \overline{CC'}$ (fig. 1.7).*

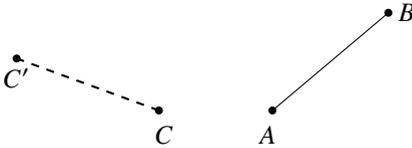


FIG. 1.7 – Copie du segment \overline{AB} .
L'orientation de $\overline{CC'}$ n'est pas importante.

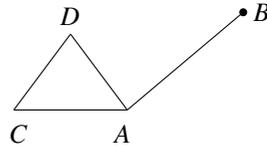


FIG. 1.8 – Copie d'un segment avec un compas éphémère.

Démonstration. Traçons le segment \overline{AC} . Construisons le triangle équilatéral $\triangle ACD$ dont la base est \overline{AC} (fig. 1.8). D'après la première proposition d'Euclide, le triangle peut être construit à l'aide d'un compas éphémère. Construisons la demi-droite qui prolonge le segment de D à A , et construisons la demi-droite qui prolonge le segment de D à C (fig. 1.9). Construisons le cercle de centre A et de rayon \overline{AB} . Soit E l'intersection du cercle et de la demi-droite qui prolonge \overline{DA} (fig. 1.10). Construisons le cercle de centre D et de rayon \overline{DE} . Soit F l'intersection de ce cercle et de la demi-droite qui prolonge \overline{DC} (fig. 1.11).

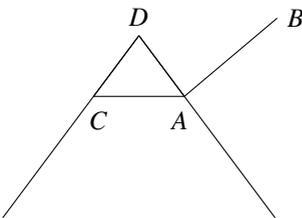


FIG. 1.9 – Construction de demi-droites à partir de D .

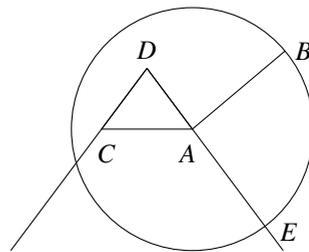


FIG. 1.10 – Construction d'un cercle de rayon \overline{AB} .

$\overline{DC} = \overline{DA}$, car $\triangle ACD$ est équilatéral. $\overline{AE} = \overline{AB}$ sont des rayons du même cercle, tout comme $\overline{DF} = \overline{DE}$. Par conséquent :

$$\overline{CF} = \overline{DF} - \overline{DC} = \overline{DE} - \overline{DC} = \overline{DE} - \overline{DA} = \overline{AE} = \overline{AB}. \quad \square$$

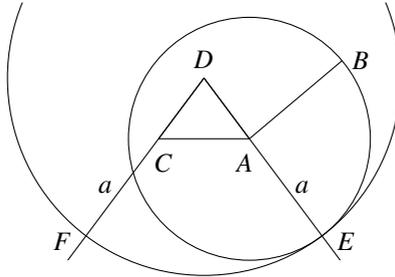


FIG. 1.11 – Construction de $\overline{CF} = \overline{AB}$.

La spécification des directions des demi-droites est essentielle. La démonstration fonctionne ici pour tout segment \overline{AB} et tout point C , quelle que soit sa position par rapport à \overline{AB} . En spécifiant les directions, le « cône » délimité par les deux demi-droites intersectera les cercles même si $\overline{AC} > \overline{AB}$ (fig. 1.12).

1.4 Une construction erronée pour copier un segment

Démonstration. Construisons trois cercles : un cercle de centre A et de rayon \overline{AB} , un cercle de centre A et de rayon \overline{AC} et un cercle de centre C et de rayon $\overline{AC} = \overline{CA}$. Soient E et F les intersections des cercles de centres A et C et de même rayon. Soit D une intersection du cercle de centre C et du cercle de centre A et de rayon \overline{AB} . Si $\overline{AC} > \overline{AB}$, la construction est celle de la figure 1.13.

Construisons un cercle de centre E et de rayon \overline{ED} . Soit G l'intersection de ce cercle avec le cercle de centre A et de rayon \overline{AC} . Il existe deux intersections, on choisit donc celle qui est la plus proche de C (fig. 1.14). $\overline{CD} = \overline{CE}$ sont des rayons du même cercle. De même, $\overline{AE} = \overline{AG}$. Par construction, les rayons \overline{CE} et \overline{AE} sont égaux. Par conséquent,

$$\overline{CD} = \overline{CE} = \overline{AE} = \overline{AG}.$$

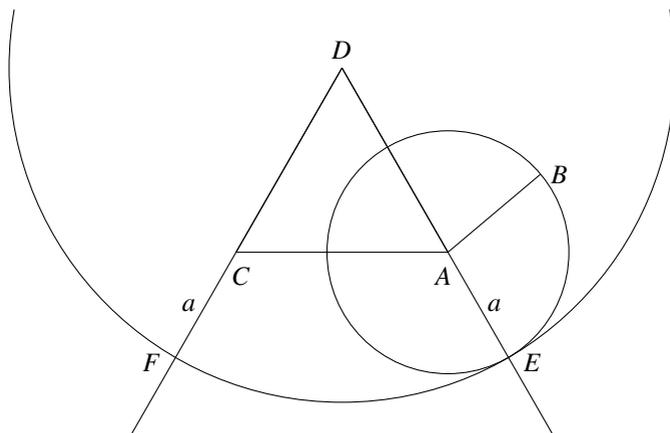


FIG. 1.12 – Construction si $\overline{AC} > \overline{AB}$.

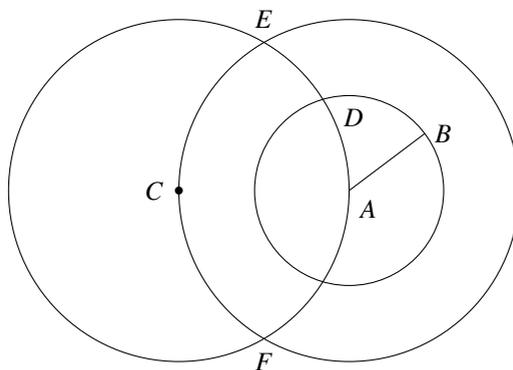


FIG. 1.13 – Construction pour la copie d'un segment (1).

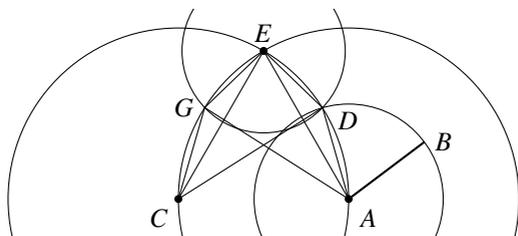


FIG. 1.14 – Construction pour la copie d'un segment (2).

$\overline{EG} = \overline{ED}$ sont des rayons du même cercle, donc $\triangle EAG \cong \triangle DCE$, car les trois côtés sont les mêmes et $\angle GEA = \angle DEC$.

Puisque

$$\angle GEC = \angle GEA - \angle CEA = \angle DEC - \angle CEA = \angle DEA,$$

il s'ensuit que $\triangle ADE \cong \triangle CGE$ d'après l'un des cas d'égalité des triangles (deux côtés et un angle égaux). $\overline{AB} = \overline{AD}$ sont des rayons du petit cercle de centre A, donc $\overline{GC} = \overline{AD} = \overline{AB}$. \square

La démonstration n'est correcte que si $\overline{AC} > \overline{AB}$. La figure 1.15 montre un cas où $\overline{AC} < \overline{AB}$. On peut voir que $\overline{AB} \neq \overline{GC}$.

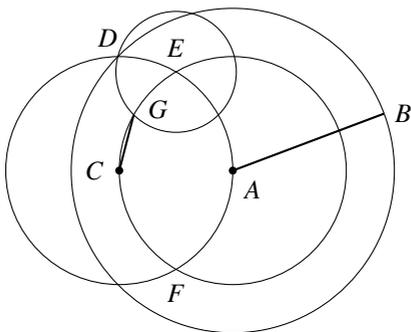


FIG. 1.15 – Un cas où la démonstration ne fonctionne pas.

1.5 Ne vous fiez pas à une figure

Théorème 1.2 (faux bien sûr). *Tous les triangles sont isocèles.*

Démonstration fautive. Pour un triangle arbitraire $\triangle ABC$, soit P l'intersection de la bissectrice de l'angle $\angle BAC$ et de la médiatrice de \overline{BC} . Les intersections des hauteurs issues de P avec les côtés \overline{AB} et \overline{AC} sont désignées respectivement par E et F (fig. 1.16).

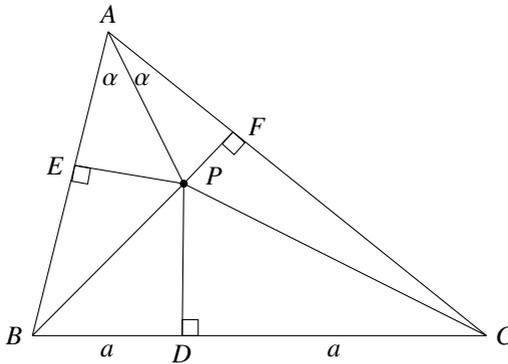


FIG. 1.16 – Une démonstration fautive que tous les triangles sont isocèles.

$\triangle APE \cong \triangle APF$, car ce sont des triangles rectangles avec des angles égaux α et un côté commun \overline{AP} . $\triangle DPB \cong \triangle DPC$, car ce sont des triangles rectangles, \overline{PD} est un côté commun et $\overline{BD} = \overline{CD} = a$. $\triangle EPB \cong \triangle FPC$, car ce sont des triangles rectangles, $\overline{EP} = \overline{FP}$ d'après le premier couple de triangles isométriques et $\overline{PB} = \overline{PC}$ d'après le second couple. En combinant les équations, on obtient que $\triangle ABC$ est isocèle :

$$\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{EB} = \overline{AF} + \overline{FC} = \overline{AC}. \quad \square$$

La logique de la démonstration est correcte, mais la figure sur laquelle se base la démonstration n'est pas correcte, car le point P est à l'extérieur du triangle (fig. 1.17).

Quelle est la surprise ?

En tant qu'élève, je considérais comme acquis qu'un compas possède une articulation qui maintient la distance entre la pointe et le crayon lorsqu'on le soulève du papier. Lorsque le professeur utilisait un compas fabriqué à partir d'une ficelle et d'un morceau de craie, je n'imaginais pas qu'il était différent de mon compas. L'article de Gotfried Toussaint a été une vraie surprise, tout

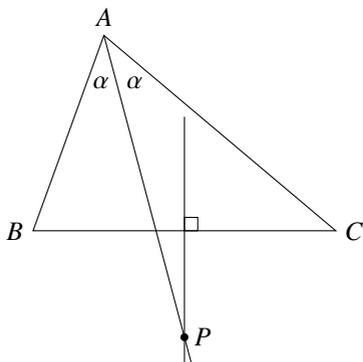


FIG. 1.17 – *Pourquoi la construction ne fonctionne pas.*

comme son explication que les démonstrations post-euclidiennes n'étaient pas correctes parce qu'elles dépendaient de figures qui faisaient des suppositions injustifiées. Je recommande cet article aux lecteurs qui souhaitent approfondir leur compréhension des démonstrations en mathématiques.

Sources

Ce chapitre se base sur [60]. La construction inexacte de l'équivalence des deux compas dans la section 1.4 provient de [46]. Bernard Vitrac a fait paraître une nouvelle traduction française des *Éléments* d'Euclide, accompagnée d'un commentaire détaillé [23].

Chapitre 2

La trisection d'un angle

Il est impossible de diviser un angle en trois parties égales en utilisant uniquement une règle et un compas. La trisection nécessite la construction de racines cubiques, mais une règle et un compas ne peuvent construire que des longueurs qui sont des expressions construites à partir d'entiers, des quatre opérations arithmétiques et de racines carrées. Ceci a été démontré par Pierre Wantzel en 1837. Néanmoins, d'innombrables amateurs continuent à rechercher la trisection d'un angle. Leurs constructions sont des approximations bien qu'ils soient convaincus qu'elles sont correctes. La section 2.1 présente deux de ces constructions, développe des formules pour les angles et montre les erreurs dans les approximations.

Les mathématiciens grecs ont découvert que si d'autres instruments sont autorisés, les angles peuvent être divisés en trois. La section 2.2 explique une construction d'Archimède à l'aide d'un instrument simple appelé *neusis* et la section 2.3 montre comment dupliquer un cube à l'aide de la *neusis*. La section 2.4 présente une construction pour la trisection due à Hippias en utilisant un instrument appelé « quadratrice ». Le reste du chapitre contient une démonstration de l'impossibilité de la trisection d'un angle. La section 2.5 caractérise les nombres constructibles, la section 2.6 relie les nombres constructibles aux racines des polynômes et la section 2.7 utilise cette théorie pour montrer que la trisection d'un angle et la duplication du cube sont impossibles.

2.1 Trisections approximatives

2.1.1 Première trisection approximative

Construction. Soit $\theta = \angle AOB$ un angle arbitraire et sans perte de généralité supposons que A et B soient sur un cercle unitaire dont le centre est O . Soit C l'intersection de la bissectrice de $\angle AOB$ avec le cercle unitaire. Soit D le milieu de \overline{OA} et soit T le milieu de \overline{DC} . On pose $\phi = \angle DOT$ (fig. 2.1).

Théorème 2.1.

$$\tan \phi = \frac{2 \sin(\theta/2)}{1 + 2 \cos(\theta/2)}.$$

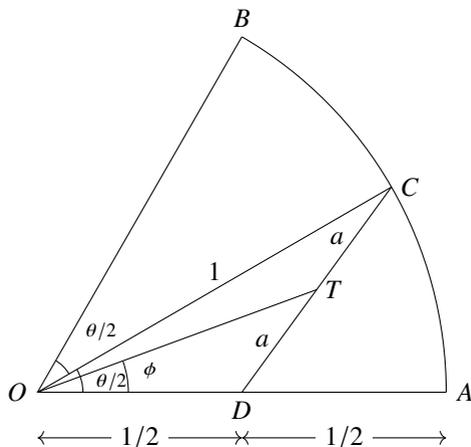


FIG. 2.1 – Première trisection approximative (1).

Démonstration. La figure 2.2 est extraite de la figure 2.1 et contient des annotations supplémentaires.

Soit \overline{CF} la perpendiculaire à \overline{OA} qui coupe \overline{OA} en F . Puisque $\overline{OC} = 1$, $\overline{CF} = \sin(\theta/2)$ et $\overline{OF} = \cos(\theta/2)$. Soit \overline{TE} la perpendiculaire à \overline{OA} qui coupe \overline{OA} en E .

T est le milieu de \overline{DC} , donc $\overline{DT} = \overline{TC} = a$. Mais \overline{FT} est la médiane de l'hypoténuse d'un triangle rectangle, donc $\overline{FT} = a$ et donc $\triangle DTF$ est isocèle. Il s'ensuit que \overline{TE} est à la fois la médiane et la hauteur associée au côté \overline{DF} . D'après la figure, il est facile de voir que

$$\overline{OE} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \right).$$

Calculons la longueur $2a = \overline{CD}$ en utilisant le théorème de Pythagore dans $\triangle DCF$:

$$(2a)^2 = \left(\cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

La longueur $h = \overline{TE}$ peut être calculée à partir du théorème de Pythagore

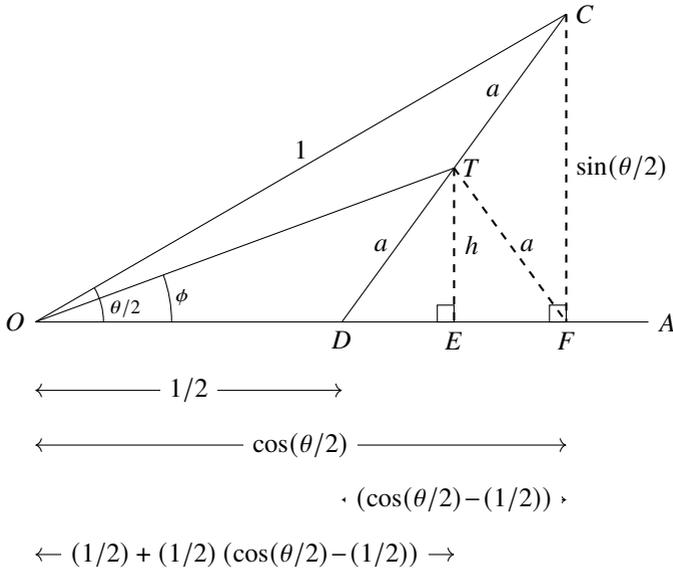


FIG. 2.2 – Première trisection approximative (2).

dans $\triangle DTE$:

$$a^2 = h^2 + \left[\frac{1}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \right) \right]^2 ,$$

$$h^2 = \frac{1}{4} \left(\cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta}{2} - \left[\frac{1}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \right) \right]^2 = \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta}{2} ,$$

$$h = \frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} ,$$

$$\tan \phi = \frac{h}{OE} = \frac{\frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \right)} = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2}}{1 + 2 \cos \frac{\theta}{2}} .$$

□

C'est une trisection approximative de $\phi = \theta/3$. Pour $\theta = 60^\circ$:

$$\arctan \left(\frac{2 \sin 30^\circ}{1 + 2 \cos 30^\circ} \right) = \arctan 0,366 \approx 20,1^\circ \approx 20^\circ .$$

Le tableau 2.1 montre les erreurs pour une série d'angles aigus. L'erreur est relativement faible pour les petits angles et s'élève à 1% pour 85° .

TAB. 2.1 – Erreurs dans la première trisection approximative.

$\theta(^{\circ})$	$\theta/3(^{\circ})$	$\arctan \phi(^{\circ})$	erreur($^{\circ}$)	erreur(%)
5	1,667	1,667	0,000	0,004
10	3,333	3,334	0,000	0,014
15	5,000	5,002	0,002	0,032
20	6,667	6,670	0,004	0,057
25	8,333	8,341	0,007	0,088
30	10,000	10,013	0,013	0,128
35	11,667	11,687	0,020	0,174
40	13,333	13,364	0,030	0,228
45	15,000	15,043	0,043	0,289
50	16,667	16,726	0,060	0,358
55	18,333	18,413	0,080	0,435
60	20,000	20,104	0,104	0,520
65	21,667	21,799	0,133	0,612
70	23,333	23,500	0,166	0,713
75	25,000	25,206	0,206	0,823
80	26,667	26,918	0,251	0,941
85	28,333	28,636	0,303	1,068

2.1.2 Deuxième trisection approximative

Construction. Soit $\theta = \angle AOB$ un angle arbitraire et supposons sans perte de généralité que A et B soient sur un cercle unitaire dont le centre est O . Construisons un cercle de rayon $1/3$ avec pour centre O et notons D son intersection avec \overline{OA} . Soit C l'intersection de la bissectrice de $\angle AOB$ avec le cercle de rayon $1/3$. Traçons la corde \overline{CD} et les cordes $\overline{AE} = \overline{ET} = \overline{CD}$. Puisque des cordes égales sous-tendent des angles centraux égaux, $\angle TOE = \angle EOA = \phi$ (fig. 2.3).

Théorème 2.2.

$$\cos \phi = 1 - \frac{1}{9}(1 - \cos(\theta/2)) = 1 - \frac{2}{9} \sin^2(\theta/4).$$

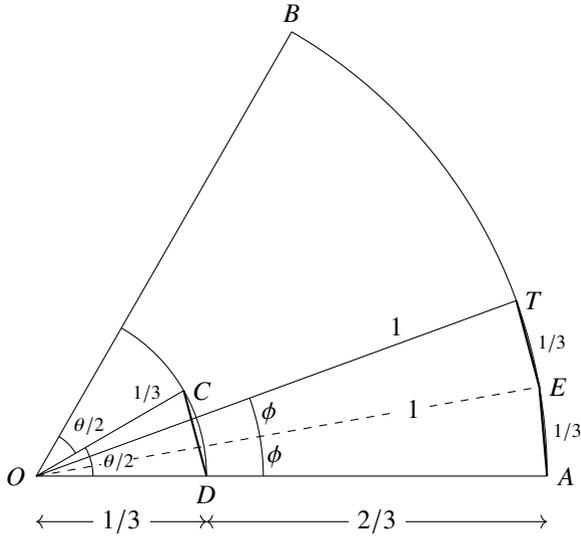


FIG. 2.3 – Deuxième trisection approximative.

Démonstration. D’après la loi des cosinus¹ dans $\triangle DOC$,

$$\overline{CD} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\cos(\theta/2) = \frac{2}{9}(1 - \cos(\theta/2)).$$

D’après la loi des cosinus dans $\triangle EOA$:

$$\overline{AE} = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos \phi = 2(1 - \cos \phi).$$

En égalant les deux expressions pour $\overline{CD} = \overline{AE}$ et en simplifiant, nous obtenons

$$\cos \phi = 1 - \frac{1}{9}(1 - \cos(\theta/2)).$$

Puisque $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$, et donc $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$, nous avons la formule alternative

$$\cos \phi = 1 - \frac{2}{9} \sin^2(\theta/4). \quad \square$$

1. Théorème A.8, aussi appelé théorème d’Al-Kashi

TAB. 2.2 – Erreurs dans la deuxième trisection approximative.

$\theta(^{\circ})$	$\theta/3(^{\circ})$	$\arccos 2\phi(^{\circ})$	erreur($^{\circ}$)	erreur(%)
5	1,667	1,667	0,000	0,007
10	3,333	3,332	0,001	0,028
15	5,000	4,997	0,003	0,063
20	6,667	6,659	0,008	0,113
25	8,333	8,319	0,015	0,176
30	10,000	9,975	0,025	0,254
35	11,667	11,626	0,040	0,346
40	13,333	13,273	0,060	0,451
45	15,000	14,914	0,086	0,571
50	16,667	16,549	0,118	0,705
55	18,333	18,177	0,156	0,853
60	20,000	19,797	0,203	1,015
65	21,667	21,408	0,258	1,192
70	23,333	23,011	0,322	1,382
75	25,000	24,603	0,397	1,586
80	26,667	26,185	0,481	1,805
85	28,333	27,756	0,577	2,038

C'est une trisection approximative de $2\phi = \theta/3$. Pour $\theta = 60^{\circ}$,

$$2 \arccos \left(1 - \frac{1}{9}(1 - \cos 30^{\circ}) \right) \approx 19,8^{\circ} \approx 20^{\circ} .$$

Le tableau 2.2 montre les erreurs pour une série d'angles aigus. Cette construction est beaucoup moins précise que celle de la section 2.1.1.

2.2 Trisection à l'aide d'une *neusis*

On considère une règle non graduée. Elle ne peut être utilisée que pour construire une droite entre deux points donnés. Archimède a montré qu'une *neusis*, c'est-à-dire une règle avec deux marques situées à une distance fixe l'une de l'autre, peut être utilisée pour diviser un angle en trois (fig. 2.4). Nous supposons que la distance entre les marques est 1.



FIG. 2.4 – Une neusis.

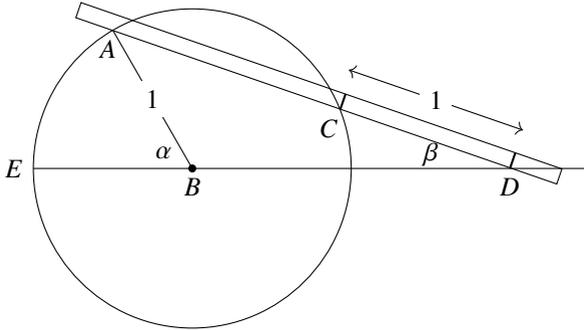


FIG. 2.5 – La construction par neusis pour la trisection d'un angle (1).

Construction. Soit $\alpha = \angle ABE$ un angle arbitraire dans un cercle unitaire de centre B , où le rayon du cercle est égal à la distance entre les marques sur la *neusis*. Prolongeons le rayon \overline{EB} au-delà du cercle. Plaçons un bord de la *neusis* sur A et déplaçons-la jusqu'à ce qu'elle coupe le prolongement de \overline{EB} en D et le cercle en C , en utilisant les marques de sorte que la longueur du segment \overline{CD} soit égale à 1. Traçons la droite \overline{AD} . On note $\angle CDB = \beta$ (fig. 2.5).

Théorème 2.3. $\beta = \alpha/3$.

Démonstration. Construisons \overline{BC} et désignons les angles et les segments comme indiqué sur la figure 2.6. $\triangle ABC$ et $\triangle BCD$ sont des triangles isocèles : $\overline{AB} = \overline{BC}$ sont des rayons du même cercle et $\overline{BC} = \overline{CD}$ par construction en utilisant la *neusis*. Puisque la somme des angles d'un triangle est égale à 180° et que la somme des angles supplémentaires est également égale à 180° , on a

$$\epsilon = 180^\circ - 2\beta,$$

$$\gamma = 180^\circ - \epsilon = 2\beta,$$

$$\delta = 180^\circ - 2\gamma = 180^\circ - 4\beta,$$

$$\alpha = 180^\circ - \delta - \beta = 3\beta.$$

□

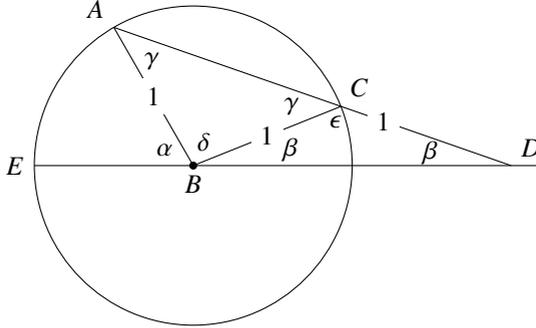


FIG. 2.6 – La construction par neusis pour la trisection d'un angle (2).

2.3 La duplication du cube avec une neusis

Étant donné un cube C , construisons un autre cube ayant deux fois son volume. Si le volume de C est de V , ses côtés ont une longueur égale à $\sqrt[3]{V}$. Les côtés d'un cube dont le volume est double ont une longueur $\sqrt[3]{2V} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{V}$. Donc si nous pouvons construire $\sqrt[3]{2}$, nous pouvons dupliquer le cube.

Construction. Construisons le triangle équilatéral $\triangle ABC$ et prolongeons \overline{CA} avec un autre segment de longueur unité jusqu'à D . Construisons des demi-droites qui prolongent \overline{AB} et \overline{DB} . Plaçons la *neusis* sur le point C et déplaçons-la jusqu'à ce qu'une marque de la *neusis* soit placée sur la demi-droite \overline{AB} en P et que l'autre marque soit placée sur la demi-droite \overline{DB} en Q . On note $\overline{CQ} = x$ et $\overline{BP} = y$ (fig. 2.7).

Théorème 2.4. $x = \sqrt[3]{2}$.

Démonstration. Puisque $\triangle ABC$ est équilatéral, $\cos \angle CAP = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, et par la loi des cosinus dans $\triangle APC$,

$$\overline{CP}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AP}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AP} \cos 60^\circ, \quad (2.1a)$$

$$(x+1)^2 = 1^2 + (y+1)^2 - 2 \cdot 1 \cdot (y+1) \cdot \frac{1}{2}, \quad (2.1b)$$

$$x^2 + 2x = y^2 + y. \quad (2.1c)$$

D'après le théorème de Ménélaüs (théorème A.20),

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BP}} \cdot \frac{\overline{PQ}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{DA}} = 1.$$

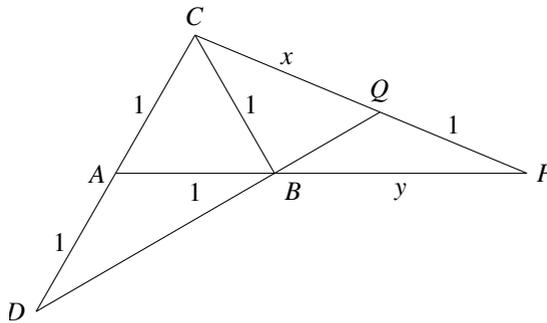


FIG. 2.7 – Duplication du cube avec une neusis.

Par conséquent,

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{2}{1} = 1, \tag{2.2a}$$

$$xy = 2. \tag{2.2b}$$

En substituant l'équation 2.2b dans l'équation 2.1c on obtient

$$x^2 + 2x = \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x},$$

$$x^4 + 2x^3 = 4 + 2x,$$

$$x^3(x + 2) = 2(x + 2),$$

$$x = \sqrt[3]{2}. \quad \square$$

2.4 Trisection à l'aide d'une quadratrice

Soit \overline{ABCD} un carré. Soit l_1 un segment placé initialement en \overline{DC} et soit l_2 un segment placé initialement en \overline{AD} . Déplaçons l_1 à une vitesse constante jusqu'à ce qu'il atteigne \overline{AB} et faisons tourner le segment l_2 à une vitesse angulaire constante dans le sens des aiguilles d'une montre autour de A jusqu'à ce qu'il atteigne également \overline{AB} . Supposons qu'ils atteignent ensemble \overline{AB} . Par exemple, si l_2 tourne à 1° /seconde et que le côté du carré est de 9 centimètres, l_1 doit se déplacer à 0,1 cm/seconde. La trace de leur point d'intersection P est appelée la « quadratrice » (fig. 2.8). Sa définition est attribuée au mathématicien Hippias.

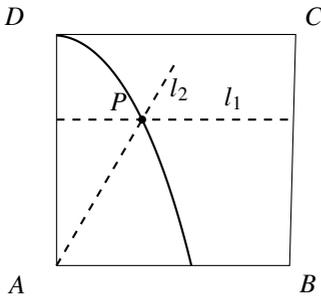


FIG. 2.8 – Une quadratrice.

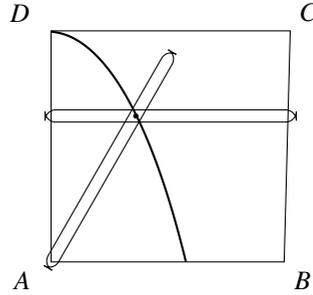


FIG. 2.9 – Le mécanisme produisant la quadratrice.

On peut construire une quadratrice à l'aide d'un mécanisme comme indiqué sur la figure 2.9. Il se compose de deux règles (non graduées) qui se déplacent comme décrit ci-dessus. Une articulation les contraint à se déplacer ensemble et trace la courbe.

On peut utiliser une quadratrice pour diviser un angle en trois.

Construction. Soit $\angle CDP_1 = \alpha$ un angle arbitraire, où P_1 est l'intersection de la droite définissant l'angle α par rapport à \overline{DC} avec la quadratrice (fig. 2.10). Construisons une droite passant par P_1 et parallèle à \overline{DC} . Notons E son intersection avec \overline{AD} . Notons t le segment \overline{DE} . Divisons-le en trois (sect. 2.5) pour obtenir le point F qui est à une distance $t/3$ de \overline{DC} . Soit P_2 l'intersection d'une droite qui passe par F et parallèle à \overline{DC} avec la quadratrice. Soit θ l'angle entre \overline{DC} et $\overline{DP_2}$ (sect. 2.10).

Théorème 2.5. $\theta = \alpha/3$.

Démonstration. E a pour ordonnée $1 - t$, donc F a par construction pour ordonnée $1 - (t/3)$. Puisque la vitesse constante de la droite horizontale est proportionnelle à la vitesse angulaire constante de la droite en rotation, $\theta/\alpha = (t/3)/t$ et $\theta = \alpha/3$. \square

2.5 Nombres constructibles

Soit l un segment de longueur 1.

Définition 2.1. Un nombre a est *constructible* si un segment de longueur a peut être construit à la règle et au compas à partir de l .

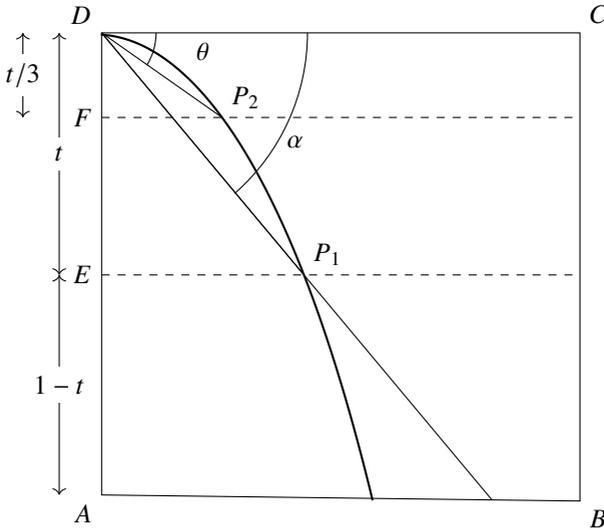


FIG. 2.10 – Trisection d'un angle à l'aide d'une quadratrice.

Étant donné le segment $l = \overline{AB}$, construisons une droite contenant \overline{AB} et utilisons le compas pour trouver un point C sur la droite qui est à une distance 1 de B . Alors \overline{AC} a une longueur de 2 et le nombre 2 est donc constructible. On peut construire un segment \overline{BD} de longueur 1 perpendiculaire à \overline{AB} en B . L'hypoténuse du triangle $\triangle ABD$ a une longueur égale à $\sqrt{2}$. Le nombre $\sqrt{2}$ est donc constructible.

Théorème 2.6. *Un nombre est constructible si et seulement s'il est la valeur d'une expression construite à partir des entiers, des quatre opérations arithmétiques $\{+, -, \times, /$ et de l'opération racine carrée $\sqrt{}$.*

Démonstration. Nous montrons d'abord que les valeurs de ces expressions sont constructibles.

Addition et soustraction. Étant donné les segments $\overline{PQ} = a$ et $\overline{RS} = b$, construisons un cercle de centre Q et de rayon b (fig. 2.11). Prolongeons \overline{PQ} jusqu'à intersecter le cercle en U . Alors \overline{PTQU} est un segment avec $\overline{PT} = a - b$ et $\overline{PU} = a + b$.

Multiplication. Étant donné les triangles semblables dans la figure 2.12, $(1/b) = (a/\overline{OA})$, donc $\overline{OA} = ab$.

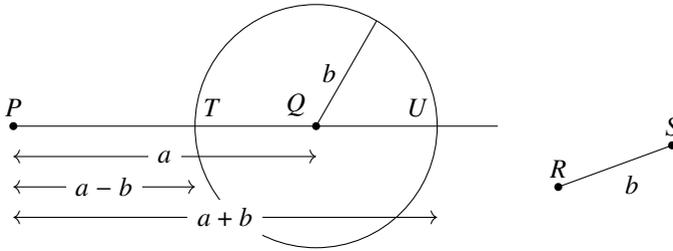


FIG. 2.11 – Construction de l'addition et de la soustraction.

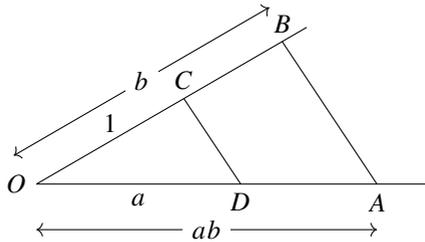


FIG. 2.12 – Construction de la multiplication.

Division. Étant donné les triangles semblables dans la figure 2.13, $(1/b) = (\overline{OD}/a)$, donc $\overline{OD} = (a/b)$.

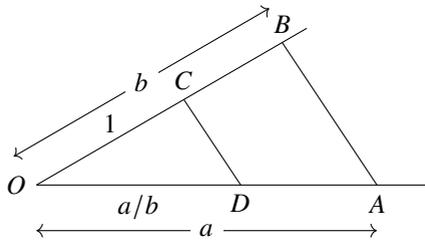


FIG. 2.13 – Construction de la division.

Racines carrées. À partir d'un segment $\overline{BC} = a$, construisons $\overline{AB} = 1 + a$ et un demi-cercle dont le diamètre est \overline{AB} . Construisons une perpendiculaire en C et considérons l'intersection D de la perpendiculaire et du cercle (fig. 2.14). $\angle ADB$ est un angle droit, car il est sous-tendu par un diamètre. Étant donné

les triangles semblables, $(h/1) = (a/h)$. Donc $h^2 = a$ et $h = \sqrt{a}$.

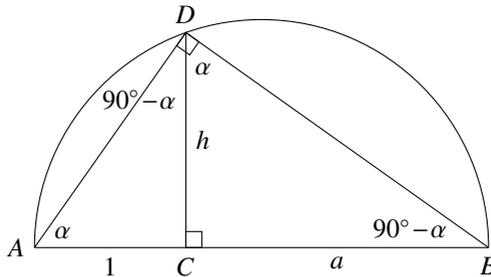


FIG. 2.14 – Construction d'une racine carrée.

Pour démontrer la réciproque du théorème, nous devons déterminer quelles expressions peuvent être construites à la règle et au compas. Il existe trois constructions :²

1. Deux droites se croisent en un point (fig. 2.15). Les coordonnées de l'intersection peuvent être déduites des équations des deux droites $y = x$ et $y = 4x - 2$. Le point d'intersection est $P = (2/3, 2/3)$.
2. Une droite coupe un cercle en zéro, un ou deux points (fig. 2.16). Les coordonnées des intersections se déduisent des équations de la droite $y = x$ et du cercle $x^2 + y^2 = 4$. Les points d'intersection sont $P = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ et $Q = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.
3. Deux cercles se croisent en zéro, un ou deux points (fig. 2.17). Les coordonnées des intersections se déduisent des équations des deux cercles $(x - 1)^2 + y^2 = 4$ et $(x + 1)^2 + y^2 = 4$. Les points d'intersection sont $P = (0, \sqrt{2})$ et $Q = (0, -\sqrt{2})$. □

2. Pour des raisons de clarté, elles sont illustrées pour des valeurs spécifiques plutôt que pour les équations les plus générales.

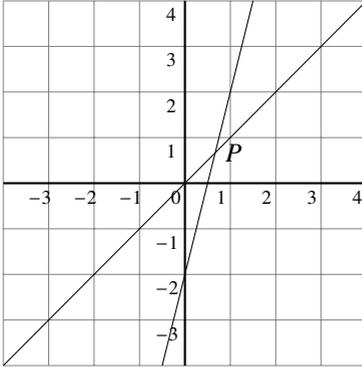


FIG. 2.15 – Le point d'intersection de deux droites.

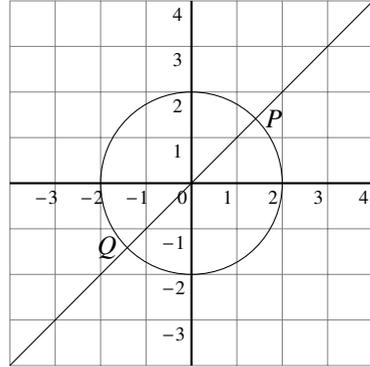


FIG. 2.16 – Les points d'intersection d'une droite et d'un cercle.

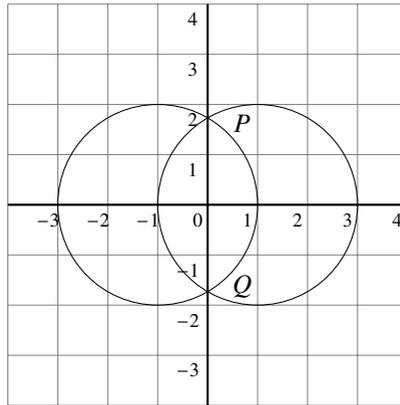


FIG. 2.17 – Les points d'intersection de deux cercles.

2.6 Nombres constructibles comme racines de polynômes

Pour montrer qu'un nombre n'est pas constructible, nous devons démontrer qu'il ne peut pas être exprimé en utilisant uniquement des nombres entiers et les opérations $\{+, -, \times, /, \sqrt{\}$.

Nous montrerons que les nombres constructibles sont les racines d'une certaine classe de polynômes, puis nous démontrerons que la trisection d'un

angle et la duplication d'un cube nécessitent la construction de racines de polynômes qui ne font pas partie de cette classe. Aujourd'hui, ces résultats sont démontrés en utilisant la théorie des corps de l'algèbre abstraite, mais ici nous donnons une démonstration qui utilise les mathématiques élémentaires. La démonstration est basée sur la définition suivante.

Définition 2.2. La *profondeur* d'une expression construite à partir des entiers et des opérations $\{+, -, \times, /, \sqrt{\}$ est le niveau maximal d'imbrication des racines carrées.

Exemple 2.1. Considérons l'expression suivante :

$$\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}.$$

La profondeur est de 3, car nous avons à droite de l'expression $\sqrt{17}$ qui est imbriqué dans $\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}$, qui à son tour est imbriqué dans $\sqrt{17 + \dots - \dots - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}$.

Théorème 2.7. Une expression de profondeur n peut être exprimée sous la forme $a + b\sqrt{c}$ où a, b, c sont des expressions de profondeur au plus $n - 1$.

Démonstration. Des calculs simples montrent que les expressions $(a_1 + b_1\sqrt{c}) op (a_2 + b_2\sqrt{c})$ pour les opérateurs $op = \{+, -, \times\}$ donnent des expressions $a + b\sqrt{c}$ de profondeur $n - 1$. Pour la division, le calcul est un peu plus compliqué :

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + b_1\sqrt{c}}{a_2 + b_2\sqrt{c}} &= \frac{(a_1 + b_1\sqrt{c})(a_2 - b_2\sqrt{c})}{(a_2 + b_2\sqrt{c})(a_2 - b_2\sqrt{c})} \\ &= \frac{a_1a_2 - b_1b_2c}{a_2^2 - b_2^2c} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 - b_2^2c}\sqrt{c}, \end{aligned}$$

qui est de la forme $a + b\sqrt{c}$, où a, b et c sont de profondeur $n - 1$. Enfin, la racine carrée d'une expression de profondeur $n - 1$ est une expression de profondeur n . \square

Théorème 2.8. Soit $p(x)$ un polynôme unitaire de degré 3 à coefficients rationnels :

$$p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Soit $r = a + b\sqrt{c}$ une racine de $p(x)$ de profondeur minimale n , où a, b, c sont de profondeur au plus $n - 1$. Alors $r' = a - b\sqrt{c}$ est une racine de $p(x)$ et $r \neq r'$.

Démonstration. Calculons $p(r)$ qui est égal à 0 puisque r est une racine :

$$\begin{aligned} & (a + b\sqrt{c})^3 + a_2(a + b\sqrt{c})^2 + a_1(a + b\sqrt{c}) + a_0 \\ &= (a^3 + 3a^2b\sqrt{c} + 3ab^2c + b^3c\sqrt{c}) \\ &\quad + a_2(a^2 + 2ab\sqrt{c} + b^2c) + a_1(a + b\sqrt{c}) + a_0 \\ &= (a^3 + 3ab^2c + a_2a^2 + a_2b^2c + a_1a + a_0) \\ &\quad + (3a^2b + b^3c + 2a_2ab + a_1b)\sqrt{c} \\ &= d + e\sqrt{c} = 0, \end{aligned}$$

où d et e sont des expressions de profondeur $n - 1$ formées à partir des coefficients rationnels et a, b, c . Alors $\sqrt{c} = -d/e$, donc $a + b\sqrt{c}$ peut être exprimé comme une expression de profondeur $n - 1$, contredisant l'hypothèse que $a + b\sqrt{c}$ est de profondeur minimale n . Puisque $\sqrt{c} \neq 0$ est de profondeur n , pour que $d + e\sqrt{c}$ soit nul, il faut que $d = e = 0$.

Considérons maintenant $r' = a - b\sqrt{c}$. En examinant le calcul ci-dessus, nous voyons que $p(r') = d - e\sqrt{c} = 0 + 0 \cdot \sqrt{c} = 0$. Donc r' est aussi une racine de p .

Si $r = r'$ alors $0 = r - r' = 2b\sqrt{c}$, ce qui n'est vrai que si $b = 0$. Donc r et r' seraient de profondeur $n - 1$, ce qui contredit à nouveau l'hypothèse. \square

Théorème 2.9. *Si un polynôme unitaire de degré 3 à coefficients rationnels*

$$p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

n'a pas de racines rationnelles alors aucune de ses racines n'est constructible.

Démonstration. D'après le théorème fondamental de l'algèbre (théorème 16.1), $p(x)$ a trois racines r_1, r_2 et r_3 . Soit $r_1 = a + b\sqrt{c}$ une racine de profondeur minimale n . D'après l'hypothèse qu'il n'existe pas de racines rationnelles, on a $n \geq 1$, donc $b \neq 0$ et $c \neq 0$. D'après le théorème 2.8,

$r_2 = a - b\sqrt{c}$ est aussi une racine. Effectuons la multiplication suivante :

$$\begin{aligned}(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) &= x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 \\ &\quad + (r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)x + r_1r_2r_3, \\ a_2 &= -(r_1 + r_2 + r_3), \\ r_3 &= -(a_2 + r_1 + r_2).\end{aligned}$$

Puisque a_2 est rationnel,

$$r_3 = -a_2 - (r_1 + r_2) = -a_2 - 2a$$

l'est aussi, ce qui contredit l'hypothèse. □

2.7 Impossibilité des constructions classiques

Théorème 2.10. $\sqrt[3]{2}$ est irrationnel.

Démonstration. Supposons que $\sqrt[3]{2}$ soit rationnel et égal à p/q où p et q sont des entiers sans facteur commun autre que ± 1 . Alors

$$\begin{aligned}(p/q)^3 &= (\sqrt[3]{2})^3, \\ p^3 &= 2q^3.\end{aligned}$$

Donc p doit être divisible par 2, disons $p = 2r$. Alors

$$\begin{aligned}8r^3 &= 2q^3, \\ q^3 &= 4r^3.\end{aligned}$$

Donc q est divisible par 2, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle p et q n'ont pas de facteur commun. □

Théorème 2.11. $x^3 - 2$ n'ayant pas de racines rationnelles, il est impossible de dupliquer un cube à la règle et au compas.

Démonstration. L'une de ses racines est $\sqrt[3]{2}$ qui, selon le théorème 2.10, est irrationnelle. Les autres racines sont celles de l'équation du second degré $x^2 + \sqrt[3]{2}x + (\sqrt[3]{2})^2 = 0$ obtenue en divisant $x^3 - 2$ par $x - \sqrt[3]{2}$. Il est facile de vérifier que ses racines ne sont pas rationnelles (en fait, pas même réelles). □

Théorème 2.12. *Il est impossible de diviser un angle arbitraire en trois à la règle et au compas.*

Démonstration. Il suffit de montrer l'impossibilité pour un seul angle. Essayons de diviser 60° en trois pour obtenir 20° . D'après le théorème A.6,

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha, \\ \cos 60^\circ &= 4 \cos^3 20^\circ - 3 \cos 20^\circ.\end{aligned}$$

Soient $x = \cos 20^\circ$ et $y = 2x$. Puisque $\cos 60^\circ = 1/2$, on a

$$\begin{aligned}4x^3 - 3x - \frac{1}{2} &= 0, \\ 8x^3 - 6x - 1 &= 0, \\ y^3 - 3y - 1 &= 0.\end{aligned}$$

Pour démontrer que le polynôme $y^3 - 3y - 1$ n'a pas de racines rationnelles, supposons que $y = a/b$ soit une racine rationnelle avec a et b n'ayant aucun facteur commun autre que ± 1 . Alors

$$(a/b)^3 - 3(a/b) - 1 = 0, \quad (2.3a)$$

$$a^3 - 3ab^2 = b^3, \quad (2.3b)$$

$$a(a^2 - 3b^2) = b^3, \quad (2.3c)$$

$$a^3 = b(b^2 + 3ab). \quad (2.3d)$$

D'après l'équation 2.3c, b doit être divisible par a , et d'après l'équation 2.3d, a doit être divisible par b , ce qui n'est possible que si $a = b = \pm 1$ et $a/b = \pm 1$. Le calcul montre que $y = a/b = 1$ et $y = a/b = -1$ ne sont pas des racines du polynôme. \square

Une autre façon de démontrer l'impossibilité des constructions est d'utiliser le théorème suivant que nous présentons sans démonstration.

Théorème 2.13. *Si un polynôme unitaire $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ avec des coefficients entiers a des racines rationnelles alors il a des racines entières.*

Pour démontrer l'impossibilité de dupliquer un cube, il suffit de démontrer que

$$x^3 - 2 = (x - r_2)(x - r_1)(x - r_0)$$

n'a pas de racines entières. Puisque $r_0 r_1 r_2 = -2$, toutes les racines doivent diviser 2, donc les seules racines entières possibles sont $\pm 1, \pm 2$. Un calcul rapide montre qu'aucune d'entre elles n'est une racine.

Pour démontrer l'impossibilité de diviser un angle en trois, il suffit de démontrer que $y^3 - 3y - 1$ n'a pas de racines entières. Une racine entière doit diviser -1 , mais ni 1 ni -1 ne sont des racines.

Quelle est la surprise ?

Underwood Dudley a fait une étude approfondie de ce qu'il appelle les « grincheux » qui perdent des années de leur vie à essayer de diviser les angles en trois à la règle et au compas. Non seulement ils s'illusionnent en pensant que c'est possible, mais pire encore, ils pensent qu'une solution serait importante. Bien sûr, une solution n'aurait aucune utilité pratique, puisque des outils tels que la *neusis* et la quadratrice peuvent résoudre le problème exactement. Le nombre de ces constructions est surprenant, d'autant plus que beaucoup d'entre elles sont astucieuses et permettent d'obtenir de bonnes approximations. Le calcul des formules associées à ces constructions est un excellent exercice de trigonométrie.

Il est également surprenant que les preuves de l'impossibilité de ces constructions géométriques soient purement algébriques et utilisent les propriétés des racines des polynômes.

Sources

Wikipédia [73, 65, 69] est une bonne source pour les constructions de ce chapitre. Les deux trisections approximatives proviennent de [21, p. 67–68, 95–96]. Le deuxième exemple est attribué au célèbre philosophe Thomas Hobbes. Tant [40, p. 48–49] que [21, p. 6–7] traitent de la trisection à l'aide d'une quadratrice. La duplication du cube à l'aide d'une *neusis* est reprise de [20].

Un traitement rigoureux de la constructibilité peut être trouvé dans les manuels d'algèbre abstraite tels que [24], qui contient une démonstration générale de la réciproque du théorème 2.6 dans la section 32. Le théorème 2.13 est le théorème 23.11 de [24]. Une présentation relativement accessible de la démonstration de Wantzel se trouve dans [58]. Notre présentation de la constructibilité est basée sur les présentations de [15, chap. III] et [36].

Chapitre 3

La quadrature du cercle

La quadrature du cercle, c'est-à-dire la construction d'un carré de même aire qu'un cercle donné, est l'un des trois problèmes de construction que les Grecs se posaient sans pouvoir les résoudre. Contrairement à la trisection de l'angle et à la duplication du cube, où l'impossibilité découle des propriétés des racines des polynômes, l'impossibilité de la quadrature du cercle découle de la transcendance de π : il n'est la racine d'aucun polynôme à coefficients rationnels. Il s'agit d'un théorème difficile qui a été démontré en 1882 par Carl von Lindemann.

Des approximations de $\pi \approx 3,14159265359$ sont connues depuis l'Antiquité. Voici quelques approximations simples, mais raisonnablement précises :

$$\frac{22}{7} \approx 3,142857, \quad \frac{333}{106} \approx 3,141509, \quad \frac{355}{113} \approx 3,141593.$$

Nous présentons trois constructions à la règle et au compas d'approximations de π . L'une est due à Adam Kochański (sect. 3.1) et deux sont dues à Ramanujan (sect. 3.2 et 3.3). La section 3.4 montre comment résoudre la quadrature du cercle en utilisant la quadratrice.

Le tableau suivant présente les formules pour les longueurs construites, leurs valeurs approximatives, la différence entre ces valeurs et la valeur de π et l'erreur en mètres qui en résulte si l'on utilise l'approximation pour calculer la circonférence de la terre étant donné que son rayon est de 6 378 km.

construction	formule	valeur	différence	erreur (m)
π	—	3,14159265359	—	—
Kochański	$\sqrt{\frac{40}{3}} - 2\sqrt{3}$	3,14153333871	$5,93 \times 10^{-5}$	757
Ramanujan 1	$\frac{355}{113}$	3,14159292035	$2,67 \times 10^{-7}$	3,4
Ramanujan 2	$\left(9^2 + \frac{19^2}{22}\right)^{1/4}$	3,14159265258	$1,01 \times 10^{-9}$	0,013

3.1 La construction de Kochański

Construction (fig. 3.1).

1. Traçons un cercle unitaire de centre O avec \overline{AB} comme diamètre et traçons la tangente au cercle en A .
2. Traçons un cercle unitaire de centre A . Soit C son intersection avec le premier cercle. Traçons un cercle unitaire de centre C . Soit D son intersection avec le deuxième cercle.
3. Traçons \overline{OD} . Soit E son intersection avec la tangente.
4. À partir de E , construisons F , G et H , chacun à une distance de 1 du point précédent.
5. Traçons \overline{BH} .

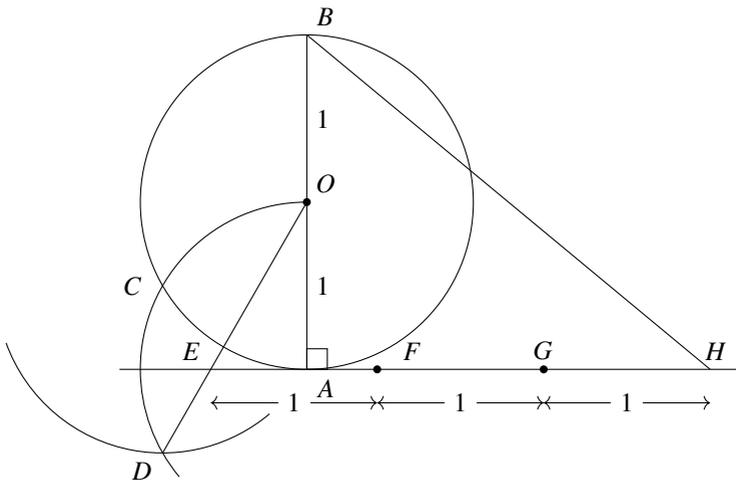


FIG. 3.1 – L'approximation de π d'après Kochański.

Théorème 3.1. $\overline{BH} = \sqrt{\frac{40}{3}} - 2\sqrt{3} \approx \pi$.

Démonstration. La figure 3.2 est un agrandissement de la figure 3.1, où des lignes pointillées ont été ajoutées. Comme tous les cercles sont des cercles unitaires, les longueurs des pointillés sont de 1. Il s'ensuit que $\overline{A OCD}$ est

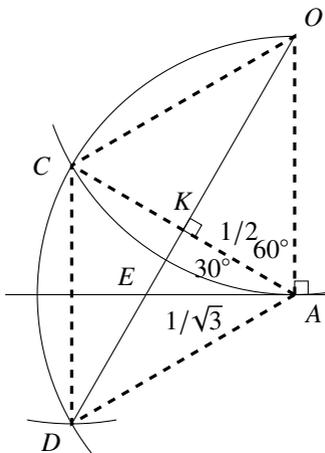


FIG. 3.2 – Détail de la construction de Kochański.

un losange. Donc ses diagonales sont perpendiculaires et se coupent au point marqué K , avec $\overline{AK} = 1/2$.

La diagonale \overline{AC} forme deux triangles équilatéraux $\triangle OAC$ et $\triangle DAC$, donc $\angle OAC = 60^\circ$. Puisque la tangente forme un angle droit avec le rayon \overline{OA} , $\angle KAE = 30^\circ$. Ainsi,

$$\frac{1/2}{\overline{EA}} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\overline{EA} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\overline{AH} = 3 - \overline{EA} = \left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}.$$

$\triangle ABH$ est un triangle rectangle et $\overline{AH} = 3 - \overline{EA}$. Donc d'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} \overline{BH}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AH}^2 \\ &= 4 + \frac{27 - 6\sqrt{3} + 1}{3} = \frac{40}{3} - 2\sqrt{3}, \end{aligned}$$

$$\overline{BH} = \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}} \approx 3,141533387 \approx \pi. \quad \square$$

3.2 La première construction de Ramanujan

Construction (fig. 3.3).

1. Construisons un cercle unitaire de centre O de diamètre \overline{PR} .
2. Construisons le point H milieu de \overline{PO} et le point T au tiers du segment \overline{RO} (théorème 2.6).
3. Construisons la perpendiculaire en T . Elle coupe le cercle en Q .
4. Construisons les cordes $\overline{RS} = \overline{QT}$ et \overline{PS} .
5. Construisons une droite parallèle à \overline{RS} à partir de T . Elle coupe \overline{PS} en N .
6. Construisons une droite parallèle à \overline{RS} à partir de O . Elle coupe \overline{PS} en M .
7. Construisons la corde $\overline{PK} = \overline{PM}$.
8. Construisons la tangente en P de longueur $\overline{PL} = \overline{MN}$.
9. Relions les points K, L et R .
10. Trouvons le point C tel que \overline{RC} soit égal à \overline{RH} .
11. Construisons \overline{CD} parallèle à \overline{KL} , qui coupe \overline{LR} en D .

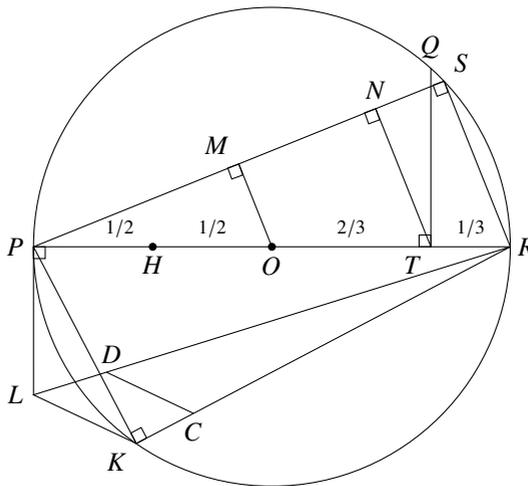


FIG. 3.3 – La première construction de Ramanujan.

Théorème 3.2. $\overline{RD}^2 = \frac{355}{113} \approx \pi$.

Démonstration. $\overline{RS} = \overline{QT}$ par construction. D'après le théorème de Pythagore pour $\triangle QOT$,

$$\overline{RS} = \overline{QT} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$\angle PSR$ est sous-tendu par un diamètre, donc $\triangle PSR$ est un triangle rectangle. D'après le théorème de Pythagore,

$$\overline{PS} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \sqrt{4 - \frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{31}}{3}.$$

Par construction $\overline{MO} \parallel \overline{RS}$, donc $\triangle MPO \sim \triangle SPR$ et

$$\begin{aligned} \frac{\overline{PM}}{\overline{PO}} &= \frac{\overline{PS}}{\overline{PR}}, \\ \frac{\overline{PM}}{1} &= \frac{\sqrt{31}/3}{2}, \\ \overline{PM} &= \frac{\sqrt{31}}{6}. \end{aligned}$$

Par construction $\overline{NT} \parallel \overline{RS}$, donc $\triangle NPT \sim \triangle SPR$ et

$$\begin{aligned} \frac{\overline{PN}}{\overline{PT}} &= \frac{\overline{PS}}{\overline{PR}}, \\ \frac{\overline{PN}}{5/3} &= \frac{\sqrt{31}/3}{2}, \\ \overline{PN} &= \frac{5\sqrt{31}}{18}, \\ \overline{MN} &= \overline{PN} - \overline{PM} = \sqrt{31} \left(\frac{5}{18} - \frac{1}{6} \right) = \frac{\sqrt{31}}{9}. \end{aligned}$$

$\triangle PKR$ est un triangle rectangle, car $\triangle PKR$ est sous-tendu par un diamètre. Par construction, $\overline{PK} = \overline{PM}$. D'après le théorème de Pythagore,

$$\overline{RK} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{31}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{113}}{6}.$$

$\triangle LPR$ est un triangle rectangle, car \overline{PL} est une tangente donc $\angle LPR$ est un angle droit. $\overline{PL} = \overline{MN}$ par construction. D'après le théorème de Pythagore,

$$\overline{RL} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{\sqrt{31}}{9}\right)^2} = \frac{\sqrt{355}}{9}.$$

Par construction $\overline{RC} = \overline{RH} = 3/2$ et $\overline{CD} \parallel \overline{LK}$. Vu les triangles semblables,

$$\begin{aligned} \frac{\overline{RD}}{\overline{RC}} &= \frac{\overline{RL}}{\overline{RK}}, \\ \frac{\overline{RD}}{3/2} &= \frac{\sqrt{355}/9}{\sqrt{113}/6}, \\ \overline{RD} &= \sqrt{\frac{355}{113}}, \\ \overline{RD}^2 &= \frac{355}{113} \approx 3,14159292035 \approx \pi. \end{aligned}$$

Dans la figure 3.4, les segments sont identifiés par leurs longueurs. □

3.3 La deuxième construction de Ramanujan

Construction (fig. 3.5).

1. Construisons un cercle unitaire de centre O et de diamètre \overline{AB} . Soit C l'intersection avec le cercle de la perpendiculaire à \overline{AB} qui passe par O .
2. Divisons en trois le segment \overline{AO} de sorte que $\overline{AT} = 1/3$ et $\overline{TO} = 2/3$. (théorème 2.6).
3. Construisons \overline{BC} et trouvons les points M et N tels que $\overline{CM} = \overline{MN} = \overline{AT} = 1/3$.
4. Traçons \overline{AM} et \overline{AN} . Soit P le point sur \overline{AN} tel que $\overline{AP} = \overline{AM}$.
5. À partir de P , construisons une droite parallèle à \overline{MN} qui coupe \overline{AM} en Q .
6. Construisons \overline{OQ} et construisons ensuite à partir de T une parallèle à \overline{OQ} qui coupe \overline{AM} en R .
7. Construisons \overline{AS} tangente en A telle que $\overline{AS} = \overline{AR}$.

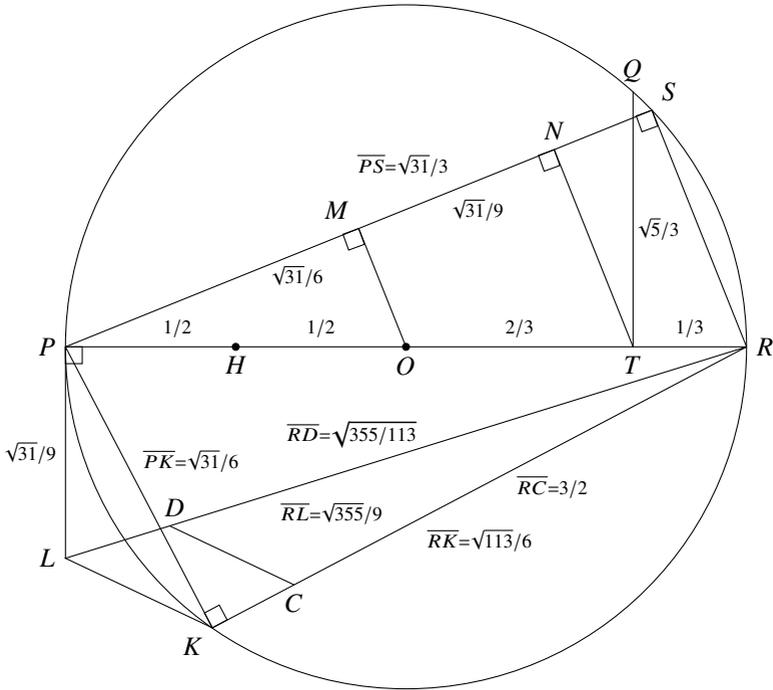


FIG. 3.4 – La première construction de Ramanujan avec des segments identifiés.

8. Construisons \overline{SO} .

Théorème 3.3. $3\sqrt{\overline{SO}} = \left(9^2 + \frac{19^2}{22}\right)^{1/4} \approx \pi$.

Démonstration. $\triangle COB$ est un triangle rectangle. D'après le théorème de Pythagore, $\overline{CB} = \sqrt{2}$ et $\overline{NB} = \sqrt{2} - 2/3$. $\triangle COB$ est isocèle, donc $\angle NBA = \angle MBA = 45^\circ$. D'après la loi des cosinus,

$$\begin{aligned} \overline{AN}^2 &= \overline{BA}^2 + \overline{BN}^2 - 2 \cdot \overline{BA} \cdot \overline{BN} \cdot \cos \angle NBA \\ &= 2^2 + \left(\sqrt{2} - \frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot 2 \cdot \left(\sqrt{2} - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{22}{9}, \end{aligned}$$

$$\overline{AN} = \sqrt{\frac{22}{9}}.$$

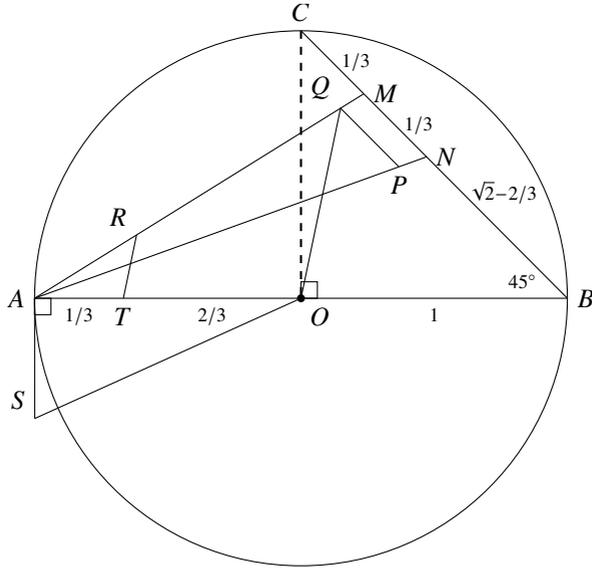


FIG. 3.5 – La deuxième construction de Ramanujan.

De nouveau d'après la loi des cosinus,

$$\begin{aligned} \overline{AM}^2 &= \overline{BA}^2 + \overline{BM}^2 - 2 \cdot \overline{BA} \cdot \overline{BM} \cdot \cos \angle MBA \\ &= 2^2 + \left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right)^2 - 2 \cdot 2 \cdot \left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{19}{9}, \\ \overline{AM} &= \sqrt{\frac{19}{9}}. \end{aligned}$$

Par construction $\overline{QP} \parallel \overline{MN}$, donc $\triangle MAN \sim \triangle QAP$, et par construction $\overline{AP} = \overline{AM}$:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AQ}}{\overline{AM}} &= \frac{\overline{AP}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AN}}, \\ \overline{AQ} &= \frac{\overline{AM}^2}{\overline{AN}} = \frac{19/9}{\sqrt{22}/9} = \frac{19}{3\sqrt{22}}. \end{aligned}$$

Par construction $\overline{TR} \parallel \overline{OQ}$, donc $\triangle RAT \sim \triangle QAO$ et

$$\frac{\overline{AR}}{\overline{AQ}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{AO}},$$

$$\overline{AR} = \overline{AQ} \cdot \frac{\overline{AT}}{\overline{AO}} = \frac{19}{3\sqrt{22}} \cdot \frac{1/3}{1} = \frac{19}{9\sqrt{22}}.$$

Par construction $\overline{AS} = \overline{AR}$ et $\triangle OAS$ est un triangle rectangle, car \overline{AS} est une tangente. D'après le théorème de Pythagore,

$$\overline{SO} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{19}{9\sqrt{22}}\right)^2},$$

$$3\sqrt{\overline{SO}} = 3 \left(1^2 + \frac{19^2}{9^2 \cdot 22}\right)^{1/4} = \left(9^2 + \frac{19^2}{22}\right)^{1/4} \approx 3,14159265258 \approx \pi.$$

Dans la figure 3.6, les segments sont identifiés par leurs longueurs. □

3.4 La quadrature du cercle à l'aide d'une quadratrice

La quadratrice est décrite dans la section 2.4. Soit $t = \overline{DE}$ la distance parcourue par la règle le long de l'axe y , et soit θ l'angle correspondant entre la règle en rotation et l'axe x . Soit P la position de l'intersection des deux droites. Le lieu de P est la courbe appelée quadratrice.

Soit F la projection de P sur l'axe x et soit G la position du joint lorsque les deux droites atteignent l'axe x , c'est-à-dire que G est l'intersection de la quadratrice et de l'axe x (fig. 3.7).

Théorème 3.4. $\overline{AG} = 2/\pi$.

Démonstration. Soit $y = \overline{PF} = \overline{EA} = 1 - t$. Puisque sur une quadratrice θ diminue à la même vitesse que t augmente,

$$\frac{1-t}{1} = \frac{\theta}{\pi/2},$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}(1-t).$$

Soit $x = \overline{AF} = \overline{EP}$. Alors $\tan \theta = y/x$, donc

$$x = \frac{y}{\tan \theta} = y \cot \theta = y \cot \frac{\pi}{2}(1-t) = y \cot \frac{\pi}{2}y. \quad (3.1)$$

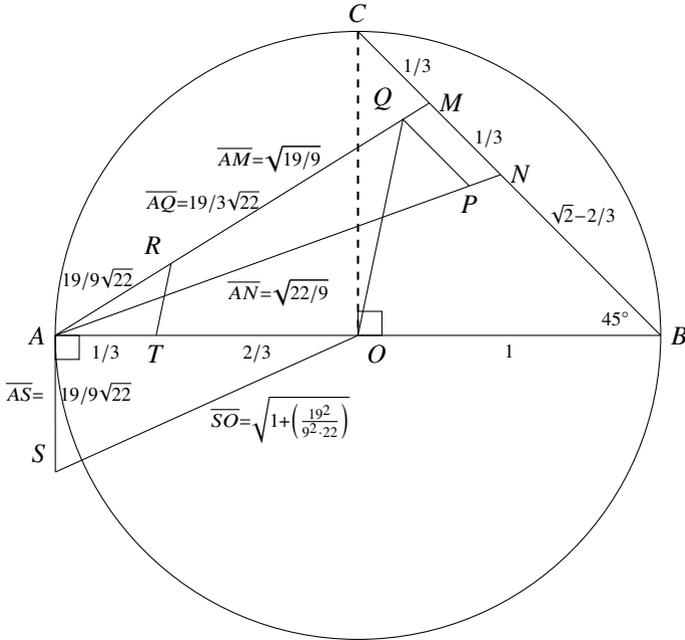


FIG. 3.6 – La deuxième construction de Ramanujan avec des segments identifiés.

Nous exprimons généralement une fonction par $y = f(x)$, mais elle peut également être exprimée par $x = f(y)$.

Pour obtenir $x = \overline{AG}$, nous ne pouvons pas simplement insérer $y = 0$ dans l'équation 3.1, car $\cot 0$ n'est pas défini. Calculons alors la limite de x lorsque y tend vers 0. Effectuons d'abord la substitution $z = (\pi/2)y$ pour obtenir

$$x = y \cot \frac{\pi}{2}y = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2}y \cot \frac{\pi}{2}y \right) = \frac{2}{\pi} (z \cot z),$$

puis prenons la limite

$$\lim_{z \rightarrow 0} x = \frac{2}{\pi} \lim_{z \rightarrow 0} (z \cot z) = \frac{2}{\pi} \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{\cos z}{(\sin z)/z} \right) = \frac{2}{\pi} \frac{\cos 0}{1} = \frac{2}{\pi},$$

où nous avons utilisé $\lim_{z \rightarrow 0} (\sin z/z) = 1$ (théorème A.12). □

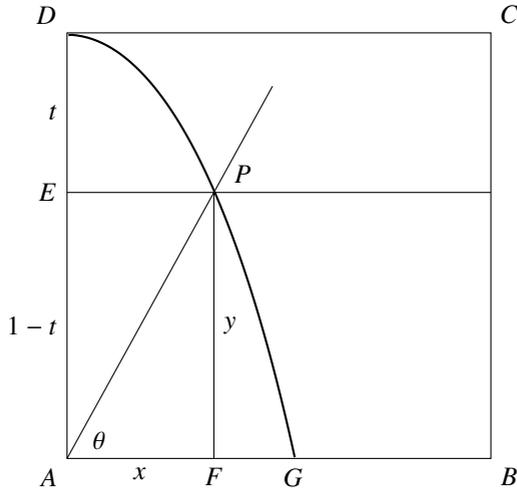


FIG. 3.7 – La quadrature du cercle avec une quadratrice.

Quelle est la surprise ?

Il est surprenant que des approximations aussi précises de π puissent être construites. Bien sûr, on ne peut s'empêcher d'être étonné par les constructions astucieuses de Ramanujan.

Sources

La construction de Kochański apparaît dans [10]. Les constructions de Ramanujan sont tirées de [47, 48]. La quadrature du cercle à l'aide de la quadratrice provient de [40, p. 48–49] et [69].

Chapitre 4

Le théorème des cinq couleurs

Les cartes utilisent des couleurs pour distinguer une région d'une autre en veillant à ce que les régions adjacentes soient coloriées avec des couleurs différentes. En 1852, Francis Guthrie a remarqué qu'une carte des comtés de l'Angleterre pouvait être coloriée en utilisant seulement quatre couleurs. L'affirmation selon laquelle quatre couleurs suffisent à colorier toute carte plane est appelée le théorème des quatre couleurs et n'a été démontrée qu'en 1976 par Kenneth Appel et Wolfgang Haken. Ils ont utilisé des arguments mathématiques sophistiqués pour montrer que s'il existe un contre-exemple (une carte nécessitant plus de quatre couleurs), il doit être associé à une configuration parmi 1834. Ils ont ensuite utilisé un ordinateur pour examiner ces configurations.

Si le théorème des quatre couleurs est extrêmement difficile à démontrer, les démonstrations des théorèmes des cinq et six couleurs sont relativement simples (sect. 4.5 et 4.6). Pour démontrer ces théorèmes, nous définissons les cartes et les graphes planaires (sect. 4.1), démontrons la formule d'Euler (sect. 4.2) et montrons qu'un graphe planaire doit avoir un sommet dont le degré est inférieur ou égal à cinq. Dans la section 4.3, la formule d'Euler est utilisée pour démontrer que deux graphes ne sont pas planaires.

En 1879, Alfred B. Kempe a publié une démonstration du théorème des quatre couleurs, mais Percy J. Heawood a montré en 1890 que cette démonstration n'était pas correcte. Dans la section 4.7, nous présentons la démonstration erronée de Kempe et la démonstration par Heawood qu'elle n'est pas correcte.

4.1 Cartes et graphes planaires

Définition 4.1. Une *carte planaire* est un ensemble de régions du plan séparées par des frontières. Un *coloriage* d'une carte est l'attribution d'une couleur à chaque région, de sorte que les régions partageant une frontière reçoivent des couleurs différentes.

La figure 4.1 montre une carte planaire avec dix régions et cinq couleurs.

La figure 4.2 montre la même carte coloriée avec quatre couleurs.

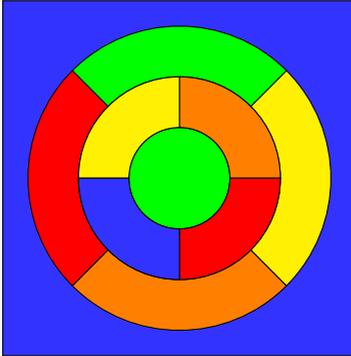


FIG. 4.1 – Coloriage d'une carte planaire avec cinq couleurs.

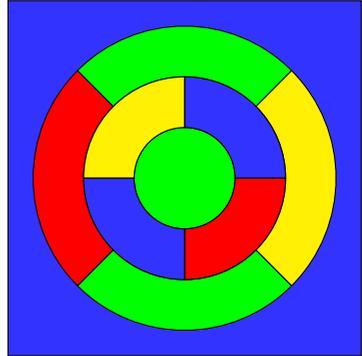


FIG. 4.2 – Coloriage d'une carte planaire avec quatre couleurs.

Définition 4.2. Un *graphe* est un ensemble de sommets S et un ensemble d'arêtes A , tels que chaque arête ait exactement deux sommets.

Un *graphe planaire* est un graphe tel qu'aucune arête ne se croise. Dans un graphe planaire, les zones délimitées par un ensemble d'arêtes sont appelées *faces*.

Un *coloriage* d'un graphe planaire est une attribution de couleurs aux sommets telle que deux sommets de même couleur ne soient pas reliés par une arête.

Les cartes planaires et les graphes planaires sont duaux et il est pratique d'étudier les problèmes de coloriage dans les graphes plutôt que dans les cartes.

Théorème 4.1. *Étant donné une carte planaire, on peut construire un graphe planaire tel que pour chaque coloriage des régions de la carte, il existe un coloriage des sommets du graphe, et inversement.*

Démonstration. Construire un sommet pour chaque région et construire une arête entre deux sommets si et seulement si les régions correspondantes partagent une frontière. \square

Exemple 4.1. La figure 4.3 montre la carte planaire de la figure 4.2 et les

sommets associés aux régions. La figure 4.4 montre le graphe planaire qui correspond à la carte.

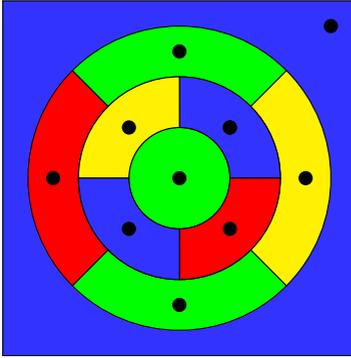


FIG. 4.3 – Association des sommets aux régions d'une carte planaire.

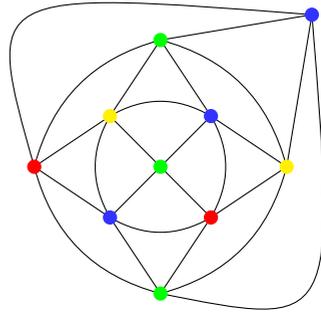


FIG. 4.4 – Le graphe planaire qui correspond à la carte planaire.

Nous pouvons encore limiter nos graphes à ceux dont les faces sont triangulaires.

Définition 4.3. Un graphe est *triangulaire* si toutes ses faces sont délimitées par trois arêtes. Un graphe peut être *triangulé* si des arêtes peuvent être ajoutées de sorte que le graphe soit triangulaire. On dit aussi qu'il existe une triangulation du graphe.

Exemple 4.2. Les faces du graphe planaire de la figure 4.4 sont triangulaires, car chacune d'elles est délimitée par trois arêtes. Les arêtes sont courbées et les faces ne sont donc pas des triangles, qui sont des polygones dont les trois côtés sont des segments.

Le **théorème de Fáry** stipule que tout graphe planaire triangulaire peut être transformé en un graphe planaire équivalent dont les arêtes sont des segments. Par conséquent, sans perte de généralité, les démonstrations peuvent être limitées aux graphes planaires dont les faces sont des triangles.

Exemple 4.3. La figure 4.5 (à gauche) montre qu'un carré peut être colorié avec deux couleurs, mais s'il est triangulé (au centre), quatre couleurs sont nécessaires. Notre objectif est de démontrer que tous les graphes peuvent être coloriés avec n couleurs pour un certain n . Si le graphe triangulé est colorié avec n couleurs, le graphe original l'est aussi, car la suppression des arêtes supplémentaires n'invalide pas le coloriage (à droite).

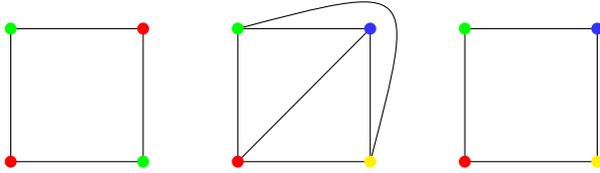


FIG. 4.5 – Coloriage d'un graphe triangulé.

4.2 La formule d'Euler

Théorème 4.2. Soit G un graphe planeaire connexe avec S sommets, A arêtes et F faces. Alors $S - A + F = 2$.

Démonstration. Par récurrence sur le nombre d'arêtes. Si le nombre d'arêtes du graphe est nul, il n'y a qu'un seul sommet et une seule face, donc $1 - 0 + 1 = 2$. Sinon, il y a au moins une arête a et elle relie deux sommets s_1 et s_2 . Supprimons l'arête a .

Premier cas : Le graphe devient non connexe (fig. 4.6). Fusionnons s_1 avec s_2 (fig. 4.7). Le graphe résultant G' est un graphe planeaire connexe qui possède moins d'arêtes que G , donc par hypothèse de récurrence $(S-1) - (A-1) + F = 2$ puisque le nombre de sommets est également réduit de un. En simplifiant, on obtient $S - A + F = 2$ pour G .

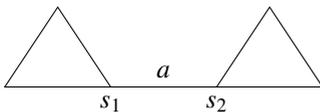


FIG. 4.6 – La suppression d'une arête rend le graphe non connexe.

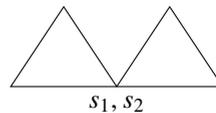


FIG. 4.7 – Fusion de deux sommets.

Deuxième cas : Le graphe reste connexe (fig. 4.8). G' a moins d'arêtes que G (fig. 4.9), donc par hypothèse de récurrence $S - (A - 1) + (F - 1) = 2$ puisque enlever l'arête joint deux faces en une. En simplifiant, on obtient $S - A + F = 2$ pour G . \square

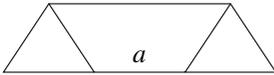


FIG. 4.8 – La suppression d'une arête ne rend pas le graphe non connexe.



FIG. 4.9 – Le graphe reste connexe et comporte moins d'arêtes.

Théorème 4.3. Soit G un graphe planaire connexe et triangulé avec A arêtes et S sommets. Alors $A = 3S - 6$.

Démonstration. Chaque face est délimitée par trois arêtes, donc $A = 3F/2$, où nous avons divisé par 2 puisque chaque arête a été comptée deux fois, une fois pour chaque face qu'elle délimite. D'après la formule d'Euler,

$$\begin{aligned} A &= S + F - 2 \\ &= S + 2A/3 - 2, \\ A &= 3S - 6. \end{aligned}$$

\square

Exemple 4.4. Le graphe planaire de la figure 4.4 possède 10 sommets et $3 \cdot 10 - 6 = 24$ arêtes.

Théorème 4.4. Soit G un graphe planaire connexe. Alors $A \leq 3S - 6$.

Démonstration. Triangulons G pour obtenir G' . D'après le théorème 4.3, $A' = 3S' - 6$. Supprimons maintenant des arêtes de G' pour obtenir G . Le nombre de sommets ne change pas, donc $A \leq 3S - 6$. \square

Exemple 4.5. Le graphe de la figure 4.10 a 8 arêtes et 6 sommets et $8 < 3 \cdot 6 - 6 = 12$. La figure 4.11 montre un graphe triangulé avec 6 sommets et $3 \cdot 6 - 6 = 12$ arêtes.



FIG. 4.10 – Moins d'arêtes que la borne supérieure

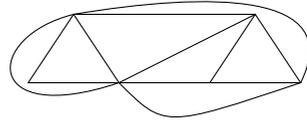


FIG. 4.11 – Dans un graphe triangulé, le nombre d'arêtes est maximal.

4.3 Graphes non planaires

Faisons un petit détour pour montrer comment les théorèmes 4.2 et 4.4 peuvent être utilisés pour démontrer que certains graphes ne sont pas planaires.

Théorème 4.5. K_5 , le graphe complet à cinq sommets, n'est pas planaire (fig. 4.12).

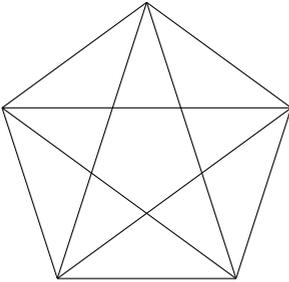


FIG. 4.12 – K_5 n'est pas planaire.

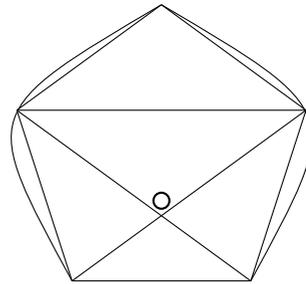


FIG. 4.13 – Une tentative ratée de dessiner K_5 comme un graphe planaire.

Démonstration. Pour K_5 , $S = 5$ et $A = 10$. D'après le théorème 4.4, le nombre d'arêtes devrait être inférieur ou égal à $3 \cdot 5 - 6 = 9$. Donc le graphe n'est pas planaire. \square

Théorème 4.6. $K_{3,3}$, le graphe bipartite avec trois sommets de chaque côté, n'est pas planaire (fig. 4.14).

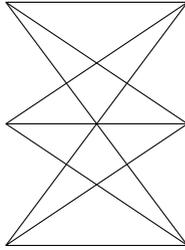


FIG. 4.14 – $K_{3,3}$ n'est pas planaire.

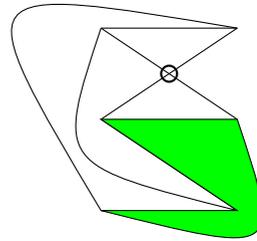


FIG. 4.15 – Une tentative ratée de dessiner $K_{3,3}$ comme un graphe planaire.

Démonstration. $S = 6$ et $A = 9$. D'après le théorème 4.2, si $K_{3,3}$ était planaire, on aurait $F = A - S + 2 = 9 - 6 + 2 = 5$. Mais chaque face est délimitée par quatre arêtes (fig. 4.15), donc $A = 4F/2 = 10 \neq 9$. \square

En 1930, Kazimierz Kuratowski a démontré la réciproque de ces théorèmes : si un graphe n'est pas planaire, il contient (dans un certain sens) K_5 ou $K_{3,3}$.

4.4 Les degrés des sommets

Définition 4.4. $d(s)$, le *degré* du sommet s , est le nombre d'arêtes incidentes en s .

Exemple 4.6. Le graphe de la figure 4.4 contient 8 sommets correspondant aux deux anneaux et chaque sommet est de degré 5. Le sommet correspondant à la face extérieure est de degré 4 tout comme le sommet correspondant à la face intérieure. Par conséquent :

$$\sum_{s \in S} d(s) = 5 \cdot 8 + 4 \cdot 2 = 48.$$

Pour obtenir le nombre total d'arêtes, divisons 48 par 2, car chaque arête a été comptée deux fois, une fois pour chacun des sommets auxquels elle est reliée.

En généralisant l'argument, on obtient :

Théorème 4.7. Soit d_i pour $i \in \{1, 2, 3, \dots, k\}$ le nombre de sommets de degré i dans un graphe planaire connexe G avec S sommets et A arêtes, où k est le degré maximal d'un sommet dans S . Alors

$$\sum_{s \in S} d(s) = \sum_{i=1}^k i \cdot d_i = 2A.$$

Théorème 4.8. Soit G un graphe planaire connexe avec A arêtes et S sommets, et soit d_i pour i dans $\{1, 2, 3, \dots, k\}$ le nombre de sommets de degré i , où k est le plus haut degré d'un sommet dans S . Alors il existe un sommet s dans S tel que $d(s) \leq 5$.

Démonstration (première méthode). S'il existe d_1 sommets de degré 1, d_2 sommets de degré 2, \dots , d_k sommets de degré k , alors $S = \sum_{i=1}^k d_i$. D'après les théorèmes 4.4 et 4.7,

$$\sum_{i=1}^k i \cdot d_i = 2A \leq 2(3S - 6) = 6S - 12 = 6 \sum_{i=1}^k d_i - 12.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k i \cdot d_i &\leq 6 \sum_{i=1}^k d_i - 12, \\ \sum_{i=1}^k (6 - i)d_i &\geq 12. \end{aligned}$$

Puisque $12 > 0$ et puisque tous les d_i sont positifs ou nuls, pour au moins un i on a $6 - i > 0$ et donc $i < 6$. \square

Démonstration (deuxième méthode). Calculons le degré moyen des sommets qui est la somme des degrés divisée par le nombre de sommets :

$$d_{\text{moy}} = \frac{\sum_{i=1}^k i \cdot d_i}{S}.$$

Mais la somme des degrés est le double du nombre d'arêtes, ce qui donne d'après le théorème 4.4 :

$$d_{\text{moy}} = \frac{2A}{S} \leq \frac{6S - 12}{S} = 6 - \frac{6}{S} < 6.$$

Si la moyenne est strictement inférieure à six, il doit y avoir un sommet de degré strictement inférieur à six. \square

Exemple 4.7. Dans la figure 4.4, la somme des degrés est de $8 \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 48$. Comme il y a 10 sommets, le degré moyen est de $48/10 = 4,8$ et il doit y avoir un sommet de degré 4 ou moins.

4.5 Le théorème des six couleurs

Théorème 4.9. *Tout graphe planaire G peut être colorié avec six couleurs.*

Démonstration. Par récurrence sur le nombre de sommets. Si G a six sommets ou moins, six couleurs suffisent. Pour l'étape de récurrence, d'après le théorème 4.8, G a un sommet s avec un degré inférieur ou égal à 5. Supprimons le sommet s pour obtenir le graphe G' . Par hypothèse de récurrence, G' peut être colorié avec six couleurs, mais s a au plus 5 voisins et au plus 5 couleurs sont utilisées pour les colorier (fig. 4.16), donc s peut être colorié en utilisant la sixième couleur (fig. 4.17). \square

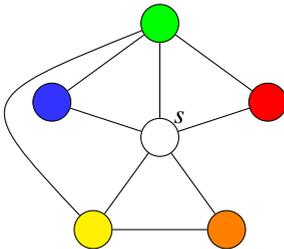


FIG. 4.16 – Cinq couleurs suffisent pour colorier les voisins de s .

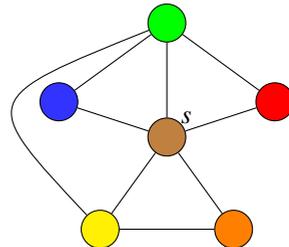


FIG. 4.17 – Coloriage de s avec la sixième couleur.

4.6 Le théorème des cinq couleurs

Définition 4.5. Soit G un graphe planaire colorié. Une *chaîne* (de Kempe) G' est un sous-graphe maximal, colorié avec deux couleurs et connexe de G .

Théorème 4.10. *Tout graphe planaire G peut être colorié avec cinq couleurs.*

Démonstration. Par récurrence sur le nombre de sommets. Si G a cinq sommets ou moins, cinq couleurs suffisent. Pour l'étape de récurrence, d'après le théorème 4.8, G a un sommet s avec un degré inférieur ou égal à 5. Supprimons s pour obtenir G' . Par l'hypothèse de récurrence, G' peut être colorié

avec cinq couleurs. Dans G , si le degré de s est strictement inférieur à 5, ou si s_1, \dots, s_5 , les voisins de s , sont coloriés avec quatre couleurs ou moins, s peut être colorié avec la cinquième couleur. Sinon, s_1, \dots, s_5 sont coloriés avec des couleurs différentes dans G' (fig. 4.18, en haut).

Considérons le sommet s_1 qui est colorié en bleu et le sommet s_3 qui est colorié en rouge. Si s_1 et s_3 ne sont pas reliés par un chemin bleu-rouge (disons si l'arête $\overline{s_6 s_7}$ n'existait pas), nous pouvons échanger les couleurs le long du chemin de s_1 à s_6 et colorier s en bleu. Sinon, on considère la chaîne bleu-rouge qui contient s_1 et s_3 . En ajoutant s et les arêtes $\overline{s s_1}$ et $\overline{s s_3}$, on obtient un chemin fermé P (double ligne) qui divise le plan en une région « intérieure » et une région « extérieure » (fig. 4.18, au milieu).

Considérons s_2 qui est colorié en vert et s_4 qui est colorié en orange. Ces sommets ne peuvent pas être contenus dans une seule chaîne verte-orange, car s_2 est à l'intérieur de P et s_4 est à l'extérieur de P , donc tout chemin les reliant doit traverser P , ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle le graphe est planaire. Par conséquent, ils doivent être contenus dans deux chaînes verte-orange non reliées (double ligne pointillée, dans la figure 4.18, au milieu). Échangeons les couleurs sur la chaîne contenant s_2 et alors s peut être colorié en vert pour obtenir un coloriage à cinq couleurs de G (fig. 4.18, en bas). \square

L'affirmation selon laquelle un chemin continu allant de l'intérieur d'une courbe continue fermée P à l'extérieur de P doit couper P est le théorème de Jordan. Ce théorème est intuitivement évident, mais difficile à démontrer.

4.7 La démonstration erronée de Kempe du théorème des quatre couleurs

Théorème 4.11. *Tout graphe planaire G peut être colorié avec quatre couleurs.*

Démonstration (fausse). L'initialisation la récurrence et la majeure partie de la démonstration sont les mêmes que celles du théorème des cinq couleurs. Le nouveau cas à considérer est un sommet s avec cinq voisins qui, par hypothèse de récurrence, peut être colorié avec quatre couleurs après avoir enlevé s .

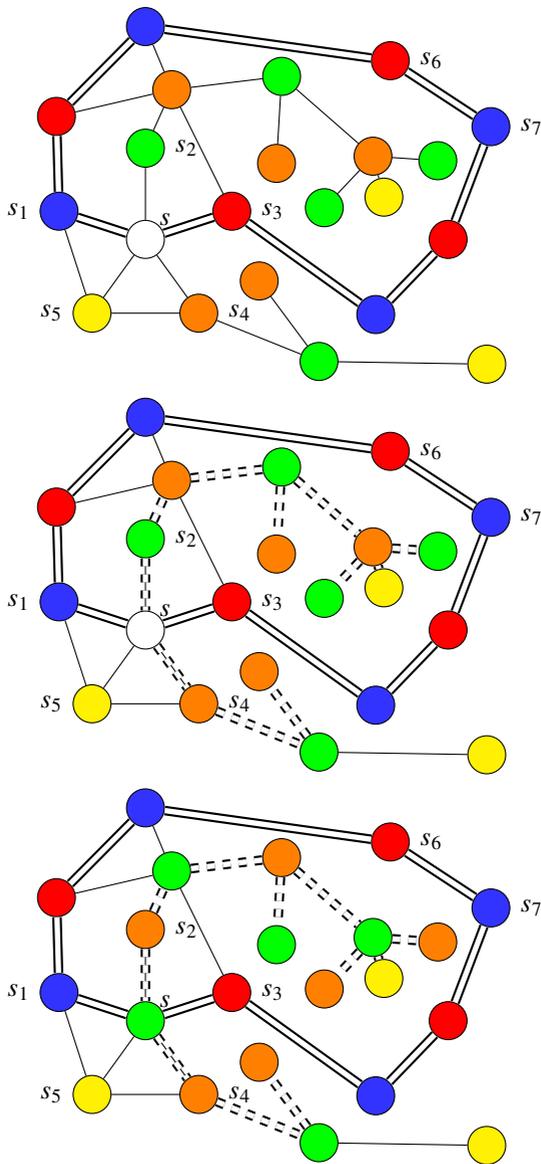


FIG. 4.18 – Démonstration du théorème des cinq couleurs.

Dans la figure 4.19, il y a deux sommets s_2 et s_5 coloriés en bleu. Considérons la chaîne bleu-vert contenant s_2 et la chaîne bleu-jaune contenant s_5 . La chaîne bleu-vert est contenue dans le chemin fermé défini par la chaîne rouge-jaune contenant s_1 et s_3 (double ligne) et la chaîne bleu-jaune est contenue dans le chemin fermé défini par la chaîne rouge-vert contenant s_1 et s_4 (double ligne pointillée).

Échangeons les couleurs de la chaîne bleu-vert et de la chaîne bleu-jaune (fig. 4.20). Le résultat est que les voisins de s sont coloriés avec les trois couleurs rouge, vert et jaune, laissant le bleu libre de colorier s . \square

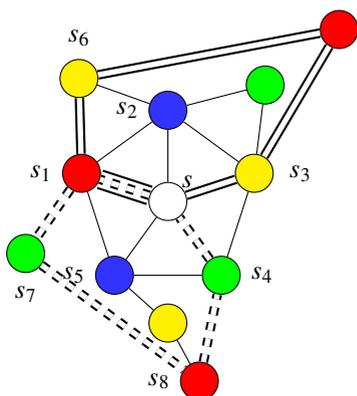


FIG. 4.19 – Chaînes de Kempe bleu-vert et bleu-jaune.

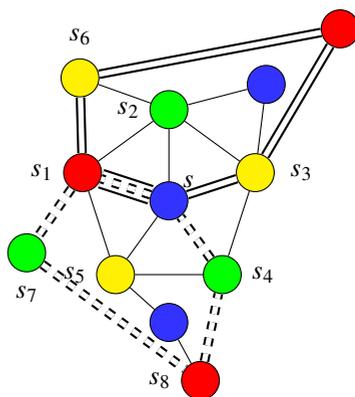


FIG. 4.20 – Échange des couleurs des deux chaînes de Kempe.

Heawood a remarqué que les chemins fermés définis par la chaîne rouge-jaune et la chaîne rouge-verte peuvent partager des sommets rouges (s_1, s_8 dans la figure 4.21). Lorsque les couleurs sont échangées dans les chaînes bleu-vert et bleu-jaune, il est possible que les sommets bleus s_6 et s_7 soient reliés (fig. 4.22) et le coloriage n'est plus correct.

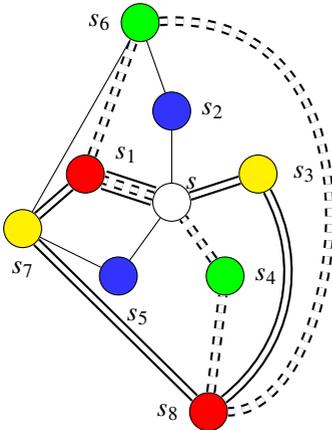


FIG. 4.21 – Les chaînes rouge-jaune et rouge-verte partagent des sommets rouges.

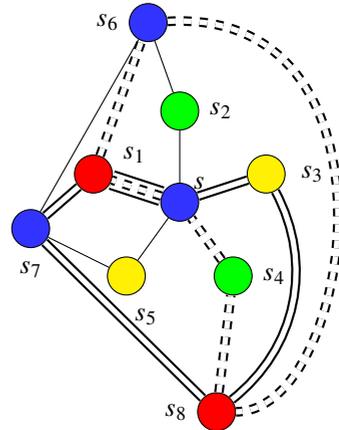


FIG. 4.22 – En échangeant les couleurs, les sommets bleus sont reliés.

Quelle est la surprise ?

Le théorème des quatre couleurs est célèbre parce qu'il est facile à énoncer, mais extrêmement difficile à démontrer. Il est donc surprenant que la preuve du théorème des cinq couleurs soit élémentaire. La partie la plus intéressante de la démonstration est le théorème 4.8 (un graphe planaire doit avoir un sommet de degré 5 au maximum), un théorème qui n'a rien à voir avec le coloriage. Au contraire, il résulte simplement du comptage des sommets et des arêtes.

Sources

Pour le théorème des quatre couleurs, voir [59, 72]. La démonstration du théorème des cinq couleurs est basée sur [2, 71]. [22] présente de nombreuses démonstrations de la formule d'Euler. La démonstration erronée du théorème des quatre couleurs par Kempe est décrite dans [56].

Chapitre 5

Comment surveiller un musée

En 1973, Victor Klee s'est demandé combien de gardiens sont nécessaires pour surveiller tous les murs d'un musée ? Si les murs forment un polygone régulier ou même un polygone convexe, un gardien suffit (fig. 5.1).

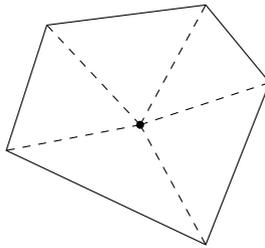


FIG. 5.1 – *Un musée dont les murs forment un polygone convexe.*

Considérons maintenant un musée dont les murs sont en dents de scie (fig. 5.2). On vérifie en comptant que le musée a 15 murs. Chaque « dent » définit un triangle qui est grisé dans la figure 5.3. Un gardien placé n'importe où dans l'un des triangles peut observer tous les murs qui délimitent ce triangle (flèches rouges).

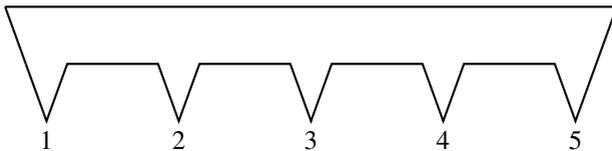


FIG. 5.2 – *Un musée dont les murs ne forment pas un polygone convexe.*

Si au moins l'un des gardiens est placé près du mur supérieur couvrant l'ensemble du musée, il peut observer tous les murs horizontaux (flèches bleues dans la figure 5.4). Ainsi, $5 = 15/3$ gardiens sont suffisants pour observer tous les murs du musée. Comme les triangles ne se chevauchent

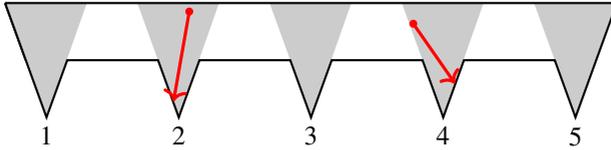


FIG. 5.3 – Visibilité à l'intérieur de chaque « dent ».

pas, le gardien d'un triangle ne pourra pas observer tous les murs d'un autre triangle (flèche verte); il faut donc 5 gardiens.

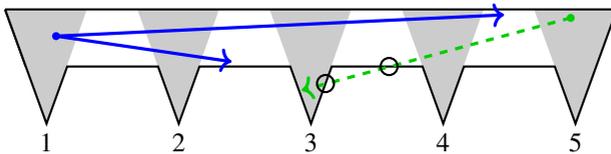


FIG. 5.4 – Visibilité des murs du musée.

L'exemple de la figure 5.2 peut être généralisé à $n/3$ dents avec n murs, nous concluons donc qu'au moins $n/3$ gardiens sont nécessaires. Nous souhaitons démontrer que $n/3$ gardiens sont suffisants pour surveiller un musée quelconque.

La section 5.1 démontre que tout polygone triangulé peut être colorié avec trois couleurs. Ceci est utilisé dans la section 5.2 pour démontrer le théorème selon lequel $n/3$ gardiens sont suffisants. La section 5.3 complète la démonstration en montrant que tout polygone peut être triangulé.

5.1 Coloration des polygones triangulés

Définition 5.1. Une *diagonale* d'un polygone est une arête reliant deux sommets qui n'est pas une des arêtes (extérieures) du polygone.

Définition 5.2. Un polygone peut être *triangulé* si l'on peut construire des diagonales qui ne s'entrecroisent pas de telle sorte que l'intérieur du polygone soit recouvert de triangles.

Théorème 5.1. *Tout polygone peut être triangulé.*

Nous différons la démonstration du théorème 5.1.

Définition 5.3. Un sommet d'un polygone est *convexe* si son angle intérieur est inférieur à 180° ; un sommet est *concave* si son angle intérieur est supérieur à 180° .

Dans la figure 5.5, le sommet 1 est convexe et le sommet 2 est concave.

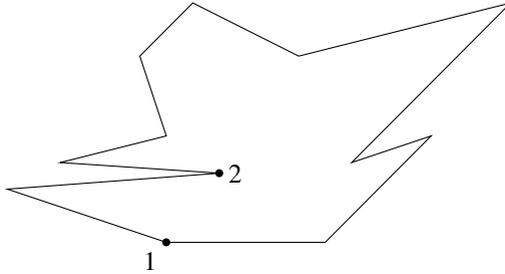


FIG. 5.5 – Un polygone avec un sommet convexe (1) et un sommet concave (2).

Définition 5.4. Un polygone avec des sommets S peut être *colorié avec trois couleurs* s'il existe une application

$$c : S \mapsto \{\text{rouge, bleu, vert}\}$$

telle qu'aucune arête n'ait deux sommets qui ont la même couleur.

Théorème 5.2. *Un polygone triangulé peut être colorié avec trois couleurs.*

Démonstration. Par récurrence sur le nombre de sommets. Un triangle peut être colorié avec trois couleurs. Un polygone triangulé avec $n > 3$ sommets doit avoir une diagonale. Choisissons une diagonale arbitraire \overline{AB} (fig. 5.6) et divisons le polygone le long de cette diagonale en deux polygones plus petits (fig. 5.7). Par récurrence, chacun de ces petits polygones peut être colorié avec trois couleurs (fig. 5.8).

Puisque les couleurs attribuées sont arbitraires, si des couleurs différentes sont attribuées à A et à B dans les deux polygones, nous pouvons renommer les couleurs dans l'un d'entre eux afin que les couleurs de A et B soient les mêmes dans les deux polygones. Par exemple, dans la figure 5.9, on peut échanger *rouge* et *vert* dans le polygone inférieur. Collons les deux polygones ensemble pour récupérer le polygone original avec n sommets. Il sera colorié avec trois couleurs (fig. 5.10). \square

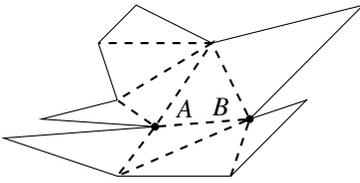


FIG. 5.6 – Une diagonale arbitraire dans un polygone.

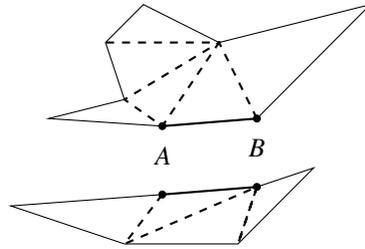


FIG. 5.7 – Division du polygone.

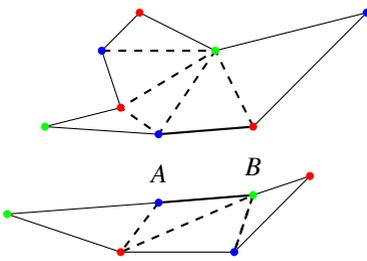


FIG. 5.8 – Coloriage des deux plus petits polygones.

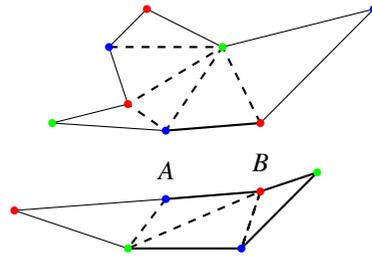


FIG. 5.9 – Échange de couleurs d'un polygone pour qu'elles correspondent à celles de l'autre.

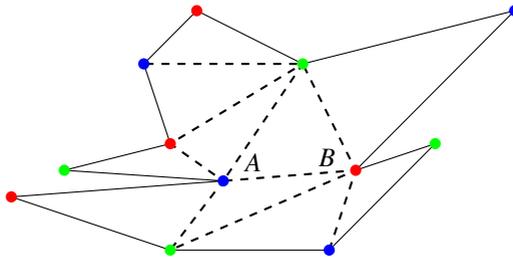


FIG. 5.10 – Recollement des deux petits polygones.

5.2 Du coloriage de polygones à la surveillance d'un musée

Théorème 5.3. *Un musée avec n murs peut être surveillé par $n/3$ gardiens.*

Démonstration. D'après le théorème 5.1, le polygone peut être triangulé. D'après le théorème 5.2, le polygone peut être colorié avec trois couleurs.

Les trois sommets de chaque triangle de la triangulation doivent être coloriés avec des couleurs différentes afin de satisfaire la condition de trichromie. Puisque le polygone est colorié avec trois couleurs, au moins une couleur, disons le rouge, peut apparaître au plus $n/3$ fois, et chaque triangle doit avoir un sommet colorié en rouge. Postons un gardien à chaque sommet rouge ; il peut observer tous les murs de chaque triangle auquel le sommet appartient. Puisque les triangles de la triangulation incluent toutes les arêtes du polygone, $n/3$ gardiens sont suffisants pour surveiller tous les murs du musée. \square

Si n n'est pas divisible par 3, le nombre de gardiens nécessaire est $\lfloor n/3 \rfloor$, le plus grand nombre entier inférieur ou égal à $n/3$. Par exemple, 4 gardiens sont suffisants pour les musées à 12, 13 ou 14 murs puisque $\lfloor 12/3 \rfloor = \lfloor 13/3 \rfloor = \lfloor 14/3 \rfloor = 4$. Pour simplifier, nous ignorons cette complication.

5.3 Tout polygone peut être triangulé

Théorème 5.4. *La somme des angles intérieurs d'un polygone à n sommets est*

$$180^\circ(n - 2).$$

Démonstration. Considérons un polygone convexe et désignons ses angles extérieurs par θ_i (fig. 5.11). En passant d'une ligne pointillée à la suivante, on effectue une rotation autour d'un cercle :

$$\sum_{i=1}^n \theta_i = 360^\circ.$$

Pour chaque angle extérieur θ_i , on désigne l'angle intérieur correspondant par ϕ_i . Alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \theta_i &= \sum_{i=1}^n (180^\circ - \phi_i) = 360^\circ, \\ \sum_{i=1}^n \phi_i &= n \cdot 180^\circ - 360^\circ = 180^\circ(n - 2). \end{aligned}$$

S'il existe un sommet concave (B dans la figure 5.12), il existe un triangle formé par les deux arêtes qui arrivent au sommet concave et le segment \overline{AC}

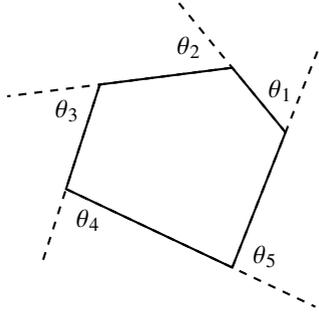


FIG. 5.11 – Les angles extérieurs d'un polygone convexe.

qui relie les deux autres sommets. En additionnant les angles du triangle, on obtient

$$(180^\circ - \alpha) + (360^\circ - \beta) + (180^\circ - \gamma) = 180^\circ ,$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 3 \cdot 180^\circ .$$

La somme des angles intérieurs augmente de $\alpha + \beta + \gamma$ tandis que le nombre de sommets augmente de trois, ce qui préserve la formule du théorème :

$$\sum_{i=1}^n \phi_i + (\alpha + \beta + \gamma) = 180^\circ (n - 2) + 3 \cdot 180^\circ$$

$$= 180^\circ ((n + 3) - 2) . \quad \square$$

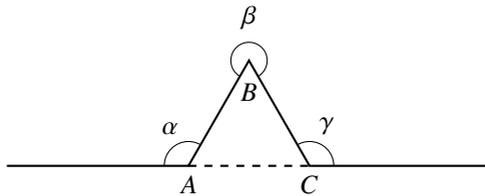


FIG. 5.12 – Un sommet concave.

Théorème 5.5. *Il doit y avoir au moins trois sommets convexes dans un polygone.*

Démonstration. Soit k le nombre de sommets concaves pour lesquels l'angle intérieur est $180^\circ + \epsilon_i$ avec $\epsilon_i > 0$. La somme des angles intérieurs des sommets concaves est certainement inférieure ou égale à la somme des angles intérieurs de tous les sommets :

$$k \cdot 180^\circ + \sum_{i=1}^k \epsilon_i \leq 180^\circ(n - 2),$$

$$(k + 2) \cdot 180^\circ + \sum_{i=1}^k \epsilon_i \leq n \cdot 180^\circ,$$

$$(k + 2) \cdot 180^\circ < n \cdot 180^\circ,$$

$$k < n - 2.$$

Il s'ensuit qu'il doit y avoir au moins trois sommets qui sont convexes et non concaves. \square

Démonstration du théorème 5.1. Par récurrence sur le nombre de sommets. Pour $n = 3$ il n'y a rien à démontrer. Si $n > 3$, d'après le théorème 5.5, il doit y avoir un sommet convexe C . On désigne ses sommets adjacents par B et D . Si \overline{BD} est contenu dans le polygone (fig. 5.13), c'est une diagonale et le polygone peut être divisé en $\triangle BCD$ et en un autre polygone \overline{ABDE} avec \overline{BD} comme arête et qui est plus petit que le polygone original (fig. 5.13). Par hypothèse de récurrence, le polygone peut être triangulé puis recollé à $\triangle BCD$, triangulant ainsi le polygone original.

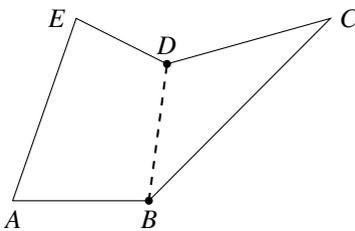


FIG. 5.13 – Triangulation où une diagonale est contenue dans le polygone.

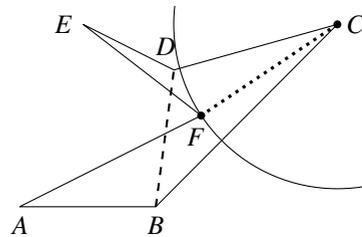


FIG. 5.14 – Triangulation où une diagonale n'est pas contenue dans le polygone.

Si \overline{BD} n'est pas contenu dans le polygone, il doit y avoir un sommet concave F qui est le plus proche de C (fig. 5.14). \overline{CF} est une diagonale

qui divise le polygone en deux polygones plus petits \overline{CFED} et \overline{CFAB} . Par l'hypothèse de récurrence, ceux-ci peuvent être triangulés et collés ensemble.

□

Quelle est la surprise ?

Le théorème du musée est surprenant parce que ce qui semble être un théorème de géométrie est démontré de manière plutôt élégante par un appel au coloriage d'un graphe.

Sources

Ce chapitre se base sur [2, chap. 39].

Chapitre 6

Le raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence est largement utilisé comme méthode de démonstration en mathématiques. Ce chapitre présente des démonstrations par récurrence de résultats qui peuvent ne pas être connus du lecteur. Nous commençons par un bref examen du raisonnement par récurrence en mathématiques (sect. 6.1). Dans la section 6.2, on démontre par récurrence des propriétés de la suite de Fibonacci tandis que la section 6.3 propose des démonstrations par récurrence à propos des nombres de Fermat. La section 6.4 présente la fonction 91 découverte par John McCarthy ; la démonstration est faite par récurrence sur une suite inhabituelle : les entiers dans un ordre inverse. La démonstration de la formule du problème de Joseph (sect. 6.5) est également inhabituelle en raison de la double récurrence sur deux parties différentes d'une expression.

6.1 Le principe de récurrence

Le raisonnement par récurrence est la principale méthode permettant de démontrer que des affirmations sont vraies pour un ensemble non limité de nombres. Considérons

$$1 = 1, \quad 1 + 2 = 3, \quad 1 + 2 + 3 = 6, \quad 1 + 2 + 3 + 4 = 10.$$

Nous pourrions remarquer que

$$1 = (1 \cdot 2)/2, \quad 3 = (2 \cdot 3)/2, \quad 6 = (3 \cdot 4)/2, \quad 10 = (4 \cdot 5)/2,$$

et ensuite conjecturer que pour tous les entiers $n \geq 1$,

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Si vous avez suffisamment de patience, vérifier cette formule pour toute valeur spécifique de n est facile, mais comment la démontrer pour la totalité des nombres entiers positifs ? C'est là que la récurrence entre en jeu.

Axiome 6.1. Soit $P(n)$ une propriété (telle qu'une équation, une formule ou un théorème), où n est un nombre entier positif. Supposons que vous puissiez

- démontrer que $P(1)$ est vraie (initialisation).
- pour un nombre arbitraire m , démontrer que $P(m + 1)$ est vraie à condition de supposer que $P(m)$ soit vraie (hérédité).

Alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$. L'hypothèse selon laquelle $P(m)$ est vraie pour un m arbitraire s'appelle l'hypothèse de récurrence.

Voici un exemple simple de démonstration par récurrence.

Théorème 6.1. Pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Démonstration. L'initialisation de la récurrence est triviale :

$$\sum_{i=1}^1 i = 1 = \frac{1(1+1)}{2}.$$

L'hypothèse de récurrence est que l'équation suivante est vraie pour m :

$$\sum_{i=1}^m i = \frac{m(m+1)}{2}.$$

L'hérédité consiste à démontrer l'équation pour $m + 1$:

$$\sum_{i=1}^{m+1} i = \sum_{i=1}^m i + (m+1) \tag{6.1}$$

$$= \frac{m(m+1)}{2} + (m+1) \tag{6.2}$$

$$= \frac{(m+1)(m+2)}{2}. \tag{6.3}$$

Par le principe de récurrence, pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}. \quad \square$$

L'hypothèse de récurrence peut prêter à confusion, car il semble que nous supposions ce que nous essayons de démontrer. Le raisonnement n'est pas

circulaire, car nous supposons la vérité d'une propriété pour quelque chose de petit, puis nous utilisons cette hypothèse pour démontrer la propriété pour quelque chose de plus grand.

Le principe de récurrence est un axiome, il ne peut donc être question de le démontrer. Il suffit d'accepter le principe de récurrence comme vous acceptez d'autres axiomes mathématiques tels que $x + 0 = x$. Bien entendu, vous êtes libre de rejeter le principe de récurrence, mais vous devrez alors rejeter une grande partie des mathématiques modernes.

Le principe de récurrence est une règle d'inférence qui est l'un des axiomes de Peano pour la formalisation des entiers naturels. La propriété de bon ordre peut être utilisée pour démontrer le principe de récurrence et, inversement, le principe de récurrence peut être utilisé pour démontrer la propriété de bon ordre. Cependant, le principe de récurrence ne peut pas être démontré à partir des autres axiomes de Peano, plus élémentaires.

6.2 La suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci est l'exemple classique d'une définition par récurrence :

$$\begin{aligned} f_1 &= 1, \\ f_2 &= 1, \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} \text{ si } n \geq 3. \end{aligned}$$

Les douze premiers éléments de la suite sont :

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144.$$

Théorème 6.2. *Chaque quatrième élément de la suite de Fibonacci est divisible par 3.*

Exemple 6.1. $f_4 = 3 = 3 \cdot 1$, $f_8 = 21 = 3 \cdot 7$, $f_{12} = 144 = 3 \cdot 48$.

Démonstration. Initialisation : $f_4 = 3$ est divisible par 3. L'hypothèse de récurrence est que f_{4n} est divisible par 3. Par récurrence,

$$\begin{aligned}
 f_{4(n+1)} &= f_{4n+4} \\
 &= f_{4n+3} + f_{4n+2} \\
 &= (f_{4n+2} + f_{4n+1}) + f_{4n+2} \\
 &= ((f_{4n+1} + f_{4n}) + f_{4n+1}) + f_{4n+2} \\
 &= ((f_{4n+1} + f_{4n}) + f_{4n+1}) + (f_{4n+1} + f_{4n}) \\
 &= 3f_{4n+1} + 2f_{4n}.
 \end{aligned}$$

$3f_{4n+1}$ est divisible par 3 et, par hypothèse de récurrence, f_{4n} est divisible par 3. Par conséquent, $f_{4(n+1)}$ est divisible par 3. \square

Théorème 6.3. $f_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$.

Démonstration. Initialisation : $f_1 = 1 < \left(\frac{7}{4}\right)^1$ et $f_2 = 1 < \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$.

L'étape de récurrence donne

$$\begin{aligned}
 f_{n+1} &= f_n + f_{n-1} \\
 &< \left(\frac{7}{4}\right)^n + \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \\
 &= \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{7}{4} + 1\right) \\
 &< \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^2 \\
 &= \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1}
 \end{aligned}$$

puisque

$$\left(\frac{7}{4} + 1\right) = \frac{11}{4} = \frac{44}{16} < \frac{49}{16} = \left(\frac{7}{4}\right)^2. \quad \square$$

Théorème 6.4 (formule de Binet).

$$f_n = \frac{\phi^n - \bar{\phi}^n}{\sqrt{5}}, \quad \text{où } \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \bar{\phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Démonstration. Nous démontrons d'abord que $\phi^2 = \phi + 1$:

$$\begin{aligned}\phi^2 &= \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{2\sqrt{5}}{4} + \frac{5}{4} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) + 1 \\ &= \phi + 1.\end{aligned}$$

De même, nous pouvons démontrer que $\bar{\phi}^2 = \bar{\phi} + 1$.

L'initialisation de la formule se fait ainsi :

$$\frac{\phi^1 - \bar{\phi}^1}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 = f_1.$$

Supposons l'hypothèse de récurrence pour tous les $k \leq n$. L'étape de récurrence donne

$$\begin{aligned}\phi^{n+1} - \bar{\phi}^{n+1} &= \phi^2 \phi^{n-1} - \bar{\phi}^2 \bar{\phi}^{n-1} \\ &= (\phi + 1)\phi^{n-1} - (\bar{\phi} + 1)\bar{\phi}^{n-1} \\ &= (\phi^n - \bar{\phi}^n) + (\phi^{n-1} - \bar{\phi}^{n-1}) \\ &= \sqrt{5}f_n + \sqrt{5}f_{n-1}, \\ \frac{\phi^{n+1} - \bar{\phi}^{n+1}}{\sqrt{5}} &= f_n + f_{n-1} = f_{n+1}.\end{aligned}\quad \square$$

Théorème 6.5.

$$f_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \dots.$$

Démonstration. Commençons par démontrer la règle de Pascal :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} \\
&= \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} \\
&= \binom{n+1}{k+1}.
\end{aligned}$$

Nous utiliserons également l'égalité $\binom{k}{0} = \frac{k!}{0!(k-0)!} = 1$ pour tout $k \geq 1$.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème. L'initialisation est facile :

$$f_1 = \binom{1}{0} = \frac{1!}{0!(1-0)!} = 1.$$

L'étape de récurrence donne

$$\begin{aligned}
f_n = f_{n-1} + f_{n-2} &= \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \binom{n-4}{3} + \dots \\
&\quad \binom{n-2}{0} + \binom{n-3}{1} + \binom{n-4}{2} + \dots \\
&= \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \dots \\
&= \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \dots. \quad \square
\end{aligned}$$

6.3 Les nombres de Fermat

Définition 6.1. Les entiers $F_n = 2^{2^n} + 1$ pour tout $n \geq 0$ sont appelés *nombres de Fermat*.

Les cinq premiers nombres de Fermat sont des nombres premiers :

$$F_0 = 3, \quad F_1 = 5, \quad F_2 = 17, \quad F_3 = 257, \quad F_4 = 65\,537.$$

Le mathématicien du xvii^e siècle Pierre de Fermat a conjecturé que tous les nombres de Fermat sont premiers, mais près de cent ans plus tard, Leonhard Euler a remarqué que

$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297 = 641 \times 6\,700\,417.$$

Les nombres de Fermat deviennent extrêmement grands lorsque n augmente. On sait que les nombres de Fermat ne sont pas premiers pour $5 \leq n \leq 32$, mais la factorisation de certains de ces nombres n'est toujours pas connue.

Théorème 6.6. *Pour tout $n \geq 2$, le dernier chiffre de F_n est 7.*

Démonstration. L'initialisation s'écrit $F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17$. L'hypothèse de récurrence est $F_n = 10k_n + 7$ pour un certain $k_n \geq 1$. La récurrence donne

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= 2^{2^{n+1}} + 1 = 2^{2^n \cdot 2^1} + 1 = \left(2^{2^n}\right)^2 + 1 \\ &= \left(\left(2^{2^n} + 1\right) - 1\right)^2 + 1 = (F_n - 1)^2 + 1 \\ &= (10k_n + 7 - 1)^2 + 1 = (10k_n + 6)^2 + 1 \\ &= 100k_n^2 + 120k_n + 36 + 1 \\ &= 10(10k_n^2 + 12k_n + 3) + 6 + 1 \\ &= 10k_{n+1} + 7, \quad \text{pour un certain } k_{n+1} \geq 1. \quad \square \end{aligned}$$

Théorème 6.7. *Pour tout $n \geq 1$, $F_n = \prod_{k=0}^{n-1} F_k + 2$.*

Démonstration. L'initialisation s'écrit

$$F_1 = \prod_{k=0}^0 F_k + 2 = F_0 + 2 = 3 + 2 = 5.$$

L'étape de récurrence se passe ainsi :

$$\begin{aligned}
 \prod_{k=0}^n F_k &= \left(\prod_{k=0}^{n-1} F_k \right) F_n \\
 &= (F_n - 2) F_n \\
 &= (2^{2^n} + 1 - 2) (2^{2^n} + 1) \\
 &= (2^{2^n})^2 - 1 = (2^{2^{n+1}} + 1) - 2 \\
 &= F_{n+1} - 2, \\
 F_{n+1} &= \prod_{k=0}^n F_k + 2. \quad \square
 \end{aligned}$$

6.4 La fonction 91 de McCarthy

On associe généralement le raisonnement par récurrence aux démonstrations de propriétés définies sur l'ensemble des entiers naturels. Ici, nous abordons un raisonnement par récurrence basé sur un ordre étrange où les grands nombres sont inférieurs aux petits nombres. La récurrence fonctionne, car la seule propriété requise de l'ensemble est qu'il soit ordonné.

Considérons la fonction récursive suivante définie sur les nombres entiers :

$$f(x) = \begin{cases} x - 10 & \text{si } x > 100, \\ f(f(x + 11)) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour les nombres strictement supérieurs à 100, on trouve trivialement

$$f(101) = 91, \quad f(102) = 92, \quad f(103) = 93, \quad f(104) = 94, \quad \dots$$

Qu'en est-il des nombres inférieurs ou égaux à 100? Calculons $f(x)$ pour certains nombres, où le calcul de chaque ligne utilise les résultats des lignes

précédentes :

$$\begin{aligned}f(100) &= f(f(100 + 11)) = f(f(111)) = f(101) = 91, \\f(99) &= f(f(99 + 11)) = f(f(110)) = f(100) = 91, \\f(98) &= f(f(98 + 11)) = f(f(109)) = f(99) = 91, \\&\dots \\f(91) &= f(f(91 + 11)) = f(f(102)) = f(92), \\&= f(f(103)) = f(93) = \dots = f(98) = 91, \\f(90) &= f(f(90 + 11)) = f(f(101)) = f(91) = 91, \\f(89) &= f(f(89 + 11)) = f(f(100)) = f(91) = 91.\end{aligned}$$

Définissons la fonction g comme ceci :

$$g(x) = \begin{cases} x - 10 & \text{si } x > 100, \\ 91 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Théorème 6.8. *Pour tout x , $f(x) = g(x)$.*

Démonstration. La démonstration se fait par récurrence sur l'ensemble des entiers $S = \{x \mid x \leq 101\}$ en utilisant la relation $<$ définie par

$$y < x \text{ si et seulement si } x < y,$$

où, du côté droit, $<$ est l'inégalité stricte habituelle sur les entiers. Cette définition donne lieu à l'ordre suivant :

$$101 < 100 < 99 < 98 < 97 < \dots .$$

Il y a trois cas pour la démonstration. Nous utilisons les résultats des calculs ci-dessus.

Premier cas : $x > 100$. Ceci est trivial de par les définitions de f et g .

Deuxième cas : $90 \leq x \leq 100$. L'initialisation de la récurrence s'écrit $f(100) = 91 = g(100)$, puisque nous avons montré que $f(100) = 91$ et puisque par définition $g(100) = 91$.

L'hypothèse de récurrence est $f(y) = g(y)$ pour $y < x$ et la récurrence

fonctionne ainsi :

$$f(x) = f(f(x + 11)) \quad (6.4a)$$

$$= f(x + 11 - 10) = f(x + 1) \quad (6.4b)$$

$$= g(x + 1) \quad (6.4c)$$

$$= 91 \quad (6.4d)$$

$$= g(x) . \quad (6.4e)$$

L'équation 6.4a est la définition de f pour $x \leq 100$. L'égalité 6.4b est la définition de f étant donné que $x \geq 90$ implique $x + 11 > 100$. L'égalité 6.4c découle de l'hypothèse de récurrence puisque $x \leq 100$ implique $x + 1 \leq 101$, donc $x + 1 \in S$ et $x + 1 < x$. Les égalités 6.4d et 6.4e découlent de la définition de g et du fait que $x + 1 \leq 101$ implique $x \leq 100$.

Troisième cas : $x < 90$. L'initialisation s'écrit $f(89) = f(f(100)) = f(91) = 91 = g(89)$ par définition de g puisque $89 < 100$.

L'hypothèse de récurrence est $f(y) = g(y)$ pour $y < x$ et la récurrence donne

$$f(x) = f(f(x + 11)) \quad (6.5a)$$

$$= f(g(x + 11)) \quad (6.5b)$$

$$= f(91) \quad (6.5c)$$

$$= 91 \quad (6.5d)$$

$$= g(x) . \quad (6.5e)$$

L'équation 6.5a est vraie par définition de f puisque $x < 90 \leq 100$. L'égalité 6.5b découle de l'hypothèse de récurrence et de ce que $x < 90$ implique $x + 11 < 101$, donc $x + 11 \in S$ et $x + 11 < x$. L'égalité 6.5c découle de la définition de g et de $x + 11 < 101$. Nous avons déjà démontré que $f(91) = 91$. Enfin $g(x) = 91$ pour $x < 90$ par définition. \square

6.5 Le problème de Josèphe

Flavius Josèphe était le commandant de la ville de Yodfat pendant la rébellion juive contre les Romains. La force de l'armée romaine a fini par écraser la résistance de la ville et Josèphe s'est réfugié dans une grotte avec certains de ses hommes. Ils ont préféré se suicider plutôt que d'être tués ou

capturés par les Romains. Selon le récit de Josèphe, il s'arrangea pour se sauver, devint un observateur des Romains et écrivit plus tard une histoire de la rébellion. Nous présentons le problème comme un problème mathématique abstrait.

Définition 6.2 (problème de Josèphe). Considérons les nombres $1, \dots, n+1$ disposés en cercle. Supprimons chaque q -ième nombre en faisant le tour du cercle $q, 2q, 3q, \dots$ (où le calcul est effectué modulo $n+1$) jusqu'à ce qu'il ne reste qu'un seul nombre m . Alors $J(n+1, q) = m$ est le nombre de Josèphe pour $n+1$ et q .

Exemple 6.2. Soient $n+1 = 41$ et $q = 3$. Disposons les nombres en cercle :

→ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 ↓
 ↑ 41 40 39 38 37 36 35 34 33 32 31 30 29 28 27 26 25 24 23 22

La première série de suppressions conduit à

→ 1 2 ~~3~~ 4 5 ~~6~~ 7 8 ~~9~~ 10 11 ~~12~~ 13 14 ~~15~~ 16 17 ~~18~~ 19 20 ~~21~~ ↓
 ↑ 41 40 ~~39~~ 38 37 ~~36~~ 35 34 ~~33~~ 32 31 ~~30~~ 29 28 ~~27~~ 26 25 ~~24~~ 23 22

Après avoir enlevé les nombres supprimés, on obtient

1 2 4 5 7 8 10 11 13 14 16 17 19 20 22 23 25 26 28 29 31 32 34 35 37 38 40 41.

La deuxième série de suppressions (en commençant par la dernière suppression de 39) conduit à

1 2 4 ~~5~~ 7 8 ~~10~~ 11 13 ~~14~~ 16 17 ~~19~~ 20 22 ~~23~~ 25 26 ~~28~~ 29 31 ~~32~~ 34 35 ~~37~~ 38 40 ~~41~~.

Nous continuons à supprimer un nombre sur trois jusqu'à ce qu'il n'en reste plus qu'un :

2 4 ~~7~~ 8 11 ~~13~~ 16 17 ~~20~~ 22 25 ~~26~~ 29 31 ~~34~~ 35 38 40

2 4 ~~8~~ 11 16 ~~17~~ 22 25 ~~29~~ 31 35 ~~38~~

2 4 ~~11~~ 16 22 ~~25~~ 31 35

~~2~~ 4 16 ~~22~~ 31 35

~~4~~ 16 31 ~~35~~

~~16~~ 31

31.

Il en résulte que $J(41, 3) = 31$.

Le lecteur est invité à effectuer le calcul pour supprimer chaque septième nombre d'un cercle de 40 nombres afin de vérifier que le dernier nombre est 30.

Théorème 6.9. $J(n + 1, q) = (J(n, q) + q) \pmod{n + 1}$.

Démonstration. Le premier nombre supprimé au premier tour est le q -ième nombre et les nombres qui restent après la suppression sont les n nombres

$$1 \quad 2 \quad \dots \quad q - 1 \quad q + 1 \quad \dots \quad n \quad n + 1 \pmod{n + 1}.$$

Le comptage pour trouver la prochaine suppression commence avec $q + 1$. En associant $1, \dots, n$ à cette suite, nous obtenons

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & \dots & n - q & n + 1 - q & n + 2 - q & \dots & n \pmod{n + 1} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ q + 1 & q + 2 & \dots & n & n + 1 & 1 & \dots & q - 1 \pmod{n + 1}. \end{array}$$

Rappelons que les calculs sont modulo $n + 1$:

$$\begin{aligned} (n + 2 - q) + q &= (n + 1) + 1 &= 1 &\pmod{n + 1} \\ (n) + q &= (n + 1) - 1 + q &= q - 1 &\pmod{n + 1}. \end{aligned}$$

C'est le problème de Josèphe pour n nombres, sauf que les nombres sont décalés de q . Il s'ensuit que :

$$J(n + 1, q) = (J(n, q) + q) \pmod{n + 1}. \quad \square$$

Théorème 6.10. Pour tout $n \geq 1$, il existe des nombres $a \geq 0$ et $0 \leq t < 2^a$ tels que $n = 2^a + t$.

Démonstration. On peut appliquer de manière répétée l'algorithme de division par $2^0, 2^1, 2^2, 2^4, \dots$, mais il est facile de le voir à partir de la représentation binaire de n . Il existe a et $b_{a-1}, b_{a-2}, \dots, b_1, b_0$, avec $b_i = 0$ ou $b_i = 1$ pour tout i , tels que le nombre n s'exprime comme

$$\begin{aligned} n &= 2^a + b_{a-1}2^{a-1} + \dots + b_02^0, \\ n &= 2^a + (b_{a-1}2^{a-1} + \dots + b_02^0), \\ n &= 2^a + t, \quad \text{avec } t \leq 2^a - 1. \end{aligned} \quad \square$$

Nous démontrons maintenant qu'il existe une formule simple et explicite pour $J(n, 2)$.

Théorème 6.11. Si $n = 2^a + t$ avec $a \geq 0$ et $0 \leq t < 2^a$, alors $J(n, 2) = 2t + 1$.

Démonstration. D'après le théorème 6.10, le nombre n s'exprime comme indiqué dans ce théorème. La démonstration que $J(n, 2) = 2t + 1$ se fait par une double récurrence, d'abord sur a puis sur t .

Première récurrence :

Initialisation. Supposons que $t = 0$ de sorte que $n = 2^a$. Soit $a = 1$. Il y a deux nombres dans le cercle : 1, 2. Puisque $q = 2$, le deuxième nombre sera supprimé, donc le nombre restant est 1 et $J(2^1, 2) = 1$.

L'hypothèse de récurrence est que $J(2^a, 2) = 1$. Que vaut $J(2^{a+1}, 2)$? Au premier tour, tous les nombres pairs sont supprimés :

$$1 \quad \cancel{2} \quad 3 \quad \cancel{4} \quad \dots \quad \cancel{2^{a+1}-1} \quad \cancel{2^{a+1}}.$$

Il reste maintenant 2^a nombres :

$$1 \quad 3 \quad \dots \quad 2^{a+1}-1.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $J(2^{a+1}, 2) = J(2^a, 2) = 1$, donc $J(n, 2) = 1$ chaque fois que $n = 2^a + 0$.

Seconde récurrence :

Nous avons démontré que $J(2^a + 0, 2) = 2 \cdot 0 + 1$, qui est l'initialisation de la deuxième récurrence.

L'hypothèse de récurrence est $J(2^a + t, 2) = 2t + 1$. D'après le théorème 6.9,

$$J(2^a + (t + 1), 2) = J(2^a + t, 2) + 2 = 2t + 1 + 2 = 2(t + 1) + 1. \quad \square$$

Les théorèmes 6.10 et 6.11 donnent un algorithme simple pour calculer $J(n, 2)$. D'après la démonstration du théorème 6.10,

$$n = 2^a + t = 2^a + (b_{a-1}2^{a-1} + \dots + b_02^0),$$

donc $t = b_{a-1}2^{a-1} + \dots + b_02^0$. Il suffit de multiplier par 2 (décalage à gauche d'un chiffre) et d'ajouter 1. Par exemple, puisque $n = 41 = 2^5 + 2^3 + 2^0 = 101001$, il s'ensuit que $J(41, 2) = 2t + 1$, et en notation binaire

$$41 = 101001,$$

$$9 = 01001,$$

$$2t + 1 = 10011 = 16 + 2 + 1 = 19.$$

Le lecteur peut vérifier le résultat en supprimant chaque deuxième nombre dans un cercle 1, ..., 41.

Il existe une formule explicite pour $J(n, 3)$, mais elle est assez compliquée.

Quelle est la surprise ?

Le raisonnement par récurrence est peut-être la technique de démonstration la plus importante des mathématiques modernes. Bien que la suite de Fibonacci soit extrêmement connue et que les nombres de Fermat soient également faciles à comprendre, j'ai été surpris de trouver tant de formules que je ne connaissais pas (comme les théorèmes 6.2 et 6.3) qui peuvent être démontrées par récurrence. La fonction 91 de McCarthy a été découverte dans le contexte de l'informatique, bien qu'il s'agisse d'un résultat purement mathématique. Ce qui est surprenant, ce n'est pas la fonction elle-même, mais l'étrange récurrence utilisée pour l'étudier, avec $98 < 97$. La surprise du problème de Josèphe, c'est le raisonnement par récurrence bidirectionnel.

Sources

Pour une présentation complète du raisonnement par récurrence, voir [29]. La démonstration pour la fonction 91 de McCarthy provient de [39] où elle est attribuée à Rod M. Burstall. La présentation du problème de Josèphe se base sur [29, chapitre 17], qui traite également du contexte historique. Ce chapitre contient d'autres problèmes intéressants avec des démonstrations par récurrence, tels que les enfants boueux, la fausse pièce et les centimes dans une boîte. On trouvera des informations supplémentaires sur le problème de Josèphe dans [53, 68].

Chapitre 7

La résolution d'équations du second degré

Poh-Shen Loh a proposé une méthode de résolution des équations du second degré qui repose sur la relation entre les coefficients du polynôme et ses racines. La section 7.1 passe en revue les méthodes traditionnelles de résolution des équations du second degré. La section 7.2 tente de convaincre le lecteur que la méthode de Loh a du sens et explique ensuite comment calculer les racines. Dans la section 7.3, le calcul est effectué pour deux polynômes du second degré et de manière similaire pour un polynôme de degré quatre. La section 7.4 dérive la formule traditionnelle des racines à partir des formules de Loh.

L'introduction de l'algèbre et de la notation algébrique moderne est relativement récente. Auparavant, les mathématiciens utilisaient presque exclusivement la géométrie. Il est donc intéressant d'examiner la construction géométrique d'Al-Khwârizmî pour la formule des racines des équations du second degré (sect. 7.5). La section 7.6 montre une construction géométrique astucieuse utilisée par Cardan pour obtenir la formule des racines des équations de degré trois.

La section 7.8 présente d'autres méthodes géométriques permettant de trouver les racines d'équations du second degré.¹ Le chapitre se termine par la section 7.9 qui traite du calcul numérique des racines d'équations du second degré.

7.1 Méthodes traditionnelles de résolution d'équations du second degré

Tout étudiant en mathématiques connaît par cœur la formule qui permet d'obtenir les racines d'une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Pour l'instant nous allons travailler avec des polynômes unitaires, $x^2 + bx +$

1. Le chapitre 11 est une condition préalable à la compréhension complète de ces méthodes.

$c = 0$, dont les racines sont

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}. \quad (7.1)$$

Une autre méthode de résolution des équations du second degré consiste à factoriser les polynômes plus ou moins par tâtonnement. Il est parfois facile d'obtenir les racines par factorisation :

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3). \quad (7.2)$$

Il est beaucoup plus difficile de factoriser $x^2 - 2x - 24$, car il y a de nombreuses paires de racines possibles qui doivent être prises en compte :

$$(\pm 1, \mp 24), (\pm 2, \mp 12), (\pm 3, \mp 8), (\pm 4, \mp 6).$$

7.2 La relation entre les racines et les coefficients

Théorème 7.1. Si r_1 et r_2 sont les racines de $x^2 + bx + c$, alors

$$(x - r_1)(x - r_2) = x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2 = x^2 + bx + c.$$

Par conséquent, même si nous ne connaissons pas la valeur des racines, nous savons que

$$r_1 + r_2 = -b, \quad r_1 r_2 = c. \quad (7.3)$$

Il n'y a vraiment rien à démontrer, car le résultat émerge du calcul.

Considérons quelques valeurs de $-b$, r_1 et r_2 , et notons m_{12} la moyenne de r_1 et r_2 :

$-b$	r_1	r_2	m_{12}	$m_{12} - r_1$	$m_{12} - r_2$
33	12	21	$16\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$	$-4\frac{1}{2}$
33	8	25	$16\frac{1}{2}$	$8\frac{1}{2}$	$-8\frac{1}{2}$
33	1	32	$16\frac{1}{2}$	$15\frac{1}{2}$	$-15\frac{1}{2}$
-4	-16	12	-2	14	-14
-4	-4	0	-2	2	-2
-4	-3	-1	-2	1	-1

Pour toute équation du second degré, la moyenne des deux racines est constante :

$$m_{1,2} = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{(-b - r_2) + r_2}{2} = -\frac{b}{2}.$$

Pour tout s , on a

$$-b = \left(-\frac{b}{2} + s\right) + \left(-\frac{b}{2} - s\right) = r_1 + r_2.$$

Si une racine est à la distance s de la moyenne, l'autre racine est à la distance $-s$ de la moyenne. Pour $r_1 = 2$ et $r_2 = 6$, qui correspondent à $m_{12} = 4$ et $s = 2$, la figure 7.1 visualise cette relation.

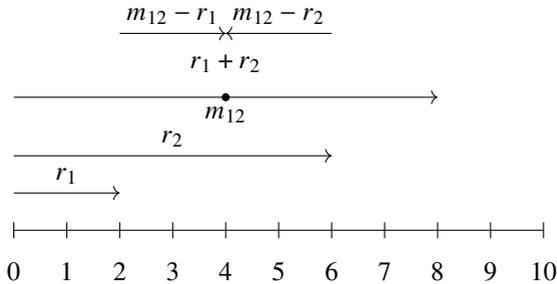


FIG. 7.1 – Relation entre les racines $r_1 = 2$, $r_2 = 6$ et leur moyenne $m_{12} = 4$.

Si nous utilisons d'autres valeurs comme $r_1 = 3$ et $r_2 = 5$, pour lesquelles $r_1 + r_2 = 8$, alors $m_{12} = 4$ reste le même alors que $s = 1$ (fig. 7.2).

Le décalage s semble être arbitraire dans

$$r_1 = -\frac{b}{2} + s, \quad r_2 = -\frac{b}{2} - s,$$

mais il existe une contrainte supplémentaire $r_1 r_2 = c$, où c est le terme constant du polynôme. En multipliant les deux expressions que nous avons obtenues pour r_1 et r_2 , nous pouvons déterminer s et ensuite r_1 et r_2 :

$$c = \left(-\frac{b}{2} + s\right) \left(-\frac{b}{2} - s\right) = \frac{b^2}{4} - s^2,$$

$$s = \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

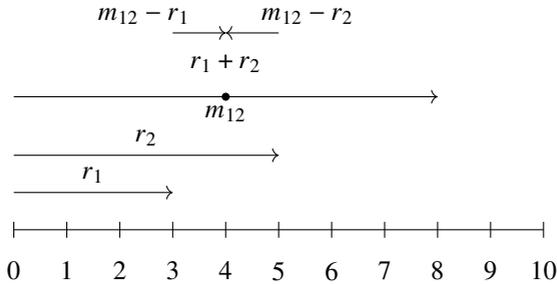


FIG. 7.2 – Relation entre les racines $r_1 = 3$, $r_2 = 5$ et leur moyenne $m_{12} = 4$.

7.3 Exemples de la méthode de Loh

Exemple 7.1. Considérons le polynôme $x^2 - 2x - 24$ où $b = -2$ et $c = -24$:

$$c = \left(-\frac{(-2)}{2} + s \right) \left(-\frac{(-2)}{2} - s \right),$$

$$-24 = (1 + s)(1 - s),$$

$$s = 5,$$

$$r_1 = 1 + 5 = 6,$$

$$r_2 = 1 - 5 = -4.$$

Vérifions : $(x - 6)(x - (-4)) = x^2 - 2x - 24$.

Exemple 7.2. Cherchons les racines de $x^2 - 83x - 2\,310$:

$$-2\,310 = \left(\frac{83}{2} + s \right) \left(\frac{83}{2} - s \right),$$

$$s^2 = \frac{6\,889}{4} + 2\,310 = \frac{16\,129}{4},$$

$$s = \frac{127}{2},$$

$$r_1 = \frac{83}{2} - \frac{127}{2} = -22,$$

$$r_2 = \frac{83}{2} + \frac{127}{2} = 105.$$

Vérifions : $(x + 22)(x - 105) = x^2 - 83x - 2\,310$.

Comparons ce calcul à celui que donne la formule traditionnelle :

$$\begin{aligned} \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} &= \frac{-(-83) \pm \sqrt{(-83)^2 - 4 \cdot (-2310)}}{2} \\ &= \frac{83 \pm \sqrt{16129}}{2} = \frac{83 \pm 127}{2}, \\ r_1 &= \frac{83 - 127}{2} = -22, \\ r_2 &= \frac{83 + 127}{2} = 105. \end{aligned}$$

Exemple 7.3. Le théorème 7.1 peut être généralisé aux polynômes de degrés supérieurs. Voici un exemple intéressant pour une équation de degré 4, $x^4 - 10x^2 - x + 20 = 0$. Comme pour les équations du second degré, il existe des formules pour résoudre les équations de degré 3 et 4 (mais pas les équations de degré supérieur), mais ces formules sont assez compliquées.

Ce polynôme de degré 4 se factorise-t-il en deux polynômes du second degré à coefficients entiers ? Si oui, les coefficients des termes en x dans les facteurs du second degré doivent être égaux et de signes opposés puisque le coefficient du terme en x^3 dans le polynôme de degré 4 est nul. Par conséquent, la forme des facteurs du second degré est

$$f(x) = (x^2 - nx + k_1)(x^2 + nx + k_2).$$

En effectuant la multiplication, on obtient :

$$\begin{aligned} f(x) = & x^4 & +nx^3 & +k_2x^2 \\ & -nx^3 & -n^2x^2 & -nk_2x \\ & & +k_1x^2 & +nk_1x & +k_1k_2. \end{aligned}$$

En égalant les coefficients, on obtient trois équations pour les trois inconnues n , k_1 et k_2 :

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2) - n^2 &= -10, \\ n(k_1 - k_2) &= -1, \\ k_1k_2 &= 20. \end{aligned}$$

Puisque nous cherchons des facteurs avec des coefficients entiers, il est clair à partir des deux dernières équations que :

$$n = 1, k_1 = 4, k_2 = 5 \quad \text{ou} \quad n = 1, k_1 = -5, k_2 = -4.$$

Seuls $n = 1, k_1 = -5, k_2 = -4$ satisfont la première équation pour le coefficient de x^2 :

$$f(x) = (x^2 - x - 5)(x^2 + x - 4).$$

La résolution de ces équations du second degré donne quatre solutions de l'équation de degré quatre :

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

7.4 Obtention de la formule traditionnelle

Pour un polynôme unitaire arbitraire $x^2 + bx + c$, les formules de Loh sont :

$$\begin{aligned} c = r_1 r_2 &= \left(\frac{-b}{2} + s \right) \left(\frac{-b}{2} - s \right) = \left(\frac{b^2}{4} - s^2 \right), \\ s &= \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} \right) - c}, \\ r_1, r_2 &= \frac{-b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} \right) - c} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}, \end{aligned}$$

la formule traditionnelle pour obtenir les racines d'un polynôme unitaire du second degré. Si le polynôme n'est pas unitaire, divisons-le par a , remplaçons dans l'équation et simplifions :

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0, \\ r_1, r_2 &= \frac{-(b/a) \pm \sqrt{(b/a)^2 - 4(c/a)}}{2} \\ &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{aligned}$$

7.5 Solution géométrique d'Al-Khwârizmî pour les équations du second degré

Écrivons un polynôme unitaire du second degré sous la forme $x^2 + bx - c$. On peut trouver les racines en complétant le carré :

$$x^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{b}{2}\right)^2,$$

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{b}{2}\right)^2,$$

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4c}}{2}.$$

C'est la formule familière pour trouver les racines d'une équation du second degré, sauf que $4c$ a le signe opposé puisque le coefficient du terme constant était $-c$.

La complétion du carré a été développée au VIII^e siècle par Muhammad ibn Mûsâ Al-Khwârizmî dans un contexte géométrique. Étant donné l'équation $x^2 + bx = c$, supposons qu'il existe un carré dont le côté est x de sorte que son aire soit x^2 . À l'aire x^2 , ajoutons bx en ajoutant quatre rectangles d'aire $bx/4$ dont les côtés sont $b/4$ et x (fig. 7.3). Complétons maintenant la figure en un carré en ajoutant les quatre petits carrés d'aire $(b/4)^2$ (fig. 7.4).

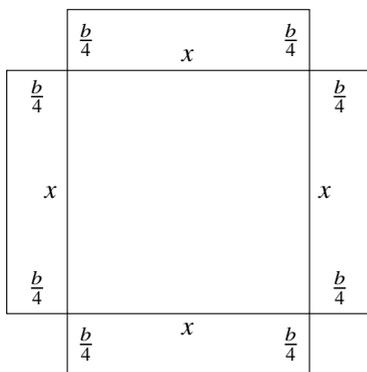


FIG. 7.3 – La surface est $x^2 + 4(b/4)x = x^2 + bx$

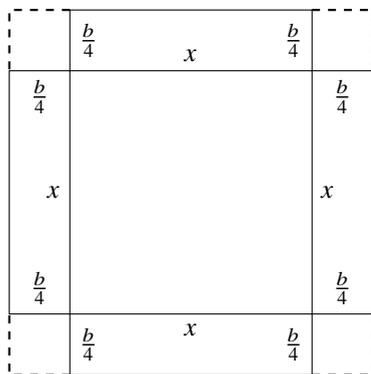


FIG. 7.4 – La surface est $x^2 + 4(b/4)x + 4(b/4)^2 = x^2 + bx + (b^2/4)$

On ne peut pas construire la figure 7.3, car on ne sait pas ce qu'est x , mais l'aire du plus grand carré de la figure 7.4 est

$$x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = c + \frac{b^2}{4},$$

que nous connaissons puisque les coefficients b et c sont donnés. En construisant la figure et en effaçant les petits carrés dont les côtés sont $(b/4)$ — une autre quantité connue — on obtient le segment de longueur x .

Exemple 7.4. Soit $x^2 + 12x = 64$. Alors $c + (b^2/4) = 64 + 36 = 100$. Il est facile de construire un carré d'une surface de 100 puisque chaque côté a une longueur de 10. Soustrayons maintenant $(b/4) + (b/4) = 6$, les côtés des plus petits carrés, pour obtenir $x = 10 - 6 = 4$.

7.6 La construction de Cardan pour résoudre les équations de degré trois

La formule pour les racines des équations de degré trois a été publiée pour la première fois au xvi^e siècle par Jérôme Cardan. Nous ne présenterons pas la formule ici, mais il est intéressant de noter que l'idée centrale est basée sur une construction géométrique similaire à celle d'Al-Khwârizmî. On peut obtenir cette construction très simplement en utilisant l'algèbre. Par multiplication,

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a^3 + b^3) + 3ab(a + b). \quad (7.4)$$

Géométriquement, on part d'un cube dont le côté est $a + b$, de sorte que son volume est $(a + b)^3$. Le cube est décomposé en cinq morceaux. Les deux premiers sont des cubes dont les côtés sont a et b avec des volumes a^3 (bleu) et b^3 (rouge) respectivement (fig. 7.5).

Les trois autres parties sont des boîtes (le terme technique est *parallélépipède rectangle*) ayant chacune un côté de longueur $a + b$ qui coïncide avec un côté du cube, un côté de longueur a et un côté de longueur b , de sorte que le volume de chacune des trois boîtes est $ab(a + b)$. Dans la figure 7.6, il y a une boîte sur le côté gauche du cube (bleu), une à l'arrière du cube (rouge) et une au sommet du cube (vert). En combinant les cinq volumes de la figure 7.5 et de la figure 7.6, on obtient l'équation 7.4.

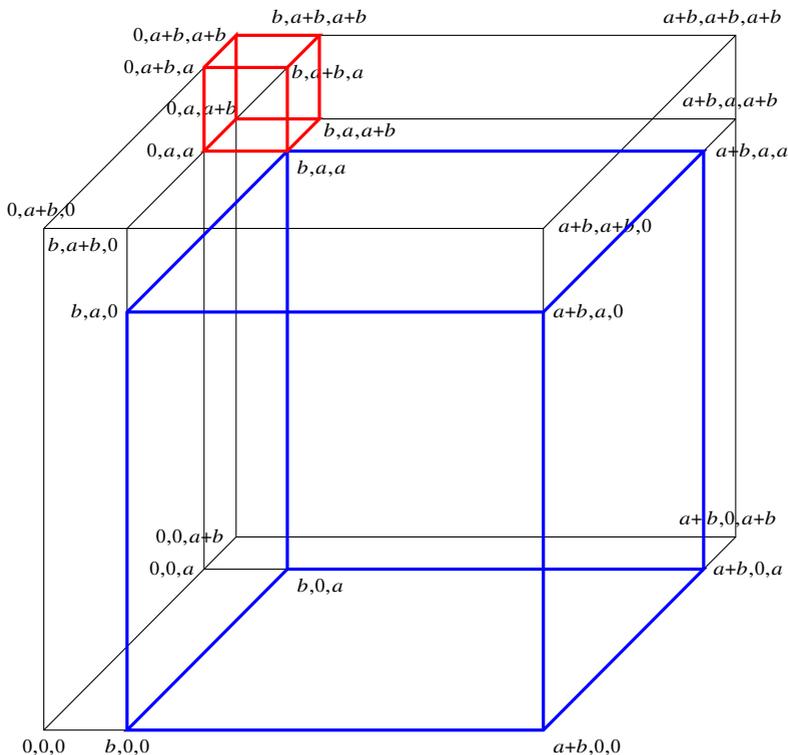


FIG. 7.5 – $(a + b)^3 = (a^3 + b^3) + \dots$

7.7 Les nombres imaginaires ne les intimidaient pas

L'histoire des mathématiques montre une progression des concepts qui étaient initialement considérés comme dénués de sens, mais qui ont finalement été compris, acceptés et se sont avérés utiles. De toute évidence, puisque les nombres comptent des choses, -1 , un nombre négatif, n'a pas de sens. Il est évident que puisque les nombres sont des rapports d'entiers (nombres rationnels), $\sqrt{2}$, dont on peut facilement prouver qu'il est irrationnel, n'a pas de sens. De toute évidence, $\sqrt{-1}$, la racine carrée d'un nombre négatif, n'a aucun sens puisqu'il n'existe aucun nombre — entier, rationnel ou réel — dont le carré est égal à -1 .

La compréhension complète des racines carrées des nombres négatifs,

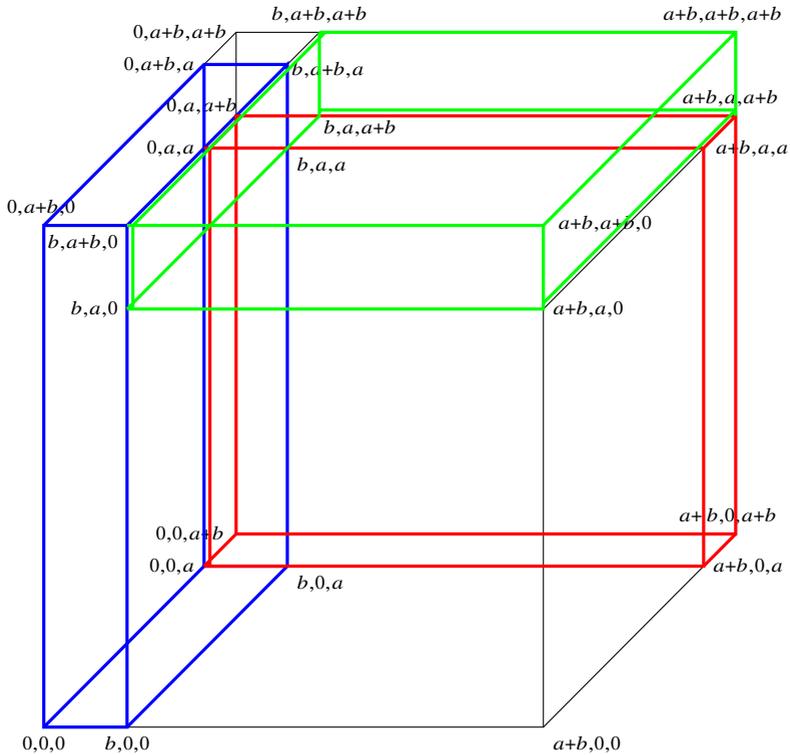


FIG. 7.6 – $(a + b)^3 = \dots + 3ab(a + b)$

encore appelés aujourd’hui nombres imaginaires bien qu’ils ne soient pas moins réels que les nombres réels, n’a pas été atteinte avant le xix^e siècle. Il est donc surprenant que, dès le xvi^e siècle, Jérôme Cardan et Raphaël Bombelli aient refusé de se laisser intimider par ce concept et aient fait les premiers pas vers la compréhension de ces nombres.

Considérons l’équation du second degré :

$$x^2 - 10x + 40 = 0. \tag{7.5}$$

Par la formule bien connue (équation 7.1),

$$r_1, r_2 = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 160}}{2} = 5 \pm \sqrt{-15}.$$

Nous ne savons rien des racines carrées des nombres négatifs et nous ne savons pas quelles sont ces valeurs, mais comme Cardan nous savons d'après le théorème 7.1 que

$$r_1 + r_2 = (5 + \sqrt{-15}) + (5 - \sqrt{-15}) = 10 = -b,$$

$$r_1 r_2 = (5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = 25 - 5\sqrt{-15} + 5\sqrt{-15} - (-15) = 40 = c,$$

qui correspondent aux coefficients de l'équation du second degré (7.5). Il est assez intuitif que $\sqrt{-15} + (-\sqrt{-15}) = 0$ même si nous ne savons rien de $\sqrt{-15}$, et de même, il est assez intuitif que $\sqrt{-15} \cdot -(\sqrt{-15}) = -(-15) = 15$ même si nous ne savons pas ce qu'est $\sqrt{-15}$.

Considérons maintenant l'équation de degré trois

$$x^3 - 15x - 4 = 0. \quad (7.6)$$

Il n'est pas difficile d'observer que 4 est une racine, mais comment l'obtenir ? La formule de Cardan donne la racine

$$r = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}, \quad (7.7)$$

une formule assez compliquée qui n'a aucun rapport évident avec 4.

Bombelli a courageusement effectué le calcul suivant (voir l'équation 7.4) :

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 8 + 3 \cdot 4\sqrt{-1} + 3 \cdot 2(-1) + (-1\sqrt{-1}) = 2 + 11\sqrt{-1},$$

$$(2 - \sqrt{-1})^3 = 8 - 3 \cdot 4\sqrt{-1} + 3 \cdot 2(-1) - (-1\sqrt{-1}) = 2 - 11\sqrt{-1}.$$

D'après l'équation 7.7,

$$\begin{aligned} r &= \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} \\ &= \sqrt[3]{(2 + \sqrt{-1})^3} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{-1})^3} \\ &= (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4. \end{aligned}$$

7.8 La méthode de Lill et le cercle de Carlyle

On peut appliquer la méthode de Lill pour résoudre les équations du second degré.² À titre d'exemple, nous utilisons l'équation 7.2 qui donne les racines d'une équation du second degré obtenue par factorisation :

$$x^2 + bx + c = x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3).$$

En appliquant la méthode de Lill, on obtient les chemins de la figure 7.7.

2. Cette section suppose que vous ayez lu la méthode de Lill dans le chapitre 11.

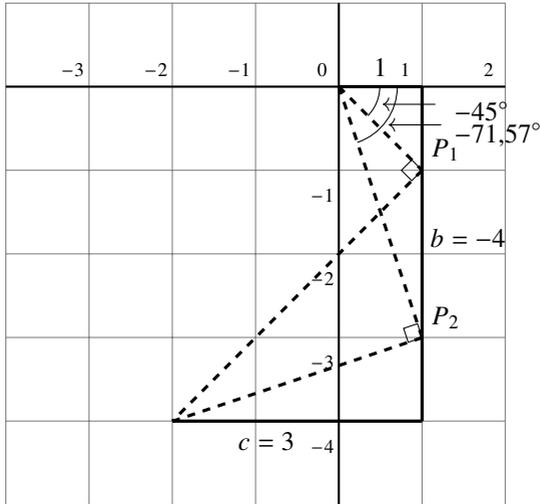


FIG. 7.7 – La méthode de Lill pour $x^2 - 4x + 3$.

Vérifions que les angles sont corrects :

$$\tan(-45^\circ) = -1, \quad \tan(-71,57^\circ) \approx -3.$$

Pour les équations du second degré, on peut trouver les points P_1 et P_2 comme intersections du segment qui représente le coefficient b et du cercle dont le diamètre est le segment qui relie le point de départ et le point d'arrivée des chemins (fig. 7.8). Pour qu'un point du segment b soit une racine, la droite doit être réfléchié à 90° de sorte que l'angle inscrit soit sous-tendu par un diamètre.

Ceci peut également être vérifié par le calcul. Le centre du cercle est le milieu du diamètre $(-1, -2)$. La longueur du diamètre est

$$\sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{20},$$

donc le carré de la longueur du rayon est $(\sqrt{20}/2)^2 = 5$. Nous avons besoin

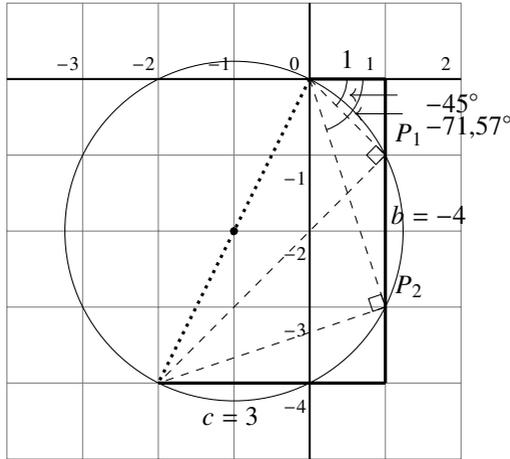


FIG. 7.8 – Construction d'un cercle pour trouver les racines.

de l'intersection de ce cercle et de la droite $x = 1$:

$$\begin{aligned} (x - (-1))^2 + (y - (-2))^2 &= r^2, \\ (x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) &= 5, \\ y^2 + 4y + 3 &= 0, \\ y &= -1, -3. \end{aligned}$$

Une méthode similaire pour résoudre les équations du second degré est le cercle de Carlyle, antérieur à la méthode de Lill. Étant donné une équation du second degré $x^2 - bx + c$ (notons le signe moins du terme linéaire), construisons des points en $(0, 1)$ et (b, c) . Construisons un cercle dont le diamètre est le segment reliant les deux points (fig. 7.9). Ses intersections (s'il y en a) avec l'axe des x sont les racines de l'équation.

Dans le cas général, le centre du cercle est $(b/2, (c - (-1))/2)$ et la longueur du diamètre est $\sqrt{b^2 + (c - 1)^2}$, donc l'équation du cercle est :

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{c+1}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + (c-1)^2}{4}.$$

Pour l'exemple, en substituant $b = 4, c = 3$ et $y = 0$, on voit que $x = 1$ et $x = 3$ sont les racines de l'équation du second degré.

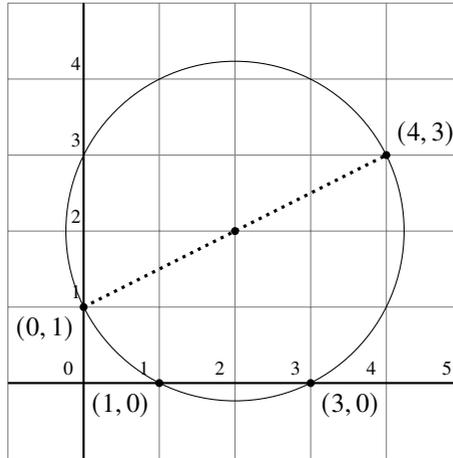


FIG. 7.9 – Cercle de Carlyle pour $x^2 - 4x + 3$.

7.9 Calcul numérique des racines

Les élèves apprennent le calcul symbolique des racines, des dérivées, etc. Aujourd'hui, la plupart des calculs sont effectués par des ordinateurs et le calcul symbolique est donc moins important. L'analyse numérique est la branche des mathématiques et de l'informatique qui développe des méthodes de calcul précises et efficaces. Le principal défi consiste à gérer la finitude des valeurs stockées dans la mémoire de l'ordinateur. Le calcul

$$0,12 \times 0,14 = 0,0168$$

est facile à faire, mais

$$0,123456789 \times 0,123456789$$

nécessite dix-huit chiffres pour être représenté avec précision, ce qui n'est pas possible dans une mémoire qui contient seize chiffres. Cette erreur s'appelle une *erreur d'arrondi*.

Un problème encore plus sérieux se produit lorsqu'on utilise l'arithmétique à virgule flottante. De toute évidence,

$$(0,12 \times 10^{-10}) \times (0,14 \times 10^{-8})$$

ne serait pas calculé en écrivant tous les zéros. Au lieu de cela, nous multiplions les mantisses et additionnons les exposants pour obtenir $0,0168 \times 10^{-18}$, qui est normalisé en $0,168 \times 10^{-19}$ de sorte que le chiffre le plus significatif apparaisse après la virgule, assurant ainsi une précision maximale étant donné la taille fixe de la mantisse. Si l'exposant maximal pouvant être représenté est de -16 , le résultat ne peut tout simplement pas être stocké. Cette erreur est appelée *souassement en virgule flottante*.

La formule pour trouver les racines de l'équation du second degré x^2+bx+c est

$$r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}. \quad (7.8)$$

Considérons ce qui se passe si $b = 1000$ et $c = 4$. Les racines sont

$$r_1, r_2 = \frac{-1000 \pm \sqrt{1\,000\,000 - 16}}{2}.$$

Selon la précision de l'arithmétique, il est possible qu'une des racines soit si proche de zéro que la valeur stockée soit nulle. L'évaluation de l'équation du second degré donne le résultat surprenant $0^2 + b \cdot 0 + 4 = 4 = 0$.

Peut-on faire mieux ? D'après l'équation 7.3,

$$r_1 + r_2 = -b, \quad r_1 r_2 = c.$$

Si $|r_2|$ est très inférieur à $|r_1|$, ce qui s'écrit $|r_2| \ll |r_1|$, alors $r_1 \approx -b$ et $r_2 \approx -c/b$. Le tableau 7.1, obtenu par un programme informatique, compare les valeurs des racines calculées par ces formules avec les valeurs obtenues par la formule traditionnelle (équation 7.8). On fixe la valeur de c à 4 et on représente les racines pour des valeurs croissantes de b .

Les valeurs réelles calculées par la formule traditionnelle pour r_2 sont plus précises au début ($r_2 - r_{2v}$ est négatif), mais le calcul basé sur l'équation 7.3 est plus précis à partir de $b = 100\,000$. Telles sont les surprises de l'analyse numérique.

Quelle est la surprise ?

L'approche de Poh-Shen Loh fournit une nouvelle façon de voir la relation entre les coefficients et les racines que l'on ne voit pas simplement en mémorisant la formule traditionnelle. Ce qui est surprenant, c'est que cette

Tab. 7.1 – Deux calculs des racines d’une équation du second degré. r_1 et r_2 sont les racines calculées par l’équation 7.8. r_{1v} et r_{2v} sont les racines calculées par l’équation 7.3. Les erreurs sont $r_i - r_{iv}$. Les valeurs sont tronquées à quatre décimales. On écrit les nombres à virgule flottante sous la forme $4e - 5$ au lieu de 4×10^{-5} , car les programmes informatiques sont normalement écrits sous forme de suites linéaires de caractères.

b	r_1	r_{1v}	erreur ₁	r_2	r_{2v}	erreur ₂
100	-99,9599	-100	0,0400	-0,04001	-0,04	-1,6012e-05
1000	-999,9959	-1000	0,0040	-0,0040	-0,004	-1,6000e-08
10000	-9999,9996	-10000	0,0004	-0,0004	-0,0004	-1,6270e-11
100000	-99999,9999	-100000	3,9999e-5	-3,9999e-5	-4e-5	1,0104e-12
1000000	-999999,9999	-1000000	4,0000e-6	-3,9999e-6	-4e-6	2,7749e-11
10000000	-10000000,0	-10000000	3,9860e-7	-3,9953e-7	-4e-7	4,6261e-10

relation est fondamentale dans la démonstration algébrique de Gauss de la constructibilité d’un heptadécagone régulier (chap. 16).

Avec la prédominance moderne des méthodes algébriques en géométrie, il est important de rappeler que l’inverse était autrefois vrai. Comme le montrent les constructions d’Al-Khwârizmî et de Cardan, les méthodes géométriques étaient utilisées pour obtenir des résultats en algèbre. Lill et Carlyle ont tous deux développé des méthodes géométriques pour résoudre des équations du second degré. Les considérations sur le calcul numérique sur ordinateur surprendront les étudiants qui n’y ont pas encore été confrontés.

Sources

La méthode de Poh-Shen Loh est issue de [37, 38]. La construction d’Al-Khwârizmî provient de [9, chap. 1] et [41]. La construction de Cardan se trouve dans [9, chap. 1]. Pour l’histoire pittoresque de la formule de Cardan, voir [62]. [9, chap. 2] présente les premières tentatives de calcul avec des nombres imaginaires. La méthode de Lill et le cercle de Carlyle se trouvent dans [63], ainsi qu’une discussion sur le calcul numérique des racines.

Chapitre 8

La théorie de Ramsey

La théorie de Ramsey est une branche de la combinatoire qui pose des questions de la forme suivante : quelle doit être la taille d'un ensemble pour que, si on le divise en sous-ensembles, au moins un sous-ensemble ait une certaine propriété ? Les résultats de la théorie de Ramsey sont difficiles à démontrer et de nombreux problèmes restent ouverts. Dans ce chapitre, nous présentons des cas simples de quatre problèmes pour donner un aperçu de ce sujet fascinant : les triplets de Schur (sect. 8.1), qui sont des triplets d'entiers tels que $a + b = c$; les triplets de Pythagore (sect. 8.2), qui sont des triplets d'entiers tels que $a^2 + b^2 = c^2$; le problème de van der Waerden (sect. 8.3) qui concerne les suites de nombres ; le théorème de Ramsey (sect. 8.4) sur le coloriage des graphes. La section 8.5 montre comment la méthode probabiliste en combinatoire permet de trouver une borne inférieure pour les nombres de Ramsey.

Le problème des triplets pythagoriciens a récemment été résolu à l'aide d'ordinateurs, en utilisant une méthode relativement nouvelle appelée résolution SAT. Pour les lecteurs familiers avec la logique propositionnelle, la section 8.6 donne un aperçu de la méthode utilisée.

La section 8.7 décrit les triplets pythagoriciens tels qu'ils étaient connus des Babyloniens il y a quatre mille ans.

Terminologie : *monochromatique* signifie de la même couleur.

8.1 Les triplets de Schur

Définition 8.1. Étant donné une décomposition quelconque de l'ensemble des entiers strictement positifs $S(n) = \{1, \dots, n\}$ en deux sous-ensembles disjoints S_1 et S_2 , existe-t-il $\{a, b, c\} \subseteq S_1$ ou $\{a, b, c\} \subseteq S_2$ (ou les deux) tel que $a < b < c$ et $a + b = c$? Si oui, l'ensemble $\{a, b, c\}$ est appelé un *triplet de Schur*.

Exemple 8.1. Pour $n = 8$, dans la décomposition

$$S_1 = \{1, 2, 3, 4\}, S_2 = \{5, 6, 7, 8\}, \quad (8.1)$$

l'ensemble S_1 comprend le triplet de Schur $\{1, 2, 3\}$. Cependant, la décomposition

$$S'_1 = \{1, 2, 4, 8\}, S'_2 = \{3, 5, 6, 7\}, \quad (8.2)$$

ne contient pas de triplet de Schur, comme on peut le vérifier en énumérant tous les triplets de chaque sous-ensemble.

Théorème 8.1. *Dans toutes les décompositions de $S(9) = \{1, \dots, 9\}$ en deux sous-ensembles disjoints, au moins un sous-ensemble contient un triplet de Schur.*

Bien sûr, nous pourrions vérifier les $2^9 = 512$ décompositions de $S(9)$ en deux sous-ensembles disjoints, mais essayons de trouver une démonstration plus succincte.

Démonstration. Nous essayons de construire une décomposition qui ne contient pas de triplet de Schur et montrons que les contraintes du problème rendent cela impossible. Commençons par placer 1 et 3 dans le sous-ensemble S_1 . 2 doit être placé dans S_2 , car $1 + 2 = 3$ et nous essayons de construire une décomposition qui ne contient pas de triplet de Schur. De même, 4 doit être placé dans S_2 , car $1 + 3 = 4$. En continuant, 6 est placé dans S_1 , car $2 + 4 = 6$ et 7 est placé dans S_2 , car $1 + 6 = 7$. Cependant, $3 + 6 = 9$ et $2 + 7 = 9$, donc 9 doit apparaître à la fois dans S_1 et S_2 , une contradiction. La suite des déductions est présentée dans le tableau suivant :

S_1	S_2
1, 3	
1, 3	2
1, 3	2, 4
1, 3, 6	2, 4
1, 3, 6	2, 4, 7
1, 3, 6, 9	2, 4, 7
1, 3, 6, 9	2, 4, 7, 9

En revenant en arrière, nous cherchons une décomposition où 1 et 3 sont dans des sous-ensembles différents. Si nous plaçons 5 dans S_2 , une suite d'inférences conduit à nouveau à une contradiction, car 9 doit apparaître

dans les deux sous-ensembles. Le lecteur doit justifier chacune des inférences présentées dans le tableau suivant :

S_1	S_2
1	3
1	3, 5
1, 2	3, 5
1, 2, 8	3, 5
1, 2, 8	3, 5, 7
1, 2, 8	3, 5, 7, 9
1, 2, 8	3, 5, 6, 7, 9
1, 2, 8, 9	3, 5, 6, 7, 9

En revenant en arrière, nous essayons de placer 5 dans S_1 , mais cela conduit également à une contradiction, comme le montre le tableau suivant :

S_1	S_2
1	3
1, 5	3
1, 5	3, 4
1, 5	3, 4, 6
1, 2, 5	3, 4, 6
1, 2, 5	3, 4, 6, 7
1, 2, 5, 7	3, 4, 6, 7

Par conséquent, il n'existe aucune décomposition qui n'inclut pas un triplet de Schur. □

Issaï Schur a démontré le théorème suivant :

Théorème 8.2 (Schur). *Pour tout $k \geq 2$, il existe un plus petit n tel que dans toute décomposition disjointe de $S(n)$ en k sous-ensembles, au moins un des sous-ensembles doit contenir un triplet de Schur.*

8.2 Les triplets pythagoriciens

Définition 8.2. Étant donné une décomposition quelconque de l'ensemble des entiers strictement positifs $S(n) = \{1, \dots, n\}$ en deux sous-ensembles disjoints S_1 et S_2 , existe-t-il $\{a, b, c\} \subseteq S_1$ ou $\{a, b, c\} \subseteq S_2$ (ou les deux)

tel que $a < b < c$ et $a^2 + b^2 = c^2$? Si oui, $\{a, b, c\}$ est appelé un *triplet pythagoricien*.

Exemple 8.2. Pour $n = 10$, dans la décomposition en nombres pairs et impairs

$$S_1 = \{1, 3, 5, 7, 9\}, S_2 = \{2, 4, 6, 8, 10\},$$

il n'y a pas de triplets pythagoriciens dans S_1 , mais $\{6, 8, 10\}$ dans S_2 est un triplet pythagoricien puisque $6^2 + 8^2 = 10^2$.

Marijn J. H. Heule et Oliver Kullmann ont démontré les théorèmes suivants. Leur méthode de démonstration est expliquée dans la section 8.6.

Théorème 8.3. *Pour tout $n \leq 7824$, il existe une décomposition de $S(n)$ en deux sous-ensembles disjoints telle que les deux sous-ensembles ne contiennent pas de triplet pythagoricien.*

Théorème 8.4. *Pour tout $n \geq 7825$, dans toute décomposition de $S(n)$ en deux sous-ensembles disjoints, au moins un sous-ensemble contient un triplet pythagoricien.*

Il est impossible de vérifier toutes les 2^{7825} décompositions de $S(7825)$. Si nous pouvions vérifier une décomposition toutes les microsecondes, 2^{7825} microsecondes $\approx 10^{600}$ années, alors que l'âge estimé de l'univers n'est que d'environ 10^{10} années.

8.3 Le problème de van der Waerden

Considérons les suites de huit points coloriés de la figure 8.1. Dans la suite du haut, il y a des points rouges aux positions (1, 2, 3) et des points bleus aux positions (4, 5, 6). Dans chaque cas, les positions forment une progression arithmétique. De même, dans la suite du milieu, les points rouges aux positions (1, 3, 5) forment une progression arithmétique. Cependant, dans la suite du bas, il n'existe pas d'ensemble de trois points monochromatiques dont les positions forment une progression arithmétique. Les triplets de points rouges se trouvent aux positions (1, 2, 5), (1, 2, 6), (2, 5, 6), dont aucune ne forme de progression arithmétique, et de même pour les points bleus.

Avec neuf points, tout coloriage doit contenir une suite de trois points monochromatiques qui forment une progression arithmétique. Par exemple, ajoutons un point rouge ou un point bleu à la fin de la suite du bas de la

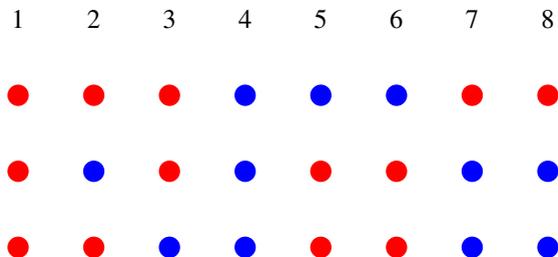


Fig. 8.1 – *Le problème de van der Waerden pour huit points coloriés.*

figure 8.1 pour obtenir les suites de la figure 8.2. Dans la suite du haut, il y a des points rouges aux positions (1, 5, 9), une progression arithmétique, et dans la suite du bas, il y a des points bleus aux positions (7, 8, 9), également une progression arithmétique.

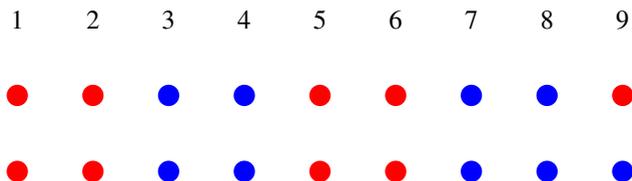


Fig. 8.2 – *Le problème de van der Waerden pour neuf points coloriés.*

Bartel L. van der Waerden a posé le problème suivant : pour tout entier strictement positif k , quel est le plus petit nombre n tel que toute suite de n points coloriés doit contenir une suite de k points monochromatiques qui forment une progression arithmétique ? Pour $k = 3$, on a $n = 9$, comme démontré ci-dessus pour une décomposition. Le résultat suivant est plus difficile à démontrer : pour $k = 4$, on a $n = 35$.

8.4 Le théorème de Ramsey

Colorions les arêtes de K_5 , le graphe complet à 5 sommets, avec deux couleurs comme indiqué sur la figure 8.3. Il n'y a pas de sous-graphes monochromatiques K_3 (triangles) dans le graphe. La figure 8.4 montre un coloriage de K_6 et il est facile de voir qu'il existe des triangles monochromatiques $\triangle ACE$ et $\triangle BDF$. Dans cette section, nous démontrons un cas simple d'un

théorème de Frank P. Ramsey sur l'existence de sous-ensembles ayant une certaine propriété.

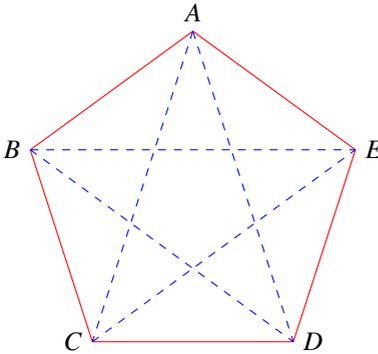


FIG. 8.3 – Un coloriage de K_5 avec deux couleurs.

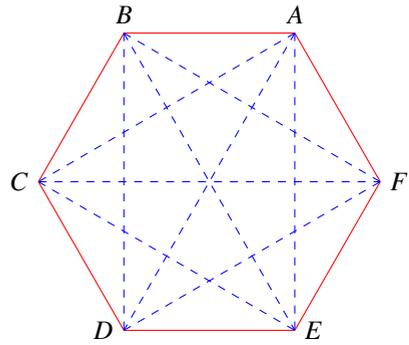


FIG. 8.4 – Un coloriage de K_6 avec deux couleurs.

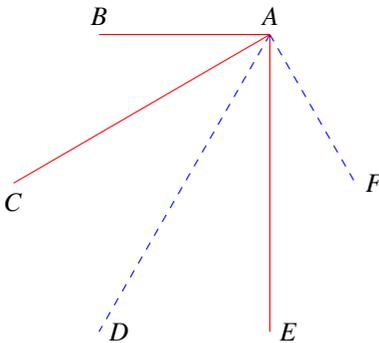
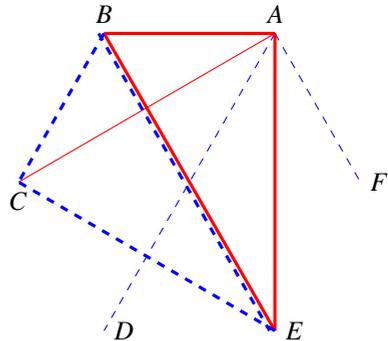
Définition 8.3. Le nombre de Ramsey pour k , $R(k)$, est le plus petit nombre n tel que dans tout coloriage avec deux couleurs de K_n , le graphe complet à n sommets, il existe un sous-graphe complet K_k monochromatique.

Théorème 8.5 (Ramsey). $R(3) = 6$.

Démonstration. La figure 8.3 montre que $R(3) > 5$. Pour montrer que $R(3) \leq 6$, considérons un sommet quelconque s dans K_6 . Le sommet s est relié à cinq autres sommets, et lorsque les arêtes sont coloriées avec deux couleurs, il doit y avoir au moins trois arêtes monochromatiques qui arrivent en s .

Sur la figure 8.5, les arêtes \overline{AB} , \overline{AC} et \overline{AE} sont coloriées en rouge. Puisque le graphe est complet, tous les sommets sont reliés, donc si l'une des arêtes \overline{BC} , \overline{BE} ou \overline{CE} est coloriée en rouge, disons \overline{BE} , un triangle rouge $\triangle ABE$ se forme. Sinon, les trois arêtes sont coloriées en bleu et forment un triangle bleu (fig. 8.6). \square

Le théorème se généralise à un nombre quelconque de couleurs, ainsi qu'à des coloriations où les tailles des sous-graphes ne sont pas les mêmes. $R(r, b, v)$ est le plus petit graphe complet tel que dans tout coloriage à trois couleurs, il doit y avoir des sous-graphes complets avec r arêtes rouges, b arêtes bleues et v arêtes vertes.

FIG. 8.5 – Un sommet de K_6 .FIG. 8.6 – Triangles monochromatiques dans K_6 .

8.5 La méthode probabiliste

Les seuls nombres de Ramsey non triviaux connus sont $R(3) = 6$ et $R(4) = 18$. En 1947, Paul Erdős a introduit la méthode probabiliste et l'a utilisée pour établir des limites inférieures et supérieures pour $R(k)$. Des recherches ultérieures ont permis d'améliorer ces deux bornes, mais il s'agit toujours d'un domaine de recherche important, car les bornes ne sont pas étroites. Par exemple, on a démontré que $43 \leq R(5) \leq 48$ et $798 \leq R(10) \leq 23\,556$. Dans cette section, on utilise les probabilités élémentaires pour obtenir une borne inférieure sur $R(k)$.

Pour démontrer qu'il existe un élément d'un ensemble S qui possède la propriété A , on démontre que la probabilité qu'un élément aléatoire de S possède la propriété A est strictement positive. Il est important de comprendre que cette méthode n'est pas constructive : elle démontre simplement qu'un tel élément existe, mais elle ne le construit pas. Bien que d'après le théorème 8.5 nous sachions que $R(3) = 6$, utilisons la méthode probabiliste pour obtenir une borne inférieure pour $R(3)$.

Théorème 8.6 (Erdős). $R(3) > 4$.

Démonstration. Étant donné un coloriage aléatoire de K_n par les deux couleurs rouge et bleu, on considère un sous-graphe arbitraire K_3 , c'est-à-dire un triangle arbitraire avec $\binom{3}{2} = 3$ côtés. La probabilité que tous les côtés soient coloriés en rouge est 2^{-3} , tout comme la probabilité que tous les côtés soient

coloriés en bleu. Donc la probabilité que le triangle soit monochromatique est $2^{-3} + 2^{-3} = 2^{-2} = 1/4$. Le nombre de triangles dans K_n est $\binom{n}{3}$, donc la probabilité $P(n, 3)$ qu'un triangle quelconque contenu dans un coloriage aléatoire de K_n soit monochromatique est

$$P(n, 3) = \binom{n}{3} \cdot \frac{1}{4}.$$

Si $P(n, 3) < 1$ alors son complément vérifie $\bar{P}(n, 3) = 1 - P > 0$, c'est-à-dire la probabilité pour qu'un coloriage aléatoire de K_n ne contienne pas un triangle monochromatique est strictement positive. Donc il doit en exister au moins un.

Le tableau suivant montre $\bar{P}(n, 3)$ pour plusieurs valeurs de n , et indique si la valeur de $\bar{P}(n, 3)$ montre qu'il existe un coloriage sans triangle monochromatique :

n	$\bar{P}(n, 3)$	existe	
3	3/4	oui	□
4	5/6	oui	
5	-3/7	-	

À première vue, le résultat est étrange, car la figure 8.3 montre qu'il existe un coloriage de K_5 sans coloriage monochromatique. Cependant, le critère probabiliste est suffisant mais pas nécessaire ; c'est une borne inférieure qui signifie que $R(n) > 4$, ce qui est vrai puisque le théorème 8.5 montre que $R(n) = 6$.

La même démonstration fonctionne pour k arbitraire, donc la probabilité de l'existence d'un coloriage de K_n sans graphe complet monochromatique K_k est

$$P(n, k) = \binom{n}{k} \cdot 2 \cdot 2^{-\binom{k}{2}}.$$

Pour $k = 4$,

$$\bar{P}(n, 4) = 1 - \binom{n}{4} \cdot 2^{-5} = \left(32 - \binom{n}{4}\right) / 32,$$

$$\bar{P}(6, 4) = (32 - 15)/32 = 17/32,$$

$$\bar{P}(7, 4) = (32 - 35)/32 = -3/32.$$

Il s'ensuit que $R(4) > 6$ ce qui est beaucoup moins que la valeur connue $R(4) = 18$.

8.6 Résolution SAT

La résolution SAT est une méthode de résolution de problèmes qui consiste à coder un problème sous forme de formule en logique propositionnelle, puis à utiliser un programme informatique pour vérifier la valeur de vérité de la formule. Les progrès des algorithmes et des implémentations ont fait de la résolution SAT une approche possible de la résolution de problèmes. Nous donnons un aperçu de la résolution SAT et expliquons comment elle peut être utilisée pour résoudre les problèmes mathématiques décrits dans ce chapitre. Le lecteur est supposé avoir une connaissance élémentaire de la logique propositionnelle telle que résumée dans la définition 8.4.

8.6.1 La logique propositionnelle et le problème SAT

Définition 8.4.

- Une *formule* est composée de *formules atomiques* ou *atomes* reliés par les opérateurs propositionnels \vee (disjonction, « ou »), \wedge (conjonction, « et »), \neg (négation, « non »).
- Une formule reçoit une *interprétation* par une affectation de V (vrai) ou F (faux) à chaque atome. En évaluant une formule dans une interprétation, on obtient sa *valeur de vérité* V ou F .
- Une formule est *satisfaisable* s'il existe une interprétation qui donne la valeur de vérité V . Sinon, la formule est *insatisfaisable*.
- Une formule est en *forme normale conjonctive* (FNC) si elle est composée d'une conjonction de sous-formules dont chacune est une disjonction de *littéraux* (atomes ou négations d'atomes).

La formule suivante est en FNC :

$$(\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg r) \wedge (p \vee q \vee \neg r).$$

Le *problème SAT* consiste à décider si une formule donnée en FNC est satisfaisable ou non. Un *solveur SAT* est un programme informatique capable de résoudre le problème SAT. La plupart des solveurs SAT sont basés sur

l'algorithme DPLL qui remonte aux années 1960, mais des développements récents ont permis d'améliorer considérablement cet algorithme. Les implémentations hautement optimisées de ces algorithmes ont fait des solveurs SAT un outil important pour la résolution de problèmes dans de nombreux domaines, y compris les mathématiques.

8.6.2 Les triplets de Schur

Codons le problème des triplets de Schur $S(8)$ comme une formule en FNC. La formule sera satisfaisable si et seulement s'il existe une décomposition d'un ensemble S en sous-ensembles disjoints S_1 et S_2 telle que ni S_1 ni S_2 ne contiennent un triplet de Schur. Il y a un atome p_i pour chacun des nombres $1 \leq i \leq 8$. Le sens voulu d'une interprétation de la formule est qu'elle attribue V à p_i si i est dans le premier sous-ensemble S_1 et qu'elle attribue F à p_i si i est dans le second sous-ensemble S_2 . Pour montrer que dans toutes les décompositions, aucun sous-ensemble ne contient un triplet de Schur, l'interprétation doit garantir que pour chaque triplet de Schur possible, au moins un atome prend la valeur V et un atome prend la valeur F .

Par exemple, $\{2, 4, 6\}$ est un triplet de Schur, donc au moins un des trois entiers doit être dans S_1 et au moins un d'entre eux doit être dans S_2 . Par conséquent, $p_2 \vee p_4 \vee p_6$ doit être vrai et aussi $\neg p_2 \vee \neg p_4 \vee \neg p_6$ doit être vrai. Il y a 12 triplets de Schur possibles, donc la formule en FNC est

$$\begin{aligned}
 & (p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3) \wedge \\
 & (p_1 \vee p_3 \vee p_4) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge \\
 & (p_1 \vee p_4 \vee p_5) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_4 \vee \neg p_5) \wedge \\
 & (p_1 \vee p_5 \vee p_6) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_5 \vee \neg p_6) \wedge \\
 & (p_1 \vee p_6 \vee p_7) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_6 \vee \neg p_7) \wedge \\
 & (p_1 \vee p_7 \vee p_8) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_7 \vee \neg p_8) \wedge \\
 & (p_2 \vee p_3 \vee p_5) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_3 \vee \neg p_5) \wedge \\
 & (p_2 \vee p_4 \vee p_6) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_4 \vee \neg p_6) \wedge \\
 & (p_2 \vee p_5 \vee p_7) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_5 \vee \neg p_7) \wedge \\
 & (p_2 \vee p_6 \vee p_8) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_6 \vee \neg p_8) \wedge \\
 & (p_3 \vee p_4 \vee p_7) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_4 \vee \neg p_7) \wedge \\
 & (p_3 \vee p_5 \vee p_8) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_5 \vee \neg p_8) .
 \end{aligned} \tag{8.3}$$

Lorsqu'on donne cette formule à un solveur SAT, il répond que la formule est

satisfaisable sous l'une ou l'autre des interprétations :

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8
F	F	V	F	V	V	V	F
V	V	F	V	F	F	F	V

L'une des interprétations correspond à la décomposition de l'équation 8.2, $S_1 = \{1, 2, 4, 8\}$ et $S_2 = \{3, 5, 6, 7\}$, tandis que l'autre correspond à la décomposition symétrique $S_1 = \{3, 5, 6, 7\}$ et $S_2 = \{1, 2, 4, 8\}$.

Pour $S(9)$, quatre paires de sous-formules sont ajoutées pour les triplets supplémentaires possibles :

$$\begin{aligned}
 & (p_1 \vee p_8 \vee p_9) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_8 \vee \neg p_9) \wedge \\
 & (p_2 \vee p_7 \vee p_9) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_7 \vee \neg p_9) \wedge \\
 & (p_3 \vee p_6 \vee p_9) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_6 \vee \neg p_9) \wedge \\
 & (p_4 \vee p_5 \vee p_9) \wedge (\neg p_4 \vee \neg p_5 \vee \neg p_9) .
 \end{aligned}$$

Lorsque l'on donne cette formule au solveur SAT, il répond que la formule est insatisfaisable, ce qui signifie qu'aucune décomposition ne possède de triplet de Schur. En enlevant la double négation, cela signifie que dans chaque décomposition de $S(9)$ il existe un triplet de Schur.

8.6.3 Les triplets pythagoriciens

Heule et Kullmann ont résolu le problème des triplets pythagoriciens à l'aide d'un solveur SAT hautement optimisé. Ils ont constaté une différence d'efficacité significative entre le fait de trouver une décomposition qui n'a pas de triplets pythagoriciens (il suffit d'une seule décomposition) et celui de montrer que toutes les décompositions ont un triplet pythagoricien (il faut toutes les vérifier). Montrer que pour tous les $S(n)$ avec $1 \leq n \leq 7\,824$ il existe une décomposition sans triplet n'a pris qu'une minute de temps de calcul, alors que montrer que chaque décomposition de $S(7\,825)$ a un triplet a pris environ deux jours de temps de calcul pour un ordinateur avec 800 processeurs travaillant en parallèle, soit 40 000 heures de temps de calcul.

L'utilisation des ordinateurs en mathématiques soulève naturellement la question : peut-on faire confiance à une démonstration générée par un ordinateur? Bien sûr, même les démonstrations mathématiques « ordinaires » peuvent ne pas être correctes (sect. 4.7), mais notre expérience des bogues

informatiques fréquents, ainsi que l'opacité des grands programmes informatiques, nous rendent plus sensibles aux erreurs potentielles des démonstrations générées par ordinateur.

Une façon d'accroître la confiance dans l'exactitude d'une démonstration générée par ordinateur consiste à utiliser deux ou plusieurs programmes, écrits indépendamment par deux ou plusieurs chercheurs. Si les multiples programmes sont écrits dans des langages de programmation différents et pour des ordinateurs et des systèmes d'exploitation différents, cela réduit la possibilité d'un bogue dans le matériel et les logiciels informatiques.

Le solveur SAT de Heule et Kullmann a écrit un journal des étapes de la démonstration afin de pouvoir en examiner l'exactitude. Le journal était si volumineux, 200 téraoctets, qu'il était impossible de l'examiner directement. Pour mettre cela en perspective, 200 téraoctets correspondent à 200 000 gigaoctets, alors que votre ordinateur a une mémoire interne de 16 gigaoctets et un disque dur de 128 gigaoctets. Au lieu de cela, ils ont écrit un petit programme pour vérifier l'exactitude des données dans le journal. Pour s'assurer que ce programme était correct, ils ont écrit une démonstration formelle à l'aide de l'assistant de preuve Coq qui soutient et vérifie le travail des mathématiciens sans automatiser totalement le processus de démonstration.

8.6.4 Aperçu de l'algorithme DPLL

Le premier algorithme que l'on apprend pour la résolution SAT est la table de vérité. Étant donné une formule A en logique propositionnelle avec n atomes différents, il existe 2^n interprétations puisque chaque atome peut se voir attribuer indépendamment V ou F . Pour chaque interprétation, il est simple de calculer la valeur de vérité de A en utilisant la définition des opérateurs propositionnels. Cependant, vérifier 2^n interprétations est très inefficace, même pour une taille modérée de n .

L'algorithme DPLL fonctionne en affectant de manière incrémentielle V ou F à un atome, puis en tentant d'évaluer la formule. Considérons par exemple $A = p \wedge q \wedge \neg r$. Si F est affecté à p , alors A prend la valeur F , indépendamment des affectations à q et r , et il n'est pas nécessaire d'effectuer d'autres évaluations. De même, $A = p \vee q \vee \neg r$ prend la valeur V si p est affecté à V , indépendamment des affectations à q et r .

L'efficacité des DPLL provient de la propagation des unités. Considérons

une partie de la formule pour les triplets de Schur :

$$\begin{aligned}
 & (p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3) \wedge \\
 & (p_1 \vee p_3 \vee p_4) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge \\
 & \dots \\
 & (p_3 \vee p_4 \vee p_7) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_4 \vee \neg p_7) \wedge \\
 & (p_3 \vee p_5 \vee p_8) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_5 \vee \neg p_8) .
 \end{aligned} \tag{8.4}$$

Supposons que nous ayons attribué F à p_1 et p_2 . La première sous-formule se réduit à la formule unitaire constituée de l'unique atome p_3 . Pour que la formule soit satisfaite, nous devons affecter V à p_3 et toutes les sous-formules

$$(p_1 \vee p_2 \vee p_3), (p_1 \vee p_3 \vee p_4), (p_3 \vee p_4 \vee p_7), (p_3 \vee p_5 \vee p_8),$$

prennent immédiatement la valeur V .

Puisque $\neg p_3$ vaut F , chaque sous-formule contenant $\neg p_3$ ne peut être satisfaite que si un autre littéral de la sous-formule prend la valeur V . Dans $\neg p_3 \vee \neg p_5 \vee \neg p_8$, il faut attribuer F à p_5 ou p_8 pour que $\neg p_5$ ou $\neg p_8$ prenne la valeur V .

Cette analyse montre qu'une fois que F a été attribué à p_1 et p_2 , la formule de l'équation 8.4 est satisfaisable si et seulement si $(\neg p_4 \vee \neg p_7) \wedge (\neg p_5 \vee \neg p_8)$ est satisfaisable. En effectuant la propagation de p_3 sur toutes les sous-formules de l'équation 8.3, la formule se réduit à

$$\begin{aligned}
 & (p_4 \vee p_5) \wedge (p_4 \vee p_6) \wedge (p_5 \vee p_6) \wedge (p_5 \vee p_7) \wedge \\
 & (p_6 \vee p_7) \wedge (p_6 \vee p_8) \wedge (p_7 \vee p_8) \wedge \\
 & (\neg p_4 \vee \neg p_7) \wedge (\neg p_5 \vee \neg p_8) .
 \end{aligned}$$

Une affectation supplémentaire de F à p_4 aboutit à une interprétation satisfaisante que nous avons trouvée après seulement trois affectations arbitraires.

8.7 Les triplets pythagoriciens dans les mathématiques babyloniennes

Cette section est une digression de la théorie de Ramsey; elle est incluse pour donner un aperçu de la riche théorie des triplets pythagoriciens et pour démontrer la profondeur des connaissances mathématiques dans le monde antique. Les triplets pythagoriciens étaient connus des mathématiques babyloniennes depuis au moins 1800 avant notre ère.

Définition 8.5. Un *triplet pythagoricien primitif* est un ensemble de trois entiers strictement positifs $\{a, b, c\}$ tels que $a^2 + b^2 = c^2$ et tels que a, b, c n'aient pas de facteur commun strictement supérieur à 1.

Exemple 8.3. $\{3, 4, 5\}$ est un triplet pythagoricien primitif, contrairement à $\{6, 8, 10\}$ pour lequel 2 est un facteur commun.

Une tablette cunéiforme appelée *Plimpton 322* est l'un des plus anciens exemples de mathématiques babyloniennes. Elle énumère quinze triplets pythagoriciens primitifs en donnant a et c . Le tableau 8.1 présente quatre de ces triplets, ainsi que les valeurs calculées de b et d'autres valeurs qui seront discutées plus loin. Les historiens des mathématiques ont proposé plusieurs explications pour la découverte de ces triplets. L'une d'elles est que la formule d'Euclide a été utilisée pour obtenir les triplets à partir d'une paire de nombres générateurs.

Théorème 8.7 (Euclide). $\{a, b, c\}$ est un triplet pythagoricien primitif si et seulement s'il existe deux entiers positifs u, v , appelés nombres générateurs, tels que :

1. $u > v$;
2. ils ne sont pas tous les deux impairs ;
3. ils n'ont pas de facteur commun strictement supérieur à 1 ;
4. les relations suivantes existent entre $\{a, b, c\}$ et u, v :

$$a = u^2 - v^2, \quad b = 2uv, \quad c = u^2 + v^2.$$

TAB. 8.1 – Les triplets babyloniens de la tablette *Plimpton 322*.

a	a_{facteurs}	b	b_{facteurs}	c	u	u_{facteurs}	v	v_{facteurs}
119	$7 \cdot 17$	120	$2^3 \cdot 3 \cdot 5$	169	12	$2^2 \cdot 3$	5	5
4 601	$43 \cdot 107$	4 800	$2^6 \cdot 3 \cdot 5^2$	6 649	75	$3 \cdot 5^2$	32	2^5
12 709	$71 \cdot 179$	13 500	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3$	18 541	125	5^3	54	$2 \cdot 3^3$
65	$5 \cdot 13$	72	$2^3 \cdot 3^2$	97	9	3^2	4	2^2

Démonstration. En calculant, on voit immédiatement que si $\{a, b, c\}$ peuvent être exprimés comme requis au point 4, ils forment un triplet pythagoricien :

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 \\ &= u^4 - 2(uv)^2 + v^4 + 4(uv)^2 \\ &= u^4 + 2(uv)^2 + v^4 \\ &= (u^2 + v^2)^2 = c^2. \end{aligned}$$

La démonstration dans l'autre sens est plus compliquée. Elle est omise. \square

S'il est vrai que les Babyloniens utilisaient la formule d'Euclide, la question demeure : comment ont-ils découvert les nombres générateurs u et v ?

Chaque ligne du tableau 8.1 indique a_{facteurs} et b_{facteurs} , les factorisations de a et b , respectivement, ce qui montre qu'elles n'ont pas de facteurs communs. Le lecteur est invité à vérifier que c n'a pas de facteur commun avec a et b , donc les triplets sont primitifs. Les nombres générateurs u , v et u_{facteurs} , v_{facteurs} sont également indiqués. Non seulement ils n'ont pas de facteurs communs comme l'exige le théorème 8.7, mais les seuls facteurs supérieurs à 1 dans u et v sont des puissances de 2, 3 et 5.

Définition 8.6. Un *triplet babylonien* est un triplet pythagoricien primitif tel que les seuls facteurs premiers de u et v soient 2, 3 et 5.

La raison pour laquelle les Babyloniens se limitaient à ces facteurs est qu'ils utilisaient le système de numération sexagésimal (en base $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$) dont les facteurs premiers sont 2, 3 et 5.

Pour les lecteurs qui ne sont pas familiers avec les systèmes numériques non décimaux, voici un bref aperçu du concept. L'écriture 12 345 est une abréviation pour le nombre

$$(1 \times 10^4) + (2 \times 10^3) + (3 \times 10^2) + (4 \times 10^1) + (5 \times 10^0).$$

Ce système de numération est appelé le système de numération décimal ou en base 10. Il y a dix chiffres 0, 1, 2, ..., 8, 9 pour les coefficients des puissances, et les puissances sont représentées par les places des coefficients, les puissances augmentant de droite à gauche.

Le nombre peut également être représenté dans le système binaire ou en base 2 par :

$$\begin{aligned} 12\,345 &= 8\,192 + 4\,096 + 32 + 16 + 8 + 1 \\ &= 2^{13} + 2^{12} + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^0 = 11000000111001. \end{aligned}$$

La notation binaire utilise deux chiffres 0 et 1 pour les coefficients et les puissances de deux sont indiquées par les places des coefficients.

Un autre système numérique populaire est le système numérique *hexadécimal* ou en base 16, qui est utilisé en informatique. Pour ce système de numération, nous avons besoin de 16 chiffres et la convention est d'utiliser 0, 1, 2, . . . , 8, 9, A, B, C, D, E, F.

Le système de nombres en base 60 n'est pas aussi inconnu qu'il n'y paraît, car nous représentons le temps, les coordonnées géographiques et les angles dans ce système. Nous sommes à l'aise pour effectuer des calculs tels que (1 heure 40 minutes) plus (1 heure 30 minutes) égal (3 heures 10 minutes).

Le tableau 8.2 indique les valeurs de a et c qui apparaissent dans la tablette en notation en base 60, où $\langle d \rangle$ représente le d -ième chiffre pour $0 \leq d < 60$.

Tab. 8.2 – Les triplets babyloniens en base 60.

a	c
$\langle 1 \rangle \langle 59 \rangle$	$\langle 2 \rangle \langle 49 \rangle$
$\langle 1 \rangle \langle 16 \rangle \langle 41 \rangle$	$\langle 1 \rangle \langle 50 \rangle \langle 49 \rangle$
$\langle 3 \rangle \langle 31 \rangle \langle 49 \rangle$	$\langle 5 \rangle \langle 09 \rangle \langle 01 \rangle$
$\langle 1 \rangle \langle 05 \rangle$	$\langle 1 \rangle \langle 37 \rangle$

Le lecteur peut vérifier que ces valeurs sont les mêmes que les valeurs décimales données dans le tableau 8.1, par exemple :

$$\begin{aligned} (3 \times 60^2) + (31 \times 60^1) + (49 \times 60^0) &= 12\,709, \\ (5 \times 60^2) + (9 \times 60^1) + (1 \times 60^0) &= 18\,541. \end{aligned}$$

Les Babyloniens n'avaient pas 60 symboles distincts pour les chiffres. Ils utilisaient plutôt un système hybride dans lequel les coefficients étaient représentés par deux symboles : l'un pour le coefficient des dizaines et l'autre

pour le coefficient des unités, et les positions des coefficients indiquaient les puissances de 60. En utilisant ♥ pour le coefficient des dizaines et ♦ pour le coefficient des unités, le nombre décimal $(38 \times 60) + (16 \times 60^0) = 2\,296$ serait représenté comme ceci :

$$\heartsuit\heartsuit\heartsuit \quad \begin{array}{c} \diamond\diamond\diamond \\ \diamond\diamond\diamond \end{array} \quad \heartsuit \quad \begin{array}{c} \diamond\diamond \\ \diamond\diamond\diamond \end{array} .$$

Quelle est la surprise ?

Le théorème de Frank P. Ramsey semblait être un résultat mineur en combinatoire. De manière surprenante, le théorème a été le fondement d'un domaine entièrement nouveau et stimulant des mathématiques, avec de nombreux problèmes ouverts. La nature de la théorie de Ramsey est également surprenante : si un ensemble est suffisamment grand, il existe des régularités dans ses sous-ensembles.

J'ai été initié à la théorie de Ramsey par l'article de Marijn J. H. Heule et Oliver Kullmann sur les triplets pythagoriciens dont la démonstration présente quelques similitudes avec la démonstration du théorème des quatre couleurs : l'utilisation de ressources informatiques massives qui n'aboutit qu'après des avancées théoriques. D'où le titre de leur article : *La science de la force brute*.

Les problèmes de combinatoire demandent des valeurs numériques spécifiques, par exemple, $R(n)$ doit être un entier positif spécifique. Il est surprenant que les méthodes probabilistes se soient avérées si fructueuses pour obtenir des résultats dans ce domaine.

Nous avons tendance à penser que les humains sont plus intelligents aujourd'hui qu'ils ne l'étaient il y a des milliers d'années. Il peut être surprenant de découvrir qu'il y a quatre mille ans, les mathématiques babyloniennes étaient suffisamment avancées pour découvrir que $\{12\,709, 13\,500, 18\,541\}$ est un triplet pythagorien.

Sources

Pour un aperçu de la théorie de Ramsey, voir [12], tandis qu'une présentation avancée se trouve dans [28]. La section sur la méthode probabiliste est basée sur [52, exemple 4o] et [12, chap. 4]. Une base de données des nombres de Ramsey se trouve dans [43].

La méthode de démonstration du théorème sur les triplets pythagoriciens est expliquée en détail dans [30]. Voir [7] pour une introduction à la logique

et à la résolution SAT. L'archive de mon solveur SAT pour l'éducation [8] contient des formules pour les triplets de Schur, les graphes de Ramsey et le problème de van der Waerden.

La section 8.7 se base sur [67] et [51]. Le système de numération sexagésimal est décrit dans [70].

Chapitre 9

Le problème de Langford

C. Dudley Langford a remarqué que son fils avait disposé des blocs de couleur comme indiqué sur la figure 9.1. Il y a un bloc entre les blocs rouges, deux blocs entre les blocs bleus et trois blocs entre les blocs verts.

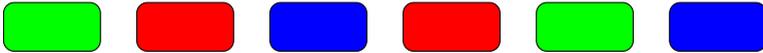


FIG. 9.1 – *Disposition des blocs pour le problème de Langford.*

Définition 9.1 (problème de Langford $L(n)$). Étant donné le multi-ensemble¹ d'entiers strictement positifs

$$\{1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots, n, n\},$$

peut-on les ordonner dans une suite telle que pour $1 \leq i \leq n$ il y ait i nombres entre les deux occurrences de i ?

La figure 9.1 montre que 312132 est une solution pour $L(3)$.

La section 9.1 reformule le problème de Langford en utilisant un formalisme mathématique qui facilite la résolution du problème. La section 9.2 caractérise les valeurs de n pour lesquelles $L(n)$ peut être résolu et présente deux démonstrations du théorème. La première démonstration, relativement simple, utilise la technique du double comptage : compter la même valeur de deux manières différentes et mettre en équation les formules résultantes. La seconde démonstration est une récurrence astucieuse, mais la « comptabilité » impliquée nécessite une attention particulière aux détails. La section 9.3 donne la solution pour $L(4)$.

1. Un *multiensemble* est comme un ensemble, sauf qu'il peut y avoir plus d'une occurrence d'un élément.

9.1 Le problème de Langford en tant que problème de recouvrement

Le problème de Langford peut être posé à l'aide d'un tableau. Pour $L(3)$, il y a six colonnes, une pour chaque position à laquelle les six chiffres peuvent être placés. Il y a une ligne pour chaque emplacement possible de l'un des chiffres, c'est-à-dire que les deux occurrences de k doivent être séparées par k chiffres. Il y a quatre positions possibles pour les deux 1, trois pour les deux 2 et deux pour les deux 3 :

	1	2	3	4	5	6
1	1		1			
2		1		1		
3			1		1	
4				1		1
5	2			2		
6		2			2	
7			2			2
8	3				3	
9		3				3

Pour résoudre le problème, nous devons choisir une ligne pour les 1, une ligne pour les 2 et une ligne pour les 3, de telle sorte que si nous empilons ces lignes les unes sur les autres, aucune colonne ne contienne plus d'un nombre.

La ligne 9 n'a pas besoin d'être prise en compte en raison de la symétrie : commencer par la ligne 9 donne juste l'inversion de la suite obtenue en commençant par la ligne 8.

La ligne 8 est la seule à contenir des 3, elle doit donc être choisie et la suite est $3_{\square\square}3_{\square}$. Il n'est plus possible d'utiliser les rangées contenant des chiffres dans les colonnes 1 et 5, car un seul chiffre peut être placé à chaque position. Signalons les lignes autorisées et interdites ainsi :

$$\cancel{1}, 2, \cancel{3}, 4, \cancel{5}, \cancel{6}, 7, 8.$$

La ligne 7 est la seule ligne restante contenant des 2, elle doit donc être choisie et la suite est $3_{\square}2_{\square}3_2$. En supprimant les lignes qui ne peuvent plus être utilisées, on obtient

$$\cancel{1}, 2, \cancel{3}, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{6}, 7, 8.$$

En choisissant la seule ligne restante, la ligne 2, on obtient la solution 312132 :

	1	2	3	4	5	6
2		1		1		
7			2			2
8	3				3	

L'analyse a montré que c'est la seule solution, à l'exception de la solution symétrique obtenue en commençant par la ligne 9.

9.2 Pour quelles valeurs de n le problème de Langford est-il être résolu ?

Théorème 9.1. $L(n)$ a une solution si et seulement si $n = 4k$ ou $n = 4k + 3$.

Nous démontrons le sens direct du théorème. La démonstration 1 montre que si $L(n)$ a une solution alors $n = 4k$ ou $n = 4k + 3$. La démonstration 2 montre que si $n = 4k + 1$ ou $n = 4k + 2$ alors $L(n)$ n'a pas de solution.

Démonstration 1. Si la première occurrence du nombre k est à la position i_k , la deuxième occurrence est à la position $i_k + k + 1$. Par exemple, dans 312132, la solution de $L(3)$, en choisissant $k = 2$, on obtient $i_k = 3$ et $i_k + k + 1 = 3 + 2 + 1 = 6$.

La somme S_n des positions de tous les nombres est

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=1}^n i_k + \sum_{k=1}^n (i_k + k + 1) \\
 &= 2 \sum_{k=1}^n i_k + \sum_{k=1}^n (k + 1) \\
 &= 2 \sum_{k=1}^n i_k + \frac{n(n+3)}{2}.
 \end{aligned}$$

Mais S_n est simplement $1 + 2 + 3 + \dots + 2n$, donc

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} k = \frac{2n(2n+1)}{2}.$$

L'égalité des deux formules pour S_n donne

$$2 \sum_{k=1}^n i_k + \frac{n(n+3)}{2} = \frac{2n(2n+1)}{2},$$

$$\sum_{k=1}^n i_k = \frac{1}{2} \left(\frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{n(n+3)}{2} \right)$$

$$= \frac{3n^2 - n}{4}.$$

Le côté gauche est un entier puisqu'il s'agit de la somme d'entiers (les positions), donc le côté droit doit aussi être un entier. Quand $3n^3 - n$ est-il divisible par 4 ? La factorisation de $3n^2 - n$ donne $n(3n - 1)$.

Si n est un multiple de 4, le produit est divisible par 4.

Quand $3n - 1$ est-il divisible par 4 ? Tout entier n peut être exprimé sous la forme $n = 4i + j$ avec $j = 0, 1, 2, 3$. Si $3n - 1$ est divisible par 4, alors $3(4i + j) - 1 = 12i + 3j - 1$ l'est aussi. Or $12i$ est divisible par 4. Pour $j = \{0, 1, 2, 3\}$, $3j - 1 = \{-1, 2, 5, 8\}$ est divisible par 4 si et seulement si $j = 3$, c'est-à-dire $n = 4i + 3$. □

Pour introduire l'idée de la deuxième démonstration, considérons ce à quoi pourrait ressembler une solution pour $n = 4$. Dans les tableaux suivants, les positions des occurrences de 4 sont 1 et 6, et les positions des occurrences de 2 sont 5 et 8. Dans les deux cas, une position est impaire et l'autre est paire.

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
*					*		

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
				*			*

Soit $k = 2m$ un nombre pair. Si i est la position de la première occurrence de k , alors la position de la deuxième occurrence est $i + k + 1$. La somme des positions est :

$$i + (i + k + 1) = 2i + 2m + 1 = 2(i + m) + 1,$$

qui est un nombre impair. Pour que la somme de deux nombres soit impaire, l'un doit être impair et l'autre pair.

Étudions maintenant les positions des occurrences des nombres impairs. Les positions des occurrences de 1 sont 2 et 4, deux nombres pairs, et les

positions des occurrences de 3 sont 3 et 7, deux nombres impairs.

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
	*		*				

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
		*				*	

Soit $k = 2m + 1$ un nombre impair. La somme des positions est

$$i + (i + k + 1) = 2i + 2m + 1 + 1 = 2(i + m + 1),$$

qui est un nombre pair. Pour que la somme de deux nombres soit paire, les deux doivent être impairs ou pairs.

Les positions $1, 2, \dots, 2n - 1, 2n$ contiennent un nombre égal de positions paires et impaires. Les deux occurrences d'un nombre dans une rangée « recouvrent » deux positions. Lorsque l'ensemble des lignes recouvre toutes les positions, elles doivent recouvrir un nombre égal de positions paires et de positions impaires. La parité d'un ensemble de lignes est définie comme la différence entre le nombre de positions paires et impaires recouvertes. Initialement, la parité est égale à zéro, et si le problème a une solution, l'ensemble de lignes dans la solution a également une parité nulle.

Lorsque deux occurrences d'un nombre pair sont placées, elles recouvrent une position paire et une position impaire, la parité reste donc la même :

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
-1					+1		

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
				-1			+1

Lorsque deux occurrences d'un nombre impair sont placées, la parité devient $+2$ ou -2 , nous devons donc pouvoir associer cette paire à une paire d'occurrences d'un autre nombre impair qui sont placées à des positions qui équilibrent la parité :

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
	+1		+1				

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
		-1				-1	

Nous avons montré qu'il peut y avoir une solution au problème de Langford si et seulement si il y a un nombre pair de nombres impairs dans $\{1, \dots, n\}$! Le

théorème affirme que si c'est vrai alors soit $n = 4k$, soit $n = 4k - 1$, et sinon soit $n = 4k - 2$, soit $4k - 3$.

Démonstration 2. La démonstration se fait par récurrence. Il y a quatre cas de base :

- $n = 4k - 3 = 1$. Dans $\{1\}$ il y a un nombre impair de nombres impairs et il n'y a pas de solution.
- $n = 4k - 2 = 2$. Dans $\{1, 2\}$ il y a un nombre impair de nombres impairs et il n'y a pas de solution.
- $n = 4k - 1 = 3$. Dans $\{1, 2, 3\}$, il y a un nombre pair de nombres impairs et nous avons vu qu'il existe une solution.
- $n = 4k - 0$. Dans $\{1, 2, 3, 4\}$ il y a un nombre pair de nombres impairs et la section 9.3 donne une solution.

L'hypothèse de récurrence est que le théorème est vrai pour $\{1, \dots, 4k - j\}$, $k \geq 1$, $0 \leq j \leq 3$, et nous démontrerons qu'il est vrai pour $n = 4(k + 1) - j$.

- Ajoutons $4k + 1 = 4(k + 1) - 3$ à $\{1, \dots, 4k\}$. Par hypothèse de récurrence, pour $4k = 4k - 0$, il existe un nombre pair de nombres impairs. Comme $4(k + 1) - 3$ est impair, il y a donc maintenant un nombre impair de nombres impairs et il n'y a pas de solution.
- Ajoutons $4k + 2 = 4(k + 1) - 2$ à $\{1, \dots, 4k + 1\}$. Par hypothèse de récurrence, pour $4k + 1 = 4(k + 1) - 3$, il existe un nombre impair de nombres impairs. Puisque $4(k + 1) - 2$ est pair, il y a encore un nombre impair de nombres impairs et il n'y a pas de solution.
- Ajoutons $4k + 3 = 4(k + 1) - 1$ à $\{1, \dots, 4k + 2\}$. Par hypothèse de récurrence, pour $4k + 2 = 4(k + 1) - 2$, il existe un nombre impair de nombres impairs. Puisque $4(k + 1) - 1$ est impair, il y a un nombre pair de nombres impairs et une solution peut exister.
- Ajoutons $4k + 4 = 4(k + 1) - 0$ à $\{1, 2, \dots, 4k + 3\}$. Par hypothèse de récurrence, pour $4k + 3 = 4(k + 1) - 1$, il existe un nombre pair de nombres impairs. Puisque $4(k + 1) - 0$ est pair, il y a un nombre pair de nombres impairs et une solution peut exister. □

9.3 Solution de $L(4)$

Voici le tableau pour $L(4)$. Essayez de trouver la solution vous-même.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1		1					
2		1		1				
3			1		1			
4				1		1		
5					1		1	
6						1		1
7	2			2				
8		2			2			
9			2			2		
10				2			2	
11					2			2
12	3				3			
13		3				3		
14			3				3	
15				3				3
16	4					4		
17		4					4	
18			4					4

Par symétrie, la ligne 18 peut être éliminée.

Choisissons la ligne 16. La suite est $4 _ _ _ _ 4 _ _$. Toute ligne comportant un élément en position 1 ou 6 ne peut plus faire partie de la solution.

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17$

Choisissons la ligne 14. La suite est $4 _ 3 _ _ 4 3 _$.

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17$

Choisissons la ligne 8. La suite est $4 2 3 _ 2 4 3 _$.

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17$

Tous les choix de 1 ont été éliminés, nous devons donc revenir en arrière.

Au lieu de la ligne 8, choisissons la ligne 11 et la suite est $4 _ 3 _ _ 2 4 3 2$.

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17$

Choisissons la ligne 2. Nous avons une solution $4 1 3 1 2 4 3 2$.

Continuons à revenir en arrière pour voir s'il existe une autre solution.

Au lieu de la ligne 14, choisissons la ligne 15. La suite est $4 _ _ 3 _ 4 _ 3$.

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17$

On doit choisir la ligne 8 et la suite est $4 2 _ 3 2 4 _ 3$.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17

Tous les choix de 1 ont été éliminés, donc nous revenons en arrière.

Au lieu de la ligne 16, choisissons la ligne 17 et la suite est $\square 4 \square \square \square \square 4 \square$.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17

Choisissons la ligne 15 et la suite est $\square 4 \square 3 \square \square 4 3$.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17

On doit choisir la ligne 9 et la suite est $\square 4 2 3 \square 2 4 3$.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17

Tous les choix de 1 ont été éliminés. Nous pouvons revenir en arrière une dernière fois.

Au lieu de la ligne 15, choisissons la ligne 12 et la suite est $3 4 \square \square 3 \square 4$.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17

Encore une fois, tous les choix de 1 ont été éliminés.

La seule solution est donc 41312432.

Quelle est la surprise ?

La source d'inspiration d'un théorème mathématique peut être surprenante. Langford a remarqué un motif dans les blocs colorés de son fils, ce qui a conduit à l'intéressant théorème 9.1. Les élèves devraient également être initiés au fait qu'un théorème peut avoir plusieurs démonstrations complètement différentes.

Sources

Ce chapitre se base sur [44]. [16] montre comment trouver une solution pour $n = 4k$ et $n = 4k + 3$.

Chapitre 10

Les axiomes de l'origami

L'origami, l'art du pliage du papier, a été développé il y a plusieurs siècles au Japon et connaît aujourd'hui un succès mondial. La théorie mathématique de l'origami a été développée à la fin du xx^e siècle. Elle repose sur un ensemble de sept axiomes, les « axiomes de Huzita-Hatori », du nom de Humiaki Huzita qui a formalisé les six premiers axiomes et de Koshiro Hatori qui a trouvé le septième. Jacques Justin a publié les sept axiomes plusieurs années avant Huzita et Hatori, et Margherita P. Beloch a formulé le sixième axiome en 1936. Néanmoins, les axiomes sont connus comme les axiomes de Huzita-Hatori ¹.

Dans une suite de trois chapitres, nous allons explorer les mathématiques de l'origami. Ce chapitre présente les axiomes, le chapitre 11 relie l'origami aux racines des polynômes et le chapitre 12 montre que les constructions avec l'origami peuvent résoudre des problèmes impossibles à résoudre à la règle et au compas.

Ce chapitre contient une section pour chacun des sept axiomes. Après l'énoncé d'un axiome et un diagramme du pli qu'il spécifie, on présente les équations du pli et des points d'intersection en utilisant la géométrie analytique. Un pli peut également être défini comme un lieu géométrique, c'est-à-dire l'ensemble de tous les points satisfaisant à une certaine propriété. Le terme « pli » vient de l'opération d'origami consistant à plier une feuille de papier, mais il est utilisé ici pour désigner la droite qui serait créée par le pliage du papier.

Les plis se traduisent par des réflexions. Étant donné un point p , son symétrique par rapport au pli l est un point p' tel que l soit la médiatrice du segment pp' (fig. 10.1).

10.1 Axiome 1

Axiome 10.1. Étant donné deux points distincts $p_1 = (x_1, y_1)$ et $p_2 = (x_2, y_2)$, il existe un pli unique l qui passe par ces deux points (fig. 10.2).

1. N.D.T. « Axiomes de Justin-Huzita-Hatori » dans [18].

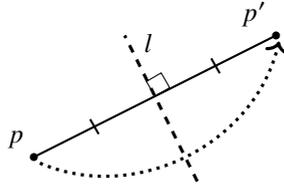


FIG. 10.1 – Le pli est la médiatrice du segment qui relie un point et son image.

Détermination de l'équation du pli. L'équation du pli l se déduit des coordonnées de p_1 et p_2 . La pente est le quotient des différences des coordonnées :

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \tag{10.1}$$

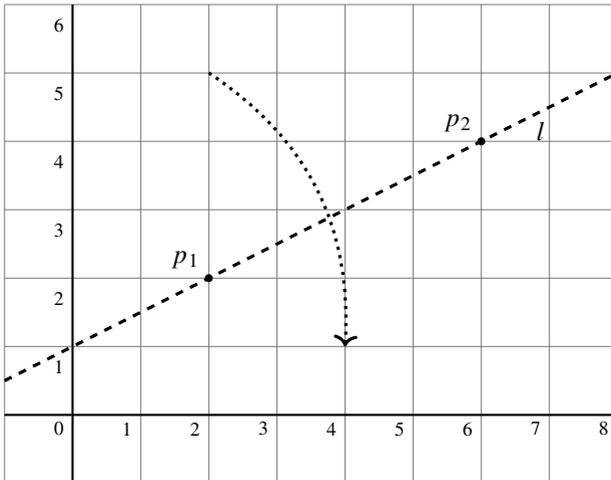


FIG. 10.2 – Axiome 1.

Exemple 10.1. Soient $p_1 = (2, 2)$ et $p_2 = (6, 4)$. L'équation de l est

$$y - 2 = \frac{4 - 2}{6 - 2}(x - 2),$$

$$y = \frac{1}{2}x + 1.$$

10.2 Axiome 2

Axiome 10.2. Étant donné deux points distincts $p_1 = (x_1, y_1)$ et $p_2 = (x_2, y_2)$, il existe un pli unique l qui place p_1 sur p_2 (fig. 10.3).

Le pli est le lieu géométrique de tous les points équidistants de p_1 et p_2 .

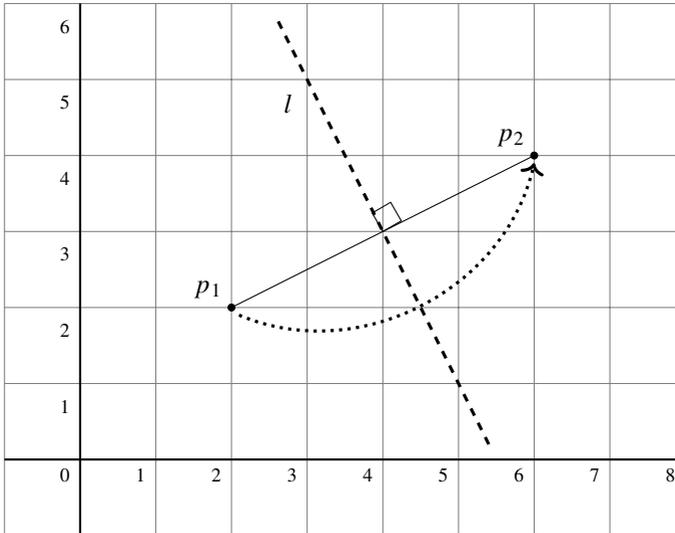


FIG. 10.3 – Axiome 2.

Détermination de l'équation du pli. Le pli l est la médiatrice de $\overline{p_1p_2}$. Sa pente est l'inverse de l'opposé de la pente de la droite qui relie p_1 et p_2 . Le pli l passe par le milieu des deux points :

$$y - \frac{y_1 + y_2}{2} = -\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \left(x - \frac{x_1 + x_2}{2} \right). \quad (10.2)$$

Exemple 10.2. Soient $p_1 = (2, 2)$ et $p_2 = (6, 4)$. L'équation de l est

$$y - \left(\frac{2+4}{2} \right) = -\frac{6-2}{4-2} \left(x - \left(\frac{2+6}{2} \right) \right),$$

$$y = -2x + 11.$$

10.3 Axiome 3

Axiome 10.3. Étant donné deux droites l_1 et l_2 , il existe un pli l qui place l_1 sur l_2 . (fig. 10.4).

Le pli est le lieu géométrique des points qui sont équidistants de l_1 et l_2 , où la distance d'un point à une droite est la longueur du segment passant par le point et perpendiculaire à la droite. En utilisant des triangles isométriques, il est facile de montrer que le pli est une bissectrice de l'angle formé par l_1 et l_2 .

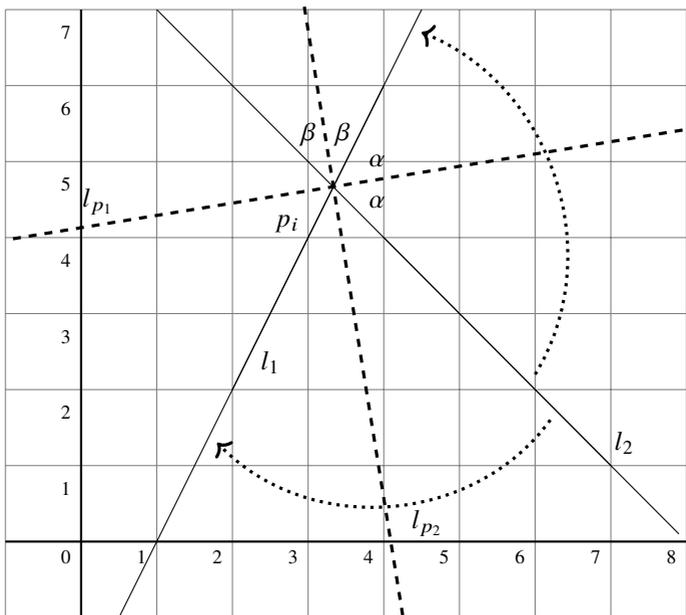


FIG. 10.4 – Axiome 3.

Détermination de l'équation du pli

l_1 et l_2 sont parallèles. Soient l_1 d'équation $y = mx + b_1$ et l_2 d'équation $y = mx + b_2$. Le pli est la droite parallèle à l_1 et l_2 qui est à mi-chemin entre elles :

$$y = mx + \frac{b_1 + b_2}{2}.$$

l_1 et l_2 se croisent. Soient l_1 d'équation $y = m_1x + b_1$ et l_2 d'équation

$y = m_2x + b_2$. Le point d'intersection des deux droites, $p_i = (x_i, y_i)$, vérifie

$$\begin{aligned} m_1x_i + b_1 &= m_2x_i + b_2, \\ x_i &= \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2}, \\ y_i &= m_1x_i + b_1. \end{aligned}$$

Exemple 10.3. Soient l_1 d'équation $y = 2x - 2$ et l_2 d'équation $y = -x + 8$. Alors $p_i = (x_i, y_i)$ est donné par

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{8 - (-2)}{2 - (-1)} = \frac{10}{3} \approx 3,33, \\ y_i &= 2 \cdot \frac{10}{3} - 2 = \frac{14}{3} \approx 4,67. \end{aligned}$$

Le pli est la bissectrice de l'angle formé par l_1 et l_2 à leur point d'intersection. Il y a deux plis possibles puisqu'il y a deux paires d'angles. Nous devons déterminer les pentes des bissectrices des angles. Si l'angle de la droite l_1 par rapport à l'axe x est θ_1 et l'angle de la droite l_2 par rapport à l'axe x est θ_2 , alors le pli est la droite qui fait un angle $\theta_b = (\theta_1 + \theta_2)/2$ par rapport à l'axe x .

Soient $m_1 = \tan \theta_1$ et $m_2 = \tan \theta_2$. D'après le théorème A.9, la pente m_s de la droite qui fait un angle $\theta_1 + \theta_2$ avec l'axe x est

$$m_s = \tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 + \tan \theta_2}{1 - \tan \theta_1 \tan \theta_2} = \frac{m_1 + m_2}{1 - m_1 m_2}.$$

D'après le théorème A.10, la pente m_b de la bissectrice de l'angle est

$$m_b = \tan \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \tan^2(\theta_1 + \theta_2)}}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + m_s^2}}{m_s}.$$

Exemple 10.4. Pour $y = 2x - 2$ et $y = -x + 8$, la pente de la bissectrice de l'angle est donnée par

$$\begin{aligned} m_s &= \frac{2 + (-1)}{1 - (2 \cdot -1)} = \frac{1}{3}, \\ m_b &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + (1/3)^2}}{1/3} = -3 \pm \sqrt{10} \approx -6,16; 0,162. \end{aligned}$$

Déterminons l'équation du pli l_{p_1} dont la pente est positive. D'après l'exemple 10.3, les coordonnées de l'intersection des deux droites sont

(10/3, 14/3). Par conséquent :

$$\frac{14}{3} = (-3 + \sqrt{10}) \cdot \frac{10}{3} + b_i,$$

$$b_i = \frac{44 - 10\sqrt{10}}{3},$$

$$y = (-3 + \sqrt{10})x + \frac{44 - 10\sqrt{10}}{3} \approx 0,162x + 4,13.$$

10.4 Axiome 4

Axiome 10.4. Étant donné un point p_1 et une droite l_1 , il existe un pli unique l perpendiculaire à l_1 qui passe par le point p_1 (fig. 10.5).

Le pli est le lieu géométrique de tous les points de la droite perpendiculaire à l_1 qui passe par p_1 .

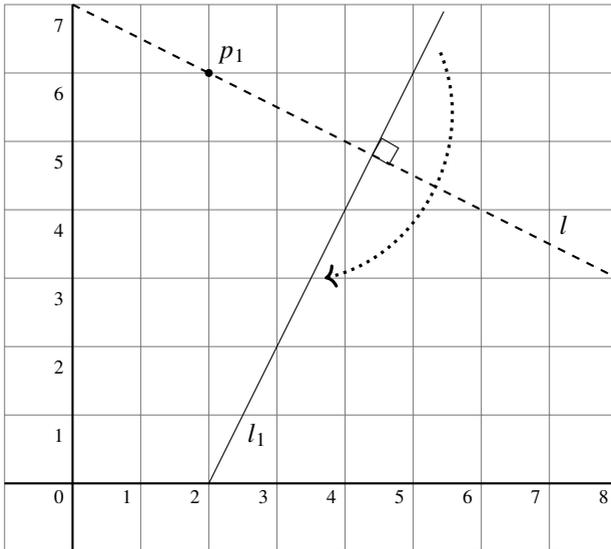


FIG. 10.5 – Axiome 4.

Détermination de l'équation du pli. Soient l_1 d'équation $y = m_1x + b_1$ et $p_1 = (x_1, y_1)$. Le pli l est perpendiculaire à l_1 , donc sa pente est $-(1/m_1)$.

Comme il passe par p_1 , nous pouvons calculer l'ordonnée à l'origine b et écrire son équation :

$$\begin{aligned}y_1 &= -\frac{1}{m_1}x_1 + b, \\b &= \frac{(m_1y_1 + x_1)}{m_1}, \\y &= -\frac{1}{m_1}x + \frac{(m_1y_1 + x_1)}{m_1}.\end{aligned}$$

Exemple 10.5. Soient $p_1 = (2, 6)$ et l_1 d'équation $y = 2x - 4$. L'équation du pli l est

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{2 \cdot 6 + 2}{2} = -\frac{1}{2}x + 7.$$

10.5 Axiome 5

Axiome 10.5. Etant donné deux points p_1 et p_2 et une droite l_1 , il existe un pli l qui place p_1 sur l_1 et passe par p_2 (fig. 10.6).

Puisque le pli passe par p_2 et que p_2 est sur la médiatrice de $\overline{p_1p'_1}$, le lieu géométrique de l'image de p_1 est le cercle de centre p_2 et de rayon $\overline{p_1p_2}$. Le pli est contraint par le fait que le symétrique p'_1 par rapport à ce pli doit être sur la droite donnée l_1 .

Détermination des équations des plis. Soit l_1 d'équation $y = m_1x + b_1$. Soient $p_1 = (x_1, y_1)$ et $p_2 = (x_2, y_2)$. L'équation du cercle de centre p_2 et de rayon $\overline{p_1p_2}$ est

$$\begin{aligned}(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 &= r^2, \quad \text{avec} \\r^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.\end{aligned}$$

En substituant l'équation de l_1 dans l'équation du cercle, on obtient

$$\begin{aligned}(x - x_2)^2 + ((m_1x + b_1) - y_2)^2 &= r^2, \\(x - x_2)^2 + (m_1x + (b_1 - y_2))^2 &= r^2.\end{aligned}$$

C'est une équation du second degré pour les coordonnées x des intersections possibles :

$$x^2(1 + m_1^2) + 2(-x_2 + m_1(b_1 - y_2))x + (x_2^2 + (b_1^2 - 2b_1y_2 + y_2^2) - r^2) = 0. \quad (10.3)$$

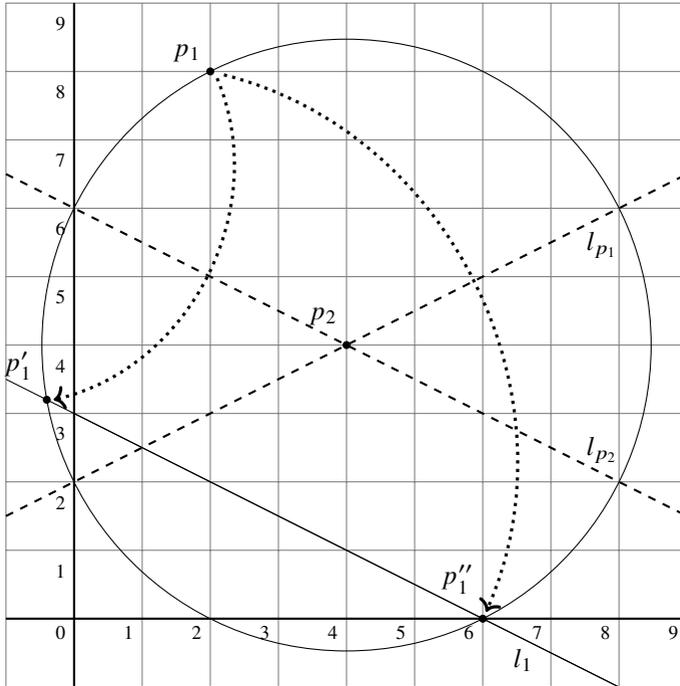


FIG. 10.6 – Axiome 5.

Puisqu’une équation du second degré a au plus deux solutions, pour une paire de points et une droite données, il peut y avoir zéro, un ou deux plis. À partir des solutions x'_1 et x''_1 , on peut calculer y'_1 et y''_1 avec $y = m_1x + b_1$. Les points images sont $p'_1 = (x'_1, y'_1)$ et $p''_1 = (x''_1, y''_1)$.

Exemple 10.6. Soient $p_1 = (2, 8)$ et $p_2 = (4, 4)$. Soit l_1 d’équation $y = -\frac{1}{2}x + 3$. L’équation du cercle est $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = (4 - 2)^2 + (4 - 8)^2 = 20$. Substituons l’équation de la droite dans l’équation du cercle pour obtenir une équation du second degré pour les coordonnées x des intersections (ou

utilisons l'équation 10.3) :

$$\begin{aligned}(x-4)^2 + \left(\left(-\frac{1}{2}x + 3 \right) - 4 \right)^2 &= 20, \\(x-4)^2 + (-1)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}x + 1 \right)^2 - 20 &= 0, \\5x^2 - 28x - 12 &= 0, \\(5x+2)(x-6) &= 0.\end{aligned}$$

Les deux points d'intersection sont

$$p'_1 = (-2/5; 16/5) = (-0,4; 3,2), \quad p''_1 = (6; 0).$$

Les plis seront les médiatrices de $\overline{p_1 p'_1}$ et $\overline{p_1 p''_1}$.

Exemple 10.7. Pour $p_1 = (2, 8)$ et $p'_1 = (-2/5, 16/5)$, l'équation de l_{p_2} est

$$\begin{aligned}y - \frac{8 + (16/5)}{2} &= -\frac{(-2/5) - 2}{(16/5) - 8} \left(x - \frac{2 + (-2/5)}{2} \right), \\y &= -\frac{1}{2}x + 6.\end{aligned}$$

Exemple 10.8. Pour $p_1 = (2, 8)$ et $p''_1 = (6, 0)$, l'équation de l_{p_1} est

$$\begin{aligned}y - \frac{8+0}{2} &= -\frac{6-2}{0-8} \left(x - \frac{2+6}{2} \right), \\y &= \frac{1}{2}x + 2.\end{aligned}$$

10.6 Axiome 6

Axiome 10.6. Étant donné deux points p_1 et p_2 et deux droites l_1 et l_2 , il existe un pli l qui place p_1 sur l_1 et place p_2 sur l_2 (fig. 10.7).

Un pli qui place p_i sur l_i est une droite l_p telle que la distance de p_i à l_p soit égale à la distance de son symétrique p'_i à l_p . Le lieu géométrique des points équidistants d'un point p_i et d'une droite l_i est une parabole. Le point p_i est appelé le foyer et la droite l_i la droite directrice. Un pli peut être toute droite tangente à la parabole (sect. 10.6.3).

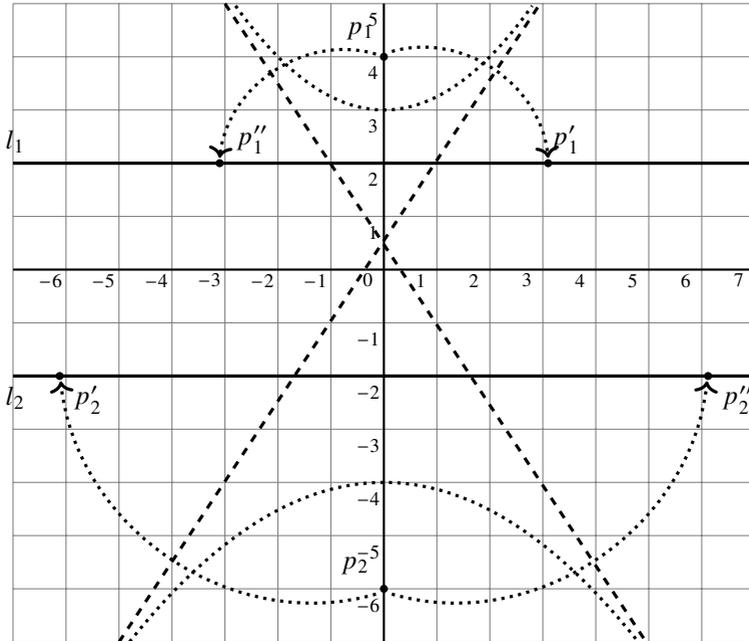


FIG. 10.7 – Axiome 6.

Pour qu'un pli place simultanément p_1 sur l_1 et p_2 sur l_2 , il faut que ce soit une tangente commune aux deux paraboles. Il peut y avoir zéro, un, deux ou trois tangentes communes (fig. 10.8, 10.9, 10.10, 10.11).

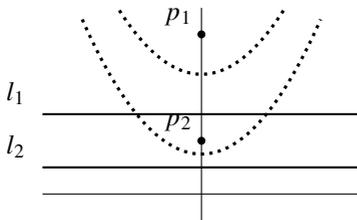


FIG. 10.8 – Pas de tangente commune.

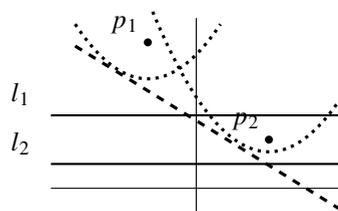


FIG. 10.9 – Une tangente commune.

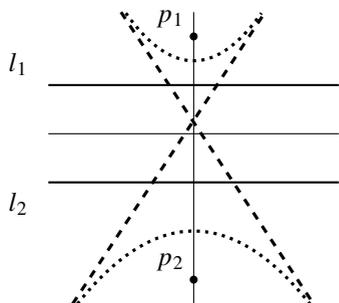


FIG. 10.10 – Deux tangentes communes.

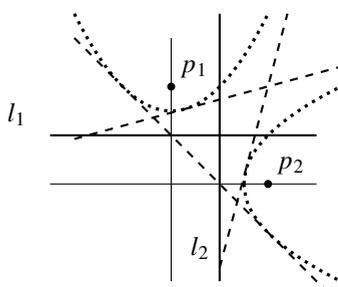


FIG. 10.11 – Trois tangentes communes.

L'équation d'une parabole arbitraire est assez complexe, nous limitons donc la présentation aux paraboles dont l'axe de symétrie est l'axe x ou y .

10.6.1 Détermination de l'équation d'un pli

Soit $(0, f)$ le foyer d'une parabole dont la droite directrice est $y = d$. Soit $p = f - d$, la distance algébrique entre le foyer et la directrice.² Si le sommet de la parabole est sur l'axe x , l'équation de la parabole est $y = x^2/(2p)$. Pour déplacer la parabole vers le haut ou vers le bas de l'axe des y de sorte que son sommet soit en $(0, h)$, ajoutons h à l'équation de la parabole (fig. 10.12) :

$$y = \frac{x^2}{2p} + h.$$

Posons $a = 2ph$ de sorte que l'équation de la parabole soit

$$y = \frac{x^2}{2p} + \frac{a}{2p}, \quad (10.4a)$$

$$x^2 - 2py + a = 0. \quad (10.4b)$$

L'équation de la parabole de la figure 10.12 est $x^2 - 12y + 12 = 0$.

Substituons l'équation d'une droite arbitraire $y = mx + b$ dans l'équation 10.4b pour obtenir une équation pour les points d'intersection de la droite

2. Nous avons utilisé la notation p_i pour les points; l'utilisation de p ici peut prêter à confusion, mais c'est la notation standard. On appelle p le paramètre de la parabole.

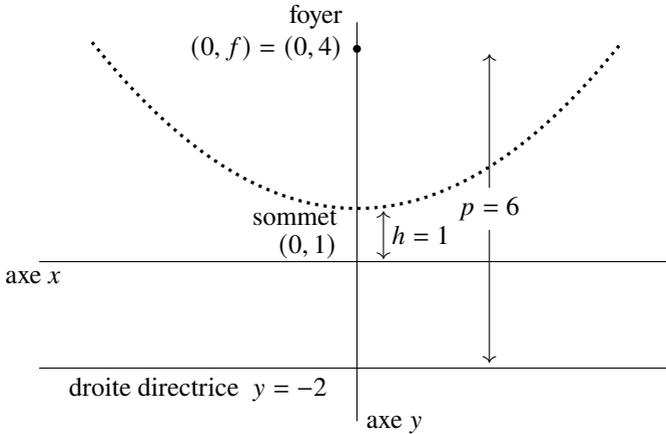


FIG. 10.12 – Les éléments de définition d'une parabole.

et de la parabole :

$$x^2 - 2p(mx + b) + a = 0,$$

$$x^2 + (-2mp)x + (-2pb + a) = 0.$$

La droite sera tangente à la parabole si et seulement si cette équation du second degré a exactement une solution, c'est-à-dire si et seulement si son discriminant est nul :

$$(-2mp)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2pb + a) = 0, \quad (10.5a)$$

$$m^2 p^2 + 2pb - a = 0. \quad (10.5b)$$

Il s'agit d'une équation avec des variables m et b pour les tangentes à la parabole. Pour obtenir les tangentes communes aux deux paraboles, nous devons résoudre simultanément les équations pour les deux paraboles.

Exemple 10.9.

Parabole 1 : foyer $(0, 4)$, droite directrice $y = 2$, sommet $(0, 3)$.

$p = 2$, $a = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$. L'équation de cette parabole est

$$x^2 - 4y + 12 = 0.$$

En substituant p et a dans l'équation 10.5b et en simplifiant, on obtient

$$m^2 + b - 3 = 0.$$

Parabole 2 : foyer $(0, -4)$, droite directrice $y = -2$, sommet $(0, -3)$.

$p = -2$, $a = 2 \cdot -2 \cdot -3 = 12$. L'équation de la parabole est

$$x^2 + 4y + 12 = 0.$$

En substituant p et a dans l'équation 10.5b et en simplifiant, on obtient

$$m^2 - b - 3 = 0.$$

Les solutions des deux équations

$$m^2 + b - 3 = 0,$$

$$m^2 - b - 3 = 0$$

sont $m = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1,73$ et $b = 0$. Il existe deux tangentes communes :

$$y = \sqrt{3}x, \quad y = -\sqrt{3}x.$$

Exemple 10.10.

Parabole 1 : inchangée.

Parabole 2 : foyer $(0, -6)$, droite directrice $y = -2$, sommet $(0, -4)$.

$p = -4$, $a = 2 \cdot -4 \cdot -4 = 32$. L'équation de la parabole est

$$x^2 + 8y + 32 = 0.$$

En substituant p et a dans l'équation 10.5b et en simplifiant, on obtient

$$2m^2 - b - 4 = 0.$$

Les solutions des deux équations

$$m^2 + b - 3 = 0,$$

$$2m^2 - b - 4 = 0$$

sont $m = \pm\sqrt{\frac{7}{3}} \approx \pm 1,53$ et $b = \frac{2}{3}$. Il y a deux tangentes communes :

$$y = \sqrt{\frac{7}{3}}x + \frac{2}{3}, \quad y = -\sqrt{\frac{7}{3}}x + \frac{2}{3}.$$

Exemple 10.11.

Définissons maintenant une parabole dont l'axe de symétrie est l'axe x .

Parabole 1 : inchangée.

Parabole 2 : foyer $(4, 0)$, droite directrice $x = 2$, sommet $(3, 0)$.

$p = 2$, $a = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$. L'équation de la parabole est

$$y^2 - 4x + 12 = 0. \quad (10.6)$$

C'est une équation avec x et y^2 au lieu de x^2 et y , donc l'équation 10.5b ne peut pas être utilisée et nous devons refaire les calculs.

Substituons l'équation d'une droite dans l'équation 10.6 :

$$\begin{aligned} (mx + b)^2 - 4x + 12 &= 0, \\ m^2x^2 + (2mb - 4)x + (b^2 + 12) &= 0. \end{aligned}$$

Écrivons que le discriminant est égal à zéro et simplifions :

$$\begin{aligned} (2mb - 4)^2 - 4m^2(b^2 + 12) &= 0, \\ -3m^2 - mb + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Si on essaie de résoudre les deux équations

$$\begin{aligned} m^2 + b - 3 &= 0, \\ -3m^2 - mb + 1 &= 0, \end{aligned}$$

on obtient une équation de degré trois en la variable m :

$$m^3 - 3m^2 - 3m + 1 = 0. \quad (10.7)$$

Comme une équation de degré trois a au moins une et au plus trois solutions réelles, il peut y avoir une, deux ou trois tangentes communes.

La formule pour résoudre les équations générales de degré trois est assez compliquée. On a donc utilisé une calculatrice sur internet et obtenu les trois solutions :

$$m \approx 3,73, m = -1, m \approx 0,27.$$

D'après la forme de l'équation 10.7, on peut deviner que $m = 1$ ou $m = -1$ est une solution :

$$\begin{aligned} 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 &= -4, \\ (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Divisons l'équation 10.7 par $m - (-1) = m + 1$ pour obtenir l'équation du second degré $m^2 - 4m + 1$, dont les racines sont les deux autres solutions de l'équation du troisième degré : $m = 2 \pm \sqrt{3} \approx 3,73; 0,27$.

10.6.2 Détermination des équations des réflexions

On cherche la position du symétrique $p'_1 = (x'_1, y'_1)$ de $p_1 = (x_1, y_1)$ par rapport à une droite tangente l_t dont l'équation est $y = m_t x + b_t$. On commence par trouver la droite l_p d'équation $y = m_p x + b_p$ qui est perpendiculaire à l_t et passe par p_1 :

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{m_t}x + b_p, \\ y_1 &= -\frac{1}{m_t}x_1 + b_p, \\ y &= \frac{-x}{m_t} + \left(y_1 + \frac{x_1}{m_t} \right). \end{aligned}$$

Trouvons ensuite l'intersection $p_t = (x_t, y_t)$ de l_t et l_p :

$$\begin{aligned} m_t x_t + b_t &= \frac{-x_t}{m_t} + \left(y_1 + \frac{x_1}{m_t} \right), \\ x_t &= \frac{\left(y_1 + \frac{x_1}{m_t} - b_t \right)}{\left(m_t + \frac{1}{m_t} \right)}, \\ y_t &= m_t x_t + b_t. \end{aligned}$$

p_t est le milieu de p_1 et p'_1 :

$$\begin{aligned} x_t &= \frac{x_1 + x'_1}{2}, & x'_1 &= 2x_t - x_1, \\ y_t &= \frac{y_1 + y'_1}{2}, & y'_1 &= 2y_t - y_1. \end{aligned}$$

Exemple 10.12. Soit l_t d'équation $y = \sqrt{3}x + 0$ et soit $p_1 = (0, 4)$:

$$x_t = \frac{\left(4 + \frac{0}{\sqrt{3}} - 0\right)}{\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \sqrt{3},$$

$$y_t = \sqrt{3}\sqrt{3} + 0 = 3,$$

$$x'_1 = 2x_t - x_1 = 2\sqrt{3} \approx 3,46,$$

$$y'_1 = 2y_t - y_1 = 2.$$

10.6.3 Tangentes à une parabole

Nous souhaitons démontrer que les plis de l'axiome 6 sont tangents aux paraboles. La figure 10.13 montre cinq points $p_i, i = 1, \dots, 5$, chaque point p_i étant à une distance a_i du foyer et de la droite directrice. Traçons des droites perpendiculaires à la droite directrice passant par p_i et désignons par p'_i les intersections de ces droites avec la droite directrice. D'après l'axiome 2, il existe des plis l_i passant par p_i qui placent p sur la droite directrice. Les points p'_i sont les symétriques de p par rapport aux plis. La figure 10.13 montre le pli l_1 passant par p_1 et le point p'_1 .

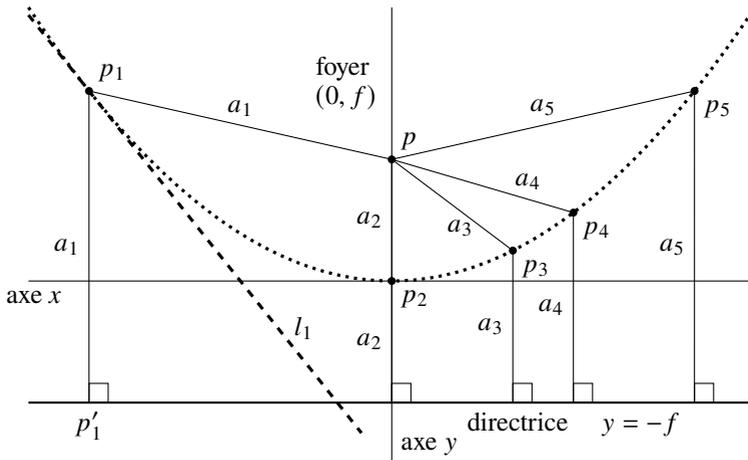


FIG. 10.13 – La tangente comme lieu géométrique.

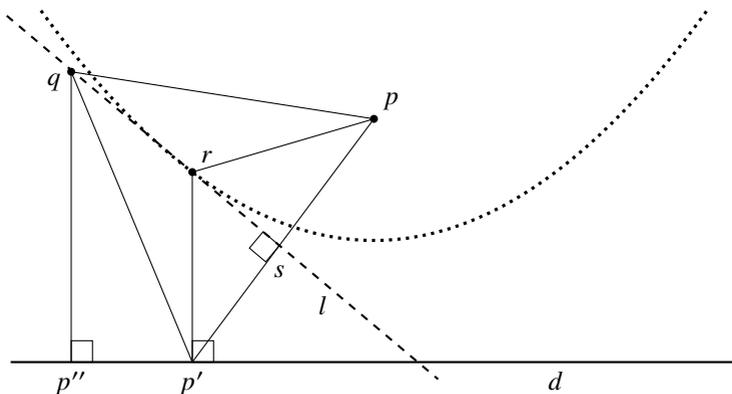


FIG. 10.14 – La démonstration que le pli est une tangente à la parabole.

Théorème 10.1. *Les plis de l'axiome 6 sont les tangentes aux deux paraboles qui sont les lieux des points équidistants de p_1 et l_1 (respectivement p_2 et l_2).*

Démonstration. Dans la figure 10.14, le foyer est p et la droite directrice est d . Le point p' est sur la droite directrice et l est le pli qui envoie p sur p' . Soit s l'intersection de $\overline{pp'}$ et l . Alors $\overline{ps} = \overline{p's}$ et $l \perp \overline{pp'}$ puisque l est la médiatrice de $\overline{pp'}$.

Soit r l'intersection de la droite perpendiculaire à d passant par p' et du pli l . Alors $\triangle psr \cong \triangle p'sr$ (deux côtés et un angle identiques). Il s'ensuit que $\overline{pr} = \overline{p'r}$, donc r est un point de la parabole.

Supposons que le pli l recoupe la parabole en un point $q \neq r$. Soit p'' la projection orthogonale de q sur la droite directrice d . On a $p'' \neq p'$. Puisque q est sur la parabole, on a $\overline{pq} = \overline{p''q}$. Puisque q est sur le pli l qui est la médiatrice de $\overline{pp'}$, on a $\overline{pq} = \overline{p'q}$. D'où $\overline{p''q} = \overline{p'q}$, ce qui est impossible, car $\overline{p'q}$ est l'hypoténuse du triangle rectangle $\triangle qp''p'$: l'hypoténuse ne peut pas être égale à l'un des autres côtés du triangle rectangle. Par conséquent, le pli l n'a qu'une seule intersection avec la parabole et doit être une tangente. \square

10.7 Axiome 7

Axiome 10.7. *Étant donné un point p_1 et deux droites l_1 et l_2 , il existe un pli l qui envoie p_1 sur l_1 et qui est perpendiculaire à l_2 (fig. 10.15).*

Le pli est le lieu géométrique de tous les points de la droite perpendiculaire à l_2 , équidistants de p_1 et p'_1 , l'image de p_1 sur l_1 .

Détermination de l'équation du pli. Soit $p_1 = (x_1, y_1)$. Soient l_1 d'équation $y = m_1x + b_1$ et l_2 d'équation $y = m_2x + b_2$. Soit l_p la droite contenant $\overline{p_1 p'_1}$. Puisque $l \perp l_2$ et $l_p \perp l_1$, il s'ensuit que $l_p \parallel l_2$ et l'équation de l_p est $y = m_2x + b_p$.

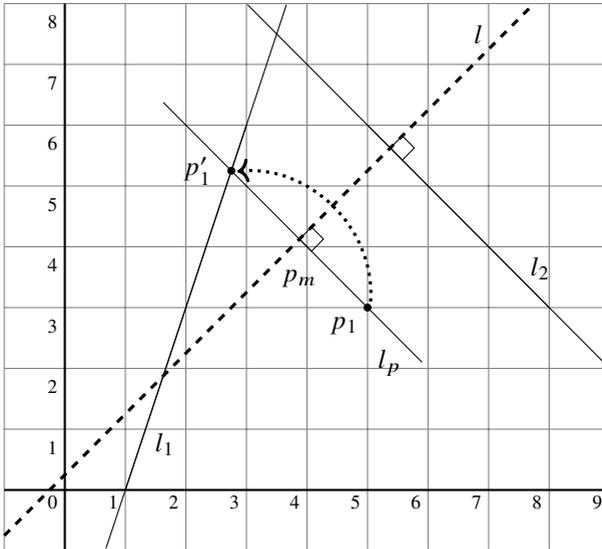


FIG. 10.15 – Axiome 7.

La droite l_p passe par p_1 , donc $y_1 = m_2x_1 + b_p$ et son équation est $y = m_2x + (y_1 - m_2x_1)$. L'image $p'_1 = (x'_1, y'_1)$ est l'intersection de l_1 et l_p :

$$\begin{aligned}
 m_1x'_1 + b_1 &= m_2x'_1 + (y_1 - m_2x_1), \\
 x'_1 &= \frac{y_1 - m_2x_1 - b_1}{m_1 - m_2}, \\
 y'_1 &= m_1x'_1 + b_1.
 \end{aligned}$$

Les coordonnées du milieu $p_m = (x_m, y_m)$ sur l_p est

$$(x_m, y_m) = \left(\frac{x_1 + x'_1}{2}, \frac{y_1 + y'_1}{2} \right).$$

$l \perp l_2$ et l passe par p_m . Donc son équation est

$$y = -\frac{1}{m_2}x + b_m,$$

où b_m peut être calculé avec $y_m = -\frac{1}{m_2}x_m + b_m$:

$$b_m = y_m + \frac{x_m}{m_2}.$$

L'équation du pli l est donc

$$y = -\frac{1}{m_2}x + \left(y_m + \frac{x_m}{m_2}\right).$$

Exemple 10.13. Soit $p_1 = (5, 3)$. Soient l_1 d'équation $y = 3x - 3$ et l_2 d'équation $y = -x + 11$. Alors

$$\begin{aligned} x'_1 &= \frac{3 - (-1) \cdot 5 - (-3)}{3 - (-1)} = \frac{11}{4}, \\ y'_1 &= 3 \cdot \frac{11}{4} + (-3) = \frac{21}{4}, \\ p_m &= \left(\frac{5 + \frac{11}{4}}{2}, \frac{3 + \frac{21}{4}}{2}\right) = \left(\frac{31}{8}, \frac{33}{8}\right). \end{aligned}$$

L'équation du pli l est

$$y = -\frac{1}{-1} \cdot x + \left(\frac{33}{8} + \frac{31}{-1}\right) = x + \frac{1}{4}.$$

Quelle est la surprise ?

L'origami, l'art du pliage du papier, est pratiqué depuis des centaines d'années. Il est donc surprenant que la formalisation mathématique ne remonte qu'au xx^e siècle. Il est encore plus surprenant qu'il existe une axiomatisation du pliage du papier. Les mathématiques de l'origami sont un excellent moyen d'apprendre la géométrie analytique, les propriétés des paraboles et le concept de lieu géométrique.

Sources

Les axiomes de l'origami sont présentés dans [61]. Lang [35] donne des descriptions de constructions d'origami. [40, chap. 10] contient la théorie détaillée des mathématiques de l'origami, notamment la démonstration que deux paraboles peuvent avoir zéro, un, deux ou trois tangentes communes. La démonstration du théorème 10.1 m'a été montrée par Oriah Ben-Lulu. J'ai trouvé qu'un logiciel de géométrie comme Geogebra est utile pour comprendre la relation entre la géométrie et l'algèbre des axiomes.

Une présentation claire des équations de degré trois se trouve dans [9, chap. 1 et 2].

Chapitre 11

La méthode de Lill et le pli de Beloch

11.1 Une astuce magique

Construisons un chemin constitué de quatre segments $\{a_3 = 1, a_2 = 6, a_1 = 11, a_0 = 6\}$, en partant de l'origine dans la direction des $x > 0$ et en tournant de 90° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre entre les segments. Construisons un second chemin comme ceci : construisons une droite en partant de l'origine avec un angle de $63,4^\circ$. Soit P son intersection avec a_2 . Tournons à gauche de 90° , construisons une droite. Soit Q son intersection avec a_1 . Tournons encore une fois à gauche de 90° , construisons une droite et remarquons qu'elle coupe l'extrémité du premier chemin en $(-10, 0)$ (fig. 11.1).

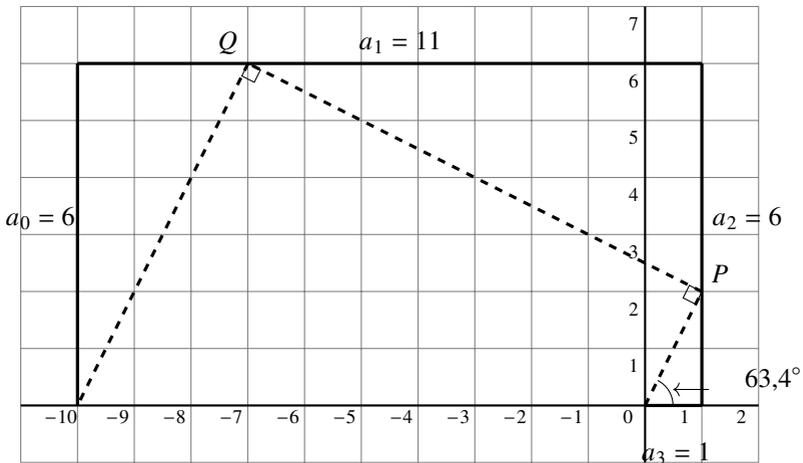


FIG. 11.1 – Une astuce magique.

Calculons l'opposé de la tangente de l'angle au début du second chemin : $-\tan 63,4^\circ = -2$. Substituons cette valeur dans le polynôme dont les

coefficients sont les longueurs des segments du premier chemin :

$$\begin{aligned} p(x) &= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ &= x^3 + 6x^2 + 11x + 6, \\ p(-\tan 63,4^\circ) &= (-2)^3 + 6(-2)^2 + 11(-2) + 6 = 0. \end{aligned}$$

Nous avons trouvé une racine du polynôme de degré trois $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$!

Continuons l'exemple. Le polynôme $p(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ a trois racines $-1, -2, -3$. Calculons l'opposé de l'arc tangente des racines :

$$\begin{aligned} \alpha &= -\arctan(-1) = 45^\circ, \\ \beta &= -\arctan(-2) \approx 63,4^\circ, \\ \gamma &= -\arctan(-3) \approx 71,6^\circ. \end{aligned}$$

Pour chaque angle, le second chemin coupe l'extrémité du premier chemin (fig. 11.2).

La valeur $-\tan 56,3^\circ \approx -1,5$ n'est pas une racine de l'équation. La figure 11.3 montre le résultat de l'application de la méthode pour cet angle. Le deuxième chemin ne coupe pas le segment pour le coefficient a_0 en $(-10, 0)$.

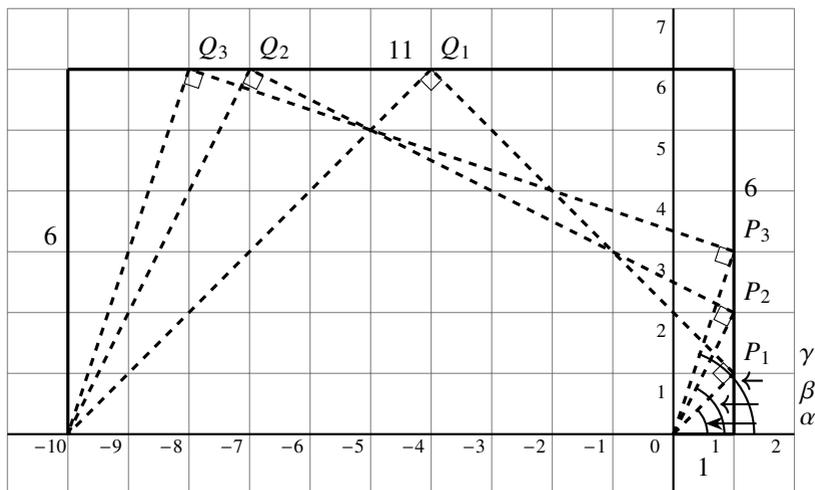


FIG. 11.2 – Méthode de Lill pour les trois racines du polynôme.

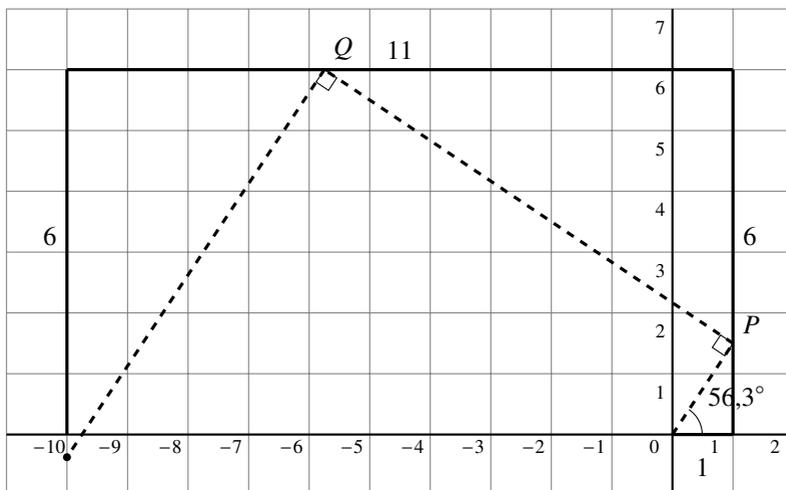


FIG. 11.3 – Un chemin qui ne mène pas à une racine.

Cet exemple illustre une méthode découverte par Eduard Lill en 1867 pour trouver graphiquement les racines réelles de tout polynôme. Nous ne trouvons pas réellement les racines mais vérifions qu'une valeur donnée est une racine.

La section 11.2 présente formellement la méthode de Lill (limitée aux polynômes de degré trois) et donne des exemples de son fonctionnement dans des cas particuliers. Une démonstration de l'exactitude de la méthode de Lill est donnée dans la section 11.3. La section 11.4 montre comment la méthode peut être mise en œuvre en utilisant l'axiome 6 de l'origami, appelé pli de Beloch, qui a précédé de plusieurs années la formalisation des axiomes de l'origami.

11.2 Spécification de la méthode de Lill

11.2.1 La méthode de Lill en tant qu'algorithme

Commençons avec un polynôme arbitraire de degré trois $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

Construction du premier chemin.

- Pour chaque coefficient a_3, a_2, a_1, a_0 (dans cet ordre), construisons un segment de cette longueur, en partant de l'origine $O = (0, 0)$ dans la

direction des $x > 0$. Tournons de 90° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre entre chaque segment.

Construction du deuxième chemin.

- Construisons une droite qui part de O et qui forme un angle de θ avec l'axe des $x > 0$. Elle coupe a_2 au point P .
- Tournons de $\pm 90^\circ$ et construisons une droite à partir de P qui coupe a_1 en Q .
- Tournons de $\pm 90^\circ$ et construisons une droite à partir de Q qui coupe a_0 en R .
- Si R est le point d'arrivée du premier chemin, alors $-\tan \theta$ est une racine de $p(x)$.

Cas particuliers.

- Lors de la construction des segments du premier chemin, si un coefficient est négatif, il faut construire le segment à l'envers.
- Lors de la construction des segments du premier chemin, si un coefficient est égal à zéro, il ne faut pas construire de segment mais continuer avec le prochain virage à $\pm 90^\circ$.

Remarques.

- L'expression *intersecte* a_i signifie *intersecte le segment a_i ou toute extension de a_i* .
- Lors de la construction du deuxième chemin, on choisit de tourner à gauche ou à droite de 90° de sorte qu'il y ait une intersection avec le segment suivant du premier chemin ou son extension.

11.2.2 Coefficients négatifs

Démontrons la méthode de Lill sur le polynôme $p(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 1$ à coefficients négatifs (sect. 10.6). Commençons par construire un segment de longueur 1 vers la droite. Ensuite, tournons de 90° vers le haut, mais comme le coefficient est négatif, on construit un segment de longueur 3 vers le bas, c'est-à-dire dans une direction opposée à la flèche. Après avoir tourné de 90° vers la gauche, le coefficient est à nouveau négatif, donc on construit un segment de longueur 3 vers la droite. Enfin, tournons vers le bas et construisons un segment de longueur 1 (fig. 11.4, les lignes en pointillés seront discutées dans la section 11.2.4).

Commençons le second chemin par une droite à 45° avec l'axe des $x > 0$. Elle coupe le prolongement du segment pour a_2 en $(1, 1)$. En tournant de

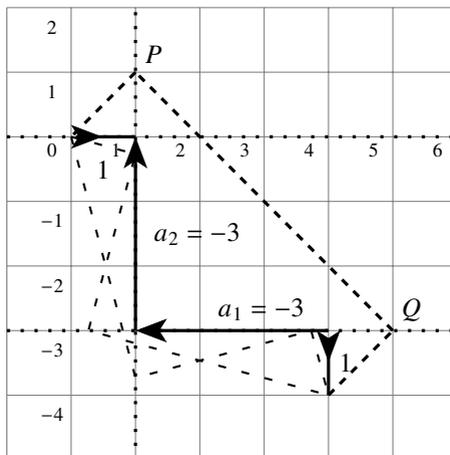


FIG. 11.4 – Méthode de Lill avec des coefficients négatifs.

-90° (vers la droite), la droite coupe le prolongement du segment pour a_1 en $(5, -3)$. En tournant à nouveau de -90° , la droite coupe l'extrémité du premier chemin en $(4, -4)$. Puisque $-\tan 45^\circ = -1$, nous avons trouvé une racine du polynôme :

$$p(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 3(-1) + 6 = 0.$$

11.2.3 Coefficients nuls

Le coefficient a_2 du terme x^2 du polynôme $x^3 - 7x - 6 = 0$ est nul. Construisons un segment de longueur 0, c'est-à-dire ne construisons pas de droite, mais faisons tout de même le virage de $\pm 90^\circ$ comme indiqué par la flèche pointant vers le haut en $(1, 0)$ dans la figure 11.5. Tournons à nouveau et construisons un segment de longueur -7 , c'est-à-dire de longueur 7 en arrière, jusqu'en $(8, 0)$. Enfin, tournons encore une fois et construisons un segment de longueur -6 jusqu'en $(8, 6)$.

Les deuxièmes chemins avec les angles suivants croisent l'extrémité du premier chemin :

$$-\arctan(-1) = 45^\circ, \quad -\arctan(-2) \approx 63,4^\circ, \quad -\arctan 3 \approx -71,6^\circ.$$

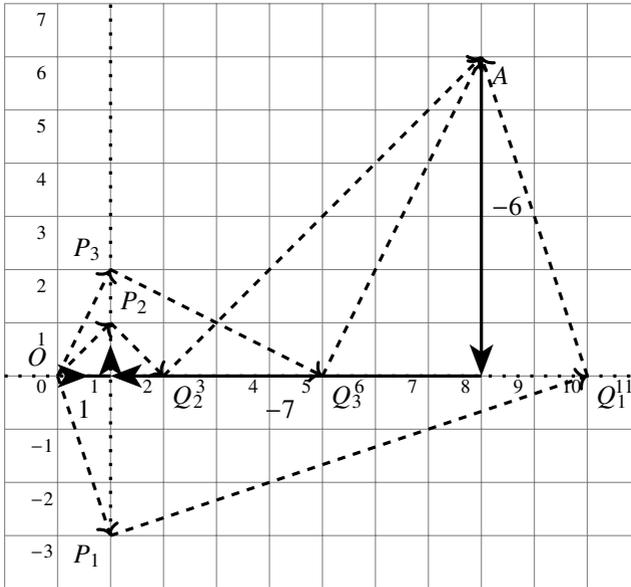


FIG. 11.5 – Méthode de Lill avec des polynômes à coefficients nuls.

On en conclut qu'il existe trois racines réelles $\{-1, -2, 3\}$. Vérifions :

$$(x + 1)(x + 2)(x - 3) = (x^2 + 3x + 2)(x - 3) = x^3 - 7x - 6.$$

11.2.4 Racines non entières

La figure 11.6 montre la méthode de Lill pour $p(x) = x^3 - 2x + 1$. Le premier chemin va de $(0, 0)$ à $(1, 0)$ et tourne ensuite vers le haut. Le coefficient de x^2 étant nul, aucun segment n'est construit et le chemin tourne à gauche. Le segment suivant est de longueur -2 et va donc en arrière de $(1, 0)$ à $(3, 0)$. Enfin, le chemin tourne vers le bas et un segment de longueur 1 est construit de $(3, 0)$ à $(3, -1)$.

Il est facile de voir que si le second chemin commence à un angle de -45° , il coupera le premier chemin en $(3, -1)$. Par conséquent, $-\arctan(-45)^\circ = 1$ est une racine. Si on divise $p(x)$ par $x - 1$, on obtient le polynôme du second degré $x^2 + x - 1$ dont les racines sont

$$\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \approx 0,62; -1,62.$$

Il existe deux seconds chemins supplémentaires : l'un commençant à $-\arctan 0,62 \approx -31,8^\circ$, l'autre commençant à $-\arctan(-1,62) \approx 58,3^\circ$.

Le polynôme $p(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 1$ (sect. 11.2.2) a pour racines $2 \pm \sqrt{3} \approx 3,73; 0,27$. Les angles correspondants sont $-\arctan 3,73 \approx -75^\circ$ et $-\arctan 0,27 \approx -15^\circ$ comme le montrent les lignes en pointillés sur la figure 11.4.

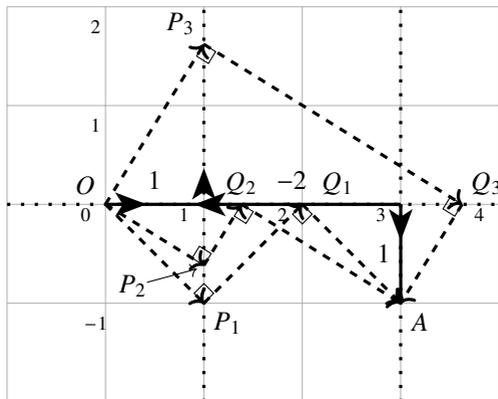


FIG. 11.6 – Méthode de Lill avec des racines non entières.

11.2.5 La racine cubique de deux

Pour dupliquer un cube, calculons $\sqrt[3]{2}$, une racine du polynôme de degré trois $x^3 - 2$. Dans la construction du premier chemin, on tourne deux fois à gauche sans construire de segments, car a_2 et a_1 sont tous deux nuls. Ensuite, tournons à nouveau à gauche (vers le bas) et construisons en arrière (vers le haut) parce que $a_0 = -2$ est négatif. Le premier segment de la deuxième trajectoire est construit à un angle de $-\arctan \sqrt[3]{2} \approx -51,6^\circ$ (fig. 11.7).

11.3 Démonstration de la méthode de Lill

La démonstration concerne les polynômes unitaires de degré trois $p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Si le polynôme n'est pas unitaire, divisons-le par a_3 et le polynôme résultant aura les mêmes racines. Dans la figure 11.8, les segments

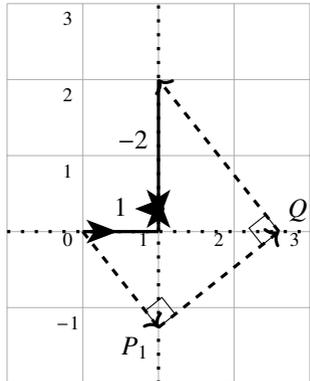


FIG. 11.7 – La racine cubique de deux.

du premier chemin sont étiquetés avec les coefficients et avec $b_2, b_1, a_2 - b_2, a_1 - b_1$. Dans un triangle rectangle, si un angle aigu vaut θ , l'autre angle vaut $90^\circ - \theta$. Par conséquent, l'angle au-dessus de P et l'angle à gauche de Q sont égaux à θ . Voici les formules pour $\tan \theta$ telles que calculées à partir des trois triangles :

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{b_2}{1} = b_2, \\ \tan \theta &= \frac{b_1}{a_2 - b_2} = \frac{b_1}{a_2 - \tan \theta}, \\ \tan \theta &= \frac{a_0}{a_1 - b_1} = \frac{a_0}{a_1 - \tan \theta(a_2 - \tan \theta)}. \end{aligned}$$

Simplifions la dernière équation, multiplions par -1 et absorbons -1 dans les puissances :

$$\begin{aligned} (\tan \theta)^3 - a_2(\tan \theta)^2 + a_1(\tan \theta) - a_0 &= 0, \\ (-\tan \theta)^3 + a_2(-\tan \theta)^2 + a_1(-\tan \theta) + a_0 &= 0. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $-\tan \theta$ est une racine réelle de $p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

11.4 Le pli de Beloch

Margarita P. Beloch a découvert un lien remarquable entre le pliage et la méthode de Lill : une application de l'opération connue plus tard sous le nom

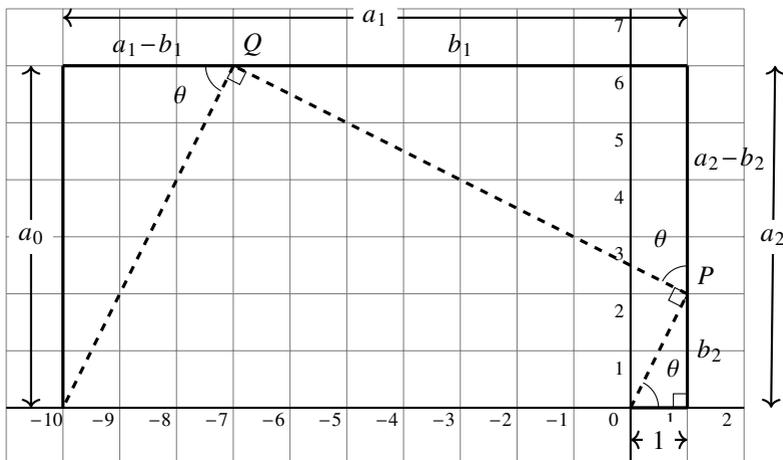


FIG. 11.8 – Démonstration de la méthode de Lill.

d'axiome 6 de l'origami génère une racine réelle d'un polynôme de degré trois. L'opération est souvent appelée le pliage de Beloch.

Considérons le polynôme $p(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ (sect. 11.1). Rappelons qu'un pli est la médiatrice du segment qui relie un point quelconque et son symétrique par rapport au pli. Nous voulons que \overline{RS} dans la figure 11.9 soit la médiatrice de $\overline{QQ'}$ et $\overline{PP'}$, où Q' et P' sont les images de Q et P autour de \overline{RS} .

Construisons une droite a'_2 parallèle à a_2 à la même distance de a_2 que a_2 est de P , et construisons une droite a'_1 parallèle à a_1 à la même distance de a_1 que a_1 est de Q . Appliquons l'axiome 6 pour placer simultanément P en P' sur a'_2 et pour placer Q en Q' sur a'_1 . Le pli \overline{RS} est la médiatrice des droites $\overline{PP'}$ et $\overline{QQ'}$, donc les angles en R et S sont tous deux des angles droits comme requis par la méthode de Lill.

La figure 11.10 montre le pli de Beloch pour le polynôme $x^3 - 3x^2 - 3x + 1$ (sect. 11.2.2). Le segment a_2 est vertical, de longueur 3 et d'équation $x = 1$. Sa droite parallèle est a'_2 dont l'équation est $x = 2$, car P est à une distance de 1 de a_2 . Le segment a_1 est horizontal, de longueur 3 et d'équation $y = -3$. Sa droite parallèle est a'_1 dont l'équation est $y = -2$, car Q est à une distance de 1 de a_1 . Le pli \overline{RS} est la médiatrice à la fois de $\overline{PP'}$ et de $\overline{QQ'}$, et \overline{PRSQ} est identique au deuxième chemin de la figure 11.4.

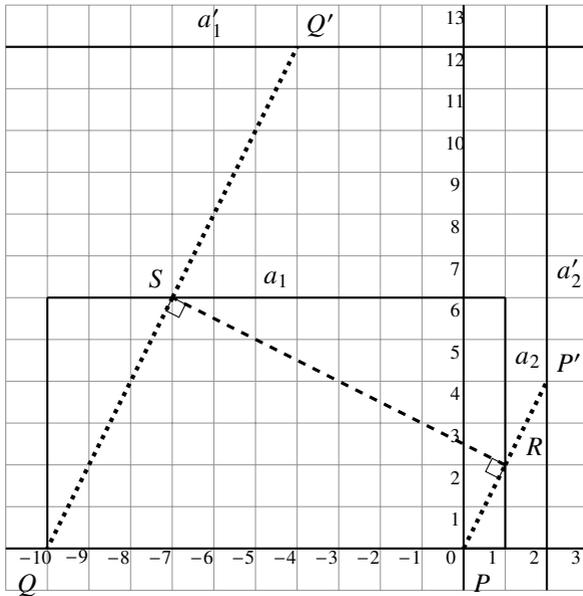


FIG. 11.9 – Le pli de Beloch pour trouver une racine de $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$.

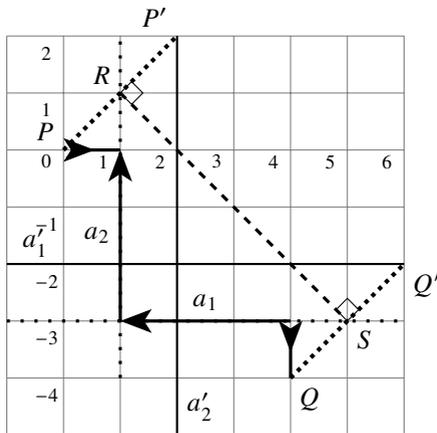


FIG. 11.10 – Le pli de Beloch pour trouver une racine de $x^3 - 3x^2 - 3x + 1$.

Quelle est la surprise ?

L'exécution de la méthode de Lill comme une astuce magique ne manque jamais de surprendre. Il peut être réalisé pendant un cours magistral à l'aide d'un logiciel graphique tel que GeoGebra. Il est également surprenant que la méthode de Lill, publiée en 1867, et le pli de Beloch, publié en 1936, aient précédé de plusieurs années l'axiomatisation de l'origami.

Sources

Ce chapitre se base sur [11, 31, 49].

Chapitre 12

Constructions géométriques à l'aide de l'origami

Ce chapitre montre que les constructions avec l'origami sont plus puissantes que les constructions à la règle et au compas. Nous donnons deux constructions pour la trisection d'un angle, l'une proposée par Hisashi Abe (sect. 12.1) et l'autre par George E. Martin (sect. 12.2), deux constructions pour la duplication d'un cube, l'une proposée par Peter Messer (sect. 12.3) et l'autre par Marghareta P. Beloch (sect. 12.4), et la construction d'un enneágone, un polynôme régulier à neuf côtés (sect. 12.5).

12.1 La trisection d'un angle proposée par Abe

Construction. Étant donné un angle aigu $\angle PQR$, construisons la perpendiculaire p à \overline{QR} passant par Q . Construisons une perpendiculaire q à p qui coupe \overline{PQ} au point A , et construisons la perpendiculaire r à p passant par B qui est à mi-chemin entre Q et A . En utilisant l'axiome 6, construisons le pli l qui place A au point A' sur \overline{PQ} et Q au point Q' sur r . Soit B' le symétrique de B par rapport à l . Construisons les droites qui passent par $\overline{QB'}$ et $\overline{QQ'}$ (fig. 12.1).

Théorème 12.1. $\angle PQB' = \angle B'QQ' = \angle Q'QR = \angle PQR/3$.

Démonstration 1. A' , B' et Q' sont les symétriques par rapport à la droite l des points A , B et Q sur la droite \overline{DQ} . Ils sont donc sur la droite réfléchie $\overline{DQ'}$. Par construction $\overline{AB} = \overline{BQ}$, $\angle ABQ' = \angle QBQ' = 90^\circ$ et $\overline{BQ'}$ est un côté commun, donc $\triangle ABQ' \cong \triangle QBQ'$ (deux côtés et un angle égaux). Par conséquent, $\angle AQQ' = \angle QAQ' = \alpha$, donc $\triangle AQ'Q$ est isocèle (fig. 12.2).

Par réflexion, $\triangle AQ'Q \cong \triangle A'QQ'$, donc $\triangle A'QQ'$ est aussi un triangle isocèle. Le symétrique $\overline{QB'}$ de $\overline{Q'B}$ est la médiatrice d'un triangle isocèle, donc $\angle A'QB' = \angle Q'QB' = \angle QQ'B = \alpha$. Vu les angles alternes-internes, $\angle Q'QR = \angle QQ'B = \alpha$. On a donc

$$\triangle PQB' = \angle A'QB' = \angle B'QQ' = \angle Q'QR = \alpha. \quad \square$$

Démonstration 2. Puisque l est un pli, c'est la médiatrice de $\overline{QQ'}$. On désigne l'intersection de l avec $\overline{QQ'}$ par U et son intersection avec $\overline{QB'}$ par V (fig. 12.2).

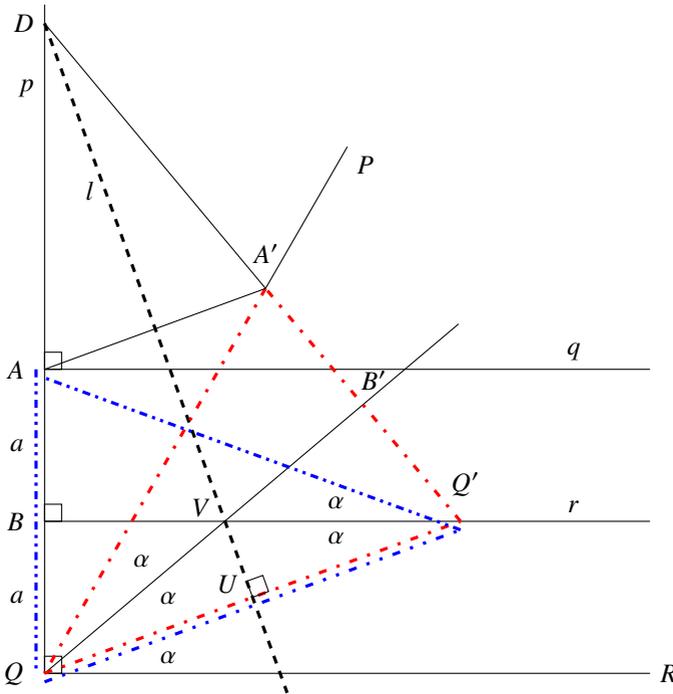


FIG. 12.2 – Démonstrations de la trisection par Abe (U et V sont utilisés dans la démonstration 2).

l'axiome 6, construisons le pli l qui place P en P' sur p et Q en Q' sur q . Si plus d'un pli est possible, choisir celui qui intersecte \overline{PM} . Construisons $\overline{PP'}$ et $\overline{QQ'}$ (fig. 12.3).

Théorème 12.2. $\angle Q'QR = \angle PQR/3$.

Démonstration. Soit U l'intersection de $\overline{QQ'}$ avec p et V son intersection avec l . Soit W l'intersection de \overline{PQ} et de $\overline{P'Q'}$ avec l . Il n'est pas immédiat que \overline{PQ} et $\overline{P'Q'}$ coupent l en un même point. Mais $\triangle PWP' \sim \triangle QWQ'$, donc les hauteurs bissectent les deux angles $\triangle PWP'$ et $\triangle QWQ'$ et elles doivent être sur la même droite.

$\triangle QMU \cong \triangle PMP'$ (deux angles et un côté égaux) puisque $\angle P'PM = \angle UQM = \beta$ (angles alternes-internes), $\overline{QM} = \overline{MP} = a$, car M est le milieu de \overline{PQ} , et $\angle QMU = \angle PMP' = \gamma$ sont des angles opposés par le sommet. Par

conséquent, $\overline{P'M} = \overline{MU} = b$.

$\triangle P'MQ' \cong \triangle UMQ'$ (deux côtés et un angle égaux) puisque $\overline{P'M} = \overline{MU} = b$, les angles en M sont des angles droits et $\overline{MQ'}$ est un côté commun. Puisque la hauteur du triangle isocèle $\triangle P'Q'U$ est la bissectrice de $\angle P'Q'U$, il s'ensuit que $\angle P'Q'M = \angle UQ'M = \alpha$. De plus, $\angle UQ'M = \angle Q'QR = \alpha$ (angles alternes-internes). $\triangle QWV \cong \triangle Q'WV$ (deux côtés et un angle égaux) puisque $\overline{QV} = \overline{Q'V} = c$, les angles en V sont des angles droits et \overline{VW} est un côté commun. Par conséquent,

$$\angle WQV = \beta = \angle WQ'V = 2\alpha,$$

$$\angle PQR = \beta + \alpha = 3\alpha. \quad \square$$

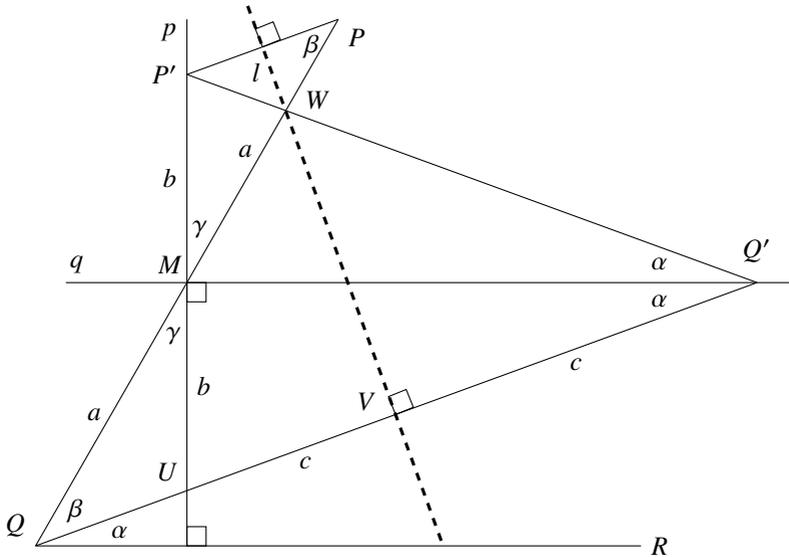


FIG. 12.3 – La trisection d'un angle proposée par Martin.

12.3 La duplication d'un cube proposée par Messer

Un cube de volume V a des côtés de longueur $\sqrt[3]{V}$. Un cube dont le volume est doublé a des côtés de longueur $\sqrt[3]{2V} = \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{V}$. Donc si nous pouvons

construire $\sqrt[3]{2}$, nous pourrons multiplier par la longueur donnée $\sqrt[3]{V}$ pour dupliquer le cube.

Construction. Divisons le côté d'un carré de côté un en tiers comme suit : plions le carré en deux pour repérer les points $I = (0, 1/2)$ et $J = (1, 1/2)$. Ensuite, construisons les droites \overline{AC} et \overline{BJ} (fig. 12.4). Le point d'intersection $K = (2/3, 1/3)$ peut être obtenu en résolvant les deux équations $y = 1 - x$ et $y = x/2$.

Construisons \overline{EF} , la perpendiculaire à \overline{AB} qui passe par K , et construisons le symétrique \overline{GH} de \overline{BC} par rapport à \overline{EF} . Le côté du carré a maintenant été divisé en trois.

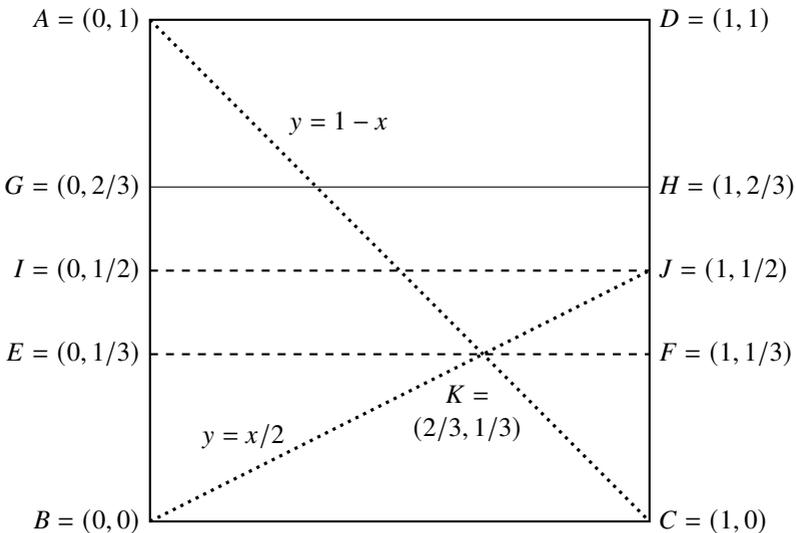


FIG. 12.4 – Division d'une longueur en tiers.

En utilisant l'axiome 6, plaçons C en C' sur \overline{AB} et F en F' sur \overline{GH} . Soit L le point d'intersection du pli avec \overline{BC} . Soit b la longueur de \overline{BL} . Renommons la longueur du côté du carré $a+1$ où $a = \overline{AC'}$. La longueur de \overline{LC} est $(a+1) - b$ (fig. 12.5).

Théorème 12.3. $\overline{AC'} = \sqrt[3]{2}$.

Démonstration. Lorsque le pliage est effectué, le segment \overline{LC} est réfléchi sur

le segment $\overline{LC'}$ et \overline{CF} est plié sur le segment $\overline{C'F'}$. Par conséquent,

$$\overline{GC'} = a - \frac{a+1}{3} = \frac{2a-1}{3}. \quad (12.1)$$

Puisque $\angle FCL$ est un angle droit, $\angle F'C'L$ l'est aussi.

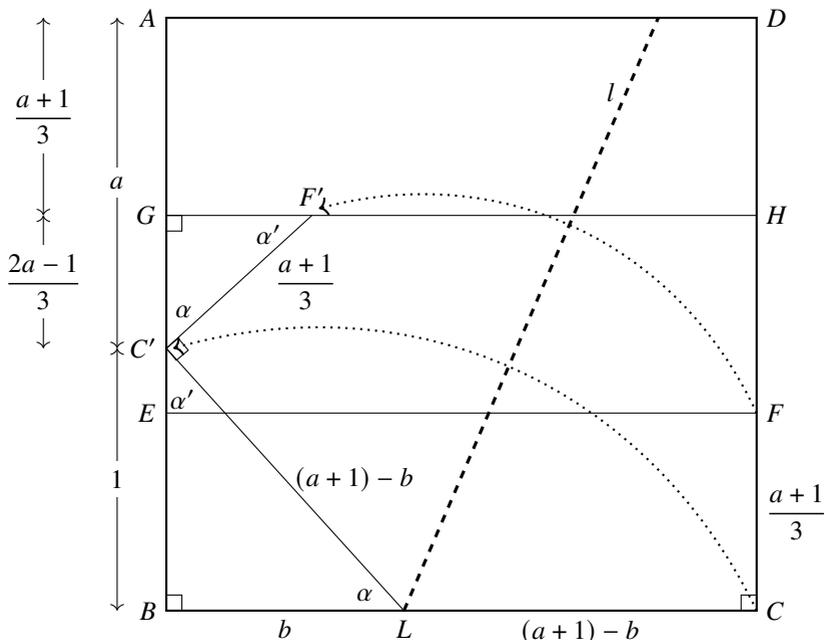


FIG. 12.5 – Construction de $\sqrt[3]{2}$.

$\triangle C'BL$ est un triangle rectangle. D'après le théorème de Pythagore,

$$1^2 + b^2 = ((a+1) - b)^2, \quad (12.2a)$$

$$b = \frac{a^2 + 2a}{2(a+1)}. \quad (12.2b)$$

$\angle GC'F' + \angle F'C'L + \angle LC'B = 180^\circ$ puisqu'ils forment la droite \overline{GB} . On désigne $\angle GC'F'$ par α . Alors

$$\angle LC'B = 180^\circ - \angle F'C'L - \angle GC'F' = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha,$$

que nous notons α' . Les triangles $\triangle C'BL$ et $\triangle F'GC'$ sont des triangles rectangles. Donc $\angle C'LB = \alpha$ et $\angle C'F'G = \alpha'$. Par conséquent, $\triangle C'BL \sim$

$\triangle F'GC'$ et

$$\frac{\overline{BL}}{\overline{C'L}} = \frac{\overline{GC'}}{\overline{C'F'}}.$$

En utilisant l'équation 12.1, nous avons

$$\frac{b}{(a+1) - b} = \frac{2a-1}{\frac{a+1}{3}}.$$

En substituant b en utilisant l'équation 12.2b, on obtient

$$\frac{\frac{a^2+2a}{2(a+1)}}{(a+1) - \frac{a^2+2a}{2(a+1)}} = \frac{2a-1}{a+1}.$$

Simplifions l'équation pour obtenir $a^3 = 2$ et $a = \sqrt[3]{2}$. □

12.4 La duplication d'un cube proposée par Beloch

Puisque le pli de Beloch (axiome 6) peut résoudre des équations de degré trois, il est raisonnable de conjecturer qu'il peut être utilisé pour la duplication d'un cube. Nous donnons ici une construction directe qui utilise le pli.

Construction. Soient $A = (-1, 0)$ et $B = (0, -2)$. Soit p la droite $x = 1$ et soit q la droite $y = 2$. Utilisons le pli de Beloch pour construire le pli l qui place A en A' sur p et B en B' sur q . On désigne par Y l'intersection du pli et de l'axe y et par X l'intersection du pli et de l'axe x (fig. 12.6).

Théorème 12.4. $\overline{OY} = \sqrt[3]{2}$.

Démonstration. Le pli est la médiatrice de $\overline{AA'}$ et de $\overline{BB'}$, donc $\overline{AA'} \parallel \overline{BB'}$. D'après la propriété des angles alternes-internes, $\angle YAO = \angle B XO = \alpha$. L'étiquetage des autres angles de la figure découle des propriétés des triangles rectangles.

$\triangle AOY \sim \triangle YOX \sim \triangle XOB$ et $\overline{OA} = 1$, $\overline{OB} = 2$ sont données. Donc

$$\frac{\overline{OY}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OX}}{\overline{OY}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OX}},$$

$$\frac{\overline{OY}}{1} = \frac{\overline{OX}}{\overline{OY}} = \frac{2}{\overline{OX}}.$$

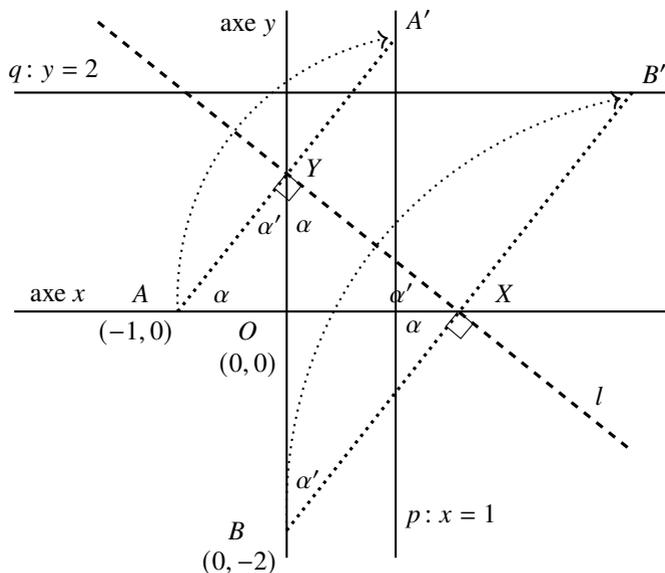


FIG. 12.6 – La duplication d'un cube proposée par Beloch.

D'après le premier et le deuxième rapport, nous avons $\overline{OX} = \overline{OY}^2$. D'après le premier et le troisième rapport, nous avons $\overline{OY} \overline{OX} = 2$. En substituant \overline{OX} , on obtient $\overline{OY}^3 = 2$ et $\overline{OY} = \sqrt[3]{2}$. \square

12.5 Construction d'un enneagone régulier

On construit un enneagone (un polygone régulier à neuf côtés) en déterminant l'équation de degré trois vérifiée par son angle central, puis en résolvant cette équation à l'aide de la méthode de Lill et du pli de Beloch. L'angle central est $\theta = 360^\circ/9 = 40^\circ$. D'après le théorème A.6 :

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta .$$

Soit $x = \cos 40^\circ$. L'équation pour l'enneagone est donc $4x^3 - 3x + (1/2) = 0$ puisque $\cos 3 \cdot 40^\circ = \cos 120^\circ = -(1/2)$. La figure 12.7 montre les chemins construits selon la méthode de Lill.

Le second chemin part de P avec un angle d'environ $-37,45^\circ$. Des virages de 90° en R puis de -90° en S font que le chemin croise le premier chemin à

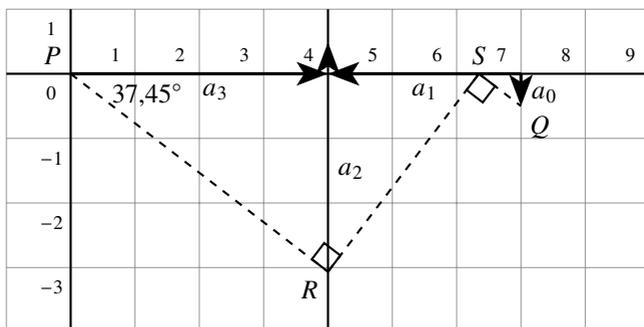


Fig. 12.7 – La méthode de Lill pour un ennéagone.

son extrémité Q . Par conséquent, $x = -\tan(-37,45^\circ) \approx 0,766$ est une racine de $4x^3 - 3x + (1/2)$.

La racine peut être obtenue en utilisant le pli de Beloch. Construisons la droite a'_2 parallèle à a_2 à la même distance de a_2 que celle de a_2 par rapport à P . Bien que la longueur de a_2 soit nulle, elle a toujours une direction (vers le haut) et la droite parallèle peut donc être construite. De même, construisons la droite a'_1 parallèle à a_1 à la même distance de a_1 que celle de a_1 par rapport à Q . Le pli de Beloch \overline{RS} place simultanément P en P' sur a'_2 et Q en Q' sur a'_1 . On obtient ainsi l'angle $\angle SPR = -37,45^\circ$ (fig. 12.8).

Par la méthode de Lill, $-\tan(-37,45^\circ) \approx 0,766$ et donc $\cos \theta \approx 0,766$ est une racine de l'équation pour l'angle central θ . Nous terminons la construction de l'ennéagone en construisant $\arccos 0,766 \approx 40^\circ$.

Le triangle rectangle $\triangle ABC$ avec $\angle CAB \approx 37,45^\circ$ et $\overline{AB} = 1$ a le côté opposé $\overline{BC} \approx 0,766$ par définition de la tangente (fig. 12.9). Replions \overline{CB} sur \overline{AB} de sorte que l'image de C soit D et que $\overline{DB} = 0,766$. Prolongeons \overline{DB} et construisons E de sorte que $\overline{DE} = 1$. Replions \overline{DE} pour envoyer E en F sur le prolongement de \overline{BC} (fig. 12.10). Alors

$$\angle BDF = \arccos \frac{0,766}{1} \approx 40^\circ .$$

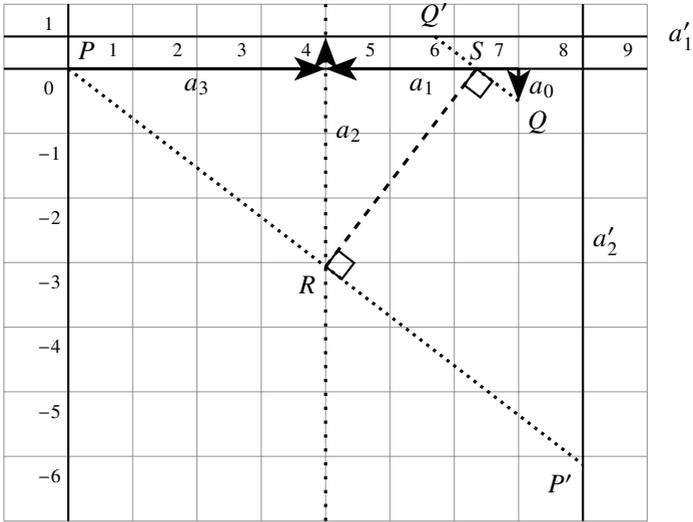


FIG. 12.8 – Le pli de Beloch pour résoudre l'équation de l'enneagone.

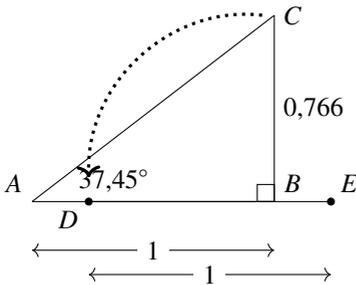


FIG. 12.9 – La tangente qui est la solution de l'équation pour l'enneagone.

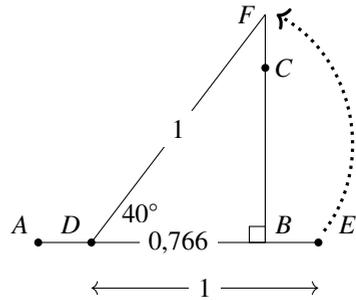


FIG. 12.10 – Le cosinus de l'angle central de l'enneagone.

Quelle est la surprise ?

Nous avons vu dans les chapitres 2 et 3 que des outils tels que la *neusis* peuvent réaliser des constructions qui ne peuvent pas être faites à la règle et

au compas. Il est surprenant que la trisection d'un angle et la duplication d'un cube puissent être construites en utilisant uniquement le pliage du papier. Roger C. Alperin a développé une hiérarchie de quatre méthodes de construction, chacune plus puissante que la précédente.

Sources

Ce chapitre se base sur [3, 35, 40, 45].

Chapitre 13

Un compas suffit

En 1797, Lorenzo Mascheroni a démontré que toute construction réalisée à la règle et au compas peut être réalisée avec un compas seulement. Il est apparu plus tard que ce théorème avait déjà été démontré par Georg Mohr en 1672. Après avoir expliqué dans la section 13.1 ce que signifie effectuer une construction avec seulement un compas, on présente la démonstration par étapes en commençant par quatre constructions auxiliaires : la réflexion d'un point (sect. 13.2), la construction d'un cercle de rayon donné (sect. 13.3), l'addition et la soustraction de segments (sect. 13.4) et la construction d'un segment comme rapport de segments (sect. 13.5). La section 13.6 montre comment trouver l'intersection de deux droites. La section 13.7 montre comment trouver l'intersection d'une droite et d'un cercle.

13.1 Qu'est-ce qu'une construction avec seulement un compas ?

La figure 13.1 montre la construction d'un triangle équilatéral à l'aide d'une règle et d'un compas. Comment construire un triangle sans les segments \overline{AB} , \overline{AC} et \overline{BC} ? Un segment est défini par deux points, il suffit donc de construire ces points pour obtenir une construction équivalente à celle obtenue avec une règle (fig. 13.2). Il n'est pas nécessaire de voir réellement les segments. Il y aura des droites dans les figures de ce chapitre, mais elles ne servent qu'à comprendre la construction et la démonstration de son exactitude. Il est important de se convaincre que la construction elle-même n'utilise qu'un compas.

Une construction à la règle et au compas est une suite de trois opérations :

- trouver le point d'intersection de deux droites.
- trouver les points d'intersection d'une droite et d'un cercle.
- trouver les points d'intersection de deux cercles.

La troisième opération peut être réalisée avec un simple compas. Nous devons montrer que les deux premières opérations peuvent être effectuées uniquement avec un compas.

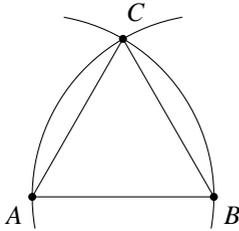


FIG. 13.1 – Construction d'un triangle équilatéral à la règle et au compas.

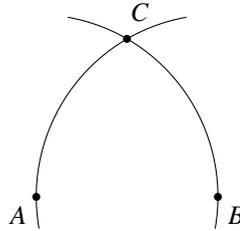


FIG. 13.2 – Construction d'un triangle équilatéral avec seulement un compas.

Notations.

- $c(O, A)$: le cercle de centre O qui passe par le point A .
- $c(O, r)$: le cercle de centre O et de rayon r .
- $c(O, \overline{AB})$: le cercle de centre O et de rayon égal à la longueur du segment \overline{AB} .

13.2 Réflexion d'un point

Définition 13.1. Un point C' est le *symétrique* du point C par rapport au segment \overline{AB} si la droite contenant \overline{AB} est la médiatrice du segment $\overline{CC'}$.

Théorème 13.1. *Étant donné une droite \overline{AB} et un point C non situé sur \overline{AB} , il est possible de construire le symétrique C' de C par rapport à \overline{AB} .*

Démonstration. Construisons un cercle de centre A passant par C et un cercle de centre B passant par C . L'autre intersection des deux cercles est le point C' qui est le symétrique de C (fig. 13.3). $\triangle ABC \cong \triangle ABC'$ (trois côtés égaux) puisque \overline{AC} et $\overline{AC'}$ sont des rayons du même cercle, tout comme \overline{BC} et $\overline{BC'}$, tandis que \overline{AB} est un côté commun. Par conséquent, $\angle CAB = \angle C'AB$ et donc \overline{AB} est la bissectrice de $\angle CAC'$. Mais $\triangle CAC'$ est un triangle isocèle. La bissectrice \overline{AB} est aussi la médiatrice de $\overline{CC'}$, la base de $\triangle CAC'$. Par définition, C' est le symétrique de C par rapport à \overline{AB} . \square

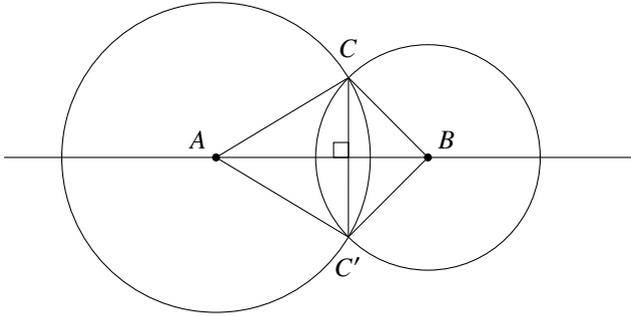


FIG. 13.3 – Construction du symétrique.

13.3 Construction d'un cercle de rayon donné

Théorème 13.2. *Étant donné les points A , B et C , il est possible de construire $c(A, \overline{BC})$, le cercle de centre A et de rayon \overline{BC} .*

Démonstration. Construisons $c(A, B)$ et $c(B, A)$. Soient X et Y leurs points d'intersection (fig. 13.4). A est le symétrique de B par rapport à \overline{XY} puisque $\triangle YAX \cong \triangle YBX$ (trois côtés égaux). Avec le théorème 13.1, on construit le symétrique C' de C par rapport à \overline{XY} et ensuite on construit $c(A, \overline{AC'})$ (fig. 13.5).

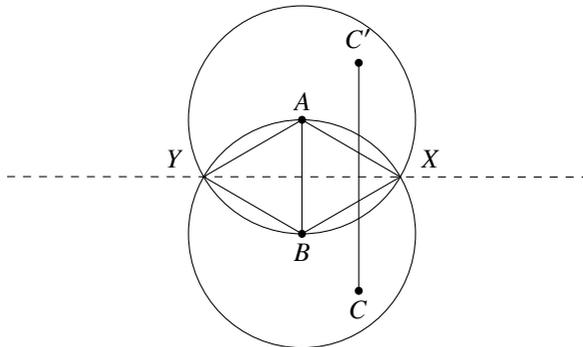


FIG. 13.4 – Construction d'un cercle avec un rayon donné (1).

\overline{XY} est la médiatrice de $\overline{CC'}$ et \overline{AB} . Soit D l'intersection de \overline{XY} et de \overline{AB} . Soit E l'intersection de \overline{XY} et de $\overline{CC'}$. Alors $\overline{C'E} = \overline{EC}$, $\overline{AD} = \overline{DB}$ et

$\angle DEC = \angle DEC'$ est un angle droit, donc $\triangle DEC \cong \triangle DEC'$ (deux côtés et un angle égaux). Par conséquent, $\overline{DC} = \overline{DC'}$ et $\angle ADC' = \angle BDC$ (ils sont complémentaires de $\angle EDC' = \angle EDC$). Il s'ensuit que $\triangle ADC' \cong \triangle BDC$ (deux côtés et un angle égaux). Donc $\overline{AC'} = \overline{BC}$. \square

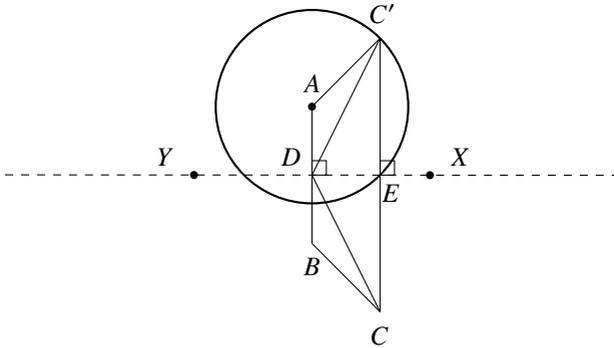


FIG. 13.5 – Construction d'un cercle avec un rayon donné (2).

13.4 Addition et soustraction de segments

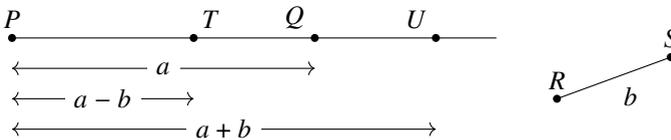


FIG. 13.6 – Addition et soustraction de segments.

Théorème 13.3. *Étant donné un segment \overline{PQ} de longueur a et un segment \overline{RS} de longueur b , il est possible de construire des segments \overline{QT} et \overline{QU} tels que \overline{PTQU} soit un segment, la longueur de \overline{PT} étant $a - b$ et la longueur de \overline{PU} étant $a + b$ (fig. 13.6).*

La démonstration est assez longue et sera présentée comme une suite de constructions.

Théorème 13.4. *On peut construire un trapèze isocèle.*

Démonstration. Soit H un point quelconque sur $c(Q, b)$. Construisons son symétrique H' par rapport à \overline{PQ} . Soit h la longueur de $\overline{HH'}$ (fig. 13.7).

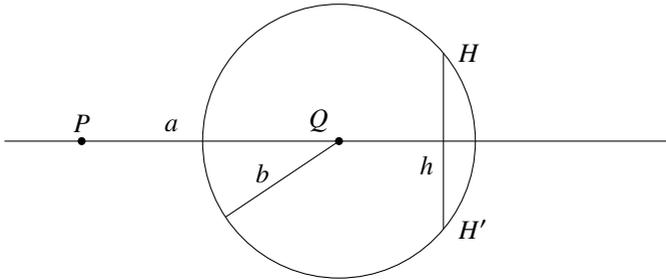


FIG. 13.7 – Construction d'un trapèze isocèle (1).

Construisons les cercles $c(H, b)$ et $c(Q, h)$. Soit K un point d'intersection des cercles. Construisons le symétrique K' de K par rapport à \overline{PQ} (fig. 13.8).

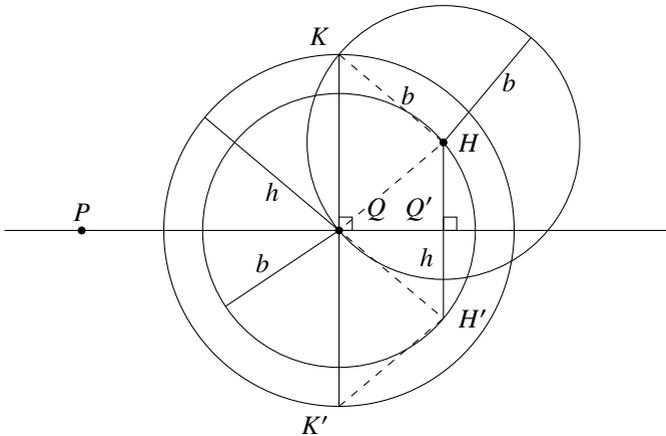


FIG. 13.8 – Construction d'un trapèze isocèle (2).

La droite contenant \overline{PQ} est la médiatrice de $\overline{HH'}$ et $\overline{KK'}$, donc $\overline{HH'} \parallel \overline{KK'}$. $\overline{KH} = b$ puisque c'est le rayon du cercle de centre H . Les points K' et H' sont les symétriques de K et H . $\triangle QQ'H \cong \triangle QQ'H'$ (trois côtés égaux) et $\triangle KQH \cong \triangle K'QH'$ (deux côtés et un angle égaux), donc $\overline{K'H'} = \overline{KH} = b$. Il

s'ensuit que $\overline{KHH'K'}$ est un trapèze isocèle dont les bases sont $\overline{HH'} = h$ et $\overline{K'K} = 2h$ (fig. 13.9). On note d la longueur des diagonales $\overline{K'H} = \overline{KH'}$. \square

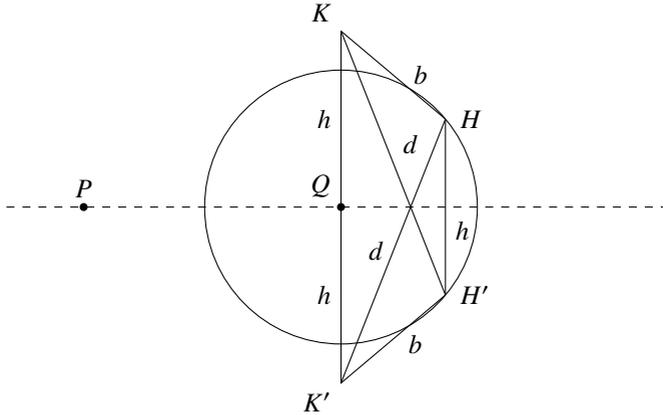


FIG. 13.9 – Construction d'un trapèze isocèle (3).

Théorème 13.5. *Un trapèze isocèle peut être inscrit dans un cercle.*

Démonstration. Le théorème découle immédiatement des théorèmes A.15 et A.16. \square

Théorème 13.6. *Pour d , b et h dans la figure 13.9, on a $d^2 = b^2 + 2h^2$.*

Démonstration. Ceci découle du théorème de Ptolémée (théorème A.18), qui dit que dans un quadrilatère inscrit dans un cercle, le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés. \square

On peut maintenant présenter la démonstration du théorème 13.3.

Démonstration. Soit X le point de la droite \overline{PQ} qui prolonge \overline{PQ} par b (nous construirons X par la suite). Posons $x = \overline{K'X}$. D'après le théorème 13.6,

$$d^2 = b^2 + 2h^2 = (x^2 - h^2) + 2h^2 = x^2 + h^2.$$

Puisque $\triangle QK'X$ est un triangle rectangle, on a $x^2 = b^2 + h^2$ (fig. 13.10).

Construisons S , l'intersection de $c(K, d)$ et $c(K', d)$ (fig. 13.11). $\triangle QSK'$ est un triangle rectangle, donc on a d'après le théorème de Pythagore $\overline{QS}^2 = d^2 - h^2 = x^2$ et $\overline{QS} = x$.

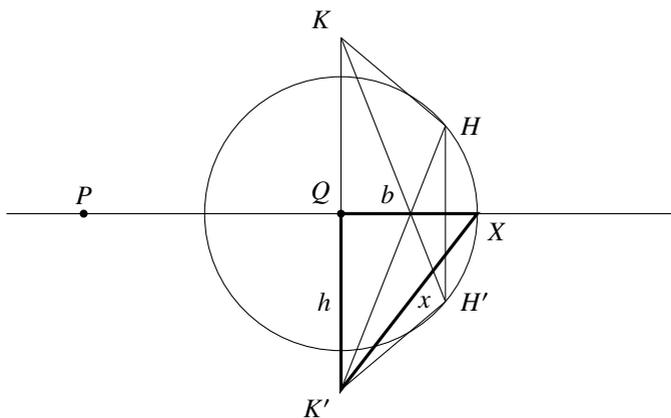


FIG. 13.10 – Application du théorème de Ptolémée.

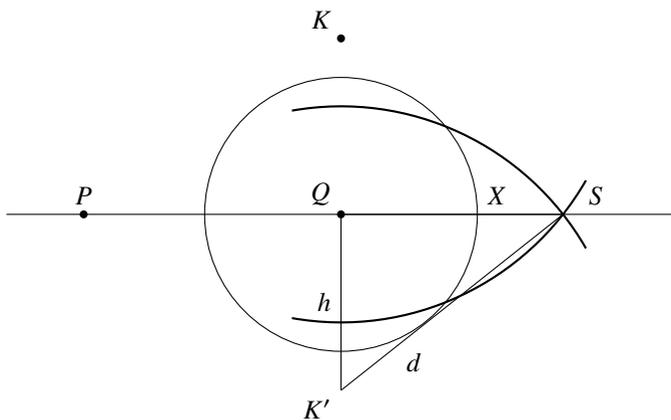


FIG. 13.11 – Construction du point pour l'addition et la soustraction (1)

Construisons l'intersection X de $c(K, x)$ et $c(K', x)$ (fig. 13.12). Comme la longueur de \overline{QX} est $\sqrt{x^2 - h^2} = b$, la longueur de \overline{PX} est $a + b$ et la longueur de $\overline{PX'}$ est $a - b$. □

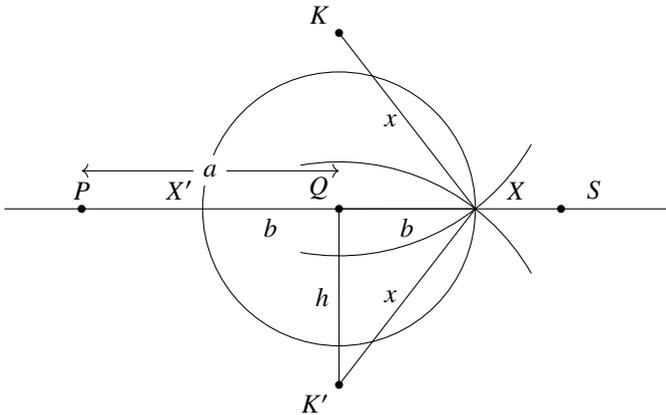


FIG. 13.12 – Construction du point pour l'addition et la soustraction (2).

13.5 Construction d'un segment comme rapport de segments

Théorème 13.7. *Étant donné des segments de longueur n , m et s , il est possible de construire un segment de longueur*

$$x = \frac{n}{m} s.$$

Démonstration. Construisons deux cercles concentriques $c_1 = c(Z, m)$ et $c_2 = c(Z, n)$,¹ et choisissons un point arbitraire A sur c_1 . Avec le théorème 13.2, construisons une corde \overline{AB} de longueur s sur c_1 (fig. 13.13). Si \overline{AB} coupe c_2 , d'après le théorème 13.3, on peut multiplier m et n par un nombre k de sorte que la corde ne coupe pas le cercle. Notons que cela ne change pas la valeur que nous essayons de construire puisque $x = \frac{kn}{km} s = \frac{n}{m} s$.

1. Nous supposons que $m > n$; sinon, il suffit d'échanger les notations.

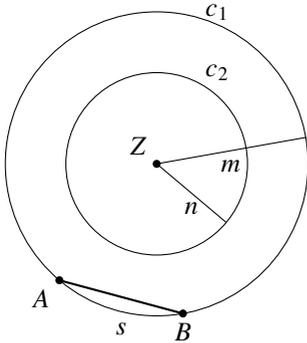


FIG. 13.13 – Construction de $x = \frac{n}{m}s$, étape 1.

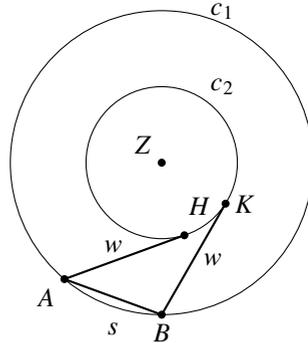


FIG. 13.14 – Construction de $x = \frac{n}{m}s$, étape 2.

Choisissons un point H sur c_2 et notons w la longueur de \overline{AH} . Construisons K sur c_2 de telle sorte que la longueur de \overline{BK} soit w (fig. 13.14). On a donc $\triangle AHZ \cong \triangle BZK$ (trois côtés égaux) puisque $\overline{ZA} = \overline{ZB} = m$ sont les rayons d'un même cercle, de même que $\overline{ZH} = \overline{ZK} = n$, et $\overline{AH} = \overline{BK} = w$ par construction (fig. 13.15). De $\triangle AHZ \cong \triangle BZK$ il résulte $\angle AZH = \angle BZK$ puis $\angle AZB = \angle HZK$. Il est difficile de voir cette égalité sur la figure, mais la figure 13.16 devrait clarifier la relation entre les angles.

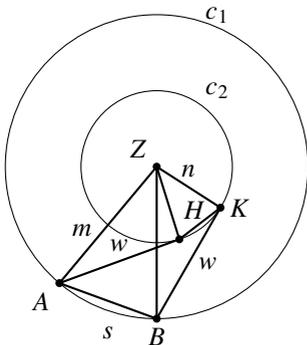


FIG. 13.15 – Construction de $x = \frac{n}{m}s$, étape 3.

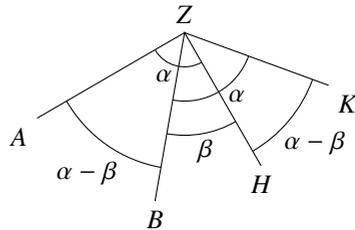


FIG. 13.16 – $\angle AZB = \angle HZK$.

$\triangle ZAB \sim \triangle ZHK$ puisque les deux sont des triangles isocèles et que nous

avons montré qu'ils ont le même angle au sommet. Posons $x = \overline{HK}$. Alors

$$\frac{m}{s} = \frac{n}{x},$$

$$x = \frac{n}{m}s. \quad \square$$

13.6 Construction de l'intersection de deux droites

Théorème 13.8. *Étant donné deux droites contenant les segments \overline{AB} et \overline{CD} , il est possible de construire leur intersection S .*

Démonstration. Soit C' et D' les symétriques de C et D par rapport à \overline{AB} . Il y a deux cas selon que C et D se trouvent du même côté de \overline{AB} ou de côtés différents. Posons $x = \overline{CS}$, $c = \overline{CC'}$, $d = \overline{DD'}$, $e = \overline{CD}$ comme indiqué sur les figures 13.17 et 13.18. Nous calculons la valeur de x pour chaque cas.

Cas 1 : C et D sont sur des côtés différents de \overline{AB} . S se trouve sur \overline{AB} parce que $\triangle CZS \cong \triangle C'ZS$ (deux côtés et un angle égaux) : $\overline{CZ} = \overline{C'Z}$, $\angle CZS = \angle C'ZS = 90^\circ$ et \overline{ZS} est un côté commun. Par conséquent, $\overline{C'S} = \overline{CS}$ et de même $\overline{D'S} = \overline{DS}$. $\triangle CSC' \sim \triangle DSD'$ sont semblables donc $\frac{x}{e-x} = \frac{c}{d}$ et la résolution de l'équation donne $x = \frac{c}{c+d}e$.

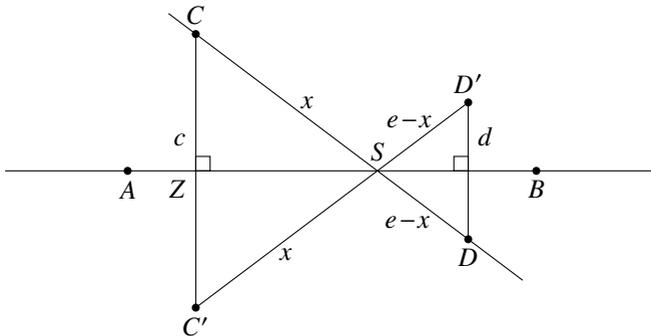


FIG. 13.17 – Construction de l'intersection de deux droites (1).

Cas 2 : C et D sont du même côté de \overline{AB} . $\triangle CSC' \sim \triangle DSD'$ donne $\frac{x}{x-e} = \frac{c}{d}$ et la résolution de l'équation donne $x = \frac{c}{c-d}e$.

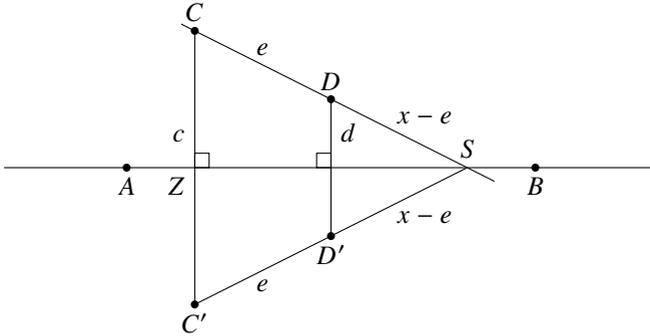


FIG. 13.18 – Construction de l'intersection de deux droites (2).

Construisons les cercles $c(C', d)$ et $c(D, e)$. Soit H leur intersection (fig. 13.19). La somme des segments $\overline{CC'}$ et $\overline{C'H}$ est $c + d$. On doit montrer que H est dans le prolongement de $\overline{CC'}$ pour que \overline{CH} soit un segment de longueur $c + d$. $\overline{CH} = c - d$ dans le cas où D est du même côté de \overline{AB} que C (non représenté sur la figure).

H est l'intersection de $c(C', d)$ et $c(D, e)$, donc $\overline{DH} = e$ et $\overline{C'H} = d$. Par construction, $\overline{C'D'} = e$ et $\overline{D'D} = d$, donc le quadrilatère $\overline{C'D'DH}$ est un parallélogramme.

Par construction, $\overline{DD'} \parallel \overline{CC'}$, donc $\overline{C'H} \parallel \overline{DD'}$ et $\overline{C'H} \parallel \overline{CC'}$. Puisque l'une de ses extrémités est C' , il doit se trouver sur la droite contenant $\overline{CC'}$. D'après le théorème 13.3, à partir des longueurs c , d et e , on peut construire un segment de longueur $c + d$ et d'après le théorème 13.7 on peut construire un segment de longueur $x = \frac{c}{c+d}e$. L'intersection S de $c(C', x)$ et $c(C, x)$ est aussi l'intersection de \overline{AB} et \overline{CD} (fig. 13.20). \square

13.7 Construction de l'intersection d'une droite et d'un cercle

Théorème 13.9. *Étant donné un cercle $k = C(M, r)$ et une droite l , il est possible de construire les intersections de k et de l .*

Démonstration. Construisons le symétrique M' de M par rapport à l et construisons le cercle $k' = c(M', r)$. Puisque $MYM' \cong \triangle MXM'$, les points

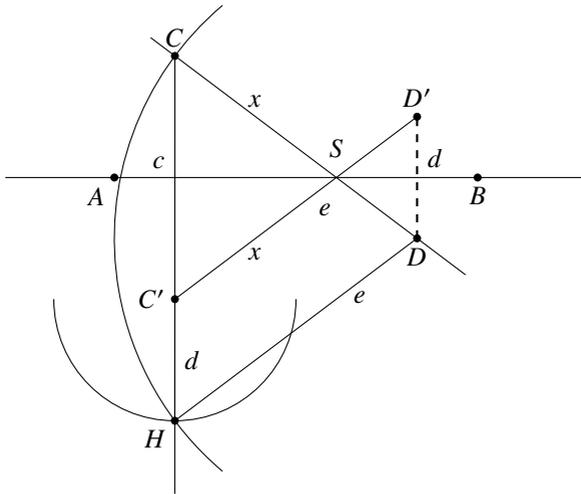


FIG. 13.19 – Construction de l'intersection de deux droites (3).

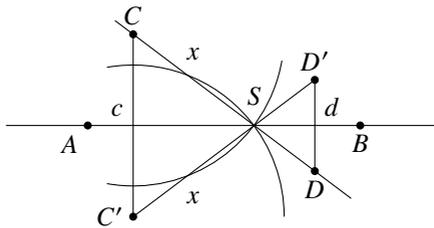


FIG. 13.20 – Construction de l'intersection de deux droites (4).

X et Y d'intersection de k et k' sont les points d'intersection de l et de k (fig. 13.21).

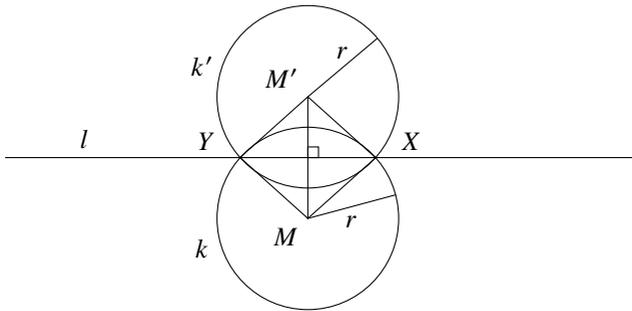


FIG. 13.21 – Construction de l'intersection d'une droite et d'un cercle (1).

Cette construction ne peut pas être faite si M est sur la droite l . Dans ce cas, choisissons un point arbitraire A sur l qui est à une distance supérieure à r de M . En utilisant le théorème 13.3, raccourcissons et allongeons \overline{AM} de r . Les extrémités X et Y de ces segments sont les intersections de k et l (fig. 13.22). \square

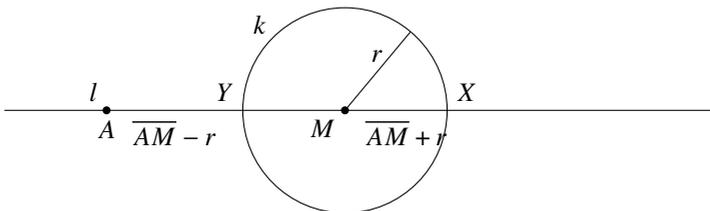


FIG. 13.22 – Construction de l'intersection d'une droite et d'un cercle (2).

Quelle est la surprise ?

Lorsqu'on apprend à construire à la règle et au compas, il semble évident que les deux outils soient nécessaires. Ce fut donc une surprise de découvrir qu'un compas est suffisant. La démonstration est assez longue, nous n'allons donc pas laisser la règle à la maison, mais le théorème montre que nous

ne devrions pas supposer qu'il n'existe pas d'alternatives à des concepts mathématiques bien connus.

Sources

Ce chapitre se base sur le problème 33 de [19] retravaillé par Michael Woltermann [20]. Une démonstration supplémentaire se trouve dans [32].

Chapitre 14

Une règle et un cercle suffisent

Toute construction à la règle et au compas peut-elle être réalisée uniquement avec une règle ? La réponse est non, car les droites sont définies par des équations linéaires et ne peuvent pas représenter des cercles qui sont définis par des équations du second degré. En 1822, Jean-Victor Poncelet a conjecturé qu'une règle seule suffit, à condition qu'un cercle existe dans le plan. Ceci a été démontré en 1833 par Jakob Steiner.

Après avoir expliqué dans la section 14.1 ce que signifie effectuer une construction avec seulement une règle et un cercle, la démonstration est présentée par étapes en commençant par cinq constructions auxiliaires : la construction d'une droite parallèle à une droite donnée (sect. 14.2), la construction d'une perpendiculaire à une droite donnée (sect. 14.3), la copie d'un segment dans une direction donnée (sect. 14.4), la construction d'un segment qui est le rapport d'autres segments (sect. 14.5) et la construction d'une racine carrée (sect. 14.6). La section 14.7 montre comment trouver les intersections d'une droite avec un cercle et la section 14.8 montre comment trouver les intersections de deux cercles.

14.1 Qu'est-ce qu'une construction avec seulement une règle ?

Une construction à la règle et au compas est une suite de trois opérations :

- trouver le point d'intersection de deux droites.
- trouver les points d'intersection d'une droite et d'un cercle.
- trouver les points d'intersection de deux cercles.

La première opération peut être effectuée avec une règle seule.

Un cercle est défini par un point O , son centre, et par un rayon r , un segment de longueur r dont l'une des extrémités est le centre. Si nous pouvons construire les points marqués X et Y sur la figure 14.1, nous pouvons affirmer avoir construit avec succès les points d'intersection d'un cercle donné avec une droite donnée. De même, la construction de X et Y dans la figure 14.2 est la construction des points d'intersection de deux cercles donnés. Les cercles

dessinés en pointillés dans les figures n'apparaissent pas réellement dans une construction ; ils sont juste utilisés pour aider à comprendre la construction.

Le cercle unique utilisé dans les constructions, appelé *cercle fixe*, peut apparaître n'importe où dans le plan et peut avoir un rayon arbitraire.

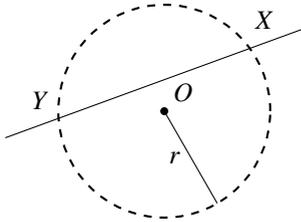


FIG. 14.1 – X et Y sont les points d'intersection d'une droite et d'un cercle.

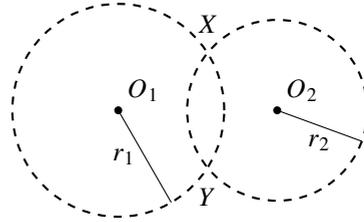


FIG. 14.2 – X et Y sont les points d'intersection de deux cercles.

14.2 Construction d'une droite parallèle à une droite donnée

Théorème 14.1. *Étant donné une droite l définie par deux points A et B et un point P qui n'est pas sur la droite, il est possible de construire une droite qui passe par P et qui est parallèle à \overline{AB} .*

Démonstration. Il y a deux cas pour la démonstration.

Cas 1. \overline{AB} est un *segment dirigé*, c'est-à-dire que le milieu M de \overline{AB} est donné. Construisons une demi-droite qui prolonge \overline{AP} et choisissons un point quelconque S sur la droite au-delà de P . Construisons les droites \overline{BP} , \overline{SM} et \overline{SB} . L'intersection de \overline{BP} et de \overline{SM} est notée O . Construisons une demi-droite qui prolonge \overline{AO} et notons Q l'intersection de la demi-droite \overline{AO} avec \overline{SB} (fig. 14.3).

Nous affirmons que $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$.

La démonstration utilise le théorème de Ceva.

Théorème de Ceva (théorème A.19). Si des segments allant des sommets d'un triangle aux côtés opposés se coupent en un point O (comme sur la figure 14.3), alors les longueurs des segments satisfont

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}} \cdot \frac{\overline{SP}}{\overline{PA}} = 1.$$

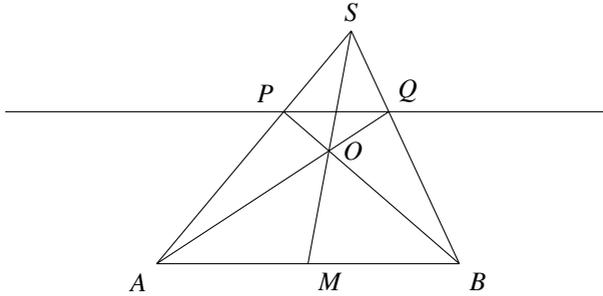


FIG. 14.3 – Construction d'une droite parallèle dans le cas d'un segment dirigé.

Dans la figure 14.3, M est le milieu de \overline{AB} donc $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = 1$ et l'équation devient

$$\frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{SP}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PS}}, \quad (14.1)$$

puisque l'ordre des extrémités d'un segment n'est pas important.

Nous affirmons que $\triangle ABS \sim \triangle PQS$:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{BS}}{\overline{QS}} &= \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}} + \frac{\overline{QS}}{\overline{QS}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}} + 1, \\ \frac{\overline{AS}}{\overline{PS}} &= \frac{\overline{AP}}{\overline{PS}} + \frac{\overline{PS}}{\overline{PS}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PS}} + 1. \end{aligned}$$

En utilisant l'équation 14.1,

$$\frac{\overline{BS}}{\overline{QS}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}} + 1 = \frac{\overline{AP}}{\overline{PS}} + 1 = \frac{\overline{AS}}{\overline{PS}},$$

et il s'ensuit que $\triangle ABS \sim \triangle PQS$ et donc $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$.

Cas 2 : \overline{AB} n'est pas nécessairement un segment dirigé. Le cercle fixe c a pour centre O et pour rayon r . P est le point qui n'est pas sur la droite pour laquelle il faut construire une droite parallèle à l (figure 14.4).

Choisissons M , un point quelconque sur l , et construisons une demi-droite qui prolonge \overline{MO} et qui coupe le cercle en U et V . \overline{UV} est un segment dirigé,

car le centre O du cercle est le milieu du diamètre \overline{UV} . Choisissons un point A sur l et utilisons la construction d'un segment dirigé (cas 1) pour construire une droite passant par A et parallèle à \overline{UV} qui coupe le cercle en X et Y (fig. 14.5).

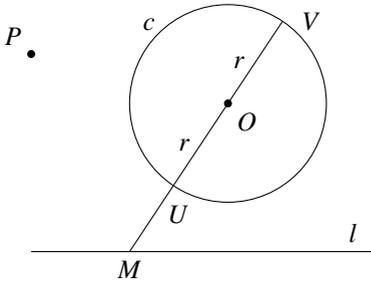


FIG. 14.4 – Construction d'un segment dirigé.

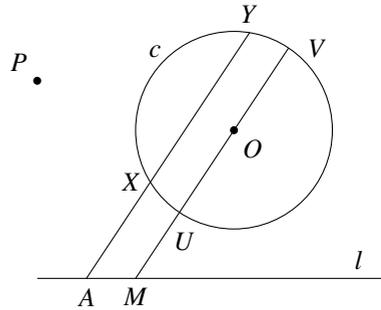


FIG. 14.5 – Construction d'une droite parallèle au segment dirigé.

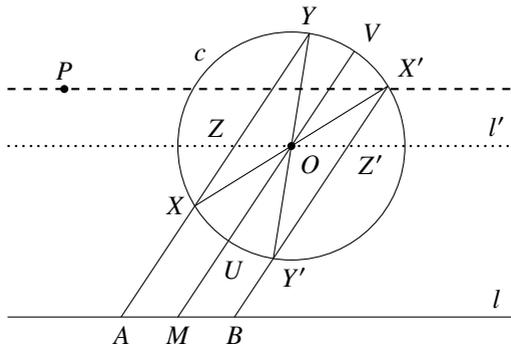


FIG. 14.6 – Démonstration que l' est parallèle à l .

Construisons un diamètre de X à O qui coupe l' autre côté du cercle en X' , et construisons de la même façon le diamètre $\overline{YY'}$. Construisons la demi-droite de X' à Y' et notons B son intersection avec l . Nous affirmons que M est le milieu de \overline{AB} , de sorte que \overline{AB} est un segment dirigé. On peut donc construire

une droite passant par P et parallèle à l (fig. 14.6).

\overline{OX} , $\overline{OX'}$, \overline{OY} et $\overline{OY'}$ sont tous des rayons du cercle et $\angle XOY = \angle X'OY'$ puisqu'il s'agit d'angles opposés par le sommet, donc $\triangle XOY \cong \triangle X'OY'$ (deux côtés et un angle égaux). Définissons ¹ l' comme étant une droite qui passe par O et parallèle à l qui coupe \overline{XY} en Z et $\overline{X'Y'}$ en Z' . $\angle XOZ = \angle X'OZ'$ sont des angles opposés par le sommet, $\angle ZXO = \angle Z'X'O$ sont des angles alternes-internes et $\overline{XO} = \overline{X'O'}$ sont des rayons, donc $\triangle XOZ \cong \triangle X'OZ'$ (deux angles et un côté égaux) et $\overline{ZO} = \overline{OZ'}$. Par conséquent, \overline{AMOZ} et $\overline{BMOZ'}$ sont des parallélogrammes et $\overline{AM} = \overline{ZO} = \overline{OZ'} = \overline{MB}$. \square

Théorème 14.2. *Étant donné un segment \overline{AB} et un point P non situé sur la droite, il est possible de construire un segment \overline{PQ} parallèle à \overline{AB} et dont la longueur est égale à la longueur de \overline{AB} , c'est-à-dire qu'il est possible de copier \overline{AB} parallèlement à lui-même avec P comme l'un de ses points d'extrémité.*

Démonstration. Nous avons démontré qu'il est possible de construire une droite m qui passe par P et parallèle à \overline{AB} et une droite n qui passe par B et parallèle à \overline{AP} . Le quadrilatère \overline{ABQP} est un parallélogramme, donc les côtés opposés sont égaux : $\overline{AB} = \overline{PQ}$ (fig. 14.7). \square

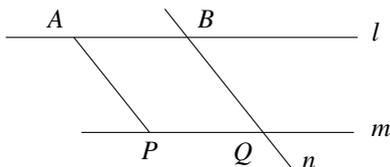


FIG. 14.7 – Construction d'une copie d'un segment parallèle à un segment existant.

14.3 Construction d'une perpendiculaire à une droite donnée.

Théorème 14.3. *Étant donné un segment l et un point P non situé sur l , il est possible de construire une perpendiculaire à l qui passe par P .*

1. Définissons, et non construisons, car nous sommes au milieu de la démonstration qu'une telle droite peut être construite.

Démonstration. D'après le théorème 14.1, construisons une droite l' parallèle à l qui coupe le cercle fixe en U et V . Construisons le diamètre $\overline{OUU'}$ et la corde $\overline{VV'}$ (fig. 14.8). $\angle UVU'$ est un angle droit, car il est sous-tendu par un diamètre. Par conséquent, $\overline{VV'}$ est perpendiculaire à \overline{UV} et à l . De nouveau d'après le théorème 14.1, construisons la parallèle à $\overline{VV'}$ qui passe par P . \square

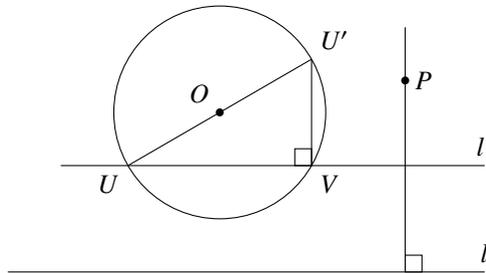


FIG. 14.8 – Construction d'une droite perpendiculaire.

14.4 Copie d'un segment dans une direction donnée

Théorème 14.4. *Il est possible de construire une copie d'un segment donné dans la direction d'une autre droite.*

Par « direction », on veut dire que la droite définie par deux points A' et H' a un angle θ par rapport à un certain axe. Le but est de construire $\overline{AS} = \overline{PQ}$ tel que \overline{AS} ait le même angle θ par rapport à cet axe (fig. 14.9).

Démonstration. D'après le théorème 14.2, il est possible de construire un segment \overline{AH} tel que $\overline{AH} \parallel \overline{A'H'}$ et de construire un segment \overline{AK} tel que $\overline{AK} \parallel \overline{PQ}$ et $\overline{AK} = \overline{PQ}$. $\angle HAK = \theta$, il reste donc à trouver un point S sur \overline{AH} tel que $\overline{AS} = \overline{PQ}$.

Construisons deux rayons \overline{OU} et \overline{OV} du cercle fixe qui sont parallèles à \overline{AH} et \overline{AK} respectivement. Construisons une demi-droite passant par K parallèle à \overline{UV} . On note S son intersection avec \overline{AH} (fig. 14.10). Par construction, $\overline{AH} \parallel \overline{OU}$ et $\overline{AK} \parallel \overline{OV}$, donc $\angle SAK = \angle HAK = \angle UOV = \theta$. $\overline{SK} \parallel \overline{UV}$ et $\triangle SAK \sim \triangle UOV$ (trois angles égaux), $\triangle UOV$ est isocèle, car \overline{OU} et \overline{OV} sont des rayons du même cercle. Par conséquent, $\triangle SAK$ est isocèle et $\overline{AS} = \overline{AK} = \overline{PQ}$. \square

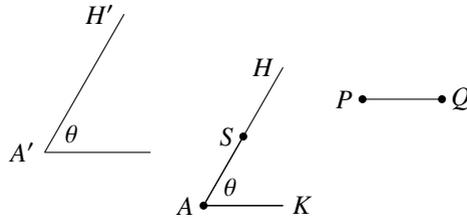


FIG. 14.9 – Copie d'un segment dans une direction donnée.

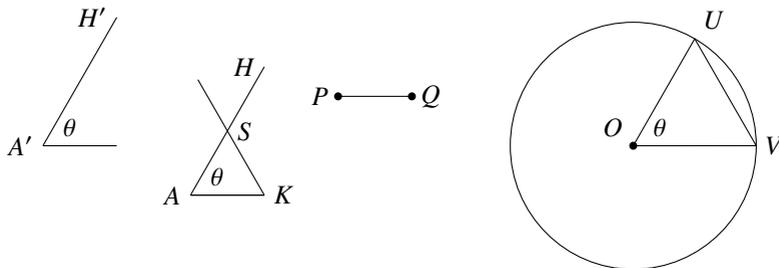


FIG. 14.10 – Utilisation du cercle fixe pour copier le segment.

14.5 Construction d'un segment comme rapport de segments

Théorème 14.5. *Étant donné des segments de longueurs n , m et s , il est possible de construire un segment de longueur*

$$x = \frac{n}{m} s.$$

Démonstration. Choisissons des points A , B et C non situés sur la même droite et construisons les demi-droites \overline{AB} et \overline{AC} . Avec le théorème 14.4, il est possible de construire des points M , N et S tels que $\overline{AM} = m$, $\overline{AN} = n$ et $\overline{AS} = s$. Avec le théorème 14.1, on construit une droite qui passe par N , parallèle à \overline{MS} , qui coupe \overline{AC} en X . On pose $x = \overline{AX}$ (fig. 14.11). $\triangle MAS \sim \triangle NAX$ (trois angles égaux) donc $\frac{m}{n} = \frac{s}{x}$ et $x = \frac{n}{m} s$. \square

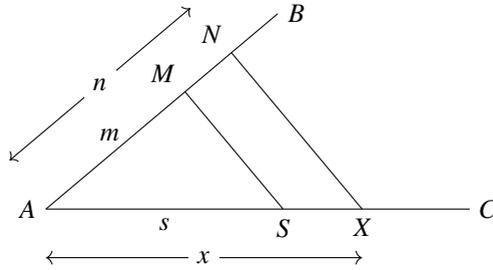


FIG. 14.11 – Triangles semblables pour construire le rapport des longueurs.

14.6 Construction d’une racine carrée

Théorème 14.6. *Étant donné des segments de longueurs a et b , il est possible de construire un segment de longueur \sqrt{ab} .*

Démonstration. Nous voulons exprimer $x = \sqrt{ab}$ comme $x = \frac{n}{m}s$ afin d’utiliser le théorème 14.5.

- Pour n on utilise d , le diamètre du cercle fixe.
- Pour m on utilise $t = a + b$ qui peut être construit à partir de a et b d’après le théorème 14.4.
- On pose $s = \sqrt{hk}$ où h et k sont définis comme des expressions qui font intervenir les longueurs a, b, t et d .

Posons $h = \frac{d}{t}a$ et $k = \frac{d}{t}b$. Calculons :

$$x = \sqrt{ab} = \sqrt{\frac{th}{d} \frac{tk}{d}} = \sqrt{\left(\frac{t}{d}\right)^2 hk} = \frac{t}{d} \sqrt{hk} = \frac{t}{d} s,$$

$$h + k = \frac{d}{t}a + \frac{d}{t}b = \frac{d(a+b)}{t} = \frac{dt}{t} = d.$$

Avec le théorème 14.4, construisons $\overline{HA} = h$ sur un diamètre \overline{HK} du cercle fixe. Puisque $h + k = d$, on a $\overline{AK} = k$ (fig. 14.12). Avec le théorème 14.3, on construit une perpendiculaire à \overline{HK} en A et on note S l’intersection de cette droite avec le cercle. $\overline{OS} = \overline{OK} = d/2$ et $\overline{OA} = (d/2) - k$.

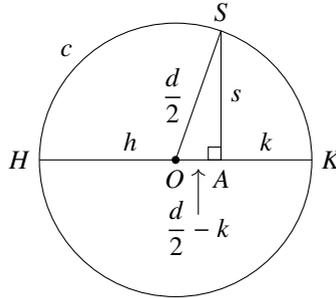


FIG. 14.12 – Construction d'une racine carrée.

D'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned}
 s^2 &= \left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2} - k\right)^2 \\
 &= \left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 + 2\frac{dk}{2} - k^2 \\
 &= k(d - k) = kh, \\
 s &= \sqrt{hk}.
 \end{aligned}$$

Maintenant, $x = \frac{t}{d}s$ peut être construit d'après le théorème 14.5. \square

14.7 Construction de l'intersection d'une droite et d'un cercle

Théorème 14.7. *Étant donné une droite l et un cercle $c(O, r)$, il est possible de construire leurs points d'intersection (fig. 14.13).*

Démonstration. D'après le théorème 14.3 il est possible de construire une perpendiculaire à la droite l qui passe par le centre O du cercle. L'intersection de l avec la perpendiculaire est notée M . \overline{OM} coupe la corde \overline{XY} en son milieu, où X et Y sont les intersections de la droite avec le cercle (fig. 14.14). Posons $\overline{XY} = 2s$ et $\overline{OM} = t$. Notons que s , X et Y ne sont que des définitions et que les entités n'ont pas été construites.

D'après le théorème de Pythagore, $s^2 = r^2 - t^2 = (r+t)(r-t)$. D'après le théorème 14.4, il est possible de construire des segments de longueur t à partir

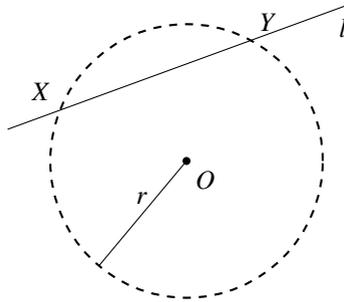


FIG. 14.13 – Construction des points d'intersection d'une droite et d'un cercle (1).

de O dans les deux directions \overline{OR} et \overline{RO} . On obtient ainsi deux segments de longueur $r + t$ et $r - t$.

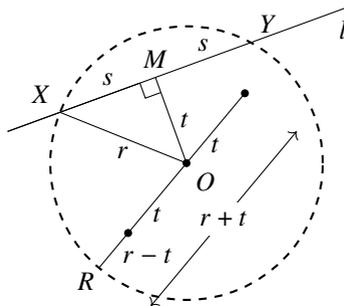


FIG. 14.14 – Construction des points d'intersection d'une droite et d'un cercle (2).

D'après le théorème 14.6, on peut construire un segment de longueur $s = \sqrt{(r + t)(r - t)}$, et d'après le théorème 14.4 on peut construire des segments de longueur s à partir de M le long de l dans les deux directions. Leurs autres extrémités sont les points d'intersection de l et c . \square

14.8 Construction de l'intersection de deux cercles

Théorème 14.8. *Étant donné deux cercles $c(O_1, r_1), c(O_2, r_2)$, il est possible de construire leurs points d'intersection.*

Démonstration. Construisons $\overline{O_1O_2}$ et notons sa longueur t (fig. 14.15). On note A le point d'intersection de $\overline{O_1O_2}$ et de \overline{XY} . On pose $q = \overline{O_1A}$ et $x = \overline{XA}$ (fig. 14.16). A n'a pas encore été construit, mais si q et x sont construits, alors d'après le théorème 14.4 le point A à la distance q de O_1 dans la direction $\overline{O_1O_2}$ peut être construit.

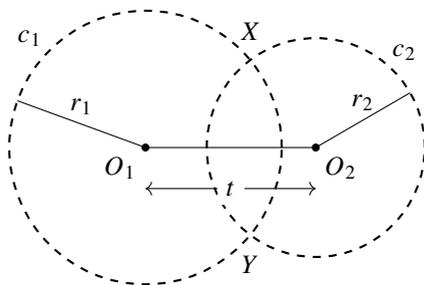


FIG. 14.15 – Construction de l'intersection de deux cercles (1).

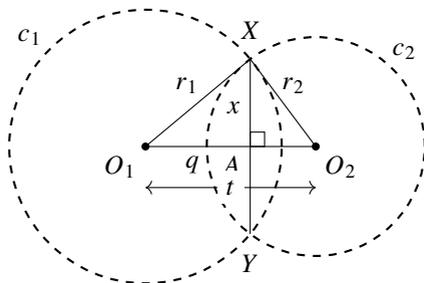


FIG. 14.16 – Construction de l'intersection de deux cercles (2).

Une fois que A a été construit, le théorème 14.3 montre qu'on peut construire une perpendiculaire à $\overline{O_1O_2}$ qui passe par A . D'après le théorème 14.4 il est possible de construire des segments de longueur x à partir de A dans les deux directions le long de la perpendiculaire. Leurs autres points d'extrémité sont les points d'intersection avec les cercles.

Construction de la longueur q . Posons $d = \sqrt{r_1^2 + t^2}$. C'est l'hypoténuse d'un triangle rectangle, qui peut être construite à partir des longueurs connues r_1 et t . Notons que $\triangle O_1XO_2$ n'est pas nécessairement un triangle rectangle; le triangle rectangle peut être construit n'importe où dans le plan. Dans le

triangle rectangle $\triangle XAO_1$, $\cos \angle XO_1A = q/r_1$. Par la loi des cosinus pour $\triangle XO_1O_2$,

$$\begin{aligned} r_2^2 &= t^2 + r_1^2 - 2r_1t \cos \angle XO_1O_2 \\ &= t^2 + r_1^2 - 2tq, \\ 2tq &= (t^2 + r_1^2) - r_2^2 = d^2 - r_2^2, \\ q &= \frac{(d + r_2)(d - r_2)}{2t}. \end{aligned}$$

D'après le théorème 14.4, ces longueurs peuvent être construites et, d'après le théorème 14.5, q peut être construit à partir de $d + r_2$, $d - r_2$ et $2t$.

Construction de la longueur x . D'après le théorème de Pythagore,

$$x = \sqrt{r_1^2 - q^2} = \sqrt{(r_1 + q)(r_1 - q)}.$$

D'après le théorème 14.4, $h = r_1 + q$ et $k = r_1 - q$ peuvent être construits, de même que $x = \sqrt{hk}$ d'après le théorème 14.6. \square

Quelle est la surprise ?

Le compas est nécessaire, car la règle ne peut trouver que les racines des équations linéaires et non des valeurs telles que $\sqrt{2}$, l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle dont les côtés ont une longueur de 1. Cependant, il est surprenant que l'existence d'un seul cercle, quelle que soit la position de son centre et son rayon, suffise pour effectuer toute construction possible à la règle et au compas.

Sources

Ce chapitre se base sur le problème 34 de [19] retravaillé par Michael Woltermann [20].

Chapitre 15

Les triangles dont les aires et les périmètres sont égaux sont-ils isométriques ?

Deux triangles ayant la même aire et le même périmètre sont-ils isométriques ? Pas nécessairement : les triangles de côtés $(17, 25, 28)$ et $(20, 21, 29)$ ont tous deux un périmètre de 70 et une aire de 210, mais ils ne sont pas isométriques (fig. 15.1).¹ Ce chapitre montre qu'à partir d'un triangle à côtés rationnels, il est possible de construire un triangle non isométrique, également à côtés rationnels, qui a la même aire et le même périmètre. Nous menons la déduction à l'aide d'un exemple, en montrant que le triangle de côtés $(3, 4, 5)$ et le triangle de côtés $(\frac{156}{35}, \frac{101}{21}, \frac{41}{15})$ ont tous deux un périmètre de 12 et une aire de 6.

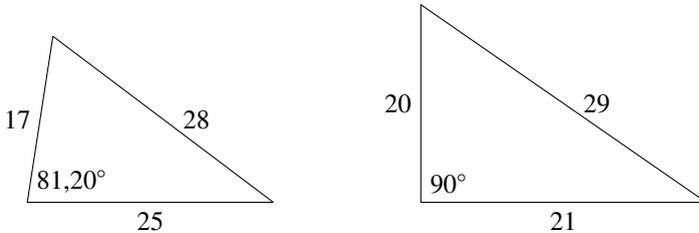


FIG. 15.1 – Triangles non isométriques ayant la même aire et le même périmètre.

15.1 D'un triangle à une courbe elliptique

Les trois bissectrices des angles d'un triangle se coupent en un point O qui est le centre du cercle inscrit dans le triangle (fig. 15.2).

Traçons les hauteurs du centre O vers les côtés. Les hauteurs ont une longueur r , le rayon du cercle inscrit. Les hauteurs et les bissectrices des

1. Les aires ont été calculées à l'aide de la formule de Héron (théorème A.3) et les angles à l'aide de la loi des cosinus (théorème A.8).

angles créent trois paires de triangles rectangles isométriques :

$$\triangle AOB' \cong \triangle AOC', \quad \triangle BOA' \cong \triangle BOC', \quad \triangle COA' \cong \triangle COB'.$$

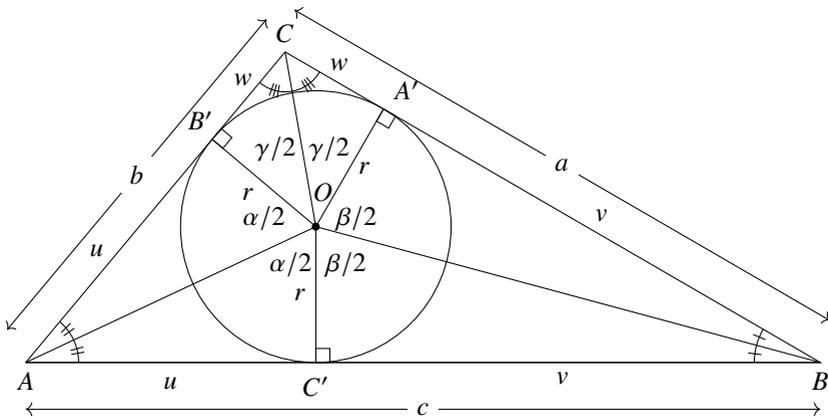


FIG. 15.2 – Le cercle inscrit dans un triangle.

Les hauteurs divisent les côtés a , b et c en segments u , v et w . L'aire du triangle ABC est la somme des aires de $\triangle BOC$, $\triangle AOB$ et $\triangle AOC$:

$$A = \frac{1}{2}(w + v)r + \frac{1}{2}(v + u)r + \frac{1}{2}(u + w)r \quad (15.1a)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2(u + v + w)r \quad (15.1b)$$

$$= \frac{1}{2}(a + b + c)r \quad (15.1c)$$

$$= sr, \quad (15.1d)$$

où s est le demi-périmètre, la moitié du périmètre du triangle $\triangle ABC$. Les longueurs u , v et w s'expriment à l'aide du rayon du cercle et des angles centraux $\alpha/2$, $\beta/2$ et $\gamma/2$:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{u}{r}, \quad \tan \frac{\beta}{2} = \frac{v}{r}, \quad \tan \frac{\gamma}{2} = \frac{w}{r}. \quad (15.2)$$

Le demi-périmètre peut maintenant être exprimé en fonction des tangentes :

$$s = u + v + w = r \tan \frac{\alpha}{2} + r \tan \frac{\beta}{2} + r \tan \frac{\gamma}{2} = r \left(\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\gamma}{2} \right).$$

D'après l'équation 15.1d, l'aire est

$$A = sr = r^2 \left(\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\gamma}{2} \right). \quad (15.3)$$

À partir de $r = A/s$, l'équation 15.3 peut s'écrire

$$\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\gamma}{2} = \frac{A}{r^2} = \frac{A}{(A/s)^2} = \frac{s^2}{A}. \quad (15.4)$$

Puisque la somme des angles α , β et γ est 360° ,

$$\gamma/2 = 360^\circ/2 - (\alpha/2 + \beta/2), \quad (15.5a)$$

$$\tan \gamma/2 = \tan(180^\circ - (\alpha/2 + \beta/2)) \quad (15.5b)$$

$$= -\tan(\alpha/2 + \beta/2) \quad (15.5c)$$

$$= \frac{\tan \alpha/2 + \tan \beta/2}{\tan \alpha/2 \tan \beta/2 - 1}, \quad (15.5d)$$

en utilisant la formule de la tangente de la somme de deux angles (théorème A.9).

Simplifions les notations en posant

$$x = \tan \frac{\alpha}{2}, \quad y = \tan \frac{\beta}{2}, \quad z = \tan \frac{\gamma}{2}. \quad (15.6)$$

D'après l'équation 15.5d, nous pouvons exprimer $z = \tan \gamma/2$ en fonction de x et y :

$$z = \frac{x + y}{xy - 1}. \quad (15.7)$$

Avec cette notation, l'équation 15.4 devient

$$x + y + \frac{x + y}{xy - 1} = \frac{s^2}{A}. \quad (15.8)$$

Pour des valeurs fixes de A et s , existe-t-il des solutions multiples de l'équation 15.8 ?

Pour le triangle rectangle (3, 4, 5),

$$\frac{s^2}{A} = \frac{\left(\frac{1}{2}(3+4+5)\right)^2}{\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4} = \frac{6^2}{6} = 6. \quad (15.9)$$

S'il existe une autre solution de l'équation 15.8 avec $s^2/A = 6$, elle peut s'écrire

$$x + y + \frac{x + y}{xy - 1} = 6, \quad (15.10a)$$

$$x^2y + xy^2 - 6xy + 6 = 0. \quad (15.10b)$$

C'est l'équation d'une courbe elliptique.

15.2 Résolution de l'équation pour la courbe elliptique

Une partie du graphe de l'équation 15.10b est représentée dans la figure 15.3. Tout point de la courbe fermée du premier quadrant est une solution de l'équation, car les longueurs des côtés du triangle doivent être positives. A , B et D correspondent au triangle (3, 4, 5) comme indiqué ci-dessous. Pour trouver d'autres solutions rationnelles, on utilise la méthode des deux sécantes.

Construisons une sécante passant par les points $A = (2, 3)$ et $B = (1, 2)$. Elle coupe la courbe en $C = (-1, 5; -0, 5)$, mais cela ne donne pas de solution, car les valeurs sont négatives. Construisons une deuxième sécante de C à $D = (3, 2)$. L'intersection avec la courbe en $E \approx (1, 5; 1, 2)$ donne une nouvelle solution dont les coordonnées seront calculées ci-dessous.

L'équation de la droite (rouge) qui passe par A et B est $y = x + 1$. D'après l'équation 15.10b,

$$\begin{aligned} x^2(x+1) + x(x+1)^2 - 6x(x+1) + 6 &= 0, \\ 2x^3 - 3x^2 - 5x + 6 &= 0. \end{aligned}$$

Avec A et B , on connaît deux racines $x = 2$ et $x = 1$, donc on peut factoriser le polynôme de degré trois :

$$(x - 2)(x - 1)(ax + b) = 0,$$

où la troisième racine est inconnue. Multiplions les facteurs et concluons que $a = 2$ et $b = 3$ puisque $2x^3 - 3x^2 - 5x + 6 = ax^3 + \dots + 2b$. Le troisième

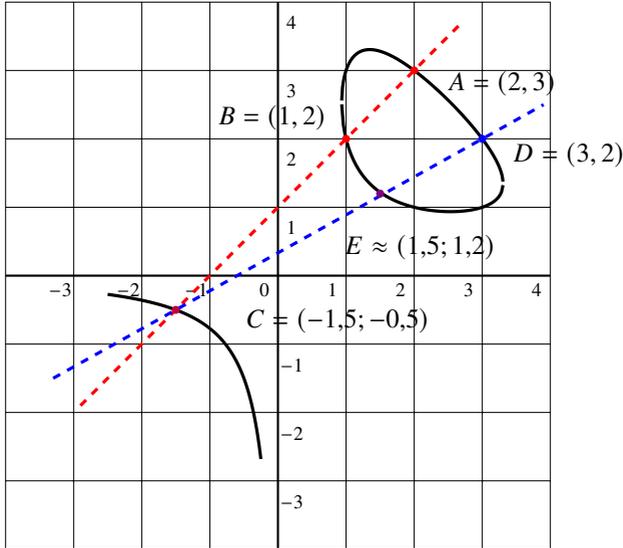


FIG. 15.3 – La méthode des deux sécantes.

facteur est $2x + 3$ ce qui donne la troisième racine $x = -\frac{3}{2}$ et $y = x + 1 = -\frac{1}{2}$.
C'est le point $C = (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ du graphe.

L'équation de la droite (bleue) qui passe par C et D est

$$y = \frac{5}{9}x + \frac{1}{3}. \quad (15.11)$$

On remplace y dans l'équation 15.10b :

$$\begin{aligned} x^2 \left(\frac{5}{9}x + \frac{1}{3} \right) + x \left(\frac{5}{9}x + \frac{1}{3} \right)^2 - 6x \left(\frac{5}{9}x + \frac{1}{3} \right) + 6 &= 0, \\ \frac{70}{81}x^3 - \frac{71}{27}x^2 - \frac{17}{9}x + 6 &= 0. \end{aligned}$$

Avec C et D, on connaît deux racines $x = 3$ et $x = -\frac{3}{2}$, donc on peut factoriser le polynôme de degré trois :

$$(x - 3) \left(x + \frac{3}{2} \right) (ax + b) = 0.$$

En égalant les coefficients du terme de degré trois et du terme constant, on

obtient

$$\frac{70}{81}x - \frac{4}{3} = 0,$$

$$x = \frac{54}{35} \approx 1,543,$$

et y peut être calculé à partir de l'équation 15.11 :

$$y = \frac{25}{21} \approx 1,190.$$

Les coordonnées de E sont

$$\left(\frac{54}{35}, \frac{25}{21}\right) \approx (1,543; 1,190),$$

qui sont proches des approximations $(1,5; 1,2)$ obtenues à partir du graphe.

Enfin, calculons z à partir de l'équation 15.7 :

$$z = \frac{x+y}{xy-1} = \left(\frac{54}{35} + \frac{25}{21}\right) \Big/ \left(\frac{54}{35} \frac{25}{21} - 1\right) = \frac{2009}{615} = \frac{49}{15}.$$

15.3 Détermination d'un triangle à partir de la courbe elliptique

En utilisant les équations 15.2 et 15.6, les côtés a , b et c du triangle $\triangle ABC$ peuvent être calculés à partir de x , y , z et $r = A/s = 6/6 = 1$:

$$a = w + v = r(z + y) = (z + y),$$

$$b = u + w = r(x + z) = (x + z),$$

$$c = u + v = r(x + y) = (x + y).$$

Pour la solution A de la courbe elliptique, les côtés du triangle sont

$$a = z + y = 1 + 3 = 4,$$

$$b = x + z = 2 + 1 = 3,$$

$$c = x + y = 2 + 3 = 5.$$

Pour la solution E de la courbe elliptique, les côtés du triangle sont

$$a = z + y = \frac{49}{15} + \frac{25}{21} = \frac{156}{35},$$

$$b = x + z = \frac{54}{35} + \frac{49}{15} = \frac{101}{21},$$

$$c = x + y = \frac{54}{35} + \frac{25}{21} = \frac{41}{15}.$$

Vérifions ce résultat. Le demi-périmètre est

$$s = \frac{1}{2} \left(\frac{156}{35} + \frac{101}{21} + \frac{41}{15} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{468 + 505 + 287}{105} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1260}{105} \right) = 6,$$

et l'aire peut être calculée en utilisant la formule de Héron (théorème A.3) :

$$A = \sqrt{6 \left(6 - \frac{156}{35} \right) \left(6 - \frac{101}{21} \right) \left(6 - \frac{41}{15} \right)} = \sqrt{36} = 6.$$

Est-ce que $\left(\frac{156}{35}, \frac{101}{21}, \frac{41}{15} \right) \cong (3, 4, 5)$? Pour simplifier le calcul, utilisons les approximations décimales (4,48 ; 4,81 ; 2,73). Alors

$$\sqrt{4,48^2 + 2,73^2} \approx 5,25 \neq 4,81,$$

Il ne s'agit donc pas d'un triangle rectangle et il n'est pas isométrique à (3, 4, 5).

On peut utiliser la loi des cosinus pour calculer les angles du triangle, comme le montre la figure 15.4.

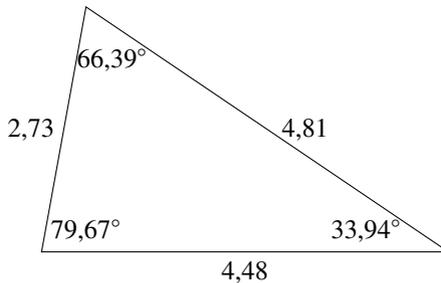


FIG. 15.4 – Le triangle dont le périmètre et l'aire sont identiques à ceux du triangle (3, 4, 5).

Quelle est la surprise ?

Les triangles ayant la même aire et le même périmètre sont-ils isométriques? Ma première impression était de dire « oui », car il n'est pas facile de trouver des contre-exemples. Ce qui est surprenant, c'est qu'étant donné un triangle arbitraire avec des côtés rationnels, il est possible de construire

un triangle non isométrique avec des côtés rationnels qui a la même aire et le même périmètre, bien que le résultat puisse être étrange comme avec les triangles $(3, 4, 5)$ et $(\frac{156}{35}, \frac{101}{21}, \frac{41}{15})$.

Sources

Ce chapitre se base sur [42]. [6] montre qu'étant donné un triangle isocèle, il existe des triangles non isométriques ayant la même aire et le même périmètre, mais la démonstration ne comporte pas de construction explicite.

Chapitre 16

Construction d'un heptadécagone régulier

Les seuls polygones réguliers que les Grecs savaient construire à la règle et au compas étaient le triangle, le carré, le pentagone et le polygone régulier à 15 côtés. À partir d'un polygone régulier à n côtés, on peut construire un polygone à $2n$ côtés en inscrivant le polygone dans un cercle et en bissectant l'angle central (fig. 16.1). Aucun autre progrès n'a été réalisé jusqu'en 1796, lorsque Carl Friedrich Gauss s'est réveillé un matin, juste avant son 19^e anniversaire, et a trouvé par une « pensée concentrée » comment construire un heptadécagone régulier, un polygone régulier à 17 côtés. Cet exploit lui a donné envie de devenir mathématicien.

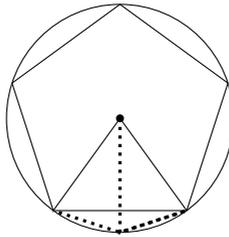


FIG. 16.1 – Construction d'un polygone régulier à 10 côtés à partir d'un pentagone régulier.

La section 16.1 traite de la relation entre le côté d'un polygone inscrit dans un cercle et l'angle central qu'il sous-tend. La section 16.2 énonce sans démonstration le théorème fondamental de l'algèbre. La section 16.3 présente les *racines de l'unité*, les racines du polynôme $x^n - 1$, qui sont au cœur de la démonstration de Gauss. Les sections 16.4 et 16.5 présentent la démonstration de Gauss qui est basée sur les symétries des racines des polynômes. Gauss a obtenu une formule qui montre que l'heptadécagone est constructible, mais aucune construction géométrique n'a été donnée pendant près d'un siècle. La section 16.6 donne une construction élégante due à James J. Callagy. La section 16.7 montre comment on peut construire un pentagone régulier en utilisant à la fois la géométrie et la trigonométrie.

Une partie du contenu est plus simple si on la présente à l'aide de nombres complexes. Ces éléments sont présentés dans des encadrés qui peuvent être sautés.

16.1 Construction des polygones réguliers

La construction de l'heptadécagone régulier a conduit au théorème de Gauss-Wantzel, qui stipule qu'un polygone régulier à n côtés peut être construit à la règle et au compas si et seulement si n est le produit d'une puissance de 2 et de zéro ou plusieurs nombres de Fermat distincts $2^{2^k} + 1$ qui sont premiers. Les nombres premiers de Fermat connus sont

$$F_0 = 3, \quad F_1 = 5, \quad F_2 = 17, \quad F_3 = 257, \quad F_4 = 65\,537.$$

Un polygone régulier à 257 côtés a été construit par Magnus Georg Paucker en 1822 et par Friedrich Julius Richelot en 1832. En 1894, Johann Gustav Hermes a affirmé avoir construit un polygone régulier à 65 537 côtés.

Pour construire un polygone régulier, il suffit de construire un segment de longueur $\cos \theta$, où θ est l'angle central sous-tendu par une corde qui est un côté du polygone inscrit dans un cercle unité. Étant donné le segment $\overline{OB} = \cos \theta$, construisons une perpendiculaire à B . Soit C son intersection avec le cercle unité. Alors

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} = \overline{OB}, \\ \theta &= \arccos(\overline{OB}). \end{aligned}$$

La corde \overline{AC} est un côté du polygone régulier (fig. 16.2).

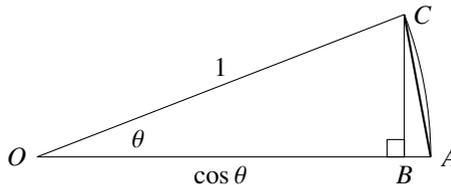


FIG. 16.2 – Le cosinus de l'angle central d'un polygone régulier.

Pour un segment de longueur 1, les longueurs constructibles sont celles qui peuvent être obtenues à partir de segments de longueur connue en utilisant

les opérations $\{+, -, \times, /, \sqrt{\quad}\}$ (sect. 2.5). Gauss a montré que $\cos(360^\circ/17)$, le cosinus de l'angle central d'un heptadécagone, est constructible puisqu'il peut être exprimé en utilisant uniquement ces opérations :

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{360^\circ}{17}\right) &= -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\ &\quad + \frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}. \end{aligned}$$

16.2 Le théorème fondamental de l'algèbre

Le théorème suivant sera utilisé sans démonstration.

Théorème 16.1. *Tout polynôme de degré n a exactement n racines.*

L'énoncé du théorème a été simplifié, car tout ce dont nous aurons besoin est de savoir que n racines existent.

Le théorème fondamental de l'algèbre stipule que tout polynôme non constant de degré n dans une seule variable avec des coefficients complexes a exactement n racines complexes. S'il existe plusieurs racines ayant la même valeur, elles sont toutes comptées : $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)(x - 2)$ a deux racines toutes deux égales à 2. Le polynôme $x^2 + 1$ à coefficients entiers a deux racines complexes $\pm\sqrt{-1}$. Étrangement, même si le théorème concerne des entités algébriques finies – des polynômes de degré n avec n racines – des méthodes d'analyse, généralement l'analyse complexe, sont nécessaires pour démontrer le théorème.

16.3 Les racines de l'unité

D'après le théorème fondamental de l'algèbre (théorème 16.1), le polynôme $x^n - 1$ a n racines pour tout entier $n > 1$. On observe que $x = 1$ est une racine. Donc il y a $n - 1$ autres racines. On désigne l'une de ces racines par r . Puisque $r^n = 1$, la racine est appelée une *racine n -ième de l'unité*. Qu'en est-il de r^2 ?

$$(r^2)^n = (r^n)^2 = 1^2 = 1.$$

Il s'ensuit que les n nombres

$$1, r, r^2, \dots, r^{n-2}, r^{n-1}$$

sont des racines n -ième de l'unité.

Soit $r = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$. D'après la formule de Moivre,

$$\left[\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \right]^n = \cos\left(\frac{2n\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2n\pi}{n}\right) = 1.$$

Théorème 16.2. Soit n un nombre premier et soit r une racine n -ième de l'unité. Alors

$$\{1, r, r^2, \dots, r^{n-2}, r^{n-1}\}$$

sont distinctes, donc ce sont toutes les racines n -ièmes de l'unité.

Démonstration. Supposons que les puissances ne soient pas distinctes de sorte que $r^i = r^j$ avec $0 \leq i < j \leq n-1$. Alors $r^j/r^i = r^{j-i} = 1$, donc il existe un entier i' avec $0 < i' < n$ tel que $r^{i'} = 1$. Soit m le plus petit de ces entiers strictement positifs. Par l'algorithme de division euclidienne pour les entiers, $n = ml + k$ avec $0 < l < n$ et $0 \leq k < m$. De

$$1 = r^n = r^{ml+k} = (r^m)^l \cdot r^k = 1^l \cdot r^k = r^k,$$

on déduit $0 \leq k < m$ et $r^k = 1$. Puisque m a été défini comme étant le plus petit entier strictement positif de ce type, $k = 0$ et $n = ml$ n'est pas premier. \square

Théorème 16.3. Soit $\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n\}$ les racines d'un polynôme unitaire $f(x)$ de degré n . Alors

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_{n-1})(x - a_n). \quad (16.1)$$

Démonstration. Si a_i est une racine de $f(x)$, on a par définition $f(a_i) = 0$. La division euclidienne de $f(x)$ par $x - a_i$ donne

$$f(x) = (x - a_i)g_i(x) + f(a_i) = (x - a_i)g_i(x)$$

pour un certain polynôme $g_i(x)$ de degré $n-1$. Le théorème résulte d'une récurrence sur le degré. \square

D'après l'équation 16.1 il est facile de voir que le coefficient de x^{n-1} est

$$-(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n).$$

Puisque le coefficient de x^{n-1} dans $x^n - 1$ pour $n \geq 2$ est nul, on a

$$\begin{aligned} -(1 + r + r^2 + \dots + r^{n-2} + r^{n-1}) &= 0, \\ r + r^2 + \dots + r^{n-2} + r^{n-1} &= -1. \end{aligned}$$

Pour l'heptadécagone, on obtient

$$\begin{aligned} r + r^2 + r^3 + r^4 + r^5 + r^6 + r^7 + r^8 + \\ r^9 + r^{10} + r^{11} + r^{12} + r^{13} + r^{14} + r^{15} + r^{16} = -1. \end{aligned} \quad (16.2)$$

16.4 La démonstration de Gauss qu'un heptadécagone est constructible

Ce que Gauss a compris, c'est qu'il n'est pas nécessaire de travailler avec les racines dans leur ordre naturel r, r^2, \dots, r^{16} . Les puissances de 3 modulo 17 ($3^0, 3^1, 3^2 \dots$) donnent toutes les racines, mais dans un ordre différent :

$$\begin{aligned} r^1, r^{1 \cdot 3=3}, r^{3 \cdot 3=9}, r^{9 \cdot 3=27=10}, r^{10 \cdot 3=30=13}, r^{13 \cdot 3=39=5}, r^{5 \cdot 3=15}, r^{15 \cdot 3=45=11}, \\ r^{11 \cdot 3=33=16}, r^{16 \cdot 3=48=14}, r^{14 \cdot 3=42=8}, r^{8 \cdot 3=24=7}, r^{7 \cdot 3=21=4}, r^{4 \cdot 3=12}, r^{12 \cdot 3=36=2}, \\ r^{2 \cdot 3=6}, \end{aligned}$$

où les racines ont été réduites modulo 17 :

$$r^{17m+k} = (r^{17})^m \cdot r^k = 1^m \cdot r^k = r^k.$$

Vérifions que la liste contient toutes les racines (sauf 1) exactement une fois :

$$r^1, r^3, r^9, r^{10}, r^{13}, r^5, r^{15}, r^{11}, r^{16}, r^{14}, r^8, r^7, r^4, r^{12}, r^2, r^6. \quad (16.3)$$

Étant donné un polynôme unitaire du second degré dont les racines sont a et b ,

$$y^2 + py + q = (y - a)(y - b) = 0,$$

on peut calculer les coefficients p et q à partir des racines (chap. 7) :

$$p = -(a + b), \quad q = ab.$$

Par conséquent, étant donné $a + b$ et ab , nous pouvons écrire l'équation du second degré dont a et b sont les racines.

Soit a_0 la somme des racines dans les positions impaires de l'équation 16.3 :

$$a_0 = r + r^9 + r^{13} + r^{15} + r^{16} + r^8 + r^4 + r^2,$$

et soit a_1 la somme des racines dans les positions paires de l'équation 16.3 :

$$a_1 = r^3 + r^{10} + r^5 + r^{11} + r^{14} + r^7 + r^{12} + r^6.$$

Pour obtenir a_0 et a_1 comme racines d'une équation du second degré, il faut d'abord calculer leur somme et utiliser l'équation 16.2 :

$$a_0 + a_1 = r + r^2 + \dots + r^{16} = -1.$$

Nous devons maintenant travailler dur pour calculer leur produit. Dans le calcul, les valeurs de $r^i r^j = r^{i+j}$ sont écrites après réduction des exposants modulo 17 :

$$\begin{aligned} a_0 a_1 &= (r + r^9 + r^{13} + r^{15} + r^{16} + r^8 + r^4 + r^2) \times \\ &\quad (r^3 + r^{10} + r^5 + r^{11} + r^{14} + r^7 + r^{12} + r^6) \\ &= \binom{r^4}{1} + \binom{r^{11}}{1} + \binom{r^6}{1} + \binom{r^{12}}{1} + \binom{r^{15}}{1} + \binom{r^8}{1} + \binom{r^{13}}{1} + \binom{r^7}{1} + \\ &\quad \binom{r^{12}}{2} + \binom{r^2}{1} + \binom{r^{14}}{1} + \binom{r^3}{1} + \binom{r^6}{2} + \binom{r^{16}}{1} + \binom{r^4}{2} + \binom{r^{15}}{2} + \\ &\quad \binom{r^{16}}{2} + \binom{r^6}{3} + \binom{r^1}{1} + \binom{r^7}{2} + \binom{r^{10}}{1} + \binom{r^3}{2} + \binom{r^8}{2} + \binom{r^2}{2} + \\ &\quad \binom{r^1}{2} + \binom{r^8}{3} + \binom{r^3}{3} + \binom{r^9}{1} + \binom{r^{12}}{3} + \binom{r^5}{1} + \binom{r^{10}}{2} + \binom{r^4}{3} + \\ &\quad \binom{r^2}{3} + \binom{r^9}{2} + \binom{r^4}{4} + \binom{r^{10}}{3} + \binom{r^{13}}{2} + \binom{r^6}{4} + \binom{r^{11}}{2} + \binom{r^5}{2} + \\ &\quad \binom{r^{11}}{3} + \binom{r^1}{3} + \binom{r^{13}}{3} + \binom{r^2}{4} + \binom{r^5}{3} + \binom{r^{15}}{3} + \binom{r^3}{4} + \binom{r^{14}}{2} + \\ &\quad \binom{r^7}{3} + \binom{r^{14}}{3} + \binom{r^9}{3} + \binom{r^{15}}{4} + \binom{r^1}{4} + \binom{r^{11}}{4} + \binom{r^{16}}{3} + \binom{r^{10}}{4} + \\ &\quad \binom{r^5}{4} + \binom{r^{12}}{4} + \binom{r^7}{4} + \binom{r^{13}}{4} + \binom{r^{16}}{4} + \binom{r^9}{4} + \binom{r^{14}}{4} + \binom{r^8}{4} \\ &= -4. \end{aligned}$$

En effet, chaque racine apparaît exactement quatre fois et l'équation 16.2 montre que la valeur du produit est -4 .

Puisque $a_0 + a_1 = -1$ et $a_0 a_1 = -4$, a_1 et a_2 sont les racines de l'équation du second degré $y^2 + y - 4 = 0$. Elles peuvent être calculées en utilisant la formule pour les racines d'une équation du second degré¹ :

$$a_0 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, \quad a_1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2},$$

Maintenant, soient b_0, b_1, b_2, b_3 les sommes d'une racine sur quatre à partir de r^1, r^3, r^9, r^{10} , respectivement :

$$\begin{aligned} b_0 &= r^1 + r^{13} + r^{16} + r^4, \\ b_1 &= r^3 + r^5 + r^{14} + r^{12}, \\ b_2 &= r^9 + r^{15} + r^8 + r^2, \\ b_3 &= r^{10} + r^{11} + r^7 + r^6. \end{aligned}$$

Vérifions que $b_0 + b_2 = a_0$ et $b_1 + b_3 = a_1$. Calculons les produits correspondants :

$$\begin{aligned} b_0 b_2 &= (r + r^{13} + r^{16} + r^4) \times (r^9 + r^{15} + r^8 + r^2) \\ &= (r^{10} + r^{16} + r^9 + r^3) + (r^5 + r^{11} + r^4 + r^{15}) + \\ &\quad (r^8 + r^{14} + r^7 + r^1) + (r^{13} + r^2 + r^{12} + r^6) \\ &= -1, \\ b_1 b_3 &= (r^3 + r^5 + r^{14} + r^{12}) \times (r^{10} + r^{11} + r^7 + r^6) \\ &= (r^{13} + r^{14} + r^{10} + r^9) + (r^{15} + r^{16} + r^{12} + r^{11}) + \\ &\quad (r^7 + r^8 + r^4 + r^3) + (r^5 + r^6 + r^2 + r^1) \\ &= -1. \end{aligned}$$

Pour résumer ces calculs :

$$\begin{aligned} b_0 + b_2 &= a_0, \\ b_0 b_2 &= -1, \\ b_1 + b_3 &= a_1, \\ b_1 b_3 &= -1. \end{aligned}$$

1. N.D.T. Il faut préciser comme dans [14] que $\theta = 360^\circ/17$ implique $r + r^{16} = 2 \cos \theta > 1$, $r^2 + r^{15} = 2 \cos(2\theta) > 1$, $r^4 + r^{13} = 2 \cos(4\theta) > 0$ et $r^8 + r^9 = 2 \cos(8\theta) > -2$. Donc $a_0 > 0$.

Donc b_0 et b_2 sont les solutions de $y^2 - a_0y - 1 = 0$, tandis que b_1 et b_3 sont les solutions de $y^2 - a_1y - 1 = 0$. En utilisant les valeurs calculées précédemment pour a_0 et a_1 , nous pouvons calculer² les racines b_0 et b_1 :

$$\begin{aligned}
 b_0 &= \frac{a_0 + \sqrt{a_0^2 + 4}}{2} \\
 &= \frac{\frac{(-1 + \sqrt{17})}{2} + \sqrt{\left(\frac{(-1 + \sqrt{17})}{2}\right)^2 + 4}}{2} \\
 &= \frac{(-1 + \sqrt{17}) + \sqrt{(-1 + \sqrt{17})^2 + 16}}{4} \\
 &= \frac{(-1 + \sqrt{17}) + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4}, \\
 b_1 &= \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4}}{2} \\
 &= \frac{\frac{(-1 - \sqrt{17})}{2} + \sqrt{\left(\frac{(-1 - \sqrt{17})}{2}\right)^2 + 4}}{2} \\
 &= \frac{(-1 - \sqrt{17}) + \sqrt{(-1 - \sqrt{17})^2 + 16}}{4} \\
 &= \frac{(-1 - \sqrt{17}) + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{4}.
 \end{aligned}$$

Enfin, soient c_0 et c_4 les sommes d'une racine sur huit en commençant

2. N.D.T. On a $r + r^{16} = 2 \cos \theta > 2 \cos(2\theta) = r^2 + r^{15}$ et $r^4 + r^{13} = 2 \cos(4\theta) > 2 \cos(8\theta)$.
Donc $b_0 > b_2$. De même, $b_1 > b_3$.

par r^1 et r^{13} :

$$\begin{aligned}c_0 &= r^1 + r^{16}, \\c_4 &= r^{13} + r^4, \\c_0 + c_4 &= r^1 + r^{16} + r^{13} + r^4 = b_0, \\c_0 c_4 &= (r^1 + r^{16}) \cdot (r^{13} + r^4) \\&= r^{14} + r^5 + r^{12} + r^3 = b_1.\end{aligned}$$

Donc c_0 et c_4 sont les racines de $y^2 - b_0 y + b_1 = 0$. Puisque $\cos(360^\circ/17) = c_0/2$ (fig. 16.3 et encadré), il suffit de calculer³ la racine $c_0 = r^1 + r^{16}$:

$$\begin{aligned}c_0 &= \frac{b_0 + \sqrt{b_0^2 - 4b_1}}{2} \\&= \frac{1(-1 + \sqrt{17}) + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{2} \\&\quad + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{(-1 + \sqrt{17}) + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4}\right)^2 - 4\left(\frac{(-1 - \sqrt{17}) + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{4}\right)} \\&= -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17} + \frac{1}{8}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\&\quad + \frac{1}{8} \sqrt{\left(\frac{(-1 + \sqrt{17}) + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4}\right)^2 - 16\left(\frac{(-1 - \sqrt{17}) + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{4}\right)} \\&= -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17} + \frac{1}{8}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\&\quad + \frac{1}{8} \sqrt{\frac{(-1 + \sqrt{17})^2 + 2(-1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + (34 - 2\sqrt{17}) -}{(-16 - 16\sqrt{17}) + 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}} \\&= -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17} + \frac{1}{8}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\&\quad + \frac{1}{8} \sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 2(-1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}\end{aligned}$$

3. N.D.T. On a $c_0 = 2 \cos \theta > 2 \cos(4\theta) = c_4$.

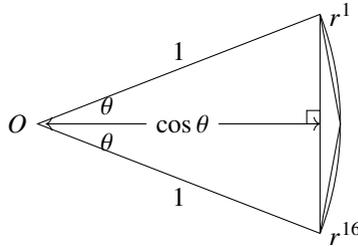


FIG. 16.3 – Le cosinus de l’angle central calculé à partir de r_1 et r_{16} .

Le cosinus de l’angle central d’un heptadécagone est constructible à la règle et au compas puisqu’il n’est composé que de nombres rationnels et des opérations $\{+, -, \times, /, \sqrt{\}$:

$$\cos\left(\frac{360^\circ}{17}\right) = \frac{c_0}{2} \tag{16.4}$$

$$= -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \tag{16.5}$$

$$\frac{1}{16}\sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 2(-1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}. \tag{16.6}$$

$$\begin{aligned} r_1 + r_{16} &= \cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{17}\right) + \cos\left(\frac{2 \cdot 16\pi}{17}\right) + i \sin\left(\frac{2 \cdot 16\pi}{17}\right) \\ &= \cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{17}\right) + \cos\left(\frac{-2\pi}{17}\right) + i \sin\left(\frac{-2\pi}{17}\right) \\ &= 2 \cos\left(\frac{2\pi}{17}\right). \end{aligned}$$

16.5 Démonstration de la formule de Gauss

La formule ci-dessus pour $\cos(360^\circ/17)$ n’est pas celle donnée par Gauss. Voici une démonstration de la formule de Gauss.

Simplifions $2(-1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}$:

$$\begin{aligned}
 2(-1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} &= -2\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\
 &\quad + 4\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 4\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\
 &= 2\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\
 &\quad - 4\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\
 &= 2(1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 4\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}.
 \end{aligned}$$

Nous nous souviendrons du terme $-4\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}$ et simplifierons le premier terme en le mettant au carré puis en prenant la racine carrée :

$$\begin{aligned}
 2(1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} &= 2\sqrt{\left[(1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}\right]^2} \\
 &= 2\sqrt{(18 + 2\sqrt{17})(34 - 2\sqrt{17})} \\
 &= 2\sqrt{(18 \cdot 34 - 4 \cdot 17) + \sqrt{17}(2 \cdot 34 - 2 \cdot 18)} \\
 &= 2 \cdot 4\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}.
 \end{aligned}$$

En substituant les termes, on obtient la formule de Gauss :

$$\begin{aligned}
 \cos\left(\frac{360^\circ}{17}\right) &= -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\
 &\quad + \frac{1}{16}\sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 8\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} - 4\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}} \\
 &= -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\
 &\quad + \frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}.
 \end{aligned}$$

16.6 Construction d'un heptadécagone

Construisons un cercle unité de centre O avec des diamètres perpendiculaires \overline{QP} et \overline{SR} (fig. 16.4). Construisons A de sorte que $\overline{OA} = (1/4)\overline{OR}$.

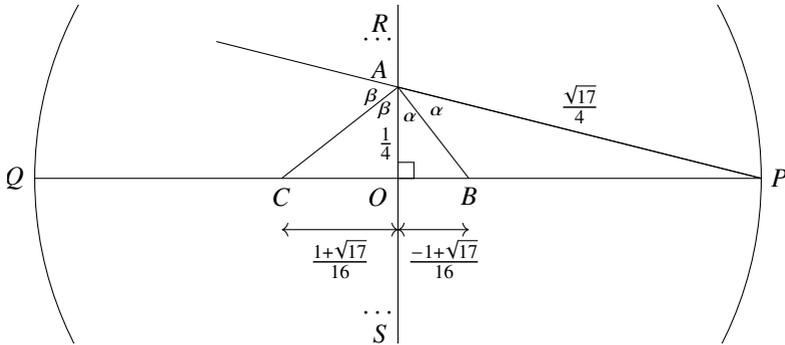


FIG. 16.4 – Construction d'un heptadécagone (1).

D'après le théorème de Pythagore,

$$\overline{AP} = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OP}^2} = \sqrt{(1/4)^2 + 1^2} = \sqrt{17}/4.$$

Soit B l'intersection de la bissectrice interne de $\angle OAP$ et du segment \overline{OP} . Soit C l'intersection de la bissectrice externe de $\angle OAP$ et du segment \overline{OQ} . D'après le théorème A.13,

$$\begin{aligned} \frac{\overline{OB}}{\overline{BP}} &= \frac{\overline{AO}}{\overline{AP}}, \\ \frac{\overline{OB}}{1 - \overline{OB}} &= \frac{1/4}{\sqrt{17}/4}, \\ \overline{OB} &= \frac{1}{1 + \sqrt{17}} = \frac{1}{1 + \sqrt{17}} \cdot \frac{1 - \sqrt{17}}{1 - \sqrt{17}} \\ &= \frac{-1 + \sqrt{17}}{16}. \end{aligned}$$

D'après le théorème A.14,

$$\begin{aligned}\frac{\overline{OC}}{\overline{CP}} &= \frac{\overline{AO}}{\overline{AP}}, \\ \frac{\overline{OC}}{1 + \overline{OC}} &= \frac{1/4}{\sqrt{17}/4}, \\ \overline{OC} &= \frac{1}{-1 + \sqrt{17}} = \frac{1}{-1 + \sqrt{17}} \cdot \frac{1 + \sqrt{17}}{1 + \sqrt{17}} \\ &= \frac{1 + \sqrt{17}}{16}.\end{aligned}$$

Construisons D sur \overline{OP} tel que $\overline{CD} = \overline{CA} = a$ (figure 16.5). D'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned}\overline{CD} = \overline{CA} &= \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OC}^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{16}\right)^2} = \frac{1}{16} \sqrt{16 + 1 + 17 + 2\sqrt{17}} \\ &= \frac{1}{16} \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}.\end{aligned}$$

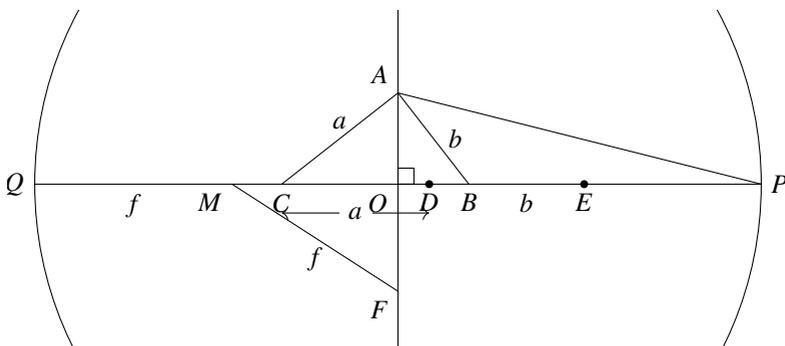


FIG. 16.5 – Construction d'un heptadécagone (2).

Construisons E sur \overline{OP} tel que $\overline{BE} = \overline{BA} = b$. Toujours d'après le

théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} \overline{BE} = \overline{BA} &= \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{16}\right)^2} = \frac{1}{16} \sqrt{16 + 1 + 17 - 2\sqrt{17}} \\ &= \frac{1}{16} \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}. \end{aligned}$$

Construisons le milieu M de \overline{QD} et construisons F sur \overline{OS} tel que $\overline{MF} = \overline{MQ} = f$:

$$\begin{aligned} \overline{MF} = \overline{MQ} &= \frac{1}{2} \overline{QD} = \frac{1}{2} (\overline{QC} + \overline{CD}) = \frac{1}{2} ((1 - \overline{OC}) + \overline{CD}) \\ &= \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{16} \right) + \frac{\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{16} \right] \\ &= \frac{1}{32} \left(15 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}} \right). \end{aligned}$$

Remarquons que $\overline{MO} = 1 - \overline{MQ} = 1 - \overline{MF}$.

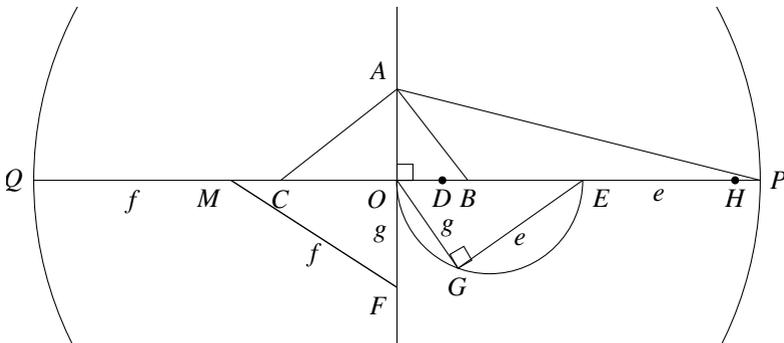


FIG. 16.6 – Construction d'un heptadécagone (3).

Construisons un demi-cercle dont le diamètre est \overline{OE} . Construisons une

corde $\overline{OG} = \overline{OF} = g$ (fig. 16.6). D'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned}\overline{OG} = \overline{OF} &= \sqrt{\overline{MF}^2 - \overline{MO}^2} = \sqrt{\overline{MF}^2 - (1 - \overline{MF})^2} \\ &= \sqrt{2\overline{MF} - 1} \\ &= \sqrt{\frac{1}{16} \left(15 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}} \right) - 1} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{-1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}.\end{aligned}$$

$\angle OGE$ est un angle droit puisqu'il est sous-tendu par un diamètre du cercle. Construisons H sur \overline{OP} tel que $\overline{EH} = \overline{EG} = e$. Toujours d'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned}\overline{EH} = \overline{EG} &= \sqrt{\overline{OE}^2 - \overline{OG}^2} = \sqrt{(\overline{OB} + \overline{BE})^2 - \overline{OG}^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{16} + \frac{\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{16} \right)^2 - \frac{1}{16} \left(-1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}} \right)} \\ &= \frac{1}{16} \sqrt{\left((18 - 2\sqrt{17}) + 2(-1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + (34 - 2\sqrt{17}) \right)} \\ &\quad + \left(16 + 16\sqrt{17} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} \right)} \\ &= \frac{1}{16} \sqrt{68 + 12\sqrt{17} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} - 2(1 - \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}.\end{aligned}$$

Calculons \overline{OE} :

$$\begin{aligned}\overline{OE} = \overline{OB} + \overline{BE} &= \frac{-1 + \sqrt{17}}{16} + \frac{1}{16} \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\ &= \frac{1}{16} \left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \right).\end{aligned}$$

Enfin, $\overline{OH} = \overline{OE} + \overline{EH}$ qui est la formule de Gauss pour $\cos(360^\circ/17)$.

16.7 Construction d'un pentagone régulier

Les racines cinquièmes complexes de l'unité sont

$$1 + i \cdot 0, \quad \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \pm i \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}, \quad \frac{-\sqrt{5} - 1}{4} \pm i \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

16.7.1 Trigonométrie

L'angle central d'un pentagone régulier est $360^\circ/5 = 72^\circ$. Calculons $\cos 36^\circ$ en utilisant les formules trigonométriques pour 2θ et $\theta/2$ (théorèmes A.2.1 et A.7) :

$$\begin{aligned} 0 &= \cos 90^\circ = \cos(72^\circ + 18^\circ) \\ &= \cos(2 \cdot 36^\circ) \cos(36^\circ/2) - \sin(2 \cdot 36^\circ) \sin(36^\circ/2) \\ &= (2 \cos^2 36^\circ - 1) \sqrt{\frac{1 + \cos 36^\circ}{2}} - 2 \sin 36^\circ \cos 36^\circ \sqrt{\frac{1 - \cos 36^\circ}{2}}. \end{aligned}$$

Il n'y a maintenant qu'un seul angle dans la formule. Soit $x = \cos 36^\circ$. Alors

$$\begin{aligned} (2x^2 - 1) \sqrt{\frac{1+x}{2}} &= 2\sqrt{1-x^2} \cdot x \cdot \sqrt{\frac{1-x}{2}}, \\ (2x^2 - 1) \sqrt{1+x} &= 2\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1+x} \cdot x \cdot \sqrt{1-x}, \\ 2x^2 - 1 &= 2x(1-x), \\ 4x^2 - 2x - 1 &= 0. \end{aligned}$$

La résolution de l'équation du second degré donne une valeur constructible :

$$\cos 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

16.7.2 Géométrie

Soit \overline{ABCDE} un pentagone régulier (fig. 16.7). Par définition, tous les côtés et tous les angles intérieurs sont égaux. Il est facile de montrer par des triangles isométriques que toutes les diagonales sont égales. Soit l la longueur des côtés. Soit x la longueur des diagonales.

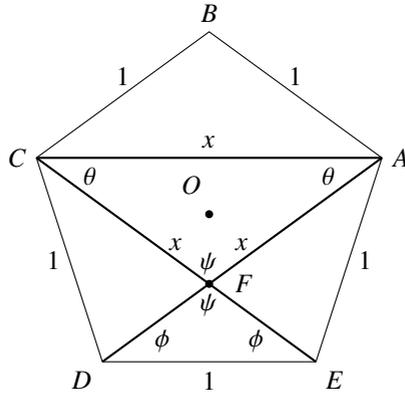


FIG. 16.7 – Construction d'un pentagone régulier (1).

$\triangle ACE \cong \triangle CAD$ (trois côtés égaux), donc $\angle ACE = \angle CAD = \theta$.
 $\triangle AED \cong \triangle CDE$ (trois côtés égaux), donc $\angle ADE = \angle CED = \phi$. $\angle AFC = \angle EFD = \psi$ sont des angles opposés par le sommet. Dans les deux triangles, la somme des angles est 180° , donc $\psi + 2\theta = \psi + 2\phi$ et $\theta = \phi$. Avec les angles alternes-internes, nous concluons que $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$.

Construisons une droite qui passe par E et parallèle à \overline{DC} . Soit F son intersection avec \overline{AC} (fig. 16.8). $CDEF$ est un losange, donc $\overline{EF} = \overline{CD} = \overline{AE} = 1$. $\triangle ACE$ est un triangle isocèle dont les angles de base sont α . $\triangle AEF$ est également isocèle et $\angle AFE = \angle FAE = \alpha$, donc $\triangle ACE \sim \triangle AEF$. En prenant les rapports des côtés, on obtient

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}.$$

Le résultat est une équation du second degré $x^2 - x - 1 = 0$ dont la racine positive est constructible :

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Quelle est la surprise ?

Il est surprenant que deux millénaires se soient écoulés entre les travaux des Grecs et la découverte par Gauss de la constructibilité de l'heptadécagone

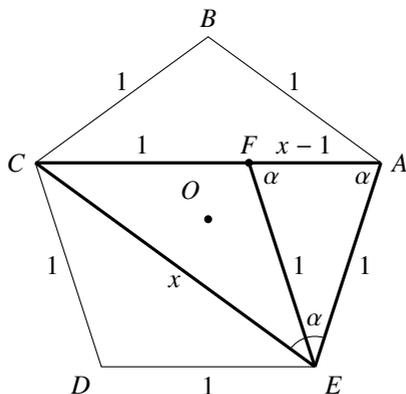


FIG. 16.8 – Construction d'un pentagone régulier (2).

régulier. Il est également surprenant que le problème ait été résolu non pas en utilisant la géométrie, mais en inventant de nouvelles méthodes algébriques qui ont eu une influence considérable sur les mathématiques.

Sources

Ce chapitre se base sur [9]. L'œuvre originale de Gauss est disponible dans une traduction française [25]. L'équation 16.5–16.6 apparaît dans [50]; l'auteur propose un exercice pour la transformer en la formule de Gauss telle qu'elle apparaît dans [25] et [9, p. 68].

La construction de l'heptadécagone est tirée de [13] tandis que d'autres constructions peuvent être trouvées dans [64]. La construction trigonométrique du pentagone régulier est tirée de [66]. La construction géométrique du pentagone régulier a été obtenue en résolvant les exercices 2.3.3 et 2.3.4 dans [57].

Annexe A

Théorèmes de géométrie et de trigonométrie

Cette annexe présente des théorèmes de géométrie et de trigonométrie qui peuvent ne pas être familiers au lecteur, ainsi que des théorèmes qui peuvent être familiers, mais dont les démonstrations ne le sont pas. La section A.1 présente trois formules pour calculer l'aire d'un triangle. La section A.2 démontre des formules trigonométriques. Bien que les formules soient pour la plupart familières, les étudiants les apprennent souvent par cœur ou les consultent sans jamais en voir la démonstration. Les sections suivantes contiennent les démonstrations de théorèmes plus avancés en géométrie : le théorème de la bissectrice dans la section A.3, le théorème de Ptolémée qui relie les côtés et les diagonales d'un quadrilatère inscrit dans un cercle dans la section A.4, le théorème de Ceva dans la section A.5 et le théorème de Ménélaüs dans la section A.6.

A.1 Théorèmes sur les triangles

A.1.1 Calcul de l'aire d'un triangle

La formule standard pour calculer l'aire d'un triangle à partir de la base et de la hauteur est bien connue. Elle peut être démontrée à l'aide de diverses méthodes géométriques.

Théorème A.1. *L'aire du triangle $\triangle ABC$ est donnée par*

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}bh, \quad (\text{A.1})$$

où la base b est l'un des côtés du triangle et la hauteur h est la distance de b au sommet opposé (fig. A.1).

Démonstration. La figure A.2 montre qu'en « coupant » le triangle à la moitié de sa hauteur, on peut « déplacer » les triangles ombrés pour former un rectangle de même surface que le triangle. La base du rectangle est b et sa hauteur est $h/2$. □

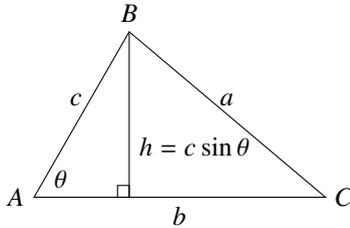


FIG. A.1 – Calcul de l'aire d'un triangle à partir de la base et de la hauteur.

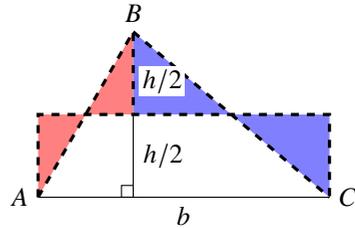


FIG. A.2 – Calcul de l'aire d'un triangle à partir de la base et de la hauteur.

Théorème A.2. L'aire du triangle $\triangle ABC$ est donnée par

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}bc \sin \theta. \quad (\text{A.2})$$

Démonstration. Cela résulte du théorème A.1 en utilisant $h = c \sin \theta$. \square

Théorème A.3 (Héron). L'aire du triangle $\triangle ABC$ est donnée par

$$\triangle ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

où le demi-périmètre s du triangle est égal à $\frac{1}{2}(a+b+c)$.

Démonstration. Le rayon d'un cercle et une tangente qui coupe le rayon sont perpendiculaires. De plus, les longueurs des deux segments tangents au cercle qui partent d'un même point sont égales. Par conséquent (fig. A.3),¹

$$\triangle AOB' \cong \triangle AOC', \quad \triangle BOA' \cong \triangle BOC', \quad \triangle COA' \cong \triangle COB'.$$

L'aire $\triangle ABC$ est la somme des six triangles énumérés ci-dessus. Comme la hauteur des six triangles est égale au rayon r du cercle inscrit, on obtient

$$\triangle ABC = \triangle AOB' + \triangle AOC' + \triangle BOA' + \triangle BOC' + \triangle COA' + \triangle COB', \quad (\text{A.3})$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}r(u+u+v+v+w+w), \quad (\text{A.4})$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}r(a+b+c), \quad (\text{A.5})$$

$$\triangle ABC = rs. \quad (\text{A.6})$$

1. Cela montre que le centre du cercle inscrit est l'intersection des trois bissectrices.

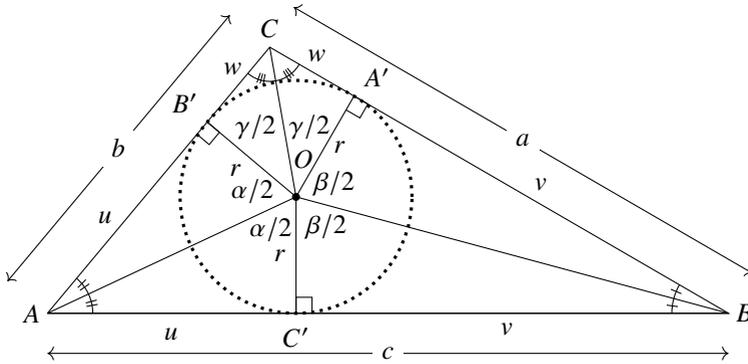


FIG. A.3 – Triangle avec un cercle inscrit.

Déterminons maintenant les côtés en fonction des tangentes des angles centraux :

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{u}{r}, \quad \tan \frac{\beta}{2} = \frac{v}{r}, \quad \tan \frac{\gamma}{2} = \frac{w}{r}.$$

De ces définitions et de $s = \frac{1}{2}(2u + 2v + 2w)$, on déduit

$$s = u + v + w = r \left(\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\gamma}{2} \right).$$

Puisque $\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} = 360^\circ$ et donc puisque $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 180^\circ$, d'après le théorème A.11,

$$\begin{aligned} s &= r \left(\tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\gamma}{2} \right) \\ &= r \left(\frac{u}{r} \frac{v}{r} \frac{w}{r} \right) = \frac{1}{r^2} (u v w), \\ r &= \sqrt{\frac{u v w}{s}}. \end{aligned}$$

D'après l'équation A.6,

$$\Delta ABC = rs = s \sqrt{\frac{u v w}{s}} = \sqrt{s u v w}.$$

La formule de Héron découle de $u = s - a$, $v = s - b$ et $w = s - c$. \square

A.2 Formules trigonométriques

A.2.1 Le sinus et le cosinus de la somme et de la différence de deux angles

Théorème A.4.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Nous démontrons la première formule ; les autres formules s'obtiennent en utilisant les valeurs du sinus et du cosinus pour $-\alpha$ et $90^\circ - \alpha$.

Étant donné un triangle rectangle $\triangle ABC$ avec un angle aigu α et un triangle rectangle $\triangle ACD$ avec un angle aigu β , on peut les joindre pour obtenir des figures géométriques avec un angle $\alpha + \beta$ (fig. A.4). La figure de gauche est celle qui est la plus souvent utilisée dans les démonstrations des formules. Nous donnons ici deux démonstrations basées sur les figures du centre et de droite.

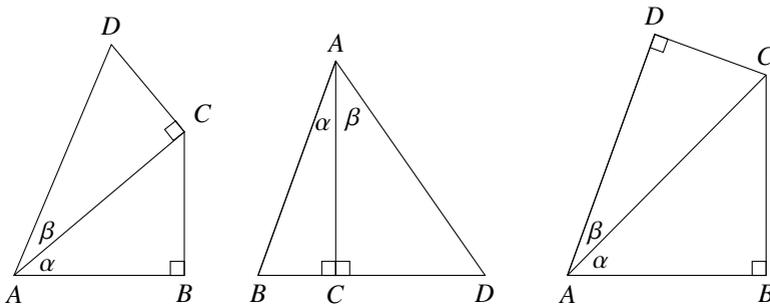


FIG. A.4 – Diagrammes pour démontrer la formule du sinus de la somme de deux angles.

Démonstration 1. Calculons l'aire $\triangle ABD$ de deux manières différentes : en utilisant l'équation A.2 pour $\triangle ABD$ et en utilisant l'équation séparément pour $\triangle ABC$ et $\triangle ADC$ (fig. A.5). On calcule également h en utilisant la définition

des fonctions trigonométriques :

$$\begin{aligned}\Delta ABD &= \frac{1}{2}bc \sin(\alpha + \beta), \\ \Delta ABD &= \Delta ABC + \Delta ADC \\ &= \frac{1}{2}ch \sin \alpha + \frac{1}{2}bh \sin \beta \\ &= \frac{1}{2}c(b \cos \beta) \sin \alpha + \frac{1}{2}b(c \cos \alpha) \sin \beta.\end{aligned}$$

En égalant les deux formules pour ΔABD et en simplifiant par $\frac{1}{2}bc$, on obtient

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta. \quad \square$$

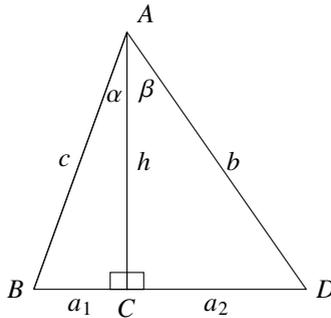


FIG. A.5 – Calcul de l'aire d'un triangle de deux façons.

La deuxième démonstration utilise le théorème suivant :

Théorème A.5. Dans un cercle de diamètre 1, la longueur d'une corde qui sous-tend un angle inscrit est égale au sinus de cet angle (fig. A.6).

Démonstration. Soit \overline{AB} un diamètre et soit $\angle BAC = \alpha$. Soit D un autre point quelconque du cercle. Il forme un triangle $\triangle BDC$ dont l'un des côtés est la corde \overline{BC} . Puisque des cordes égales sous-tendent des angles inscrits égaux, $\angle BDC = \alpha$. Dans le triangle rectangle $\triangle ABC$,

$$\sin \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{1} = \overline{BC}. \quad \square$$

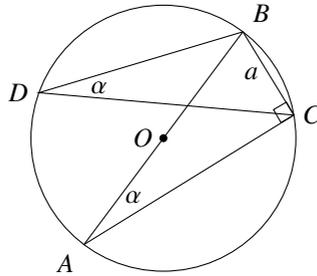


FIG. A.6 – Tous les angles inscrits sous-tendus par une même corde sont égaux.

Démonstration 2. Cette démonstration se base sur la figure de droite de la figure A.4, reproduite dans la figure A.7 où le quadrilatère $ABCD$ a été inscrit dans un cercle. D'après le théorème A.15, un quadrilatère peut être inscrit dans un cercle si et seulement si la somme de chaque paire d'angles opposés est égale à 180° . $\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$ puisque les deux angles sont des angles droits. D'après le théorème 5.4, la somme des angles intérieurs d'un quadrilatère est de 360° , donc $\angle DAB + \angle DCB = 180^\circ$.

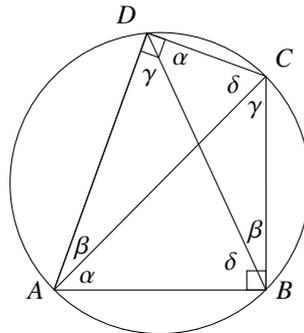


FIG. A.7 – Un quadrilatère inscrit dans un cercle.

Supposons que le diamètre du cercle soit 1 (sinon, multiplions tout par la longueur du diamètre). Alors les côtés du quadrilatère sont

$$\overline{BC} = \sin \alpha, \quad \overline{CD} = \sin \beta, \quad \overline{AB} = \sin \gamma, \quad \overline{DA} = \sin \delta.$$

Les diagonales sont

$$\overline{BD} = \sin(\alpha + \beta), \quad \overline{CA} = \sin(\alpha + \gamma).$$

D'après le théorème de Ptolémée (théorème A.18), le produit des diagonales d'un quadrilatère inscrit dans un cercle est égal à la somme des produits des côtés opposés du quadrilatère. Puisque $\angle ADC$ et $\angle ABC$ sont des angles droits, nous avons

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha + \gamma) &= \sin \alpha \sin \delta + \sin \beta \sin \gamma, \\ \sin(\alpha + \beta) \sin(90^\circ) &= \sin \alpha \sin(90^\circ - \beta) + \sin \beta \sin(90^\circ - \alpha), \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta. \end{aligned} \quad \square$$

A.2.2 Le cosinus d'un angle triple

Théorème A.6.

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$$

Démonstration. La démonstration utilise les formules du théorème A.4 et la formule $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$:

$$\begin{aligned} \cos 3\alpha &= \cos(2\alpha + \alpha) \\ &= \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha \\ &= (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cos \alpha - (2 \sin \alpha \cos \alpha) \sin \alpha \\ &= \cos^3 \alpha - \cos \alpha \sin^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha \\ &= \cos^3 \alpha - \cos \alpha + \cos^3 \alpha - 2 \cos \alpha + 2 \cos^3 \alpha \\ &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha. \end{aligned} \quad \square$$

A.2.3 Le sinus et le cosinus d'un demi-angle

Théorème A.7. *Si α est un angle dans un triangle, alors ²*

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, \\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}. \end{aligned}$$

2. La formule générale est plus complexe, car les racines carrées peuvent être positives ou négatives selon le quadrant dans lequel se trouve $\alpha/2$. Pour un triangle, $0 < \alpha < 180^\circ$, donc $0 < \alpha/2 < 90^\circ$ est dans le premier quadrant et le sinus et le cosinus sont tous deux positifs.

Démonstration. La démonstration utilise les formules du théorème A.4 et la formule $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \cos \left(2 \cdot \frac{\alpha}{2} \right) = \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) - \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) \\ &= 2 \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) - 1, \\ \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) &= \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, \\ \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) &= 1 - \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) = 1 - \frac{1 + \cos \alpha}{2}, \\ \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) &= \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}. \quad \square\end{aligned}$$

A.2.4 La loi des cosinus

Théorème A.8 (loi des cosinus). *Dans un triangle $\triangle ABC$ dont les côtés sont a, b, c (fig. A.8),*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle ACB.$$

Démonstration 1. Traçons la hauteur issue de C et utilisons la définition du cosinus et le théorème de Pythagore :

$$c = x + (c - x) = a \cos \beta + b \cos \alpha, \quad (\text{A.7a})$$

$$c^2 = ac \cos \beta + bc \cos \alpha. \quad (\text{A.7b})$$

De la même manière, traçons les hauteurs issues de A et de B pour obtenir

$$a^2 = ca \cos \beta + ba \cos \gamma, \quad (\text{A.8a})$$

$$b^2 = cb \cos \alpha + ab \cos \gamma. \quad (\text{A.8b})$$

En additionnant les équations A.8a et A.8b et en soustrayant l'équation A.7b, on obtient

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 - c^2 &= ca \cos \beta + ba \cos \gamma \\ &\quad + cb \cos \alpha + ab \cos \gamma \\ &\quad - ac \cos \beta - bc \cos \alpha \\ &= 2ab \cos \gamma, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \quad \square\end{aligned}$$

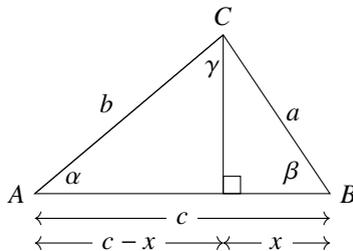


FIG. A.8 – Première démonstration de la loi des cosinus.

Démonstration 2. La deuxième démonstration utilise le théorème de Ptolémée (théorème A.18).³

Le triangle $\triangle ABC$ peut être inscrit dans un cercle. Construisons un autre triangle $\triangle ABC'$ isométrique à $\triangle ABC$ et inscrit dans le même cercle (fig. A.9). Pour cela, on construit en B un angle avec \overline{AB} égal à $\angle CAB$. Il coupe le cercle en C' . Puis on construit la droite $\overline{C'A}$. Puisque les angles sous-tendus par la même corde sont égaux, $\angle AC'B = \angle BCA$, il en est de même pour $\angle CBA = \angle C'AB$ et donc $\triangle ABC' \cong \triangle BAC$ (deux angles et un côté égaux) avec le côté commun \overline{AB} .

Traçons les perpendiculaires à \overline{AB} de C à D et de C' à D' de sorte que $x = a \cos \beta$. D'après le théorème de Ptolémée pour le quadrilatère $\overline{ABCC'}$,

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c(c - 2x) \\ &= a^2 + c(c - 2a \cos \beta) \\ &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta. \end{aligned} \quad \square$$

A.2.5 La tangente de la somme de deux angles

Théorème A.9.

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}.$$

3. La section A.4 utilise la loi des cosinus pour démontrer le théorème de Ptolémée! La première démonstration de la loi des cosinus permet d'éviter ce raisonnement circulaire. De plus, il existe des démonstrations du théorème de Ptolémée qui n'utilisent pas la loi des cosinus.

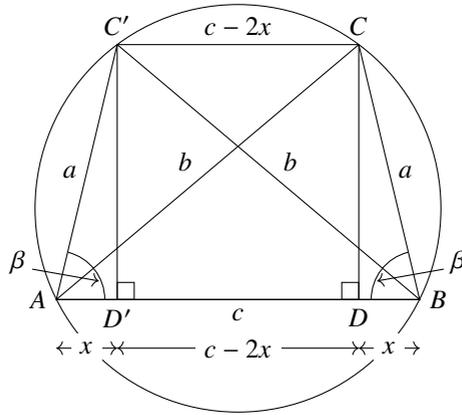


FIG. A.9 – Deuxième démonstration de la loi des cosinus.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} \\
 &= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \\
 &= \frac{\sin \alpha + \cos \alpha \tan \beta}{\cos \alpha - \sin \alpha \tan \beta} \\
 &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}.
 \end{aligned}$$

□

A.2.6 La tangente d'un demi-angle

Théorème A.10.

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}{\tan \alpha}.$$

Démonstration. On obtient et on résout une équation du second degré en

$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$:

$$\tan \alpha = \frac{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)},$$

$$\tan \alpha \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2 \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \tan \alpha = 0,$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}{\tan \alpha}. \quad \square$$

A.2.7 Le produit de trois tangentes

Théorème A.11. Si $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, alors

$$\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \tan \gamma &= \tan(180^\circ - (\alpha + \beta)) \\ &= -\tan(\alpha + \beta) \\ &= -\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}, \\ \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma &= \tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma. \quad \square \end{aligned}$$

A.2.8 La limite de $(\sin \alpha)/\alpha$

En examinant les polygones réguliers inscrits dans un cercle unité (fig. A.10), on constate que plus un polygone a de côtés, plus son périmètre est proche de la circonférence du cercle.

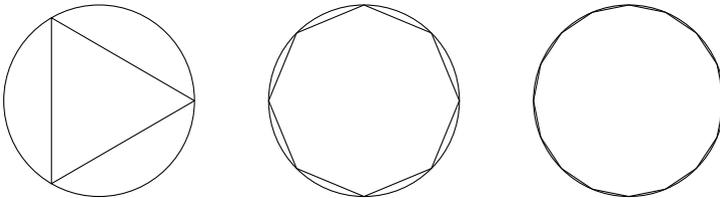


FIG. A.10 – Polygones réguliers à 3, 8 et 16 côtés inscrits dans un cercle.

La circonférence du cercle divisée par le nombre de côtés est la longueur d'un arc dont les extrémités sont les mêmes que celles du côté correspondant. Comme le rapport entre la circonférence du cercle et le périmètre d'un polygone inscrit se rapproche de 1 lorsque le nombre de côtés augmente, il en va de même pour le rapport entre la longueur d'un arc et la corde correspondante. Ceci est illustré par les exemples numériques suivants :

angle	longueur de l'arc	longueur de la corde	rapport
80	1,396	1,286	1,090
60	1,047	1,000	1,047
40	0,698	0,684	1,006
5	0,087	0,087	1,000

Puisque $a = b = 1$, la longueur de la corde c qui sous-tend α peut être calculée à partir de la loi des cosinus (fig. A.11) :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha ,$$

$$c = \sqrt{2 - 2 \cos \alpha} .$$

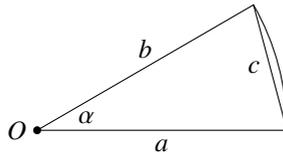


FIG. A.11 – La longueur d'une corde correspondant à un arc d'angle α .

Théorème A.12.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1 .$$

Démonstration. En se référant ⁴ à la figure A.12,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2 \sin \alpha}{2\alpha} .$$

4. N.D.T. On peut remarquer pour $0 < \alpha < \pi/2$ que $\sin \alpha \leq \alpha \leq \tan \alpha$ implique $\cos \alpha \leq \frac{\sin \alpha}{\alpha} \leq 1$, ce qui donne la limite quand $\alpha \rightarrow 0$.

C'est le rapport entre la longueur de la corde \overline{PQ} et la longueur de l'arc \widehat{PQ} . Mais nous avons vu que ce rapport converge vers 1 lorsque l'angle sous-tendu 2α tend vers 0. Donc

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1. \quad \square$$

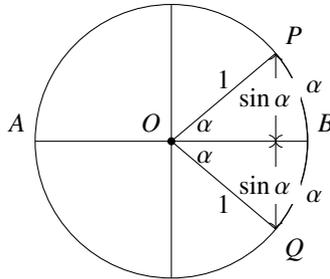


FIG. A.12 – Rapport entre $\sin \alpha$ et α .

A.3 Les théorèmes de la bissectrice

Théorème A.13. Dans $\triangle ABC$, la bissectrice de $\angle BAC$ coupe \overline{BC} en D (fig. A.13) avec

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.$$

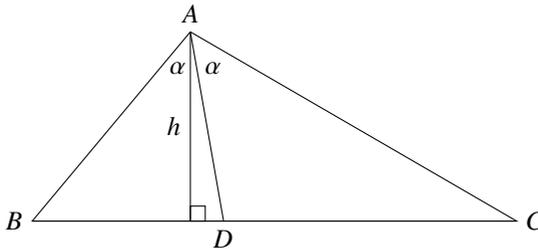


FIG. A.13 – Le théorème de la bissectrice de l'angle interne.

Démonstration. Nous démontrons le théorème en calculant les aires de deux triangles en utilisant d'une part la base et la hauteur (équation A.1), d'autre part la base, l'angle et le côté (équation A.2) :

$$\begin{aligned}\Delta ABD &= \frac{1}{2} \overline{BD} h = \frac{1}{2} \overline{AB} \overline{AD} \sin \alpha, \\ \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} &= \frac{\overline{AD} \sin \alpha}{h}, \\ \Delta ACD &= \frac{1}{2} \overline{CD} h = \frac{1}{2} \overline{AC} \overline{AD} \sin \alpha, \\ \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} &= \frac{\overline{AD} \sin \alpha}{h}, \\ \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} &= \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.\end{aligned}$$

□

Il existe également un théorème de la bissectrice externe :

Théorème A.14. Dans $\triangle ABC$, soit \overline{AE} la bissectrice de l'angle supplémentaire de l'angle $\triangle BAC$ (fig. A.14) et soit E l'intersection de la bissectrice et de \overline{BC} . Alors

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.$$

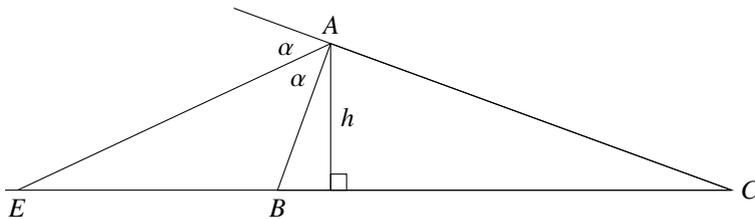


FIG. A.14 – Le théorème de la bissectrice de l'angle externe.

Démonstration. On a $\angle EAC = 180^\circ - \alpha$.

$$\triangle ABE = \frac{1}{2} \overline{BE} h = \frac{1}{2} \overline{AE} \overline{AB} \sin \alpha,$$

$$\triangle ACE = \frac{1}{2} \overline{CE} h = \frac{1}{2} \overline{AE} \overline{AC} \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} \overline{AE} \overline{AC} \sin \alpha,$$

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE} \sin \alpha}{h} = \frac{\overline{CE}}{\overline{AC}},$$

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}. \quad \square$$

A.4 Le théorème de Ptolémée

A.4.1 Un trapèze inscrit dans un cercle

Avant de donner la démonstration du théorème de Ptolémée, nous démontrons des théorèmes sur les quadrilatères et les trapèzes.

Théorème A.15. *Un quadrilatère peut être inscrit dans un cercle si et seulement si les angles opposés sont supplémentaires (somme égale à 180°).*

Les manuels de géométrie donnent la démonstration simple du sens direct, mais il est difficile de trouver une démonstration de la réciproque. C'est pourquoi nous donnons ici les deux démonstrations.

Démonstration (sens direct). Un angle inscrit est égal à la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même arc. Ainsi, $\angle DAB = \frac{1}{2} \widehat{DCB}$ et $\angle DCB = \frac{1}{2} \widehat{DAB}$ (fig. A.15). Or $\widehat{DCB} + \widehat{DAB} = 360^\circ$. Donc $\angle DAB + \angle DCB = 180^\circ$. De même, $\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$. \square

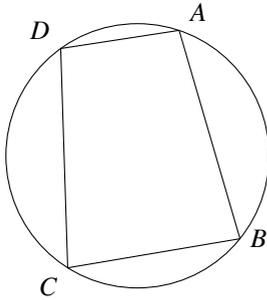


FIG. A.15 – Un quadrilatère inscrit dans un cercle.

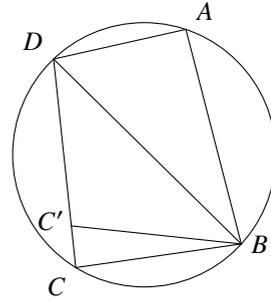


FIG. A.16 – Le quatrième sommet doit être sur la circonférence.

Démonstration de la réciproque. Tout triangle peut être inscrit dans un cercle. On inscrit $\triangle DAB$ dans un cercle et on suppose que C' est un point tel que $\angle DAB + \angle DC'B = 180^\circ$, mais C' n'est pas sur la circonférence du cercle. Sans perte de généralité, supposons que C' soit situé à l'intérieur du cercle (fig. A.16).

Construisons une demi-droite qui prolonge $\overline{DC'}$. Soit C son intersection avec le cercle. \overline{ABCD} est inscrit dans un cercle, donc

$$\begin{aligned}\angle DAB + \angle DCB &= 180^\circ = \angle DAB + \angle DC'B, \\ \angle DCB &= \angle DC'B,\end{aligned}$$

ce qui est impossible si C est sur le cercle et C' à l'intérieur du cercle. \square

Théorème A.16. *Les angles opposés d'un trapèze isocèle sont supplémentaires.*

Démonstration. Construisons le segment $\overline{AB'}$ parallèle à \overline{CD} (fig. A.17). $\overline{AB'CD}$ est un parallélogramme et $\triangle ABB'$ est un triangle isocèle, donc $\angle C = \angle AB'B = \angle ABB' = \angle B$. De même, $\angle A = \angle D$. Puisque la somme des angles internes de tout quadrilatère est égale à 360° ,

$$\begin{aligned}\angle A + \angle B + \angle C + \angle D &= 360^\circ, \\ 2\angle A + 2\angle C &= 360^\circ, \\ \angle A + \angle C &= 180^\circ,\end{aligned}$$

et de même $\angle B + \angle D = 180^\circ$. \square

Théorème A.17. *Un trapèze isocèle peut être inscrit dans un cercle.*

La démonstration est immédiate d'après les théorèmes A.15 et A.16.

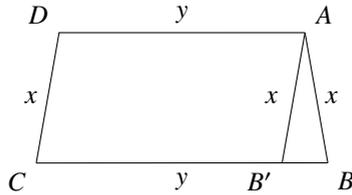


FIG. A.17 – Un trapèze isocèle.

A.4.2 Démonstration du théorème de Ptolémée

Théorème A.18 (Ptolémée). *Étant donné un quadrilatère inscrit dans un cercle, la formule suivante met en relation les longueurs des diagonales et les longueurs des côtés (fig. A.18) :*

$$ef = ac + bd.$$

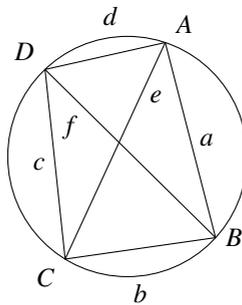


FIG. A.18 – Le théorème de Ptolémée

Démonstration. D'après la loi des cosinus pour les quatre triangles $\triangle ABC$,

$\triangle ADC$, $\triangle DAB$ et $\triangle DCB$,

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle B,$$

$$e^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos \angle D,$$

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \angle A,$$

$$f^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle C.$$

$\angle C = 180^\circ - \angle A$ et $\angle D = 180^\circ - \angle B$, car ce sont des angles opposés d'un quadrilatère inscrit dans un cercle, donc $\cos \angle D = -\cos \angle B$ et $\cos \angle C = -\cos \angle A$. Éliminons le terme en cosinus des équations ci-dessus pour obtenir

$$e^2(cd + ab) = abc^2 + abd^2 + a^2cd + b^2cd,$$

$$e^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{(ab + cd)},$$

$$f^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{(ad + bc)}.$$

Multiplions les deux équations et simplifions pour obtenir le théorème de Ptolémée

$$e^2 \cdot f^2 = (ac + bd)^2,$$

$$ef = ac + bd. \quad \square$$

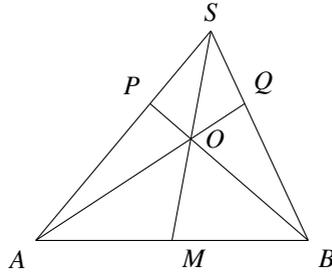
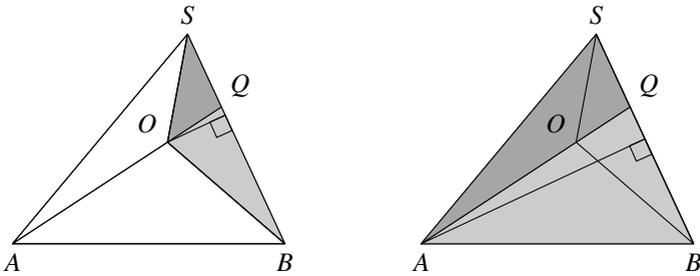
A.5 Le théorème de Ceva

Théorème A.19 (Ceva). *Pour des segments qui vont des sommets d'un triangle aux côtés opposés et qui se coupent en un point, les longueurs des segments (fig. A.19) vérifient*

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}} \cdot \frac{\overline{SP}}{\overline{PA}} = 1.$$

Démonstration. Si les hauteurs de deux triangles sont égales, leurs aires sont proportionnelles aux bases. Dans les deux représentations de la figure A.20, les hauteurs des triangles gris sont égales, donc

$$\frac{\triangle BQO}{\triangle SQO} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}}, \quad \frac{\triangle BQA}{\triangle SQA} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}}.$$

FIG. A.19 – *Le théorème de Ceva*FIG. A.20 – *Triangles dans le théorème de Ceva.*

En soustrayant les surfaces des triangles indiqués, on obtient le rapport entre les aires des triangles gris de la figure A.21 :

$$\frac{\Delta BOA}{\Delta SOA} = \frac{\Delta BQA - \Delta BQO}{\Delta SQA - \Delta SQO} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}}.$$

Cela peut sembler étrange au premier abord. Nous allons donc l'expliquer en utilisant une notation plus simple :

$$\begin{aligned} \frac{c}{d} &= \frac{a}{b}, \\ \frac{e}{f} &= \frac{a}{b}, \\ c - e &= \frac{ad}{b} - \frac{af}{b} = \frac{a}{b}(d - f), \\ \frac{c - e}{d - f} &= \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

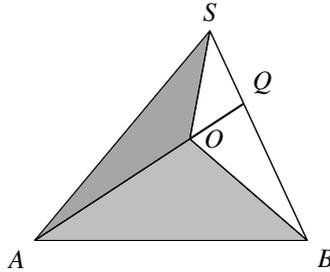


FIG. A.21 – Soustraction d'aires dans le théorème de Ceva.

De même, nous pouvons démontrer :

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\Delta AOS}{\Delta BOS},$$

$$\frac{\overline{SP}}{\overline{PA}} = \frac{\Delta SOB}{\Delta AOB},$$

donc

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}} \frac{\overline{SP}}{\overline{PA}} = \frac{\Delta AOS}{\Delta BOS} \frac{\Delta BOA}{\Delta SOA} \frac{\Delta SOB}{\Delta AOB} = 1,$$

puisque l'ordre des sommets dans un triangle ne fait aucune différence. \square

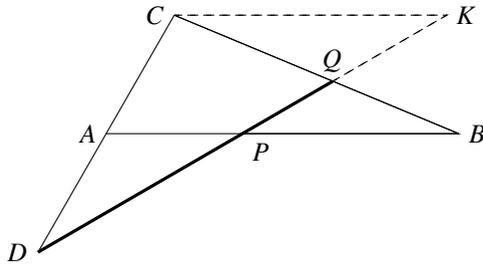
A.6 Le théorème de Ménélaüs

Théorème A.20 (Ménélaüs). Soit $\triangle ABC$ un triangle et \overline{DPQ} une droite transversale qui coupe les trois côtés du triangle ou leurs prolongements (fig. A.22). Alors

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{CQ}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = 1. \quad (\text{A.9})$$

Démonstration. Traçons une droite passant par C et parallèle à \overline{AB} . Prolongeons \overline{DQ} jusqu'à ce qu'elle coupe la parallèle en K . De $\triangle ADP \sim \triangle CDK$, il résulte que

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CK}}{\overline{AP}}.$$

FIG. A.22 – *Le théorème de Ménélaüs.*

De $\triangle PQB \sim \triangle KQC$, on déduit

$$\frac{\overline{QC}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{CK}}{\overline{BP}}.$$

L'élimination de \overline{CK} donne $\overline{AP} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{BQ} = \overline{QC} \cdot \overline{BP} \cdot \overline{AD}$, qui peut être réarrangé pour obtenir l'équation A.9. \square

Sources

Cette annexe se base principalement sur [26]. Le théorème de Ceva et le théorème de Ménélaüs peuvent être démontrés l'un à partir de l'autre [55].

Bibliographie

- [1] AASSILA (Mohammed), *1000 challenges mathématiques : Algèbre*, Paris, Ellipses, 2016.
- [2] AIGNER (Martin) et ZIEGLER (Günter M.), *Raisonnements divins* (trad. N. Puech), Cachan, Hermès-Lavoisier 2017.
- [3] ALPERIN (Roger C.), « A mathematical theory of origami constructions and numbers », *New York Journal of Mathematics*, n° 6, 2000, p. 119-133.
- [4] BACAËR (Nicolas), *Histoires de mathématiques et de populations*, Paris, Cassini, 2008. <http://www.ummisco.ird.fr/perso/bacaer/>.
- [5] BACAËR (Nicolas), *Mathématiques et épidémies*, Paris, Cassini, 2021.
- [6] BARABASH (Marita), « A non-visual counterexample in elementary geometry », *The College Mathematics Journal*, n° 36, 2005.
- [7] BEN-ARI (Mordechai), *Mathematical Logic for Computer Science*, Springer, 2012.
- [8] BEN-ARI (Mordechai), « LearnSAT : A SAT Solver for Education », *Journal of Open Source Software*, n° 24, 2018, p. 639, <https://doi.org/10.21105/joss.00639>.
- [9] BEWERSDORFF (Jörg), *Galois Theory for Beginners : A Historical Perspective*, American Mathematical Society, 2006.
- [10] BOLD (Benjamin), *Famous Problems of Mathematics : A History of Constructions with Straight Edge and Compass*, Van Nostrand, 1969.
- [11] BRADFORD (Phillips Verner), « Visualizing solutions to n-th degree algebraic equations using right-angle geometric paths », 2010, <https://web.archive.org/web/20100502013959/http://www.concentric.net/~pvb/ALG/rightpaths.html>.
- [12] BUTLER IV (Lane), « Ramsey Theory », 2016, <https://www.whitman.edu/Documents/Academics/Mathematics/2016/Barton.pdf>.
- [13] CALLAGY (James J.), « The central angle of the regular 17-gon », *The Mathematical Gazette*, n° 67, 1983, p. 290-292, <https://www.jstor.org/stable/3617271>.

- [14] CARREGA (Jean-Claude), *Théorie des corps : La règle et le compas*, Paris, Hermann, 1981.
- [15] COURANT (Richard) et ROBBINS (Herbert), *Qu'est-ce que les mathématiques ?* (trad. M. Anglade, K. Py), Paris, Cassini, 2015.
- [16] DAVIES (Roy O.), « On Langford's problem (II) », *The Mathematical Gazette*, n° 43, 1959, p. 253-255.
- [17] DEBRAY (Régis), *Civilisation : Comment nous sommes devenus américains*, Gallimard, 2017.
- [18] DELAHAYE (Jean-Paul), *Les mathématiciens se plient au jeu : 20 enquêtes ludiques du poker à l'origami*, Paris, Belin, 2017.
- [19] DÖRRIE (Heinrich), *100 Problems of Elementary Mathematics : Their History and Solution*, Dover, 1965.
- [20] DÖRRIE (Heinrich), « 100 Problems of Elementary Mathematics : Their History and Solution », 2010, <https://web.archive.org/web/20191223032114/http://www2.washjeff.edu/users/mwoltermann/Dorrie/DorrieContents.htm>.
- [21] DUDLEY (Underwood), *A Budget of Trisections*, Springer, 1987.
- [22] EPPSTEIN (David), « Twenty Proofs of Euler's Formula : $V - E + F = 2$ », <https://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/>.
- [23] EUCLIDE, *Les Éléments* (trad. B. Vitrac), Paris, Presses universitaires de France, 1990-2001.
- [24] FRALEIGH (John B.), *A First Course in Abstract Algebra*, Addison-Wesley, 2003.
- [25] GAUSS (Carl Friedrich), *Recherches arithmétiques* (trad. A. Pouillet-Delisle), Sceaux, Jacques Gabay, 1989.
- [26] GELFAND (I. M.) et SAUL (Mark), *Trigonometry*, Boston, Birkhäuser, 2001.
- [27] GOWERS (Timothy), *Combinatoire*, Collège de France / Fayard, 2021.
- [28] GRAHAM (Ron) et BUTLER (Steve), *Rudiments of Ramsey Theory*, American Mathematical Society, 2015.
- [29] GUNDERSON (David S.), *Handbook of Mathematical Induction : Theory and Applications*, Mathematical Association of America, 2010.

- [30] HEULE (Marijn J. H.) et KULLMANN (Oliver), « The Science of Brute Force », *Communications of the ACM*, n° 60, 2017, p. 70-79.
- [31] HULL (Thomas C.), « Solving Cubics With Creases : The Work of Beloch and Lill », *American Mathematical Monthly*, n° 118, 2011, p. 307-315.
- [32] HUNGERBÜHLER (Norbert), « A short elementary proof of the Mohr-Mascheroni theorem », *American Mathematical Monthly*, n° 101, 1994, p. 784-787.
- [33] JUSTIN (Jacques), « Résolution par le pliage de l'équation du troisième degré et applications géométriques », *L'Ouvert - Journal de l'APMEP d'Alsace et de l'IREM de Strasbourg*, n° 42, 1986, p. 9-19. https://mathinfo.unistra.fr/websites/math-info/irem/Publications/L_Ouvert/n042/o_42_9-19.pdf
- [34] LAFFORGUE (Laurent), *Géométrie plane et algèbre*, Paris, Hermann, 2018.
- [35] LANG (Robert J.), « Origami and Geometric Constructions », 1996-2015, http://langorigami.com/wp-content/uploads/2015/09/origami_constructions.pdf.
- [36] LAUGWITZ (Detlef), « Eine elementare Methode für Unmöglichkeitssweise bei Konstruktionen mit Zirkel und Lineal », *Elemente der Mathematik*, n° 17, 1962, p. 54-58.
- [37] LOH (Po-Shen), « A Different Way to Solve Quadratic Equations », 2019, <https://www.poshenloh.com/quadratic/>.
- [38] LOH (Po-Shen), « A Simple Proof of the Quadratic Formula », 2019, <https://arxiv.org/abs/1910.06709>.
- [39] MANNA (Zohar), *Mathematical Theory of Computing*, McGraw-Hill, 1974.
- [40] MARTIN (George E.), *Geometric Constructions*, Springer, 1998.
- [41] MASTIN (Luke), « Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi : Muslim Mathematician », 2020, <https://www.storyofmathematics.com/islamic-alkhwarizmi.html>.
- [42] McCALLUM (William), « A tale of two triangles : Heron triangles and elliptic curves », 2012, <http://blog.kleinproject.org/?p=4>.
- [43] McKAY (Brendan D.), « Ramsey Theory », <http://users.cecs.anu.edu.au/~bdm/data/ramsey.html>.

- [44] MILLER (John E.), « Langford's Problem, Remixed », 2014, <http://dialectrix.com/langford.html>.
- [45] NEWTON (Liz), « The Power of Origami », <https://plus.maths.org/content/power-origami>.
- [46] PEIL (Timothy), « The Rusty Compass Theorem », 2006, <https://web.archive.org/web/20200720195718/http://web.mnstate.edu/peil/geometry/C2EuclidNonEuclid/1Compass.htm>.
- [47] RAMANUJAN (Srinivasa), « Squaring the circle », *Journal of the Indian Mathematical Society*, n° V, 1913, p. 138, <http://ramanujan.sirinudi.org/Volumes/published/ram05.pdf>.
- [48] RAMANUJAN (Srinivasa), « Modular equations and approximations to π », *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, n° XLV, 1914, p. 350-372, <http://ramanujan.sirinudi.org/Volumes/published/ram06.pdf>.
- [49] RIAZ (M.), « Geometric solutions of algebraic equations », *American Mathematical Monthly*, n° 69, 1962, p. 654-658.
- [50] RIKE (Tom), « Fermat Numbers and the Heptadecagon », 2005, <https://mathcircle.berkeley.edu/sites/default/files/BMC6/ps0506/Heptadecagon.pdf>.
- [51] ROBSON (Eleanor), « Words and pictures : New light on Plimpton 322 », *American Mathematical Monthly*, n° 109, 2002, p. 105-120.
- [52] ROSS (Sheldon), *Initiation aux probabilités* (trad. C. Hofer, F. Dorsaz), Lausanne, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2014.
- [53] SCHUMER (Peter), « The Josephus Problem : Once More around », *Mathematics Magazine*, n° 75, 2002, p. 12-17.
- [54] SIGNAC (Laurent), *Divertissements mathématiques et informatiques*, Paris, H&K, 2011.
- [55] SILVESTER (John R.), « Ceva = (Menelaus)² », *The Mathematical Gazette*, n° 500, 2000, p. 268-271.
- [56] SIPKA (Timothy), « Alfred Bray Kempe's "Proof" of the Four-Color Theorem », *Math Horizons*, n° 2, 2002, p. 21-26, <http://www.jstor.org/stable/25678395>.
- [57] STILLWELL (John), *Mathematics and Its History*, Springer, 2010.

- [58] SUZUKI (Jeff), « A Brief History of Impossibility », *Mathematics Magazine*, n° 81, 2008, p. 27-38.
- [59] THOMAS (Robin), « An Update on the Four-Color Theorem », *Notices of the AMS*, n° 45, 1998, p. 848-859, <http://www.ams.org/notices/199807/thomas.pdf>.
- [60] TOUSSAINT (Godfried), « A New Look at Euclid's Second Proposition », *The Mathematical Intelligencer*, n° 15, 1993, p. 12-23.
- [61] WIKIPEDIA, « Huzita–Hatori axioms ».
- [62] WIKIPÉDIA, « Équation cubique ».
- [63] WIKIPÉDIA, « Équation du second degré ».
- [64] WIKIPÉDIA, « Heptadécagone ».
- [65] WIKIPÉDIA, « Neusis ».
- [66] WIKIPÉDIA, « Pentagone ».
- [67] WIKIPÉDIA, « Plimpton 322 ».
- [68] WIKIPÉDIA, « Problème de Josèphe ».
- [69] WIKIPÉDIA, « Quadratrice d'Hippias ».
- [70] WIKIPÉDIA, « Système sexagésimal ».
- [71] WIKIPÉDIA, « Théorème des cinq couleurs ».
- [72] WIKIPÉDIA, « Théorème des quatre couleurs ».
- [73] WIKIPÉDIA, « Trisection de l'angle ».

Ce livre réserve d'agréables surprises mathématiques. Il existe de nombreux résultats fascinants qui n'apparaissent pas dans les manuels scolaires, bien qu'ils soient accessibles avec une bonne connaissance des mathématiques du lycée. Ce livre présente une sélection de ces sujets, notamment la formalisation mathématique de l'origami, la construction à la règle et au compas (ou avec d'autres instruments), le théorème des cinq couleurs, un avant-goût de la théorie de Ramsey et des théorèmes peu connus démontrés par récurrence.

Parmi les théorèmes les plus surprenants, citons le théorème de Mohr-Mascheroni, selon lequel un compas seul permet de réaliser toutes les constructions classiques à la règle et au compas, et le théorème de Steiner, selon lequel une règle seule suffit à condition qu'un seul cercle soit donné. Le livre contient une présentation détaillée de la démonstration purement algébrique due à Gauss de la constructibilité d'un heptadécagone régulier. Bien que les mathématiques utilisées dans ce livre soient élémentaires (géométrie euclidienne et analytique, algèbre, trigonométrie), les élèves des lycées et des universités, les enseignants et les autres lecteurs intéressés seront ravis de pouvoir relever le défi de comprendre ces théorèmes surprenants.

ISBN : 979-10-396-4380-1



24€