

LES LAURÉATS DU PRIX ABEL

Textes publiés par l'ACADÉMIE NORVÉGIENNE
DES SCIENCES ET DES LETTRES

corrigés ou traduits par NICOLAS BACAËR



LES LAURÉATS DU PRIX ABEL

Textes sources : **abelprisen.no**.

Auteurs : comité Abel, Arne B. Sletsjøe, W.T. Gowers, Alex Bellos, Jim Al-Khalili, Helge Holden, John Rognes, Terence Tao.

Ces textes ont été en partie traduits automatiquement avec le logiciel DeepL puis relus et corrigés.

Pour la traduction :

Nicolas Bacaër

Institut de recherche pour le développement

nicolas.bacaer@ird.fr

Couverture : Carl von Hanno (1901-1953), *Paysage nordique*, 1933, Paris, Centre Pompidou.

Introduction

« Les sociologues contemporains [...] parlent du passage de la domination à l'hégémonie, domination intériorisée, souhaitée et vécue par le dominé comme une promotion. »

Régis Debray, *Civilisation : comment nous sommes devenus américains*

Le monde contemporain présente deux mouvements contradictoires : le premier mouvement pousse vers une uniformisation linguistique toujours plus grande dominée par l'anglais et s'accompagne d'ailleurs souvent d'une marchandisation croissante, y compris dans des domaines jusque-là relativement épargnés par le capitalisme comme la recherche publique, l'édition scientifique ou l'enseignement supérieur¹ ; le second mouvement, plus discret, tend vers une plus grande diversité linguistique, l'exemple type étant celui de l'encyclopédie en ligne multilingue et non commerciale Wikipédia. On peut également rattacher à ce deuxième mouvement l'initiative plus modeste prise en 2021 par l'Académie norvégienne des sciences et des lettres de mettre à disposition gratuitement sur le site du prix Abel (abelprisen.no) les traductions en une dizaine de langues de textes qui accompagnent depuis 2003 la remise du prix.

Bien que l'Académie norvégienne ait semble-t-il eu recours à des traducteurs professionnels, un certain nombre de termes scientifiques n'ont pas été correctement traduits, ce qui peut se comprendre vu l'absence actuelle dans la plupart des pays d'organisations dédiées à la traduction scientifique.² De plus, seuls ont été traduits les textes du comité Abel pour justifier les prix et les notices biographiques.

Il nous a donc paru souhaitable d'une part de reprendre les traductions existantes en français et de les corriger autant que possible, d'autre part de traduire les textes de vulgarisation non encore traduits

1. Voir par exemple à ce sujet le livre de Claude Hagège *Contre la pensée unique* (Odile Jacob, 2011).

2. À l'époque moderne, seules les éditions MIR à Moscou ont traduit systématiquement en plusieurs langues un vaste ensemble d'ouvrages scientifiques.

mais disponibles en norvégien et en anglais sur le même site, et de rassembler le tout dans un recueil facilement accessible.

On a suivi le *Lexique des règles typographiques en usage à l’Imprimerie nationale*, traduit les noms d’instituts et de sociétés savantes et les titres de livres, et utilisé la transcription conventionnelle des noms russes en français. Certaines sections se terminent par une courte bibliographie pour signaler les livres disponibles en français écrits par les lauréats et pour indiquer quelques textes de vulgarisation complémentaires en accès libre.³

Rappelons que le portail des mathématiques de la version française de Wikipédia compte plus de dix mille articles, qui renseignent sur la plupart des notions, mathématiciens, prix et institutions mentionnés dans ce recueil. Des hyperliens renvoient ici vers ces articles à la première apparition de leur titre dans le corps du texte. La liste de ces hyperliens figure en index. Les termes qui renvoient à une section d’un article de Wikipédia et non à un article complet apparaissent en italique dans l’index.

Je remercie vivement Aurélien Djament pour ses remarques sur certains chapitres.

Nicolas Bacaër
Paris, janvier 2024

3. La plupart des numéros de la *Gazette des mathématiciens* sont depuis peu en accès libre sur le site de la Société mathématique de France.

Sommaire

Serre (2003)	1
Sur les travaux du lauréat	4
Atiyah et Singer (2004)	13
Sur le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer	17
Lax (2005)	26
Des éléments de sa contribution aux mathématiques	30
Carleson (2006)	41
Présentation vulgarisée des résultats de Carleson	44
Varadhan (2007)	52
Les travaux de Varadhan	56
Thompson et Tits (2008)	62
La théorie moderne des groupes	67
Un aperçu historique de la théorie des groupes	69
Gromov (2009)	72
La géométrie : le terrain de jeu de Mikhaïl Gromov	75
Tate (2010)	85
La théorie des nombres : le terrain de jeu de John Tate	88
Milnor (2011)	94
Topologie et géométrie	98
Des sphères exotiques de dimension 7	102
La conjecture fondamentale de la topologie combinatoire	105
J. W. Milnor : « Sur la courbure totale des nœuds »	108
Le nombre de Milnor de la place de l'Étoile à Paris	111
Dictionnaire pour une meilleure compréhension de la citation	114
L'œuvre de John Milnor	120

Szemerédi (2012)	137
La joie et le mystère des entiers naturels	141
La combinatoire	143
Les mathématiques hongroises	145
Les progressions arithmétiques	147
Le lemme de régularité de Szemerédi	150
Les travaux d’Endre Szemerédi	153
Deligne (2013)	166
La conjecture de Weil	170
Les modules de courbes stables	173
La correspondance de Riemann-Hilbert	176
L’œuvre de Pierre Deligne	178
Sinai (2014)	196
Le chaos	200
Les billards mathématiques	202
L’entropie des suites de 0 et de 1	206
L’entropie d’un système dynamique	209
Nash et Nirenberg (2015)	212
Propriété intrinsèque ou extrinsèque	221
Le théorème de Nash-Kuiper	223
Les problèmes de Minkowski et Weyl	226
Les équations aux dérivées partielles : un outil mathématique universel	229
Wiles (2016)	231
La lettre d’Abel à Holmboe	236
Le dernier théorème de Fermat pour $n = 4$	239
<i>Hanc marginis exiguitas non caperet</i>	242
Le théorème de modularité	246
Meyer (2017)	250
Les systèmes de fonctions orthogonales	257
L’œuvre d’Yves Meyer	262
Langlands (2018)	265
Dix-sept pages manuscrites qui ont façonné tout un pan de la recherche mathématique	269
De la réciprocité quadratique au programme de Langlands	273

Uhlenbeck (2019)	281
Les théories de jauge	288
Le calcul des variations	291
Les bulles	296
Furstenberg et Margulis (2020)	298
La marche aléatoire, une bonne stratégie	306
Les propriétés asymptotiques des groupes	308
Le théorème de Szemerédi et la conjecture d’Oppenheim	313
Récurrence des marches aléatoires dans \mathbb{Z} et \mathbb{Z}^2	316
La construction d’une famille de graphes expenseurs	319
Lovász et Wigderson (2021)	322
La preuve hors de tout doute raisonnable	331
Des invariants de graphes	335
L’algorithme de réduction de réseau de Lenstra-Lenstra-Lovász	342
Sullivan (2022)	348
La topologie	353
Un modèle algébrique pour les espaces topologiques	357
Les composantes errantes	361
Un aperçu du travail du lauréat	365
Caffarelli (2023)	369
Les modèles mathématiques	373
Le problème de l’obstacle	376
Les problèmes à frontière libre	379
Un aperçu du travail du lauréat	382
Talagrand (2024)	385
Talagrand et ses mathématiques	389
Les processus stochastiques	393
Concentration de la mesure	395
Un aperçu du travail du lauréat	397
Index	401



Serre (2003)

« pour son rôle central dans l'élaboration de la forme moderne de nombreux domaines des mathématiques, notamment la **topologie**, la **géométrie algébrique** et la **théorie des nombres** ».

Le premier **prix Abel** a été décerné à **Jean-Pierre Serre**, l'un des grands mathématiciens de notre temps. Serre est professeur honoraire au Collège de France à Paris. Il a largement contribué au progrès des mathématiques durant plus d'un demi-siècle et continue dans cette voie.

Les travaux de Serre ont une étendue, une profondeur et une influence extraordinaires. Serre a joué un rôle central dans l'élaboration de la forme moderne de nombreux domaines des mathématiques, notamment :

- la topologie, qui traite de la question suivante : qu'est-ce qui demeure constant en **géométrie** même lorsque la distance est déformée ?
- la géométrie algébrique, qui traite de la question suivante : comment résoudre géométriquement des systèmes d'**équations polynomiales** ?
- la théorie des nombres et l'étude des propriétés élémentaires des nombres, par exemple les **nombres premiers** et la résolution des équations polynomiales comme dans le **dernier théorème de Fermat**.

Serre a développé des méthodes algébriques révolutionnaires pour l'étude de la topologie. Il a étudié en particulier les transformations entre **hypersphères**. Il est parvenu à une clarification spectaculaire des travaux des géomètres algébristes italiens, en introduisant et en développant les systèmes algébriques nécessaires pour déterminer quand leurs constructions géométriques fonctionnaient. Cette puissante technique de Serre, avec son nouveau langage et son point de vue inédit, a inauguré un nouvel âge d'or de la géométrie algébrique.

Au cours des quatre dernières décennies, les remarquables travaux de Serre et sa vision de la théorie des nombres ont été décisifs pour conférer à ce sujet le succès qu'il connaît actuellement. Ces travaux relient et étendent sous de nombreux rapports les conceptions mathématiques introduites par **Abel**, en particulier la démonstration apportée

par ce dernier de l'impossibilité de résoudre une **équation du cinquième degré** par des radicaux, et ses techniques analytiques pour l'étude des équations polynomiales à deux variables. Les recherches de Serre ont été capitales pour ouvrir la voie aux découvertes récentes les plus notoires, dont la démonstration apportée par **Wiles** du dernier théorème de Fermat.

Bien que les efforts de Serre se soient portés sur des mathématiques abstraites, ses contributions ont trouvé d'importantes applications. Certains problèmes pratiques que posent le développement de **codes correcteurs d'erreurs** efficaces et la **cryptographie à clé publique** sont résolus par des équations polynomiales (en particulier dans des **corps finis**). Les travaux de Serre ont réellement approfondi notre compréhension de ce sujet.

Jean-Pierre Serre est né en 1926 à Bages, en France. Il a fait ses études à l'École normale supérieure et a obtenu le titre de docteur ès sciences de la Sorbonne à Paris en 1951. Après avoir occupé plusieurs postes auprès du Centre national de la recherche scientifique, il a été maître de conférences à la faculté des sciences de l'université de Nancy. En 1956, il a été nommé professeur au Collège de France.

Serre a été promu au grade de commandeur de la Légion d'honneur et élevé à la dignité de grand officier de l'Ordre national du Mérite. Il a été élu membre de nombreuses académies nationales, en France, en Suède, aux États-Unis et aux Pays-Bas notamment. Parmi les prix qui lui ont été décernés, citons la **médaille Fields** en 1954 (dont il est le plus jeune récipiendaire à ce jour), le **prix Gaston-Julia** en 1970, le **prix Balzan** en 1985, le **prix Steele** en 1995 et le **prix Wolf** en 2000. Il est docteur *honoris causa* de nombreuses universités. L'université d'Oslo est la dernière en date à lui avoir attribué cette distinction à l'occasion du bicentenaire de la naissance de Niels Henrik Abel, célébré en 2002.

Bibliographie

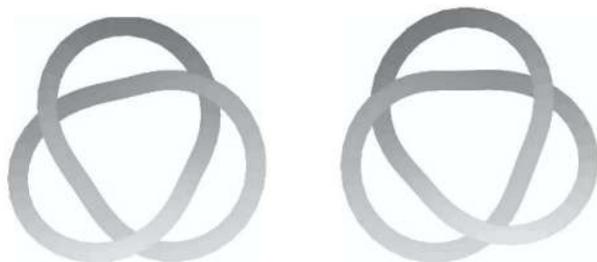
- CHAMBERT-LOIR (Antoine), *Le prix Abel décerné à Jean-Pierre Serre*, *Gazette des mathématiciens*, 2004, n° 99, p. 26-32.
- SERRE (Jean-Pierre), *Algèbre locale, multiplicités*, Berlin, Springer, 1975.
- SERRE (Jean-Pierre), *Corps locaux*, 3^e éd., Paris, Hermann, 1980.
- SERRE (Jean-Pierre), *Groupes algébriques et corps de classes*, 2^e éd., Paris, Hermann, 1984.

-
- SERRE (Jean-Pierre), *Cours d'arithmétique*, 3^e éd., Paris, Presses universitaires de France, 1988.
 - SERRE (Jean-Pierre), *Cohomologie galoisienne*, 5^e éd., Berlin, Springer, 1994.
 - SERRE (Jean-Pierre), *Représentations linéaires des groupes finis*, 5^e éd., Paris, Hermann, 1998.
 - SERRE (Jean-Pierre), « **Groupes de Galois, le cas abélien** », Institut Henri-Poincaré, 27/10/2012.
 - SERRE (Jean-Pierre), « **Distributions des valeurs propres des Frobenius des variétés abéliennes sur un corps fini donné** », CIRM, 25/02/2014.
 - SERRE (Jean-Pierre), « **Distribution asymptotique des valeurs propres des endomorphismes de Frobenius**, Institut Henri-Poincaré, 31/03/2018.

SUR LES TRAVAUX DU LAURÉAT

Le premier prix Abel a été décerné à Jean-Pierre Serre, l'un des plus grands mathématiciens de notre temps. Serre est professeur honoraire au Collège de France à Paris. Il a profondément contribué au progrès des mathématiques pendant plus d'un demi-siècle et continue à le faire. Serre a eu une influence majeure sur l'élaboration de la forme moderne de nombreuses parties des mathématiques, notamment

- la topologie, qui étudie les courbes, les surfaces et les espaces géométriques plus généraux et s'intéresse à la question de savoir ce qui reste inchangé dans la géométrie de ces espaces même lorsque la longueur est déformée. Comment savoir si un objet géométrique est essentiellement différent d'un autre dans le sens où, même en supposant que les deux objets soient aussi flexibles, aussi souples que possible, aucune déformation astucieuse ne peut les faire se ressembler. Par exemple, comment pouvons-nous dire que les deux **nœuds de trèfle**



sont essentiellement différents ? Imaginez qu'ils soient faits de ficelle. Aucune manipulation (sans coupure) ne peut les rendre identiques !

- la théorie des nombres, qui étudie les propriétés de base des nombres, les nombres premiers, la factorisation, les **nombres algébriques**, les questions de placement des nombres (par exemple, la **conjecture de Catalan** : les seules puissances parfaites consécutives sont $2^3 = 8$ et $3^2 = 9$), les questions d'estimation (par exemple, pour un très grand x , il y a environ $x/\log x$ nombres premiers qui sont inférieurs à x) et les solutions d'équations polynomiales (par exemple, le dernier théorème de Fermat).
- la géométrie algébrique, qui renforce considérablement le lien

entre l'algèbre et la géométrie déjà évident dans la **géométrie analytique** des mathématiques du lycée, avec l'étude des **coniques** et des **ellipsoïdes**. C'est la branche des mathématiques qui pose des questions fondamentales comme les suivantes. Quelle est la géométrie des solutions des systèmes d'équations polynomiales ? Si l'on dispose directement d'informations sur cette géométrie, qu'est-ce que cela nous apprend sur l'algèbre sous-jacente ? Combien de degrés de liberté avons-nous pour réaliser un **espace topologique** spécifique comme l'espace des solutions de systèmes d'équations polynomiales ?

De nombreux théorèmes fondamentaux dans ces disciplines sont dus à Serre. Ce ne sont là que quelques-uns des domaines auxquels Serre a contribué. Nous n'examinerons de plus près que deux sujets, la topologie et la théorie des nombres. L'ère moderne de la topologie a commencé avec les travaux d'**Henri Poincaré** dans sa série d'articles sur l'*Analysis situs* et nous donnerons quelques indications sur le lien entre cette origine et les travaux extraordinaires de Serre en **topologie algébrique**. On peut dire que l'ère moderne de l'algèbre et de la théorie des nombres commence avec les travaux de **Gauss**, **Lagrange**, **Galois** et Abel. Ici encore, nous évoquerons brièvement le lien entre ces origines et les contributions de Serre à la théorie des nombres.

Topologie. Serre a développé des méthodes algébriques révolutionnaires en topologie algébrique. Pour avoir une idée du type de question mathématique abordée par la topologie algébrique, imaginez que l'on vous donne un espace topologique X et que vous souhaitez comprendre ses caractéristiques qualitatives, et plus précisément les caractéristiques qui ne changent pas même si vous permettez à votre espace topologique d'être flexible et non rigide. Pour prendre un exemple simple, soit X la surface d'une chambre à air. Cet objet étant en caoutchouc, il est très probable qu'il soit soumis à des étirements et à des frottements. Nous voulons nous concentrer sur les caractéristiques de cette surface qui restent inchangées par de telles modifications de sa forme. Aucune mesure de longueur sur notre surface, par exemple, n'est considérée comme une « caractéristique qualitative » légitime, car les déformations du caoutchouc peuvent modifier toute mesure de ce type. Le grand mathématicien Henri Poincaré a découvert, il y a environ un siècle, une caractéristique qualitative intéressante d'une telle surface en posant le type de question suivant : de combien de façons peut-on dessiner une courbe fermée sur cette surface, deux « dessins de courbes fermées sur

la surface » étant considérés comme essentiellement différents uniquement si chacun de ces dessins ne peut pas être modifié continûment pour devenir l'autre.

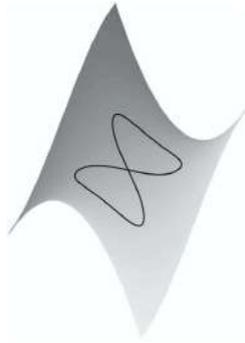


En classant et en étudiant la collection complète des courbes fermées essentiellement différentes dans l'espace topologique X , les mathématiciens ont trouvé une source et un langage pour le type de caractéristiques qualitatives qu'ils recherchaient. La réponse à la question de Poincaré « combien y a-t-il de courbes fermées essentiellement différentes dans X ? » suffit parfois à distinguer les espaces (par exemple, si votre espace X est une **sphère**, il n'y en a qu'une, alors que si X est la surface d'une bouée, comme l'illustrent les figures ci-dessus, il y en a plusieurs).

Où peut-on trouver d'autres caractéristiques qualitatives qui soient des outils encore plus sensibles pour distinguer et comprendre les espaces géométriques X ? (Les mathématiciens appellent ces caractéristiques qualitatives de X des « invariants d'**homotopie** » de X). Un endroit naturel pour rechercher des caractéristiques qualitatives ou des invariants d'homotopie plus nombreux et plus fins est la version en plus grande **dimension** de l'idée de Poincaré. En d'autres termes, au lieu de considérer uniquement l'outil utilisé par Poincaré, c'est-à-dire les courbes fermées, dans l'espace X , nous pourrions nous concentrer sur des espaces de dimension supérieure essentiellement différents de types particuliers contenus dans l'espace X . Mais quels espaces de dimension supérieure sont particulièrement bons à utiliser comme source de caractéristiques qualitatives ?

La sphère à n dimensions est l'espace de tous les points à distance 1 de l'origine dans l'**espace euclidien** à $n + 1$ dimensions : la sphère à une dimension est le **cercle**, la sphère à deux dimensions est la surface d'une boule, etc. De plus, on obtient une courbe fermée dans X en « plaçant » la sphère unidimensionnelle, le cercle, dans X (par une

application **continue** comme disent les mathématiciens).



Cela a conduit les mathématiciens à considérer, pour chaque dimension $n = 1, 2, 3, \dots$, l'ensemble des applications continues essentiellement différentes de la sphère de dimension n vers X . Ces ensembles (définis de manière appropriée) sont appelés les n -ièmes **groupes d'homotopie** de X (pour $n = 1, 2, 3, \dots$). Ils constituent une série de grandes et mystérieuses caractéristiques qualitatives de l'espace topologique X . Nous avons utilisé le terme mathématique de **groupe** pour signaler qu'il existe une structure algébrique subtile pour l'ensemble de ces applications essentiellement différentes : l'une des grandes surprises du sujet est que la recherche de caractéristiques qualitatives conduit inéluctablement à des objets algébriques.

Pour que les groupes d'homotopie soient utiles, nous devons être en mesure de les calculer pour les espaces X de base, et en particulier pour les sphères elles-mêmes. Pour chaque paire d'**entiers naturels** n et m , le problème central est donc de calculer le nombre, et plus exactement la structure, des applications essentiellement différentes de la sphère à n dimensions vers la sphère à m dimensions. Il existe toujours une application continue inintéressante : l'application qui projette la sphère à n dimensions en un seul point de la sphère à m dimensions. Mais pour de nombreux $n \geq m$, il y a aussi des applications intéressantes, subtiles et belles, avec des liens avec l'algèbre et, peut-être de façon plus surprenante, avec la théorie des nombres. Sauf lorsque $n = m$ ou $n = 2m - 1$, le nombre d'applications essentiellement différentes de la sphère à n dimensions vers la sphère à m dimensions est fini. Une connaissance détaillée de ces applications est la clé qui permet d'aborder un large éventail de problèmes topologiques.

Serre a mis au point une machinerie algébrique qui a fourni des réponses précises à de nombreuses questions de ce type, et qui a lancé une ère de recherche en topologie algébrique. Pour donner une idée de la complexité et de la précision, citons quelques exemples : il n'y a que deux applications continues essentiellement différentes de la sphère à 5 dimensions vers la sphère à 3 dimensions, il y a 12 applications essentiellement différentes de la sphère à 6 dimensions vers la sphère à 3 dimensions, il y a 4 applications essentiellement différentes de la sphère à 9 dimensions vers la sphère à 4 dimensions.

Théorie des nombres. Au cours des quatre dernières décennies, le magnifique travail de Serre en théorie des nombres et ses idées ont permis à ce sujet d'atteindre sa notoriété actuelle. Ses travaux ont été essentiels pour préparer le terrain à de nombreuses percées récentes parmi les plus célèbres, notamment les travaux de Wiles sur le dernier théorème de Fermat. La contribution de Serre est si vaste qu'il est difficile de donner une idée de son immensité, mais essayons d'expliquer un peu le contexte pour apprécier un seul des résultats fondamentaux de Serre.

Une formule enseignée au lycée « résout » toutes les **équations polynomiales du second degré** à une variable en termes de **racines carrées** de choses connues. Les algébristes italiens du XVI^e siècle utilisaient les **racines cubiques** et les racines quatrièmes pour exprimer les solutions des équations polynomiales de **degrés** trois et quatre. Le grand mathématicien norvégien Niels Henrik Abel a montré que cet outil simple (l'« extraction de racines ») ne permettait pas de résoudre toutes les équations polynomiales de degré supérieur.

Néanmoins, l'idée d'« extraire les racines » reste un moyen formidable, voire universellement efficace, d'analyser les nombres algébriques, c'est-à-dire les nombres qui apparaissent comme solutions d'équations polynomiales à coefficients entiers. Voici un exemple d'une telle équation polynomiale, choisie au hasard :

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

Cette équation a (en fait) six solutions. Toutes ces solutions sont donc des exemples de nombres algébriques.

Au début des années 1800, le mathématicien Carl Friedrich Gauss s'est penché, entre autres, sur un problème central concernant les racines. Plus précisément, Gauss a proposé une analyse approfondie des nombres algébriques qui sont des **racines de l'unité**. Si z est un

nombre complexe dont le cube est 1, alors on dit que z est une racine cubique de l'unité. De même, si z est un nombre complexe qui élevé à la puissance n donne 1,

$$z^n = zzz \cdots z = 1,$$

alors on dit que z est une racine n -ième de l'unité. Par exemple, la collection de tous les nombres complexes z qui sont des racines septièmes de l'unité se compose de 1 lui-même et de six autres nombres complexes qui, exprimés dans le langage de la trigonométrie élémentaire, sont :

$$\cos(2\pi/7) + i \sin(2\pi/7),$$

$$\cos(4\pi/7) + i \sin(4\pi/7),$$

$$\cos(6\pi/7) + i \sin(6\pi/7),$$

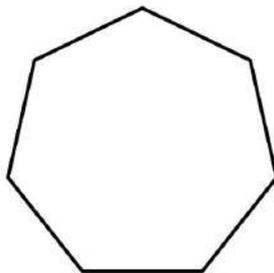
$$\cos(6\pi/7) - i \sin(6\pi/7),$$

$$\cos(4\pi/7) - i \sin(4\pi/7),$$

$$\cos(2\pi/7) - i \sin(2\pi/7).$$

Ces six nombres sont aussi précisément les solutions de l'équation du sixième degré donnée ci-dessus, comme on peut le vérifier en utilisant la **trigonométrie** du lycée.

Si l'on place toutes les racines septièmes de l'unité dans le **plan complexe**, elles forment les sommets d'un **heptagone** régulier (un **polygone** à sept côtés). Les racines n -ièmes de l'unité ont joué un rôle important dans l'histoire de la géométrie et en particulier dans les constructions euclidiennes.



L'un des résultats célèbres de Gauss concernant les racines de l'unité garantit qu'elles constituent une source abondante de nombres algébriques étroitement liés par des symétries internes. Ce que l'on entend

par « riche », c'est que, comme Gauss l'a montré, il n'y a pas de redondance dans la liste ci-dessus des six différentes racines septièmes de l'unité. En d'autres termes, aucun multiple entier positif d'une racine quelconque de cette liste ne peut être donné comme une somme de multiples entiers des autres éléments de la liste. Il a démontré que pour tout $n = 3, 4, \dots$, les racines n -ièmes de l'unité sont également une « source riche ».

L'un des nombreux théorèmes fondamentaux de Serre garantit une réserve beaucoup plus riche de nombres algébriques (qui sont étroitement maintenus ensemble par des symétries internes) qui nous parvient par l'étude d'objets mathématiques appelés « **courbes elliptiques** ».

Les courbes elliptiques sont nées de l'étude des **intégrales elliptiques**, qui sont elles-mêmes nées de l'expression de la longueur des arcs d'**ellipses** et de courbes étroitement apparentées dans le plan. Au début du XIX^e siècle, Gauss, Abel et **Jacobi** ont eu l'idée d'inverser certaines de ces expressions de longueur d'arc pour obtenir des **fonctions** qui généralisent les fonctions classiques de la trigonométrie (**sinus, cosinus**). Les **fonctions elliptiques** satisfont une loi d'addition analogue à la loi d'addition trigonométrique du sinus et du cosinus. De plus, au lieu de la simple équation quadratique ($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$) satisfaite par le sinus et le cosinus, les fonctions elliptiques satisfont une relation polynomiale cubique et leurs valeurs forment des **cubiques** du plan. Ce sont des courbes elliptiques.

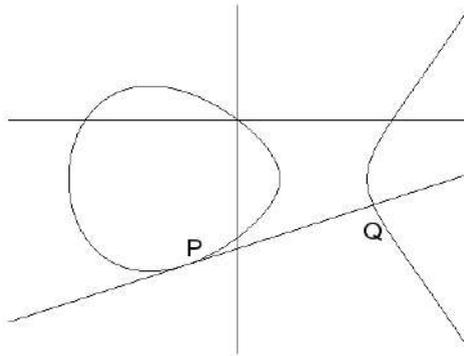
Les courbes elliptiques particulièrement pertinentes pour la théorie des nombres sont des cubiques lisses dans le plan (x, y) avec des coefficients entiers, telles que

$$E : \quad y^2 + y = x^3 - x.$$

Pour chacune de ces courbes elliptiques, nous verrons comment organiser une certaine collection de nombres algébriques. Ces nombres algébriques sont les coordonnées de points particuliers sur la courbe elliptique. Les mathématiciens appellent les points dont nous allons parler « points de torsion sur E d'ordre impair ». Dans l'étude de la courbe elliptique E, les points de torsion jouent un rôle similaire à celui joué par les racines de l'unité dans l'étude des nombres complexes.

Décrivons géométriquement cette collection de points particuliers sur une courbe elliptique E. Commençons par un point P sur E de coordonnées $P = (a, b)$. Traçons la tangente à la courbe E en P. Cette droite tangente coupera la courbe en exactement un autre point Q (sauf dans les huit cas où cette droite tangente épouse un peu trop la

courbe, car dans ces cas, « l'autre point » Q doit être considéré comme P lui-même). Maintenant, faisons la même chose avec Q . Traçons la **tangente** à la courbe en Q . Cette droite tangente coupera la courbe en exactement un autre point R . Faisons ensuite la même chose avec R , et continuons de cette manière. Soit nous ne revenons jamais au point P , quel que soit le nombre de fois que nous itérons ce processus de tracé de droites tangentes et de passage à l'autre point d'intersection, soit nous revenons à P . Si nous revenons à P , alors les coordonnées de P sont nécessairement des nombres algébriques. De tels points P sont appelés, comme indiqué ci-dessus, des points de torsion d'ordre impair.



La vaste généralisation par Serre du résultat de Gauss décrit ci-dessus a pour effet de garantir que pour toute courbe elliptique, cette collection de nombres algébriques est également aussi riche que l'on peut l'espérer avec optimisme et qu'elle est fermement maintenue par un système subtil de symétries.

Pour donner un aperçu de ce que cela signifie, nous utiliserons, sans le définir, un nombre que les mathématiciens appellent l'ordre d'un point de torsion d'une courbe elliptique. Considérons le cas de la courbe elliptique $y^2 + y = x^3 - x$. Pour tout nombre premier p , il y a précisément $p^2 - 1$ points de torsion d'ordre p sur cette courbe, tous ayant bien sûr des nombres algébriques comme coordonnées (x, y) . Le résultat de Serre garantit que pour tout nombre premier p , il existe jusqu'à $(p^2 - 1)(p^2 - p)$ permutations différentes de cet ensemble de points de torsion qui préservent leur structure algébrique sous-jacente.

Le théorème de Serre fournit des informations sur toutes les courbes elliptiques données par des équations cubiques dont les coefficients sont des nombres algébriques, et pas seulement sur notre exemple. Une conséquence de ce théorème est que pour toute courbe elliptique de ce type, soit l'état de choses ci-dessus est valable pour tous les nombres premiers p sauf un nombre fini, soit la courbe elliptique elle-même est d'un type extrêmement spécial (elle est à « **multiplication complexe** »).

Les travaux de Serre ont marqué le début de la glorieuse époque moderne dans ce domaine, où cette arithmétique profonde derrière les courbes elliptiques est liée à des sujets plus classiques tels que les **formes modulaires**, et où Serre lui-même a réalisé des travaux riches et profonds.

Atiyah et Singer (2004)

« pour la découverte et la démonstration du **théorème de l'indice d'Atiyah-Singer**, qui unifie la topologie, la géométrie et l'**analyse**, et pour leur rôle déterminant dans l'établissement de nouvelles passerelles entre les mathématiques et la physique théorique ».

Le deuxième prix Abel est attribué conjointement à **Michael Francis Atiyah** et à **Isadore M. Singer**. Le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer est l'une de grandes avancées des mathématiques du XX^e siècle et a eu un impact inappréciable sur certains des plus grands développements ultérieurs qu'ont connu la topologie, la **géométrie différentielle** et la **théorie quantique des champs**. Ses auteurs, ensemble et individuellement, ont largement contribué à un rapprochement entre le monde des mathématiques et celui de la physique théorique des particules, lançant un processus d'enrichissement mutuel qui a été un des phénomènes les plus captivants de ces dernières décennies.

Nous décrivons le monde en mesurant des quantités et des forces qui changent dans le temps et dans l'espace. Les lois de la nature sont souvent exprimées par des formules qui font intervenir leurs taux de variation, appelées **équations différentielles**. Ces formules peuvent avoir un « indice », qui est le nombre de solutions de ces formules moins le nombre de restrictions qu'elles imposent à la valeur des quantités calculées. Le théorème de l'indice calcule ce nombre avec la forme de l'espace environnant.

Un exemple simple pouvant servir d'illustration est la fameuse gravure paradoxale de M. C. Escher, *Montée et Descente*, où les personnages, tout en montant ou descendant sans cesse des escaliers, ne font pourtant que le tour de la cour du château. Le théorème de l'indice leur aurait révélé que cela est impossible !

Le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer a été le sommet et le couronnement d'une évolution plus que centenaire des idées, du **théorème de Stokes**, que les étudiants apprennent dans les classes d'analyse mathématique, aux théories modernes les plus sophistiquées, comme la **théorie de Hodge** des intégrales harmoniques et le **théorème de la signature** de Hirzebruch.

Le problème résolu par le théorème d'Atiyah-Singer est véritablement omniprésent. Dans les quarante ans qui ont suivi sa découverte, ce théorème a trouvé d'innombrables applications, d'abord en mathématiques, et depuis la fin des années 1970 en physique théorique : **théories de jauge**, **instantons**, monopôles, **théorie des cordes**, théorie des anomalies, etc.

Dans un premier temps, les applications à la physique ont pris les communautés mathématiques et physiques totalement au dépourvu. Aujourd'hui, le théorème de l'indice est devenu partie intégrante de leurs cultures respectives. Atiyah et Singer, ensemble et à titre individuel, ont déployé inlassablement leurs efforts pour expliquer aux mathématiciens les avancées réalisées par les physiciens. Dans le même temps, ils ont porté à l'attention des physiciens la géométrie différentielle moderne et l'analyse appliquées à la théorie quantique des champs, et suggéré de nouvelles voies de recherche en physique proprement dite. Cet enrichissement croisé continue à se montrer fructueux pour les deux disciplines scientifiques.

Michael Francis Atiyah et Isadore M. Singer comptent parmi les mathématiciens les plus influents du siècle passé et sont encore en activité. Par leur théorème de l'indice, ils ont remodelé le paysage des mathématiques. Pendant une période de vingt ans, ils ont travaillé ensemble au théorème de l'indice et à ses ramifications.

Atiyah et Singer venaient à l'origine de domaines des mathématiques différents : Atiyah de la géométrie algébrique et de la topologie, Singer de l'analyse. Les contributions qu'ils ont apportées à leurs disciplines respectives sont aussi largement reconnues. Les premiers travaux d'Atiyah consacrés aux formes **méromorphes** sur les **variétés algébriques** et son important article datant de 1961 consacré aux complexes de **Thom** en sont deux exemples. L'œuvre pionnière d'Atiyah, aux côtés de Friedrich Hirzebruch, consacrée au développement d'un analogue topologique à la **K-théorie** de **Grothendieck**, a trouvé de nombreuses applications dans les problèmes classiques de topologie. Il s'est par la suite avéré qu'il était étroitement lié au théorème de l'indice.

Singer a jeté les bases du sujet des algèbres à opérateur triangulaires (aux côtés de **Richard V. Kadison**). Le nom de Singer est aussi associé au **théorème d'holonomie d'Ambrose-Singer** et à l'invariant de torsion de Ray-Singer. Avec **Henry P. McKean**, Singer a attiré l'attention sur l'information géométrique profonde cachée dans les **noyaux de la chaleur**, une découverte qui a eu un impact déterminant.

Le prix Abel a une valeur de 6 000 000 de couronnes norvégiennes

(710 000 euros) et a été attribué pour la première fois en 2003 à Jean-Pierre Serre.

Michael Atiyah

Michael Francis Atiyah est né en 1929 à Londres. Atiyah a obtenu sa licence et son doctorat au collège de la Trinité de Cambridge. Atiyah a effectué l'essentiel de sa carrière universitaire à Cambridge et à Oxford. Il a occupé plusieurs postes de premier plan, dont la prestigieuse **chaire savillienne de géométrie** d'Oxford et le poste de directeur du collège de la Trinité de Cambridge. Atiyah a aussi été professeur de mathématiques à l'**Institut d'étude avancée** de Princeton.

Atiyah a apporté un nouvel élan aux mathématiques britanniques durant ses années passées à Oxford et à Cambridge. Il a aussi été l'élément moteur de la création de l'institut Isaac-Newton pour les sciences mathématiques à Cambridge, dont il fut le premier directeur. Atiyah est aujourd'hui à la retraite et professeur honoraire de l'université d'Édimbourg.⁴

Atiyah a reçu de nombreux honneurs au cours de sa carrière, dont la médaille Fields (1966). Il a été élu membre de la Société royale de Londres en 1962, à l'âge de 32 ans. Il a reçu sa médaille royale en 1968 et sa médaille Copley en 1988. Atiyah a été président de la Société royale de Londres de 1990 à 1995. Atiyah a aussi été président de la **Société mathématique de Londres** (1974-1976). Il a en outre joué un rôle important dans la conception de l'actuelle **Société mathématique européenne**.

Atiyah est à l'origine de la fondation du Panel interacadémique qui réunit un grand nombre d'académies des sciences de la planète. Ce panel est aujourd'hui établi sur une base permanente et jouera un rôle majeur dans l'intégration des politiques scientifiques partout dans le monde. Atiyah a aussi été parmi ceux qui ont pris l'initiative de créer l'Association des académies européennes. Atiyah a été président des conférences Pugwash.

Parmi les prix qui lui ont été décernés, on relève le prix Feltrinelli de l'Académie des Lyncéens (1981) et le prix international de la science du roi Fayçal (1987). Atiyah a été anobli en 1983 et décoré de l'Ordre britannique du Mérite en 1992.

4. NDT. Atiyah est décédé en 2019.

Isadore Singer

Isadore M. Singer est né en 1924 à Détroit et a passé sa licence à l'université du Michigan en 1944. Après avoir obtenu son doctorat à l'université de Chicago en 1950, il a rejoint l'institut de technologie du Massachusetts. Singer y a effectué l'essentiel de sa carrière. Il y est actuellement professeur.⁵

Singer est membre de l'Académie américaine des arts et des sciences, de la Société américaine de philosophie et de l'Académie nationale des sciences des États-Unis. Il a été membre du conseil de direction de cette dernière et du conseil de direction du Conseil national de la recherche des États-Unis. Il a aussi été conseiller scientifique de la Maison-Blanche. Singer a été vice-président de la **Société américaine de mathématiques** de 1970 à 1972.

En 1992, Singer a reçu le prix de la Société américaine de mathématiques pour ses éminents services rendus au public. La citation a reconnu « sa contribution exceptionnelle à sa profession et plus largement à la science et au bien public ».

Il a entre autres reçu le **prix Bôcher** (1969) et le prix Steele pour l'œuvre d'une vie (2000), les deux décernés par la Société américaine de mathématiques, la **médaille Eugene-Wigner** (1988) et la Médaille nationale de la science des États-Unis (1983).

Quand Singer s'est vu décerner le prix Steele, sa réponse, publiée dans les *Notices* de la Société américaine de mathématiques, a été : « Pour moi, la salle de classe est le juste pendant de ma recherche. J'aime enseigner aux jeunes étudiants de tous les niveaux, et j'ai connu une multitude d'étudiants, dont beaucoup m'ont appris plus de choses que je ne leur en ai transmis. » Singer a aussi écrit des manuels réputés qui ont inspiré des générations entières de mathématiciens.

5. NDT. Singer est décédé en 2021.

SUR LE THÉORÈME DE L'INDICE D'ATIYAH-SINGER (par JOHN ROGNES)

Je vais expliquer brièvement ce qu'est le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer, pourquoi il est important et à quoi il sert. En voici un bref énoncé :

Théorème (M. F. Atiyah et I. M. Singer). *Soit $P(f) = 0$ un système d'équations différentielles. Alors*

$$\text{indice analytique}(P) = \text{indice topologique}(P).$$

Le mot « théorème » (du grec « theorein », regarder, comme dans « théâtre ») signifie qu'il s'agit d'une affirmation mathématiquement démontrée qui mérite d'être examinée de plus près. Le résultat a été annoncé en 1963 et publié en 1968.

Introduction

Les applications modernes des mathématiques commencent généralement par un modèle mathématique d'une partie de la réalité, et ce modèle est presque toujours décrit par un système d'équations différentielles. Pour utiliser le modèle, on cherche les solutions de ce système d'équations différentielles, mais celles-ci peuvent être pratiquement impossibles à trouver. La nouvelle idée cruciale d'Atiyah et Singer est qu'il est beaucoup plus facile de répondre à une question légèrement différente : combien y a-t-il de solutions ? Le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer donne une réponse à cette question, et la réponse est exprimée en termes de forme de la région où le modèle est défini.

Il est à noter ici qu'il n'est pas nécessaire de trouver les solutions du système pour savoir combien il y a de solutions. Et inversement, connaître le nombre de solutions peut en fait faciliter la recherche de ces solutions.

Une analogie simple consiste à examiner les **triangles** et les **quadrilatères** dans le plan. Il peut être compliqué de trouver les **angles** dans les coins de certaines de ces figures, mais quelque temps avant **Euclide**, quelqu'un s'est rendu compte que la somme des angles dans tous les coins est toujours de 180 degrés pour un triangle et de 360 degrés pour un quadrilatère. La réponse à cette question est donc facile à donner et ne dépend que d'une manière simple de la forme de la figure, à savoir si elle a trois ou quatre sommets.

L'étude des fonctions, de la dérivation et de l'**intégration** est appelée analyse mathématique (du grec « analyein », décomposer). L'étude des informations simples sur la forme de la région où est défini le modèle (s'agit-il d'un triangle ou d'un quadrilatère ?) est appelée topologie (du grec « topos », lieu). Les noms de ces sous-domaines mathématiques sont à l'origine des termes « indice analytique » et « indice topologique » que l'on retrouve dans le théorème de l'indice.

Les applications des mathématiques

À l'origine, les mathématiques servaient à compter (**arithmétique**), par exemple pour la comptabilité, la planification et le commerce, ou à décrire des formes (géométrie), par exemple pour mesurer un terrain, découper du tissu pour une robe ou construire un pont. Les applications modernes des mathématiques concernent souvent la modélisation et donc la prévision de l'évolution dans le temps d'un système complexe et composite, comme la manière dont le pétrole et le gaz s'écoulent dans les roches poreuses de la mer du Nord, la manière dont les files d'attente de messages dans un réseau peuvent être traitées au mieux, ou le temps qu'il fera cette fin de semaine.

Depuis **Newton** et **Leibniz**, ces modèles mathématiques ont presque toujours été décrits par des systèmes d'équations différentielles (ou **aux dérivées partielles**). Le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer est une idée fondamentale qui dit que nous pouvons trouver le nombre de solutions du système en ne connaissant que quelques éléments d'information simples sur la forme de la région modélisée. Même si le théorème de l'indice est un résultat purement mathématique, qui relie l'analyse et la topologie, il peut donc être utilisé comme un outil dans presque toutes les applications des mathématiques.

Une image du monde mathématique

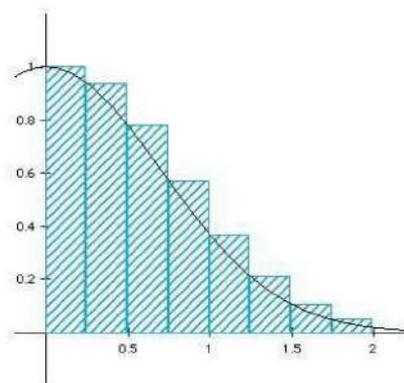
Les mathématiques peuvent être grossièrement divisées en quatre domaines : l'**algèbre**, l'analyse, la topologie et la **logique**. Les mathématiques sont un langage diversifié qui permet de décrire, de discuter et de modéliser de nombreux objets et problèmes différents, et les quatre domaines ont tendance à se concentrer sur des aspects différents de ces objets. Néanmoins, il n'y a pas de frontières claires entre ces domaines, et les mathématiques ne sont pas non plus isolées des autres disciplines.

Nous mettrons ici l'accent sur l'analyse et la topologie.

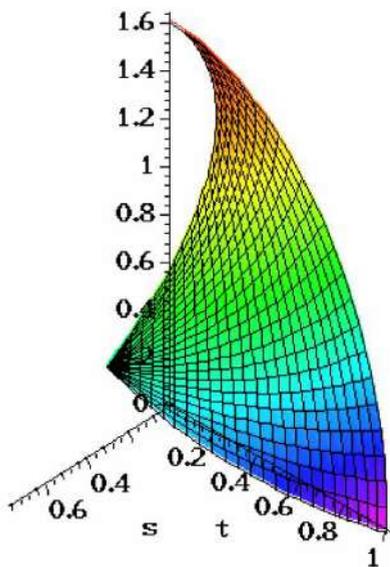
	économie	physique	sciences
informatique	algèbre	analyse	mathématiques appliquées
linguistique	logique	topologie	médecine

L'analyse

En analyse, on étudie un objet en le divisant d'abord en petits morceaux, puis en les rassemblant de nouveau (synthèse). L'accent est mis sur le cas limite où les morceaux deviennent arbitrairement petits et simultanément arbitrairement nombreux. Mots clés : dérivation, intégration et **calcul infinitésimal**.



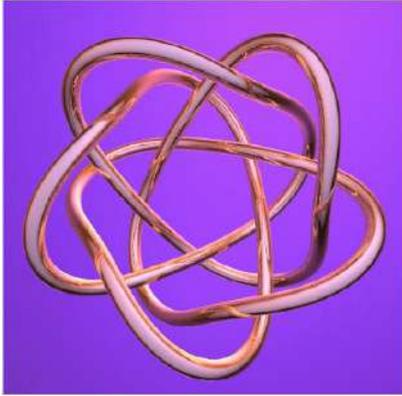
Aire sous une courbe



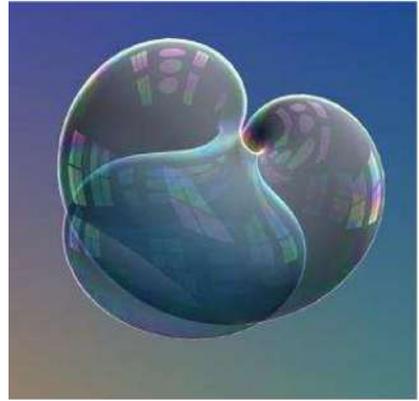
Une voile ?

La topologie

En topologie, on étudie comment un objet peut avoir une forme ou un aspect spatial. En particulier, on met l'accent sur les propriétés de la forme globale, plutôt que sur l'aspect local. Si la forme est décrite par une notion de distance, on parle généralement de géométrie.



M. Thistlethwaite :
« *Nœud symétrique* »



G. Francis, J. Sullivan et S. Levy :
« *Retournement de la sphère* »

Les modèles mathématiques

Un modèle mathématique est une tentative de décrire une partie de la réalité en langage mathématique. On peut également tenter de décrire la réalité en langage ordinaire, mais le langage mathématique présente l'avantage de pouvoir être argumenté de manière tout à fait précise et indiscutable. On peut donc poursuivre une chaîne de pensées en langage mathématique à travers de très nombreuses étapes et s'attendre à ce que la conclusion « à propos de la réalité » soit correcte.

Un modèle mathématique se situe généralement dans un certain domaine spatial, ou une région, que nous appelons X . Cet « espace » mathématique peut très bien correspondre à la fois à l'espace et au temps au sens physique. Par exemple, dans un modèle météorologique, un point dans X peut correspondre à un endroit particulier de l'atmosphère au-dessus de l'hémisphère nord à un moment particulier de la semaine à venir. Dans un modèle médical pour les impulsions électriques qui contrôlent le cœur, un point dans X peut correspondre à une petite partie du corps à un moment précis au cours d'une succession de battements cardiaques.

L'état du modèle est décrit par une liste de nombres pour chaque point de X , par exemple la température, la pression atmosphérique, l'humidité, la vitesse du vent, etc., à un endroit particulier de l'atmosphère et à un moment donné. Mathématiquement, cet état est décrit par une liste de fonctions f définies sur l'espace X . Dans le modèle

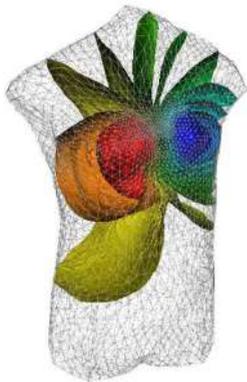
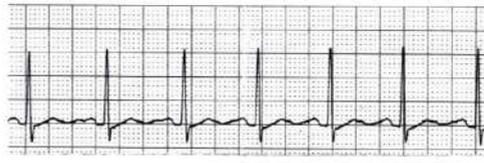
*Un torse**Un électrocardiogramme*

FIG. 1

médical, une telle fonction peut indiquer l'intensité du champ électrique dans les différentes régions du corps à différents moments. Les surfaces colorées de la figure 1 (à gauche) montrent des régions ayant la même intensité de champ électrique, au début d'un battement de cœur.

Les systèmes d'équations différentielles

Les lois physiques qui régissent l'évolution de la température, de la pression atmosphérique, etc., (resp. de l'intensité du champ électrique) sont bien connues tant que l'on ne considère qu'une petite région de X , c'est-à-dire une petite partie de l'atmosphère (resp. du corps), pendant un court laps de temps. Ces lois peuvent être exprimées sous la forme d'un système d'équations.

Ces équations impliquent les fonctions f qui décrivent l'état du modèle, mais aussi les **dérivées** $f'(x) = \frac{df}{dx}$ de ces fonctions. Ce sont de nouvelles fonctions qui expriment comment cet état change, soit d'un endroit à l'autre, soit d'un moment à l'autre.

Les fonctions dérivées sont également appelées différentielles. Par conséquent, un tel ensemble d'équations est appelé système d'équations différentielles. Ce système peut être résumé sous la forme $P(f) = 0$. Une liste de fonctions f sur X telles que toutes les équations soient satisfaites décrit un état physiquement possible et s'appelle une solution du système d'équations.

Dans presque toutes les applications de la modélisation mathématique, on souhaite connaître les solutions de ces systèmes d'équations différentielles.

L'indice analytique

Dans la pratique, il est généralement très difficile de trouver des formules précises pour les solutions. Il est donc nécessaire de procéder par étapes pour obtenir une telle réponse.

La première chose à savoir est s'il existe des solutions. Si ce n'est pas le cas, il faut probablement modifier quelque chose dans le modèle. Ensuite, on aimerait savoir s'il y a une ou plusieurs solutions. S'il y en a plusieurs, on aimerait savoir combien il y en a. La définition suivante est essentielle.

Définition. Soit $P(f) = 0$ un système d'équations différentielles pour un modèle décrit par des fonctions f sur un espace X . L'indice analytique du système est un entier qui correspond essentiellement au nombre de solutions de cette équation. Plus précisément,

$$\text{indice analytique}(P) = \dim \ker(P) - \dim \text{coker}(P)$$

est égal au nombre de paramètres nécessaires pour décrire toutes les solutions de l'équation, moins le nombre de relations entre les expressions $P(f)$.

Pour une application concrète, ce nombre est la première chose que l'on doit savoir sur les solutions du système d'équations différentielles. Si par exemple l'indice analytique est strictement positif, nous savons que le système a des solutions intéressantes.

À première vue, il est aussi difficile de trouver l'indice analytique d'un système que d'en trouver toutes les solutions. Mais le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer nous dit que non. En fait, il est plus facile de trouver le nombre de solutions du système (c'est-à-dire de calculer l'indice analytique) que de trouver les solutions elles-mêmes. Il suffit de connaître la forme (la topologie) de la région où est défini le modèle.

Le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer revisité

Voici un énoncé plus précis du théorème de l'indice.

Théorème (M. F. Atiyah et I. M. Singer). *Soit $P(f) = 0$ un système elliptique d'équations aux dérivées partielles défini sur une variété X qui est fermée, lisse, orientée et de dimension n . Alors*

$$\text{indice analytique}(P) = \text{indice topologique}(P)$$

est donné par la formule explicite suivante :

$$\text{indice topologique}(P) = (-1)^n \langle \text{ch}(s(P)), \text{td}(T_{\mathbb{C}}X), [X] \rangle.$$

Ici,

- n est la dimension de l'espace X ;
- $s(P)$ est le **symbole** du système P ;
- ch est le **caractère de Chern** ;
- $T_{\mathbb{C}}X$ est le **fibré tangent** complexifié de X ;
- td est la **classe de Todd** ;
- \cdot est le **cup-produit** ;
- $[X]$ est la **classe fondamentale** de X ;
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est l'appariement de **Kronecker**.

Les ingrédients de cette formule sont conceptuellement complexes, mais pas plus difficiles à calculer que ce qu'un mathématicien peut manipuler directement. L'expression ne dépend essentiellement que de la forme c'est-à-dire de la topologie de l'espace X sur lequel les équations sont définies.

Un exemple non élémentaire

Un promeneur fait le tour d'un escalier, le monte ou le descend. Ici, la forme spatiale X est un carré, tandis que l'état est la fonction f définie de telle sorte que $f(x)$ soit égale à la hauteur au-dessus du sol en chaque point x de X . L'équation différentielle $f'(x) = 0$, où $P(f) = \frac{df}{dx}$, a un espace de solutions à une dimension, à savoir les fonctions constantes $f(x) = C$. L'indice topologique de P sur le carré X est égal à 0. D'après le théorème de l'indice, l'indice analytique de P est également égal à 0. Il existe donc précisément $1 - 0 = 1$ relation entre les expressions possibles $f'(x)$, à savoir que l'intégrale de $f'(x)$ sur X est égale à 0. En particulier, le promeneur ne peut pas monter tout le temps, car alors $f'(x) > 0$ et l'intégrale de $f'(x)$ sur X serait strictement positive.

Remarques historiques

Le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer a des prédécesseurs historiques, tels que le **théorème de Riemann-Roch** en géométrie algébrique

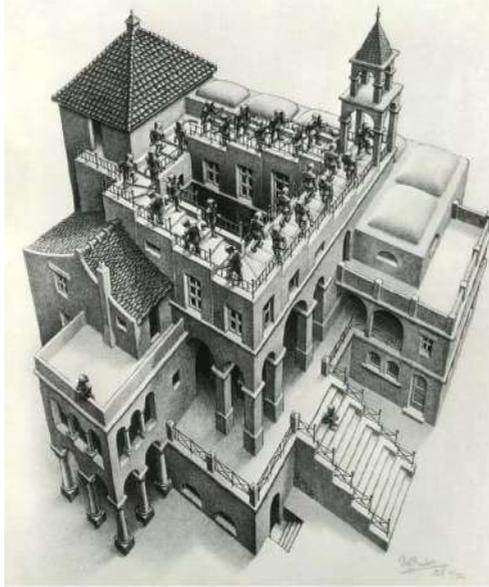


FIG. 2 – *M. C. Escher, Montée et Descente*

et le théorème de la signature de F. Hirzebruch, et les unifie complètement. Il a donc une grande valeur intellectuelle et esthétique.

I. M. Gelfand a conjecturé vers 1960 que l'indice analytique pouvait avoir une description purement topologique, mais ce sont Atiyah et Singer qui ont découvert et démontré la forme correcte de cette description. Dans leur travail, ils ont utilisé la K-théorie topologique, un nouvel outil topologique développé par Atiyah et Hirzebruch, inspiré d'un outil algèbro-géométrique correspondant défini par A. Grothendieck. La démonstration du théorème de l'indice fait intervenir également une contribution conjointe d'Atiyah et de **G. Segal** sur la K-théorie topologique.

Le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer a été la clé d'une floraison très fertile d'échanges d'idées entre les mathématiques et la physique théorique dans les années 1980 et 1990.

Les méthodes mathématiques dérivées du théorème de l'indice ont été utilisées en physique (**E. Witten**) pour développer la « théorie des cordes », qui est une tentative de trouver une explication commune pour

1. la gravitation, que nous comprenons à grande échelle grâce à la théorie de la relativité ;
2. les autres forces, telles que l'électromagnétisme, que nous comprenons à petite échelle grâce à la mécanique quantique.

Inversement, des idées issues de la physique, telles que l'étude des monopôles magnétiques et des « instantons » à courte durée de vie (S. K. Donaldson), ont été utilisées en mathématiques pour découvrir de nouvelles propriétés exceptionnelles des **variétés différentielles** à quatre dimensions.

Conclusion

Le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer est un résultat purement mathématique. Il nous indique qu'une question fondamentale en analyse, à savoir le nombre de solutions d'un système d'équations différentielles, a une réponse concrète en topologie. Cette idée fournit un raccourci pour savoir si de telles solutions existent ou non. Le théorème est précieux, car il relie l'analyse et la topologie d'une manière magnifique et perspicace. Il est pratique, car il explique comment les nombreuses applications de l'analyse mathématique peuvent faire bon usage de la structure spatiale ou topologique qui sous-tend le problème en question.

Lax (2005)

« pour ses contributions novatrices à la théorie et aux applications des équations aux dérivées partielles et au calcul de leurs solutions ».

Depuis Newton, les équations différentielles ont toujours constitué le fondement de la compréhension scientifique de la nature. Les équations différentielles linéaires, dans lesquelles les effets et les causes sont directement proportionnels, sont raisonnablement bien comprises. Les équations qui apparaissent dans des domaines comme l'aérodynamique, la météorologie et l'élasticité sont non linéaires et beaucoup plus complexes : leurs solutions peuvent produire des singularités. Pensez aux ondes de choc qui se créent quand un avion franchit le mur du son.

Dans les années 1950 et 1960, **Peter Lax** a posé les fondations de la théorie moderne des équations non linéaires de ce type (les **systèmes hyperboliques**). Il a construit des solutions explicites, identifié des classes de systèmes au comportement particulièrement exemplaire, introduit la notion importante d'entropie et, aux côtés de **Glimm**, réalisé une étude pénétrante du comportement asymptotique de ces solutions. Il a en outre développé les schémas numériques de **Lax-Friedrichs** et de **Lax-Wendroff**, aujourd'hui largement utilisés dans les calculs informatiques. Son travail dans ce domaine a joué un rôle central dans les nouveaux développements théoriques. Il a aussi été extraordinairement fructueux pour les applications pratiques, des prévisions météorologiques à la conception d'avions.

Une autre pierre angulaire de l'**analyse numérique** moderne est le « **théorème de Lax** ». Inspiré par Richtmyer, Lax a établi à l'aide de ce théorème les conditions nécessaires à une application numérique capable d'apporter une approximation numérique valide à la solution d'une équation aux dérivées partielles. Ce résultat a jeté une extraordinaire clarté sur le sujet.

Un système d'équations différentielles est dit « **intégrable** » si ses solutions sont totalement caractérisées par quelques valeurs cruciales qui ne changent pas dans le temps. Un exemple classique est celui du gyroscope, où ces valeurs conservées sont l'énergie et le moment angulaire.

Les systèmes intégrables sont étudiés depuis le XIX^e siècle et jouent un rôle important dans les mathématiques pures comme appliquées. À la fin des années 1960, une percée spectaculaire a été opérée par **Kruskal** et ses collaborateurs quand ils ont découvert une nouvelle famille d'exemples qui ont des « **solitons** » comme solutions : des ondes à crête unique qui gardent leur forme en se déplaçant. Peter Lax fut fasciné par ces solutions mystérieuses et inventa un concept unificateur pour les comprendre, réécrivant les équations en termes de ce qui est actuellement appelé « paires de Lax ». Ce progrès a mené à la conception d'un outil essentiel pour l'ensemble de ce domaine, permettant la construction de nouveaux systèmes intégrables et facilitant leur étude.

La théorie de la diffusion des ondes s'intéresse au changement dans une onde quand elle contourne un obstacle. Ce phénomène n'est pas réservé aux fluides, puisqu'il se produit aussi en physique atomique (**équation de Schrödinger**). En collaboration avec **Phillips**, Peter Lax a conçu une vaste théorie de la diffusion et décrit le comportement asymptotique de solutions (plus précisément, la déperdition de l'énergie). Leur travail s'est aussi avéré important dans des domaines mathématiques apparemment très éloignés des équations différentielles, comme la théorie des nombres. C'est donc un exemple inhabituel et magnifique d'une structure conçue en mathématiques appliquées, menant à une compréhension nouvelle dans les mathématiques pures.

Peter Lax a été décrit comme le mathématicien le plus polyvalent de sa génération. L'impressionnante liste de mérites donnée plus haut ne rend pourtant pas justice à toutes ses réussites. Son utilisation de l'optique géométrique pour étudier la propagation de singularités a ouvert la voie à la théorie des opérateurs intégraux de Fourier. En collaboration avec **Nirenberg**, il est parvenu aux estimations définitives de type **Gårding** pour les systèmes d'équation. D'autres résultats prestigieux comprennent le **théorème de Lax-Milgram** et la version de Lax du **principe de Phragmén-Lindelöf** pour les **équations elliptiques**.

Peter Lax réunit de manière exceptionnelle les mathématiques pures et appliquées, associant une profonde compréhension de l'analyse et une extraordinaire capacité d'invention de concepts unifiants. Il a exercé une influence déterminante, non seulement par sa recherche mais aussi par ses écrits, son dévouement sans faille à la formation et sa générosité envers les collègues plus jeunes que lui.

Peter D. Lax est né le 1^{er} mai 1926 à Budapest en Hongrie. Il était en route vers New York avec ses parents le 7 décembre 1941 quand les

États-Unis entrèrent en guerre.

Peter Lax a reçu son doctorat en 1949 de l'université de New York, avec **Richard Courant** comme directeur de thèse. Courant avait fondé dans cette université l'**institut Courant des sciences mathématiques**, dont Lax assura la direction de 1972 à 1980. En 1950, Peter Lax s'est rendu à Los Alamos pour un an et y a travaillé ensuite plusieurs étés à titre d'expert. Dès 1951, il est pourtant revenu à l'université de New York pour commencer l'œuvre de sa vie à l'institut Courant. Lax a été nommé professeur en 1958. Dans cette université, il a occupé aussi les fonctions de directeur du centre de calcul et de mathématiques appliquées de la Commission de l'énergie atomique des États-Unis.

En proposant Peter Lax comme membre de l'Académie nationale des sciences des États-Unis en 1962, Courant l'a décrit comme « l'incarnation, plus peut-être que tout autre, de l'association d'une analyse mathématique abstraite et du pouvoir le plus concret de résolution de problèmes individuels ».

Peter Lax est l'un des plus grands chercheurs dans les mathématiques pures et appliquées de notre temps et a apporté des contributions significatives, allant des équations aux dérivées partielles aux applications dans l'ingénierie. Son nom est lié à de nombreux résultats mathématiques majeurs et à des méthodes numériques, comme le lemme de Lax-Milgram, le théorème d'équivalence de Lax, le schéma de Lax-Friedrich, le schéma de Lax-Wendroff, l'entropie de Lax et la théorie de Lax-Levermore.

Peter Lax est aussi l'un des fondateurs de l'analyse numérique moderne. Parmi ses plus importantes contributions à la communauté du calcul haute performance figure son travail pour le centre de calcul et de mathématiques appliquées du Conseil national de la science de 1980 à 1986. Il a aussi présidé le comité réuni par le Conseil national de la science pour étudier le calcul haute performance dans les sciences et les mathématiques, une œuvre de pionnier qui a mené au rapport Lax.

Les travaux du professeur Lax ont été honorés par de nombreux prix et récompenses. Il a reçu la Médaille nationale de la science en 1986, remise par le président Ronald Reagan lors d'une cérémonie à la Maison-Blanche. Peter Lax a reçu le prix Wolf en 1987 et le **prix Chauvenet** en 1974, et partagé le prix Steele de la Société américaine de mathématiques en 1992. Il a aussi reçu le **prix Norbert-Wiener** en 1975 de la Société américaine de mathématiques et de la **Société de mathématiques appliquées et industrielles**. En 1996, il a été élu membre de la Société américaine de philosophie.

Peter Lax a été président (1977-1980) et vice-président (1969-1971) de la Société américaine de mathématiques.

Le professeur Lax est un remarquable pédagogue qui a formé un grand nombre d'étudiants. Il a aussi été un infatigable réformateur de l'enseignement des mathématiques et son travail sur les équations aux dérivées partielles a été pendant des décennies un élément classique de l'enseignement des mathématiques dans le monde entier.

Peter Lax est docteur *honoris causa* de nombreuses universités du monde entier. Quand il a été distingué par l'université de technologie d'Aix-la-Chapelle en Allemagne en 1988, sa contribution déterminante aux mathématiques et l'importance de son travail dans le champ de l'ingénierie ont toutes deux été soulignées. Il a aussi été honoré pour son approche positive de l'utilisation des ordinateurs dans les mathématiques, la recherche et l'enseignement.

Bibliographie

- BARDOS (Claude), « Peter Lax et les équations linéaires en propagation d'ondes », *Gazette des mathématiciens*, 2005, n° 105, p. 18-24.

DES ÉLÉMENTS DE SA CONTRIBUTION AUX MATHÉMATIQUES (par HELGE HOLDEN)

Peter Lax a apporté des contributions décisives à plusieurs domaines clés des mathématiques. Ses contributions s'inscrivent dans une longue tradition où l'interaction entre les mathématiques et la physique est au cœur des préoccupations. La physique pose des problèmes difficiles dont la résolution nécessite de l'intuition. Les mathématiques peuvent révéler des structures et des propriétés internes profondes. Les démonstrations rigoureuses fournissent des bases solides pour notre connaissance. **John von Neumann**, qui a eu une influence considérable sur Lax, concluait en 1945 que ⁶ « des dispositifs de calcul à grande vitesse réellement efficaces peuvent, dans le domaine des équations aux dérivées partielles non linéaires ainsi que dans de nombreux autres domaines dont l'accès est aujourd'hui difficile ou totalement interdit, nous fournir les indications heuristiques nécessaires dans tous les domaines des mathématiques pour réaliser de véritables progrès ». Lax a déclaré en 1986 que ⁷ « les mathématiques appliquées et les mathématiques pures sont plus étroitement liées aujourd'hui qu'elles ne l'ont jamais été au cours des soixante-dix dernières années ». C'est dans cet esprit que Lax a travaillé.

Dans cette courte présentation non technique, nous nous concentrerons sur deux thèmes, tous deux liés à la théorie des équations aux dérivées partielles. Nous aborderons ici les contributions de Lax où les aspects appliqués sont dominants et ont des conséquences importantes pour notre société moderne. Ainsi, nous n'aborderons malheureusement pas ses contributions fondamentales à l'analyse classique et à la théorie de la diffusion, en particulier le développement de la magnifique théorie de la diffusion de Lax-Phillips.

Le premier thème abordé est la théorie des **ondes de choc**. Les ondes de choc apparaissent dans de nombreux phénomènes de la vie quotidienne. Les ondes de choc les plus faciles à expliquer sont celles qui proviennent d'avions qui se déplacent à des vitesses supersoniques ou celles qui proviennent d'explosions, mais les chocs apparaissent également dans des phénomènes impliquant des vitesses beaucoup plus faibles. L'écoulement d'hydrocarbures dans un milieu poreux ou, plus concrètement, l'écoulement de pétrole dans un gisement de pétrole, présente un intérêt particulier. Il est bien connu que le pétrole et l'eau ne

6. Œuvres complètes de John von Neumann, vol. V, 1963, p. 1–32.

7. *The Mathematical Intelligencer* 8 (1986) 14–17.

se mélangent pas. L'interface entre les zones contenant du pétrole et les zones contenant de l'eau forme ce qui est défini mathématiquement comme un choc. La dynamique des chocs est essentielle pour l'exploitation des hydrocarbures des gisements pétroliers. Même dans les phénomènes quotidiens tels que les embouteillages sur les routes fortement encombrées, nous ressentons des ondes de choc lorsqu'il y a une accumulation de voitures. Les chocs ne proviennent pas de collisions entre voitures, mais plutôt d'un changement rapide de la densité des voitures.

Le deuxième thème est issu de la théorie des solitons. La théorie des solitons a une histoire longue et complexe, mais elle est aujourd'hui au cœur des mathématiques pures et appliquées, avec des conséquences considérables dans plusieurs domaines de la technologie. La théorie trouve son origine dans une partie obscure de la dynamique des fluides. Cependant, la découverte de la formulation de ces problèmes à l'aide de paires de Lax a permis de mettre au jour des liens nouveaux et surprenants entre plusieurs domaines mathématiques différents. En outre, la théorie des solitons trouve des applications dans plusieurs domaines de la physique, par exemple dans la théorie quantique des champs et la physique du solide, ainsi que dans la modélisation des systèmes biologiques. Enfin, les solitons sont utilisés pour la communication dans les fibres optiques.

Avant de revenir à une discussion plus détaillée sur ces thèmes, nous devons expliquer ce qu'est une équation différentielle.

Qu'est-ce qu'une équation différentielle ?

Pour discuter des équations différentielles, nous devons d'abord introduire la dérivée. Prenons l'exemple d'une situation où vous conduisez votre voiture. Sur le compteur kilométrique, vous pouvez mesurer la distance qui vous sépare de votre point de départ, ce qui permet de déterminer votre position. La distance que vous parcourez par unité de temps s'appelle la vitesse, et c'est bien sûr ce qui est affiché sur le compteur de vitesse. Mathématiquement, la vitesse n'est rien d'autre que la dérivée de la position. En termes mathématiques, x représente la position de la voiture, mesurée le long de la route à partir d'un point de départ. Elle dépend du temps t ; on écrit donc $x = x(t)$. La vitesse, notée v et qui dépend du temps, $v = v(t)$, est le changement de position pour un petit intervalle de temps. Mathématiquement, c'est la dérivée⁸

8. Pour être plus précis, si l'on passe de la position $x(t)$ à l'instant t à la position $x(t+s)$ pendant la durée s , la vitesse à l'instant t est approximativement $(x(t+s) -$

de x , notée $x'(t)$. Ainsi $v(t) = x'(t)$.

Si un passager de la voiture note la vitesse à chaque instant, il devrait être possible de calculer la position de la voiture à chaque instant si nous connaissons l'heure et le lieu où le voyage a commencé. Plus précisément, si nous connaissons le point de départ x_0 (et que nous synchronisons nos horloges pour commencer à l'instant $t = 0$), de sorte que $x(0) = x_0$, et que nous connaissons $v(t)$ pour tout t , nous devrions être en mesure de calculer la position x en fonction du temps, c'est-à-dire de déterminer $x = x(t)$. Pour résoudre ce problème, il faut résoudre une équation différentielle, à savoir $x'(t) = v(t)$.

Les équations différentielles ne sont rien d'autre que des équations qui impliquent des dérivées. Vous pouvez penser que nous faisons tout un plat d'un petit problème. Cependant, il s'avère que toutes les lois fondamentales de la nature peuvent être exprimées sous forme d'équations différentielles, comme le montre la liste ci-dessous :

- la gravitation (loi de Newton) ;
- la mécanique quantique (équation de Schrödinger) ;
- l'électromagnétisme (équations de Maxwell) ;
- la relativité (équation d'Einstein) ;
- la dynamique des gaz et des fluides (équations de Navier-Stokes).

Le mouvement des planètes, les ordinateurs, la lumière électrique, le fonctionnement du GPS (un assistant de navigation) et les changements météorologiques peuvent tous être décrits par des équations différentielles.

Prenons un exemple plus compliqué que la position et la vitesse des voitures. Considérons la chaleur dans la pièce où vous êtes assis. En chaque point (x, y, z) de l'espace et du temps t , soit $T = T(x, y, z, t)$ la température. En supposant que la chaleur circule des zones chaudes vers les zones froides proportionnellement à la différence de température, que la chaleur ne disparaît pas (ce qui signifie que la pièce est complètement isolée de l'environnement) et qu'il n'y a pas de sources de chaleur, on peut établir que la distribution de la température est déterminée par l'équation de la chaleur

$$T_t = T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}.$$

Ici, T_t désigne la dérivée de la température par rapport à la variable t , tandis que T_{xx} désigne la dérivée de la dérivée, toutes deux par rap-

$x(t)/s$. L'approximation s'améliore au fur et à mesure que l'intervalle de temps s est réduit. Mathématiquement, la vitesse est égale à la limite de $(x(t+s) - x(t))/s$ lorsque s tend vers zéro.

port à la variable spatiale x , et de même pour les autres termes. Même les problèmes simples donnent lieu à des équations différentielles difficiles ! En supposant que nous connaissions la distribution initiale de la température, c'est-à-dire que nous connaissions $T = T(x, y, z, t)$ pour $t = 0$, notre intuition nous dit que la température devrait être déterminée à tous les moments ultérieurs. C'est ce qu'on appelle un problème avec **condition initiale**. Le défi mathématique consiste à démontrer cette affirmation et à décrire une méthode qui permet de calculer la température réelle. D'une manière générale, tel est le problème, mais des équations beaucoup plus difficiles que l'équation de la chaleur constituent le cœur de la contribution de Lax aux équations différentielles.

Idéalement, lorsqu'on se donne une équation différentielle, on voudrait que le problème soit **bien posé**, dans le sens où

- le problème doit avoir au moins une solution (existence de la solution) ;
- le problème ne doit pas avoir plus d'une solution (unicité de la solution) ;
- la solution doit être stable par rapport aux perturbations (stabilité).

Les deux premières conditions indiquent que le problème doit avoir une solution unique ; la troisième condition stipule qu'un petit changement dans les données initiales doit entraîner un petit changement dans la solution. Malheureusement, les équations différentielles ne possèdent généralement pas de solutions données par des formules ; nous devons donc ajouter à notre « liste de souhaits » que nous devrions être en mesure de trouver un moyen de calculer la solution. Les problèmes sont souvent très complexes et nécessitent des ordinateurs rapides pour déterminer une solution approchée ou numérique. Les solutions des équations différentielles peuvent être très compliquées et il n'existe pas de théorie mathématique unifiée qui couvre toutes les équations différentielles ou la plupart d'entre elles. La plupart des équations différentielles intéressantes sont non linéaires, la somme de deux solutions n'étant pas une solution, ce qui complique encore les choses. Les différentes classes d'équations différentielles requièrent des méthodes assez différentes, mais même à ce niveau très général, Lax a contribué à deux résultats très utiles qui sont décrits dans tous les ouvrages sur le sujet. Le théorème de Lax-Milgram énonce une condition selon laquelle les équations aux dérivées partielles qui peuvent être décrites par un problème variationnel abstrait possèdent une solution unique. Le théorème de Lax stipule que pour un problème linéaire avec condition initiale bien

posé, tout schéma numérique **consistant** est **stable** si et seulement si elle est convergente. Le théorème s'applique par exemple à l'équation de la chaleur.

Il convient ici de faire une brève digression sur l'interaction entre les mathématiques et les ordinateurs. Peter Lax a toujours été un fervent défenseur de l'importance des ordinateurs pour les mathématiques et vice versa⁹ : « L'impact [des ordinateurs à grande vitesse] sur les mathématiques, tant appliquées que pures, est comparable au rôle des télescopes en astronomie et des microscopes en biologie. » La construction logique des ordinateurs et de leurs systèmes d'exploitation est mathématique par nature. Mais les ordinateurs servent également de laboratoires pour les mathématiciens, où vous pouvez tester vos idées. De nouvelles relations mathématiques peuvent être découvertes, et vos hypothèses et suppositions peuvent être réfutées ou rendues plus probables en utilisant les ordinateurs. Lax a donné l'exemple du grand mathématicien **G. D. Birkhoff** qui a passé sa vie à essayer de démontrer l'**hypothèse ergodique**. Si Birkhoff avait eu accès à un ordinateur et avait testé l'hypothèse sur celui-ci, il aurait vu qu'elle ne peut pas être vraie en général. D'un point de vue plus technique, les problèmes de la technologie moderne tels que la simulation de systèmes aussi complexes que les avions, les plates-formes pétrolières ou la météorologie nécessitent non seulement des ordinateurs très puissants, mais aussi le développement d'algorithmes mathématiques nouveaux et plus performants pour leur résolution. C'est un fait que, dans les grandes lignes, le développement d'ordinateurs à grande vitesse (le matériel) et le développement de nouvelles techniques numériques (les logiciels) ont contribué à parts égales à la performance totale que nous observons dans les simulations. Peter Lax lui-même a contribué de manière pénétrante au développement de nouvelles méthodes mathématiques qui nous ont permis de comprendre et de simuler des phénomènes importants.

Les ondes de choc

En 1859, le brillant mathématicien allemand **Bernhard Riemann** (1826-1866) s'est penché sur le problème suivant : si vous avez deux gaz à des pressions différentes dans un **cylindre** séparé par une fine membrane, que se passe-t-il si vous retirez la membrane ? Ce problème, appelé par la suite **problème de Riemann**, s'avère être une question très complexe. Le comportement des gaz est bien modélisé par les **équations**

9. *SIAM Review* 31 (1989) 533–541.

d'Euler :¹⁰

$$\begin{aligned}\rho_t + (\rho v)_x &= 0, \\ (\rho v)_t + (\rho v^2 + P)_x &= 0, \\ E_t + (v(E + P))_x &= 0, \\ P &= P(\rho),\end{aligned}$$

où ρ , v , P et E désignent respectivement la densité, la vitesse, la pression et l'énergie du gaz. Il s'agit d'un système d'équations vraiment complexe qui n'a toujours pas été résolu dans le cas général à ce jour



Fig. 3 – *Riemann*

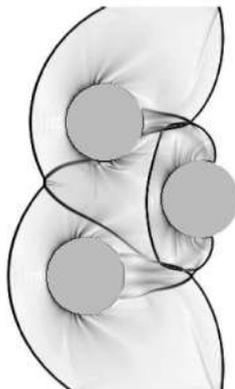


Fig. 4 – *Écoulement de gaz à travers trois cylindres.*

10. Riemann a étudié le problème plus simple où la troisième équation, celle pour l'énergie, est ignorée. Les indices indiquent les dérivées par rapport à la variable donnée.

Les équations d'Euler constituent un cas particulier d'une classe d'équations différentielles appelées **lois de conservation hyperboliques**. Les solutions de ces équations sont très compliquées, comme le montrent les illustrations. Ces équations sont fondamentales dans plusieurs domaines des sciences appliquées, car elles expriment la conservation d'une quantité. Les exemples abondent, car il y a conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie dans les systèmes isolés. Outre le mouvement des gaz, les applications comprennent l'écoulement du pétrole dans un gisement pétrolier. Un exemple moins évident est la dynamique des voitures sur une route très encombrée sans sortie ni entrée ; ici, la quantité conservée est le nombre de voitures.

Le problème central des lois de conservation hyperboliques, qu'elles décrivent la circulation routière ou l'écoulement du pétrole dans un gisement, est que la solution présente des singularités, ou discontinuités, appelées chocs. Les chocs correspondent à des transitions très rapides de densité ou de pression. Les méthodes numériques ont des difficultés à gérer ces chocs ; leurs propriétés mathématiques sont très compliquées. Les modèles mathématiques permettent plus d'une solution. Le principe de sélection, connu sous le nom de condition d'entropie, pour déterminer la seule vraie solution physique est très compliqué. En effet, à ce stade, Riemann s'est trompé et a choisi la mauvaise solution. La vitesse du choc a été déterminée par l'ingénieur écossais **Rankine** et le mathématicien français **Hugoniot**, mais c'est Peter Lax qui en 1957 a élaboré un critère simple, aujourd'hui appelé condition d'entropie de Lax, qui permet de sélectionner la véritable solution physique pour les systèmes généraux de lois de conservation hyperboliques. Les chocs admissibles sont appelés chocs de Lax. La solution du problème de Riemann est aujourd'hui appelée théorème de Lax et constitue une pierre angulaire de la théorie des lois de conservation hyperboliques. Sa solution a stimulé des recherches approfondies sur différentes conditions d'entropie applicables à d'autres systèmes. En particulier, le résultat fondamental d'existence pour le problème général avec condition initiale posé par Glimm utilise le théorème de Lax comme élément de base.

Une fois que nous avons décidé d'un principe de sélection, il nous reste à calculer la solution. Peter Lax a présenté dans ce cas deux des schémas numériques standard pour résoudre les lois de conservation hyperboliques, à savoir le schéma dit de Lax-Friedrichs et le schéma de Lax-Wendroff. Ces schémas servent de tests de référence pour d'autres techniques numériques et ont servi de point de départ à des analyses théoriques. En effet, le schéma de Lax-Friedrichs a été utilisé par la

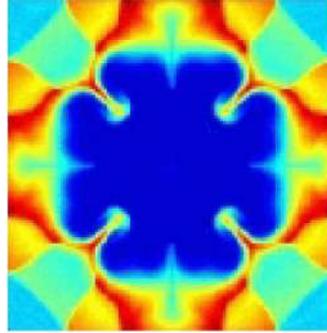


Fig. 5 – *La pression d'un gaz qui explose dans une boîte.*

mathématicienne russe **Oleinik** dans sa démonstration constructive de l'existence et de l'unicité des solutions de l'équation de Burgers non visqueuse. Un autre résultat très utile est le théorème de Lax-Wendroff : si un schéma numérique pour une loi de conservation hyperbolique non linéaire converge vers une limite, alors nous savons que la limite est au moins une solution de l'équation. Avec Glimm, Lax a démontré des résultats profonds concernant la décroissance asymptotique des solutions des systèmes de lois de conservation hyperboliques.

Les résultats de Peter Lax dans la théorie des lois de conservation hyperboliques sont révolutionnaires. Ils ont permis de résoudre d'anciens problèmes et ont stimulé de nouvelles recherches dans ce domaine.

Les solitons

La théorie des solitons remonte au mois d'août 1834, lorsque l'ingénieur écossais **John Scott Russell** (1808-1882) fit l'observation suivante : se promenant à cheval le long d'un canal près d'Édimbourg, il observa un bateau tiré par des chevaux le long du canal. Lorsque le bateau s'arrêta, une vague isolée jaillit de la proue et Scott Russell put la suivre sur plus d'un kilomètre. Contrairement à ce que l'on pourrait penser, l'onde ne se dispersa pas et sa forme resta inchangée. Complètement fasciné par ce phénomène, que de nombreuses personnes ont dû observer avant lui sans en noter la particularité, Scott Russell a étudié pendant plusieurs années ces ondes qu'il a appelées « ondes solitaires ».

Ses observations étaient controversées. Plusieurs scientifiques éminents, tels qu'**Airy** et **Stokes**, étaient sceptiques quant à ses observations. Cependant, lorsque les mathématiciens néerlandais **Korteweg** et **De Vries** ont élaboré en 1895 un modèle pour les vagues qui pouvait



J. Scott Russell



*Une reconstitution moderne
de l'onde solitaire.*

effectivement reproduire ce comportement, les ondes solitaires ont été reconnues comme un phénomène naturel réel, bien que plutôt spécialisé. Le modèle qu'ils ont élaboré est aujourd'hui appelé « **équation de Korteweg-de Vries** » ou KdV en abrégé. Pour faire court, l'équation de KdV est tombée dans l'oubli pendant longtemps. Ce n'est qu'après un regain d'intérêt de la part de Zabusky et Kruskal en 1965 que l'intérêt pour l'équation de KdV a été ravivé. Grâce à leur analyse à l'aide de simulations numériques, ils ont découvert que les solutions de l'équation de KdV interagissaient comme des particules : elles peuvent entrer en collision et interagir sans changer de forme. Zabusky et Kruskal ont baptisé ces solutions « solitons », car elles avaient des propriétés semblables à celles des particules, comme les électrons, les protons, etc. Il était désormais clair que l'équation possédait une structure profonde et qu'elle avait un potentiel d'application dans plusieurs domaines. Dans l'article historique de 1967, Gardner, **Greene**, Kruskal et **Miura** ont découvert une méthode ingénieuse, appelée transformée de diffusion inverse, pour résoudre l'équation de KdV. Bien que la méthode soit clairement un tour de force, elle était très bien adaptée aux particularités de l'équation de KdV. Plusieurs « miracles » ont permis à la méthode de fonctionner. Dans le cadre de leur méthode, ils ont étudié une équation linéaire associée, pour laquelle plusieurs quantités importantes restent inchangées, ou invariantes, au cours de l'évolution temporelle. C'est là qu'est intervenu Peter Lax. Il s'est concentré sur les propriétés d'invariance des problèmes linéaires et a décrit une paire d'opérateurs, aujourd'hui appelée paire de Lax, qui a révélé le mécanisme interne de la transformée de diffusion inverse. Lorsque la paire de Lax satisfait à la relation de Lax, elle est en effet équivalente à l'équa-

tion de KdV. Pour préciser ce lien, commençons par écrire l'équation de KdV¹¹ :

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

La paire de Lax (L, P) est donnée par les opérateurs¹²

$$L = -\partial_x^2 + u, \quad P = -4\partial_x^3 + 3u\partial_x + 3u_x,$$

avec la propriété que la relation de Lax¹³

$$L_t - (PL - LP) = u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

soit vérifiée. La paire de Lax est construite de telle sorte que l'opérateur différentiel à gauche, qui est a priori un opérateur différentiel compliqué, se réduise à l'équation de KdV. Les équations ayant des propriétés semblables à celles de l'équation de KdV sont dites complètement intégrables.

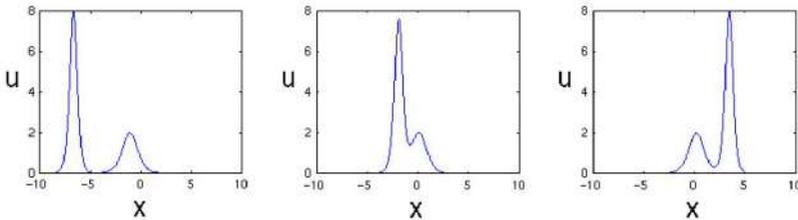


FIG. 6 – Deux solitons, illustrés à trois moments différents. Le grand soliton dépasse le petit soliton. Leurs formes sont conservées.

Avec cette révélation profonde et surprenante, il était clair que la transformée de diffusion inverse n'était pas limitée à l'équation de KdV, et qu'il fallait maintenant étudier les paires de Lax pour d'autres

11. La variable u correspond à la distance entre la surface de l'eau et le fond dans l'observation originale de Scott Russell.

12. L et P sont des opérateurs, c'est-à-dire des fonctions dont les arguments sont à leur tour des fonctions. L'opérateur ∂_x^n donne la dérivée n -ième d'une fonction par rapport à la variable x .

13. La méthode de calcul est la suivante. L'invariance temporelle signifie qu'il existe un opérateur unitaire $U = U(t)$ tel que $U^{-1}LU$ soit indépendant du temps, c'est-à-dire que sa dérivée par rapport à t soit nulle. En postulant que U vérifie l'équation différentielle du premier ordre $U_t = PU$ pour un opérateur P , un petit calcul montre que la relation de Lax est vérifiée.

équations différentielles de la **physique mathématique**. Avec la représentation de courbure nulle de Zakharov et Chabat, plusieurs équations importantes de la physique mathématique se sont soudain révélées complètement intégrables, par exemple l'**équation de sinus-Gordon**, l'**équation de Schrödinger non linéaire**, le modèle de Thirring massif, les **équations de Boussinesq**, l'**équation de Kadomtsev-Petviachvili** et le **réseau de Toda**, pour n'en citer que quelques-unes.

Les propriétés particulières de ces équations ont eu d'immenses conséquences dans plusieurs domaines des mathématiques et de la physique, ainsi que dans plusieurs domaines de la technologie. Un exemple peut être mentionné ici. Des expériences ont été menées sur l'utilisation des solitons pour la communication à grande vitesse dans les fibres optiques. Le signal numérique est codé à l'aide de « uns » et de « zéros ». Les « uns » sont représentés par des solitons. Une propriété essentielle des solitons est qu'ils sont exceptionnellement stables sur de très longues distances. Cela offre la possibilité d'augmenter considérablement la capacité des communications qui utilisent des fibres optiques. En outre, la théorie des solitons a révélé de nouvelles relations, jusqu'alors inconnues, entre diverses branches des mathématiques.

Épilogue. Lax se considère à la fois comme un mathématicien pur et comme un mathématicien appliqué. Ses conseils aux jeunes mathématiciens sont résumés ainsi¹⁴ : « Je recommande vivement à tous les jeunes mathématiciens de s'essayer à une branche des mathématiques appliquées. C'est une mine d'or de problèmes profonds dont les solutions attendent des percées conceptuelles et techniques. Elles offrent une énorme variété, qui convient à tous les styles. Elles donnent aux mathématiciens une chance de faire partie de l'entreprise scientifique et technologique au sens large. Bonne chasse ! »

Remerciements. Les portraits de Riemann et de Scott Russell proviennent des archives MacTutor d'histoire des mathématiques. Les simulations ont été réalisées par K.-A. Lie (SINTEF) et X. Raynaud (Université norvégienne de sciences et de technologie).

14. *SIAM Review* 31 (1989) 533–541.

Carleson (2006)

« pour ses contributions profondes et déterminantes à l'analyse harmonique et à la théorie des systèmes dynamiques lisses ».

En 1807, le mathématicien, ingénieur et égyptologue **Joseph Fourier** a fait une découverte révolutionnaire : nombre de phénomènes, allant des profils typiques qui décrivent la propagation de la chaleur à travers une barre de métal aux vibrations des cordes de violon, peuvent être vus comme la somme d'ondes simples appelées sinus et cosinus. De telles sommes sont aujourd'hui appelées **séries de Fourier**. L'analyse harmonique est la branche des mathématiques qui étudie ces séries et d'autres objets similaires.

Au cours des 150 ans qui ont suivi la découverte de Fourier, aucune formulation ou justification adéquate n'a été trouvée à son affirmation selon laquelle toute fonction est égale à la somme de sa série de Fourier. Avec le recul du temps, cette affirmation quelque peu vague doit être interprétée comme concernant tout type de fonction dont il est « possible de tracer la courbe » ou plus précisément toute fonction continue. Malgré les contributions de plusieurs mathématiciens, le problème était resté ouvert.

En 1913, il fut formalisé par le mathématicien russe **Louzine** sous la forme de ce qui sera plus tard connu comme la conjecture de Louzine. Un résultat négatif célèbre de **Kolmogorov** en 1926, associé à l'absence de progrès, incita les experts à croire que quelqu'un parviendrait tôt ou tard à construire une fonction continue dont la somme de sa série de Fourier ne donnerait nulle part la valeur de la fonction. En 1966, à la surprise du monde des mathématiciens, **Carleson** est parvenu à sortir de cette impasse qui durait depuis des décennies en démontrant la conjecture de Louzine, selon laquelle toute fonction de **carré intégrable**, et en particulier toute fonction continue, est égale à la somme de sa série de Fourier « **presque partout** ».

La démonstration de ce résultat était si complexe que pendant plus de trente ans, elle resta pour l'essentiel à l'écart du reste de l'analyse harmonique. Ce n'est qu'au cours des dix dernières années que les mathématiciens ont compris la théorie générale des opérateurs dans

laquelle s'applique ce théorème, et ont commencé à utiliser ses idées percutantes dans leur propre travail.

Carleson a apporté plusieurs autres contributions fondamentales à l'analyse harmonique, à l'**analyse complexe**, aux **applications quasi-conformes** et aux systèmes dynamiques. Une des plus fameuses est sa solution du célèbre problème de la couronne, appelé ainsi parce qu'il étudie les structures qui deviennent apparentes « autour » d'un disque quand le disque lui-même est occulté, par analogie poétique avec la couronne du Soleil vue pendant une éclipse. Dans ce travail, il a introduit ce qui est depuis connu sous le nom de « **mesures de Carleson** », aujourd'hui un outil fondamental de l'analyse harmonique comme de l'analyse complexe.

L'influence de l'œuvre originale de Carleson en analyse complexe et harmonique ne se limite pas à cela. Le théorème de Carleson-Sjölin sur les multiplicateurs de Fourier est par exemple devenu un outil standard dans l'étude du « **problème de Kakeya** », dont le prototype est le problème du « retournement d'une aiguille » : comment retourner une aiguille à 180 degrés dans le plan sur laquelle elle est posée, tout en balayant une **aire** aussi petite que possible ? Bien que le problème de Kakeya ait à l'origine été conçu comme un jeu, la description de l'aire balayée dans le cas général s'avère contenir des indices importants et féconds sur la structure de l'espace euclidien.

Les systèmes dynamiques sont des modèles mathématiques qui tentent de décrire le comportement temporel de grandes classes de phénomènes, comme ceux qui sont observés en météorologie, sur les marchés financiers et dans de nombreux systèmes biologiques, de l'épidémiologie aux fluctuations constatées dans les populations de poissons. Les systèmes dynamiques même les plus simples peuvent être mathématiquement d'une complexité surprenante. Avec Benedicks, Carleson a étudié l'application de Hénon, un **système dynamique** initialement proposé en 1976 par l'astronome **Michel Hénon**, un système simple qui montre la complexité de la dynamique météorologique et des turbulences. On considère en général que ce système a un « **attracteur étrange** », dessiné avec d'admirables détails par les outils d'informatique graphique, mais mal compris sur le plan mathématique. Par un tour de force impressionnant, Benedicks et Carleson ont fourni en 1991 la première démonstration de l'existence de cet attracteur étrange. Cette percée a ouvert la voie aux études méthodiques s'intéressant à cette classe de systèmes dynamiques.

L'œuvre de Carleson a modifié à tout jamais notre conception

de l'analyse. Il n'a pas seulement trouvé la démonstration de théorèmes particulièrement difficiles. Les méthodes qu'il a inventées pour les démontrer se sont avérées être aussi importantes que les théorèmes proprement dits. Son style inimitable se caractérise par une connaissance approfondie de la géométrie, associée à une maîtrise étonnante de la complexité divergente des démonstrations.

Carleson est né le 18 mars 1928 à Stockholm. Il est toujours à l'avant-garde. Il ne concentre ses efforts que sur les problèmes les plus difficiles et les plus profonds. Une fois ceux-ci résolus, il laisse à d'autres le soin d'envahir le royaume qu'il a découvert et s'aventure dans des domaines scientifiques encore plus sauvages et plus reculés.

L'impact des idées et de l'action de Lennart Carleson ne se limite pas à son oeuvre mathématique. Il a joué un rôle important dans la vulgarisation des mathématiques en Suède. Il est l'auteur du livre *Mathématiques pour notre temps*, et s'est toujours intéressé à l'enseignement des mathématiques.

Carleson a dirigé les thèses de doctorat de 26 étudiants, dont beaucoup sont devenus professeurs d'université en Suède ou ailleurs. En tant que directeur de l'[institut Mittag-Leffler](#) près de Stockholm entre 1968 et 1984, il a réalisé la vision initiale de [Mittag-Leffler](#) et bâti cette institution, l'amenant à la pointe de la recherche mathématique internationale. Il a aussi insisté tout particulièrement sur le rôle de l'institut pour aider les jeunes mathématiciens, une tradition qui se poursuit aujourd'hui.

Au poste de président (de 1978 à 1982) de l'[Union mathématique internationale](#), Carleson a déployé des efforts considérables pour que la République populaire de Chine y soit représentée. Il est aussi parvenu à convaincre l'Union de prendre en compte les contributions de l'informatique aux mathématiques, et a participé à la création du [prix Nevanlinna](#), qui récompense les jeunes spécialistes de l'informatique théorique. En tant que président du comité scientifique du 4^e [Congrès européen de mathématiques](#) en 2004, il a initié les conférences où des scientifiques renommés discutent des aspects des mathématiques les plus pertinents pour la science et la technologie.

Lennart Carleson est un scientifique exceptionnel, champion d'une large vision des mathématiques et de leur rôle dans le monde.

PRÉSENTATION VULGARISÉE DES RÉSULTATS DE CARLESON (par Arne B. Sletsjøe)

Convergence des séries de Fourier

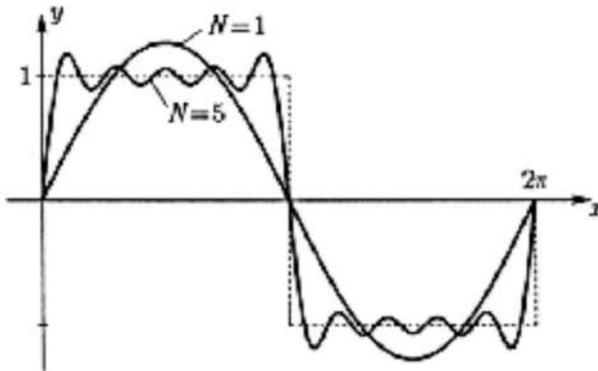
Le théorème de convergence de Carleson pour la série de Fourier d'une fonction de carré intégrable peut être décrit à l'aide d'ondes sonores. Nous pouvons identifier une fonction à un son, dans la mesure où le graphe de la fonction décrit les vibrations d'une membrane. Une fonction complexe produira normalement un son assez bruyant, alors qu'une fonction lisse produira un son clair comme une cloche, comme le son d'un diapason.

Dans ce contexte, le son des instruments de musique peut être représenté comme des compositions particulières de ces ondes de diapason pures et lisses, connues sous le nom de vibrations harmoniques dans la terminologie mathématique. Les motifs harmoniques des instruments, ou leurs images sonores individuelles, sont des sommes caractéristiques de vibrations harmoniques pures dont les longueurs d'onde sont des multiples entiers d'une longueur d'onde fondamentale. Certains instruments à vent ont relativement peu d'harmoniques marquées, alors que le violon par exemple se distingue spécifiquement par sa grande abondance d'harmoniques.

Le problème de Fourier peut être formulé dans ce contexte ainsi : un orchestre, si possible avec un nombre infini de petits instruments pris au hasard, peut-il jouer tous les sons imaginables ?

Avec un degré d'approximation relativement élevé, on peut dire que Carleson, dans son travail de 1966, répond par l'affirmative à cette question et qu'il fournit une démonstration mathématique rigoureuse de son affirmation.

La figure donne un aperçu de la manière dont ce processus d'approximation se déroule. Dans ce cas, nous partons d'une fonction, illustrée par la ligne pointillée, qui a une valeur égale à 1 dans l'intervalle de 0 à π et à -1 entre π et 2π . La première approximation est une vibration harmonique pure, désignée par $N = 1$. Nous voyons que cette approximation n'est pas très bonne. Si nous incluons 5 termes, dessinés sous la forme de la courbe $N = 5$, nous voyons que l'approximation devient bien meilleure. Nous pouvons continuer ainsi. Plus nous incluons de termes, plus la nouvelle courbe ressemblera à la courbe originale de la fonction en escalier.



La formule précise pour la courbe $N = 5$ dans cet exemple est

$$y = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} \right).$$

On peut facilement imaginer comment continuer l'approximation avec de plus en plus de termes. Un point intéressant avec cette courbe particulière se trouve dans les deux « cornes » qui se développent juste à droite de $x = 0$ et juste à gauche de $x = \pi$. Il s'avère que quel que soit le nombre de termes que nous utilisons, nous ne pourrions pas nous en débarrasser. Ils deviendront progressivement de plus en plus minces, mais ils ne disparaîtront pas. Ce phénomène s'appelle le **phénomène de Gibbs** et se retrouve dans un certain nombre d'exemples similaires.

Nous ne tenterons pas ici de démontrer le résultat de convergence de Carleson. Nous prenons au sérieux l'avertissement du comité Abel : « La démonstration de ce résultat est si difficile que, pendant plus de trente ans, elle est restée pratiquement isolée du reste de l'analyse harmonique. Ce n'est qu'au cours de la dernière décennie que les mathématiciens ont compris la théorie générale des opérateurs dans laquelle s'inscrit ce théorème et ont commencé à utiliser les idées puissantes de Carleson dans leurs propres travaux. »

Le théorème de la couronne et la mesure de Carleson

Dans la littérature mathématique, le mot théorème est synonyme de résultat principal, peut-être plus facile à comprendre. Ces résultats principaux ont tendance à porter des noms, comme le dernier théorème de Fermat, le théorème d'addition d'Abel, le **théorème fondamental de**

l'algèbre, ou des noms plus courants comme l'inégalité triangulaire, le théorème spectral ou le théorème de la couronne.



Le théorème de la couronne de Carleson fait référence à la couronne solaire, l'anneau de matière incandescente qui entoure le soleil et que l'on ne peut observer que lors de ses éclipses totales. Carleson n'a jamais été un expert de la vie intérieure (ou extérieure) du soleil, mais il a démontré un théorème difficile dont le nom s'en inspire. C'est le mathématicien japonais **Kakutani** qui, au début des années 1940, a émis une conjecture connue sous le nom de « problème de la couronne ». Une conjecture n'est pas la même chose qu'un théorème. Une conjecture n'a pas été démontrée ! C'est une astuce à laquelle les mathématiciens ont parfois recours. Dans certaines situations, ils sont convaincus qu'un résultat est correct, même s'ils ne parviennent pas à le démontrer. Tous les exemples le confirment et le résultat peut même être formellement démontré dans de nombreux cas particuliers. Mais les mathématiciens ne parviennent pas à trouver le raisonnement final qui est nécessaire pour déclarer que le résultat est démontré. Que font-ils alors ? Tout ranger dans un tiroir et essayer de l'oublier ? Non, ils émettent une conjecture qu'ils publient de la même manière qu'ils le feraient pour des résultats entièrement démontrés, puis ils l'appellent une conjecture. Avec de la chance, la postérité donnera à la conjecture le nom du conjectureur, même si quelqu'un d'autre parvient à démontrer le résultat.

Tel fut donc le sort du problème de la couronne, une conjecture à laquelle tout le monde croyait, mais que personne ne savait démontrer. De quoi s'agit-il ? Le problème de la couronne concerne certaines fonctions définies dans un disque circulaire. Le bord de ce disque est un cercle. Si ces fonctions se comportent correctement à l'intérieur du cercle, combien de boucles peuvent-elles alors « avoir » sur le cercle lui-même ? Le théorème de Carleson répond à cette question. Et l'analogie

avec la couronne? Le disque est le soleil, et ce qui se passe au bord, c'est-à-dire sur le cercle, correspond à la couronne.

Ce résultat de Carleson est également un exemple de la façon dont la solution d'un problème a eu un effet sur d'autres problèmes. Dans sa démonstration du problème de la couronne, Carleson a introduit une **mesure**. Dans ce contexte, une mesure est une façon d'attribuer un nombre positif à un ensemble donné. Par exemple, on peut définir une mesure en attribuant à un intervalle sa longueur, ou en attribuant à un ensemble dans un plan sa surface. Carleson avait besoin de mesurer la longueur de certaines courbes qu'il avait construites sur le disque circulaire et a introduit une mesure à cette fin. Cette mesure est passée à la postérité sous le nom de « mesure de Carleson » et s'est avérée particulièrement utile dans de nombreux domaines des mathématiques.

L'application de Hénon

Les travaux les plus récents que le comité a retenus dans sa décision de décerner le prix Abel à Lennart Carleson remontent à la période 1985-1991 et culminent dans l'article de Carleson et Benedicks de 1991, dans lequel ils démontrent que l'application de Hénon possède un attracteur étrange. Ces travaux s'inscrivent dans le domaine des systèmes dynamiques. Pour comprendre de quoi il s'agit, nous allons remonter à 1960, à l'institut de technologie du Massachusetts aux États-Unis, où le météorologue **Edward Lorenz** s'employait à créer de bons modèles météorologiques, comme les météorologues ont tendance à le faire. Lorenz disposait de ce que l'on appellerait aujourd'hui un ordinateur extrêmement primitif pour l'aider à effectuer les nombreux calculs nécessaires à la prévision du temps. En gros, les prévisions météorologiques modernes consistent à prendre en compte les lois physiques qui s'appliquent et les conditions initiales dont nous disposons pour le vent, l'humidité, la pression, etc. À partir de cette description, nous calculons la valeur de ces mêmes paramètres un peu plus tard, puis à nouveau un peu plus tard, etc., jusqu'à ce que nous obtenions une prévision du temps qu'il fera demain. Lorenz a dû simplifier l'ensemble du modèle pour le ramener à trois variables. Il a donné une valeur à chacune de ces trois variables et il a commencé à « faire tourner la machine », c'est-à-dire à effectuer des calculs répétés.

L'histoire raconte que Lorenz a essayé un jour de poursuivre un calcul qu'il avait commencée la veille. Il commença à peu près à la moitié du chemin parcouru, entra les chiffres correspondants et démarra

la machine. Au début, tout concordait avec ses observations de la veille, mais soudain les valeurs commencèrent à s'écarter des chiffres de la veille, d'abord légèrement, puis l'écart s'accéléra rapidement, de sorte que le modèle prédisait quelque chose de complètement différent de ce qu'il avait donné la veille. Comment cela pouvait-il se produire ? Les équations étaient les mêmes, le point de départ était le même, l'ordinateur était le même, et pourtant la réponse était différente ?

L'explication est qu'il ne s'agissait pas des mêmes valeurs. Lorenz avait arrondi la quatrième décimale lorsqu'il a commencé les calculs le deuxième jour. Cela signifie que les conditions initiales étaient légèrement différentes, mais une différence d'un dix millième pouvait-elle provoquer une telle catastrophe ? Nous tenons généralement pour acquis qu'une petite différence en entrée donne une petite différence à la sortie, mais ce n'était pas le cas ici. La raison en était que le processus était basé sur des répétitions où le résultat précédent devenait la prémisse suivante. Un petit écart, qui est légèrement amplifié à chaque étape, finit par conduire à l'inconnu après de nombreuses étapes. Lorenz avait découvert le phénomène connu sous le nom d'effet papillon en météorologie, à savoir qu'un simple battement d'ailes d'un papillon à Pékin au mois de mars peut faire prendre aux ouragans du mois d'août dans l'océan Atlantique une trajectoire complètement différente !

Nous laisserons de côté toutes les conséquences météorologiques et autres conséquences physiques de la découverte de Lorenz pour nous concentrer sur son contenu mathématique. En utilisant des ordinateurs puissants, il n'a pas été difficile de créer des illustrations du système de Lorenz, mais cela ne nous a pas donné une compréhension particulière de la structure mathématique. Il ne semblait pas que quelqu'un soit en mesure de parvenir à cette compréhension.

En 1976, l'astronome Michel Hénon a présenté une version simplifiée du système de Lorenz. Le système dynamique discret de Hénon comportait deux ingrédients importants. Il était beaucoup plus facile à calculer que le système de Lorenz et il possédait comme ce dernier un attracteur étrange. Le système de Hénon est décrit par une application T du plan dans lui-même :

$$T(x, y) = (1 + y - 1,4x^2, 0,3x)$$

(il est possible d'utiliser d'autres coefficients à la place de 1,4 et 0,3, mais ce sont ceux qui sont généralement utilisés dans les exemples). Selon cette formule, le point $(0, 0)$ est envoyé sur le point $(1, 0)$, le point $(1, 0)$ sur le point $(-0,4, 0,3)$, qui est lui-même envoyé sur le point

(1,076, -0,12), etc. Dans ce cas, nous nous retrouvons à l'intérieur de l'attracteur, la courbe qui est illustrée dans la figure 7. Il en va de même si l'on commence par le point (0, 0,2918), mais pas si l'on commence par (0, 0,2919). Dans ce dernier cas, nous irions rapidement vers l'infini. Ceci est facile à programmer dans une feuille de calcul. Saisissez les données suivantes dans les quatre carrés situés en haut à gauche de la feuille de calcul :

*	A	B
1	0	0
2	=1+B1-1,4*A1*A1	=0,3*A1

Copiez maintenant les champs A2 et B2 en dessous dans les colonnes A et B aussi loin que vous le souhaitez, pour 10 000 lignes si vous le souhaitez. Si nous sélectionnons maintenant tous les champs A1 :B10000 et imprimons le symbole graphique en haut à gauche de la feuille de calcul, si nous choisissons l'option XY et ensuite l'alternative sans aucune ligne de jonction, nous obtenons une représentation de l'**attracteur de Hénon**, à peu près comme dans la figure 7.

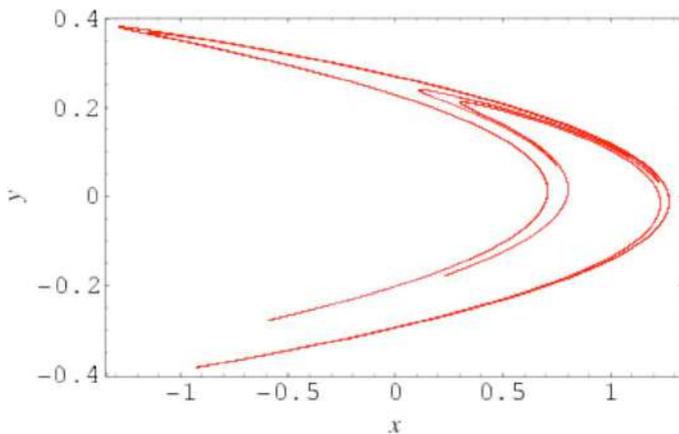


FIG. 7 – L'attracteur de Hénon.

Les points de cet ensemble sont répartis de manière apparemment non systématique : un ici, un là. Ce n'est que lorsque nous atteignons plusieurs milliers de points que nous commençons à voir les grands contours. Il s'avère que ce que l'on croit voir n'est pas tout à fait vrai. Si

l'on agrandit les lignes légèrement épaisses de l'attracteur, de nouveaux détails apparaissent progressivement : les lignes ne sont pas des lignes simples, mais des lignes multiples. Si nous continuons à agrandir, nous constatons que la même chose se répète, les lignes simples se divisent toujours en lignes simples encore plus petites. Nous constatons que l'attracteur a des propriétés **fractales**.

C'est là que se pose la question la plus difficile. Si nous effectuons 10 000 calculs de cette manière, ou si nous effectuons 10 000 000 de calculs, nous obtenons à peu près la même image. Plus de calculs ne feront que révéler davantage la structure fractale. Mais comment savoir si nous ne nous envolerons pas soudainement vers l'infini, comme c'est le cas après avoir effectué environ 35 itérations lorsque le point de départ est $(0, 0,291\ 807\ 922\ 563\ 607)$? S'agit-il vraiment d'un attracteur ?

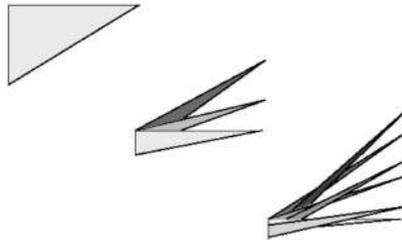
Carleson et Benedicks ont présenté une démonstration formelle que le monde est exactement comme nous le pensons, qu'un attracteur étrange existe. Rien d'imprévu ne se produira même si nous effectuons des milliards d'itérations. Une fois que nous sommes à l'intérieur de cet ensemble étrange, nous y restons. Le problème peut sembler plutôt artificiel et hermétique pour un non-mathématicien, mais il s'agit de mathématiques, et non de météorologie ou de physique. Il est donc impératif que nous sachions et que nous ne nous contentions pas de croire.

Le problème de l'aiguille de Kakeya

Le quatrième problème que le comité mentionne dans son communiqué n'est pas un problème pour lequel Carleson a fait une percée historique, comme ce fut le cas pour les trois problèmes ci-dessus. Cependant, en collaboration avec son étudiant Sjölin, Carleson a démontré un résultat qui s'est avéré important dans l'étude de ce problème et surtout de ses généralisations. La nature du problème étant assez facile à expliquer, nous en ferons une description ici.

Nous trempons une aiguille dans de l'encre et la posons sur une feuille de papier. Le problème consiste à faire tourner l'aiguille de 180 degrés sans la soulever de la feuille. Nous sommes autorisés à la pousser d'avant en arrière pendant que nous la faisons tourner, à peu près comme nous le faisons lorsque nous faisons pivoter une voiture sur une place de stationnement. La question est de savoir quelle sera la taille de la zone de la feuille colorée à l'encre lorsque nous aurons terminé, et en particulier s'il existe une limite inférieure à cette zone lorsque nous

choisissons une manière optimale d'effectuer la rotation. Ce problème est connu sous le nom de problème de l'aiguille de Kakeya, formulé par le mathématicien japonais **Kakeya** en 1917.



Supposons que l'aiguille ait une longueur de 1. Si nous faisons tourner l'aiguille autour de son point central, nous aurons coloré un espace d'une surface égale à $\pi \cdot 0,5^2 \approx 0,78$. Ceci n'est clairement pas optimal. Nous pouvons tout à fait réussir à tourner à l'intérieur d'un **triangle équilatéral** d'une hauteur de 1 et d'une aire approximativement égale à 0,58. Mieux encore serait une **hypocycloïde** (la courbe qui est tracée par un point sur une petite roue qui roule à l'intérieur d'une plus grande roue) avec un diamètre de 1. Elle a une aire de 0,39. Cependant, toutes ces réponses sont fausses. La bonne réponse est que la surface peut être aussi petite que l'on veut ! Le mathématicien russe **Besicovitch** l'a démontré en 1928. Son dispositif était constitué d'un grand nombre de triangles très longs et étroits, un peu comme les branches d'un sapin de Noël dans un dessin d'enfant. Il s'agit de faire de nombreux allers-retours en ne tournant qu'un peu à chaque fois.

L'intérêt actuel porte sur les généralisations de ce problème, et c'est là que le résultat de Carleson-Sjölin pour les **multiplicateurs de Fourier** est devenu un outil standard.

Varadhan (2007)

« pour ses contributions fondamentales à la **théorie des probabilités** et en particulier à la création d'une théorie unifiée des **grandes déviations** ».

La théorie des probabilités est un outil mathématique destiné à l'analyse de situations régies par le hasard. La **loi des grands nombres**, découverte par **Jacques Bernoulli** au XVIII^e siècle, montre que l'issue moyenne d'une longue série de tirages aléatoires (pile ou face) est généralement proche de la valeur attendue. L'inattendu peut cependant se produire et la question est de savoir comment. La théorie des grandes déviations étudie l'occurrence d'événements rares. Ce sujet a des applications concrètes dans des domaines aussi divers que la physique, la biologie, l'économie, la **statistique**, l'informatique et l'ingénierie.

La loi des grands nombres affirme que la probabilité d'une déviation tend vers zéro en dessous d'un niveau donné. Dans les applications pratiques, il est cependant crucial de savoir avec quelle rapidité elle tend vers zéro. Quelles sont par exemple les réserves de capitaux nécessaires à une compagnie d'assurances pour garder la probabilité d'un défaut de paiement en dessous d'un niveau acceptable? En analysant des « problèmes de ruine » des mathématiques pour les compagnies d'assurances, **Harald Cramér** a découvert en 1937 que les approximations standard fondées sur le **théorème central limite** (illustré par la courbe en cloche) sont en fait trompeuses. Il a ensuite déterminé les premières estimations précises des grandes déviations pour une **suite de variables aléatoires indépendantes**. Trente ans de plus s'écouleront avant que Varadhan ne découvre les principes généraux qui les régissent et ne commence à faire la preuve de leur impact impressionnant, qui débordent largement du cadre classique des tirages indépendants.

Avec son article « Probabilités asymptotiques et équations différentielles » paru en 1966 et avec sa surprenante solution du problème du polaron en théorie quantique des champs en 1969, **Varadhan** a commencé l'ébauche d'une nouvelle théorie des grandes déviations qui était bien plus qu'une amélioration quantitative des taux de convergence. Il a répondu à une question fondamentale : quel est le comportement qualitatif d'un système stochastique s'il dévie du comportement ergodique prédit par certaines lois des grands nombres, ou s'il se manifeste

comme une petite perturbation d'un système déterministe? La clé de la réponse est un **principe variationnel** puissant qui décrit le comportement inattendu en utilisant un nouveau modèle probabiliste minimisant une distance d'entropie adaptée à la mesure initiale de probabilité. Dans une série d'articles rédigés en coopération avec **Monroe D. Donsker** et explorant la hiérarchie des grandes déviations dans le contexte des **processus de Markov**, Varadhan a démontré la pertinence et la puissance de cette approche nouvelle. Une application frappante est leur solution d'une conjecture de **Mark Kac** concernant le comportement asymptotique d'un voisinage tubulaire de la trajectoire brownienne, appelé « saucisse de **Wiener** ».

La théorie des grandes déviations conçue par Varadhan est une méthode unifiée et efficace qui permet de clarifier une grande variété de phénomènes issus de systèmes stochastiques complexes, dans des domaines aussi divers que la théorie quantique des champs, la physique statistique, la dynamique des populations, l'économétrie et la finance, et la gestion de la circulation. Elle a aussi permis une expansion considérable de notre capacité à utiliser des ordinateurs pour simuler et analyser l'occurrence d'événements rares. Au cours des quatre dernières décennies, la théorie des grandes déviations est devenue une pierre angulaire de la théorie moderne des probabilités, pure et appliquée.

Varadhan a apporté des contributions déterminantes dans plusieurs domaines de la théorie des probabilités. Avec **Daniel W. Stroock**, il a conçu une méthode de **martingale** qui caractérise les processus de diffusion comme les solutions d'**équations différentielles stochastiques**. Cette nouvelle approche s'est avérée être une méthode extrêmement puissante de construction de nouveaux processus de Markov, comme les diffusions en dimension infinie qui apparaissent en génétique des populations.

Un autre thème majeur est l'analyse des limites hydrodynamiques qui décrivent le comportement macroscopique de très grands ensembles de particules en interaction. Une première percée fut réalisée en collaboration avec Maozheng Guo et **George C. Papanicolaou** sur les modèles gradients. Varadhan alla encore plus loin en montrant comment traiter les modèles non gradients, élargissant considérablement les retombées de la théorie. Ses idées ont aussi eu une forte influence sur l'analyse des **marches aléatoires** en milieu aléatoire. Son nom est maintenant attaché à la méthode permettant de « voir l'environnement depuis la particule en mouvement », une des rares outils généraux de ce domaine.

Les travaux de Varadhan ont un grand impact conceptuel et une

beauté éternelle. Ses idées ont eu une influence considérable et continueront encore longtemps à stimuler de nouvelles recherches.

Srinivasa S. R. Varadhan est né le 2 janvier 1940 à Madras (aujourd'hui Chennai) en Inde. Il est actuellement professeur à l'institut Courant des sciences mathématiques de l'université de New York.

Varadhan a passé sa licence en 1959 et sa maîtrise l'année suivante, les deux à l'université de Madras. En 1963, il a reçu son doctorat de l'**Institut indien de statistique** à Calcutta (Kolkata) avec pour directeur de thèse le célèbre statisticien indien **C. R. Rao**. On rapporte que lors de sa soutenance de thèse, Varadhan remarqua dans la pièce un visiteur qu'il ne connaissait pas et qui lui posa une série de questions pénétrantes. Après la soutenance, il découvrit qu'il s'agissait du grand mathématicien et probabiliste russe A. N. Kolmogorov. Le professeur Rao avait apparemment fixé la date de la soutenance en sachant que Kolmogorov serait alors en visite en Inde, afin de lui montrer son étudiant vedette. Kolmogorov ne fut pas déçu.

Varadhan a commencé sa carrière universitaire comme postdoctorant à l'institut Courant des sciences mathématiques (1963-1966), sur la recommandation enthousiaste de Monroe Donsker. C'est là qu'il a fait la rencontre de Daniel Stroock, qui est devenu un collègue proche et un coauteur.

Dans un article paru dans les *Notices* de la Société américaine de mathématiques, Stroock se rappelle ces années de jeunesse : « Varadhan, que tout le monde appelle Raghu, est venu de son Inde natale à l'automne 1963. Il est arrivé par l'avion à l'aéroport d'Idlewild et a pris le bus pour Manhattan. Sa destination était cette célèbre institution au nom pourtant modeste, l'institut Courant des sciences mathématiques, où il avait été pris comme postdoctorant ». Varadhan fut placé dans un des nombreux bureaux sans fenêtre du bâtiment de l'institut, qui avait jadis abrité une usine de chapeaux. Mais malgré ce décor somme toute fort modeste, « de ces bureaux sortirent une partie remarquablement importante des mathématiques de l'après-guerre qui ont fait, à juste titre, la fierté de l'Amérique », pour citer D. Stroock.

Varadhan est resté fidèle à l'institut Courant où il a occupé les postes de professeur assistant (1966-1968), professeur associé (1968-1972), puis professeur depuis 1972. Quand Stroock et lui ont reçu le prix Steele de la Société américaine de mathématiques en 1996, Varadhan n'a pas omis de mentionner que « l'institut Courant nous a donné un environnement intellectuel idéal, un encouragement actif et le soutien de nos collègues plus âgés, en particulier Louis Nirenberg et Monroe

Donsker ».

Varadhan doit avoir répondu aux grands espoirs placés en lui en tant que postdoctorant. En 1965, Louis Nirenberg a écrit à Monroe Donsker, lui recommandant d'engager Varadhan à un poste de l'institut Courant : « J'ai une idée vraiment très haute de Varadhan et lui prédis un avenir brillant. Il est très jeune et je pense qu'il est à bien des égards le meilleur choix que nous puissions faire au poste de professeur assistant en probabilité. »

Quinze ans plus tard, Varadhan a été nommé directeur de l'institut Courant (1980-1984), succédant à Peter Lax. Dans une lettre de recommandation adressée au président de l'université de New York, Lax a déclaré : « Nous pensons que maintenant que l'institut Courant est plein d'une énergie renouvelée et fait face à son avenir avec assurance, le moment est venu de transmettre le flambeau à une nouvelle génération. » Varadhan a donc succédé à Peter Lax au poste de directeur de l'institut Courant. Il est aujourd'hui devenu également lauréat du prix Abel. Varadhan a occupé une deuxième fois la direction de l'institut Courant de 1992 à 1994.

Varadhan a été professeur invité à l'université Stanford (1976-1977), à l'institut Mittag-Leffler (1972) et à l'Institut d'étude avancée (1991-1992). Il a été lauréat de la **bourse Sloan** (1970-1972) et de la **bourse Guggenheim** (1984-1985). Parmi ses prix et distinctions figurent le **prix Birkhoff** (1994), le prix Sokol décerné par l'université de New York (1995) et le prix Steele (1996). Il est aussi docteur *honoris causa* de l'université Pierre-et-Marie-Curie à Paris (2003) et de l'Institut indien de statistiques de Kolkata (2004). Il a été conférencier invité au **Congrès international des mathématiciens** en 1978 et en 1994 (conférence plénière).

Varadhan a été élu membre de l'Académie américaine des arts et des sciences (1988), de l'Académie mondiale des sciences (1988) et de l'Académie nationale des sciences des États-Unis (1995). Il a été élu membre de l'**Institut de statistique mathématique** (1991), de la Société royale de Londres (1998) et de l'Académie indienne des sciences (2004).

Srinivasa S. R. Varadhan est l'époux de Vasundra Varadhan, professeur à l'université de New York. Ils ont un fils, Ashok. Leur fils aîné, Gopal, fut l'une des victimes de l'attentat terroriste qui a frappé le 11 septembre les tours jumelles à New York.

LES TRAVAUX DE S. R. S VARADHAN
(par TOM LOUIS LINDSTRØM)

Srinivasa S. R. Varadhan est né à Madras (aujourd'hui Chennai) en Inde en 1940. Il a obtenu sa licence au collège de la Présidence en 1959 et son doctorat à l'Institut indien de statistique en 1963. Depuis 1963, il travaille à l'institut Courant des sciences mathématiques de l'université de New York. L'institut Courant, l'un des principaux centres mondiaux de mathématiques appliquées, est également l'institution d'origine du lauréat du prix Abel en 2005, Peter Lax.

Bien que son travail soit souvent motivé par des problèmes dans des domaines voisins tels que la physique mathématique et les équations aux dérivées partielles, Varadhan est avant tout un probabiliste. Historiquement, la théorie des probabilités est née d'une tentative de compréhension des jeux de hasard simples, souvent assortis de paris. Dans ces jeux, il existe un nombre fini de résultats possibles et la tâche consiste à trouver la probabilité de chacun d'entre eux. Bien que cela puisse paraître simple, ces problèmes requièrent souvent beaucoup d'ingéniosité. Cependant, le sujet s'est rapidement déplacé vers des questions plus importantes et plus difficiles. Ces problèmes sont souvent liés à ce qui se passe si l'on répète la même expérience encore et encore. Les lois mathématiques qui régissent ces expériences répétées sont souvent appelées lois limites, car elles décrivent ce qui se passe « à la limite » lorsque l'on effectue les expériences de plus en plus souvent. Nous sommes tous familiarisés avec deux de ces lois limites.

Pour décrire la première de ces lois, supposons que nous lançons une pièce de monnaie plusieurs fois. Si la pièce est équilibrée, on peut s'attendre à ce que la proportion de « face » se stabilise autour de $1/2$ au fur et à mesure que l'on lance la pièce. Il s'agit d'un exemple de la loi des grands nombres, qui stipule que si nous répétons l'expérience de plus en plus de fois, la proportion de « face » atteindra (avec une probabilité égale à un) exactement $1/2$. La figure 8 illustre ce phénomène. Nous avons effectué quatre suites de tirages à pile ou face et calculé la proportion de « face ». La figure en haut à gauche montre les résultats obtenus en lançant la pièce 50 fois. Les autres figures montrent les résultats lorsque nous lançons la pièce 100 fois, 200 fois et 1 000 fois. Nous constatons que la convergence est plutôt lente. Même lorsque nous lançons la pièce 1 000 fois, les résultats des tirages sont discernables.

Pour décrire l'autre loi limite que nous connaissons tous, supposons que nous mesurons la taille des soldats norvégiens (de sexe masculin).

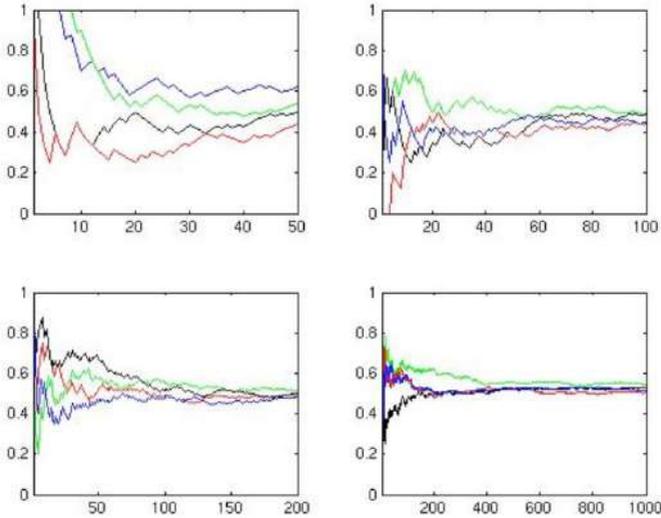


FIG. 8

Si nous faisons un diagramme du nombre de soldats de chaque taille (c'est-à-dire combien mesurent 175 cm, combien mesurent 176 cm, etc.), nous constatons rapidement que ce diagramme prend la forme d'une cloche et qu'au fur et à mesure que nous ajoutons les tailles d'un nombre croissant de soldats, la courbe devient de plus en plus régulière. La courbe est symétrique autour de son centre. Le point central correspond à la taille moyenne (environ 180 cm pour les soldats norvégiens de sexe masculin). Si nous faisons la même expérience avec des femmes soldats, nous obtiendrions le même type de courbe en forme de cloche, mais avec un centre différent (les femmes étant en moyenne moins grandes que les hommes) et une largeur légèrement différente. Ce que nous voyons ici est une conséquence du théorème central limite qui dit en substance que les propriétés statistiques qui dépendent d'un grand nombre de petits facteurs indépendants ont une distribution en forme de cloche. Ces distributions en forme de cloche sont appelées distributions normales. Les différentes distributions normales sont décrites par deux nombres, la **moyenne** et la **variance** : le premier indique où se trouve le centre et le second à quel point la courbe est large et aplatie. La figure 9 montre deux **lois normales** avec des centres et des largeurs différents, c'est-à-dire des moyennes et des variances différentes.

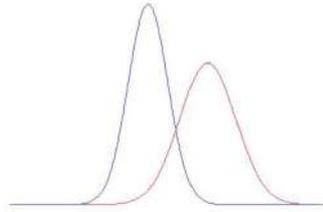


Fig. 9

Ces lois limites sont importantes parce qu'on s'intéresse dans la plupart des situations pratiques à de vastes collections de données statistiques. Si vous gérez une compagnie d'assurance automobile, vous ne vous intéressez pas à chaque voiture individuelle, mais vous vous intéressez au nombre d'accidents (et aux types d'accidents) dans lesquels toutes les voitures que vous assurez seront impliquées. Si vous construisez une plate-forme de forage pétrolier en mer du Nord et que vous vous inquiétez de l'impact des vagues de l'océan sur la construction, vous ne vous souciez pas de l'impact de chaque vague individuelle, mais de l'impact collectif de toutes les vagues. Si vous construisez un réseau téléphonique et que vous vous préoccupez de sa capacité, vous ne vous intéressez pas à chaque client, mais vous vous préoccupez de la probabilité qu'un trop grand nombre d'entre eux décrochent le téléphone en même temps pendant les heures de pointe.

Si vous examinez les problèmes mathématiques suggérés par les exemples ci-dessus, vous constaterez que nombre d'entre eux peuvent être résolus à l'aide de la loi des grands nombres et du théorème central limite. Mais pas tous ! Une question intéressante qu'ils ne peuvent pas résoudre est celle des « grandes déviations ». Pour expliquer ce problème, revenons au jeu de la pièce de monnaie. Si nous jouons de nombreuses fois à pile ou face, nous nous attendons à ce que la proportion de « face » soit d'environ $1/2$. Mais ce n'est pas forcément le cas. Même si vous jouez à pile ou face un millier de fois, il y a une faible probabilité (d'ailleurs extrêmement faible !) que la pièce donne « face » à chaque fois. Il existe une probabilité plus grande, mais toujours extrêmement faible, que la proportion de « face » soit (disons) de $3/4$ au lieu de $1/2$. L'art des grandes déviations consiste à calculer la probabilité de ces événements rares.

Les grandes déviations ont été étudiées pour la première fois par le grand statisticien et mathématicien des assurances suédois Harald Cramér (1893-1985) à la fin des années 1930. Il est facile de comprendre

pourquoi le problème a attiré l'attention d'une personne intéressée par les mathématiques de l'assurance. La prime que vous devez payer pour votre assurance automobile est basée sur les statistiques des années précédentes. La compagnie doit collecter suffisamment d'argent pour couvrir les sinistres des conducteurs malchanceux. Mais que se passe-t-il si l'année en cours est extrêmement mauvaise et que, pour une raison imprévue (peut-être simplement la malchance), le nombre de voitures accidentées est beaucoup plus élevé que les années précédentes ? Si l'entreprise doit déboursier plus d'argent qu'elle n'en a reçu, il est évident qu'elle sera en difficulté !

Il n'existe aucun moyen d'éviter totalement ce problème. Si la compagnie fixait une prime d'assurance si élevée qu'elle couvrirait le cas improbable (mais toujours possible) où toutes les voitures tomberaient en panne, l'assurance serait si chère que personne ne l'achèterait ! Une mauvaise année est une grande déviation. Ce que la compagnie doit faire, c'est calculer la probabilité de ces grandes déviations de différentes tailles, et essayer de trouver un niveau de risque raisonnable. Des problèmes similaires se posent dans les autres exemples ci-dessus. Si vous construisez une plate-forme pétrolière en mer du Nord, vous devez vous préoccuper de la probabilité de vagues extrêmement importantes et extrêmement rares (la « vague centennale »). Si vous mettez en place un réseau téléphonique, vous devez savoir quelle est la probabilité qu'il tombe occasionnellement en panne à cause d'une surcharge. Il peut être intéressant d'investir un peu plus dans l'augmentation de la capacité plutôt que d'avoir à faire face parfois à des clients en colère !

L'une des grandes contributions de Varadhan est d'avoir fait de la technique des grandes déviations un outil très puissant et polyvalent, avec des applications dans de nombreux domaines des mathématiques et des sciences connexes (une partie de ce travail a été réalisée en collaboration avec son collègue de l'institut Courant, Monroe Donsker). Le principe de grande déviation de Varadhan résume succinctement ce qui est nécessaire pour appliquer la technique avec succès. Il couvre un nombre surprenant de situations apparemment différentes. La théorie est un tour de force dans de nombreux domaines des mathématiques. Elle combine la théorie des probabilités avec l'analyse convexe, l'optimisation non linéaire, l'analyse fonctionnelle et les équations aux dérivées partielles. Il s'avère que la théorie des grandes déviations est beaucoup plus subtile que la théorie des lois limites classiques telles que la loi des grands nombres et le théorème central limite. Dans ces lois limites, l'important est que le même type d'événement soit compté

encore et encore. La nature de chaque événement individuel n'a que peu d'importance (ou, plus exactement, ce qui est important se résume facilement à deux nombres, la moyenne et la variance). Dans le cas des grandes déviations, la nature des événements individuels est de la plus haute importance. Différents types d'événements donnent lieu à des probabilités de grandes déviations tout à fait différentes. Une compagnie d'assurance qui souhaite calculer des estimations précises pour les grandes déviations a donc besoin d'en savoir plus sur les accidents de voiture que leur fréquence et leur coût moyen.

Outre les exemples déjà mentionnés, il faut ajouter les nombreuses applications que la théorie des grandes déviations a trouvées en physique mathématique. De nombreuses théories physiques sont de nature statistique. Si par exemple vous voulez décrire l'air de cette pièce ou l'eau d'une rivière qui coule, vous ne pouvez pas décrire le mouvement de chaque molécule ou particule impliquée. Au lieu de cela, vous décrivez le comportement statistique de l'ensemble des particules en termes de quantités macroscopiques telles que la pression et le débit. Les lois et les équations que vous obtenez alors ne sont pas probabilistes, elles décrivent simplement le comportement moyen ou attendu du gaz ou du liquide. Vous pouvez considérer ceci comme une version beaucoup plus compliquée de notre expérience de pile ou face. Dans cette expérience, le comportement moyen de notre expérience probabiliste se résumait au simple nombre 50 %. Dans le cas présent, le comportement probabiliste total des particules se résume aux lois de la thermodynamique et de l'hydrodynamique ! Mais comme dans le jeu de pile ou face, il y a aussi des fluctuations dans cette situation. Il y a peut-être une très faible probabilité que tout l'air de cette pièce se concentre soudainement à cette extrémité et vous laisse suffoquer à l'autre extrémité !

Ces problèmes sont encore plus compliqués que ce qui a été décrit, car le comportement des particules n'est pas du tout aléatoire. Elles se déplacent selon les lois fondamentales de la physique. Leur comportement ne semble aléatoire que parce qu'elles se heurtent et interagissent en permanence. L'obtention des équations de l'hydrodynamique et de la thermodynamique à partir des premiers principes est donc un processus en deux étapes : il s'agit d'abord de déduire le comportement statistique des particules à partir des lois de la physique, puis de déduire les lois macroscopiques à partir de cette description statistique. Avec ses collaborateurs, Varadhan a réalisé un travail impressionnant dans ce domaine, en utilisant souvent les grandes déviations comme outil.

Revenons à l'expérience du jeu de pile ou face pour examiner un

autre aspect du travail de Varadhan. Nous pouvons considérer le jeu de la pièce de monnaie comme un jeu de hasard très simple : chaque fois que c'est face qui sort, je gagne et vous devez me verser un euro, mais chaque fois que c'est pile qui sort, vous gagnez et je dois vous verser un euro. Ce jeu est « équitable » dans un sens évident : en moyenne, je ne peux pas m'attendre à gagner quoi que ce soit et vous non plus ! Modifions légèrement le jeu et lançons un dé au lieu d'une pièce de monnaie. Cette fois, je reçois cinq euros de votre part à chaque fois qu'un « six » sort, mais vous recevez un euro de ma part à chaque fois qu'un autre nombre sort. Le jeu est toujours « équitable » dans le sens décrit ci-dessus : je reçois cinq fois plus que vous à chaque fois que je gagne, mais vous pouvez vous attendre à gagner cinq fois plus souvent. Aucun de nous ne peut s'attendre à gagner quoi que ce soit à long terme. Les jeux qui sont équitables dans ce sens sont appelés martingales. Cette notion peut être étendue à des contextes beaucoup plus généraux. Au cours des cinquante dernières années, il est apparu clairement que les martingales sont des outils extrêmement utiles dans l'étude des phénomènes aléatoires. Dans les années 1970, Varadhan et D. W. Stroock ont rédigé une série impressionnante d'articles sur ce que l'on appelle les « problèmes de martingale », dont le point culminant a été leur livre *Processus de diffusion multidimensionnels* en 1979. Leur approche a permis d'unifier, de simplifier et d'étendre considérablement les résultats antérieurs dans ce domaine. L'idée de base est qu'au lieu de chercher des solutions à des problèmes d'analyse mathématique très compliqués, « tout » ce que l'on doit chercher est une distribution de probabilité qui transforme certains processus en martingales.

On a mentionné quelques-unes des contributions les plus importantes de Varadhan aux mathématiques, mais il y en a beaucoup d'autres. C'est un scientifique prolifique, doté d'une vision profonde et d'une gamme impressionnante d'outils techniques, qui jouit d'une grande considération dans la communauté des probabilistes. Cela ne tient pas seulement à ses résultats, mais aussi à son style. En écoutant une conférence de Varadhan, on n'est pas seulement exposé aux résultats les meilleurs et les plus récents dans le domaine, mais on est aussi initié à une façon de penser. Ses exposés mettent toujours l'accent sur les idées fondamentales, les défis, les obstacles et l'équilibre délicat entre le souhaitable et le possible qu'il faut trouver pour produire des résultats mathématiques de premier ordre. Varadhan est assurément un digne lauréat du prix Abel !

Thompson et Tits (2008)

« pour leurs profondes découvertes en algèbre et en particulier pour leur rôle dans la formation de la théorie moderne des groupes ».

L'algèbre moderne est le fruit de deux traditions anciennes des mathématiques, l'art de résoudre des équations et l'utilisation de la symétrie, comme par exemple dans les motifs des mosaïques de l'Alhambra. Les deux traditions se sont rencontrées à la fin du XVIII^e siècle quand on a mis en évidence pour la première fois que la clé de la compréhension des équations, même les plus simples, se trouve dans les symétries de leurs solutions. Cette vision a été brillamment mise en œuvre par deux jeunes mathématiciens, Niels Henrik Abel et Évariste Galois, au début du XIX^e siècle. Elle a finalement mené à la notion de groupe, la manière la plus puissante d'appréhender l'idée de symétrie. Au XX^e siècle, l'approche théorique des groupes a été un ingrédient crucial du développement de la physique moderne, de la compréhension des symétries cristallines à la formulation de modèles pour les particules et les forces fondamentales.

En mathématiques, l'idée de groupe s'est révélée prodigieusement fertile. Les groupes ont des propriétés frappantes qui unissent un grand nombre de phénomènes dans différents domaines. Les groupes les plus importants sont les **groupes finis**, qui interviennent par exemple dans l'étude des **permutations**, et les **groupes linéaires**, qui sont constitués des symétries qui préservent une géométrie sous-jacente. Le travail des deux lauréats a été complémentaire : **John Thompson** s'est concentré sur les groupes finis, tandis que **Jacques Tits** a surtout travaillé sur les groupes linéaires.

Thompson a révolutionné la théorie des groupes finis en démontrant des théorèmes extraordinairement profonds qui ont jeté les fondations d'une classification complète des **groupes finis simples**, une des plus belles réussites des mathématiques du XX^e siècle. Les **groupes simples** sont les atomes à partir desquels tous les groupes finis sont bâtis. Dans une percée majeure, **Feit** et Thompson ont démontré que tout groupe simple non commutatif a un nombre pair d'éléments (**théorème de Feit-Thompson**). Plus tard, Thompson a élargi ce résultat à l'établissement d'une classification pour un type important de groupe fini

simple, appelé N-groupe. À ce point, le projet de classification a paru à portée de main et sa réalisation a été menée à bien par d'autres. Sa conclusion presque incroyable est que tous les groupes finis simples font partie de certaines familles standard, à l'exception de 26 **groupes sporadiques**. Thompson et ses étudiants ont joué un rôle majeur dans la compréhension des fascinantes propriétés de ces groupes sporadiques, y compris de celles du groupe géant baptisé le « **Monstre** ».

Tits a élaboré une nouvelle vision extrêmement influente des groupes comme objets géométriques. Il a introduit un concept aujourd'hui connu sous le nom d'**immeuble de Tits**, qui encode en termes géométriques la structure algébrique des groupes linéaires. La théorie des immeubles est un principe unificateur dans une palette étonnante d'applications, par exemple dans les classifications des **groupes algébriques**, des **groupes de Lie** et des groupes finis simples, pour les **algèbres de Kac-Moody** (utilisées par les physiciens théoriciens), pour la **géométrie discrète** (utilisée en informatique), et pour l'étude des phénomènes de rigidité dans les espaces à **courbure négative**. L'approche géométrique de Tits a été essentielle pour l'étude des groupes finis et notamment du Monstre. Il a aussi établi la célèbre « alternative de Tits » : tout groupe linéaire engendré par un nombre fini d'éléments est virtuellement **résoluble** ou contient une copie du **groupe libre** à deux générateurs. Ce résultat a inspiré de nombreuses variantes et applications.

Les travaux de John Thompson et de Jacques Tits ont eu un impact extrêmement profond. Ils se complètent et forment ensemble la colonne dorsale de la théorie moderne des groupes.

John Griggs Thompson

John Griggs Thompson est né à Ottawa dans le Kansas, aux États-Unis, le 13 octobre 1932. Il occupe actuellement un poste de professeur au département de mathématiques de l'université de Floride à Gainesville.

Thompson a obtenu sa licence à l'université Yale en 1955 et son doctorat à l'université de Chicago en 1959. Il a eu pour directeur de thèse **Saunders MacLane**, l'un des pères fondateurs de la **théorie des catégories**.

Thompson a été professeur assistant à l'université Harvard jusqu'à sa nomination au poste de professeur de mathématiques à l'université de Chicago en 1962. Il a déménagé en Grande-Bretagne en 1970 pour occuper la chaire Rouse-Ball de mathématiques à l'université de Cambridge.

Après vingt-trois ans à Cambridge, il est retourné aux États-Unis pour prendre son poste actuel à l'université de Floride. Il est également professeur honoraire en mathématiques à l'université de Cambridge.

Thompson a reçu le titre de docteur *honoris causa* des universités de l'Illinois, Yale, d'Oxford et de l'État de l'Ohio. Il a été élu membre de l'Académie nationale des sciences des États-Unis en 1967 et membre titulaire de l'Académie américaine des arts et des sciences en 1998. Il est membre à titre étranger de la Société royale de Londres et de l'Académie des Lyncéens. Thompson a reçu de nombreuses distinctions internationales pour sa contribution remarquable aux mathématiques. Il est notamment lauréat de la médaille Fields, du prix Berwick, de la **médaille Sylvester**, du prix Wolf et de la médaille Poincaré. En 2000, la Médaille nationale de la science lui a été remise par le président des États-Unis Bill Clinton.

Le défunt Walter Feit, avec lequel Thompson a démontré l'un des théorèmes fondamentaux de la **théorie des groupes**, a dit de lui : « C'est un mathématicien qui étudie d'importants problèmes et ne se laisse pas décourager par les difficultés. Il vient souvent à bout de ces difficultés en introduisant de nouvelles idées qui ont ensuite un énorme impact sur l'évolution ultérieure. »

L'impact de Thompson a été d'autant plus grand qu'il a eu la générosité de partager ses idées avec de nombreux étudiants et avec d'autres mathématiciens.

Jacques Tits

Jacques Tits est né le 12 août 1930 à Uccle, un faubourg de la banlieue sud de Bruxelles, en Belgique. Il a quitté sa chaire au Collège de France à Paris en 2000, mais reste depuis professeur honoraire.¹⁵

Son père était mathématicien. C'est à un âge précoce que le talent mathématique de Jacques s'est révélé. À l'âge de trois ans, il connaissait déjà toutes les opérations arithmétiques. Il a sauté plusieurs classes au cours de sa scolarité. Jacques n'avait que treize ans quand son père est décédé. Sa famille ayant peu de ressources, il est devenu répétiteur d'élèves de quatre ans plus âgés pour contribuer aux dépenses domestiques. À l'âge de quatorze ans, il a réussi l'examen d'entrée à l'Université libre de Bruxelles et a obtenu son doctorat en 1950 à l'âge de vingt ans.

15. NDT. Tits est décédé en 2021.

Jacques Tits a été promu professeur à l'Université libre de Bruxelles en 1962. Il est resté à ce poste deux ans avant d'accepter une chaire à l'université de Bonn en 1964. Il a déménagé en 1973 à Paris pour occuper la chaire de théorie des groupes au Collège de France. Peu après, en 1974, il a été naturalisé Français. Il est resté titulaire de la chaire jusqu'à sa retraite en 2000.

Jacques Tits est membre de l'Académie des sciences depuis 1974. En 1992, il a été élu membre de l'Académie nationale des sciences des États-Unis et de l'Académie américaine des arts et des sciences. De plus, il est membre des académies des sciences des Pays-Bas et de Belgique. Il a reçu le titre de docteur *honoris causa* des universités d'Utrecht, de Gand, de Bonn et de Louvain.

Tits a reçu de nombreuses distinctions telles que le prix Wolf, la médaille Georg-Cantor, le Grand prix des sciences mathématiques et physiques et le prix Wettrem. Il a été nommé au grade de chevalier de la Légion d'honneur en 1995 et promu au grade d'officier de l'Ordre national du Mérite en 2001.

Outre ses recherches en mathématiques, Tits a joué un rôle majeur dans la vie mathématique internationale. Il a été rédacteur en chef des *Publications mathématiques de l'IHÉS* de 1980 à 1999. Il a siégé au comité d'attribution de la médaille Fields en 1978 et de nouveau en 1994. Il siège depuis 1985 au comité d'attribution du prix Balzan.

Les publications de Jacques Tits contiennent un nombre remarquable d'idées mathématiques fondamentales et d'avant-garde, qui en font l'un des mathématiciens les plus influents et les plus originaux de notre temps.

Bibliographie

- RÉMY (Bertrand), « Encore une histoire de symétrie : les immeubles », *Gazette des mathématiciens*, 2015, n° 144, p. 20-28.
- ROUSSEAU (Guy), « Les immeubles, une théorie de Jacques Tits, prix Abel 2008 », *Gazette des mathématiciens*, 2009, n° 121, p. 47-64.
- TITS (Jacques), *Généralisations des groupes projectifs basées sur leurs propriétés de transitivité*, Bruxelles, Palais des Académies, 1952.
- TITS (Jacques), *Sur certaines classes d'espaces homogènes de groupes de Lie*, Bruxelles, Palais des Académies, 1955.

- TITS (Jacques), *Leçon inaugurale*, Paris, Collège de France, 1976.
- TITS (Jacques), *Évariste Galois : son œuvre, sa vie, ses rapports avec l'Académie*, Paris, Institut, 1982.
- TITS (Jacques), *Résumés des cours au Collège de France (1973-2000)*, Paris, Société mathématique de France, 2013.
- VALETTE (Alain), « Quelques coups de projecteurs sur les travaux de Jacques Tits », *Gazette des mathématiciens*, 1994, n° 61, p. 61-79.

LA THÉORIE MODERNE DES GROUPES (par ARNE B. SLETSJØE)

Le comité scientifique chargé de choisir les lauréats du prix Abel a fixé son choix sur John G. Thompson et Jacques Tits en se référant à leurs contributions dans l'élaboration de la théorie moderne des groupes. Pour un non-spécialiste, il est difficile voire impossible de juger ce choix. La théorie des groupes est un sujet qui est généralement enseigné pour la première fois aux étudiants de troisième année de licence. Dans cette note, l'objectif est de présenter la théorie des groupes en général, en mettant l'accent sur les contributions de Thompson et de Tits. Nous espérons que les non-spécialistes pourront avoir au moins un petit aperçu de ce monde magnifique.

La plupart des gens s'accordent sur ce qu'est une symétrie parfaite. Un visage humain présente une symétrie parfaite si les deux moitiés sont comme les images dans un miroir l'une de l'autre. Un carré présente plusieurs symétries. Il existe plusieurs axes de symétrie qui engendrent des réflexions parfaites des deux moitiés. Ces symétries sont appelées **symétries axiales**. Mais il existe d'autres symétries du carré. En plaçant une aiguille au milieu du carré et en la faisant tourner d'un angle de 90 degrés, on obtient une **symétrie de rotation**. La propriété commune de la symétrie est que l'on fait quelque chose à l'objet qui préserve sa forme.

La possibilité de combiner des symétries et d'en produire de nouvelles est d'une grande importance. Pivoter deux fois de 90 degrés revient à effectuer une rotation de 180 degrés. La réflexion d'un carré le long d'un axe vertical, suivie d'une réflexion le long d'un axe horizontal, produit à nouveau une rotation de 180 degrés. Deux réflexions donnent une rotation! Ce n'est absolument pas la même chose que la double réflexion le long du même axe, car nous revenons dans ce cas au point de départ. La théorie des groupes est la formalisation de ce jeu.

Une autre illustration de la théorie des groupes est la suivante. Si vous vous couchez à 11 heures du soir et que vous dormez 8 heures, à quelle heure vous réveillez-vous? L'exercice est peut-être facile. Mais la question n'est pas de savoir pourquoi la réponse est 7 heures du matin, mais plutôt pourquoi ce n'est pas 19 heures. La réponse est assez évidente : ce n'est pas ainsi que les choses fonctionnent. Les heures appartiennent à l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, \dots, 11\}$. En arrivant à 12, on recommence. L'ensemble $\{0, 1, 2, \dots, 11\}$ avec cette règle est un **groupe cyclique**. La théorie des groupes est l'étude de ce type de structure.

La théorie des groupes est un membre assez ancien de la famille mathématique. Lorsque Niels Henrik Abel et Évariste Galois ont travaillé indépendamment dans les années 1822-1832 sur le problème de trouver quelles équations polynomiales pouvaient être résolues par radicaux, ils ont posé les fondements de la théorie des groupes. Le concept de groupe abstrait n'a été pleinement compris que cinquante ans plus tard.

À cette époque, la théorie des groupes a reçu une nouvelle pierre angulaire. Inspirés par les travaux d'Abel, les deux mathématiciens **Sophus Lie** et **Felix Klein** ont abordé la théorie des groupes d'un point de vue géométrique, comme nous l'avons décrit dans l'exemple des symétries du carré. Klein a essayé de décrire les objets géométriques à travers leurs symétries, tandis que Lie s'est concentré sur des objets plus généraux comme les courbes et les surfaces. Son concept de symétrie était plus large, puisqu'il autorisait certains types d'étirements des objets. Ces groupes de transformation sont aujourd'hui connus sous le nom de groupes de Lie.

John Thompson et Jacques Tits ont, de manière différente, poursuivi les travaux dans la lignée d'Abel et de Lie, Thompson sur les groupes finis à la suite d'Abel et Tits sur les groupes linéaires dans la lignée de Lie.

Entre Abel et Lie d'une part et Thompson et Tits d'autre part, un siècle entier de recherche sur la théorie des groupes s'est écoulé. On pourrait penser que le domaine est épuisé en termes de résultats. Ce n'est pas le cas. Les résultats de Thompson et Tits en sont une belle preuve. Ils ont tous deux, à leur manière, apporté des contributions profondes et novatrices à notre compréhension de la théorie des groupes. Grâce à de nouvelles constructions, ils ont enrichi notre vision de la beauté de la théorie des groupes. Par leurs réalisations, ils nous ont donné un nouvel aperçu des structures sur lesquelles la théorie est basée, rendant ainsi le domaine continuellement intéressant pour de nouvelles recherches. La base commune des résultats de Thompson et Tits est leur originalité et leur compréhension profonde, qui a eu une influence énorme sur le développement de l'algèbre et de ses sous-domaines.

UN APERÇU HISTORIQUE DE LA THÉORIE DES GROUPES (par ARNE B. SLETSJØE)

Le prix Abel de cette année n'est pas seulement un prix pour John G. Thompson et Jacques Tits. Il peut également être considéré comme une reconnaissance du travail accompli par des centaines de théoriciens des groupes à travers plusieurs générations. Nous allons donner un bref aperçu de l'histoire de la théorie des groupes, de ses jalons et de ses fondateurs.

Le développement de la théorie des groupes en tant que domaine de recherche a commencé il y a environ deux cents ans, bien que le terme « groupe abstrait » soit un peu plus récent. Ce sont des mathématiciens comme Arthur Cayley, Camille Jordan et Walther von Dyck qui, vers la fin du XIX^e siècle, ont donné la définition formelle utilisée aujourd'hui.

Il a fallu beaucoup de temps pour fixer le terme « groupe ». Augustin-Louis Cauchy utilisait le terme beaucoup plus compliqué de « système de substitutions conjuguées », mais un article de Jordan publié en 1863 semble avoir fixé le terme que nous utilisons aujourd'hui.

Lorsque l'article de Jordan fut publié, trente ans s'étaient écoulés depuis que l'homme qui fut le premier à utiliser le terme « groupe » dans ce contexte, Évariste Galois, avait été tué en duel à l'âge de vingt ans. Galois était politiquement actif pendant la révolution de 1830 en France. Le duel n'était peut-être pas ce qu'il semblait être, à savoir un combat entre jeunes Français pour le cœur d'une jolie femme. Il se peut plutôt qu'il ait été mis en scène par les opposants politiques de Galois afin de se débarrasser d'un adversaire gênant. Quoi qu'il en soit, le mythe veut que le jeune Galois ait passé la nuit précédant le duel à rédiger son testament mathématique. Dans ce texte précurseur, rédigé de manière assez sommaire et qui constitue le fondement de ce que l'on appellera plus tard la **théorie de Galois**, Galois a étudié les solutions d'équations polynomiales et les permutations de ces solutions. Cette étude s'est avérée très fructueuse pour déterminer si les équations pouvaient être résolues par radicaux. Galois a ainsi généralisé les travaux antérieurs de Niels Henrik Abel, qui avait démontré que les équations de degré 5 ne pouvaient pas en général être résolues par radicaux. Galois a introduit le terme de « **groupe de permutations** », sans en donner de définition formelle ni énoncer de propriétés générales. Pour lui, il s'agissait seulement d'une collection de permutations. Mais il a fait une remarque importante :

« si dans un tel groupe on a les substitutions S et T, alors on a aussi la substitution ST ».

Galois était donc conscient de l'importance d'une certaine structure dans son groupe, à savoir que la composition (ou le produit) de deux éléments d'un groupe doit également être un élément du groupe. En termes modernes, on dit que le groupe est stable par une **opération binaire**. Après la mort prématurée de Galois, plusieurs mathématiciens éminents ont continué à travailler sur le concept de groupe. Des contributions importantes ont été apportées par Cauchy et Jordan, mais le premier à essayer de donner une définition formelle a été Cayley en 1854. Toutefois, ce n'est qu'avec la publication d'un article de von Dyck en 1882 que la définition formelle telle que nous la connaissons aujourd'hui a vu le jour.

Les permutations et les solutions d'équations polynomiales ne sont pas les seules façons d'envisager la théorie des groupes. Le point de vue géométrique est tout aussi important. L'ensemble des symétries d'un objet géométrique forme une structure de groupe de manière naturelle. Comme exemple de groupe de symétrie, nous pouvons examiner les transformations d'un cercle. Engendrées par des rotations et des symétries axiales, elles ressemblent beaucoup aux symétries d'un carré. La différence réside dans la taille : alors que le carré possède un nombre fini de symétries, le cercle en possède un nombre infini. Un autre point de vue est dû au mathématicien norvégien Sophus Lie, en particulier à son travail daté de 1884. Motivé par l'idée de son concitoyen Abel de comprendre les équations et leurs solutions en étudiant les permutations des solutions, Lie s'est intéressé aux équations différentielles et a posé une question similaire. Comme Abel, Lie s'est concentré sur les liens fondamentaux entre la géométrie et l'algèbre. Ces groupes de transformation sont aujourd'hui connus sous le nom de groupes de Lie. Ni Abel ni Lie n'ont inventé la théorie des groupes, mais il existe des classes importantes de groupes qui portent leurs noms, à savoir les « **groupes abéliens** » et les « groupes de Lie ».

Par ailleurs, le nom d'un autre mathématicien norvégien est lié à une classe de groupes bien connue. Au cours du semestre de l'automne 1862, l'université de Christiania (aujourd'hui Oslo) a dû trouver un remplaçant pour donner des cours au niveau du troisième cycle. Le professeur **Ole Jacob Broch** avait été élu membre du Parlement et n'avait plus le temps d'enseigner, si bien que le jeune mathématicien **Ludwig Sylow** fut choisi à cette fin. Sylow avait été diplômé de l'université quelques années auparavant, mais en raison du manque de postes de professeurs, il avait

enseigné au lycée de Fredrikshald, une petite ville appelée aujourd'hui Halden. Pendant les deux mois qu'il a passés à Christiania, il a donné des cours sur la théorie de Galois. C'était la première fois que ce sujet était enseigné en Norvège. L'un de ses cours portait sur le **théorème de Cauchy** relatif à l'existence de sous-groupes d'ordre premier, pour les nombres premiers qui divisent l'ordre du groupe. À la fin du cours, Sylow a interrogé l'auditoire sur une généralisation de ce théorème : le théorème est-il également valable pour les puissances maximales du nombre premier ? Ni lui ni l'auditoire, y compris le jeune Sophus Lie, n'ont pu répondre à cette question à l'époque. Dix ans plus tard, il a pu fièrement publier la solution. La réponse était « oui », et ce n'était pas tout. Sylow a pu donner le nombre de ces groupes, connus plus tard sous le nom de « **sous-groupes de Sylow** ». Il a également montré que ces sous-groupes sont étroitement liés. Ce que Sylow ne savait pas en 1862 ni en 1872, c'est que son article de dix pages allait avoir une influence étonnante sur un projet gigantesque en théorie des groupes, qui allait se réaliser plus d'un siècle plus tard : la **classification des groupes finis simples**, y compris la découverte des 26 groupes sporadiques, dont le groupe Monstre est le dernier membre. Le Monstre est le plus grand groupe fini simple et a pour ordre

808 017 424 794 512 875 886 459 904 961 710 757 005 754 368 000 000 000.

C'est lors du Congrès international des mathématiciens à Amsterdam en 1954 que **Richard Brauer** a présenté sa vision de la classification de tous les groupes finis simples. Près de trente ans plus tard, **Daniel Gorenstein**, qui a supervisé l'ensemble, a déclaré que le projet était terminé. Des centaines de mathématiciens avaient alors publié des milliers de pages sur ce qui est devenu une démonstration commune de la classification des groupes finis simples. Parmi tous les théoriciens des groupes compétents, un jeune mathématicien du nom de John G. Thompson a apporté la contribution la plus importante : le théorème dit de Feit-Thompson, qu'il a démontré avec Walter Feit en 1962-1963.

La classification de tous les groupes finis simples n'a pas mis fin à la théorie des groupes, mais a plutôt marqué un nouveau départ. Un demi-siècle s'est écoulé entre la première utilisation du terme « groupe » par Galois et la canonisation conceptuelle d'un groupe abstrait. Il a ensuite fallu un autre siècle entier pour classer tous les atomes de la théorie !

Gromov (2009)

« pour ses contributions révolutionnaires à la géométrie ».

La géométrie est l'un des domaines les plus anciens des mathématiques. Elle a suscité l'attention de grands mathématiciens à travers les siècles, mais elle a connu des transformations révolutionnaires au cours des cinquante dernières années. **Mikhaïl Gromov** est à l'origine de quelques-uns de ces développements parmi les plus importants, en introduisant des idées générales profondément originales qui ont ouvert de nouvelles perspectives dans cette branche ainsi que dans d'autres domaines des mathématiques.

La **géométrie riemannienne** s'est développée à partir de l'étude des surfaces courbes et de leurs analogues en dimension supérieure. Elle a fourni le cadre à la théorie de la relativité générale. Gromov a joué un rôle décisif dans son développement en menant la géométrie riemannienne globale à un nouveau niveau de généralité. Ses solutions de problèmes importants en géométrie globale s'appuient sur de nouveaux concepts de grande portée comme la convergence des **variétés riemanniennes** et un principe de compacité qui portent maintenant son nom.

Gromov est l'un des fondateurs de la **géométrie symplectique** globale. Les courbes holomorphes étaient connues pour être un outil essentiel en géométrie des variétés complexes. Toutefois, le fait de devoir disposer de structures complexes intégrables constituait un cadre trop rigide. Dans une communication de 1985 restée célèbre, il a étendu le concept de courbes holomorphes aux courbes J-holomorphes dans des **variétés symplectiques**. Ceci a conduit à la théorie des invariants de Gromov-Witten, qui est actuellement un sujet extrêmement dynamique lié à la théorie quantique des champs. Cette théorie, qui a considérablement stimulé le développement de la topologie symplectique, a pénétré et transformé progressivement de nombreux autres domaines des mathématiques.

Les travaux de Gromov sur les **groupes à croissance polynomiale** ont introduit des idées qui ont à jamais modifié la manière de considérer un **groupe discret** infini. Gromov a découvert la géométrie des groupes discrets et résolu dans ce domaine plusieurs problèmes restés jusque là

inaccessibles. Son approche géométrique a rendu des arguments combinatoires complexes beaucoup plus naturels et puissants.

Gromov est toujours à la poursuite de nouvelles questions et pense constamment à de nouvelles approches pour résoudre des problèmes longtemps restés sans réponse. Au cours de sa carrière, il a produit des travaux originaux d'une grande profondeur, et demeure remarquablement créatif. Ses travaux continueront d'être une source d'inspiration pour les nouvelles générations de mathématiciens.

Mikhaïl Léonidovitch Gromov est né le 23 décembre 1943 à Boksitogorsk en Union soviétique. Il est citoyen français depuis 1992. Depuis 1982, Gromov occupe le poste de professeur permanent à l'**Institut des hautes études scientifiques**, à Bures-sur-Yvette en France. L'IHÉS est

« un institut de recherche avancée en mathématiques, physique théorique et toute autre science qui s'y rattache. Il offre à des savants d'envergure exceptionnelle un lieu où ils peuvent se consacrer entièrement à leurs recherches, sans aucune obligation d'enseignement ou de tâches administratives... »

Gromov est l'un des cinq professeurs permanents qui sont nommés par le directeur sur recommandation du comité scientifique « pour la profondeur et l'ampleur de leurs travaux et leur potentiel d'évolution ». Ils sont recrutés jeunes et nommés à vie. Gromov est actuellement aussi professeur titulaire de la chaire Jay-Gould de mathématiques à l'institut Courant de sciences mathématiques de l'université de New York.

Il est connu pour ses importantes contributions à de nombreux domaines des mathématiques. Le comité de sélection du prix Abel l'a distingué « pour ses contributions révolutionnaires à la géométrie ». Gromov a profondément influencé les mathématiques modernes et demeure à ce jour toujours extrêmement actif et innovant.

Gromov a obtenu sa maîtrise (1965), son doctorat (1969) et a soutenu sa thèse postdoctorale ès sciences (1973) à l'université de Leningrad, avec pour directeur de thèse **Vladimir A. Rokhline**. De 1967 à 1974, il a été professeur adjoint à l'université de Leningrad. En 1974, il a quitté l'Union soviétique et est devenu professeur à l'université d'État de New York à Stony Brook. En 1981, il a intégré l'université Paris VI. L'année suivante, il s'est vu attribuer le poste qu'il occupe actuellement à l'Institut des hautes études scientifiques. De 1991 à 1996, il a également occupé le poste de professeur de mathématiques à l'université du Maryland à College Park.

Gromov a reçu de nombreuses et éminentes récompenses internationales : le **prix de Kyoto** en sciences fondamentales (2002), le prix Balzan (1999), le prix Steele pour une « contribution majeure à la recherche » (1997), la **médaille Lobatchevski** (1997), le prix Wolf (1993), le prix de l'Union des assurances de Paris (1989), le **prix Élie-Cartan** (1984), le **prix Oswald-Veblen** en géométrie (1981) et le prix de la **Société mathématique de Moscou** (1971). En 2004, Gromov s'est vu décerner le **prix Nemmers en mathématiques**. Il a été lauréat du **prix János-Bolyai** attribué par l'Académie hongroise des sciences en 2005.

Gromov a été conférencier invité au Congrès international des mathématiciens à Nice (1970), Helsinki (1978), Varsovie (1982) et Berkeley (1986). Il est membre étranger de l'Académie nationale des sciences des États-Unis et de l'Académie américaine des arts et des sciences, et membre de l'Académie des sciences (de Paris). Il est également docteur *honoris causa* de l'université de Genève (1992).

Bibliographie

- AUDIN (Michèle) et PANSU (Pierre), « **Le h-principe de Misha Gromov** », *Images des mathématiques*, 2009.
- BORRELLI (Vincent), « **La machine à démanteler les impossibles de Mikhaïl Gromov** », *Un texte, un mathématicien*, 2016.
- GHYS (Étienne), « **Les triangles d'Euclide, de Gauss et de Gromov** », *Images des mathématiques*, 2009.
- GROMOV (M.), *Structures métriques pour les variétés riemanniennes* (réd. J. Lafontaine et P. Pansu), Paris, CEDIC Nathan, 1981.
- GROMOV (M.), *Introduction aux mystères* (trad. P. Kaldy), Arles, Actes Sud, 2012.
- MANN (Étienne), « Raconte-moi ... les invariants de Gromov-Witten », *Gazette des mathématiciens*, 2020, n° 165, p. 52-59.

LA GÉOMÉTRIE : LE TERRAIN DE JEU DE MIKHAÏL GROMOV

L'Académie norvégienne des sciences et des lettres a décidé de décerner le prix Abel 2009 à Mikhaïl Léonidovitch Gromov, de l'Institut des hautes études scientifiques à Bures-sur-Yvette en France, pour ses contributions révolutionnaires à la géométrie. Le mathématicien franco-russe Mikhaïl L. Gromov est l'un des principaux mathématiciens de notre époque. Il est connu pour ses contributions importantes dans de nombreux domaines des mathématiques, en particulier en géométrie. Au cours des trente dernières années, Mikhaïl Gromov a élaboré des idées générales profondément originales, qui ont ouvert de nouvelles perspectives en géométrie et dans d'autres domaines des mathématiques.

La géométrie riemannienne

Les travaux de Gromov s'inscrivent dans le domaine de la géométrie différentielle. La géométrie différentielle est la branche de la géométrie qui s'intéresse aux objets courbes lisses tels que les courbes, les surfaces ou même les variétés de dimension supérieure, avec diverses structures supplémentaires, par exemple une **métrique riemannienne**. Une métrique riemannienne sur une surface nous permet de mesurer les distances et les angles sur la surface. Une surface dotée d'une métrique riemannienne est appelée une surface riemannienne. Notons que la distance euclidienne habituelle n'est qu'une des nombreuses métriques possibles. Considérons la surface comme une partie d'un paysage et introduisons une métrique qui exprime les différences de vitesse de marche dans les différentes directions en un point donné. Dans un marais, les valeurs sont faibles par rapport à celles d'un terrain sec. Les différentes valeurs dans différentes directions à partir d'un point donné reflètent les variations du sol dans différentes directions. La distance entre deux points dans cette métrique est le temps nécessaire pour marcher entre les points.

L'un des concepts fondamentaux d'une surface riemannienne est la **courbure de Gauss**, étudiée pour la première fois par **Leonhard Euler** (1707-1783) et de manière plus approfondie par Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Un plan avec la métrique euclidienne a une courbure de Gauss nulle, alors que le même plan équipé de la métrique qui mesure « la difficulté de marcher » donnée ci-dessus peut être plutôt courbé. Aujourd'hui, les mathématiciens ont plusieurs définitions différentes de



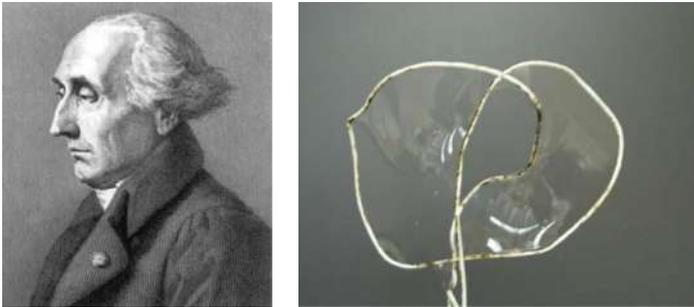
la courbure, toutes inventées pour mesurer à quel point une surface est loin d'être plate comme un plan.

Les **courbures principales** en un point sont les courbures maximales et minimales des courbes planes obtenues en coupant la surface avec des plans normaux au **plan tangent** en ce point. La courbure de Gauss en un point est définie comme le produit des courbures principales en ce point ; la **courbure moyenne** est définie comme leur somme.

En général, les propriétés les plus importantes d'une surface sont celles qui sont définies intrinsèquement, c'est-à-dire déterminées uniquement par la distance à l'intérieur de la surface, mesurée le long des courbes de la surface. Les surfaces se présentent naturellement comme des graphes de fonctions de deux variables et, avant Gauss, la courbure était définie par une formule impliquant la fonction de définition. Les propriétés de la surface ainsi définies sont appelées extrinsèques, le contraire d'intrinsèques. Gauss a montré dans son « théorème remarquable » (*Theorema Egregium*) qu'en dépit de la définition extrinsèque d'origine, la courbure de Gauss est en fait une propriété intrinsèque. Ce point de vue a été étendu à des espaces de dimension supérieure par Bernhard Riemann (1826-1866) et a conduit à ce que l'on appelle aujourd'hui la géométrie riemannienne.

En 1760, Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) a posé la question suivante : étant donné une courbe fermée dans l'espace ordinaire, trouver une surface ayant cette courbe pour bord et dont l'aire est minimale. Une telle surface est appelée une **surface minimale**. En 1776, **Jean-Baptiste Meusnier** (1754-1793) a démontré le résultat suivant : une surface est minimale si et seulement si sa courbure moyenne est nulle. Les surfaces minimales ont une interprétation simple dans la vie réelle : il s'agit de la forme que prend un film de savon si l'on plonge un cadre en fil de fer ayant la forme de la courbe dans une solution savonneuse

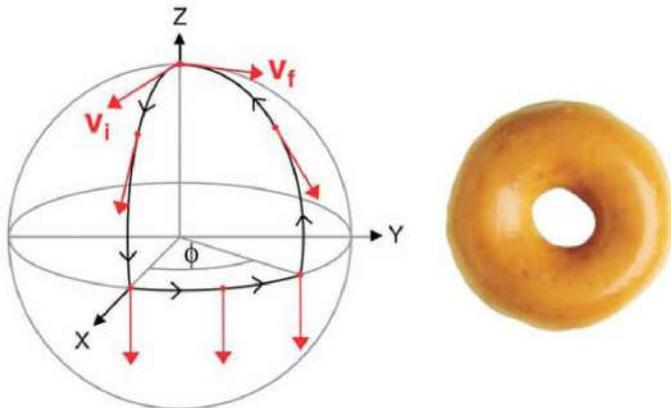
et qu'on le retire ensuite avec précaution.



Les courbes sur une surface qui minimisent la distance entre les points d'extrémité sont appelées des **géodésiques** ; elles correspondent à la forme que prendrait un élastique tendu entre les deux points. Mathématiquement, elles sont décrites à l'aide d'équations aux dérivées partielles issues du **calcul des variations**. Le caractère géodésique d'une courbe est une propriété intrinsèque.

On peut calculer la courbure de Gauss comme la limite du quotient de l'excès angulaire $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ et de l'aire pour des triangles géodésiques de plus en plus petits près du point, avec des angles α , β et γ . Qualitativement, une surface est courbée positivement ou négativement selon le signe de l'excès angulaire pour des triangles géodésiques arbitrairement petits. Une sphère a partout une courbure strictement positive puisque tout triangle géodésique à la surface de la sphère a une somme d'angles supérieure à π . Dans le cas euclidien, nous savons depuis l'école que la somme des angles est précisément π . Comme une surface riemannienne possède une courbure spécifique en chaque point, nous pouvons additionner toutes les courbures pour trouver la moyenne de la courbure pour toute la surface, appelée courbure totale de la surface. Il existe une merveilleuse formule, connue sous le nom de **formule de Gauss-Bonnet**, qui relie cette courbure totale et une propriété purement topologique de la surface, c'est-à-dire des quantités qui ne dépendent plus de la métrique. Pour une surface fermée comme une sphère ou la surface d'une bouée (ou d'un beignet), le théorème de Gauss-Bonnet dit que la courbure totale est égale à 4π moins 4π fois le nombre de trous dans la surface. Une sphère n'a pas de trou, la courbure totale est donc de 4π . La bouée a un trou : la courbure totale est donc nulle. Cette interaction entre des concepts locaux comme la courbure et des propriétés globales comme le nombre de trous a été le précurseur de nombreux

résultats ultérieurs en géométrie, qui ont culminé avec le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer, pour lequel Michael Atiyah et Isadore Singer se sont vu décerner le prix Abel en 2004.



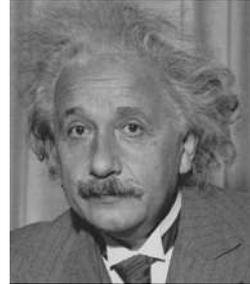
Considérons maintenant des variétés dont la courbure est soumise à certaines conditions. Quelles sont les surfaces possibles si l'on suppose que la courbure est partout nulle ? Ou constante, mais non nulle ? Pour répondre à ces questions, nous recherchons une sorte de classification : les surfaces qui remplissent les conditions ont certaines propriétés ou appartiennent à certaines classes de surfaces. Mikhaïl Gromov a publié plusieurs articles dans lesquels il répond aux questions relatives à la classification des variétés avec des contraintes de courbure.

La géométrie riemannienne étudie également les espaces de dimension supérieure. L'univers peut être décrit comme un espace à trois dimensions. Près de la Terre, l'Univers ressemble grosso modo à un espace euclidien tridimensionnel. Toutefois, à proximité des étoiles très lourdes et des trous noirs, l'espace est courbé et déformé. Le télescope Hubble a découvert des points qui ont plus d'une géodésique minimale entre eux et le point où se trouve le télescope. C'est ce qu'on appelle l'effet de lentille gravitationnelle. La courbure de l'espace peut être estimée en utilisant les théorèmes de la géométrie riemannienne et les mesures effectuées par les astronomes. Les physiciens pensent que la courbure de l'espace est liée au champ gravitationnel d'une étoile selon une équation aux dérivées partielles introduite par Albert Einstein (1870-1955). En utilisant les résultats de la géométrie riemannienne, ils peuvent estimer la masse de l'étoile ou du trou noir à l'origine de l'effet de lentille

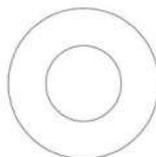
gravitationnelle.



*Lentille gravitationnelle dans
l'amas de galaxies Abell 2218.*



Comme indiqué précédemment, il existe de nombreuses variétés riemanniennes différentes avec le même espace sous-jacent, c'est-à-dire qu'une variété peut admettre différentes structures métriques. Un problème naturel à résoudre est de savoir s'il est possible, d'une manière naturelle, de classer tous les **espaces métriques**. La réponse de Gromov à cette question est de doter l'espace de tous les espaces métriques d'une distance, appelée aujourd'hui **distance de Gromov-Hausdorff**. Pour mesurer la distance entre deux espaces métriques, on les plonge de manière isométrique dans un espace plus grand. En tant que sous-ensembles d'un univers commun, nous pouvons mesurer la distance qui les sépare. La distance entre deux sous-ensembles **compacts** d'un espace métrique est la valeur minimale telle que pour chaque point de chaque sous-ensemble, il est possible d'atteindre un point de l'autre sous-ensemble dans l'intervalle de cette distance minimale. La distance de Gromov-Hausdorff est la valeur minimale pour tous les plongements possibles des deux espaces dans un troisième. À titre d'exemple, considérons deux cercles de **rayon 1** et **2**. La distance de Gromov-Hausdorff entre les deux cercles est de **1** : elle s'obtient en disposant les deux cercles de manière concentrique. Le cercle extérieur peut donc être atteint à une distance de **1** de n'importe quel point du cercle intérieur, et vice versa.



Vers 1980, Gromov a publié plusieurs résultats concernant cet espace métrique des espaces métriques. Deux des théorèmes les plus célèbres portent son nom, le théorème de compacité de Gromov et le théorème de convergence de Gromov.

La géométrie symplectique

En 1833, le mathématicien irlandais **William Rowan Hamilton** (1805-1865) a introduit ce que l'on appelle aujourd'hui la mécanique hamiltonienne. Il s'agit d'une reformulation de la mécanique classique, motivée par une reformulation précédente de Lagrange datant de 1788. Lagrange a formulé la mécanique classique à l'aide des solutions de certaines équations différentielles du second ordre. Hamilton a modifié le formalisme en considérant deux ensembles de coordonnées : les coordonnées de position et les coordonnées d'impulsion. Les contraintes du second ordre de Lagrange sur un espace de coordonnées à n dimensions sont devenues des contraintes du premier ordre sur un espace de phase à $2n$ dimensions. Les propriétés de cet espace de phase particulier ont été extraites et utilisées comme motivation pour la définition des variétés symplectiques, qui sont techniquement des variétés équipées d'une certaine **forme différentielle** non dégénérée.

Il existe des relations étroites entre les structures symplectiques et les structures dites **presque complexes**, qui sont les réponses à la question suivante : est-il possible de comprendre une variété réelle à $2n$ dimensions comme une **variété complexe** à n dimensions ? Il s'agit d'une généralisation de ce que nous faisons lorsque nous considérons les nombres complexes comme un plan réel, avec la racine carrée de -1 comme deuxième axe.

Considérons un instant le célèbre jeu du bâton de Winnie l'ourson. L'écoulement de la rivière peut être décrit par un certain champ de vecteurs : en chaque point de la surface, l'écoulement de l'eau a une direction et une vitesse. Les bâtons, qui sont lâchés du côté amont du pont, suivront le champ de vecteurs le long de ce que l'on appelle une courbe intégrale. Dans le jeu de bâtons, le but de Winnie l'ourson est de trouver le chemin le plus rapide, au moins plus rapide que celui de Jean-Christophe, Tigrou et Bourriquet. Il est évident que le bâton que Winnie l'ourson laisse tomber dans la rivière se retrouvera sous le pont, car le champ de vecteurs qui décrit l'écoulement possède certaines propriétés intéressantes.

Si nous reproduisons ces bonnes propriétés, habituellement décrites



par les **équations de Cauchy-Riemann**, pour l'espace de phase symplectique du formalisme hamiltonien de la mécanique classique tel qu'il est décrit ci-dessus, nous finissons par considérer des applications des nombres complexes vers une variété symplectique avec certaines propriétés. De telles applications, qui tracent une courbe complexe dans la variété, sont appelées des **courbes pseudoholomorphes**. Elles ont été introduites par Gromov en 1985 et ont révolutionné l'étude des variétés symplectiques. Elles conduisent notamment aux invariants de Gromov-Witten et à l'**homologie de Floer**, et jouent un rôle important dans la théorie des cordes.

Les groupes géométriques

Dans la citation pour le prix Abel de cette année, le comité scientifique met l'accent sur trois domaines différents dans lesquels Gromov a joué un rôle important. La géométrie riemannienne et la géométrie symplectique semblent être des terrains de jeu appropriés pour un géomètre de renommée mondiale, mais qu'en est-il des groupes à croissance polynomiale ? Quel est le lien avec la géométrie et les espaces métriques ?

Avez-vous déjà réfléchi au nombre de mots que contient notre langue ? Ce n'est évidemment pas une bonne idée de commencer à compter les mots, mais essayons tout de même. Nous commençons par considérer les mots d'une seule lettre, tels que « a » et « y », et en étant assez strict sur ce que nous entendons par mot, ces deux-là semblent être les seuls. La liste des mots de deux lettres est beaucoup plus longue, par exemple « le », « la », « un », « ou », « an », « ma » et « vu », pour n'en citer que quelques-uns. Nous n'allons pas poursuivre cette liste, mais plutôt changer les règles et nous concentrer sur une structure mathématique très importante. Voici les règles de ce jeu mathématique :

1. notre alphabet ne contient que deux lettres, x et y ;
2. toutes les combinaisons de x et de y sont des mots dans notre langue, à deux exceptions près : les combinaisons xx et yy ne peuvent pas faire partie d'un mot.

Comptons maintenant les mots de cette langue. Nous comptons les mots autorisés en fonction de leur longueur, c'est-à-dire du nombre de lettres. Dénotons par $M(n)$ le nombre de mots de longueur n . Un raisonnement combinatoire élémentaire (que nous omettons) nous apprend que $M(n)$ est égal à la somme $M(n-1) + M(n-5)$. Nous pouvons donc poursuivre la suite dans la colonne la plus à droite du tableau 1 : 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, 37, 49, 65... Il s'agit d'une suite avec une croissance dite exponentielle, le même phénomène que celui qui se produit pour la population mondiale totale. Elle croît rapidement, mais à mesure que la population augmente, elle croît encore plus vite. Dans ce contexte, le contraire de la croissance exponentielle est ce que nous appelons la croissance polynomiale. La croissance polynomiale est beaucoup plus lente que la croissance exponentielle. Par exemple, la suite de tous les entiers naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., a une croissance polynomiale.

n	mots	$M(n)$
1	x, y	2
2	xy, yx, yy	3
3	xyx, yyx, yxy, xyy	4
4	$xyxy, xyyx, yxyx, yxyy, yyxy$	5
5	$xyxyx, xyxyy, xyxyx, yxyxy, yxyyx, yyxyx, yyxyy$	7
6	$xyxyxy, xyxyyx, xyxyyx, xyxyyy, yxyxyx, yxyxyy, yxyxyy, yxyxyy, yyxyxy, yyxyyx$	9

TAB. 1

Le langage avec x et y obéissant aux règles données ci-dessus est ce que les mathématiciens appelleraient les éléments du **groupe modulaire** $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$. Ce que nous avons montré, ou du moins indiqué, c'est que ce groupe a une croissance exponentielle. Le théorème de Gromov de 1981 s'énonce ainsi :

Théorème (Gromov, 1981). *Un groupe G avec un nombre fini de générateurs a une croissance polynomiale si et seulement s'il est **virtuellement nilpotent**.*

En utilisant ce théorème, nous pouvons maintenant déduire que le groupe modulaire n'est pas virtuellement nilpotent. Et alors ? Il n'est pas facile d'expliquer ce que signifie pour un groupe d'être virtuellement nilpotent. Nous n'avons même pas expliqué ce qu'est un groupe. Mais pour les personnes travaillant dans la théorie des groupes, il est très important de savoir si un groupe est virtuellement nilpotent ou non. Ce que nous essayons de faire comprendre, c'est qu'en combinant un simple dénombrement et le théorème de Gromov, nous pouvons dire quelque chose sur $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$, l'un des groupes les plus importants de l'histoire moderne des mathématiques.

Revenons à notre question initiale : quel est le rapport avec la géométrie ? Il y a en fait une métrique, ou plutôt une distance, cachée dans cet exemple. Il existe deux propriétés très importantes de la distance : l'inégalité triangulaire et la non-dégénérescence. L'inégalité triangulaire est la généralisation de l'idée selon laquelle le chemin le plus court entre deux points est la ligne droite. La non-dégénérescence nous dit que si la distance entre A et B est nulle, alors $A = B$. Revenons à notre langage engendré par x et y . À partir de deux mots, nous pouvons composer un nouveau mot, simplement en assemblant les lettres, un mot après l'autre. Rappelons que xx et yyy ne sont pas autorisés, si l'une de ces combinaisons apparaît, nous la supprimons. Ainsi, en assemblant xyx et $xyyx$, on obtient

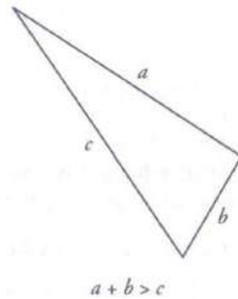
$$xyxxyyx = xyyyx = xx = \emptyset$$

(le mot vide est toujours noté \emptyset). Définissons l'opération d'inversion d'un mot : retourner le mot et remplacer yy par y et inversement, de sorte que $xyyx$ se transforme en $yyxyx$. Un petit exercice pour le lecteur consiste maintenant à montrer que l'assemblage d'un mot et de son mot inversé donne le mot vide. Le fait remarquable est que l'ensemble des mots de cet alphabet particulier est un espace métrique, où la distance entre deux mots est le nombre de lettres dans la composition du premier mot avec le second mot inversé. Cette définition vérifie à la fois l'inégalité triangulaire et la non-dégénérescence. Compter les points jusqu'à une longueur donnée est maintenant un analogue parfait du comptage des points à l'intérieur d'une boule de rayon donné autour d'un point spécifique de l'espace, à savoir le mot vide. L'analogue pour une surface riemannienne du comptage de mots de longueur donnée est la mesure de l'aire. Les mots de longueur inférieure à 1 correspondent à l'aire d'un cercle de rayon 1. L'aire est une fonction quadratique du rayon, c'est-à-dire une « croissance polynomiale » de degré 2. Un rai-

sonnement similaire peut être utilisé pour les variétés riemanniennes de toute dimension d , le comptage des points est une fonction du rayon de degré d , c'est-à-dire une croissance polynomiale. Dans ce contexte, le résultat de Gromov peut être interprété comme indiquant que les groupes discrets, comme notre alphabet, qui sont des analogues des variétés de dimension finie, ont une caractérisation spécifique en théorie des groupes (ils sont virtuellement nilpotent).

Épilogue

Le nom de Gromov est à jamais attaché à des résultats profonds et à des concepts importants dans les domaines de la géométrie riemannienne, de la géométrie symplectique, de la théorie des cordes et de la théorie des groupes. Le comité Abel a déclaré : « Mikhaïl Gromov est toujours à la recherche de nouvelles questions et pense constamment à de nouvelles idées pour résoudre d'anciens problèmes. Il a produit des travaux profonds et originaux tout au long de sa carrière et reste remarquablement créatif. Les travaux de Gromov continueront d'être une source d'inspiration pour de nombreuses découvertes mathématiques futures. » Enfin, citons également **Dennis Sullivan** : « C'est incroyable ce que Mikhaïl Gromov peut faire rien qu'avec l'inégalité triangulaire. »



Tate (2010)

« pour l'étendue et le caractère durable de son influence sur la théorie des nombres ».

Au-delà de la simple arithmétique des nombres entiers, il existe un monde complexe et sinueux qui a posé bien des difficultés aux esprits les plus remarquables à travers l'Histoire. Ce monde s'étend des mystères des nombres premiers à la façon dont nous stockons, transmettons et protégeons l'information dans nos ordinateurs modernes. C'est ce qu'on appelle la théorie des nombres. Au cours du siècle dernier, cette théorie s'est développée en l'une des branches les plus élaborées et sophistiquées des mathématiques, en interagissant profondément avec d'autres domaines comme la géométrie algébrique et la théorie des **formes automorphes**. **John Tate** est un architecte de premier ordre de ce développement.

La thèse de Tate sur l'analyse de Fourier dans des **corps de nombres**, soutenue en 1950, a ouvert la voie à la théorie moderne des formes automorphes et de leurs **fonctions L**. Tate a révolutionné la théorie globale des **corps de classes** avec **Emil Artin**, en utilisant des techniques nouvelles de cohomologie des groupes. Avec Jonathan Lubin, il a refondu la théorie locale des corps de classes avec une utilisation ingénieuse des groupes formels. L'invention des espaces analytiques rigides de Tate a engendré le domaine entier de la géométrie analytique rigide. Il a trouvé un analogue ***p*-adique** à la théorie de Hodge, maintenant appelée théorie de Hodge-Tate, qui s'est épanouie en une autre technique fondamentale de la **théorie algébrique des nombres**.

Tate est à l'origine d'une profusion d'idées et de constructions mathématiques essentielles, y compris la cohomologie de Tate, le théorème de la dualité de Tate, les groupes de Barsotti-Tate, les **motifs** de Tate, les **modules de Tate**, l'algorithme de Tate pour les courbes elliptiques, la **hauteur** de Néron-Tate sur les groupes de **Mordell-Weil** de **variétés abéliennes**, les groupes de **Mumford-Tate**, le théorème d'**isogénie** de Tate et le théorème de Honda-Tate pour les variétés abéliennes sur les corps finis, la théorie des déformations de Serre-Tate, les groupes de Tate-**Chafarevitch** et la **conjecture de Satō-Tate** concernant les familles de courbes elliptiques. Et la liste est encore longue.

Nombre d'axes majeurs de recherche en théorie des nombres algébriques et en **géométrie arithmétique** ne sont possibles qu'en raison de la contribution et de l'intuition de John Tate. Il a vraiment laissé une empreinte incontestable sur les mathématiques modernes.

John Torrence Tate est né le 13 mars 1925 à Minneapolis dans le Minnesota, aux États-Unis. Il vient de prendre sa retraite et de quitter son poste de professeur de mathématiques à l'université du Texas à Austin, où il occupait la chaire Richardson.¹⁶

Tate a obtenu sa licence à l'université Harvard en 1946 et son doctorat à l'université de Princeton en 1950 sous la direction d'Emil Artin.

Les réalisations scientifiques de Tate couvrent six décennies. Il a été assistant de recherche et chargé de cours à Princeton (1950-1953) et professeur invité à l'université de Columbia (1953-1954). En 1954, Tate a quitté Columbia pour l'université Harvard, où il a enseigné pendant trente-six ans. En 1990 il a accepté son dernier poste universitaire comme professeur nommé à la chaire de mathématiques Sid W. Richardson à l'université du Texas à Austin.

Tate a aussi occupé des postes de professeur invité à l'université de Californie à Berkeley, à l'Institut des hautes études scientifiques à Bures-sur-Yvette, à l'université Paris-Sud (Orsay), à l'université de Princeton, et à l'École normale supérieure de Paris.

Tate a apporté des contributions fondamentales à la théorie algébrique des nombres et au domaine connexe de la géométrie algébrique. Il a aussi exercé une profonde influence sur le développement de la théorie des nombres à travers son rôle de directeur de thèse. Tate se verra décerner le prix Abel 2010 « pour l'étendue et le caractère durable de son influence sur la théorie des nombres », selon les propres termes du comité Abel.

Le jeune John s'est intéressé très tôt aux mathématiques. Inspiré par les livres que possédait son père, qui était professeur de physique, il a grandi avec une véritable fascination pour les énigmes mathématiques. Bien qu'il adorât les idées rencontrées dans ses lectures, il décida d'étudier la physique à l'université. Mais dès le courant de sa première année à Princeton, il réalisa que c'était les mathématiques qui l'attiraient vraiment. L'autorisation de transfert pour préparer une licence de mathématiques lui fut accordée. Il a obtenu son doctorat en 1950.

En soixante ans de carrière, Tate a laissé son empreinte sur les mathématiques modernes. Il est remarquable de constater le nombre de

16. NDT. Tate est décédé en 2019.

concepts mathématiques qui portent son nom, donnant ainsi la mesure de l'influence de ses idées en mathématiques. Dans la littérature consacrée à cette discipline, on relève le module de Tate, la courbe de Tate, le cycle de Tate, les décompositions de Hodge-Tate, la cohomologie de Tate, le paramètre de Serre-Tate, le groupe de Lubin-Tate, la trace de Tate, le groupe de Chafarevitch-Tate, la hauteur de Néron-Tate, etc.

Tate a reçu de nombreuses récompenses et distinctions. Dès 1956, le **prix Cole** de la Société américaine de mathématiques lui a été décerné pour ses remarquables contributions à la théorie des nombres. Quand le prix Steele pour l'ensemble de son œuvre lui a été décerné par cette même société en 1995, il a eu la répartie suivante : « Une vie d'activité mathématique est une récompense en elle-même, mais c'est appréciable d'être reconnu par ses pairs ». Tate a été distingué « pour sa création de concepts fondamentaux en théorie algébrique des nombres » quand, conjointement avec **Mikio Satō**, il a été désigné comme lauréat du prix Wolf 2002-2003 en mathématiques.

Tate a reçu une bourse de recherche de la fondation Sloan (1959-1961) ainsi qu'une bourse de la fondation Guggenheim (1965-1966). Il a été conférencier invité au Congrès international des mathématiciens en 1962 à Stockholm et de nouveau en 1970 à Nice. En 1972, il a prononcé le discours d'ouverture du colloque de la Société américaine de mathématiques.

Tate a été élu à l'Académie nationale des sciences des États-Unis en 1969. Il a aussi été nommé membre à titre étranger de l'Académie des sciences (à Paris) en 1992 et membre honoraire de la Société mathématique de Londres en 1999.

Bibliographie

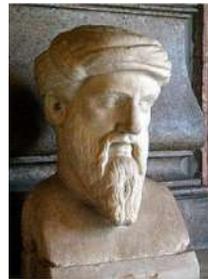
- CHAMBERT-LOIR (Antoine), « Le prix Wolf 2003 attribué à John Tate », *Gazette des mathématiciens*, 2003, n° 98, p. 49-55.

LA THÉORIE DES NOMBRES : LE TERRAIN DE JEU DE JOHN TATE (par ARNE B. SLETSJØE)

Les entiers algébriques, les corps finis, les nombres p -adiques, la théorie des corps de classes, les espaces analytiques rigides, les courbes elliptiques : voici quelques-uns des concepts que vous devez connaître si votre tâche consiste à décrire les travaux mathématiques de John Torrence Tate, le lauréat du prix Abel en 2010. Si vous ne connaissez aucun des mots cités, vous pouvez tout de même partager quelque chose avec l'un des scientifiques les plus brillants de notre époque : la fascination pour les nombres naturels. À première vue, ils semblent innocents et facilement accessibles. Compter, $1, 2, 3, \dots$, ou calculer, $1 + 2 = 3$, $3 + 5 = 8$, c'est un jeu d'enfant. Mais au fur et à mesure que l'on apprend à les connaître, on se rend compte que le monde dans lequel on plonge est immense, mystérieux et imprévisible.



Carl Friedrich Gauss : « Les mathématiques sont la reine des sciences et l'arithmétique est la reine des mathématiques. »



Pythagore : « Tout est nombre. »



Leopold Kronecker : « Dieu a créé les nombres entiers, le reste est l'œuvre de l'homme. »

La théorie des nombres est l'étude des propriétés des nombres en général, et des entiers en particulier. La théorie des nombres peut être subdivisée en plusieurs domaines, en fonction des méthodes utilisées et du type de questions étudiées. Les recherches de John Tate appartiennent principalement au sous-domaine de la théorie algébrique des nombres.

Dans la **théorie algébrique des nombres**, le concept de nombre est étendu aux nombres algébriques, c'est-à-dire aux racines des polynômes à coefficients rationnels. Ces ensembles contiennent des éléments analogues aux nombres entiers, les entiers algébriques, qui constituent l'un des principaux sujets d'étude dans ce domaine. De nombreuses questions relatives à la théorie des nombres sont abordées par réduction modulo p pour divers nombres premiers p . Cette procédure de localisation conduit à la construction des nombres p -adiques, un autre sujet d'étude important dans le domaine de la théorie algébrique des nombres.

Dans la **théorie élémentaire des nombres**, les nombres entiers sont étudiés sans recourir à des techniques issues d'autres domaines mathématiques. Les découvertes importantes de ce domaine sont le petit théorème de Fermat, le théorème d'Euler, le théorème des restes chinois et la loi de réciprocité quadratique, pour n'en citer que quelques-unes.

La **théorie analytique des nombres** utilise les outils du calcul infinitésimal et de l'analyse complexe pour aborder les questions relatives aux nombres entiers. Parmi les exemples, il y a le théorème des nombres premiers relatif au comportement asymptotique des nombres premiers et l'hypothèse de Riemann. Mais les démonstrations de la transcendance de π ou de e sont aussi classées dans la théorie analytique des nombres.

La **géométrie arithmétique** est l'étude des schémas de type fini sur le spectre de l'anneau des entiers \mathbb{Z} .

La **géométrie diophantienne** est l'étude des variétés algébriques sur les corps de nombres.

La **théorie combinatoire des nombres** traite des problèmes de théorie des nombres qui impliquent des idées combinatoires dans leur formulation ou leur solution. Paul Erdős est le principal fondateur de cette branche de la théorie des nombres. Les problèmes de recherche

de progressions arithmétiques dans un ensemble d'entiers en sont des exemples.

Les **formes modulaires** sont des **fonctions analytiques** sur le demi-plan supérieur qui satisfont un certain type d'équation fonctionnelle et une condition de croissance. La théorie des formes modulaires appartient donc à l'analyse complexe, mais son importance principale réside traditionnellement dans ses liens avec la théorie des nombres.

L'influence de John Tate sur la théorie moderne des nombres se lit dans les nombreux résultats et concepts qui portent son nom. En voici quelques-uns.

Théorie de Hodge-Tate : analogue p -adique de la **décomposition de Hodge** pour la cohomologie complexe.

La **loi de groupe formel de Lubin-Tate** est l'unique loi de groupe formel (à une dimension) F telle que $e(x) = px + x^p$ soit un **endomorphisme** de F , c'est-à-dire telle que $e(F(x, y)) = F(e(x), e(y))$.

La **conjecture de Satō-Tate** est un énoncé statistique sur la famille des courbes elliptiques E_p sur le corps fini à p éléments, avec p un nombre premier, obtenues à partir d'une courbe elliptique E sur le corps des nombres rationnels par le processus de réduction modulo un nombre premier pour presque tous les p .

Dans la théorie des courbes elliptiques, l'**algorithme de Tate** prend en entrée un modèle intégral d'une courbe elliptique E sur \mathbb{Q} et un nombre premier p . Il renvoie l'exposant f_p de p dans le conducteur de E , le type de réduction en p et l'indice local c_p .

Grâce au **théorème de Serre-Tate**, on peut contrôler (une partie) des déformations en caractéristique p d'un **schéma abélien** provenant de la partie locale du groupe de Barsotti-Tate.

Les **groupes de Barsotti-Tate** apparaissent dans la « nature » lorsque l'on considère la suite des noyaux de multiplication par des puissances successives de p sur une variété abélienne.

Les **groupes de cohomologie de Tate** sont une forme légèrement modifiée des groupes de cohomologie habituels d'un groupe fini qui combinent les groupes d'**homologie et de cohomologie** en une seule suite.

Module de Tate : module galoisien construit à partir d'une variété abélienne sur un corps.

Le **théorème d'isogénie de Tate** dit que les variétés abéliennes ayant des modules de Tate isomorphes sont isogènes.

Torsion de Tate : un groupe abélien particulier avec une **action** d'un **groupe de Galois** construit à partir d'un corps.

Le **motif de Tate** est l'inverse tensoriel du motif de **Lefschetz**.

Le **groupe de Tate-Chafarevitch**, nommé d'après Tate et Igor Chafarevitch, d'une variété abélienne définie sur un corps de nombres K est constitué des éléments du groupe de **Weil-Châtelet** qui deviennent triviaux dans toutes les complétions de K .

La **hauteur de Néron-Tate** (ou hauteur canonique) est une **forme quadratique** sur le groupe de Mordell-Weil des points rationnels d'une variété abélienne définie sur un **corps global**.

La **théorie de Honda-Tate**, c'est-à-dire la classification des variétés abéliennes sur les corps finis à isogénie près.

Un résultat fondamental de la théorie des nombres est le théorème de décomposition unique en produit de facteurs premiers. En 1647, dans une tentative pour démontrer le dernier théorème de Fermat, **Gabriel Lamé** a supposé à tort que cette propriété était valable en général. Il a été immédiatement corrigé par **Joseph Liouville** qui s'est référé aux résultats d'**Ernst Kummer** publiés en 1843 sur l'échec de la factorisation unique des nombres premiers dans certains anneaux d'entiers algébriques. Cette petite dispute innocente est devenue l'origine d'une branche de la théorie des nombres, dont John Tate a été l'une des principales figures au cours des cinquante dernières années.

Le **théorème fondamental de l'arithmétique** (ou théorème de décomposition en produit de facteurs premiers) stipule que tout nombre entier supérieur à 1 peut être écrit comme un produit unique (à l'ordre des facteurs près) de nombres premiers. Intuitivement, ce théorème caractérise les nombres premiers de manière unique : ce sont les « nombres fondamentaux ». Le théorème a été pratiquement démontré par Euclide, mais la première démonstration complète et correcte se trouve dans les *Disquisitiones arithmeticae* de Carl Friedrich Gauss.

Factorisation dans les corps de nombres algébriques

En théorie des nombres, le point de départ est l'ensemble des **entiers relatifs** ($\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$) désigné par \mathbb{Z} . Les entiers relatifs sont inclus dans les nombres rationnels \mathbb{Q} , c'est-à-dire toutes les **fractions** d'entiers dont le **dénominateur** est différent de 0. Malheureusement, le nombre $\sqrt{2}$, défini comme la racine de l'équation polynomiale $x^2 - 2 = 0$, n'est pas inclus dans \mathbb{Q} , comme l'ont observé les pythagoriciens vers 400 av. J.-C. Néanmoins, nous sommes intéressés par l'étude des propriétés de $\sqrt{2}$. Nous étendons donc \mathbb{Q} avec $\sqrt{2}$ pour obtenir notre premier corps de nombres algébriques fait maison, noté $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, composé de tous les nombres qui peuvent être écrits sous la forme $a + b\sqrt{2}$, où a et b sont des nombres rationnels.

Le nombre $\sqrt{2}$ est défini comme la solution d'une certaine équation polynomiale. On peut en fait montrer que tous les nombres de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ satisfont une certaine équation polynomiale, pas la même pour tous, mais au moins une pour chacun.

Certains nombres rationnels sont des entiers, et certains nombres algébriques sont des entiers algébriques. La façon dont nous décidons si un nombre doit être appelé entier est la suivante : nous examinons l'équation polynomiale **unitaire** du nombre (unitaire signifie que le coefficient du terme de degré le plus élevé est 1). Si tous les coefficients sont entiers, toutes les racines de l'équation sont des entiers algébriques. Des exemples d'entiers algébriques dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ sont $\sqrt{2}$ (racine du polynôme $x^2 - 2$) et $1 + \sqrt{2}$ (racine de $x^2 - 2x - 1$).

Une propriété fondamentale des entiers est la propriété de factorisation unique. Il n'existe qu'une seule façon d'écrire 105 comme produit de nombres premiers ($105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$) si l'on ne se préoccupe pas de l'ordre des facteurs. Mais dans un corps de nombres algébriques général, ce n'est plus vrai. L'exemple préféré de (presque) tous les mathématiciens est l'**extension** de \mathbb{Q} par la racine carrée de -5 (si vous n'aimez pas la racine carrée d'un nombre négatif, fermez les yeux et continuez à marcher, vous vous y habituerez). Dans cette extension, ou plutôt dans sa partie entière, le nombre 6 a deux factorisations différentes :

$$6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5}) \cdot (1 - \sqrt{-5}).$$

Tous les facteurs impliqués sont des nombres premiers, c'est-à-dire qu'ils ne sont divisibles que par 1 et par eux-mêmes.

La mesure dans laquelle la factorisation unique échoue dans l'anneau des entiers d'un corps de nombres algébriques peut être décrite

par un certain groupe connu sous le nom de **groupe des classes d'idéaux**. Si le groupe des classes est fini, l'ordre du groupe est appelé « nombre de classes ». Le groupe des classes des entiers algébriques d'un corps de nombres algébriques est trivial si et seulement si l'anneau des entiers algébriques possède la propriété de factorisation unique. La taille du groupe des classes d'idéaux peut donc être considérée comme une mesure de l'écart par rapport à un **anneau factoriel**.

Milnor (2011)

« pour ses découvertes novatrices en topologie, géométrie et algèbre ».

Les travaux de **Milnor** dans leur ensemble révèlent des recherches absolument remarquables : de profondes intuitions, une imagination fertile, des éléments de surprise et une suprême beauté.

La découverte par Milnor des **sphères exotiques** lisses de dimension 7 était tout à fait inattendue. Elle a annoncé l'arrivée de la **topologie différentielle** et une explosion de travaux menés par une génération de brillants mathématiciens, qui dure depuis plusieurs décennies et a métamorphosé le paysage des mathématiques. Avec **Michel Kervaire**, Milnor a entrepris de donner un inventaire complet de toutes les **structures différentielles** distinctes sur des sphères de toutes dimensions. Ils ont montré en particulier que la sphère de dimension 7 comporte exactement 28 structures différentielles distinctes. Ils ont été parmi les premiers à identifier la nature particulière des variétés de dimension 4, préfigurant des développements fondamentaux en topologie.

La réfutation par Milnor de la « conjecture fondamentale » (*Hauptvermutung*), qui avait été formulée de longue date, a renversé les prévisions en matière de **topologie combinatoire** remontant à Poincaré. Milnor a découvert également des variétés lisses **homéomorphes** avec des fibrés tangents non isomorphes, pour lesquels il a développé la théorie des microfaisceaux. Dans la théorie des **variétés de dimension 3**, il a démontré un élégant **théorème de décomposition** unique.

En dehors de la topologie, Milnor a apporté des contributions significatives à la géométrie différentielle, à l'algèbre et aux systèmes dynamiques. Dans chaque domaine abordé par Milnor, ses intuitions et ses approches ont eu un impact profond sur les développements ultérieurs. Sa monographie sur les **singularités isolées** des **hypersurfaces** est considérée comme une œuvre absolument déterminante en **théorie des singularités**. Nous lui devons le nombre de Milnor et la fibration de Milnor.

Les topologues se sont mis à utiliser activement les algèbres et coalgèbres de Hopf après les travaux décisifs de Milnor et de J. C. Moore. Milnor a émis pour sa part de nouveaux points de vue sur la structure de l'algèbre de **Steenrod** (algèbre des opérations cohomologiques) en utilisant la théorie des **algèbres de Hopf**. En **K-théorie algébrique**, Milnor

a introduit le **foncteur** K_2 . La célèbre **conjecture de Milnor** dans cette théorie, finalement démontrée par **Voïevodski**, a impulsé de nouvelles orientations dans l'étude des motifs en géométrie algébrique. L'introduction par Milnor de l'invariant de croissance d'un groupe a établi un lien entre la théorie combinatoire des groupes et la géométrie, préfigurant la théorie des **groupes hyperboliques** de Gromov.

Plus récemment, John Milnor s'est intéressé aux systèmes dynamiques en basse dimension. Avec **Thurston**, il a ouvert la voie à la « théorie du pétrissage » pour les applications de l'intervalle, en posant les fondements combinatoires de la dynamique de l'intervalle, créant ainsi un foyer de recherches intenses pendant trois décennies. La conjecture de Milnor et Thurston sur la monotonie de l'**entropie** a stimulé les efforts pour comprendre tout à fait la dynamique pour la famille quadratique réelle, en reliant profondément la dynamique réelle et la **dynamique holomorphe**, et en suscitant des avancées passionnantes.

Milnor est un interprète magnifiquement doué des mathématiques sophistiquées. Il s'est souvent attaqué à des sujets de pointe difficiles, pour lesquels il n'existait aucun exposé sous forme d'ouvrage. En apportant des points de vue originaux, il a suscité au bon moment un courant de travaux durables d'une lucidité magistrale. Tel un compositeur de musique inspiré, qui se montre aussi un interprète charismatique, John Milnor est à la fois un précurseur et un interprète.

John Willard Milnor est né le 20 février 1931 à Orange dans le New Jersey aux États-Unis. Milnor est un professeur éminent et codirecteur de l'institut des sciences mathématiques à l'université d'État de New York à Stony Brook.

Milnor a fait ses études à l'université de Princeton, où il a obtenu sa licence en 1951. Une fois licencié, il a commencé ses recherches à Princeton et fait preuve d'un talent si exceptionnel qu'en 1953 il a été nommé enseignant à Princeton avant même d'avoir terminé son doctorat. En 1954, Milnor a obtenu son doctorat avec Ralph Fox comme directeur de thèse.

Milnor est resté membre du corps enseignant à Princeton où il a bénéficié d'une bourse Sloan de 1955 à 1959. Il a été promu professeur en 1960 et nommé en 1962 à la chaire Henry-Putman.

Il a occupé un poste à l'université de Princeton jusqu'en 1967. Après avoir rempli certaines fonctions de courte durée à l'université de Californie à Los Angeles et à l'institut de technologie du Massachusetts, Milnor a rejoint l'Institut d'étude avancée à Princeton en 1970. En

1989, il est devenu le premier directeur de l'institut des sciences mathématiques de l'université d'État de New York à Stony Brook, dont il est actuellement codirecteur.

Milnor a joué un rôle capital dans la Société américaine de mathématiques et a assuré la fonction de vice-président durant un mandat (1975-1976). Il a été éditeur de la revue *Annals of Mathematics* pendant de nombreuses années.

Au cours de soixante ans de carrière, Milnor a profondément marqué les mathématiques modernes. De nombreux concepts, résultats et conjectures mathématiques ont pris son nom. À titre d'exemple, nous trouvons dans la littérature spécialisée les sphères exotiques de Milnor, la fibration de Milnor, le nombre de Milnor, la théorie du pétrissage de Milnor-Thurston et la **conjecture de Milnor** dans la **théorie des nœuds**, la **K-théorie de Milnor**, la **théorie combinatoire des groupes** et la dynamique holomorphe.

Toutefois, la portée des travaux de Milnor va bien au-delà de ses propres résultats spectaculaires. Il est aussi l'auteur d'ouvrages très remarquables, qui sont largement considérés comme des modèles d'excellente écriture mathématique. Ses ouvrages de référence s'intitulent notamment *Topologie différentielle* (1958), *Théorie de Morse* (1963), *Leçons sur le théorème du h -cobordisme* (1965), *Les points singuliers des hypersurfaces complexes* (1968), *Introduction à la K-théorie algébrique* (1971), *Dynamique à une variable complexe* (1999) et *Classes caractéristiques* avec **J. Stasheff** (1974).

Milnor a été le lauréat de nombreuses récompenses et distinctions. Il a reçu la médaille Fields en 1962 pour son travail sur la topologie différentielle alors qu'il n'avait que trente-et-un ans. Récemment la Société américaine de mathématiques lui a décerné le prix Steele 2011 pour l'ensemble de sa carrière. Selon le comité de sélection, « Milnor se détache de la liste des grands mathématiciens quant à l'ensemble de son œuvre et à son influence sur les mathématiques en général ». Milnor a précédemment remporté deux autres prix Steele décernés par la Société américaine de mathématiques pour la vulgarisation mathématique (2004) et pour une contribution majeure à la recherche (1982).

En 1989, Milnor a reçu le prix Wolf en mathématiques, un prix international qui vise à promouvoir la science et les arts au bénéfice de l'humanité. La fondation Wolf a récompensé Milnor « pour ses découvertes ingénieuses et hautement originales en géométrie, qui ont ouvert de nouvelles perspectives importantes en topologie d'un point de vue algébrique, combinatoire et différentiel ».

Milnor a reçu la Médaille nationale de la science en 1967. Il a été élu membre de l'Académie nationale des sciences en 1963. Milnor est aussi membre de l'Académie américaine des arts et des sciences et de la Société américaine de philosophie. Depuis 1994, il est membre à titre étranger de l'Académie des sciences de Russie. En 2004, il est devenu membre de l'Académie européenne des sciences, des arts et des lettres.

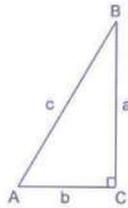
Bibliographie

- IZQUIERDO (D.), « Autour de la conjecture de Milnor », *Gazette des mathématiciens*, 2020, n° 166, p. 35-49.

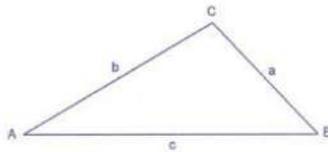
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE (par ARNE B. SLETSJØE)

La classification de divers objets est une partie importante de la recherche mathématique. Combien de triangles différents peut-on construire et quels sont les critères d'équivalence de deux triangles ? Ce type de questions peut être posé dans presque tous les domaines des mathématiques, et bien sûr aussi en dehors des mathématiques. Nous classons les êtres humains en fonction de leur sexe ou de leur âge. Le temps qu'il fera demain est classé en fonction de la température, de la pression et de la nébulosité attendues. La base de toute classification est de décider quels objets doivent être considérés comme équivalents. La différence entre la topologie et la géométrie est de ce type : les deux domaines de recherche ont des critères différents pour l'équivalence entre les objets.

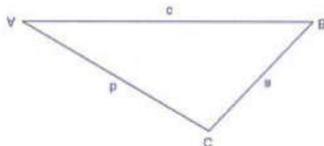
Classification des triangles. Voici un triangle :



Voici un autre triangle :



Ceci est également un triangle :



Trois objets très différents, mais tous des triangles. La raison tient à ce que les trois objets satisfont aux critères d'un triangle : le bord est linéaire par morceaux et se compose de trois arêtes. Tout objet répondant à ce critère est appelé triangle. Il s'agit d'une manière raisonnable de classer les objets à bords droits, appelés polygones, en comptant simplement le nombre d'arêtes. Tous les polygones ont des propriétés communes.

Propriété n° 1 des polygones : *il faut voir toute la figure pour déterminer le nombre d'arêtes.* Si vous ne voyez qu'une petite partie de l'intérieur d'un polygone, vous ne pourrez pas décider si le polygone a trois ou quatre arêtes, ou plus. Le fait d'être un polygone est ce que nous appelons une propriété globale. Le contraire est une propriété locale. La mesure d'un angle est une propriété locale. Il suffit d'apercevoir un tout petit quartier autour du sommet pour décider de la mesure de l'angle.

Propriété n° 2 pour les polygones : *la taille et la forme (tant qu'il s'agit de polygones) ne sont pas pertinentes.* Il existe une infinité de triangles différents. Le fait est que nous ne nous soucions pas de la longueur ou de la taille des angles, nous nous contentons de les compter. Le fait d'être un triangle n'est pas une propriété géométrique, puisque la géométrie implique des mesures. La propriété d'être un triangle est plutôt une propriété topologique. Le mot « topologie » est composé des termes grecs « topos », qui signifie lieu, et « logos », qui signifie parole, discours ou raison.

En tant que branche des mathématiques, la topologie trouve son origine dans les travaux d'Henri Poincaré vers la fin du XIX^e siècle, mais elle peut également être rattachée au grand Gauss. Dans ce que l'on appelle aujourd'hui la formule de Gauss-Bonnet, Gauss et plus tard Bonnet ont montré que la somme des courbures pour chaque point d'un ballon est indépendante de la forme locale du ballon. Si nous déformons le ballon en appuyant le bout d'un doigt sur sa surface, la courbure totale reste inchangée. En certains points, la courbure augmentera, en d'autres, elle diminuera. Mais comme nous l'a appris Gauss, les changements s'annulent les uns les autres. La courbure totale est donc une propriété globale, qui ne dépend en fait que de la classe topologique du ballon.

Égalité des triangles.

Il existe une autre propriété familière des triangles, appelée égalité. Deux triangles sont égaux (ou **isométriques**) si les angles et les longueurs des arêtes sont égaux deux à deux. Cela nous donne une nouvelle façon de classer les triangles. Dans l'ancienne classification, tous les triangles étaient équivalents, il n'existait pour ainsi dire qu'un seul triangle.

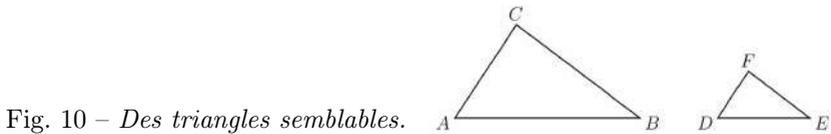
Dans la nouvelle classification, la condition d'équivalence est beaucoup plus forte. L'égalité est une propriété très stricte, comme en témoigne le nombre considérable de classes d'équivalence de triangles égaux. Chacun des trois sommets est donné par une paire de coordonnées, ce qui donne un espace de paramètres à 6 dimensions. Dans cet espace, il existe un sous-espace à 5 dimensions où les trois points sont alignés (deux points sont choisis librement et le troisième doit rester sur la droite qui passe par les deux autres). Nous évitons ce sous-espace car il paramétrise des triangles dégénérés, qui ne sont plus de vrais triangles. En permutant les sommets, on obtient des triangles équivalents, ce qui donne en général six symétries. Bien entendu, deux triangles doivent être équivalents si l'un est le translaté de l'autre. Il existe une famille bidimensionnelle de translations dans le plan, qui réduit l'espace des paramètres à quatre dimensions. Enfin, il existe une famille de rotations à une dimension, ce qui réduit encore la dimension. Au final, nous obtenons un espace de paramètres tridimensionnel de triangles, avec un sous-espace bidimensionnel de triangles dégénérés et une réduction basée sur une symétrie finie. Les trois paramètres peuvent être considérés comme les longueurs des trois arêtes, et ce triplet détermine la classe d'équivalence du triangle.

Triangles semblables

Entre la classification grossière, qui consiste à compter les arêtes, et la classification plus fine des triangles égaux, il existe une classification intermédiaire, celle de la similitude. La similitude des triangles est presque identique à l'égalité, mais la taille des triangles n'a plus d'importance. Ainsi, l'espace des paramètres des **triangles semblables** a une dimension de moins que l'espace pour l'égalité des triangles, c'est-à-dire deux dimensions, toujours avec la réduction symétrique finie. Si nous désignons par a , b et c les longueurs des arêtes, l'espace bidimensionnel des triangles semblables a pour paramètres a/c et b/c .

Il est important de se rappeler que, quelle que soit la méthode de classification, les triangles restent les mêmes. La différence est de savoir

leuels d'entre eux nous considérons comme équivalents.



Et Milnor ?

Lorsque Milnor affirme que les sphères de dimension 7 sont homéomorphes mais pas **difféomorphes**, le raisonnement est analogue à notre traitement des triangles. Le fait d'être homéomorphe est moins strict que le fait d'être difféomorphe, tout comme le fait d'être semblables est moins strict pour les triangles que le fait d'être égaux.

Avant le résultat de Milnor, de nombreuses personnes pensaient que pour les sphères, les deux concepts étaient équivalents. Milnor a montré que ce n'était pas le cas, la difféomorphie étant plus stricte que l'homéomorphie.

DES SPHÈRES EXOTIQUES DE DIMENSION 7

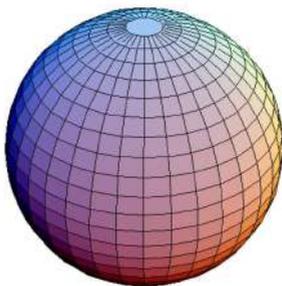
(par ARNE B. SLETSJØE)

Selon la citation du comité Abel,

« La découverte par Milnor des sphères lisses exotiques de dimension 7 était tout à fait inattendue. Elle a annoncé l'arrivée de la topologie différentielle et une explosion de travaux menés par une génération de brillants mathématiciens, qui dure depuis plusieurs décennies et a métamorphosé le paysage des mathématiques. Avec Michel Kervaire, Milnor a entrepris de donner un inventaire complet de toutes les structures différentielles distinctes sur des sphères de toutes dimensions. Ils ont montré en particulier que la sphère de dimension 7 comporte exactement 28 structures différentielles distinctes. »

Des sphères de dimension 7

Une sphère de dimension 7 est une généralisation de la sphère ordinaire de dimension 2. Un cercle est une sphère de dimension 1. En fixant deux points opposés sur la sphère et en faisant tourner le cercle dans la dimension suivante, on obtient une sphère de dimension 2. Faites de même avec la sphère bidimensionnelle, placez le bout de vos doigts l'un au pôle Nord et l'autre au pôle Sud, puis faites tourner le cercle dans la dimension suivante. Vous obtenez ainsi une sphère tridimensionnelle (très peu visualisable). Poursuivez cette procédure jusqu'à la dimension 7 pour obtenir une sphère de dimension 7.



Un point de vue différent consiste à considérer une sphère par le biais de ses symétries. Un cercle est l'ensemble des points du plan à

une distance donnée d'un point fixe, le centre du cercle. La sphère de dimension 2 peut être définie de manière similaire, comme l'ensemble des points dans l'espace à une distance donnée d'un point choisi. La sphère de dimension 7 est l'ensemble des points d'un espace à huit dimensions à une distance donnée du centre choisi.

Structures différentielles

La définition locale d'une structure différentielle, c'est-à-dire sur une petite partie de la sphère, est étroitement liée à l'établissement de cartes de la sphère. Il existe différentes façons de le faire. Pour définir une structure différentielle sur l'ensemble de la sphère, nous avons besoin de suffisamment de cartes pour couvrir la sphère, et il doit y avoir des règles sur la façon d'identifier les points identiques des cartes sur le chevauchement entre deux cartes.



En raison de la courbure de la sphère, une carte sera légèrement fautive vers les bords : les lignes parallèles divergeront. Les lignes correspondantes sur la carte suivante divergeront dans la direction opposée. Nous devons définir une fonction de transition entre les deux cartes. La difficulté mathématique n'est pas de dessiner les cartes, mais de s'assurer qu'elles s'emboîtent, c'est-à-dire que les fonctions de transition sont cohérentes sur les chevauchements. En particulier, on peut imaginer que l'ajustement de la dernière carte n'est pas une tâche facile. Intuitivement, l'exercice ne semble pas très difficile, et sur la sphère bidimensionnelle, il ne l'est pas. Mais essayez de faire la même chose sur une sphère de dimension 7 avec des cartes de dimension 7 qui se chevauchent. C'est alors plus compliqué.

Des sphères exotiques

Pour pouvoir accomplir cette tâche abstraite, il faut faire des choix. Milnor et Kervaire ont démontré qu'il existe 28 façons de procéder.

L'une d'entre elles est plus ou moins similaire à la façon dont on procède dans le cas bidimensionnel, mais les 27 autres sont plus compliquées et aucune d'entre elles n'a d'analogie avec le cas bidimensionnel. Milnor a appelé ces structures compliquées des sphères exotiques.



TAB. 2 – Nombre de structures différentielles différentes sur les sphères en basse dimension.

dimension	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
nombre de structures	1	1	1	?	1	1	28	2	8	6

dimension	11	12	13	14	15	16	17	18
nombre de structures	992	1	3	2	16 256	2	16	16

Le statut de la dimension 4 reste ouvert. On ne sait pas s'il existe une, plusieurs ou une infinité de structures lisses sur la sphère de dimension 4. L'affirmation selon laquelle il en existe précisément une est connue sous le nom de « **conjecture de Poincaré** lisse en dimension 4 ». En 1982, **Michael Freedman** a démontré la conjecture de Poincaré en dimension 4 : si une variété de dimension 4 est homotopiquement équivalente à une sphère de dimension 4, alors elle est aussi homéomorphe à une sphère de dimension 4. Mais il a laissé une question ouverte pour des recherches futures : si une variété de dimension 4 est homotopiquement équivalente à une sphère de dimension 4, est-elle nécessairement difféomorphe à une sphère de dimension 4 ? Les sphères exotiques de Milnor montrent que la conjecture de Poincaré lisse est en fait fautive en dimension 7.

LA CONJECTURE FONDAMENTALE DE LA TOPOLOGIE COMBINATOIRE [STEINITZ, TIETZE ; 1908] (par ARNE B. SLETSJØE)

La conjecture fondamentale (en allemand *Hauptvermutung*) de la topologie combinatoire (aujourd'hui appelée topologie algébrique) a été publiée en 1908 par le mathématicien allemand **Ernst Steinitz** et le mathématicien autrichien **Heinrich Tietze**. La conjecture stipule que, étant donné deux **triangulations** du même espace, il est toujours possible de trouver un raffinement commun. La conjecture a été démontrée en dimension 2 par **Tibor Radó** dans les années 1920 et en dimension 3 par **Edwin E. Moise** dans les années 1950. La conjecture a été réfutée en dimension supérieure ou égale à 6 par John Milnor en 1961.

Triangulation

L'agence norvégienne de cartographie a été créée en 1773 par l'officier militaire Heinrich Wilhelm von Huth dans le but de mesurer la Norvège et de dresser des cartes précises et utiles. Six ans plus tard, l'agence s'est attelée à la tâche assez complexe de la triangulation. Lors de la triangulation d'un terrain, il faut choisir des points de référence et calculer leurs coordonnées par rapport aux points voisins. Ensuite, il faut choisir un ensemble de segments de connexion, les arêtes, entre les points de référence afin d'obtenir un réseau triangulaire. Les choix des points de référence et des arêtes sont effectués de manière à obtenir des triangles pour lesquels la courbure du paysage intérieur est négligeable. Ainsi, si le paysage est vallonné, les points de référence doivent être choisis assez denses, alors que les terres agricoles plates n'ont pas besoin de beaucoup de points. De cette manière, il est possible de donner une description assez précise de l'ensemble du paysage. La recette de la triangulation peut être utilisée pour des surfaces arbitraires. Le processus permet d'obtenir une linéarisation par morceaux de la surface. L'avantage du modèle linéaire par morceaux est sa simplicité combinatoire et informatique. En même temps, les propriétés essentielles de la surface sont conservées.

Raffinements des triangulations

Dans la conjecture fondamentale, le concept de raffinement d'une triangulation est crucial. Le raffinement d'une triangulation est obtenu en introduisant des points de référence et des arêtes supplémentaires, affinant ainsi le réseau triangulaire existant. Le raffinement n'est pas

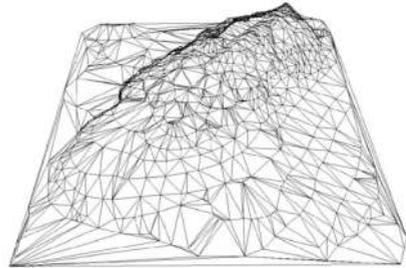


Fig. 11 – *Triangulation d'un paysage de montagne.*

unique. En fait, il existe une infinité de choix de points de référence et un nombre fini de choix d'arêtes possibles pour créer un réseau triangulaire. La conjecture fondamentale nous indique que pour deux triangulations d'un espace, nous pouvons toujours trouver un raffinement commun.

Pour les domaines plans, la procédure de raffinement peut être décrite facilement. Les deux triangulations sont superposées, tous les points de référence et les arêtes des deux triangulations constituant le nouveau squelette. Il est possible que deux arêtes se rencontrent en un point qui ne soit pas de référence. Nous introduisons alors un nouveau point de référence à cette intersection. Il est également possible que cette configuration comprenne des polygones avec plus de trois arêtes. Dans ce cas, nous introduisons suffisamment de nouveaux points et de nouvelles arêtes pour maintenir la structure triangulaire.

Il est important de noter que la conjecture fondamentale concerne toute paire de triangulations d'un espace donné. Ainsi, pour réfuter la conjecture, un seul contre-exemple suffit. En 1961, Milnor a donné un tel contre-exemple.

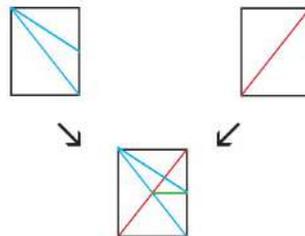


Fig. 12 – *Deux triangulations d'un rectangle et leur raffinement commun.*

Le théorème de Milnor

Soit L_q la variété tridimensionnelle **lenticulaire** de type $(7, q)$, convenablement triangulée. Soit Δ^n un n -**simplexe**. On obtient un **complexe simplicial** fini X_q à partir du produit $L_q \times \Delta^n$ en adjoignant un cône sur la frontière $L_q \times \partial\Delta^n$. La dimension de X_q est $n + 3$.

Théorème 1. *Pour $n + 3 \geq 6$, le complexe X_1 est homéomorphe à X_2 .*

Théorème 2. *Aucune subdivision cellulaire finie du complexe simplicial X_1 n'est isomorphe à une subdivision cellulaire de X_2 .*

Le théorème donne un contre-exemple à la conjecture fondamentale de la topologie combinatoire.

J. W. MILNOR : « SUR LA COURBURE TOTALE DES NŒUDS »
 [*Annals of Mathematics*, vol. 52, n° 2 (1950)]
 (par ARNE B. SLETSJØE)

En octobre 1949, John Milnor a reçu le message que son premier article avait été accepté pour publication dans une revue internationale. Il n'avait alors que dix-huit ans. L'article portait sur la « géométrie des nœuds ». Le mathématicien allemand **Werner Fenchel**, de l'université de Copenhague, avait montré en 1929 que la **courbure** totale d'une courbe fermée dans l'espace dépasse toujours 2π . Le résultat avait été généralisé à des dimensions arbitraires par le mathématicien polonais **Karol Borsuk** en 1949. Le théorème de Milnor combine le résultat de Fenchel-Borsuk et la théorie des nœuds, et stipule que pour un nœud non trivial, la courbure totale dépasse 4π , c'est-à-dire au moins deux rotations. Le théorème a été démontré indépendamment, mais presque simultanément, par le mathématicien hongrois István Fáry, d'où le nom de **théorème de Fáry-Milnor**.

La théorie des nœuds

La théorie des nœuds est un sous-domaine des mathématiques qui vise à décrire tous les nœuds. Par définition, un nœud est une courbe fermée dans l'espace, c'est-à-dire sans extrémités ouvertes. On peut illustrer les nœuds par des croquis dans un plan, où chaque croisement a une façon prescrite de dire quelle branche est au-dessus et quelle branche est au-dessous. Deux nœuds sont dits équivalents si l'on peut transformer l'un dans l'autre en tirant et en poussant les branches de la corde, mais pas en les coupant ou en les collant.

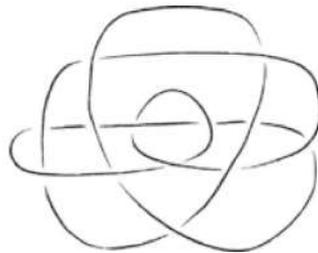


Fig. 13 –
Un exemple de nœud.

Le plus simple de tous les nœuds est le cercle. Il est souvent appelé « nœud non noué » puisqu'il s'agit mathématiquement d'un nœud, mais

il n'est pas considéré comme un véritable nœud. La figure 14a présente deux versions d'un nœud non noué : celle de gauche est manifestement un nœud non noué et celle de droite peut être transformée en cercle d'une manière admissible.

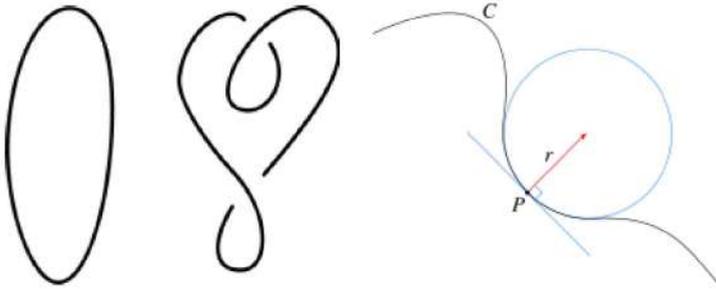


Fig. 14

La courbure des courbes de l'espace

Le premier article de Milnor porte sur la courbure des nœuds. La courbure d'une courbe est une fonction définie sur la courbe : nous attribuons à chaque point de la courbe un nombre, la courbure de la courbe en ce point (fig. 14b). Une ligne droite a une courbure nulle en tout point. Un cercle a une courbure constante égale à 1 divisé par le rayon. Ainsi, un cercle plus petit a une plus grande courbure. La courbure totale s'obtient en sommant les courbures en tous les points de la courbe. Pour un cercle, la courbure est constante et la courbure totale est la circonférence multipliée par la courbure constante : $(1/R) \times 2\pi R = 2\pi$. Cela correspond parfaitement au résultat de Fenchel de 1929, qui affirme que la courbure totale d'une courbe fermée est au moins égale à 2π . Il y a égalité pour les courbes planes et **convexes**.

Le théorème de Fáry-Milnor

Le résultat de Milnor de 1949 est connu sous le nom de théorème de Fáry-Milnor. La raison de ce double nom est que le mathématicien hongrois István Fáry a également démontré ce résultat de manière indépendante et simultanément.

Le théorème de Fáry-Milnor affirme que si un nœud n'est pas un nœud non noué, la courbure totale dépasse 4π , c'est-à-dire que la corde doit au moins faire deux tours pour produire un nœud non trivial. Le

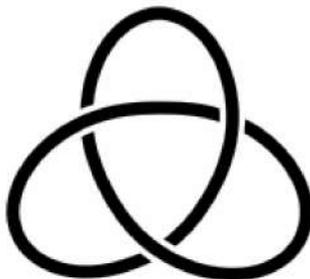


Fig. 15 – *Le nœud de trèfle.*

nœud non trivial le plus simple est le nœud de trèfle (fig. 15). Par inspection, il est facile d'accepter que ce nœud a une courbure totale d'au moins 4π . Sans tenir compte des parties de la courbe où elle se croise elle-même, la projection plane du nœud aura une courbure totale de 4π . Dans le croisement, où une branche doit être soulevée, il doit y avoir une certaine courbure dans la direction hors du papier. En additionnant les deux, nous obtenons un peu plus que 4π .

Remarquons également que le théorème de Fáry-Milnor ne donne une implication que dans un sens : si le nœud est un nœud non noué, la courbure excède 4π . Mais l'affirmation inverse n'est pas vraie. Comme l'illustre la figure 16, il existe des nœuds non noués dont la courbure totale est bien supérieure à 4π .

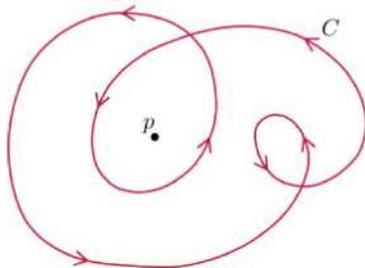


Fig. 16

La démonstration du théorème de Milnor sur la courbure des nœuds ne fait pas appel à des mathématiques très difficiles, mais elle est plutôt élégante. La communauté mathématique a été quelque peu surprise qu'un jeune de dix-huit ans puisse démontrer un tel théorème. Par ailleurs, l'article faisait preuve d'une grande maturité. La communauté mathématique avait découvert un grand talent mathématique.

LA PLACE DE L'ÉTOILE À PARIS, AVEC L'ARC DE TRIOMPHE AU CENTRE, A UN NOMBRE DE MILNOR ÉGAL À 25
(par ARNE B. SLETSJØE)

Dans les années 1960, John Milnor s'est intéressé à la théorie des singularités. Les concepts de nombre de Milnor et de fibre de Milnor sont issus de cette période. Formellement, l'intersection avec une boule B_δ de rayon δ centrée en 0 de l'image inverse d'un disque ponctué $D \setminus \{0\}$ dans \mathbb{C} par la fonction analytique $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, qui définit la singularité, est homotope à un bouquet de n -sphères réelles, dont le nombre est le nombre de Milnor. Mais nous allons attaquer le problème d'un point de vue différent.

Le nombre de Milnor d'un carrefour routier

Quelle est la différence entre un point générique d'une route et un carrefour ? Cette question peut recevoir un grand nombre de réponses plus ou moins différentes. L'une des plus originales est que les deux points ont des nombres de Milnor différents. Un point arbitraire le long de la route a un nombre de Milnor égal à 0, tandis que le carrefour où deux routes se croisent a un nombre de Milnor égal à 1. La place de l'Étoile à Paris, où l'Arc de triomphe est situé à l'intersection de 6 avenues, a un nombre de Milnor égal à 25. Plus le nombre de Milnor est élevé, plus le carrefour est compliqué. Le concept de nombre de Milnor, mais pas le nom lui-même, a été introduit par Milnor dans les années 1960, alors qu'il étudiait les singularités isolées des hypersurfaces complexes. Les singularités sont des points particuliers d'une surface, d'une courbe ou d'un volume, où par définition il y a « trop de tangentes ». Dans l'exemple ci-dessus, les routes sont considérées comme des courbes mathématiques. Les courbes sont des variétés à une dimension. Elles sont censées avoir au plus une direction tangente, le long de la route. Aux carrefours, il y a deux directions tangentes. Les carrefours sont donc des points singuliers. L'Arc de triomphe comporte six directions tangentes, ce qui en fait un point très singulier.

Concept général

Il n'est pas nécessaire d'introduire le nombre de Milnor pour compter les rues de Paris. Mais le nombre de Milnor peut être défini dans des cas bien plus compliqués que l'exemple assez simple du carrefour. Par exemple, au sommet d'un cône, il existe une singularité de surface



Un croisement de routes avec un nombre de Milnor égal à 1.

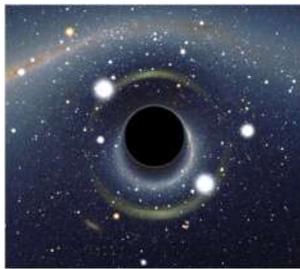


La place de l'Étoile à Paris a un nombre de Milnor égal à 25.

de nombre de Milnor égal à 1. En principe, nous pourrions également calculer le nombre de Milnor d'un trou noir dans l'univers, si seulement nous savions à quoi ressemble l'intérieur du trou noir. Malheureusement, nous ne le savons pas, car aucune lumière ou autre information ne peut s'échapper du trou noir.



Un cône.



Peut-être l'image d'un trou noir ?

Le nombre de Milnor d'une singularité est ce que nous appelons un invariant de la singularité. Ainsi, si deux singularités différentes ont la même complexité, elles ont le même nombre de Milnor.

La théorie des déformation

Une autre interprétation du nombre de Milnor est le nombre de déformation de la singularité. Une déformation d'une singularité est donnée par une petite perturbation des équations qui définissent la singularité. Cette perturbation peut changer radicalement la topologie de la singularité. En particulier, elle n'est plus nécessairement une singu-

larité. Un exemple est le carrefour de deux routes qui se croisent. Une déformation de ce point peut diviser la singularité en deux points, et le carrefour en deux routes distinctes qui ne se croisent pas, comme sur la figure 17.

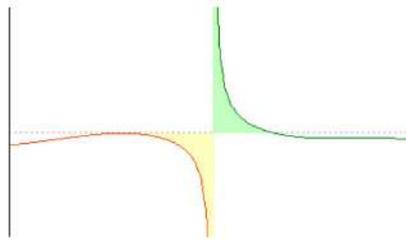


Fig. 17

Dans ce cas, un nombre de Milnor égal à 1 nous indique qu'il n'y a qu'une seule façon de déformer la singularité. Relier les routes dans l'autre sens, c'est-à-dire que l'est aille au sud et l'ouest au nord, est en fait la même déformation, mais multipliée par -1 .

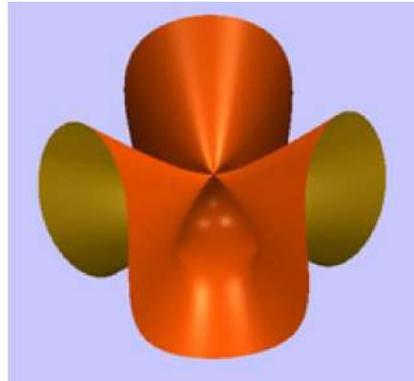


Fig. 18 – *Les illustrations de singularités peuvent s'apparenter à de l'art.*

DICTIONNAIRE POUR UNE MEILLEURE COMPRÉHENSION DE LA CITATION DU COMITÉ ABEL (par ARNE B. SLETSJØE)

Dans la citation, le comité Abel explique le contexte dans lequel le prix Abel a été décerné cette année. La citation n'est pas facilement accessible au lecteur moyen. Dans cette note, nous essayons de donner une explication (que nous espérons plus compréhensible) des termes et des concepts contenus dans la citation.

Quelques domaines mathématiques pertinents

La **topologie** (du grec *topos*, « lieu », et *logos*, « étude ») est un domaine majeur des mathématiques qui s'intéresse aux formes telles que les courbes, les surfaces, les volumes, etc. En topologie, on étudie les propriétés des formes qui sont préservées par les déformations, torsions et étirements continus des objets. La déchirure ou le collage ne sont toutefois pas autorisés. On ne se préoccupe pas des distances, des angles ou de la courbure. Une bouée et une tasse avec une poignée sont topologiquement équivalents, c'est-à-dire que d'un point de vue topologique, on ne fait pas de distinction entre les deux formes. La topologie est parfois appelée « géométrie du caoutchouc ».

La **géométrie** (du grec ancien, *geo-* « Terre », *-metri* « mesure »), la « mesure de la Terre », est une branche des mathématiques qui s'intéresse à des concepts tels que la forme, la taille, la position relative des figures et les propriétés de l'espace. La géométrie est l'une des plus anciennes sciences mathématiques. La différence entre la topologie et la géométrie réside dans le concept de mesure. La distance la plus courte entre deux points d'une surface est une propriété géométrique, mais pas une propriété topologique. Ainsi, si l'on étire la surface de manière à modifier la distance entre deux points donnés, la géométrie de la surface est modifiée, mais pas nécessairement sa topologie.

La **topologie différentielle** et la **géométrie différentielle** se caractérisent tout d'abord par leur similitude. Elles étudient toutes deux principalement les propriétés des variétés différentielles, sur lesquelles sont imposées des structures parfois très variées.

Pour la topologie différentielle, la bouée et la tasse sont identiques. Un spécialiste de topologie différentielle imagine que la bouée est faite d'une feuille de caoutchouc, et que la feuille de caoutchouc peut être remodelée en douceur de sa configuration originale de bouée à la forme d'une tasse sans déchirer la feuille ou en coller des morceaux. Il s'agit

toutefois d'une vision intrinsèquement globale, car le spécialiste de topologie différentielle n'a aucun moyen de déterminer si les deux objets sont identiques (dans ce sens) en ne regardant qu'un minuscule morceau (point de vue local) de l'un ou l'autre. Il doit avoir accès à l'ensemble de chaque objet (point de vue global).

Pour la géométrie différentielle, la tasse et la bouée sont différents, car il est impossible de faire tourner la tasse de manière à ce que sa configuration corresponde à celle de la bouée. Il s'agit également d'une façon globale d'aborder le problème. Mais une distinction importante est que le géomètre n'a pas besoin de l'objet entier pour décider si deux objets distincts sont différents. En regardant par exemple un tout petit morceau de la poignée, il peut décider que la tasse est différente de la bouée parce que la poignée est plus fine (ou plus courbée) que n'importe quel morceau de la bouée.

L'**algèbre** est la branche des mathématiques qui étudie les règles des opérations et des relations, ainsi que les constructions et les concepts qui en découlent, y compris les termes, les polynômes, les équations et les structures algébriques. Avec la géométrie, l'analyse, la topologie et la théorie des nombres, l'algèbre est l'une des principales branches des mathématiques pures.

La **topologie combinatoire** est aujourd'hui appelée topologie algébrique. L'origine du nom vient du fait qu'en topologie combinatoire, on découpe par exemple une surface en morceaux, qui sont ensuite reconstitués. La question de savoir s'il est possible de recoller les morceaux d'une manière sensiblement différente se réduit souvent à une question combinatoire. Le changement de nom du domaine a en fait été initié par la mathématicienne allemande **Emmy Noether**, à la suite de ses travaux pionniers en **homologie**. Une date assez précise peut être trouvée dans les notes internes du groupe français **Bourbaki**. Alors que la topologie était encore combinatoire en 1942, elle est devenue algébrique en 1944.

La **K-théorie algébrique** est un outil mathématique général de classification des objets dans plusieurs disciplines, inventé par le mathématicien français Alexandre Grothendieck au milieu des années cinquante. La K-théorie algébrique est la version algébrique de cet outil général.

Quelques concepts

Les sphères lisses exotiques de dimension 7. Les sphères exotiques sont des sphères (dans n'importe quelle dimension) dotées d'une structure différentielle (voir le paragraphe suivant) différente de la structure ordinaire.

Les structures différentielles. Il est possible de définir une structure différentielle sur presque tous les objets géométriques. Se donner une structure différentielle sur une petite partie de la sphère revient plus ou moins à dessiner une carte de cette zone. Le problème mathématique n'est pas de dessiner la carte, mais de s'assurer que les différentes cartes qui couvrent l'ensemble de la sphère s'emboîtent. Intuitivement, cela ne semble pas particulièrement difficile, et en fait ça ne l'est pas, du moins pour une sphère ordinaire. Mais si nous essayons de le faire pour une sphère de dimension 7, nous devons faire plusieurs choix sur la manière d'assembler les cartes. Milnor et Kervaire ont montré qu'il existe 28 façons de procéder. L'une d'entre elles est assez simple et peut être réalisée par un étudiant de première année à l'université, tandis que les 27 autres sont plus difficiles à décrire. Milnor les a appelées « sphères exotiques ».

Les singularités isolées d'hypersurfaces. En marchant le long d'une route, vous observez qu'il existe deux types de points différents le long de la route : les points réguliers, où vous n'avez pas le choix pour poursuivre votre voyage, et les points singuliers, où vous devez choisir entre deux ou plusieurs routes possibles. Une singularité, en tant que concept mathématique général, est une version abstraite d'un carrefour. Une singularité isolée signifie qu'il n'y a pas d'autres singularités dans un petit voisinage du point, et le mot hypersurface est une description technique de la façon dont la singularité est définie.

Le nombre de Milnor. Il existe en général de nombreux types de singularités isolées, même lorsque l'on fixe la dimension de l'espace. Un outil très utile pour caractériser une singularité consiste à utiliser le nombre de Milnor. La singularité est placée au milieu d'une sphère de dimension appropriée et nous observons l'intersection de la sphère et de l'espace. Cette intersection ressemblera plus ou moins à un bouquet de sphères avec une dimension en moins. Le nombre de sphères est le nombre de Milnor. Un point régulier a un nombre de Milnor égal à 1. Plus le nombre de Milnor est élevé, plus la singularité est compliquée.

La **conjecture fondamentale** (*Hauptvermutung* en allemand) de

la topologie géométrique est la conjecture qui dit que si l'on couvre une surface par des triangles selon certaines règles strictes, et ce de deux manières différentes, alors on peut toujours affiner les triangulations, c'est-à-dire couper chaque triangle en plusieurs triangles plus petits, de telle sorte qu'il y ait un raffinement commun aux deux triangulations. Steinitz et Tietze ont formulé cette conjecture en 1908. Milnor a démontré qu'elle était fautive en grande dimension.

Un **microfibré** est une généralisation du concept de **fibré vectoriel**. Comme pour les fibrés vectoriels, les microfibrés sont constitués de deux espaces, l'espace total et la base, et d'une projection de l'un sur l'autre. Les microfibrés ont une application supplémentaire dans la direction opposée, de la base vers l'espace total, appelée la section zéro. Les fibres de la projection, c'est-à-dire tous les points de l'espace total qui sont envoyés vers un point spécifique de la base, ressemblent beaucoup à des espaces vectoriels. La subtilité des microfibrés, comme des fibrés vectoriels en général, est de coller ensemble les morceaux locaux, les petites cartes locales, pour obtenir un objet global. Cela semble facile jusqu'à ce qu'il faille insérer la dernière pièce, celle qui relie le tout. C'est à ce moment-là que les concepts de fibré vectoriel et de microfibré révèlent leur nature profonde.

Le **foncteur K_2** et la conjecture de Milnor concernent une relation plutôt théorique et difficile à expliquer entre deux expressions différentes dérivées d'un « corps de caractéristique différente de 2 ». Elle relie la K -théorie de Milnor à ce que l'on appelle la **cohomologie galoisienne**. Milnor a utilisé son intuition pour énoncer cette relation, mais il n'a pas été en mesure de la démontrer. Le problème est resté ouvert pendant une vingtaine d'années jusqu'à ce que Vladimir Voïevodski en donne une démonstration vers 1996.

L'invariant de croissance d'un groupe. Les objets algébriques les plus élémentaires sont appelés groupes. Les groupes apparaissent dans de nombreuses applications, dans presque toutes les disciplines des mathématiques, en physique, en chimie et en architecture, pour n'en citer que quelques-unes. Le prix Abel 2008 a été décerné à John Thompson et Jacques Tits pour leurs travaux approfondis en algèbre et en particulier pour avoir façonné la théorie moderne des groupes. L'une des façons de mesurer la taille d'un groupe est de calculer sa croissance. Nous partons d'un ensemble d'éléments qui engendre le groupe. La croissance mesure la redondance de cet ensemble. Ainsi, un petit groupe pour lequel nous avons besoin d'un grand nombre de généra-

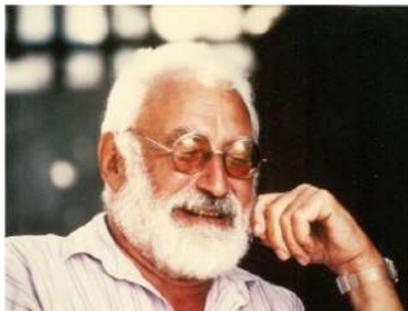
teurs différents pour décrire le groupe a une faible croissance. Si les générateurs sont tout à fait indépendants, la croissance du groupe est grande. C'est le cas des groupes dits libres. Le prix Abel 2009 a été décerné à Mikhaïl Gromov en partie sur la base de ses travaux sur l'invariant de croissance d'un groupe.

Un **système dynamique** est un modèle d'évolution temporelle d'un système physique (ou mathématique). Comme exemples, citons les modèles mathématiques qui décrivent le transfert de chaleur dans une tige, les données physiques de l'atmosphère pour prédire le temps et l'évolution temporelle d'une population. À un moment donné, le système se trouve dans un certain état et le système dynamique fournit une règle déterministe sur la manière dont le système évolue vers des états futurs à partir de l'état actuel.

La **théorie du pétrissage de Milnor-Thurston** est une théorie qui analyse les itérés de certaines applications d'un intervalle sur lui-même. La théorie a été développée à Princeton en 1977 par John Milnor et William Thurston dans deux prépublications, largement diffusées et influentes, qui ont été révisées en 1981 et finalement publiées en 1988. La théorie a de nombreuses applications intéressantes.

Quelques noms pertinents

Michel André Kervaire (1927-2007) était un mathématicien français qui a collaboré avec John Milnor pour calculer le nombre de sphères exotiques de dimension supérieure à quatre. Il a été professeur à l'institut Courant de l'université de New York de 1959 à 1971, puis à l'université de Genève de 1971 jusqu'à sa retraite en 1997.



John Coleman Moore (1927-) est un mathématicien états-

unien¹⁷ dont l'article le plus cité est celui sur les algèbres de Hopf, coécrit avec John Milnor.

William Paul Thurston (1946-) est un mathématicien états-unien¹⁸. Il est un pionnier dans le domaine de la topologie en petite dimension. En 1982, il a reçu la médaille Fields pour ses contributions à l'étude des variétés de dimension 3. Il est actuellement professeur de mathématiques et d'informatique à l'université Cornell (depuis 2003). Thurston a développé la théorie du pétrissage de Milnor-Thurston avec John Milnor dans les années 1978-1980.

Henri Poincaré (1854-1912) était un mathématicien, physicien théoricien, ingénieur et philosophe des sciences français. Il est souvent décrit comme le dernier mathématicien universel, car il a excellé dans tous les domaines des mathématiques, telles qu'elles existaient de son vivant. Poincaré est à l'origine de la formulation de la conjecture de Poincaré, l'un des problèmes les plus célèbres et les plus anciens des mathématiques. Il est considéré comme l'un des fondateurs de la topologie.



17. NDT. Décédé en 2016.

18. NDT. Décédé en 2012.

L'ŒUVRE DE JOHN MILNOR (par W. T. GOWERS)

Un test de QI difficile

Quel est le terme suivant dans la suite 1, 2, 5, 14, 41, 122 ? On peut imaginer qu'une telle question figure dans un test de QI. Il n'est pas nécessaire de chercher trop longtemps pour voir que chaque terme s'obtient en multipliant le terme précédent par 3 et en soustrayant 1. Le terme suivant est donc 365. Si vous y parvenez, la question suivante vous paraîtra peut-être plus difficile. Quel est le terme suivant dans la suite

1, 1, 28, 2, 8, 6, 992, 1, 3, 2, 16 256, 2, 16, 16, 523 264 ?

Je laisse cette question en suspens pour l'instant, mais je promets de révéler la réponse plus tard.

Un géant des mathématiques modernes

De nombreux mathématiciens ont des travaux extraordinaires à leur actif, et beaucoup d'entre eux ont remporté des prix importants. Mais même dans cette illustre compagnie, John Milnor se distingue. Ce n'est pas seulement parce qu'il a démontré plusieurs théorèmes célèbres, c'est aussi parce que les domaines dans lesquels il a apporté des contributions fondamentales sont très variés et qu'il est réputé pour être un conférencier d'un talent tout à fait exceptionnel. Par conséquent, son influence se fait sentir dans toutes les mathématiques modernes. Je ne pourrai qu'effleurer ce qu'il a fait, d'une part en raison du temps limité dont je dispose et d'autre part parce que je travaille dans un domaine différent.

Les domaines dans lesquels il a travaillé incluent la topologie différentielle, la K-théorie, la théorie des groupes, la théorie des jeux et les systèmes dynamiques. Il a écrit plusieurs livres qui sont devenus légendaires pour leur grande qualité. Les Presses universitaires de Princeton décrivent ainsi l'un de ses ouvrages les plus connus :

« Le livre de John Milnor sur la théorie de Morse, l'un des plus cités en mathématiques, est l'ouvrage le plus important sur le sujet depuis plus de quarante ans. »

J'ai récemment lu le commentaire suivant sur le site Mathoverflow : « En général, lorsque Milnor explique, les choses sont faciles... » Un critique sur Amazon décrit le livre de Milnor, *Topologie du point de*

vue différentiable, comme le « meilleur livre de mathématiques jamais écrit ». Il ne s'agit bien sûr que d'opinions, mais de nombreuses personnes ont des avis similaires.

Milnor a reçu la médaille Fields en 1962 et le prix Wolf en 1989. Il est la seule personne à avoir remporté les trois prix Steele de la Société américaine de mathématiques (pour sa contribution fondamentale à la recherche en 1982, pour la vulgarisation mathématique en 2004 et pour l'ensemble de sa carrière cette année). Aujourd'hui, il vient de recevoir le prix Abel. Je vais tenter d'expliquer pourquoi.

Des structures différentielles sur les sphères

L'un des concepts les plus importants en mathématiques est celui de variété. Pour se faire une idée de ce qu'est une variété, il suffit de penser à la surface d'une sphère ou d'un **tore**.

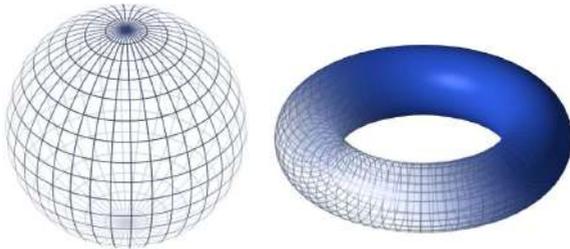


Fig. 19

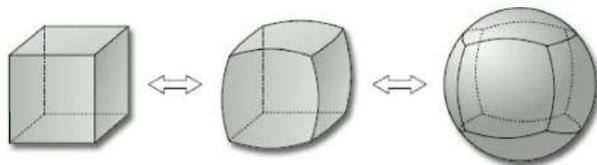
Si vous découpez un tout petit morceau de l'une de ces surfaces, il ressemble à une feuille de papier plate, bien qu'en fait il ne soit pas nécessairement parfaitement plat. Une feuille de papier étant bidimensionnelle, nous disons que ces surfaces sont également bidimensionnelles. Nous disons également qu'elles sont « localement euclidiennes ». Cela signifie que si vous observez une très petite région d'une telle surface, sa géométrie est identique à la géométrie bidimensionnelle ordinaire du plan, la géométrie que nous connaissons tous et qui remonte à Euclide. Cependant, et c'est ce qui rend les variétés intéressantes, le comportement global des variétés n'est pas du tout euclidien. Par exemple, si vous prenez deux lignes parallèles à la surface d'une sphère, où « ligne » ne signifie plus ligne droite mais désigne toujours le chemin le plus court entre deux points, et que vous les prolongez suffisamment loin, elles finiront par se rejoindre. Par exemple, imaginez deux lignes orientées plein nord à partir de l'équateur. Elles commenceront par être

parallèles et se rejoindront au pôle Nord. C'est ce que l'on peut voir sur la figure 19.

Il y a trois autres points importants à souligner à propos des variétés. La première est que, bien que les exemples que je viens de donner, une sphère et un tore, soient le plus naturellement visualisés comme des surfaces vivant à l'intérieur d'un espace à trois dimensions, il est possible de parler de variétés de manière intrinsèque. En d'autres termes, on peut discuter de la géométrie d'une variété en ne mentionnant que les points de la variété elle-même, sans faire référence à un quelconque espace extérieur à l'intérieur duquel la variété vivrait. Deuxièmement, il peut y avoir des variétés de n'importe quelle dimension. Il n'est pas facile de visualiser des variétés de dimension 23, mais en tant que concepts abstraits, elles existent tout autant que les surfaces bidimensionnelles plus familières.

Le troisième point constitue un contexte essentiel pour l'un des résultats les plus remarquables de John Milnor. Dans ma description des variétés ci-dessus, j'ai dit que la principale caractéristique d'une variété est que sa géométrie est localement identique à la géométrie euclidienne. J'ai délibérément laissé le mot « identique » un peu vague, parce qu'il s'avère qu'il y a plusieurs notions différentes d'identité qui peuvent être utiles ici. J'aimerais me concentrer sur deux d'entre elles.

La première notion vient de la topologie : on dit que deux formes sont homéomorphes si chacune est une déformation continue de l'autre. Par exemple, la surface d'un **cube** est homéomorphe à la surface d'une sphère :



Pour donner un exemple célèbre, la surface d'une tasse est homéomorphe à la surface d'une bouée :



Si nous disposons d'une forme dont nous pouvons dire que toutes les parties suffisamment petites sont homéomorphes à une petite partie de l'espace euclidien, nous appelons cette forme une **variété topologique**.

La seconde notion est plus exigeante et provient du **calcul différentiel** : nous disons que deux formes sont difféomorphes si elles ne sont pas simplement des déformations continues l'une de l'autre, mais des déformations **différentiables** l'une de l'autre.

Qu'est-ce que cela signifie ? En gros, une déformation continue est une déformation qui permet d'étirer la forme autant que l'on veut, mais pas de la déchirer. Une déformation différentiable est plus « lisse » qu'une déformation continue. Elle possède en outre la propriété suivante : si vous suivez une trajectoire régulière dans la première forme, la trajectoire correspondante dans la forme déformée ne doit pas présenter de changements soudains de vitesse ou de direction. Les plis, les coins, les virages prononcés sont interdits.

En 1956, Milnor a découvert un objet mathématique extraordinaire : une forme homéomorphe à une sphère de dimension 7, mais non difféomorphe à une sphère de dimension 7. Il a appelé cet objet une « sphère exotique ». J'aimerais passer un peu de temps à expliquer pourquoi les sphères exotiques sont si contre-intuitives, mais une fois que j'aurai fait cela, je risque de vous avoir persuadé qu'elles ne peuvent pas exister du tout, et je devrai donc essayer d'expliquer comment elles peuvent en fait exister.

Tout d'abord, on peut exprimer différemment ce que signifie l'existence de sphères exotiques. Cela signifie que vous pouvez prendre une sphère et la déformer continûment pour former une autre forme qui est également lisse, dans le sens où elle n'a pas de « coins ». Cependant, même si la sphère d'origine est lisse et si la sphère déformée continûment est lisse, les seules déformations qui transforment l'une en l'autre ne sont pas lisses.

La raison pour laquelle cela est si surprenant est que nos intuitions suggèrent qu'il devrait être possible d'« aplanir les difficultés » dans toute déformation continue entre les deux formes. Supposons par exemple que nous prenions une sphère unidimensionnelle, autrement dit un cercle (je dis « unidimensionnelle » parce que je ne parle que de la courbe et non de son intérieur). Dans ce cas, une forme lisse homéomorphe à l'original sera simplement une courbe lisse fermée, c'est-à-dire une courbe qui commence et se termine au même endroit, qui ne se croise pas et qui n'a pas de virages prononcés. Il est tout à fait possible de trouver des déformations continues du cercle vers le cercle déformé

qui ne sont pas lisses : lorsque vous faites le tour du cercle original, un point correspondant fera le tour du cercle déformé, et il pourrait bien y avoir des changements soudains de vitesse. Cependant, il est intuitivement clair (et cela peut être démontré mathématiquement) que s'il y a des changements soudains de vitesse, ils sont complètement inutiles : au lieu de sauts instantanés de vitesse, nous pourrions avoir des accélérations rapides, et nous finirions par approcher notre déformation continue par une déformation lisse.

Il est très tentant de penser que l'on pourrait faire quelque chose comme ce processus non seulement en dimension 1, mais aussi en dimension quelconque. L'idée serait la suivante : étant donné une déformation continue entre une sphère et une sphère déformée, mais toujours d'apparence lisse, nous regarderions les endroits où la déformation continue n'est pas lisse et nous modifierions la déformation à ces endroits pour la rendre lisse.

Pourquoi cela ne fonctionne-t-il pas ? L'une des raisons pour lesquelles il est difficile de l'expliquer est que l'impossibilité d'effectuer ce processus de lissage est un phénomène global plutôt que local. En d'autres termes, si l'on examine une petite partie de la sphère originale et la petite partie correspondante de la sphère déformée, il est possible d'aplanir les difficultés éventuelles. Cependant, en grande dimension, la variété des déformations possibles est beaucoup plus grande qu'en dimension 1. Par exemple, si les sphères sont de dimension 5, les endroits où se situent les plis peuvent facilement former un ensemble tridimensionnel compliqué. Cela a pour effet que lorsque vous les repassez à un endroit, vous pouvez simplement pousser le pli à un autre endroit (une expérience que je fais parfois lorsque je repasse une chemise).

Si vous avez de la chance, vous pouvez pousser le pli jusqu'à ce qu'il se rejoigne et se résorbe. Mais l'exemple de Milnor montre que ce n'est pas toujours le cas. La réaction de Milnor à cette découverte montre à quel point cette découverte était inattendue :

« Lorsque j'ai découvert un tel exemple au milieu des années cinquante, j'étais très perplexe et je ne savais pas quoi en penser. J'ai d'abord pensé que j'avais trouvé un contre-exemple à la conjecture de Poincaré généralisée en dimension 7. Mais une étude approfondie a montré que la variété était vraiment homéomorphe à S^7 . Il existe donc une structure différentielle sur S^7 qui n'est pas difféomorphe à la structure standard. »

Le fait que les variétés puissent être homéomorphes mais non difféo-

morphes signifiait que la variété différentielle était un objet important en soi, et pas seulement une façon de voir une variété topologique. C'est pourquoi la construction de Milnor a donné naissance à un tout nouveau domaine des mathématiques, connu sous le nom de topologie différentielle, qui comprend plusieurs autres points forts des mathématiques modernes.

À quoi ressemblent ces « sphères exotiques » ? Une autre surprise est la simplicité de leur définition. C'est vrai pour la construction originale de Milnor, mais il est un peu plus facile de décrire une construction ultérieure connue sous le nom de « sphère tordue » (en fait, l'exemple de Milnor peut lui-même être considéré comme une sphère tordue, même s'il ne l'a pas explicitement définie comme cela). De même qu'une sphère est constituée de deux parties topologiquement équivalentes à des disques, l'hémisphère nord et l'hémisphère sud, une sphère de dimension 7 peut être constituée de deux disques de dimension 7. Ces disques se rejoignent au niveau d'un équateur à six dimensions. Notez qu'il existe deux copies de l'équateur, l'une à la limite de l'hémisphère nord et l'autre à la limite de l'hémisphère sud, et que nous collons chaque point au même point dans l'autre copie. Mais que se passe-t-il si nous joignons des points de la copie sud à des points différents de la copie nord, en étirant les deux copies dans certaines directions et en les écrasant dans d'autres ? Si nous procédons de la bonne manière, il s'avère que nous obtenons une variété homéomorphe à une sphère mais non difféomorphe à une sphère : c'est une sphère exotique.

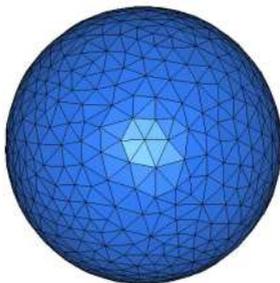
Revenons maintenant à la suite mystérieuse du début de cet article. Après la découverte par Milnor de l'existence de structures différentielles « exotiques » sur les sphères, la question s'est naturellement posée de savoir combien il existait de structures véritablement distinctes dans chaque dimension. Avec Michel Kervaire, Milnor a travaillé sur cette question pour plusieurs dimensions différentes : la suite donne les réponses, à partir de la dimension cinq. Ainsi, il n'existe qu'une seule structure différentielle en dimension 5 (la structure standard) et en dimension 6. En dimension 7, il y en a 28. La suite nous amène jusqu'à la dimension 19, où il y a 523 264 structures différentielles. Il se trouve que le terme suivant de la suite est 24, ce qui constitue la réponse à la question du test de QI. Ces nombres remarquables sont liés à d'autres phénomènes topologiques ainsi qu'au domaine apparemment très différent de la théorie des nombres.

Autres résultats géométriques

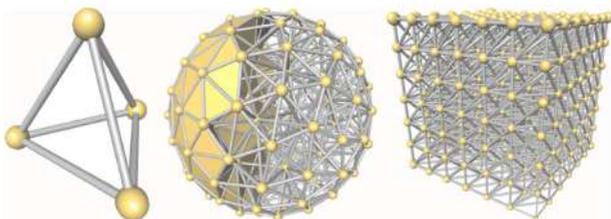
Dans cette section, j'aborderai d'autres beaux résultats de John Milnor. Je serai toutefois plus bref.

La conjecture fondamentale (*Hauptvermutung*)

L'une des techniques dont nous disposons pour étudier les formes géométriques courbes telles que les variétés consiste à les trianguler. Voici par exemple une sphère triangulée :



Voilà une image qui donne une idée de ce à quoi peut ressembler une triangulation d'une région de l'espace tridimensionnel :



La triangulation d'une variété la décompose en petits morceaux (en triangles ou en **tétraèdres** ou en des versions de plus grande dimension de ces derniers) qui sont simples à comprendre. L'espoir est alors de pouvoir étudier la variété en prenant soigneusement en compte la façon dont ces petits éléments sont assemblés.

Cette idée soulève toutefois des difficultés. Il semble assez évident que toute variété peut être triangulée (c'est-à-dire continuellement déformée en une variété construite à partir de « triangles » de la dimension appropriée). Mais comment le démontrer ? De plus, une même

variété peut être triangulée de différentes manières. Par exemple, nous avons vu ci-dessus une triangulation d'une sphère à deux dimensions. En voici une beaucoup plus simple :



Lorsqu'on étudie une variété à l'aide d'une triangulation, on aimerait être sûr que différentes triangulations donnent lieu aux mêmes conclusions sur la variété. Il s'avère qu'un bon moyen d'y parvenir est de montrer que les triangulations ont un raffinement commun. Pour comprendre ce que cela signifie, supposons que vous ayez une triangulation et que vous divisiez les triangles en triangles plus petits. On obtient alors une nouvelle triangulation, que l'on appelle un raffinement de la triangulation originale. Il est généralement facile de montrer que si l'on affine une triangulation, la triangulation affinée aura les mêmes propriétés essentielles que la triangulation d'origine. Cela signifie que si l'on part de deux triangulations différentes et que l'on trouve une nouvelle triangulation qui affine les deux triangulations d'origine, on sait que les deux triangulations ont les mêmes propriétés essentielles.

En deux dimensions, il existe toujours des triangulations et deux triangulations quelconques ont un raffinement commun. Il est donc tentant de croire qu'il en sera de même en toute dimension. La « conjecture fondamentale » (en allemand, *Hauptvermutung*) demande si deux triangulations quelconques ont toujours un raffinement commun.

En fait, il existe deux versions de ce problème, l'une pour les variétés et l'autre pour des objets plus généraux connus sous le nom d'« espaces triangulables ». En 1961, Milnor a donné un contre-exemple à la version plus générale de la conjecture fondamentale, qui était un problème ouvert depuis 1908. Quelques années plus tard, [Andrew Casson](#) et Dennis Sullivan ont également réfuté la version pour les variétés. Et en 1982, Michael Freedman a découvert une variété de dimension 4 qui ne peut pas être triangulée du tout.

Le théorème de la boule chevelue et les sphères parallélisables

En chaque point d'une sphère bidimensionnelle, on peut tracer un plan tangent.

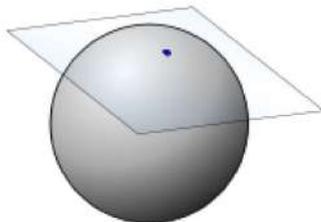


Fig. 20

Ces plans tangents sont d'une importance fondamentale dans la théorie des variétés différentielles, car ils sont nécessaires si l'on souhaite donner un sens à la notion de dérivée d'une application. En gros, nous considérons que le plan tangent en un point est le plan qui donne la meilleure approximation de la variété près de ce point. Pour les variétés de dimension supérieure, nous parlons d'un espace tangent, mais l'idée de base est la même.

Une chose que nous aimons faire avec n'importe quel espace est de choisir un **système de coordonnées**. Dans le cas bidimensionnel de la figure 20, cela signifie que nous considérons chaque point comme l'origine de son espace tangent, et que nous décidons comment dessiner un axe des x et un axe des y , ainsi que de la direction positive le long de chaque axe et de la direction négative. Toutes ces informations peuvent être encodées dans deux flèches, l'une pointant le long de l'axe des x dans la direction positive et l'autre pointant le long de l'axe des y dans la direction positive.

Une question très naturelle se pose alors : pouvons-nous choisir nos flèches aux différents points de manière à ce qu'elles varient continûment lorsque les points eux-mêmes varient continûment ? Si c'est le cas, la sphère est dite **parallélisable**.

Dans le cas bidimensionnel, l'un des résultats classiques de la topologie algébrique, démontré par Brouwer en 1912, montre que c'est impossible. En fait, il n'est même pas possible de choisir les axes de manière continue. Ce résultat est connu sous le nom de **théorème de la boule chevelue**, car il dit qu'il n'est pas possible de peigner les cheveux d'une boule chevelue sans avoir des points où les cheveux rebiquent (fig. 21).

Cependant, pour la sphère tridimensionnelle, les choses sont très différentes. Nous pouvons considérer que cette sphère est constituée de

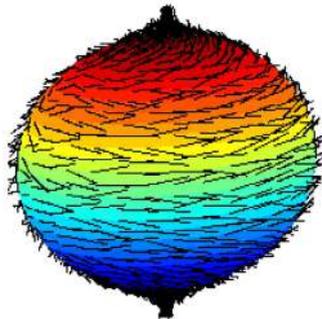


Fig. 21 – *La boule chevelue.*

tous les points de la forme (x, y, z, w) tels que $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$. Chacun de ces points peut être considéré comme un objet appelé **quaternion**, une sorte de « nombre » inventé en 1843 par William Rowan Hamilton. Les quaternions ressemblent un peu aux nombres complexes, mais nous y ajoutons trois racines carrées de -1 , traditionnellement appelées i , j et k . Une caractéristique étrange mais essentielle des quaternions est que l'ordre dans lequel vous les multipliez a de l'importance : par exemple $ij = k$ mais $ji = -k$. Le quaternion associé au point (x, y, z, w) est $x + yi + zj + wk$, et si $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$, on l'appelle un quaternion unitaire. Il s'avère que si vous multipliez deux quaternions unitaires ensemble, vous obtenez un autre quaternion unitaire. De même, si l'on prend n'importe quel quaternion unitaire q , les trois quaternions qi , qj et qk sont tous perpendiculaires à q . Nous pouvons donc les utiliser comme directions pour les trois axes dont nous avons besoin pour l'espace tangent au point q , et ils varient continûment d'une belle manière.

Peut-on définir de belles notions de « multiplication » pour des points sur des sphères dans d'autres dimensions ? Si nous voulons utiliser un système de nombres standard, nous disposons des **nombres réels** (qui ne sont pas vraiment utiles pour ce problème), des nombres complexes (qui nous donnent le résultat facile que nous pouvons choisir une direction en chaque point d'un cercle, il suffit de faire le tour du cercle et de choisir la direction vers l'avant en chaque point), des quaternions, et des **octonions** ou octaves de Cayley. Un **théorème de Hurwitz**, démontré en 1898, affirme que ce sont les seuls systèmes de ce type (je ne dirai pas précisément ce que cela signifie). Les octonions sont des nombres à huit dimensions, de sorte que les octonions unitaires forment une sphère de dimension 7. Ils peuvent effectivement être utilisés pour

montrer qu'une sphère de dimension 7 est parallélisable.

Le fait que nous n'ayons pas de système de nombres pratique dans les autres dimensions ne prouve pas en soi que les sphères dans ces autres dimensions ne soient pas parallélisables. Il pourrait y avoir une autre méthode pour choisir les directions des flèches. Cependant, Milnor, s'appuyant sur les travaux de **Raoul Bott**, a montré en 1958 que 1, 3 et 7 étaient en fait les seules dimensions pour lesquelles la sphère est parallélisable, un résultat que j'ai vu qualifié de « magique ». Ce résultat a également été obtenu indépendamment par Hirzebruch et Kervaire.

Incidemment, le théorème de la boule chevelue est intéressant ici pour deux autres raisons. Premièrement, Milnor a apporté une nouvelle démonstration surprenante et magnifique du théorème en 1978, surprenante parce que la démonstration utilise le calcul différentiel à plusieurs variables et non les outils de la topologie algébrique qui semblaient jusque-là essentiels, et magnifique parce que les démonstrations de Milnor sont toujours magnifiques. Deuxièmement, le théorème donne une idée du type de raison pour laquelle un homéomorphisme entre une sphère et une sphère exotique ne peut pas éliminer ses plis. Si vous prenez une boule de cheveux et si les cheveux forment un épi quelque part, vous pouvez brosser cette partie pour l'aplanir, mais le résultat sera de déplacer l'épi vers un autre endroit plutôt que de s'en débarrasser complètement.

Quelle est la courbure d'un nœud ?

Un autre beau résultat géométrique a été démontré par Milnor à l'âge de dix-neuf ans. Il apporte une réponse à la question suivante. Supposons que vous preniez une courbe en dimension 3 qui commence et se termine au même endroit et forme un nœud. Quelle est sa courbure ?

Bien sûr, cette question n'est pas encore très précise, mais pour en avoir l'intuition, considérons le nœud de trèfle (fig. 22). Il est clair que pour que la courbe soit nouée, elle doit se replier sur elle-même plus qu'un cercle. En fait, si vous imaginez que vous regardez ce nœud à partir d'un point situé en plein milieu, vous pouvez voir que la courbe « fait deux fois le tour ». Il s'agit là d'une observation très pertinente.

Comment mesurer la courbure d'une courbe ? L'une des méthodes consiste à utiliser le concept de **rayon de courbure**. Le rayon de courbure en un point P d'une courbe \mathcal{C} est le rayon du cercle qui se rapproche le plus de la courbe près de P (fig. 23).

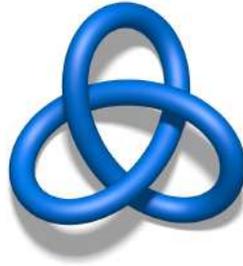


Fig. 22 – *Le nœud de trèfle.*

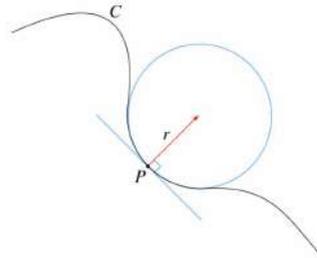


Fig. 23 – *Le rayon de courbure.*

La courbure en P est l'inverse du rayon de courbure. Ainsi, plus le rayon de courbure est grand, plus la courbure est petite et vice versa. C'est logique, car plus la courbe s'arrondit rapidement, plus le **cercle osculateur** sera petit et donc plus la courbure sera grande. La courbure totale d'une courbe est ce que vous obtenez lorsque vous additionnez (ou, plus précisément, intégrez) la courbure.

Si la courbe est elle-même un cercle de rayon r , alors le cercle osculateur en chaque point est ce même cercle, donc le rayon de courbure en chaque point est r et la courbure est $1/r$. Comme la longueur de la courbe est $2\pi r$, il s'ensuit que la courbure totale est $2\pi r$ multiplié par $1/r$, soit 2π (en fait, il en va de même pour toute courbe fermée dans le plan, si l'on interprète la courbure comme étant négative lorsque le cercle approché se trouve à l'extérieur). Si nous croyons à l'intuition selon laquelle un nœud doit en quelque sorte « faire deux fois le tour », nous pouvons nous attendre à ce que la courbure totale d'un nœud soit supérieure à 4π (je dis « supérieure à » plutôt qu'« au moins » parce qu'une courbe nouée ne peut pas rester dans un plan). Cette idée a été démontrée par Fáry et Milnor dans des travaux indépendants, Fáry en 1949 et Milnor en 1950.

Je ne peux m'empêcher d'inclure l'illustration suivante, qui représente Mjölnir, le marteau de Thor. Son intérêt est triple : « Mjölnir »

est presque une anagramme de « Milnor », Thor est un dieu majeur de la mythologie nordique, et si vous regardez de près cette représentation particulière de Mjölnir, vous verrez deux nœuds de trèfle.



Fig. 24 – *Mjölnir*.

Croissance dans les groupes

Il y a deux ans, le prix Abel a été décerné à Mikhaïl Gromov, qui comme Milnor a exercé une profonde influence sur de nombreux domaines des mathématiques. L'un des résultats les plus célèbres de Gromov est son théorème de croissance polynomiale, qui généralise un autre beau théorème de Milnor démontré avec **Wolf** en 1968.

Je ne veux pas dire ici ce qu'est un groupe, mais pour donner une idée de ce que dit le théorème, je vais donner deux exemples, tous deux de groupes « engendrés par les deux symboles a et b ». Dans les deux cas, le groupe est constitué de suites de termes a , b , a^{-1} ou b^{-1} . Ces suites sont appelées « mots ». Par exemple, $aba^{-1}bbbaab^{-1}a$ est un mot typique.

De plus, il existe une règle de base pour combiner les mots : si vous avez deux mots, écrivez le premier puis le second à la suite. Par exemple, si je combine les mots aba et aab^{-1} , j'obtiens le mot $abaaab^{-1}$. Ce qui rend le sujet intéressant, c'est que nous avons aussi des règles qui nous indiquent que nous voulons considérer certains mots comme égaux, et ces règles varient d'un groupe à l'autre.

La règle minimale que nous sommes autorisés à appliquer est une règle selon laquelle chaque fois que les symboles a et a^{-1} se trouvent l'un à côté de l'autre, le mot est considéré comme le même que celui qui résulterait de la suppression de ces symboles. Par exemple,

$$ab^{-1}aa^{-1}bbba = ab^{-1}bbba = abba,$$

car on peut supprimer aa^{-1} puis $b^{-1}b$. Il n'est pas difficile de montrer que si c'est la seule règle, alors chaque mot du groupe a une forme standard : il peut être écrit précisément d'une seule manière comme une suite de a , b , a^{-1} et b^{-1} , de telle sorte qu'aucun a ne soit à côté d'un a^{-1} et qu'aucun b ne soit à côté d'un b^{-1} (pour ce faire, il suffit de procéder à des suppressions répétées, comme dans l'exemple ci-dessus). Ce groupe est appelé le groupe libre à deux générateurs.

Une règle beaucoup plus radicale, dans le sens où elle rend beaucoup plus de mots égaux, consiste à dire que l'ordre des symboles n'a pas d'importance. Dans ce cas, $aba^{-1}b$ serait considéré comme le même mot que $aa^{-1}bb$, qui serait à son tour égal à bb (puisque la règle des « paires inverses » s'applique toujours dans n'importe quel groupe). Dans ce cas, il est facile de voir que chaque mot peut être écrit d'une seule manière, sous la forme d'une chaîne de a ou de a^{-1} suivie d'une chaîne de b ou de b^{-1} . Par exemple, deux mots typiques sont $aaaaab^{-1}b^{-1}$ et $abbbbb$. Les groupes où l'ordre des symboles n'a pas d'importance sont appelés abéliens, d'après Niels Henrik Abel, dont le nom est attaché au prix qui vient d'être annoncé.

Le taux de croissance d'un groupe est la fonction qui vous indique, pour chaque n , combien de mots distincts ont une longueur maximale de n . Pour le groupe abélien ci-dessus, cette fonction est d'ordre n^2 , car une fois que vous avez décidé si vous voulez des a ou des a^{-1} et si vous voulez des b ou des b^{-1} , il ne vous reste plus qu'à choisir deux longueurs dont la somme est au plus égale à n . Comme n^2 est un polynôme en n , on dit que ce groupe a une croissance polynomiale.

Dans le cas du groupe libre, il y a beaucoup plus de mots d'une longueur maximale de n . En fait, il y en a exponentiellement beaucoup. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que si l'on veut construire un mot de telle sorte qu'aucune annulation ne soit possible, il y a quatre choix pour la première lettre (a , b , a^{-1} ou b^{-1}) et trois choix pour chaque lettre suivante (il suffit d'éviter le symbole qui s'annulerait avec celui qui le précède). Cela signifie que le nombre de mots non simplifiables de longueur n est $4 \cdot 3^{n-1}$, qui croît exponentiellement avec n .

Il est assez facile de montrer que le taux de croissance dans tout groupe abélien (pas nécessairement avec seulement deux générateurs) doit être polynomial, et la même chose est vraie pour une classe de groupes appelés virtuellement nilpotents, qui sont « presque abéliens » dans un sens mathématique précis. Milnor et Wolf ont montré que pour une large classe de groupes, les groupes résolubles (appelés ainsi parce qu'ils sont étroitement liés aux célèbres travaux d'Abel et de Galois sur

la résolution des équations polynomiales), l'inverse est également vrai : si un groupe a une croissance polynomiale, alors il est virtuellement nilpotent. Il s'agit d'un fait remarquable, car une condition apparemment très souple, la croissance polynomiale, a une conséquence hautement structurelle et algébrique, celle d'être virtuellement nilpotent.

En 1981, Gromov a démontré le même résultat pour tous les groupes avec un nombre fini de générateurs, et pas seulement pour les groupes résolubles.

Autres contributions

Je n'ai en aucun cas épuisé le travail de Milnor. Il n'y a d'ailleurs aucun espoir que j'y parvienne. Mais terminons en mentionnant deux autres domaines dans lesquels il a apporté des contributions majeures.

La K-théorie algébrique

Une question que je n'ai pas abordée précédemment est celle de savoir comment Milnor a pu montrer que ses sphères exotiques étaient réellement exotiques : comment a-t-il pu être sûr qu'elles n'étaient pas difféomorphes à des sphères ordinaires ? Dans de nombreuses situations, la meilleure façon de montrer que deux objets sont distincts est de trouver un invariant qui les distingue. Cela signifie que vous trouvez quelque chose que vous pouvez calculer à partir de l'objet mathématique en question, qui devrait avoir les deux propriétés suivantes :

- si les objets sont identiques (au sens de la « similitude » qui vous intéresse), alors les valeurs de l'invariant pour ces deux objets sont égales ;
- pour les deux objets dont vous voulez démontrer qu'ils sont distincts, les valeurs de l'invariant sont différentes.

Si vous y parvenez, alors vous avez effectivement démontré que les objets sont distincts.

Pour donner un exemple, il n'est pas facile de démontrer rigoureusement que le nœud de trèfle est réellement distinct d'un cercle, mais on a découvert des moyens d'associer des polynômes aux nœuds avec la propriété que si l'on manipule un nœud sans le couper, le polynôme ne change pas, et aussi avec la propriété que les polynômes associés au nœud de trèfle et au cercle sont distincts.

Une classe très importante d'invariants est apparue dans les années 1950 et a donné naissance à une partie des mathématiques connue sous le nom de K-théorie. Elle a été inaugurée par Grothendieck dans le

contexte de la géométrie algébrique, et plus tard par Atiyah et Hirzebruch en topologie.

Un concept fondamental en topologie est celui de classe d'homologie. Sans entrer dans les détails, nous pouvons considérer qu'il s'agit d'une sorte de sous-variété de dimension inférieure d'une variété, sauf que nous considérons que deux sous-variétés de ce type sont « essentiellement les mêmes » si l'une peut être transformée de façon continue en l'autre (il s'agit d'une façon légèrement trompeuse de présenter les choses, mais cela suffira pour les besoins de cette discussion). En géométrie algébrique, on se contente de traiter les objets qui apparaissent comme des ensembles de solutions d'équations polynomiales : appelons-les ensembles algébriques. La question se pose alors de savoir si nous pouvons donner un sens aux concepts topologiques tels que les classes d'homologie en termes algébriques. En particulier, pouvons-nous choisir nos sous-variétés de dimension inférieure comme des ensembles algébriques si la variété d'origine est un ensemble algébrique ? Plusieurs questions de cette nature générale sont encore ouvertes et comptent parmi les plus profondes des mathématiques.

Dans les années 1960, il est apparu clairement qu'il devait exister une version algébrique de la K -théorie qui serait utile pour répondre à certaines de ces questions. Cependant, la définition de certains des concepts clés nécessaires à cette théorie était loin d'être claire. Ce qui était recherché était une suite de groupes K_0, K_1, K_2, \dots , associés à un anneau A . Avant les travaux de Milnor, on savait comment définir les groupes $K_0(A)$ et $K_1(A)$. Milnor a trouvé la bonne définition de $K_2(A)$ et a proposé des définitions pour les groupes de K -théorie supérieurs. Finalement, **Quillen** a trouvé les bonnes définitions pour tous les groupes de K -théorie.

Dans le cadre de ce travail, Milnor a formulé une conjecture qui est devenue suffisamment importante pour que Vladimir Voïevodski reçoive une médaille Fields en 2002 pour l'avoir résolue (il est remarquable de constater à quel point cette région est dense en lauréats de la médaille Fields : Grothendieck, Atiyah et Quillen l'ont également reçue).

Dynamique holomorphe

Depuis le milieu des années 1980, Milnor travaille dans le domaine de la dynamique holomorphe, le domaine des mathématiques qui traite des itérations d'applications sur les nombres complexes, sur des **surfaces de Riemann** plus générales (des espaces qui ressemblent locale-

ment aux nombres complexes, un peu comme une variété ressemble localement à l'espace euclidien), et sur des structures complexes de plus grande dimension. La dynamique holomorphe est la branche des mathématiques qui conduit à des images comme celle de la figure 25.

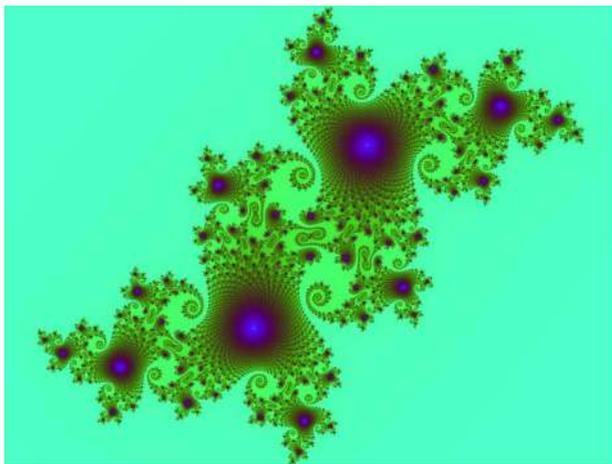


Fig. 25

Les résultats et les techniques sont sensiblement différents de ceux de la topologie différentielle, mais Milnor a une excellente façon de traiter ce type de problème : il apprend ce qu'il peut des experts, le retravaille et écrit un livre classique sur le sujet, en l'occurrence *Dynamique en une variable complexe*.

Il a également travaillé sur la dynamique en plus d'une variable complexe. L'introduction d'un plus grand nombre de variables fait une grande différence et rend de nombreux résultats beaucoup plus difficiles. Milnor a joué un rôle clé dans ce domaine.

Résumé

J'avais l'intention de raccourcir la description du travail de Milnor, mais la quantité, la variété et la beauté de ses travaux sont telles que je n'ai pas pu m'en tenir à mon plan. Il fait vraiment partie des grands, un mathématicien qui a énormément enrichi le sujet et inspiré beaucoup d'autres. L'attribution du prix Abel à John Milnor sera saluée par les mathématiciens du monde entier.

Szemerédi (2012)

« pour ses contributions fondamentales aux **mathématiques discrètes** et à l'informatique théorique, et en reconnaissance du retentissement profond et durable de ces contributions sur la **théorie additive des nombres** et sur la **théorie ergodique** ».

Les mathématiques discrètes sont l'étude de structures telles que les **graphes**, les suites, les permutations et les configurations géométriques. Les mathématiques de ces structures constituent le fondement de l'informatique théorique et de la **théorie de l'information**. Par exemple, les réseaux de communication tels qu'Internet peuvent être décrits et analysés en utilisant des outils de la **théorie des graphes**, et la conception d'algorithmes informatiques repose fondamentalement sur des intuitions suscitées par les mathématiques discrètes. Les structures combinatoires et discrètes sont aussi une composante majeure de nombreux domaines des mathématiques pures, comme la théorie des nombres, la théorie des probabilités, l'algèbre, la géométrie et l'analyse.

Endre Szemerédi a révolutionné les mathématiques discrètes en introduisant des techniques ingénieuses et originales, et en résolvant de nombreux problèmes fondamentaux. Son œuvre a mis l'analyse **combinatoire** au centre de la scène mathématique, en révélant ses rapports étroits avec des domaines tels que la théorie additive des nombres, la théorie ergodique, l'informatique théorique et la géométrie d'**incidence**.

En 1975, Szemerédi a attiré pour la première fois l'attention de nombreux mathématiciens avec sa solution de la fameuse conjecture d'Erdős-**Turán**, en montrant que dans tout ensemble d'entiers de **densité** strictement positive il existe des progressions arithmétiques arbitrairement longues (**théorème de Szemerédi**). Ce fut une surprise, puisque même les cas des progressions de longueur 3 ou 4 avaient antérieurement demandé d'énormes efforts respectivement de la part de **Klaus Roth** et de Szemerédi lui-même.

L'avenir réservait une bien plus grande surprise. La démonstration découverte par Szemerédi était un chef-d'œuvre de raisonnement combinatoire, immédiatement reconnu comme étant d'une profondeur et d'une importance exceptionnelles. Une étape cruciale de la démonstration, maintenant connue sous le nom de **lemme de régularité de Sze-**

merédi, réside dans la classification structurelle des grands graphes. Au fil du temps, ce lemme est devenu un outil central de la théorie des graphes comme de l'informatique théorique, qui a permis de résoudre des problèmes majeurs en matière de tests de propriétés et qui a donné naissance à la théorie des **limites de graphes**.

D'autres surprises étaient encore à venir. Au-delà de son retentissement sur les mathématiques discrètes et sur la théorie additive des nombres, le théorème de Szemerédi a inspiré **Hillel Furstenberg** pour développer la théorie ergodique dans de nouvelles directions. Furstenberg a donné une nouvelle démonstration du théorème de Szemerédi en établissant le théorème de la récurrence multiple en théorie ergodique, corrélant ainsi de façon inattendue des questions de mathématiques discrètes à la théorie des systèmes dynamiques. Ce rapport fondamental a conduit à de nombreux développements ultérieurs tels que le **théorème de Green-Tao** qui affirme qu'il existe des progressions arithmétiques de nombres premiers arbitrairement longues.

Szemerédi a apporté de nombreuses autres contributions essentielles tant à la théorie des graphes qu'à l'informatique théorique. Dans le domaine des mathématiques discrètes, mentionnons à titre d'exemples le **théorème de Szemerédi-Trotter**, la méthode semi-aléatoire d'**Ajtai-Komlós-Szemerédi**, le théorème « somme-produit » d'Erdős-Szemerédi, et le lemme de Balog-Szemerédi-**Gowers**. En informatique théorique, mentionnons le **réseau de tri** d'Ajtai-Komlós-Szemerédi, la **fonction de hachage de Fredman-Komlós-Szemerédi**, et le théorème de séparation déterministe ou non déterministe linéaire de Paul-**Pippenger-Szemerédi-Trotter**.

L'approche des mathématiques de Szemerédi illustre la solide tradition hongroise de résolution des problèmes. Il n'en reste pas moins que l'influence théorique de son œuvre a vraiment changé la donne.

Endre Szemerédi est né le 21 août 1940 à Budapest en Hongrie. Il occupe un poste de chercheur permanent auprès de l'**institut de recherches mathématiques Alfréd-Rényi** de l'Académie hongroise des sciences à Budapest. Depuis 1986, il est aussi professeur d'informatique à l'université Rutgers dans le New Jersey aux États-Unis.

Szemerédi a occupé des postes de professeur invité dans les universités Stanford (1974), McGill (1980), de Caroline du Sud (1981-1983) et de Chicago (1985-1986). Il a reçu la bourse Fairchild de l'institut de technologie de Californie en 1987. Il a également occupé la chaire Aisenstadt au **Centre de recherches mathématiques** de l'université de Montréal. En 2008, Szemerédi est devenu titulaire de la chaire Eisenbud

à l'**institut de recherche en sciences mathématiques de Berkeley**.

Szemerédi a été décrit comme un mathématicien au pouvoir de recherche exceptionnel, et son influence sur les mathématiques contemporaines est énorme. Pourtant, les débuts de Szemerédi en tant que mathématicien furent tardifs. Il a fréquenté la faculté de médecine pendant un an, puis a travaillé dans une usine avant de se tourner finalement vers les mathématiques. Szemerédi a étudié à l'université Loránd-Eötvös de Budapest, où la maîtrise ès sciences lui fut décernée en 1965. Il a rejoint l'université d'État de Moscou et y a obtenu son doctorat en 1970 sous la direction d'Israël Gelfand.

Le talent mathématique exceptionnel de Szemerédi fut découvert par son maître Paul Erdős quand il était jeune étudiant à Budapest. Szemerédi a été à la hauteur des grandes attentes de son maître, en démontrant plusieurs théorèmes fondamentaux d'une importance considérable. Nombre de ses résultats ont suscité de nouvelles recherches et posé les fondements de nouvelles orientations en mathématiques. Szemerédi a publié plus de deux cents articles scientifiques.

En 2010, à l'occasion du 70^e anniversaire de Szemerédi, l'institut Alfréd-Rényi et la **Société mathématique János-Bolyai** ont organisé une conférence à Budapest pour célébrer ses succès. Dans l'ouvrage *Un esprit irrégulier* publié avant cette conférence, on peut lire : « Szemerédi a une « intelligence hors du commun » ; son cerveau est configuré différemment de celui de la plupart des mathématiciens. Nombre d'entre nous admirent sa façon unique de raisonner, son extraordinaire imagination. »

Szemerédi a reçu de nombreuses récompenses et distinctions. Le prix Steele pour une contribution majeure à la recherche lui a été décerné par la Société américaine de mathématiques en 2008. La même année, l'Académie royale des sciences de Suède lui a remis le **prix Schock** en mathématiques. Parmi d'autres prix qui lui ont été décernés, citons :

- le prix Grünwald (1967-1968) ;
- le **prix Alfréd-Rényi** (1973) ;
- le **prix George-Pólya** décerné par la Société de mathématiques appliquées et industrielles (1975) ;
- le prix de l'Académie hongroise des sciences (1979).

Szemerédi est devenu membre correspondant (1982) puis membre titulaire (1987) de l'Académie hongroise des sciences, et membre de l'Académie nationale des sciences des États-Unis (2010). Il a été membre de l'Institut d'étude avancée à Princeton. En 2010, Szemerédi s'est vu remettre le titre de docteur *honoris causa* de l'université Charles de

Prague en République tchèque.

LA JOIE ET LE MYSTÈRE DES ENTIERS NATURELS (par ARNE B. SLETSJØE)

À première vue, les entiers naturels semblent assez simples. Compter (1, 2, 3, ...), additionner ($3 + 2 = 5$) et même multiplier ($3 \times 4 = 12$) sont des tâches maîtrisées par les enfants dès le début de leur scolarité. En même temps, l'ensemble des entiers naturels cache certains des problèmes les plus célèbres des mathématiques. Nous proposons deux explications possibles à cette dichotomie.

Addition contre multiplication

Même si la multiplication est normalement considérée comme une addition répétée, comme dans $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 6 \times 5$, il existe un fossé structurel entre les deux opérations. Fermat affirme dans son célèbre dernier théorème, finalement démontré par Andrew Wiles dans les années 1990 après 350 ans de réflexion, qu'une somme de deux puissances (de degré 3 ou plus) d'entiers naturels ne peut pas être elle-même une puissance d'un entier naturel de même degré, de sorte que l'addition perturbe la structure multiplicative.

La **conjecture de Goldbach**, énoncée initialement en 1742, affirme que tout nombre pair strictement supérieur à 2 peut être écrit comme la somme de deux nombres premiers. Le fait d'être un nombre premier est une caractéristique purement multiplicative d'un entier naturel. L'addition de deux nombres premiers mélange la structure multiplicative et la structure additive, de telle sorte que le résultat manque de propriétés tangibles. Goldbach a affirmé que tout nombre pair pouvait être atteint de cette manière, mais personne n'a été en mesure de démontrer cette affirmation.

Structure contre hasard

Le conflit entre la structure et le hasard nous amène au deuxième mystère des entiers naturels. Si nous choisissons au hasard un ensemble d'entiers naturels, est-il possible que cet ensemble satisfasse à une propriété structurelle prescrite ? Le théorème de Szemerédi est une bonne illustration d'un tel problème. La propriété prescrite dans ce cas est l'existence de progressions arithmétiques, et la question est de savoir quelle taille doit avoir l'ensemble choisi au hasard pour garantir l'existence de progressions arithmétiques de longueur arbitraire. Or toute structure que vous connaissez sur un entier naturel est donnée en termes

de nombres plus petits : sur votre chemin vers 11, vous passerez toujours par 10. La caractéristique multiplicative de n'importe quel nombre est donnée en termes de décomposition en nombres premiers. D'autre part, nous pouvons choisir au hasard un ensemble d'entiers naturels, de **cardinal** infini, où il est extrêmement difficile de retrouver ses propriétés structurelles.

De nombreux problèmes élémentaires de la théorie des nombres peuvent être classés comme des problèmes qui opposent addition et multiplication ou des problèmes qui opposent structure et aléatoire. Nous avons mentionné le dernier théorème de Fermat, la conjecture de Goldbach et le théorème de Szemerédi. D'autres problèmes, comme le mystère des **nombres premiers jumeaux**, peuvent aussi être considérés sous cet angle. Les nombres premiers jumeaux sont des paires de nombres premiers dont la différence est égale à 2, comme 5 et 7, ou 41 et 43. La question est de savoir s'il existe un nombre infini de ces paires. Une fois encore, la sélection des nombres premiers concerne la structure multiplicative des nombres naturels, tandis que l'exigence d'une différence de deux entre ces nombres relève de la structure additive. Nous mélangeons les deux opérations, ce qui cause des difficultés.

LA COMBINATOIRE (par ARNE B. SLETSJØE)

Le théorème de Szemerédi sur l'existence de progressions arithmétiques dans les ensembles de densité supérieure strictement positive est un résultat de la théorie des nombres. La démonstration du théorème, ainsi que le lemme de régularité de Szemerédi, sur lequel repose la démonstration, relèvent de la combinatoire ou plus précisément de la théorie des graphes.

La **combinatoire** est la branche des mathématiques qui étudie les structures discrètes finies ou **dénombrables**. La combinatoire consiste notamment à compter les structures d'un type et d'une taille donnés, à déterminer les cas où certains critères peuvent être remplis, et à construire et analyser des objets répondant à ces critères. Les problèmes combinatoires se posent dans de nombreux domaines des mathématiques pures : en algèbre, en théorie des probabilités, en topologie et en géométrie. La combinatoire trouve également des applications dans l'**optimisation**, l'informatique et la physique statistique. Historiquement, de nombreuses questions combinatoires ont été étudiées de manière isolée, en apportant une solution *ad hoc* à un problème survenant dans un contexte mathématique particulier. Mais au cours des dernières décennies du XX^e siècle, des méthodes théoriques générales ont été développées, qui font de la combinatoire une branche indépendante des mathématiques à part entière. L'une des parties les plus anciennes et les plus accessibles de la combinatoire est la théorie des graphes.

La **théorie des graphes** est l'étude des graphes, des structures mathématiques utilisées pour modéliser les relations par paires entre les objets d'une certaine collection. Dans ce contexte, un graphe est une collection de **sommets** ou de nœuds et une collection d'**arêtes** qui relie des paires de sommets. Les graphes font partie des modèles les plus répandus de structures naturelles ou humaines. Ils peuvent être utilisés pour modéliser de nombreux types de relations et de dynamiques de processus dans les systèmes physiques, biologiques et sociaux. De nombreux problèmes d'intérêt pratique peuvent être représentés par des graphes. L'article rédigé par Leonhard Euler sur le **problème des sept ponts de Königsberg**, publié en 1736, est considéré comme le premier article de l'histoire de la théorie des graphes (fig. 26).

Un problème ouvert

Comme exemple (choisi au hasard) de problème ouvert en théorie des graphes, considérons la **conjecture d'Erdős-Faber-Lovász** de 1972,

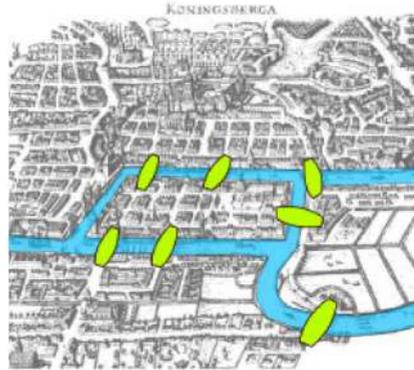


Fig. 26 – *Les ponts de Königsberg.*

nommée d'après Paul Erdős, Vance Faber et **László Lovász**. Cette conjecture a été reformulée par Haddad et Tardif en 2004. Supposons qu'il existe k comités dans un département universitaire, chacun composé de k membres du corps enseignant, et que tous les comités se réunissent dans la même salle, qui dispose de k chaises. Supposons également qu'au plus une personne appartienne à l'intersection de deux comités. Est-il possible d'affecter les membres des comités à des chaises de telle sorte que chaque membre occupe la même chaise pour tous les comités auxquels il ou elle participe ? Paul Erdős a d'abord offert 50 dollars pour la démonstration de la conjecture par l'affirmative, puis a augmenté la récompense à 500 dollars. Supposons que vous soyez l'une de ces personnes. Lorsque le premier comité se réunit, vous choisissez une chaise. Lorsque le comité suivant se réunit, vous êtes le seul à être membre des deux comités et vous conservez votre chaise. Lorsque le comité suivant se réunit, vous êtes parti et une autre personne prend la chaise. Après de nombreuses réunions sans vous, un autre de vos comités se réunira. La question est la suivante : peut-on être sûr que votre chaise initiale sera libre ?

LES MATHÉMATIQUES HONGROISES (par ARNE B. SLETSJØE)

Endre Szemerédi est l'un des nombreux mathématiciens hongrois de renom. Par rapport à sa population relativement faible (environ dix millions d'habitants), la Hongrie a formé un nombre impressionnant de mathématiciens brillants. Leurs contributions à notre savoir mathématique commun sont considérables.

Lorsque l'on présente une liste chronologique de quelques mathématiciens hongrois influents, un bon point de départ est **János Bolyai** (1802-1860). Le grand mathématicien Gauss a écrit à propos de Bolyai que ce jeune géomètre était un génie de premier ordre. Bolyai était un maître dans de nombreux domaines, notamment pour les langues, la musique et les mathématiques. Sa contribution la plus importante aux mathématiques est le développement de la **géométrie non euclidienne**, qui a finalement résolu le problème ancien de l'indépendance de l'**axiome des parallèles** d'Euclide.

János Neumann (1903-1957) ou **John von Neumann** est peut-être le plus influent de tous les mathématiciens hongrois. Ses travaux couvrent de nombreux domaines des mathématiques, de l'économie, de la physique et de l'informatique. Von Neumann avait un cerveau très rapide et une mémoire photographique. Israel Halperin a déclaré à propos de von Neumann : « Le suivre était impossible. On avait l'impression d'être sur un tricycle à la poursuite d'un bolide. »

Paul Erdős (1913-1996) était un mathématicien plutôt excentrique qui travaillait dans de nombreux domaines des mathématiques, en particulier en combinatoire, en théorie des graphes et en théorie des nombres. Erdős a publié environ 1 500 articles tout au long de sa carrière, plus que tout autre mathématicien de l'histoire, et a travaillé directement avec pas moins de 511 collaborateurs. Erdős a passé la majeure partie de sa vie comme un vagabond, voyageant entre les colloques scientifiques et les domiciles de ses collègues dans le monde entier. Il se présentait généralement à la porte d'un collègue et annonçait : « Mon cerveau est ouvert. » Il restait assez longtemps pour collaborer à quelques articles avant de repartir quelques jours plus tard.

En 2005, **Péter D. Lax** (1926-) a reçu le troisième prix Abel, pour ses contributions révolutionnaires à la théorie et aux applications des équations aux dérivées partielles et au calcul de leurs solutions. Lax a apporté d'importantes contributions à divers domaines des mathématiques pures et appliquées, notamment aux systèmes intégrables, à la dynamique des fluides et aux lois de conservation hyperboliques.

Le plus jeune mathématicien hongrois sur cette liste de célébrités est **László Lovász** (1948-). Lovász est surtout connu pour ses travaux en combinatoire, pour lesquels il a reçu le prix Wolf et le **prix Knuth** en 1999, ainsi que le prix de Kyoto en 2010. Il a été président de l'Union mathématique internationale de 2007 à 2010.

Cette liste ne comprend que quelques-uns des mathématiciens hongrois qui méritent d'être mentionnés. Des noms comme **Haar**, **Riesz** (**Frigyes** et **Marcel**), **Turán**, **Bott** et **Kollár** sont également très connus dans la communauté mathématique et ont apporté des contributions significatives.



LES PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES (par ARNE B. SLETSJØE)

Une progression arithmétique est une suite d'entiers naturels de différence constante. L'ensemble des entiers naturels contient de nombreuses progressions arithmétiques, mais si l'on considère des sous-ensembles plus petits des entiers naturels, il n'est pas évident qu'ils contiennent des progressions arithmétiques. Un problème général consiste à déterminer à quel point un sous-ensemble choisi au hasard peut être petit tout en contenant des progressions arithmétiques.

À l'école primaire, les enfants apprennent par cœur la table des deux (2, 4, 6, ...), la table des trois (3, 6, 9, 12, 15, ...) et ainsi de suite. Le terme mathématique pour une table de multiplication est « progression arithmétique ». Le concept de progression arithmétique inclut également des suites finies telles que 10, 13, 16, 19. Il s'agit d'une progression arithmétique de longueur 4, de raison 3 et de valeur initiale 10. La table de deux est une progression arithmétique de longueur infinie, de raison 2 et de valeur initiale 2. Une progression arithmétique est déterminée par sa longueur, sa raison et sa valeur initiale. Si l'on vous demande d'écrire la progression arithmétique de longueur 5, de raison 7 et de valeur initiale 23, vous devez répondre : 23, 30, 37, 44, 51. Remarquez que 4, 5, 6, 7, 8, 9 est également une progression arithmétique, la raison étant dans ce cas égale à 1.

Le mathématicien néerlandais Pierre-Joseph-Henry Baudet a formulé en 1921 la conjecture suivante : si l'on répartit les entiers naturels 1, 2, 3, ..., jusqu'à l'infini en un nombre aléatoire de boîtes, il y a toujours au moins une boîte qui contient une progression arithmétique de longueur arbitraire. Baudet est mort peu après à l'âge de 30 ans. La conjecture a été démontrée en 1927 par un autre mathématicien néerlandais, **Bartel Leendert Van der Waerden**.

En 1936, Pál Erdős et Pál Turán ont conjecturé un raffinement du résultat de Van der Waerden. Ils pensaient que la cause de l'existence des progressions arithmétiques était qu'une couleur occupait un ensemble d'entiers naturels de densité supérieure strictement positive. Pour un sous-ensemble A des entiers naturels, la densité supérieure est définie comme suit. Pour tout entier naturel N , nous considérons l'intersection de l'ensemble A avec l'ensemble $\{1, 2, \dots, N\}$, comptons le nombre d'entiers dans l'intersection et divisons par N . Ce nombre rationnel compris entre 0 et 1 mesure la taille de A par rapport à tous les entiers compris entre 1 et N . Nous procédons ainsi pour des nombres N croissants. Si la fraction pour N très grand ne dépasse jamais un cer-

tain nombre, nous disons que ce nombre est une limite supérieure pour les fractions. La plus petite **borne supérieure** possible pour N très grand est appelée la densité supérieure de A . Notons qu'il existe également un concept de densité inférieure, qui est la plus grande limite inférieure pour la fraction lorsque N est très grand.

Coloriage

Colorions les entiers naturels à l'aide de deux couleurs, par exemple le rouge et le bleu. Il est facile de voir que 9 entiers consécutifs, par exemple 1, 2, ..., 9, sont nécessaires pour garantir l'existence d'une progression arithmétique de longueur 3 de même couleur. Pourquoi? Essayons de démontrer le contraire. Supposons que la suite 1, 2, ..., 9 ne contienne pas de progression arithmétique de longueur 3 de même couleur. Alors les nombres 1, 5 et 9 ne peuvent pas être tous de la même couleur. Supposons d'abord que 1 et 5 soient rouges, tandis que 9 est bleu. Puisque 1 et 5 sont rouges, 3 doit être bleu. Mais 9 est également bleu, donc 6 doit être rouge. Or 5 et 6 sont rouges, ce qui force 4 et 7 à être bleus. Le nombre 8 doit être rouge puisque 7 et 9 sont bleus, et le nombre 2 doit être rouge puisque 3 et 4 sont bleus. Mais alors 2, 5 et 8 sont rouges, ce qui aboutit à une contradiction. Le cas où 1 et 9 sont rouges et 5 est bleu se traite de la même manière. En revanche, la suite de longueur 8, donnée par **RBRBBRBR** n'a pas de progression arithmétique de longueur 3. Ainsi, 9 est une borne précise pour cette propriété. Cela signifie pour le **nombre de Van der Waerden** que $W(2, 3) = 9$.

Densité supérieure

Exemple 1. Soit A l'ensemble des nombres pairs. L'ensemble des nombres pairs compris entre 1 et N a un cardinal égal à $N/2$ si N est pair et à $(N - 1)/2$ si N est impair. La fraction recherchée est donc $1/2$. C'est la densité supérieure des nombres pairs.

Exemple 2. Soit A un ensemble fini, par exemple tous les entiers naturels de 1 à 100. Pour N inférieur à 100, la fraction est égale à 1, mais pour N supérieur à 100, la fraction diminue et tend finalement vers zéro. La densité supérieure est donc 0.

Exemple 3. Considérons l'ensemble des puissances de 10, $A = \{10, 100, 1\,000, \dots\}$. Si nous comparons cet ensemble à l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots, 10^k\}$ pour un entier naturel k , il est facile de voir que la fraction sera $k/10^k$. Lorsque k augmente, cette fraction tend vers 0. La densité supérieure est de nouveau 0.

En 1953, Klaus Friedrich Roth a démontré que tout sous-ensemble d'entiers à densité supérieure strictement positive contient une progression arithmétique de longueur 3. En 1969, Endre Szemerédi a démontré que le sous-ensemble contient une progression arithmétique de longueur 4. Puis en 1975, il a démontré que tout sous-ensemble à densité supérieure strictement positive doit contenir des progressions arithmétiques de longueur arbitraire : c'est le « théorème de Szemerédi ». Erdős a formulé en 1973 une version plus forte de la conjecture d'Erdős-Turán. Soit A un sous-ensemble des entiers naturels tel que la somme de leurs inverses dépasse n importe quel entier naturel. Alors l'ensemble A doit contenir des progressions arithmétiques de longueur arbitraire. À l'époque, Erdős avait offert un prix de 3 000 dollars pour une démonstration de cette conjecture. Le problème vaut actuellement 5 000 dollars. On peut démontrer que les ensembles d'entiers naturels de densité supérieure strictement positive ont nécessairement la somme de leurs inverses qui diverge. La conjecture d'Erdős implique donc le théorème de Szemerédi. Il est également connu que la somme des inverses des nombres premiers diverge ; cela a été démontré pour la première fois par Leonhard Euler en 1737. Le théorème de Ben Green et Terence Tao de 2004 sur l'existence de progressions arithmétiques de longueur arbitraire dans l'ensemble des nombres premiers est un cas particulier de cette conjecture.

Les résultats concernant l'existence de progressions arithmétiques sont basés sur l'interaction entre la taille, le caractère aléatoire et la structure. Plus les ensembles sont grands, plus il est probable qu'ils possèdent des progressions arithmétiques. Szemerédi a montré qu'une densité supérieure strictement positive est une condition suffisante. Pour les ensembles encore plus petits, de densité nulle, une structure supplémentaire est nécessaire. L'ensemble des nombres premiers a une densité nulle, mais Green et Tao ont montré que cet ensemble présente néanmoins des similitudes structurelles avec les entiers naturels qui sont suffisantes pour démontrer l'existence de progressions arithmétiques, comme dans le théorème de Szemerédi.

LE LEMME DE RÉGULARITÉ DE SZEMERÉDI (par ARNE B. SLETSJØE)

L'un des principaux ingrédients du théorème de Szemerédi sur les progressions arithmétiques dans les ensembles de densité strictement positive est le lemme de régularité. Szemerédi a utilisé une forme faible de ce lemme pour les graphes bipartis pour démontrer le théorème. Plus tard, il a également démontré une version forte pour des graphes plus généraux.

Le lemme de régularité de Szemerédi est un résultat de théorie des graphes. Ce lemme stipule que pour tout graphe suffisamment grand, l'ensemble des nœuds peut être divisé en sous-ensembles de taille à peu près identique, de sorte que les arêtes entre les différents sous-ensembles se comportent de manière presque aléatoire. En 1975, Szemerédi a introduit une version faible de ce lemme, limitée aux graphes bipartis, afin de démontrer son célèbre théorème sur les progressions arithmétiques. En 1978, il a démontré le lemme complet. Un graphe est constitué de nœuds et d'arêtes. Les arêtes sont des connexions entre les nœuds. Il peut y avoir ou non une arête entre deux nœuds.

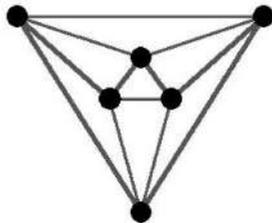


Fig. 27 – *Un graphe avec six nœuds et douze arêtes.*

Un graphe peut être considéré comme un objet mathématique abstrait ou comme l'illustration d'un réseau. Une carte routière est un exemple de graphe, où les croisements sont les nœuds et les routes intermédiaires les arêtes. Le graphe d'amitié est un autre exemple, où les nœuds peuvent être considérés comme un ensemble de personnes et les arêtes comme des relations d'amitié. Nous dessinons généralement un graphe mathématique en utilisant des points pour les nœuds et des segments pour les arêtes. Les graphes peuvent être très complexes, le plus simple étant celui qui ne comporte que des nœuds et aucune arête. Un graphe dont les arêtes relient n'importe quelle paire de nœuds est appelé « **graphe complet** ». En général, un graphe choisi au hasard se situe entre ces deux extrêmes.

Pour tout graphe, considérons maintenant deux sous-ensembles disjoints de nœuds, notés X et Y . Si tous les nœuds de X sont reliés à tous les nœuds de Y , le nombre $a(X, Y)$ d'arêtes entre les deux ensembles est le produit du nombre de nœuds dans les deux ensembles. En général, le nombre d'arêtes entre les deux ensembles sera inférieur à ce produit. La fraction avec comme numérateur le nombre d'arêtes entre les nœuds de X et ceux de Y et comme dénominateur le plus grand nombre possible d'arêtes, donné par le produit des cardinaux des deux ensembles, s'appelle la densité de la paire (X, Y) et se note $d(X, Y)$. La densité est égale à 1 si toutes les arêtes possibles entre les deux ensembles sont présentes dans le graphe, et à 0 s'il n'y a pas d'arête. On peut considérer la densité comme la probabilité moyenne d'existence d'une arête entre deux nœuds de X et Y pris au hasard.

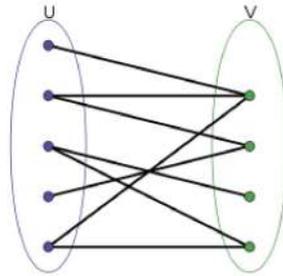


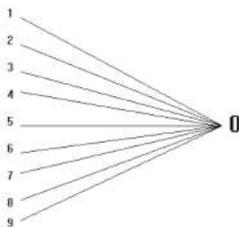
Fig. 28 – La densité de la paire (U, V) est $d(U, V) = 8/20 = 0,4$.

Soit (X, Y) une paire de nœuds de densité $d(X, Y)$. Pour différents choix de sous-ensembles U et V respectivement de X et Y , nous pouvons calculer la densité $d(U, V)$ de la même manière que ci-dessus. La régularité de la paire (X, Y) mesure la façon dont la densité varie lorsque nous examinons toutes les paires de sous-ensembles de X et Y d'une certaine taille. Dans le cas complet, où tous les nœuds de X sont reliés à tous les nœuds de Y , la régularité est totale. L'autre extrême, un graphe sans aucune arête entre X et Y , donne également une régularité totale. Et ce qui est peut-être un peu surprenant, un ensemble d'arêtes choisies aléatoirement pour une paire (X, Y) donne une régularité élevée. Cela s'explique par le fait que pour un ensemble d'arêtes aléatoires, la probabilité moyenne de trouver une arête entre deux nœuds de X et Y est plus ou moins indépendante des sous-ensembles de X et Y que nous considérons.

Pour un graphe arbitraire, nous savons normalement très peu de choses sur l'ensemble des arêtes. Mais le lemme de régularité de Szemerédi nous permet d'examiner l'ensemble des arêtes d'une manière

plus gérable. La stratégie consiste à diviser l'ensemble des nœuds du graphe en sous-ensembles de taille plus ou moins égale et à calculer la régularité de chaque paire de sous-ensembles. Si nous pouvons le faire de manière à ce que chaque paire ait un degré élevé de régularité, nous obtenons un outil utile pour étudier le graphe, même si l'ensemble des arêtes du graphe est une collection de segments inaccessible et apparemment sans motif. C'est exactement ce que le lemme de régularité de Szemerédi nous donne. Ce lemme indique que, quelle que soit la régularité requise, il est toujours possible de trouver une **partition** de l'ensemble des nœuds en sous-ensembles tels que l'ensemble des arêtes de deux sous-ensembles quelconques soit suffisamment aléatoire, c'est-à-dire qu'il présente le degré de régularité requis.

Considérons un cas particulier du lemme de régularité où le graphe a la forme suivante. Soient $1, 2, 3, \dots, N$ et 0 les nœuds et soit A un sous-ensemble de $\{1, 2, 3, \dots, N\}$. Supposons qu'il n'y ait pas d'arêtes entre les nœuds $1, 2, 3, \dots, N$, et que nous ayons une arête entre un nœud m et 0 si et seulement si m est dans A . Une partition de l'ensemble des nœuds consistera en un sous-ensemble qui contient 0 , et le reste sera des sous-ensembles de $\{1, 2, 3, \dots, N\}$ que nous supposons être des intervalles. Pour simplifier, éliminons tous les nœuds sauf 0 du sous-ensemble contenant 0 . Les sous-ensembles sont donc soit des sous-intervalles de taille plus ou moins égale de $\{1, 2, 3, \dots, N\}$, soit $\{0\}$. Pour deux sous-intervalles de $\{1, 2, 3, \dots, N\}$, la densité est de 0 , car il n'y a pas d'arêtes internes dans $\{1, 2, 3, \dots, N\}$, et la densité d'un intervalle et de $\{0\}$ est la fraction $\#(A \cap \{1, 2, 3, \dots, N\})/\#A$. Le lemme de régularité dans ce cas dit que pour un sous-ensemble arbitraire A de $\{1, 2, 3, \dots, N\}$ nous pouvons diviser $\{1, 2, 3, \dots, N\}$ en sous-intervalles de longueur (presque) égale de telle sorte que, pour tout sous-intervalle I , le sous-ensemble $A \cap I$ soit aléatoire, c'est-à-dire que pour tout sous-intervalle J de I la densité de A dans J soit presque la même que la densité de A dans I .



LES TRAVAUX D'ENDRE SZEMERÉDI (par W. T. GOWERS)

Introduction

Endre Szemerédi est une figure emblématique du domaine des mathématiques connu sous le nom de combinatoire, avec des contributions particulièrement importantes au sous-domaine appelé « **combinatoire extrémale** ». J'expliquerai la signification de ces termes dans un instant, mais voici d'abord quelques faits bruts sur son extraordinaire production mathématique. Le résultat pour lequel il est le plus connu est sa démonstration en 1975 de ce que l'on appelle aujourd'hui le théorème de Szemerédi, mais qui était à l'époque une conjecture notoire d'Erdős et Turán vieille de plusieurs décennies. Ce théorème est l'un des points forts des mathématiques du XX^e siècle, mais il est également au cœur d'un grand nombre de recherches très récentes. Il nous a également donné le lemme de régularité de Szemerédi, un résultat qui trouve son origine dans la démonstration du théorème de Szemerédi, mais qui est devenu un outil majeur de la combinatoire extrémale. Outre ces résultats, il a publié plus de deux cents articles, dont beaucoup représentent des avancées importantes. Je n'en retiendrai qu'un ou deux, mais il faut bien comprendre qu'il ne s'agit que d'un petit échantillon d'une production considérable qui a profondément influencé de nombreux domaines de la pensée mathématique.

Qu'est-ce que la combinatoire ? Une définition possible est qu'il s'agit de l'étude des structures discrètes. Et quelles sont ces structures ? Le mot « discret » est généralement opposé au mot « continu » : une structure est continue si l'on peut passer sans problème d'une partie à l'autre, alors qu'elle est discrète si l'on doit faire des sauts. Par exemple, si vous modélisez l'écoulement d'un fluide, les structures mathématiques que vous étudiez seront continues, puisque vous spécifierez des éléments tels que les vitesses et les pressions en différents points, et que ces dernières varieront de manière régulière. En revanche, si vous modélisez l'intérieur d'un ordinateur, vous vous intéresserez à des suites de 0 et de 1, ce qui est un exemple de structure discrète, puisque pour passer d'une telle suite à une autre, vous devez faire en sorte qu'au moins un 0 se transforme en 1, ou vice versa.

Une autre structure discrète, peut-être la plus importante en combinatoire, est le graphe. Un graphe est un objet qui ressemble à la figure 29. En d'autres termes, il est constitué de quelques points, dont certains peuvent être reliés par des segments. Les points sont appelés « sommets » et les segments « arêtes ».

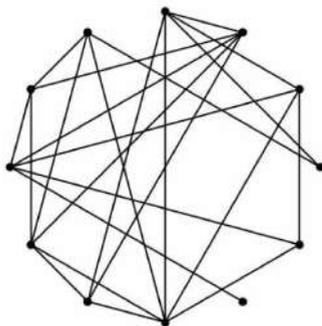


Fig. 29 – *Un graphe.*

On pourrait penser qu'un graphe est continu, car on peut se déplacer continûment le long de ses arêtes. Cependant, ce n'est que l'image qui est continue et non le graphe lui-même. Tout ce qui nous intéresse dans un graphe, c'est de savoir quelles paires de sommets sont reliées par des arêtes, et cela peut être spécifié sous la forme d'une simple liste. Par exemple, si le graphe ressemble aux sommets et aux bords d'un carré, nous pouvons le spécifier en disant que les sommets sont a , b , c et d et en énumérant les arêtes : ab , bc , cd et da .

Le théorème de Szemerédi

L'étude des structures discrètes ne relève pas toutes de la combinatoire. Une autre caractéristique d'une grande partie du sujet est que ses problèmes peuvent être énoncés d'une manière facile à comprendre, ou du moins beaucoup plus facile que pour les problèmes de beaucoup d'autres domaines. De même, les démonstrations sont souvent élémentaires, non pas dans le sens où Sherlock Holmes utiliserait ce terme, mais dans un sens mathématique assez particulier. Lorsqu'un mathématicien qualifie une démonstration d'élémentaire, cela signifie que l'argument ne fait pas appel à des concepts avancés ou ne s'appuie pas sur des résultats difficiles déjà établis. Il ne faut pas en déduire que la démonstration soit facile : on peut assembler des ingrédients de base de manière extrêmement compliquée et sophistiquée. Certaines démonstrations « élémentaires » comptent parmi les plus difficiles des mathématiques. Inversement, certaines démonstrations avancées peuvent en fait être assez faciles lorsque l'on a investi suffisamment de temps dans la compréhension des théories dont elles dépendent. Bien entendu, il existe également des démonstrations élémentaires faciles et des démon-

trations avancées difficiles.

Le théorème de Szemerédi est une parfaite illustration de ce que je viens de dire. Son énoncé est très séduisant et la démonstration qu'en donne Szemerédi est à la fois élémentaire et extrêmement difficile. Commençons par expliquer ce que dit le théorème.

Pour ce faire, j'ai besoin de la notion de progression arithmétique. Une progression arithmétique est une suite de nombres qui progresse par pas de même taille. Ainsi, la suite 3, 9, 15, 21, 27, 33, 39 est une progression arithmétique avec des pas de taille 6, alors que la suite 4, 7, 11, 14, 17, 21 n'est pas une progression arithmétique, car les différences entre les termes successifs ne sont pas toutes les mêmes : certains valent 3 et d'autres valent 4.

Pour comprendre le théorème de Szemerédi, il suffit d'imaginer le jeu à un seul joueur suivant. On vous donne un petit nombre, disons 5, et un grand nombre comme 10 000. Votre tâche consiste à choisir autant d'entiers entre 1 et 10 000 que vous le pouvez. La règle à laquelle vous devez obéir est qu'à partir des entiers que vous choisissez, il ne doit pas être possible de créer une progression arithmétique à cinq termes. Par exemple, si vous choisissiez par hasard les nombres 101, 1 103, 2 105, 3 107 et 4 109 (entre autres), vous auriez perdu, car ces cinq nombres forment une progression à cinq termes avec une taille de pas égale à 1 002.

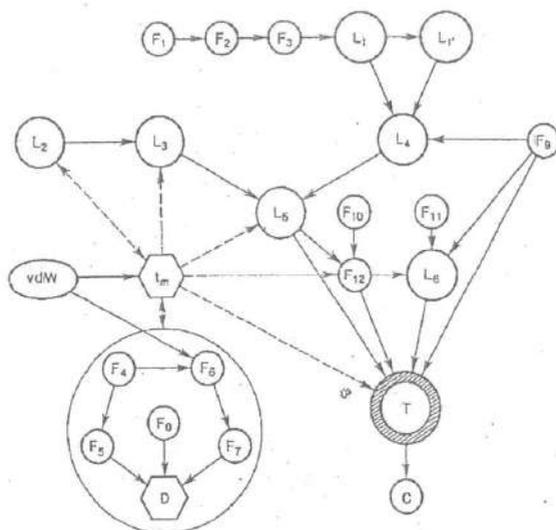
Il est évident que vous êtes destiné à perdre ce jeu, puisque, pour donner un argument à la fois élémentaire et extrêmement facile, si vous continuez suffisamment longtemps, vous finirez par choisir tous les nombres entre 1 et 10 000, ce qui inclura de nombreuses progressions arithmétiques à cinq termes. Mais le théorème de Szemerédi nous apprend quelque chose de bien plus intéressant : même si vous jouez avec la meilleure stratégie possible pour éviter la progression, vous perdrez bien avant d'avoir choisi tous les nombres.

Pour énoncer le résultat avec précision, j'ai besoin d'un tout petit peu d'algèbre, même si tout ce que je veux dire par là, c'est que j'aimerais représenter les deux nombres avec lesquels nous commençons par des lettres. Soit k la longueur de la progression que nous essayons d'éviter, et n le nombre de nombres parmi lesquels nous pouvons choisir. Dans la discussion ci-dessus, k valait 5 et n valait 10 000. Notons maintenant $S(k, n)$ le plus grand nombre de nombres qu'il est possible de choisir tout en évitant une progression de k termes. Ce que Szemerédi a montré, c'est que lorsque n est grand, $S(k, n)$ est un très petit pourcentage de n . Petit comment ? Eh bien, aussi petit que vous le

souhaitez, à condition que n soit suffisamment grand.

Si, par exemple, nous essayons d'éviter les progressions de longueur 23, le théorème de Szemerédi nous dit qu'il existe un certain n (qui peut être énorme, mais l'important est qu'il existe) tel que si nous jouons le jeu avec n nombres, nous ne pouvons pas choisir plus de $n/1000$ de ces nombres, c'est-à-dire à peine 0,1 % d'entre eux, avant de perdre. Et il en va de même pour toute autre longueur de progression et tout autre pourcentage strictement positif.

Comment se présente la démonstration ? Je ne vais pas vous le dire. Je vais simplement répéter qu'elle est élémentaire au sens technique, et tenter de vous convaincre qu'elle est difficile en reproduisant un diagramme tiré de l'article original de Szemerédi.



Pourquoi devrions-nous nous soucier de trouver des progressions arithmétiques ?

Je ne connais aucune situation dans la vie réelle où il est important d'être sûr qu'un petit ensemble d'entiers est forcé de contenir une progression arithmétique de longueur 10. Et même si une telle situation se présentait, le nombre n dont vous auriez besoin pour que le théorème de Szemerédi vous dise quelque chose d'intéressant serait bien plus grand que le nombre d'atomes dans l'univers, ou même que l'exponentielle de

ce nombre. Cela place le théorème bien au-delà du domaine des applications pratiques. Qu'est-ce qui rend donc le théorème de Szemerédi si fascinant pour les mathématiciens ?

Il y a plusieurs réponses à cela. La plus évidente est le contraste entre la simplicité de l'énoncé du théorème de Szemerédi et la difficulté de sa démonstration (et de toutes les démonstrations découvertes par la suite). En général, un énoncé mathématique simple et naturel a soit une démonstration simple, soit un contre-exemple simple. De temps en temps, cependant, on est surpris : une question d'apparence innocente est beaucoup plus difficile à résoudre que ce à quoi on s'attend. Une grande partie de ces questions s'avèrent si difficiles que personne ne croit qu'elles pourront être résolues sans des idées qui dépassent de loin tout ce dont nous disposons actuellement (par exemple, la question de savoir si $e + \pi$ est un **nombre irrationnel**). Mais certaines questions sont parfaites : elles sont simples à poser et il est très difficile d'y répondre, mais elles ont juste assez de liens avec ce que nous savons pour que l'on ait le sentiment qu'essayer de les résoudre n'est pas une tâche complètement désespérée. La conjecture d'Erdős-Turán entraine dans cette catégorie.

Une deuxième réponse est que le théorème de Szemerédi a des applications mathématiques même s'il n'a pas d'applications pratiques. Une application particulièrement remarquable est le théorème de Ben Green et Terence Tao, qui affirme que l'on peut trouver des progressions arithmétiques arbitrairement longues qui ne sont constituées que de nombres premiers. Ce résultat ne découle pas directement du théorème de Szemerédi, mais Green et Tao ont trouvé un moyen extrêmement astucieux de convertir leur problème en une forme qui leur a permis d'utiliser le théorème de Szemerédi pour le résoudre.

Si toutefois vous insistez sur les applications pratiques, tout n'est pas perdu, à condition que vous soyez prêt à accepter des applications indirectes plutôt que directes. Un aspect important et trop peu apprécié des mathématiques est que le résultat que vous démontrez est souvent moins intéressant que les méthodes que vous utilisez pour le démontrer. Cette tendance est particulièrement prononcée en combinatoire, où les problèmes ouverts deviennent souvent populaires non pas parce que nous cherchons désespérément à en connaître les réponses, mais parce qu'ils englobent une difficulté plus générale qui, selon nous, nous empêche d'avancer sur le plan mathématique. Lorsqu'un tel problème est résolu, la solution implique souvent le développement de nouveaux outils mathématiques qui sont ensuite utilisés dans de nombreux autres

contextes.

Le théorème de Szemerédi illustre d'ailleurs parfaitement ce phénomène, comme nous allons le voir.

Le lemme de régularité de Szemerédi

Je n'ai pas encore dit ce qu'est la combinatoire extrémale; c'est le moment. Voici une question en théorie des graphes extrémaux : si un graphe a n sommets, combien d'arêtes peut-il avoir sans que trois d'entre elles ne forment un triangle? En général, les questions de combinatoire extrémale portent sur la taille que peut avoir une certaine quantité avant que quelque chose d'autre ne doive se produire. Le théorème de Szemerédi en est un autre exemple : il s'agit de savoir combien de nombres on peut choisir entre 1 et n avant d'être obligé d'inclure une progression arithmétique de longueur k .

Ces questions se divisent naturellement en deux parties. La première consiste à trouver des exemples de structures qui évitent ce que l'on veut éviter de telle sorte que la quantité qui nous intéresse soit la plus grande possible. L'autre partie consiste à montrer que si la quantité en question atteint une certaine taille, il est impossible d'éviter ce que l'on veut éviter. Erdős a compris que, dans de nombreuses situations, un moyen étonnamment efficace de réaliser la première partie consiste à choisir ces structures au hasard. Par exemple, si votre structure est un graphe à n sommets, il existe des problèmes pour lesquels vous obtenez de très bonnes réponses si, pour chaque paire de sommets x et y , vous tirez simplement à pile ou face pour décider de les relier par une arête. Si vous voulez que votre graphe aléatoire contienne moins d'arêtes, vous pouvez utiliser une pièce de monnaie biaisée. On pourrait croire qu'il n'y a rien à dire sur une structure définie au hasard, et c'est en effet plus ou moins vrai si l'on recherche une certitude totale. Mais, et c'est là l'essentiel, nous pouvons dire énormément de choses si nous nous contentons de demander une quasi-certitude. Et cela suffit : si nous pouvons dire qu'une structure choisie au hasard a presque certainement les propriétés que nous voulons, alors nous pouvons aussi tirer la conclusion beaucoup plus faible qu'au moins une structure a les propriétés que nous voulons.

L'intuition d'Erdős a donné naissance à la théorie des **graphes aléatoires**, qui est devenue un sous-domaine majeur de la combinatoire. En conséquence, les spécialistes de la combinatoire considèrent les graphes aléatoires non pas comme des objets chaotiques désagréables, mais

comme des objets qui sont, à bien des égards, faciles à comprendre. Pour être clair, je ne dis pas que la théorie des graphes aléatoires soit un domaine facile : si vous posez des questions suffisamment détaillées sur un graphe aléatoire, y répondre nécessite des estimations probabilistes très délicates et difficiles. Mais il existe néanmoins un sens important dans lequel les graphes aléatoires sont (presque toujours) prévisibles et se comportent bien.

C'est dans ce contexte qu'il faut comprendre le lemme de régularité de Szemerédi. Avant le lemme de régularité, les graphes étaient considérés comme des objets plutôt dépourvus de structure. Après tout, lorsque vous spécifiez un graphe, vous décidez pour chaque paire de sommets x et y de les relier par une arête, et votre décision n'est soumise à aucune contrainte. Cependant, Szemerédi s'est rendu compte qu'une fois que l'on a perdu sa peur du hasard, on peut donner une description structurelle utile d'un graphe complètement arbitraire.

Je ne peux pas donner ici un énoncé précis du résultat, mais l'idée générale est la suivante. Étant donné un graphe quelconque, il existe un moyen de diviser ses sommets en un petit nombre d'ensembles de telle sorte que si vous prenez les arêtes reliant deux de ces ensembles, elles semblent avoir été choisies au hasard (en fait, même cette idée grossière est une simplification excessive, mais elle suffira pour les besoins ici). En bref, chaque graphe est constitué d'un petit nombre de graphes de type aléatoire.

Cela signifie que nous pouvons donner une bonne description de notre graphe en utilisant une très petite quantité de données : après avoir divisé les sommets en ensembles, dont le lemme assure l'existence, il nous suffit de dire approximativement combien d'arêtes il y a entre chaque paire de ces ensembles, et nous savons que ces arêtes seront distribuées d'une manière qui semble aléatoire. Cela ne nous dit pas exactement ce qu'est le graphe, mais dans de nombreux cas, la différence entre deux graphes de type aléatoire n'est pas importante : ils sont tous deux de type aléatoire et ont donc les propriétés que l'on attend d'un graphe aléatoire.

Le lemme de régularité de Szemerédi est rapidement devenu un outil central dans la théorie des graphes extrémaux. Son influence indirecte, par exemple à travers plusieurs modifications et généralisations qui ont été formulées par la suite, est encore plus grande.

J'ai promis de discuter des applications pratiques indirectes du lemme de régularité. Commençons par un projet intellectuel d'une importance pratique évidente et revenons au lemme de régularité. Per-

sonne ne peut nier que si l'on pouvait développer un programme informatique capable d'apprendre par l'expérience, il aurait d'innombrables applications pratiques. La branche de l'intelligence artificielle qui tente d'y parvenir s'appelle l'**apprentissage automatique**. **Leslie Valiant** a proposé un modèle abstrait célèbre, l'**apprentissage PAC**, qui constitue un bon cadre de réflexion sur l'apprentissage automatique. Les lettres PAC signifient « probablement approximativement correct ». Cela a donné lieu à des questions purement mathématiques qui relèvent de la notion générale de test de propriété. En gros, on vous présente une structure et vous voulez montrer qu'elle possède une certaine propriété ou qu'elle est probablement très similaire à une structure qui ne possède pas cette propriété. Par exemple, on peut vous donner un graphe et vous demander de montrer soit qu'il contient un triangle, soit qu'il ne diffère que légèrement, voire pas du tout, d'un graphe sans triangles. Ce qui est intéressant du point de vue de l'apprentissage automatique, c'est que cela peut souvent être fait de manière extraordinairement rapide : le programme peut effectuer un très petit nombre de tests simples et former ensuite une hypothèse fiable (c'est-à-dire une hypothèse qui est probablement approximativement correcte). Et l'outil qui permet de le démontrer ? Le lemme de régularité de Szemerédi.

Le tri

Szemerédi est également connu pour être un tiers de Miklós Ajtai, János Komlós et Endre Szemerédi, ou AKS en abrégé. Je vais évoquer quelques points forts de leur travail, mais je dois souligner qu'il ne s'agit que d'un petit échantillon.

Les **algorithmes de tri** sont un vieux sujet en informatique. On vous donne une collection d'objets et vous pouvez comparer deux d'entre eux. Votre tâche consiste à les classer en utilisant le moins de comparaisons possible. Pour y réfléchir, il peut être utile d'imaginer une collection de pierres que vous devez classer par ordre de poids. Tout ce que vous avez, c'est une balance qui vous dira, à partir de deux pierres quelconques, laquelle est la plus lourde. Vous devez payer un euro chaque fois que vous utilisez la balance et vous voulez dépenser le moins d'argent possible.

Un beau raisonnement montre que si vous avez n objets, le nombre de comparaisons à effectuer est au moins le **logarithme** (en base 2) de $n!$ (le point d'exclamation indique une **factorielle**, de sorte que $n!$ est l'abréviation de $1 \times 2 \times \dots \times n$). L'argument est suffisamment simple

pour que je puisse le donner ici. Le nombre d'ordres possibles pour les n objets est $n!$. Chaque fois que vous posez une question, il n'y a que deux réponses possibles. Vous ne pouvez donc pas espérer réduire de plus d'un facteur 2 le nombre d'ordres compatibles avec les réponses que vous avez reçues jusque-là. C'est un peu comme jouer à vingt questions : chaque question divise ce qui reste du monde en deux, et si vous n'avez pas de chance, la réponse que vous obtiendrez vous dirigera vers la moitié la plus grande, de sorte que vous ne pouvez en général pas faire mieux que de réduire l'ensemble des possibilités de 50 %. Par conséquent, après k étapes, vous ne pouvez pas réduire le nombre d'ordres possibles d'un facteur supérieur à 2^k . Par conséquent, dans le pire des cas, le nombre d'étapes doit être un certain k tel que 2^k soit au moins $n!$, car il pourrait bien y avoir sinon plus d'un ordre compatible avec les informations dont vous disposez. Cela revient à dire que k doit être au moins le logarithme de $n!$.

Le logarithme de $n!$ vaut approximativement $n \log n$ (c'est-à-dire n fois le logarithme de n). Il est intéressant de noter que l'on connaît des algorithmes de tri qui se contentent approximativement de ce nombre de comparaisons. En d'autres termes, il existe des méthodes qui permettent de décider quels objets comparer, compte tenu des réponses précédentes, qui nécessitent un nombre de comparaisons proche du minimum théorique. Par exemple en 1945, John von Neumann a inventé une méthode connue sous le nom de « **tri fusion** » qui permet d'atteindre cet objectif.

À la fin de l'année 1945, Szemerédi n'avait que cinq ans. Il pourrait donc sembler que le sujet des algorithmes de tri ait été lui-même complètement résolu bien avant qu'il ne soit mathématiquement actif. Mais ce serait sous-estimer la capacité des mathématiciens à poser de bonnes questions.

Reprenons les pierres que nous voulons classer par ordre de poids et modifions légèrement le jeu. Cette fois-ci, vous disposez d'autant de balances que vous souhaitez, afin de pouvoir effectuer plusieurs comparaisons simultanément. Vous organisez donc une série de pesées où, à chaque pesée, vous pouvez peser autant de paires de pierres que vous le souhaitez. La seule contrainte évidente est que la même pierre ne peut pas être placée sur deux balances différentes, de sorte que chaque pierre est comparée au maximum une fois au cours de chaque pesée. Votre objectif est maintenant de mettre les pierres dans l'ordre en utilisant le plus petit nombre possible de pesées.

Comme nous savons déjà qu'environ $n \log n$ comparaisons sont

nécessaires, et que vous pouvez effectuer au maximum $n/2$ comparaisons par pesée, le nombre total de pesées devra évidemment être d'environ $2 \log n$, au minimum. Pendant longtemps, la question de savoir si l'on pouvait s'en sortir avec ce nombre minimal théorique est restée ouverte. C'est ce problème qu'Ajtai, Komlós et Szemerédi ont résolu. Ils ont mis au point une méthode de tri très intelligente qui nécessite effectivement un nombre de pesées de l'ordre de $\log n$. En langage informatique, Ajtai, Komlós et Szemerédi ont découvert un algorithme parallèle rapide pour le tri.

Je ne peux pas décrire ici leur méthode dans son intégralité, mais je peux donner une idée de l'un de ses ingrédients. Supposons que vous disposiez de 1 000 pierres au départ et que vous les divisiez en deux groupes de 500 (à ce stade, vous n'avez absolument aucune idée du poids des pierres les unes par rapport aux autres). Une chose que vous pourriez faire est d'apparier les pierres d'un groupe avec celles de l'autre groupe, d'effectuer 500 comparaisons simultanées et de placer toutes les pierres les plus légères dans un groupe marqué ℓ et les plus lourdes dans un groupe marqué L. Nous serions très heureux si toutes les pierres de ℓ étaient plus légères que toutes les pierres de L, mais jusqu'à présent, il n'y a absolument aucune raison de croire que c'est le cas. Cependant, nous pouvons répéter le processus. Bien entendu, pour obtenir davantage d'informations, nous voulons maintenant associer les pierres d'une autre manière.

En nous inspirant d'Erdős, nous pourrions penser, à juste titre d'ailleurs, qu'il serait bon de jumeler au hasard les pierres de ℓ avec les pierres de L et de répéter le processus. En d'autres termes, chaque fois qu'une pierre de ℓ est plus lourde que celle de L, nous les échangeons. Chaque fois qu'elle est plus légère, nous la laissons là où elle est.

Si nous continuons à associer au hasard les pierres de ℓ et les pierres de L, il y a une tendance générale à ce que les pierres les plus légères se retrouvent dans ℓ et les pierres les plus lourdes dans L. Qui plus est, au fur et à mesure que le processus se poursuit, cette tendance devient de plus en plus prononcée : si les pierres de ℓ sont déjà majoritairement les plus légères, il est peu probable qu'elles soient déplacées vers L ou que les pierres de L soient déplacées vers ℓ . Ajtai, Komlós et Szemerédi ont démontré qu'après un nombre constant de comparaisons (c'est-à-dire un nombre qui n'augmente pas avec n), la grande majorité des pierres dans ℓ sont plus légères que la grande majorité des pierres dans L.

Si toutes les pierres de ℓ étaient plus légères que toutes les pierres

de L , nous pourrions simplement répéter ce processus au sein de chaque groupe et, après environ $\log n$ itérations, nous aurions terminé. Cependant, tout ce que nous savons, c'est que c'est le cas pour presque toutes les pierres. Bien qu'Ajtai, Komlós et Szemerédi soient effectivement parvenus à la conclusion, ils ont dû travailler dur pour y parvenir.

Un dernier mot sur cet algorithme : comme je l'ai décrit ci-dessus, il s'agit d'un algorithme aléatoire, en raison de toutes les paires aléatoires. Cependant, il existe un type de graphe très utile, connu sous le nom de **graphe expandeur**, qui peut souvent être utilisé comme substitut à un graphe aléatoire. Dans ce cas, au lieu de tirer à pile ou face, on peut utiliser les arêtes d'un graphe expandeur pour décider de l'appariement des pierres et l'algorithme fonctionne toujours. Il s'agit d'un exemple de dérandomisation, qui est l'une des idées fondamentales de l'informatique théorique et qui signifie que l'algorithme peut être exécuté de manière totalement déterministe.

Le nombre de Ramsey $R(3, k)$

Un triangle dans un graphe correspond à ce que l'on peut attendre : trois sommets reliés les uns aux autres. Un ensemble indépendant est une collection de sommets non reliés entre eux. Voici un argument simple pour montrer qu'un graphe avec k^2 sommets doit contenir soit un triangle, soit un ensemble indépendant de taille k . De façon équivalente, et c'est ce que je vais démontrer, si un graphe ne contient pas de triangle ou d'ensemble indépendant de taille k , alors il doit avoir moins de k^2 sommets.

Le raisonnement est le suivant. Soit s un sommet quelconque du graphe. Deux sommets reliés à s ne peuvent pas être reliés l'un à l'autre, car nous aurions alors un triangle. Par conséquent, les sommets reliés à s forment un ensemble indépendant. Il s'ensuit que s ne peut être relié à plus de $k - 1$ autres sommets (puisque nous supposons que le graphe ne contient pas d'ensemble indépendant de taille k).

Imaginons maintenant que nous essayions de trouver un grand ensemble indépendant. Une façon de procéder consiste simplement à choisir une suite de sommets s_1, s_2, s_3, \dots , en s'assurant que chaque nouveau sommet choisi n'est relié à aucun des sommets précédents. Pouvons-nous faire cela ? Supposons que nous ayons choisi jusqu'à présent les sommets s_1, s_2, \dots, s_j . Chacun d'entre eux est relié à au plus $k - 1$ sommets, donc entre eux ils sont reliés à au plus $(k - 1)j$ sommets. Par conséquent, lorsqu'il s'agit de choisir un nouveau sommet,

il y a au plus $j + (k - 1)j = kj$ sommets que nous devons éviter (les premiers j étant les sommets s_1, \dots, s_j). Donc tant que le nombre de sommets est supérieur à kj , on peut prolonger la suite. Si nous voulons que j aille jusqu'à k , il faut que le nombre de sommets soit supérieur à $k(k - 1)$. Puisque k^2 est plus grand que cela, si nous avons k^2 sommets, nous pourrons continuer notre suite jusqu'à au moins s_k , et cela nous donnera un ensemble indépendant de taille k .

Avons-nous vraiment besoin d'autant de sommets pour garantir un triangle ou un ensemble indépendant de taille k ? L'argument donne un résultat légèrement plus fort que k^2 : il montre que $k(k - 1) + 1$ sommets suffisent. Mais existe-t-il des graphes avec $k(k - 1)$ sommets qui ne contiennent pas de triangles ou d'ensembles indépendants de taille k ? Si ce n'est pas le cas, combien de sommets un tel graphe peut-il avoir? Le plus grand nombre possible est appelé le **nombre de Ramsey** $R(3, k)$.

Le raisonnement ci-dessus est (selon les normes de la recherche en mathématiques) très simple, mais il est beaucoup plus difficile de décider s'il peut être amélioré. C'est le problème qu'ont résolu Ajtai, Komlós et Szemerédi : ils ont démontré que $R(3, k)$ est au plus $k^2 / \log k$, à un facteur constant près. Si vous voulez vraiment apprécier ce résultat, vous devriez prendre le temps de réfléchir au problème par vous-même. Mais si vous n'avez pas le temps, vous pouvez au moins garder à l'esprit que le problème datait de plusieurs décennies et que quinze ans plus tard, Jeong Han Kim a démontré dans un autre article célèbre que le résultat était le meilleur possible : $R(3, k)$ ne vaut pas seulement au plus $k^2 / \log k$, il est en fait égal à $k^2 / \log k$ (encore une fois, à un facteur constant près).

Pour démontrer leur résultat, Ajtai, Komlós et Szemerédi ont dû faire mieux que le raisonnement facile esquissé ci-dessus. Très grossièrement, ce qu'ils ont fait a été de suivre le même raisonnement, mais de le faire de manière beaucoup plus prudente. Rappelons que l'idée de base est de choisir les sommets s_1, s_2, \dots , et d'éviter les voisins des sommets que nous avons déjà choisis. Nous pouvons décrire ce processus comme suit. Nous commençons par le graphe entier. Nous choisissons un sommet s_1 , puis nous rejetons tous ses voisins. Ensuite, dans la partie restante du graphe, nous choisissons un sommet s_2 et éliminons tous ses voisins. Et nous continuons ainsi. Comme aucun sommet n'a plus de $k - 1$ voisins, nous n'éliminons pas trop de sommets à chaque étape, ce qui nous permet de continuer assez longtemps.

Il est clair que si, à n'importe quel stade de ce processus, nous

pouvions trouver un sommet ayant beaucoup moins que $k - 1$ voisins, nous serions très heureux : nous pourrions choisir ce sommet, et nous n'aurions alors pas à rejeter une si grande partie du graphe, de sorte que le processus pourrait se poursuivre plus longtemps. Mais pourquoi serions-nous capables de trouver un tel sommet ? Pour commencer, il n'y a aucune raison. Mais nous avons un certain contrôle sur le processus : lorsque nous choisissons un sommet s_i , nous éliminons ses voisins. Si ces voisins ont eux-mêmes de nombreux voisins, lorsque nous les éliminons, nous aurons également éliminé un grand nombre d'arêtes. L'idée de base est donc de choisir la suite s_1, s_2, \dots , de telle sorte que le nombre d'arêtes dans la partie du graphe que nous n'avons pas éliminée diminue le plus possible. Ajtai, Komlós et Szemerédi ont montré qu'il était possible de poursuivre cette idée et de finir par prolonger le processus de sorte qu'il puisse être poursuivi pendant environ $\log k$ fois plus longtemps que ce que l'argument simple suggérerait.

Le raisonnement que je viens d'évoquer n'était pas en fait la première démonstration apportée par Ajtai, Komlós et Szemerédi, mais il est plus facile à décrire. Leur argument précédent est également important, car il s'agit d'un exemple précoce de la méthode dite semi-aléatoire, que je n'aborderai pas ici, si ce n'est pour dire qu'il s'agit d'une autre technique générale qui a eu de nombreuses applications.

Conclusion

Certains mathématiciens sont célèbres pour un ou deux théorèmes majeurs. D'autres sont célèbres pour un ensemble énorme et important de résultats de grande qualité. Très rarement, un mathématicien est célèbre pour les deux. Aucun exposé sur les travaux de Szemerédi ne serait complet sans une discussion sur le théorème de Szemerédi et le lemme de régularité de Szemerédi. Cependant, Szemerédi ne se limite pas à ces deux théorèmes. Il a publié plus de deux cents articles, comme je l'ai mentionné au début. À l'âge de 71 ans, il ne montre aucun signe de ralentissement. Il est tout à fait approprié qu'il reçoive un prix de l'ampleur du prix Abel. J'espère que le petit échantillon de son travail que j'ai décrit donne au moins une idée de la raison, même si j'ai à peine effleuré la surface de ce qu'il a fait.

Deligne (2013)

« pour ses contributions fondamentales à la géométrie algébrique et pour leur impact continu sur la théorie des nombres, la **théorie des représentations** et les domaines connexes ».

Les objets géométriques tels que les droites, les cercles et les sphères peuvent être décrits par des équations algébriques simples. Le lien fondamental qui en résulte entre géométrie et algèbre a conduit au développement de la géométrie algébrique, dans laquelle des méthodes géométriques sont utilisées pour étudier des solutions d'équations polynomiales et, inversement, des techniques algébriques sont appliquées à l'étude d'objets géométriques.

Au fil du temps, la géométrie algébrique s'est considérablement transformée et son objet d'étude s'est beaucoup élargi. Elle est devenue maintenant centrale en mathématiques. Elle est reliée à la plupart des domaines de celles-ci. **Pierre Deligne** a joué un rôle crucial dans nombre de ces évolutions.

Le succès le plus connu de Deligne est la solution spectaculaire qu'il a apportée à la dernière et plus profonde des **conjectures de Weil**, à savoir l'analogue de l'hypothèse de Riemann pour les variétés algébriques sur un corps fini. Weil avait eu l'intuition que la démonstration de ses conjectures nécessiterait des méthodes de topologie algébrique. Dans cet esprit, Grothendieck et son école, dont fait partie Pierre Deligne, ont développé la théorie de la cohomologie ℓ -adique, qui est un outil de base dans la démonstration de Deligne. Le travail brillant de Deligne est un véritable tour de force, qui apporte un éclairage nouveau sur la cohomologie des variétés algébriques. Les conjectures de Weil ont de nombreuses et importantes applications en théorie des nombres, parmi lesquels la solution de la **conjecture de Ramanujan-Petersson** et l'évaluation de sommes exponentielles.

Dans une série de travaux, Deligne a montré que la cohomologie des variétés singulières non compactes possède une structure de Hodge mixte, qui généralise la théorie classique de Hodge. La théorie des structures de Hodge est maintenant devenue un puissant outil de base en géométrie algébrique, qui a permis une compréhension plus profonde de la cohomologie. Elle a aussi été utilisée par Cattani, Deligne et Kaplan

pour démontrer un théorème d'algébricité qui apporte des arguments en faveur de la **conjecture de Hodge**.

Avec **Beilinson**, **Bernstein** et **Gabber**, Deligne a apporté des contributions décisives à la théorie des **faisceaux pervers**. Cette théorie joue un rôle important dans la démonstration récente par **Ngô** du « lemme fondamental ». Elle a également été utilisée par Deligne lui-même afin de clarifier avec succès la nature de la correspondance de Riemann-**Hilbert** qui étend le 21^e **problème de Hilbert** à des dimensions supérieures. Deligne et **Lusztig** ont utilisé la cohomologie ℓ -adique pour construire des représentations linéaires de groupes finis simples du type de Lie. Avec Mumford, Deligne a introduit la notion de **champ algébrique** pour démontrer que l'**espace de modules** des **courbes stables** est compact. Ces contributions et beaucoup d'autres ont eu de profondes répercussions sur la géométrie algébrique et les domaines connexes.

La puissance des concepts, des idées, des résultats et des méthodes de Deligne continue d'influencer l'évolution de la géométrie algébrique ainsi que plus généralement les mathématiques dans leur ensemble.

Pierre Deligne est né le 3 octobre 1944 à Etterbeek, près de Bruxelles en Belgique. Il est professeur émérite de mathématiques à l'Institut d'étude avancée de Princeton dans le New Jersey. Deligne est arrivé à Princeton en 1984 en provenance de l'Institut des hautes études scientifiques (IHÉS) à Bures-sur-Yvette, près de Paris, où il avait été nommé membre permanent en 1970, le plus jeune membre de l'institut jamais nommé.

Vers l'âge de douze ans, Deligne s'est mis à lire des manuels de mathématiques qu'utilisait son frère à l'université et à demander des explications. Son intérêt incita J. Nijs, un professeur de lycée, à lui prêter plusieurs volumes des *Éléments de mathématique* publiés sous le pseudonyme de Nicolas Bourbaki, un groupe de mathématiciens francophones qui appelaient à la rénovation des mathématiques françaises. Ce n'était pas le type de lecture que l'on s'imaginerait pouvoir normalement offrir à un adolescent de quatorze ans, mais pour Deligne ce fut une expérience qui changea sa vie. Depuis, il n'a jamais fait marche arrière.

Bien que son père souhaitât qu'il devienne ingénieur et poursuive une carrière qui lui permettrait d'avoir une vie aisée, Deligne a su très tôt qu'il ferait ce qu'il aimait, or les mathématiques étaient ce qu'il aimait. Il a étudié les mathématiques à l'Université libre de Bruxelles, obtenu sa licence en mathématiques en 1966 et son doctorat en 1968. En

1972, Deligne a soutenu son doctorat d'État ès sciences mathématiques à l'université Paris-Sud (Orsay).

Deligne a fréquenté l'Université de Bruxelles avec l'ambition de devenir professeur de lycée, tout en poursuivant les mathématiques comme violon d'Ingres pour son plaisir personnel. En tant qu'étudiant de Jacques Tits, Deligne a eu le plaisir de découvrir que, comme il le dit, « on pouvait gagner sa vie en jouant, c'est-à-dire en s'adonnant à la recherche en mathématiques ».

Après une année à l'École normale supérieure à Paris comme auditeur libre, Deligne a été parallèlement un jeune chercheur du Fonds national de la recherche scientifique de Belgique et un invité de l'IHÉS. Deligne y a été chercheur invité de 1968 à 1970, date de sa nomination comme membre permanent.

Il a été simultanément membre (1972-1973, 1977) et visiteur (1981) du département de mathématiques de l'Institut d'étude avancée de Princeton. Il en est devenu membre en 1984.

Deligne est un chercheur en mathématiques qui a excellé dans la découverte des liens entre différents domaines des mathématiques. Sa recherche a conduit à plusieurs découvertes importantes. L'une de ses contributions les plus célèbres a été la démonstration des conjectures de Weil en 1973. Elle lui a valu la médaille Fields (1978) et le [prix Crafoord](#) (1988), ce dernier conjointement avec Alexandre Grothendieck.

Très tôt, Deligne s'est rendu célèbre dans le monde des mathématiques par sa démonstration brillante des conjectures de Weil. Cette première réalisation fut suivie de plusieurs autres qui démontrèrent l'extrême variété ainsi que la difficulté des techniques mises en œuvre et l'inventivité de ses méthodes. C'est pour ses travaux en géométrie algébrique et en théorie des nombres qu'il est le plus connu, mais il a aussi apporté des contributions majeures à plusieurs autres domaines des mathématiques.

Deligne est un mathématicien très influent qui compte de nombreux concepts mathématiques portant son nom : la conjecture de Deligne, l'espace de modules de courbes de Deligne-Mumford, la notion de champ algébrique de Deligne-Mumford, et la cohomologie de Deligne, pour n'en citer que quelques-uns. Seul ou en collaboration, Deligne a écrit environ une centaine d'articles.

Pierre Deligne a reçu de nombreux prix internationaux éminents. La médaille Fields lui a été décernée au Congrès international des mathématiciens à Helsinki en 1978. En 1974, il a reçu le [prix François-Deruyts](#) de l'Académie royale de Belgique et la médaille Henri-Poincaré de l'Académie

démie des sciences (à Paris). En 1975, il a reçu le prix De Leeuw-Damry-Boullart du Fonds national de la recherche scientifique de Belgique. En 1988, Deligne a été lauréat conjointement avec A. Grothendieck du prix Crafoord décerné par l'Académie royale des sciences de Suède. Le prix Balzan en mathématiques, attribué à Deligne en 2004, était assorti d'une récompense d'un million de francs suisses. La Fondation internationale Balzan requiert que la moitié de la somme soit consacrée au soutien de jeunes chercheurs ; Deligne a choisi de créer des bourses de recherche d'une durée de trois ans pour soutenir les jeunes mathématiciens les plus dynamiques travaillant en Russie, en Ukraine et en Biélorussie. En 2008, le prix Wolf en mathématiques a été décerné à Deligne, conjointement avec P. Griffiths et D. Mumford.

En 2006, Deligne a été élevé au rang de vicomte par le roi des Belges Albert II et la Poste belge a émis un timbre pour mettre à l'honneur ses réalisations en mathématiques fondamentales.

Pierre Deligne est membre honoraire de la Société de mathématiques de Moscou depuis 1995 et de la Société mathématique de Londres depuis 2003. En 1978, il a été élu membre honoraire étranger de l'Académie américaine des arts et des sciences. En 2009, il est devenu membre de la Société américaine de philosophie et de l'Académie royale des sciences de Suède.

Autres distinctions académiques : membre étranger de l'Académie des sciences à Paris (1978), docteur *honoris causa* de l'Université libre de Bruxelles (1989), membre de l'Académie royale de Belgique (1994), docteur *honoris causa* de l'École normale supérieure (1995), membre étranger de l'Académie des Lyncéens (2003), associé étranger de l'Académie nationale des sciences à Washington (2007).

Bibliographie

- DELIGNE (Pierre), *Équations différentielles à points singuliers réguliers*, Berlin, Springer, 1970.
- DELIGNE (Pierre), *Cohomologie étale*, Berlin, Springer, 1977.
- DELIGNE (Pierre), « **La notion d'espace en mathématique** », Bruxelles, 2010.
- ILLUSIE (Luc), « Pierre Deligne et la géométrie arithmétique », *Gazette des mathématiciens*, 2013, n° 138, p. 49-53.
- SAUVAGEOT (François), « **Pierre Deligne** », *Images des mathématiques*, 2013.

LA CONJECTURE DE WEIL (par ARNE B. SLETSJØE)

Le travail le plus connu de Deligne est sa solution spectaculaire de la dernière et la plus profonde des conjectures de Weil, à savoir l'analogie de l'hypothèse de Riemann pour les variétés algébriques sur un corps fini.

André Weil a écrit en 1949, dans l'article « Nombre de solutions d'équations dans un corps fini » :

« et d'autres exemples que nous ne pouvons pas discuter ici, semblent apporter un certain soutien aux énoncés conjecturaux suivants, qui sont connus pour être vrais pour les courbes, mais que je n'ai pas pu démontrer jusqu'à présent pour les variétés de dimension supérieure. »



Fig. 30 –
André Weil

Les énoncés que Weil n'a pas pu démontrer ont été qualifiés de conjectures de Weil. L'enjeu des conjectures de Weil est ce que l'on appelle les **fonctions zêta**. Les fonctions zêta sont des constructions mathématiques qui comptent le nombre de solutions d'une équation dans différents systèmes de nombres. Lorsque Weil dit que les conjectures sont connues pour être vraies pour les courbes, il veut dire qu'elles sont vraies pour les équations à deux inconnues. Les variétés en dimensions supérieures qu'il mentionne correspondent à des équations à trois inconnues ou plus.

L'équation $x^2 - y^2 = 3$ décrit une courbe plane. Cette équation a quatre solutions dans le système de nombres $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ en comptant modulo 5 (voir l'encadré ci-dessous). Nous remarquons qu'aucun des nombres 0, 1, 2, 3 ou 4 n'a un carré égal à 2. Nous introduisons donc un nouveau nombre α , la racine carrée de 2. Ce nombre n'est pas un élément de l'ensemble original $\{0, 1, 2, 3, 4\}$; il est déterminé par l'équation $\alpha^2 = 2$. L'extension du système de nombres qui inclut α nous donne de

nombreuses nouvelles solutions à l'équation $x^2 - y^2 = 3$, par exemple $x = 0$ et $y = \alpha$ puisque $0^2 - \alpha^2 = -2 = 3$ lorsque l'on compte modulo 5. Une autre solution est donnée par $x = \alpha$ et $y = 2$. En tout, nous trouvons 24 solutions différentes dans le système de nombres étendu. Les deux nombres 4 et 24 constituent les deux premiers termes de la fonction zêta dans cet exemple.

Le calcul modulo 5

Compter modulo 5 signifie qu'au lieu de compter 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ..., on compte 0, 1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, 3, ... Autrement dit, on recommence à 0 chaque fois qu'on atteint 5. Le calcul $4 + 2$ signifie que l'on compte 2 pas de plus à partir de 4. Compter modulo 5 ne nous amène pas à 6, mais plutôt à 1 : $4 + 2 = 1$.

Un autre exemple de ce type de calcul est celui de l'heure, où l'on compte modulo 12. Si nous quittons la maison à 10 heures et que nous restons dehors pendant quatre heures, nous rentrons à 2 heures.

Revenons au calcul modulo 5. Le calcul 3×4 modulo 5, signifie compter jusqu'à 4 trois fois, c'est-à-dire 1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, ce qui donne $3 \times 4 = 2$. Le système de nombres $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ avec ces règles de calcul est appelé un corps fini à cinq éléments.

Notre but est de trouver les solutions de l'équation $x^2 - y^2 = 3$ dans ce système de nombres. En calculant tous les carrés, $0^2 = 0$, $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 4$ et $4^2 = 1$, nous voyons que la seule possibilité d'obtenir une différence de 3 entre deux carrés est lorsque $x^2 = 4$ et $y^2 = 1$. Il y a deux nombres dont le carré est 4 (2^2 et 3^2) et deux dont le carré est 1 (1^2 et 4^2). Donc nous obtenons en tout quatre solutions : $x = 2$ et $y = 1$, $x = 2$ et $y = 4$, $x = 3$ et $y = 1$, et $x = 3$ et $y = 4$.

Les conjectures de Weil sont formulées en quatre énoncés. Weil a démontré lui-même les conjectures dans le cas des courbes. Pour des équations plus générales, trois des quatre énoncés ont été démontrés par d'autres mathématiciens dans les dix à quinze années qui ont suivi la publication de l'article de Weil en 1949. La dernière affirmation, la plus difficile, analogue à l'hypothèse de Riemann, a été démontrée par Pierre Deligne en 1974.

Il est rapidement apparu que les conjectures seraient démontrées si l'on pouvait trouver un certain type de cohomologie, appelée **cohomolo-**

gie de Weil. La cohomologie est un outil mathématique développé dans les années 1920 et 1930 pour comprendre et systématiser les connaissances sur les formes et les structures géométriques. Plus la structure est compliquée, plus il y a de cohomologie. Weil n'avait aucune suggestion sur la manière de définir la cohomologie de Weil, mais il savait quelles qualités la cohomologie devait avoir pour fournir une démonstration des conjectures de Weil.

À la fin des années 1940, personne ne connaissait de cohomologie capable de résoudre cette conjecture et d'unifier ainsi l'aspect géométrique, lié à la résolution d'équations, et l'aspect arithmétique, représenté par les corps finis (les systèmes de nombres). La solution est venue en 1960. À cette époque, Alexandre Grothendieck a introduit le concept de **cohomologie étale** et a proposé qu'elle joue le rôle de la cohomologie de Weil, mystérieuse, inconnue, mais essentielle. Le problème était toutefois de démontrer que la cohomologie étale satisfaisait aux conditions requises pour être une cohomologie de Weil. Grothendieck n'a pas pu le faire, mais heureusement il avait un jeune étudiant, Pierre Deligne, qui a réussi cette tâche. Par un raisonnement compliqué, où il a basé ses arguments sur plusieurs résultats antérieurs obtenus par d'autres mathématiciens, Deligne a pu démontrer les conjectures de Weil dans toute leur généralité. Ce résultat a attiré l'attention et a fait entrer Deligne dans l'élite mathématique.

LES MODULES DE COURBES STABLES (par ARNE B. SLETSJØE)

Avec David Mumford, Deligne a introduit la notion de champ algébrique pour démontrer que l'espace de modules des courbes stables est compact. Un champ algébrique est une généralisation abstraite du concept d'espace géométrique.

Les problèmes dits de modules ont trait à la classification des objets mathématiques. En général, la classification consiste à rassembler des individus ou des objets en familles et sous-familles, de manière hiérarchique. Un problème de modules consiste à regrouper des objets mathématiques dans des classes d'équivalence. La relation d'équivalence peut varier, par exemple nous pouvons classer les triangles selon qu'ils sont semblables ou pas, ou utiliser une classification encore plus fine où les triangles appartiennent à la même famille s'ils sont égaux (c'est-à-dire isométriques). Mais un problème de modules exige également que les objets classificateurs eux-mêmes aient une structure mathématique riche.

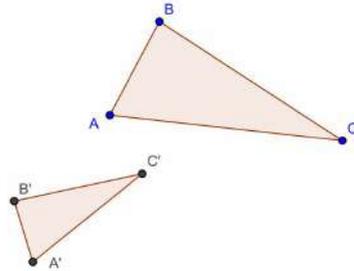


Fig. 31 – Deux triangles semblables.

Pour résoudre le problème des modules pour les courbes, nous devons trouver un objet géométrique, appelé famille universelle, un objet géométrique plus petit, appelé espace de modules, et une bonne application de la famille universelle vers l'espace de modules. L'espace de modules est construit de telle sorte que chaque point de l'espace corresponde à une certaine classe de courbes. Inversement, chaque classe de courbes est représentée par un point dans l'espace de modules. La famille universelle contient toutes les courbes et l'application de la famille universelle vers l'espace de modules transforme une courbe en un point représentant la courbe. L'espace de modules est l'espace de classification de toutes les courbes, et l'existence d'une famille universelle garantit que la classification se souvient de la structure des courbes.

La continuité de l'application de la famille universelle vers l'espace de modules garantit que des courbes presque similaires correspondront à des points de l'espace des modules qui sont proches.

Même si nous pouvons trouver un espace de modules, il n'est pas du tout évident qu'il existe une famille universelle. Prenons un exemple. Une classification assez grossière des nombres réels consiste à les diviser en deux classes, 0 et les nombres différents de 0. La première classe contient un élément (0), la seconde contient le reste des nombres réels ($\neq 0$). L'espace de modules consiste en deux points distincts. Un candidat pour la famille universelle est le nombre réel lui-même. Mais dans ce cas, l'application de la famille universelle vers l'espace de modules n'est pas continue, puisqu'il existe des points différents de 0 qui sont infiniment proches de 0. La conclusion est qu'il existe un espace de modules, mais qu'il n'est pas possible de construire une famille universelle à partir de celui-ci.



Fig. 32 –
David Mumford

Le but des travaux de Deligne et Mumford était de démontrer que l'espace de modules des courbes stables est compact. La compacité a une définition technique que nous expliquons à l'aide d'un exemple illustratif. L'ensemble des nombres réels n'est pas compact, mais un cercle est compact. Pour pouvoir démontrer la compacité, Deligne et Mumford ont eu besoin d'un peu de connaissance sur la famille universelle.

Le problème auquel nous sommes confrontés lorsque nous essayons de construire une famille universelle pour les courbes stables est l'existence de symétries pour les courbes, et le fait que des courbes différentes peuvent avoir un nombre différent de symétries. Une fois de plus, nous allons prendre un exemple plus intuitif pour illustrer les problèmes causés par les symétries. Au lieu de courbes, nous considérons des triangles.

Supposons que nous ayons construit un espace de modules pour les

triangles, à similitude près. La majorité des triangles n'ont pas de symétries non triviales, mais les triangles isocèles en ont une et les triangles équilatéraux en ont cinq. En utilisant les symétries non triviales, nous pouvons construire une famille non constante sur le cercle de triangles équilatéraux. Au cours d'un tour, le triangle tourne de 120 degrés. Nous pouvons visualiser cette famille comme un cylindre triangulaire souple qui est plié puis collé pour devenir un tore triangulaire. Juste avant de coller, nous tordons l'une des extrémités du cylindre de 120 degrés. Étant donné que les triangles situés aux deux extrémités sont censés être équilatéraux, ils s'emboîteront toujours. Mais la torsion rend cette famille non constante.

L'image de la famille dans la famille universelle est constante, puisque le triangle est le même pour tous les points du cercle. Une famille universelle doit nécessairement être universelle, c'est-à-dire qu'elle doit contenir toutes les autres familles. Dans cet exemple, ce n'est pas le cas, ce qui viole l'existence d'une famille universelle.

La solution apportée par Deligne et Mumford à la question générale des modules a été d'introduire la notion de champ algébrique, appelé plus tard champ de Deligne-Mumford. Contrairement à l'espace de modules ordinaire, un champ de Deligne-Mumford contient des informations sur les symétries des triangles. Si nous essayons de construire une famille universelle sur le champ de modules, plutôt que sur l'espace de modules, nous avons plus de chances de réussir, car la solution à notre problème est forcée de faire partie de la structure des objets avec lesquels nous travaillons.

LA CORRESPONDANCE DE RIEMANN-HILBERT (par ARNE B. SLETSJØE)

Lors du Congrès international des mathématiciens de 1900, David Hilbert a présenté une célèbre liste de vingt-trois problèmes. Le vingt-et-unième problème était formulé ainsi :

« Dans la théorie des équations différentielles linéaires à une variable indépendante z , j'attirerai l'attention sur un très important problème, que Riemann d'ailleurs avait déjà en vue, et qui consiste à démontrer qu'il existe toujours une équation différentielle linéaire de la classe de M. Fuchs ayant des points critiques donnés et un groupe de **monodromie** donné. »

Une équation différentielle est une équation qui donne une relation entre une fonction et la façon dont la fonction change. Les équations différentielles sont étudiées depuis le XVII^e siècle et constituent un outil mathématique important pour comprendre les phénomènes naturels.

L'un de ces phénomènes est le tourbillon. En utilisant les lois fondamentales de la nature et la connaissance du comportement des liquides, nous pouvons proposer une équation différentielle qui décrit ce qui se passe dans la baignoire lorsque nous enlevons le bouchon. La solution de l'équation décrit un mouvement de tourbillon, proche de ce qui est observé dans le liquide.



La différence entre le modèle mathématique exprimé par l'équation différentielle et le mouvement réel du liquide augmente au fur et à mesure que l'on s'approche du centre du tourbillon. Dans la baignoire, il n'y a pas d'eau au centre du tourbillon, elle a déjà été évacuée. Dans le modèle en revanche, la vitesse du mouvement circulaire de l'eau augmente à mesure que l'on s'approche du centre. Au centre, le modèle n'est plus valable. Le modèle présente une singularité en ce point.

De telles singularités ont un effet intéressant sur les solutions de l'équation différentielle. Un phénomène mathématique appelé monodromie peut se produire. Le mot monodromie est d'origine grecque et signifie « tourner en rond simplement ».

Supposons maintenant que nous ayons trouvé une solution de l'équation différentielle. La valeur de la fonction variera continûment le long de courbes arbitraires. Lorsque nous revenons au point de départ, la valeur de la fonction est la même qu'au départ, tant que nous ne parcourons pas un chemin qui encercle la singularité. Dans ce dernier cas, la valeur peut changer. C'est ce qu'on appelle la monodromie. C'est un peu comme les mouvements dans un escalier en colimaçon. Tant que la boucle complète n'encercle pas le centre de l'escalier, nous restons au même niveau, mais l'encerclement du centre nous fera monter ou descendre.

Une équation différentielle peut avoir différents nombres et différents types de singularités, ainsi que différents types de monodromie. Hilbert était parfaitement conscient de ce fait. Ce qu'il se demandait, c'était la question inverse : étant donné la monodromie et les singularités, peut-on toujours trouver une équation différentielle correspondante ?

Le problème a suscité de nombreuses réponses au cours du XX^e siècle. En même temps, le problème a été généralisé dans de nombreuses directions. La solution complète de la version la plus générale du problème est due à Pierre Deligne.

L'ŒUVRE DE PIERRE DELIGNE (par W. T. GOWERS)

Introduction

Pierre Deligne est incontestablement l'un des plus grands mathématiciens au monde. Il a reçu de nombreux prix importants, notamment la médaille Fields en 1978, le prix Crafoord en 1988, le prix Balzan en 2004 et le prix Wolf en 2008. Si l'on ne sait jamais qui remportera le prix Abel une année donnée, il était pratiquement inévitable que Deligne l'obtienne en temps voulu, de sorte que l'annonce d'aujourd'hui est une surprise aussi minime que possible.

C'est la troisième fois que l'on me demande de présenter à un large public le travail du lauréat du prix Abel. Ma tâche cette année est de loin la plus difficile des trois. Il y a deux ans, j'avais parlé de John Milnor, dont le travail en géométrie pouvait être illustré par plusieurs images. L'année dernière, le lauréat était Endre Szemerédi, qui a résolu plusieurs problèmes avec des énoncés relativement simples à expliquer, même si les démonstrations étaient très difficiles. Mais le travail de Deligne, s'il a certes des aspects géométriques, n'est pas géométrique dans un sens qui se prête à des explications imagées et les énoncés de ses résultats sont loin d'être élémentaires. Je suis donc contraint d'être quelque peu impressionniste dans ma description de son travail et de passer la majeure partie de mon temps à discuter de l'arrière-plan plutôt que de l'œuvre elle-même.

La conjecture de Ramanujan

L'un des résultats qui a rendu Deligne célèbre est la résolution d'une conjecture de **Ramanujan**. Cette conjecture n'est pas le point de départ logique évident d'un exposé sur les travaux de Deligne, mais sa solution est le plus concret de ses principaux résultats et donc le plus facile à expliquer. Ce qui est moins facile à expliquer, c'est pourquoi la conjecture est intéressante. J'y reviendrai plus tard.

Énoncé de la conjecture

Considérons l'expression

$$q \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - q^n)^{24}.$$

La notation $\prod_{n=1}^{+\infty}$ signifie « le produit lorsque n parcourt tous les entiers strictement positifs », donc l'expression est une abréviation de

$$q(1-q)^{24} (1-q^2)^{24} (1-q^3)^{24} (1-q^4)^{24} (1-q^5)^{24} \dots$$

Une chose que l'on peut faire avec un produit d'expressions entre parenthèses est de les multiplier de façon à ce qu'il n'y ait plus de parenthèses. Il n'est pas évident que cela puisse être fait lorsqu'il y a une infinité de parenthèses impliquées. Mais dans des circonstances appropriées, c'est possible. Pour s'en convaincre, notons d'abord que l'expression ci-dessus est elle-même une abréviation de

$$q(1-q)(1-q) \dots (1-q)(1-q^2)(1-q^2) \dots (1-q^2) \times \\ (1-q^3)(1-q^3) \dots (1-q^3)(1-q^4)(1-q^4) \dots (1-q^4) \dots,$$

où il y a vingt-quatre $(1-q^n)$ pour chaque n . Chaque terme du produit de toutes ces parenthèses est obtenu en choisissant soit un 1, soit un $-q^n$ dans chaque parenthèse. Nous ne pouvons pas choisir le terme $-q^n$ plus d'un nombre fini de fois, sinon nous aurions une puissance infinie de q , ce qui n'est pas autorisé. Pour être sûr que le produit a un sens, nous devons savoir qu'aucune puissance finie de q ne peut être obtenue de plus d'un nombre fini de façons, car cela nous donnerait un coefficient infini. Mais si nous voulons obtenir une puissance telle que q^{53} , nous ne pouvons pas choisir le terme $-q^n$ pour tout n supérieur à 53, sinon nous obtiendrions une puissance plus grande de q . Il n'y a donc qu'un nombre fini de façons d'obtenir q^{53} , donc le coefficient de q^{53} doit être fini. Il en va de même pour toute autre puissance. Nous pouvons en dire un peu plus à ce sujet. Imaginons que nous ayons la suite

$$1, 1, \dots, 1, 2, 2, \dots, 2, 3, 3, \dots, 3, 4, 4, \dots, 4, 5, 5, \dots, 5, \dots$$

devant nous, avec 24 exemplaires de chaque nombre. Notre tâche est de sélectionner certains termes de la suite qui s'additionnent pour donner 53. Si nous ignorons le coefficient q au début du produit, le coefficient de q^{53} est le nombre de façons de sélectionner un nombre pair de termes de la suite dont la somme est égale à 53, moins le nombre de façons de sélectionner un nombre impair de termes de la suite dont la somme est égale à 53. Cependant, à cause du q au début, il s'agit en fait du coefficient de q^{54} dans le produit. Le coefficient de q^n est traditionnellement appelé $\tau(n)$, et τ est appelé « **fonction tau de Ramanujan** ». On a donc

par définition l'identité

$$q \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - q^n)^{24} = \sum_{n=1}^{+\infty} \tau(n) q^n.$$

La conjecture de Ramanujan affirme que $\tau(p)$ est compris entre $-2p^{11/2}$ et $2p^{11/2}$ pour tout nombre premier p . Plus généralement, elle affirme que $\tau(n)$ est compris entre $-d(n)n^{11/2}$ et $d(n)n^{11/2}$, où $d(n)$ est le nombre de **diviseurs** de n (qui vaut 2 lorsque n est premier, car alors les seuls diviseurs sont 1 et n).

Pourquoi la fonction tau de Ramanujan est-elle intéressante ?

Si vous n'êtes pas familier avec la conjecture qui vient d'être décrite, elle vous semblera probablement assez bizarre et arbitraire. Pour que ce soit une bonne conjecture, il faut avoir une raison de s'intéresser au produit $q \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - q^n)^{24}$ en premier lieu, ainsi qu'une raison de s'attendre à ce que la conjecture soit vraie. En bref, on veut une interprétation de la conjecture plutôt qu'un morceau d'algèbre non interprété.

Je ne peux pas donner une interprétation totalement adéquate dans cet exposé, mais je peux au moins essayer de vous convaincre qu'une telle interprétation existe. Pour commencer, je dois mentionner que les nombres complexes sont impliqués d'une manière importante, qui n'est pas apparente dans la manière dont j'ai formulé la conjecture. Leur implication vient du fait que q représente en fait $e^{2\pi iz}$, où z est un nombre complexe.

À ce stade, je dois temporairement supposer une certaine familiarité avec les nombres complexes. Si nous décomposons z en ses parties réelle et imaginaire, en l'écrivant sous la forme $z = a + ib$, alors

$$e^{2\pi iz} = e^{2\pi i(a+ib)} = e^{2\pi ia - 2\pi b} = e^{2\pi ia} e^{-2\pi b}.$$

Le module de ce nombre complexe est $e^{-2\pi b}$, puisque $|e^{2\pi ia}| = 1$ pour tout nombre réel a . Le nombre réel $e^{-2\pi b}$ est strictement inférieur à 1 si et seulement si $b > 0$. Ceci nous indique que $|q| < 1$ chaque fois que la partie imaginaire de z est strictement positive. Il faut que $|q|$ soit strictement inférieur à 1 pour que le produit infini $q \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - q^n)^{24}$ converge. Donc en tant que fonction de z , il est défini sur le demi-plan supérieur des nombres complexes.

Cette fonction se note $\Delta(z)$. Elle apparaît à plusieurs endroits en mathématiques. En général, ce n'est pas parce que la formule de la

fonction est particulièrement intéressante, mais parce que la fonction a diverses propriétés remarquables. C'est certainement le cas de $\Delta(z)$. Une propriété fondamentale est qu'elle est **holomorphe**, ce qui signifie qu'elle peut être différenciée dans le sens approprié pour les fonctions complexes. Dans un certain sens, les fonctions holomorphes sont très « rigides » : par exemple, les valeurs d'une fonction holomorphe près d'un point déterminent les valeurs de la fonction partout ailleurs. C'est un peu l'analogie de l'affirmation selon laquelle les valeurs d'un polynôme de degré d en $d + 1$ points déterminent les valeurs du polynôme partout ailleurs. Cette rigidité rend difficile la combinaison de la différentiabilité avec certains autres types de propriétés, de sorte que lorsqu'une fonction holomorphe possède ces autres propriétés, il s'agit généralement d'une fonction rare et intéressante.

Il est facile de voir que la fonction $\Delta(z)$ est **périodique**, dans le sens où $\Delta(z) = \Delta(z + 1)$ pour tout z . Ceci est simplement dû au fait que $q = e^{2\pi iz}$ ne change pas lorsque l'on ajoute 1 à z et n'a rien à voir avec l'étrange formule impliquant q lui-même. Cependant, il y a aussi une propriété moins évidente : il s'avère que $\Delta(-1/z) = z^{12}\Delta(z)$ pour tout z . Une dernière restriction est que lorsque la partie imaginaire de z tend vers l'infini, $\Delta(z)$ tend vers zéro.

Ces propriétés de Δ en font une fonction très particulière. En fait, c'est un exemple de forme modulaire, une classe de fonctions qui a joué un rôle essentiel dans la démonstration du dernier théorème de Fermat par Andrew Wiles et qui est au cœur d'une grande partie de la théorie moderne des nombres.

Les sommes de 24 carrés

Lorsqu'une fonction est intéressante en ce sens qu'elle possède des propriétés importantes difficiles à combiner, elle apparaît généralement dans de nombreux contextes différents. La fonction $\Delta(z)$ ne fait pas exception. La raison pour laquelle Ramanujan s'y intéressait est qu'elle était étroitement liée, via la fonction τ , au nombre de façons d'écrire un nombre comme une somme de 24 carrés.

Lorsque je dis « étroitement lié », je ne veux pas dire qu'il s'agissait du nombre de façons d'écrire un nombre comme une somme de 24 carrés, ni même que ce nombre était proche. Pour expliquer ce lien, je dois dire quelques mots sur la forme que prennent les formules pour des quantités compliquées comme celle-ci. Très souvent, il n'y a aucun espoir de trouver une formule exacte utile pour une quantité mathé-

matique donnée, mais ce que l'on peut faire, c'est obtenir une formule approchée utile. Étant donné une telle formule, on aimerait savoir à quel point elle est précise : cette précision est mesurée par un « terme d'erreur ». La formule elle-même est alors appelée « terme principal ».

Il s'avère que le nombre de façons d'écrire n comme une somme de 24 carrés a une formule approchée en termes de certaines fonctions bien connues de la théorie des nombres : pour tout k , la fonction $\sigma_k(n)$ est définie comme la **somme des puissances k -ièmes des diviseurs de n** , et quelques-unes de ces fonctions sont utilisées dans la formule.

Souvent, le terme d'erreur est pour ainsi dire une cochoonnerie dont on espère simplement qu'elle soit la plus petite possible. Mais ici, c'est loin d'être une cochoonnerie : il s'agit de la fonction tau de Ramanujan, avec tous ses liens avec d'autres parties des mathématiques. Néanmoins, il s'agit également d'un terme d'erreur. Nous nous intéressons donc à sa taille.

Pourquoi peut-on s'attendre à ce que la conjecture de Ramanujan soit vraie ?

J'ai dû préparer cet exposé dans l'isolement le plus complet. Je ne suis donc pas certain que l'explication que je m'appête à donner soit correcte dans tous ses détails. Cependant, comme elle donne la bonne réponse, je suis prêt à prendre le risque.

Réfléchissons d'abord au nombre de façons dont nous pourrions écrire un entier positif n choisi au hasard sous la forme $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{24}^2$, avec x_1, \dots, x_{24} tous entiers. Cela revient à demander combien de points (x_1, \dots, x_{24}) il y a dans l'espace à 24 dimensions avec des coordonnées entières et une distance à l'origine égale à \sqrt{n} (l'estimation de la distance est la généralisation naturelle à 24 dimensions du **théorème de Pythagore**). Les points ayant des coordonnées entières forment une structure en forme de grille appelée **réseau**, de sorte qu'une autre façon de formuler la question est la suivante : combien y a-t-il de points du réseau sur une sphère de rayon \sqrt{n} ?

Posons maintenant une question légèrement différente : combien y a-t-il de points du réseau sur ou à l'intérieur d'une sphère de rayon \sqrt{n} ? Nous pouvons faire une estimation raisonnable en notant que le volume d'une boule de rayon r est proportionnel à r^{24} , et donc à n^{12} si $r = \sqrt{n}$. En écrivant C pour la constante de proportionnalité, on peut donc supposer que lorsque n est grand, le nombre de points du réseau dans la boule de rayon \sqrt{n} est approximativement Cn^{12} . La raison pour

laquelle cette hypothèse est raisonnable est que nous pouvons remplir un espace à 24 dimensions avec des cubes unitaires à 24 dimensions centrés sur les points du réseau, de sorte que, dans un certain sens, la densité des points du réseau soit égale à 1. Le nombre de points du réseau sur la sphère de rayon \sqrt{n} est le nombre de points du réseau dans la boule de rayon \sqrt{n} moins le nombre de points du réseau dans la boule de rayon $\sqrt{n-1}$, puisque la distance de chaque point du réseau à l'origine est la racine carrée d'un entier. On peut donc s'attendre à ce qu'une estimation raisonnable soit $Cn^{12} - C(n-1)^{12}$, ce qui donne à peu près $12Cn^{11}$ si l'on fait les calculs.

L'argument ci-dessus est très grossier et ne tient pas compte du fait que les propriétés de **divisibilité** de n font une différence significative pour l'estimation. Néanmoins, il donne le bon ordre de grandeur, ce qui nous donne une idée de la manière dont se comporteront les estimations plus raffinées qui utilisent les fonctions $\sigma_k(n)$.

Mais qu'en est-il du terme d'erreur ? À ce stade, faisons une hypothèse plutôt audacieuse : le terme d'erreur se comporte de la même manière que si les points du réseau proches d'une sphère donnée choisissaient au hasard d'en faire partie ou non. Si vous lancez une pièce de monnaie m fois, vous vous attendrez à obtenir pile la moitié du temps et face la moitié du temps. Mais vous seriez étonné si, en continuant à lancer la pièce, le nombre de « face » ne différerait jamais du nombre de « pile » de plus de 1 : une certaine erreur est tout à fait prévisible.

Nous pouvons en dire plus. L'écart-type, qui est une mesure de la distance à laquelle vous pouvez vous attendre à être par rapport à la moyenne, a un ordre de grandeur de \sqrt{m} . En d'autres termes, vous ne devriez pas être surpris si le nombre de « pile » diffère du nombre de « face » d'environ \sqrt{m} , mais vous devriez être très surpris s'ils diffèrent de beaucoup plus que cela.

Pour en revenir aux points du réseau qui décident de sauter dans des sphères, si le nombre moyen est proportionnel à n^{11} et que les décisions se comportent comme si elles étaient aléatoires, alors l'écart-type devrait être proportionnel à $\sqrt{n^{11}} = n^{11/2}$. Il s'agit donc du type d'erreur auquel on peut s'attendre. Le nombre étrange et peu naturel $11/2$ apparaît en fait très naturellement.

Nous avons maintenant une interprétation de la conjecture de Ramanujan : elle dit que le terme d'erreur dans une formule pour le nombre de façons d'écrire n comme une somme de 24 carrés devrait être de la taille à laquelle on s'attendrait sur la base d'un modèle probabiliste de ce qui se passe.

Vous vous demandez peut-être encore ce qu'il y a de si intéressant dans le nombre 24. Pourquoi n'avons-nous pas opté pour des sommes de 32 carrés, ou de 50, ou de 96 ? L'une des réponses est que le terme d'erreur obtenu, la fonction tau, provient de la fonction intéressante en soi $\Delta(z)$. Ce type de connexion n'est pas du tout la norme. Une autre réponse est que l'espace à 24 dimensions est particulièrement intéressant en raison de l'existence d'une structure extraordinairement symétrique appelée « **réseau de Leech** », qui est également une grille de points mais avec beaucoup plus de symétries que la grille de points avec des coordonnées entières. Une version beaucoup plus légère de ce phénomène se produit en deux dimensions, où un réseau basé sur des triangles équilatéraux présente une symétrie de rotation sextuple, alors qu'un réseau basé sur des carrés ne présente qu'une symétrie de rotation quadruple.

Un autre terme d'erreur célèbre

Si vous connaissez un peu les mathématiques, la discussion de la section précédente vous a peut-être rappelé la façon dont on discute souvent du théorème des nombres premiers. Comme pour le nombre de points du réseau sur une sphère de rayon \sqrt{n} en dimension 24, il ne semble pas possible de donner une formule exacte utile pour le nombre de nombres premiers inférieurs à n , mais il est certainement possible de donner une formule approchée. En outre, la formule approchée peut être interprétée de manière probabiliste : le nombre de nombres premiers jusqu'à n correspond à peu près à ce que l'on attendrait si chaque nombre $n \geq 2$ avait une chance sur $\log n$ d'être premier. En d'autres termes, c'est à peu près

$$\frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log 3} + \frac{1}{\log 4} + \cdots + \frac{1}{\log n}.$$

Cette somme donne approximativement $n/\log n$, la plupart des termes de la somme étant à peu près de la même taille, on s'attendrait donc à ce que le terme d'erreur soit de l'ordre de la racine carrée de cette somme. Cependant, la question de savoir si c'est vraiment le cas (ou, pour être plus précis, si pour tout $c > 0$ l'erreur sera plus petite que $n^{1/2+c}$ si n est suffisamment grand) est le problème non résolu le plus célèbre des mathématiques, puisqu'il s'agit d'une façon de formuler l'hypothèse de Riemann.

Un lien entre la géométrie algébrique et la théorie des nombres

La comparaison avec l'hypothèse de Riemann peut sembler un peu fantaisiste, mais en fait elle ne l'est pas. Pour expliquer pourquoi, je dois parler un peu d'une branche des mathématiques appelée « géométrie arithmétique », puis raconter une autre histoire mathématique, qui commence avec les travaux du grand mathématicien français André Weil. Ou plutôt, c'est par là que je commencerai. Weil lui-même s'est appuyé sur les travaux de mathématiciens antérieurs.

La géométrie algébrique est l'étude des courbes et des ensembles de dimensions supérieures définis par des équations polynomiales. Un exemple simple d'une telle courbe est le cercle unité dans le plan, qui est défini comme l'ensemble de tous les points (x, y) tels que $x^2 + y^2 = 1$. Parmi les questions que l'on peut se poser sur les ensembles définis par des équations polynomiales, citons leurs propriétés topologiques, le type de singularités qu'ils présentent (le cas échéant), la manière dont ils s'entrecoupent, etc.

Une équation polynomiale a un sens dans un certain nombre de contextes différents, selon le type de nombres que les variables sont autorisées à représenter. Par exemple, l'équation $x^2 + y^2 = 1$ décrit le cercle unité dans le plan si x et y sont des nombres réels, mais qu'en est-il s'il s'agit de nombres complexes ? Dans ce cas, pour chaque x , nous pouvons résoudre l'équation $y^2 = 1 - x^2$. En fait, il y a deux solutions à moins que $x^2 = -1$. L'ensemble est donc devenu non borné. On l'appelle une « courbe » parce qu'elle peut être décrite localement avec un seul paramètre, mais lorsque ce paramètre est un nombre complexe, la courbe est géométriquement bidimensionnelle parce qu'un nombre complexe a besoin de deux paramètres réels pour être décrit.

Les corps finis

Un corps est grosso modo un système algébrique qui ressemble aux trois plus riches des grands systèmes de nombres : les nombres rationnels, les nombres réels et les nombres complexes. Dans chacun de ces systèmes, on peut additionner, soustraire, multiplier et diviser des nombres (sauf qu'on ne doit pas diviser par 0) et on dispose de diverses règles utiles comme $x + y = y + x$ ou $x(y + z) = xy + xz$.

Un corps fini est ce qu'il semble être : un ensemble fini de « nombres » où l'on peut additionner, soustraire, multiplier et diviser et où l'on applique les mêmes règles que pour les rationnels, les réels et les nombres complexes. Les exemples les plus classiques sont les corps

d'entiers modulo p . L'idée est de choisir un nombre premier p et de stipuler que les nombres vont de 0 jusqu'à $p - 1$, puis reviennent à 0. Il est utile d'imaginer qu'ils tournent en rond, comme les chiffres d'une horloge. Pour additionner ou multiplier deux nombres, on fait comme s'il s'agissait de nombres ordinaires, mais on remplace le résultat par son reste lors de la division par p . Par exemple, si $p = 13$, alors $7 + 8 = 2$ (parce que le reste lorsque l'on divise 15 par 13 est 2) et $5 \times 8 = 1$ (parce que le reste lorsque l'on divise 40 par 13 est 1).

La soustraction est également facile à définir. La grande surprise est que nous pouvons même définir la division. Dans un sens, la définition est facile : a/b est défini comme le nombre c tel que $bc = a$. Mais c est supposé être l'un des nombres $0, 1, \dots, p - 1$. Pourquoi devrions-nous être capables d'en trouver un avec la propriété que $bc = a$? La réponse à cette question n'est pas évidente. L'explication relève d'un cours de mathématiques typique de première année de licence. Mais on peut toujours trouver un tel c , à condition que b ne soit pas 0. Par exemple, si $p = 13$ et que nous voulons que c soit tel que $4c = 7$, alors nous pouvons prendre pour c le nombre 5, puisque $4 \times 5 = 20$ et que 20 laisse un reste de 7 lorsque l'on divise par 13.

Le corps que je viens de décrire est appelé \mathbb{F}_p . D'autres corps finis peuvent être construits à partir de \mathbb{F}_p par un processus assez similaire à celui par lequel les nombres complexes sont construits à partir des nombres réels. Dans ce processus, nous observons que l'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solution dans les nombres réels. Nous « adjoignons » alors un nombre, traditionnellement noté i , en stipulant que son carré est -1 et qu'il obéit à toutes les lois habituelles de l'arithmétique. L'ensemble des nombres de la forme $a + bi$ constitue alors le corps des nombres complexes.

De même, pour construire un corps plus large à partir de \mathbb{F}_{13} par exemple, nous pouvons prendre une équation simple sans solution et adjoindre une solution. L'équation $x^2 = -1$ ne convient pas, car $5^2 = -1$ dans \mathbb{F}_{13} (puisque $25 = 2 \times 13 - 1$). Il y a donc déjà une solution. Mais l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans \mathbb{F}_{13} . Nous pouvons donc adjoindre une solution, en lui donnant un nom tel que w , et définir un nouveau corps comme étant l'ensemble de tous les « nombres » de la forme $a + bw$ où a et b appartiennent à \mathbb{F}_{13} .

Il n'est pas tout à fait évident que la structure mathématique que nous avons créée soit un corps, mais on peut le démontrer sans trop de difficultés. Une étape clé consiste à montrer que pour tout $a + bw$ on peut trouver $c + dw$ tel que $(a + bw)(c + dw) = 1$. Pour cela, on

commence par remarquer que $(a + bw)(a - bw) = a^2 - b^2w^2 = a^2 - 2b^2$. Or $a^2 - 2b^2$ ne peut être égal à 0 que si $a = b = 0$. Sinon, en divisant par b^2 , on trouverait $(a/b)^2 = 2$, mais on sait que 2 n'a pas de racine carrée dans \mathbb{F}_{13} . Si nous écrivons u pour $a^2 - 2b^2$, alors nous pouvons trouver v tel que $uv = 1$, et alors $(a + bw)(a - bw)v = 1$. Donc pour notre $c + dw$ on peut prendre $v(a - bw) = va - vbw$.

On obtient ainsi un corps de taille $13^2 = 169$. En général, si p est un nombre premier et m un entier strictement positif, on peut créer un corps de taille p^m en commençant par \mathbb{F}_p et en y adjoignant la racine d'un polynôme irréductible de degré m , c'est-à-dire un polynôme de degré m qui ne peut pas être écrit comme un produit de deux polynômes de degré inférieur. Il s'avère que deux corps de même taille sont « isomorphes », c'est-à-dire qu'ils ont exactement la même structure algébrique, même s'ils ont été définis de manière différente. On parle donc du corps de taille p^m et on le note \mathbb{F}_{p^m} .

La géométrie algébrique sur les corps finis

La géométrie algébrique sur les nombres complexes est très pratique en raison du théorème fondamental de l'algèbre, qui garantit que toute équation polynomiale a une racine. Nous avons vu dans l'exemple ci-dessus comment cela faisait une différence : pour tout nombre complexe x , nous pouvons trouver y tel que $y^2 = 1 - x^2$. Mais si x et y doivent être des nombres réels et si $|x| > 1$, alors nous ne pouvons plus résoudre l'équation. Il est quelque peu surprenant que la géométrie algébrique soit intéressante et importante lorsque les variables prennent des valeurs dans des corps finis, puisque le théorème fondamental de l'algèbre est ici très loin d'être vrai. En effet, nous nous sommes appuyés sur l'existence de polynômes sans racines pour construire des corps plus grands à partir de corps plus petits. C'est d'autant plus surprenant quand on pense aux sujets qui intéressent les spécialistes de la géométrie algébrique, comme les propriétés topologiques des ensembles définis par des équations polynomiales. Dans un corps fini, un ensemble défini par des équations polynomiales n'est qu'un ensemble fini. Il est donc totalement dépourvu de continuité, ce qui est une condition essentielle pour qu'un ensemble ait des propriétés topologiques intéressantes.

Néanmoins, nous pouvons au moins donner un sens à l'objet d'étude de base : un ensemble défini par des équations polynomiales. Par exemple, nous pouvons facilement parler d'un « cercle » dans \mathbb{F}_{13}^2 : nous le définissons comme l'ensemble des points de la forme (x, y) tels

que x et y appartiennent à \mathbb{F}_{13} et $x^2 + y^2 = 1$. Un exemple de point appartenant à ce cercle est $(2, 6)$ puisque $2^2 + 6^2 = 40$ et que 40 laisse un reste de 1 lorsqu'il est divisé par 13.

Nous pouvons également répondre partiellement à la première critique de la géométrie algébrique finie en utilisant une astuce utilisée dans toutes les mathématiques, qui consiste à considérer des familles plutôt que des individus. Ici, chaque nombre premier p nous donne une famille évidente de corps finis : les corps $\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_{p^2}, \mathbb{F}_{p^3}$, etc. Bien que pour chaque corps, il y ait des polynômes qui n'ont pas de racines, ces mêmes polynômes auront des racines dans les corps suivants de la suite. Une fois que nous avons décidé d'étudier les familles, nous pouvons poser une question très élémentaire. Étant donné un système d'équations polynomiales, combien y a-t-il de solutions dans \mathbb{F}_{p^m} , et comment ce nombre augmente-t-il lorsque m tend vers l'infini ? Par exemple, si nous prenons le système composé de la seule équation $x^2 + y^2 = 1$ et que nous prenons $p = 13$, nous pourrions demander quelle est la taille d'un « cercle » dans $\mathbb{F}_{13}, \mathbb{F}_{169}, \mathbb{F}_{13^3}$, etc. Cela nous donnera une suite croissante de nombres a_1, a_2, a_3, \dots , qui s'avère contenir un grand nombre d'informations fascinantes.

L'une des choses que l'on peut faire avec des suites de nombres est de former des fonctions à partir d'elles. Par exemple, si nous prenons la fonction tau de Ramanujan, ou de manière équivalente la suite $\tau(1), \tau(2), \tau(3), \dots$, nous pouvons former la fonction $\sum_{n=1}^{+\infty} \tau(n)q^n$ avec $q = e^{2\pi iz}$ et obtenir la fonction $\Delta(z)$ dont il a été question plus haut. Nous pouvons faire quelque chose de similaire avec la suite que nous venons de décrire. Pour des raisons qui dépassent le cadre de cet exposé, la « bonne » fonction à prendre est

$$Z(x) = \exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{n}\right).$$

On l'appelle la fonction zêta associée au système d'équations polynomiales et au nombre premier p . Comme nous le verrons plus loin, il existe des analogies étroites entre ces fonctions et la **fonction zêta de Riemann**, la fonction au cœur de l'hypothèse de Riemann.

Les conjectures de Weil

On pourrait penser qu'il est beaucoup plus facile de poser des questions mathématiques que d'y répondre. La plupart du temps, on aurait raison. Cependant, il arrive que le fait de poser des questions soit déjà

un exploit en soi. Par exemple, Ramanujan a dû faire preuve d'une extraordinaire perspicacité pour poser sa conjecture sur la fonction τ : la vérité probable de cette affirmation était une observation brillante, un peu comme la théorisation brillante d'un scientifique. Parfois, la question et la réponse sont toutes deux des réussites majeures : la question posée conduit à un programme de recherche inattendu qui s'avère extrêmement difficile mais aussi extrêmement fructueux. L'un des meilleurs exemples est un ensemble de conjectures dues à Weil.

J'ai mentionné précédemment une objection évidente à l'idée de la géométrie algébrique sur les corps finis : les ensembles que l'on étudie sont finis et ne présentent donc aucun intérêt topologique. André Weil, s'appuyant sur les travaux d'autres personnes avant lui, a eu la remarquable intuition que cette objection était complètement erronée. Il en est venu à penser qu'un concept topologique connu sous le nom de cohomologie, qui est un outil central pour les topologues, devrait être applicable à la géométrie algébrique sur les corps finis. Bien qu'il n'ait pas développé lui-même une théorie de la cohomologie appropriée, sa supposition qu'une telle théorie devrait exister l'a amené à penser que plusieurs résultats en topologie avaient des analogues dans le contexte des corps finis, ce qui l'a conduit à formuler une série de conjectures sur les fonctions zêta définies dans la section précédente. Ces conjectures ont eu une influence considérable sur l'évolution des mathématiques depuis lors. Voici ce qu'elles disent.

Soit $Z(x)$ la fonction zêta issue d'un système d'équations polynomiales de degré n et d'un nombre premier q . Alors les affirmations suivantes sont vraies :

1. La fonction $Z(x)$ peut s'écrire sous la forme $P(x)/Q(x)$ avec deux polynômes P et Q à coefficients entiers.
2. Plus précisément, il existe une formule de la forme

$$Z(x) = \frac{P_1(x)P_3(x) \cdots P_{2n-1}(x)}{P_0(x)P_2(x) \cdots P_{2n}(x)},$$

où chaque P_i est un polynôme à coefficients entiers. Les inverses des racines de P_i sont des entiers algébriques (c'est-à-dire des solutions de polynômes à coefficients entiers dont le coefficient de plus haut degré est 1), et les racines elles-mêmes ont un **module** égal à $q^{-i/2}$.

3. La fonction $z \mapsto 1/q^n z$ échange les racines de P_i avec les racines de P_{2n-i} .

4. Sous certaines conditions (que je n'essaierai pas d'énoncer ici), le degré de P_i est égal au i -ième **nombre de Betti** (un important invariant topologique) de l'ensemble déterminé par le système d'équations polynomiales lorsque les coefficients sont des nombres complexes.

La relation entre les conjectures de Weil et la topologie

J'ai mentionné à plusieurs reprises que les ensembles finis n'ont pas de structure topologique intéressante. Cependant, il existe une notion simple qui relie la topologie à l'étude des ensembles déterminés par des équations polynomiales sur des corps finis, c'est celle de **point fixe**. Un point fixe d'une fonction f est simplement un point x tel que $f(x) = x$. Certains des résultats les plus connus en topologie concernent les points fixes : par exemple, le **théorème du point fixe de Brouwer** dit que toute fonction continue d'une boule de dimension n dans elle-même doit avoir au moins un point fixe. Plus généralement, le **théorème du point fixe de Lefschetz** permet de déterminer, pour un très grand nombre d'espaces X , combien de points fixes une fonction continue f de X dans X doit avoir, à condition que f ne soit pas trop sauvage et que les points fixes soient comptés avec une multiplicité appropriée qui garantit que le nombre de points fixes ne change pas si f est modifié d'une manière continue. Le nombre de points fixes est donné par une formule qui fait intervenir les groupes d'homologie de l'espace X .

Quel est le rapport avec les ensembles finis qui nous intéressent ? La réponse commence par l'observation que dans le corps à q^m éléments, la fonction $x \mapsto x^{q^m}$, qui élève chaque nombre à la puissance q^m , envoie tout x sur lui-même. En d'autres termes, tout x est un point fixe de cette application connue sous le nom de Φ_{q^m} . Le fait d'avoir une façon compliquée de définir la **fonction identité** peut ne pas sembler très utile, mais cela l'est, car la fonction Φ_{q^m} a un sens dans des corps plus grands. Par conséquent, si nous prenons un corps plus grand F qui contient \mathbb{F}_{q^m} , nous constatons que nous disposons d'une caractérisation très utile des points qui appartiennent à \mathbb{F}_{q^m} : ce sont précisément les points fixes de Φ_{q^m} ! (La raison pour laquelle il ne peut y avoir d'autres points fixes lorsque l'on étend le corps est que l'équation $x^{q^m} = x$ ne peut avoir plus de q^m solutions, puisqu'il s'agit d'une équation polynomiale de degré q^m). La fonction Φ_{q^m} est appelée « **endomorphisme de Frobenius** ».

Un autre fait utile concernant l'endomorphisme de Frobenius est que $\Phi_{q^m}(x + y) = \Phi_{q^m}(x) + \Phi_{q^m}(y)$ pour tout x et tout y . De là,

il n'est pas difficile de montrer que si S est un sous-ensemble de F^d déterminé par certaines équations polynomiales, et que nous prenons un point (x_1, \dots, x_d) dans S , alors le point $(\Phi_{q^m} x_1, \dots, \Phi_{q^m} x_d)$ appartient aussi à S . En d'autres termes, si nous appliquons l'endomorphisme de Frobenius à chaque coordonnée, alors on obtient une fonction de S dans S . De plus, les points fixes de cette fonction sont précisément les points qui appartiennent à la partie de S qui vit dans $\mathbb{F}_{q^m}^d$. Donc si nous voulons compter ces derniers (ce qui est notre cas), alors nous pouvons plutôt compter les points fixes d'une certaine fonction de S dans S .

La raison pour laquelle cela est potentiellement utile est que si le nombre de points fixes s'avère plutôt stable en cas de modification de la fonction, comme le théorème du point fixe de Lefschetz nous indique qu'il le serait dans une configuration plus topologique, alors nous ne sommes plus obligés de penser à la fonction spécifique avec laquelle nous avons commencé, mais nous pouvons à la place extraire les informations des groupes d'homologie, que nous pourrions être en mesure de calculer d'une manière tout à fait différente. Mais pour que tout cela fonctionne, nous devons préciser ce que nous entendons par « groupes d'homologie » dans ce contexte.

C'est ce qu'ont fait Grothendieck, qui était le directeur de thèse de Deligne, et Artin. Grothendieck a proposé une théorie appelée cohomologie étale. Artin et lui en ont élaboré les détails quelques années plus tard. Il s'agit d'une avancée majeure, qui a des répercussions sur l'ensemble de la géométrie algébrique et qui permet de résoudre toutes les conjectures de Weil, à l'exception de la deuxième.

Analogies entre les conjectures de Weil et l'hypothèse de Riemann

Riemann a révolutionné l'étude des nombres premiers en montrant qu'ils étaient intimement liés à ce que nous appelons aujourd'hui la fonction zêta de Riemann, la fonction ζ qui à un nombre complexe s associe un autre nombre complexe selon la formule

$$\zeta(s) = 1^{-s} + 2^{-s} + 3^{-s} + \dots$$

Cette formule n'a en fait de sens que si la partie réelle de s est strictement supérieure à 1, mais Riemann s'est rendu compte que la fonction elle-même avait un sens pour tous les nombres complexes. Ceci est lié à la « rigidité » que j'ai mentionnée précédemment : une fois que l'on connaît les valeurs de $\zeta(s)$ pour tous les s dont la partie réelle est stric-

tement supérieure à 1, il existe précisément une fonction complexe différentiable définie sur le reste du plan complexe (sauf qu'elle tend vers l'infini en 1) qui coïncide avec ζ pour ces valeurs de s . Non seulement $\zeta(s)$ a un sens pour tous les s , mais c'est une fonction extrêmement importante et intéressante.

Riemann a démontré que la fonction zêta possède une sorte de symétrie qui relie $\zeta(s)$ à $\zeta(1-s)$. Il n'est pas tout à fait vrai que les deux soient égales, mais l'une peut être exprimée très simplement en fonction de l'autre. Ce résultat est connu sous le nom d'équation fonctionnelle.

En utilisant l'équation fonctionnelle, on peut montrer que $\zeta(s) = 0$ lorsque $s = -2n$ pour tout entier n strictement positif. Ces zéros de la fonction zêta sont appelés les zéros triviaux. L'hypothèse de Riemann est l'énoncé suivant :

Conjecture. *Soit s un zéro non trivial de la fonction zêta de Riemann. Alors la partie réelle de s est $1/2$.*

J'ai dit plus haut que l'hypothèse de Riemann était une affirmation concernant le terme d'erreur dans le théorème des nombres premiers. Un autre des grands résultats de Riemann est que l'hypothèse ci-dessus et l'énoncé concernant le terme d'erreur dans le théorème des nombres premiers sont équivalents.

La deuxième partie des conjectures de Weil, et en particulier l'affirmation que les racines de P_i ont pour module $q^{-i/2}$, est connue sous le nom d'hypothèse de Riemann pour les variétés sur un corps fini. Pourquoi ce nom est-il raisonnable ?

Un lien évident est que le nombre $1/2$ joue un rôle important dans les deux énoncés. On peut rendre cette observation un peu moins superficielle en changeant de variable. L'hypothèse de Riemann dit que les zéros de ζ se trouvent sur la droite $\Re(s) = 1/2$, tandis que la conjecture de Weil dit que les racines de P_i se trouvent sur le cercle de rayon $q^{-i/2}$ autour de l'origine. Il existe une fonction simple, construite à partir de la fonction **logarithme complexe**, qui permet de passer du cercle à la droite. En utilisant cette fonction, on peut changer de variable pour que les zéros de P_i se trouvent également sur la droite $\Re(s) = 1/2$ (cependant, nous ne pouvons pas le faire simultanément pour tous les i).

De même, la troisième conjecture de Weil, concernant les échanges de racines, nous indique que \mathbb{Z} possède une certaine symétrie qui rappelle l'équation fonctionnelle. Après un changement de variables approprié, on peut faire en sorte que cette symétrie relie les valeurs en s aux valeurs en $1-s$, tout comme avec l'équation fonctionnelle pour la fonc-

tion zêta de Riemann.

Plus important que ces similitudes cosmétiques cependant est le fait que les utilisations de l'hypothèse de Riemann pour les variétés sur un corps fini sont similaires à celles de l'hypothèse de Riemann pour ζ . En particulier, les deux nous renseignent sur la taille des estimations d'erreur. L'hypothèse de Riemann originale nous indique que le terme d'erreur dans le théorème des nombres premiers est à peu près aussi petit que nous pouvons raisonnablement l'espérer si nous croyons en un modèle probabiliste pour les nombres premiers. De même, la conjecture de Weil nous indique que de nombreuses autres estimations d'erreurs sont à peu près aussi petites qu'elles pourraient raisonnablement l'être. Un exemple d'une telle application est la conjecture de Ramanujan. Comme nous l'avons vu, la fonction τ de Ramanujan est un terme d'erreur lié au nombre de façons d'écrire un nombre comme une somme de 24 carrés. La conjecture affirme qu'il est aussi petit que possible. Le travail combiné d'un certain nombre d'auteurs a montré (d'une manière pas du tout simple) que la conjecture était une conséquence des conjectures de Weil.

La démonstration par Deligne de la dernière conjecture de Weil

Le résultat le plus célèbre de Deligne est sa démonstration de l'hypothèse de Riemann pour les variétés sur un corps fini, la conjecture qui ne découlait pas des travaux de Grothendieck. J'aimerais pouvoir dire quelque chose d'instructif sur cette démonstration, mais je ne le peux pas. Toutefois, je peux tenter de faire comprendre à quel point cette démonstration est étonnante et pourquoi il est hors de question de l'expliquer à un public non mathématicien, en répétant ce que d'autres ont dit à son sujet.

Grothendieck pensait savoir comment démontrer la dernière conjecture. Une théorie de cohomologie appropriée devrait avoir certaines propriétés. Toutes les conjectures de Weil devaient en découler. Cependant, il était difficile de démontrer ces propriétés : Grothendieck les a appelées les conjectures standard.

L'une des surprises du résultat de Deligne est qu'il n'a pas démontré la dernière conjecture de Weil en démontrant les conjectures standard : au lieu de cela, il a trouvé une voie différente. Il a cependant fait un usage important de la cohomologie étale. En effet, j'ai entendu dire que l'une des raisons du succès de Deligne était qu'il était la seule personne

au monde, en dehors de Grothendieck, à avoir vraiment compris le travail de Grothendieck.

Voici quelques-uns des ingrédients qui ont servi à la démonstration de Deligne :

- un théorème de **Kazhdan** et **Margulis** sur les groupes de monodromie des faisceaux de Lefschetz ;
- une méthode de **Rankin** pour estimer la fonction tau de Ramanujan ;
- une théorie cohomologique de Grothendieck pour certaines fonctions L ;
- la théorie classique des invariants du **groupe symplectique** ;
- un argument de **suite spectrale** de **Leray** ;
- l'« astuce de la puissance tensorielle ».

Le seul ingrédient que je connaisse est le dernier. Deligne est parvenu à démontrer que les zéros de P_i ont un module au moins égal à $q^{-(i+1)/2}$, alors que le but était de montrer une estimation de $q^{-i/2}$. Cependant, si l'on prend des produits cartésiens de l'ensemble sur lequel la fonction zêta est définie, on finit par obtenir une borne de $q^{-(ri+1)/2}$ alors que l'objectif est de $q^{-ri/2}$. Comme le rapport entre $ri+1$ et ri tend vers 1, on peut montrer que la borne correcte pour l'ensemble original était en fait $q^{-i/2}$, comme on le souhaitait.

Les autres ingrédients ne sont pour moi que des mots, des mots assez terrifiants d'ailleurs. Mais je suis quelque peu rassuré par un article de **Nick Katz**, qui a écrit sur le travail de Deligne lorsqu'il a reçu sa médaille Fields. Deux phrases ressortent de sa description de la démonstration. La première est la suivante : « Avec une audace caractéristique, Deligne ignore tout simplement le problème préliminaire consistant à établir l'indépendance de ℓ . » Je ne sais pas exactement ce qui se passe, mais il est clair que Deligne a été confronté à un obstacle apparemment insurmontable et qu'il a continué allègrement là où n'importe quel mathématicien normal aurait abandonné. La deuxième phrase donne une idée de ce que Katz, qui en sait bien plus sur ce domaine que je ne le saurai jamais, pensait du cœur de l'argument de Deligne : « La démonstration de Deligne est tout simplement spectaculaire ; il n'y a pas d'autre mot. » Et lorsqu'il décrit ce que Deligne a fait (c'est de cette description que j'ai extrait la liste des ingrédients ci-dessus), il ne peut s'empêcher d'ajouter des points d'exclamation pour indiquer à quel point les étapes de l'argument sont extraordinaires.

Conclusion

À la fin de son article, Nick Katz déclare : « Nous avons passé sous silence une partie considérable du travail de Deligne, qui suffirait à lui seul à le désigner comme un mathématicien vraiment exceptionnel. » C'est encore plus vrai pour ce que je viens d'écrire, d'une part parce que Katz a mentionné plusieurs résultats que je n'ai pas mentionnés, et d'autre part parce que Deligne a démontré beaucoup plus de résultats depuis 1978. Cependant, j'espère que le petit aperçu insatisfaisant que j'ai pu proposer donne une idée de la grandeur de Deligne et de la raison pour laquelle il est un choix si naturel pour le prix Abel.

Sinaï (2014)

« pour ses contributions fondamentales à la théorie des systèmes dynamiques, à la théorie ergodique et à la physique mathématique ».

Depuis l'époque de Newton, les équations différentielles ont été utilisées par les mathématiciens, les scientifiques et les ingénieurs pour expliquer les phénomènes naturels et pour prévoir leur évolution. De nombreuses équations intègrent des termes stochastiques pour modéliser des facteurs inconnus apparemment aléatoires qui influencent cette évolution. Le spectre des applications modernes des équations d'évolution déterministes et stochastiques englobe des questions aussi diverses que le mouvement des planètes, les courants océaniques, les cycles physiologiques, la dynamique des populations et les réseaux électriques, pour n'en citer que quelques-unes. Certains de ces phénomènes peuvent être prévus avec une grande précision, tandis que d'autres semblent évoluer de manière chaotique et imprévisible. Il est maintenant devenu évident que l'ordre et le chaos sont intimement liés : nous pouvons trouver des comportements chaotiques dans des systèmes déterministes et, inversement, l'analyse statistique des systèmes chaotiques peut conduire à des prévisions précises.

Iakov Sinaï a apporté des contributions fondamentales à ce vaste domaine, en découvrant de surprenants rapports entre l'ordre et le chaos et en développant l'utilisation de la théorie des probabilités et de la théorie de la mesure dans l'étude des systèmes dynamiques. Ses réalisations comportent des travaux précurseurs dans le cadre de la théorie ergodique, qui étudie la tendance d'un système à explorer tous les états disponibles selon certaines statistiques temporelles, et de la mécanique statistique, qui explore le comportement des systèmes composés d'un très grand nombre de particules comme par exemple les molécules dans un gaz.

La première contribution remarquable de Sinaï, inspirée par Kolmogorov, a été de découvrir un invariant des systèmes dynamiques. Cet invariant est maintenant connu sous le nom d'« **entropie de Kolmogorov-Sinaï** ». C'est devenu une notion essentielle pour étudier la complexité d'un système à l'aide d'une description de ses trajectoires

par la théorie de la mesure. Cela a permis des avancées importantes dans la classification des systèmes dynamiques.

Sinaï a été à l'avant-garde dans le domaine de la théorie ergodique. Il a démontré les premiers théorèmes d'ergodicité pour les **billards** à la manière de **Boltzmann**, travail qu'il a poursuivi avec Bounimovitch et Tchernov. Il a construit des partitions de Markov pour les systèmes définis par des itérations de difféomorphismes d'**Anossov**, ce qui a conduit à une série de travaux remarquables qui ont démontré l'utilité de la **dynamique symbolique** pour décrire diverses catégories de systèmes mélangés.

Avec **Ruelle** et Bowen, Sinaï a découvert la notion de mesure SRB : une mesure invariante assez générale et intéressante pour les systèmes dissipatifs à comportement chaotique. Cette notion polyvalente s'est révélée très utile dans l'étude qualitative de certains systèmes dynamiques typiques, ainsi que dans les tentatives pour s'attaquer au comportement chaotique complexe de la vie réelle, comme la turbulence.

Les autres travaux précurseurs de Sinaï en physique mathématique incluent les marches aléatoires en milieux aléatoires (marches de Sinaï), les transitions de phase (théorie de Pirogov-Sinaï), la turbulence unidimensionnelle (les propriétés statistiques des chocs de l'équation de Burgers stochastique, par **E-Khanin-Mazel-Sinaï**), la théorie du **groupe de renormalisation** (Bleher-Sinaï), et le **spectre** des opérateurs de **Schrödinger** discrets.

Sinaï a formé et influencé une génération d'éminents spécialistes dans ses propres domaines de recherche. Nombre de ses recherches sont devenues des outils standard pour les spécialistes de physique mathématique. Ses travaux ont eu et continuent d'avoir une vaste portée et un profond retentissement sur les mathématiques et la physique, ainsi que sur l'interaction toujours fructueuse de ces deux domaines.

Iakov G. Sinaï est né le 21 septembre 1935 à Moscou en Russie. Ses parents, Grigori Sinaï et Nadezda Kagan, étaient tous deux microbiologistes et avaient une carrière de chercheur. Son grand-père, le mathématicien Benjamin Fédorovitch Kagan, était le directeur du département de géométrie différentielle de l'université d'État de Moscou. Kagan a eu une grande influence sur son petit-fils. Il a pris sa retraite de sa chaire à l'université d'État de Moscou en 1952, l'année où son petit-fils Iakov Grigorievitch est entré à la faculté de mécanique et de mathématiques.

Sinaï a obtenu sa licence ès sciences (1957), sa maîtrise (1960) et son doctorat (1963) à l'université d'État de Moscou. Il avait pour directeur

de thèse l'éminent Andreï Kolmogorov. Sinaï a été chercheur au laboratoire des méthodes probabilistes et statistiques de l'université d'État de Moscou de 1960 à 1971. En 1971, il est devenu professeur dans cette même université et chercheur titulaire de l'institut Landau de physique théorique au sein de l'Académie des sciences de Russie. Depuis 1993, il est professeur de mathématiques à l'université de Princeton aux États-Unis, mais a conservé parallèlement son poste à l'institut Landau de physique théorique. Fondé en 1964 et situé à Tchernogolovka, à quelque 40 km au nord-est de Moscou, l'institut Landau est au centre d'un réseau scientifique dans la tradition de « l'école de Landau ».

Pendant la période 1997-1998, Sinaï a occupé la chaire Thomas-Jones à l'université de Princeton. En 2005, il a été distingué par la chaire Moore de l'Institut de technologie de Californie à Pasadena. Sinaï est l'un des mathématiciens les plus influents du xx^e siècle. Il a obtenu de nombreux résultats novateurs en théorie des systèmes dynamiques, en physique mathématique et en théorie des probabilités. De nombreux résultats en mathématiques portent son nom, notamment l'entropie de Kolmogorov-Sinaï, le **billard de Sinaï**, les marches aléatoires de Sinaï, les mesures de Sinaï-Ruelle-Bowen, et la théorie de Pirogov-Sinaï. Considéré comme le principal architecte de la plupart des ponts reliant le monde des systèmes dynamiques déterministes à celui des systèmes probabilistes (stochastiques), Sinaï est tenu en haute estime tant dans les milieux de la physique que ceux des mathématiques. Il ne faut donc pas s'étonner qu'il soit l'auteur d'un article intitulé « Mathématiciens et physiciens : comme chiens et chats ? »

Au cours du demi-siècle écoulé, Iakov Sinaï a écrit plus de 250 articles de recherche et de nombreux ouvrages. Sinaï et sa femme Elena B. Vul, mathématicienne et physicienne, ont aussi écrit conjointement de nombreux articles scientifiques. Iakov Sinaï a supervisé plus de cinquante doctorants.

La profondeur des contributions de Sinaï dès le début de sa carrière lui ont valu d'être invité comme orateur au Congrès international des mathématiciens à Stockholm en 1962. Sinaï a depuis lors été un orateur invité à plusieurs conférences internationales importantes et a donné de nombreuses conférences prestigieuses à travers le monde. Il a été conférencier invité à quatre reprises au Congrès international des mathématiciens. Il a été conférencier en assemblée plénière lors du premier congrès latino-américain de mathématiques en 2000. En 2001, il a été nommé président du comité de la médaille Fields de l'Union mathématique internationale, qui allait décider des attributions des médailles

Fields au congrès de Pékin l'année suivante.

Iakov Sinaï a reçu de nombreux prix internationaux prestigieux. En 2013, il a reçu de la Société américaine de mathématiques le prix Steele pour l'ensemble de son œuvre. Parmi les autres récompenses, il y a le prix Wolf en mathématiques (1997), le prix Nemmers en mathématiques (2002), le **prix Henri-Poincaré** de l'**Association internationale de physique mathématique** (2009), le prix international **Dobrouchine** de l'institut de transmission de l'information de l'Académie des sciences de Russie (2009), la **médaille Boltzmann** décernée par la commission de physique statistique de l'Union internationale de physique pure et appliquée (1986) et la **médaille Dirac** décernée par le centre international Abdus-Salam de physique théorique à Trieste (1992).

De nombreuses sociétés mathématiques et académies l'ont élu comme membre ou membre honoraire : l'Académie américaine des arts et des sciences (1983), l'Académie des sciences de Russie (1991), la Société mathématique de Londres (1992), l'Académie hongroise des sciences (1993), l'Académie nationale des sciences des États-Unis (1999), l'Académie brésilienne des sciences (2000), l'Académie européenne (2008), l'Académie polonaise des sciences (2009) et la Société royale de Londres (2009). Il est docteur *honoris causa* de l'université de Varsovie (1993), de l'université de Budapest pour la science et la technologie (2002), de l'université hébraïque de Jérusalem (2005) et de l'université de Warwick (2010).

Sinaï est également un professeur respecté à Princeton. Selon les mots de l'un de ses anciens étudiants, « C'est assez stimulant d'être dans sa classe... Les gens ressentent le besoin immédiat de participer. Il se dégage de sa personne un rayonnement qui nous inspire. » Il est aussi connu pour son opiniâtreté face aux obstacles, qu'ils soient de nature bureaucratique ou théorique, un trait de caractère qui l'a bien servi au fil des années.

En 2005, pour le 70^e anniversaire de Sinaï, un numéro spécial du Journal mathématique de Moscou lui a été consacré : « Iakov Sinaï est l'un des plus grands mathématiciens de notre temps. La liste des prix internationaux qui lui ont été décernés en signe de reconnaissance pour ses contributions scientifiques est extrêmement longue, et la liste de ses résultats fondamentaux l'est encore plus. Son intérêt constant pour les mathématiques et son enthousiasme scientifique exceptionnel ont inspiré plusieurs générations de scientifiques à travers le monde. Sa simple présence à un séminaire ou à une conférence rend la vie scientifique plus lumineuse et plus exaltante. »

LE CHAOS (par ARNE B. SLETSJØE)

Le chaos est un phénomène de la vie quotidienne dont tout le monde a fait l'expérience. Pour les mathématiciens, il est important de comprendre la signification profonde de ce concept et de savoir quantifier le comportement chaotique.

Le terme « **chaos** » tire son origine du grec $\chi\acute{\alpha}\omicron\varsigma$, qui représente « une masse mouvante et informe d'où sont issus le cosmos et les dieux ». Une définition plus actuelle du terme est quelque chose comme un état de confusion et de désordre complets, sans perspective immédiate de stabilité.

Il existe au moins deux types de chaos. Un système aléatoire nous apparaît comme chaotique. Lancer un dé peut donner une suite 3, 1, 5, 3, 3, 2, 6, 1, ..., pour laquelle nous sommes sûrs de ne pas trouver de motifs. L'imprévisibilité totale est souvent considérée comme du chaos.

Une autre forme de chaos est celle que l'on appelle le chaos déterministe. Déterministe est plus ou moins synonyme de prévisible. Le chaos déterministe peut donc sembler quelque peu paradoxal. Mais le comportement chaotique provient du fait que le système dépend de manière très sensible de son état initial. À titre d'exemple, considérons la configuration suivante. Sur une sphère assez grande, laissons tomber de petites sphères, en essayant toujours d'atteindre le sommet de la sphère plus grande. Les petites sphères rebondissent ou roulent dans différentes directions, selon le côté du point de chute. Le comportement chaotique est le résultat de petites différences dans l'état initial, c'est-à-dire du point de chute. Il s'agit d'une situation chaotique déterministe, déterministe parce que les petites sphères obéissent simplement aux lois physiques du mouvement, et chaotique en raison de la dépendance sensible par rapport à l'état initial.

Un autre exemple de chaos déterministe est le **problème à trois corps**. Ce problème concerne les trajectoires de trois corps qui s'influencent mutuellement en raison des forces gravitationnelles. Le système est déterministe parce que chaque mouvement peut être prédit à l'aide des lois physiques du mouvement. Il est chaotique en raison de sa dépendance sensible par rapport à l'état initial. Cette dépendance est souvent appelée « **effet papillon** », en référence à l'exemple théorique de la formation d'un ouragan qui dépend du fait qu'un papillon éloigné a battu des ailes plusieurs semaines auparavant.

Même le lancer de dés apparemment aléatoire est en fait déterministe. En fixant la position et la vitesse initiales des dés, la forme précise

des dés et en tenant compte de notre connaissance exacte de la surface de la table, nous sommes en mesure de prédire le résultat d'un lancer de dés, du moins en théorie. Mais si nous imposons un petit changement dans un paramètre d'entrée, nous sommes perdus. Ainsi, même si le système est déterministe, il nous apparaît comme stochastique.

Illustrons quelques variantes d'un système dynamique à l'aide d'une bille et d'une casserole. Plaçons la bille dans la casserole. L'état initial du système est la position de la bille. Le système dynamique donne une description précise des trajectoires de la bille. La bille se déplace évidemment vers le point le plus bas de la casserole. Après quelques oscillations, elle atteindra finalement le point d'équilibre. Dans ce système dynamique, toutes les trajectoires convergent vers le même point. Si nous réalisons la même expérience avec une bille sur une surface plane, les trajectoires ne convergeront pas vers un point spécifique, mais s'étaleront de manière rectiligne dans toutes les directions. Une petite variation de l'angle initial entraînera une augmentation de la distance entre les trajectoires, mais la croissance de la distance sera constante.

La notion mathématique qui permet de mesurer ce type de dispersion est l'**exposant de Liapounov**. Dans l'exemple du plan, l'exposant de Liapounov est égal à 0. Dans la casserole, où toutes les trajectoires aboutissent au même point, l'exposant de Liapounov est négatif. Le cas le plus intéressant est celui où l'exposant de Liapounov est positif. Dans ce cas, les trajectoires peuvent se disperser radicalement, même si leurs états initiaux sont très proches. L'exposant de Liapounov permet de quantifier le taux de dispersion. Le mathématicien français **Jacques Hadamard** a décrit en 1898 un système dynamique où l'exposant de Liapounov est partout positif. Le système dynamique présente donc partout un comportement chaotique. On dit que Hadamard a découvert le chaos, ou du moins qu'il a été le premier à décrire formellement un système dynamique chaotique.

Le lien entre l'entropie de Kolmogorov-Sinaï et l'exposant de Liapounov est donné par le théorème de Pesin. Une conséquence du théorème de Pesin est que si l'entropie est positive, alors il existe un exposant de Liapounov positif, et vice versa. Le résultat n'est pas du tout évident. L'exposant de Liapounov positif nous indique que les trajectoires peuvent diverger rapidement, même si leurs états initiaux sont assez proches. Une entropie de Kolmogorov-Sinaï positive indique que le système dans son ensemble présente un certain degré d'incertitude. Le théorème de Pesin indique que les deux façons de mesurer le comportement chaotique d'un système dynamique sont équivalentes.

LES BILLARDS MATHÉMATIQUES (par ARNE B. SLETSJØE)

Un billard mathématique est une idéalisation du jeu de billard, mais où la table peut avoir des formes autres que rectangulaires et même être multidimensionnelle. Nous n'utilisons qu'une seule boule de billard. Le billard peut même avoir des régions où la boule est exclue.

Formellement, un billard mathématique est un système dynamique dans lequel une particule sans masse et ponctuelle se déplace à l'intérieur d'une région bornée. La particule est réfléchiée par des réflexions spéculaires au bord, sans perte de vitesse. Entre deux réflexions, la particule se déplace de façon rectiligne à vitesse constante. Rappelons qu'une réflexion spéculaire est caractérisée par la loi de la réflexion, l'angle d'incidence étant égal à l'angle de réflexion.

Un exemple de billard mathématique est le billard de Sinaï. La table du billard de Sinaï est un carré au centre duquel on a retiré un disque. La table est plate, sans courbure. La boule de billard est réfléchiée alternativement par le bord extérieur et le bord intérieur.

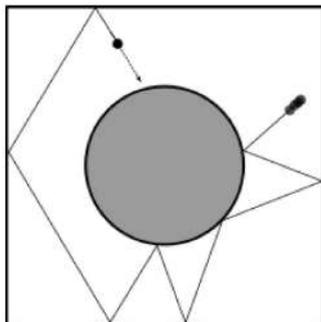


Fig. 33 – *Le billard de Sinaï.*

Le billard de Sinaï provient de l'étude d'un modèle de comportement des molécules dans un gaz dit idéal. Dans ce modèle, nous considérons le gaz comme de nombreuses petites boules (les molécules de gaz) qui rebondissent à l'intérieur d'un carré sur les bords et les unes sur les autres. Le billard de Sinaï fournit une illustration simplifiée mais assez bonne de ce modèle.

Ce billard a été présenté par Iakov G. Sinaï comme un exemple de système hamiltonien en interaction qui présente des propriétés physiques et thermodynamiques : toutes ses trajectoires possibles sont ergodiques et ses exposants de Liapounov sont positifs. Le système présente donc un comportement chaotique. En tant que modèle d'un gaz clas-

sique, le billard de Sinaï est parfois appelé gaz de Lorentz. La grande réussite de Sinaï avec ce modèle a été de montrer que le comportement des molécules de gaz suit les trajectoires du système dynamique de Hadamard, tel qu'il a été décrit par Hadamard en 1898, dans le premier article qui étudiait le chaos mathématique de manière systématique.

Un billard mathématique n'est pas nécessairement plan. Dans le cas d'une courbure non nulle, le mouvement rectiligne est remplacé par le mouvement le long des géodésiques, c'est-à-dire le long des courbes qui donnent le chemin le plus court entre les points du billard. Le mouvement de la boule est une géodésique à vitesse constante. Les trajectoires sont donc entièrement décrites par les réflexions sur le bord. Le système est déterministe : si nous connaissons la position et l'angle d'une réflexion, toute la trajectoire peut être déterminée. L'application qui permet de passer d'un état à l'autre s'appelle la transformation du billard. La transformation du billard détermine le système dynamique.

Dans le billard rectangulaire ordinaire, nous n'observons aucun comportement chaotique. Un petit changement dans les données initiales induira une déviation significative à long terme, mais la déviation sera une fonction linéaire du temps. Le comportement chaotique se caractérise par une croissance exponentielle de la déviation. Le billard de Sinaï présente un comportement chaotique. Pendant longtemps, on a supposé que la déviation exponentielle des trajectoires proches les unes des autres était due à la forme concave du bord intérieur. On pensait également qu'une forme concave était nécessaire pour obtenir un comportement chaotique, tout comme une lentille concave diffuse la lumière. Mais en 1974, Léonid Bounimovitch a démontré qu'une table de billard en forme de stade, où deux côtés opposés sont remplacés par des demi-cercles, produit un comportement chaotique, malgré le fait que ce billard soit complètement convexe.

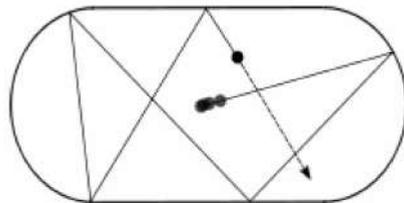


Fig. 34 –
Le billard de Bounimovitch.

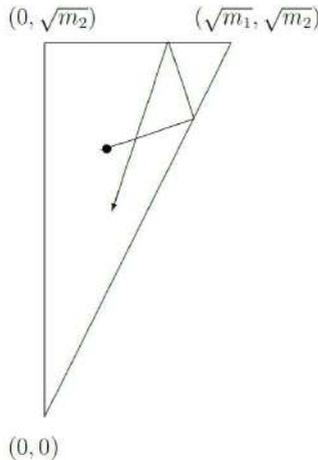
Un exemple

Considérons l'exemple suivant de billard. Le modèle physique consiste en deux molécules qui se déplacent dans un intervalle unidimensionnel $[0, 1]$. Lorsqu'une molécule frappe une extrémité, elle est réfléchiée de manière élastique, c'est-à-dire que la vitesse est la même mais dans la direction opposée. Les collisions entre les deux molécules sont également élastiques, ce qui permet de conserver la quantité de mouvement et l'énergie. Supposons que les masses des deux molécules soient m_1 et m_2 . Supposons que les vitesses des deux molécules soient v_1 et v_2 avant la collision et w_1 et w_2 après la collision. Nous avons donc les deux équations

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 w_1 + m_2 w_2,$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 w_1^2 + \frac{1}{2} m_2 w_2^2.$$

Les positions des deux molécules sont données par les coordonnées x_1 et x_2 , écrites sous la forme d'une paire (x_1, x_2) . Cette paire décrit un état du système. L'espace des états paramétrise tous les états possibles. Dans cet exemple, les deux molécules sont placées sur l'intervalle $[0, 1]$, donc $0 \leq x_1 \leq 1$ et $0 \leq x_2 \leq 1$. Nous supposons également que les deux molécules sont ordonnées, la molécule 1 se trouvant à la gauche de la molécule 2, c'est-à-dire $x_1 \leq x_2$. Nous formons une table de billard en forme de triangle, avec les sommets $(0, 0)$, $(0, \sqrt{m_2})$ et $(\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2})$.



Un point (x, y) correspond à la molécule n° 1 placée en $x_1 = \frac{x}{\sqrt{m_1}}$

et la molécule n° 2 placée en $x_2 = \frac{y}{\sqrt{m_2}}$. À l'endroit où les molécules entrent en collision, on a $x_1 = x_2$, ce qui signifie que (x, y) est placé sur l'**hypoténuse** du bord du billard.

La conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie donne

$$w_1 = \frac{2m_2v_2 + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2},$$

$$w_2 = \frac{2m_1v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2}.$$

Donc $v_2 - v_1 = w_1 - w_2$. La réflexion le long de l'hypoténuse du billard est déterminée par

$$(\sqrt{m_1}v_1, \sqrt{m_2}v_2) \cdot (-\sqrt{m_2}, \sqrt{m_1}) = -(\sqrt{m_1}w_1, \sqrt{m_2}w_2) \cdot (-\sqrt{m_2}, \sqrt{m_1}),$$

ou $-v_1 + v_2 = w_1 - w_2$. Ainsi, le billard mathématique triangulaire donne une description complète de la dynamique du modèle unidimensionnel pour un gaz.

L'ENTROPIE DES SUITES DE 0 ET DE 1 (par ARNE B. SLETSJØE)

Considérons un système dynamique dont l'espace d'état est constitué de toutes les suites infinies de 0 et de 1, et dont la dynamique est donnée par l'opérateur de décalage. Ce système dynamique porte le nom du grand mathématicien du XVII^e siècle Jacques Bernoulli.

Considérons la suite de 0 et de 1 suivante, composée de 50 chiffres :

11010010001010111011011000101010100011100110100011.

Avons-nous des raisons de penser que cette suite est engendrée de manière aléatoire ?

Indiquons quelques faits pertinents concernant cette suite :

1. La suite contient 25 fois le chiffre 0 et autant de 1. Cela est compatible avec une hypothèse de hasard.
2. Dans 30 positions, la suite passe de 0 à 1 ou vice versa, ce qui laisse 19 positions où le chiffre suivant est le même que le précédent. Dans une suite aléatoire, ces chiffres auraient tendance à être les mêmes.
3. La suite contient six sous-suites avec 3 chiffres consécutifs égaux, mais aucune avec 4 chiffres consécutifs égaux. Dans une suite de 50 chiffres engendrée aléatoirement, la probabilité de trouver une sous-suite d'au moins 4 chiffres consécutifs égaux est d'environ 98 %. Le fait que notre suite n'ait aucune sous-suite de ce type suggère qu'elle n'est pas engendrée de manière aléatoire.

Sur la base de ces arguments, nous concluons que nous ne pensons pas que la suite soit engendrée au hasard.

La vérité est que la suite a été engendrée manuellement dans le but de produire une suite qui semble aléatoire. Notre erreur, comme le montre notre petite analyse, est d'avoir changé de chiffre trop souvent.

L'entropie des schémas de Bernoulli

Une suite de 0 et de 1 est connue sous le nom de schéma de Bernoulli. Dans un processus engendré au hasard, nous avons une probabilité égale $p = \frac{1}{2}$ pour les chiffres 0 et 1. Dans notre exemple, il semble que les occurrences de 0 et 1 aient une probabilité égale, mais que les combinaisons 01 et 10 soient plus probables, disons comme 60 % par rapport à 40 %, que les combinaisons 00 et 11. Cette différence de

prévisibilité est quantifiée dans l'**entropie** du système. Plus un système est imprévisible, plus son entropie est élevée. Une suite aléatoire de 0 et de 1 a une entropie de 0,693. Notre exemple a une entropie de 0,673, ce qui est légèrement inférieur. En général, un schéma de Bernoulli à deux résultats de probabilité p et $1 - p$ a une entropie donnée par

$$E = -p \ln p - (1 - p) \ln(1 - p).$$

Un schéma de Bernoulli peut avoir plus de deux résultats. L'ensemble de toutes les suites infinies de lettres est un schéma de Bernoulli à 26 valeurs possibles. Le célèbre mathématicien John von Neumann a posé une question intrigante sur les schémas de Bernoulli. Il s'est demandé s'il était possible que deux schémas de Bernoulli structurellement différents produisent le même résultat. Est-il possible d'identifier les deux schémas de Bernoulli $SB(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et $SB(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$? SB signifie schéma de Bernoulli et les fractions donnent la probabilité de chaque résultat, donc $SB(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ est le schéma de Bernoulli avec trois résultats de probabilités égales.

La solution à la question de von Neumann a finalement été donnée par **Donald Ornstein** en 1970. La réponse était négative : deux schémas de Bernoulli essentiellement différents donnent des résultats différents. La base de ce résultat a été donnée par Sinaï et Kolmogorov en 1959. Il s'avère que l'entropie de Kolmogorov-Sinaï est précisément ce qui sépare les différents schémas de Bernoulli.

Un résultat de combinatoire

Au début de cet article, on a affirmé que la probabilité qu'une suite aléatoire de 0 et de 1 à 50 chiffres contienne une sous-suite de 4 chiffres consécutifs égaux était de 98 %. Nous allons considérer une version légèrement plus générale de cette affirmation.

Une suite de 0 et de 1 de longueur n est choisie au hasard. Quelle est la probabilité que la suite contienne m chiffres consécutifs égaux, soit 0, soit 1 ?

La réponse se trouve par récurrence. Soit X_n l'ensemble des suites de 0 et de 1 de longueur n . Le cardinal de X_n est évidemment 2^n . Soit $q(n, m)$ le nombre de suites qui contiennent m chiffres consécutifs égaux, soit 0, soit 1, et $p(n, m)$ la probabilité de choisir une telle suite, c'est-à-dire $p(n, m) \cdot 2^n = q(n, m)$.

Soit $\xi \in X_{n+1}$ une suite qui contient m chiffres consécutifs égaux. On enlève le dernier chiffre de la suite. On obtient alors une nouvelle suite qui

- ou bien contient une suite de m chiffres consécutifs égaux ;
- ou bien se termine précisément par une suite de $m - 1$ chiffres consécutifs égaux, c'est-à-dire que le chiffre précédent ces derniers $m - 1$ chiffres est différent du suivant ;
- ou bien les deux à la fois.

Le cardinal de chacun de ces trois ensembles se calcule comme suit. Le premier a $q(n, m)$ éléments, le deuxième a 2^{n+1-m} éléments, et le troisième a $2^{n+1-m} \cdot p(n + 1 - m, m)$ éléments. Cela donne la relation de récurrence suivante

$$q(n + 1, m) = 2q(n, m) + 2^{n+1-m} - 2^{n+1-m}p(n + 1 - m, m),$$

ce qui donne pour les probabilités, en divisant par 2^{n+1} ,

$$p(n + 1, m) = p(n, m) + 2^{-m}(1 - p(n + 1 - m, m)).$$

Il est plus ou moins évident que $p(n, 1) = 1$, que $p(n, n) = 2^{1-n}$ et que $p(n, m) = 0$ pour $n < m$. Le tableau suivant présente quelques calculs :

$n \backslash m$	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0
5	0,938	0,5	0,188	0,063	0
10	0,998	0,826	0,465	0,217	0,094
20	1	0,979	0,768	0,458	0,237
35	1	0,999	0,934	0,689	0,410
50	1	1	0,981	0,821	0,544

Observons que pour des suites de 50 chiffres, il y a une majorité de suites contenant une sous-suite de 6 chiffres consécutifs égaux, et on a bien 98 % des suites qui contiennent une sous-suite avec 4 chiffres consécutifs égaux.

L'ENTROPIE D'UN SYSTÈME DYNAMIQUE (par ARNE B. SLETSJØE)

Vers la fin des années 1950, le mathématicien russe Andreï Kolmogorov a organisé une série de séminaires sur les systèmes dynamiques à l'université de Moscou. Une question souvent soulevée au cours du séminaire concernait la possibilité de déterminer la similitude structurelle entre différents systèmes dynamiques. Un jeune participant au séminaire, Iakov Sinaï, a présenté une réponse affirmative, en introduisant le concept d'entropie d'un système dynamique.

Commençons par remonter une décennie en arrière. En 1948, le mathématicien américain **Claude Shannon** avait publié un article intitulé « **Théorie mathématique de la communication** ». Son idée était d'utiliser le formalisme des mathématiques pour décrire la communication en tant que phénomène. Le but de toute communication est de transmettre un message, mais la manière de le faire est le choix du messager. Certains s'exprimeront avec de nombreux mots ou caractères, d'autres préfèrent être plus brefs. Le contenu de l'information est le même, mais la densité de l'information peut varier. Le langage texte en est un exemple. Lors de l'envoi d'un texto, il est courant d'essayer de minimiser le nombre de caractères. La phrase « Je t'aime » comporte neuf caractères, alors que « Je t' m » n'en comporte que sept, mais le contenu des deux messages est le même.

Shannon a introduit la notion d'entropie pour mesurer la densité de l'**information**. Dans quelle mesure le caractère suivant dans le message nous apporte-t-il plus d'information ? Une entropie de Shannon élevée signifie que chaque nouveau caractère apporte une nouvelle information ; une entropie de Shannon faible indique que le caractère suivant ne fait que confirmer quelque chose que nous savons déjà.

Un système dynamique est une description d'un système physique et de son évolution dans le temps. Le système a de nombreux états. Tous les états sont représentés dans l'espace d'état du système. Un chemin dans l'espace d'état décrit la dynamique du système dynamique.

Un système dynamique peut être déterministe. Dans un système déterministe, le hasard n'intervient pas dans le développement des états futurs du système. Un pendule oscillant décrit un système déterministe. Si l'on fixe la position et la vitesse, les lois de la physique détermineront le mouvement du pendule. Lorsqu'on lance un dé, on se trouve à l'autre extrême : un système stochastique. L'avenir est totalement incertain. Le dernier lancer de dés n'a aucune influence sur le suivant.

En général, nous pouvons avoir une bonne vue d'ensemble de ce qui se passe dans un système dynamique à court terme. Cependant, lorsqu'ils sont analysés à long terme, les systèmes dynamiques sont difficiles à comprendre et à prévoir. Le problème des prévisions météorologiques illustre ce phénomène : les conditions météorologiques, décrites par la pression atmosphérique, la température, le vent, l'humidité, etc., sont un état d'un système dynamique. Une prévision météorologique pour les dix prochaines minutes est beaucoup plus fiable qu'une prévision météorologique pour les dix prochains jours.

Iakov Sinaï a été le premier à proposer une base mathématique pour quantifier la complexité d'un système dynamique donné. Inspiré par l'entropie de Shannon dans la théorie de l'information et dans le cadre du séminaire de Kolmogorov à Moscou, Sinaï a introduit le concept d'entropie pour les systèmes dynamiques qui préservent une mesure, connu aujourd'hui sous le nom d'entropie de Kolmogorov-Sinaï. Cette entropie s'est révélée être un invariant puissant et de grande portée pour les systèmes dynamiques.

L'entropie de Kolmogorov-Sinaï constitue une riche généralisation de l'entropie de Shannon. Dans la théorie de l'information, un message est une suite infinie de symboles, qui correspondent à un état dans le cadre des systèmes dynamiques. L'opérateur de décalage, qui fait basculer la suite d'un cran, donne la dynamique du système. L'entropie mesure dans quelle mesure nous sommes capables de prédire le symbole suivant de la suite.

Un autre exemple concerne un récipient rempli de gaz. L'espace d'état de ce système physique représente les états du gaz, c'est-à-dire la position et la quantité de mouvement de chaque molécule de gaz. Les lois de la nature déterminent la dynamique. Là encore, le degré de complexité et le comportement chaotique des molécules de gaz seront les ingrédients du concept d'entropie.

En résumé, l'entropie de Kolmogorov-Sinaï mesure l'imprévisibilité d'un système dynamique. Plus l'imprévisibilité est grande, plus l'entropie est élevée. Cela correspond bien à l'entropie de Shannon, où l'imprévisibilité du caractère suivant équivaut à une nouvelle information. Cela correspond également au concept d'entropie en thermodynamique, où le désordre augmente l'entropie, et au fait que le désordre et l'imprévisibilité sont étroitement liés.

L'entropie de Kolmogorov-Sinaï a fortement influencé notre compréhension de la complexité des systèmes dynamiques. Même si la définition formelle n'est pas très compliquée, le concept a montré sa force

en apportant des réponses très adéquates à des problèmes centraux de la classification des systèmes dynamiques.

Formalisme mathématique

Considérons un système dynamique (X, B, μ, T) , et soit $Q = \{Q_1, \dots, Q_k\}$ une partition de X en k parties **mesurables** deux à deux disjointes. Définissons l'**image réciproque** de Q par T :

$$T^{-1}Q = \{T^{-1}Q_1, \dots, T^{-1}Q_k\}.$$

Pour deux partitions données $Q = \{Q_1, \dots, Q_k\}$ et $R = \{R_1, \dots, R_m\}$, on définit leur raffinement par

$$Q \vee R = \{Q_i \cap R_j \mid \mu(Q_i \cap R_j) > 0\}.$$

En combinant ces deux constructions, nous obtenons le raffinement d'une image réciproque itérée :

$$\bigvee_{n=0}^N T^{-n}Q = \{Q_{i_0} \cap T^{-1}Q_{i_1} \cap \dots \cap T^{-N}Q_{i_N}\}.$$

L'entropie d'une partition Q est définie par

$$H(Q) = - \sum_{m=1}^k \mu(Q_m) \log \mu(Q_m)$$

et l'on pose

$$h_\mu(T, Q) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} H \left(\bigvee_{n=0}^N T^{-n}Q \right).$$

L'entropie de Kolmogorov-Sinaï de (X, B, μ, T) est définie par

$$h_\mu(T) = \sup_Q h_\mu(T, Q),$$

où la borne supérieure est prise sur toutes les partitions finies mesurables.

Nash et Nirenberg (2015)

« pour leurs contributions fondamentales et absolument remarquables à la théorie des équations aux dérivées partielles non linéaires et à ses applications à l'analyse géométrique ».

Les équations aux dérivées partielles sont utilisées pour décrire les lois fondamentales de phénomènes en physique, en chimie, en biologie et dans d'autres sciences. Elles servent également à analyser des objets géométriques comme cela a été démontré lors des dernières décennies par de nombreux succès dans cette direction.

John Nash et Louis Nirenberg ont joué un rôle déterminant dans le développement de cette théorie en résolvant des problèmes fondamentaux et en introduisant des idées profondes. Leurs avancées se sont développées pour donner naissance à des techniques polyvalentes et robustes qui sont devenues des outils essentiels au service de l'étude des équations aux dérivées partielles non linéaires. Leur impact se fait sentir dans tous les domaines de la théorie, des résultats fondamentaux d'existence jusqu'à l'étude qualitative des solutions, à la fois dans des contextes réguliers et non réguliers. Leurs résultats sont également utiles pour l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles.

Les **théorèmes de plongement** isométrique, qui montrent la possibilité de réaliser une géométrie intrinsèque en tant que sous-variété de l'espace euclidien, ont motivé certains de ces développements. Les théorèmes de plongement de Nash font partie des résultats les plus originaux du XX^e siècle dans le domaine de l'analyse géométrique. En démontrant que toute géométrie riemannienne peut être réalisée de manière lisse comme une sous-variété d'un espace euclidien, le théorème de plongement lisse (C^∞) de Nash établit l'équivalence du point de vue intrinsèque de Riemann avec l'approche extrinsèque plus ancienne. Le théorème de plongement peu lisse (C^1) de Nash, amélioré par **Kuiper**, montre la possibilité de réaliser des plongements qui à première vue semblent être interdits par les invariants géométriques tels que la courbure de Gauss. Ce théorème est au cœur de toute la théorie de Gromov sur l'intégration convexe et a également inspiré des avancées récentes spectaculaires dans la compréhension de la régularité de l'écoulement des fluides incompressibles. Grâce à ses théorèmes fondamentaux de

plongement de la sphère S^2 dans \mathbb{R}^3 avec prescription de la courbure de Gauss ou de la métrique riemannienne, Nirenberg a résolu les problèmes classiques de **Minkowski** et de **Weyl** (ce dernier ayant également été traité simultanément par Pogorelov). Ces solutions étaient très importantes, à la fois parce que les problèmes étaient représentatifs d'un domaine en développement et parce que les méthodes créées convenaient à des applications ultérieures.

Le travail de Nash sur la réalisation de variétés en tant que variétés algébriques réelles et le théorème de Newlander-Nirenberg sur les structures complexes illustrent également l'influence des deux lauréats dans le domaine de la géométrie.

Les problèmes de régularité sont une préoccupation quotidienne dans l'étude des équations aux dérivées partielles, parfois pour obtenir des démonstrations rigoureuses et parfois pour les informations qualitatives précieuses qu'ils fournissent sur les solutions. Ce fut une avancée dans ce domaine lorsque Nash, en parallèle avec **De Giorgi**, démontra les premières estimations **hölderiennes** pour des solutions d'équations elliptiques linéaires dans des dimensions générales sans hypothèse de régularité sur les coefficients. Entre autres conséquences, ceci a apporté une solution au 19^e problème de Hilbert sur l'analyticité des minimiseurs des **fonctionnelles** intégrales associées aux équations elliptiques à coefficients analytiques. Quelques années après ce travail de Nash, Nirenberg, en collaboration avec **Agmon** et **Douglis**, a établi de nouvelles estimations de régularité pour des solutions d'équations elliptiques linéaires avec des données dans l'espace L^p , étendant ainsi la théorie classique de **Schauder**. Ces estimations sont extrêmement utiles dans les applications où de telles conditions d'intégrabilité sur les données sont disponibles. Ces travaux ont constitué le fondement de la théorie moderne de la régularité, qui a connu depuis une croissance fulgurante avec des applications en analyse, en géométrie et en théorie des probabilités, y compris dans des contextes très irréguliers.

Les propriétés de symétrie fournissent également une information essentielle sur les solutions des équations aux dérivées partielles non linéaires, à la fois pour leur étude qualitative et pour la simplification des calculs numériques. Un des résultats les plus spectaculaires dans ce domaine a été obtenu par Nirenberg en collaboration avec Gidas et Ni : ils ont en effet montré que toute solution positive d'une classe très générale d'équations elliptiques non linéaires possède les mêmes symétries que celles des équations elles-mêmes.

Loin d'être confinés aux solutions des problèmes pour lesquels ils ont

été conçus, les résultats démontrés par Nash et Nirenberg sont devenus des outils très utiles qui ont mené à des applications considérables dans d'autres contextes. Parmi les outils les plus populaires, on retrouve les inégalités d'interpolation dues à Nirenberg, y compris l'**inégalité de Gagliardo-Nirenberg** et l'inégalité de **John-Nirenberg**. Cette dernière dit dans quelle mesure une **fonction à oscillation moyenne bornée** peut dévier de sa moyenne, et exprime la dualité inattendue de l'espace de ces fonctions avec l'**espace de Hardy** H^1 . La théorie de la régularité de Nash-De Giorgi-Moser et l'inégalité de Nash (d'abord démontrée par **Stein**) sont devenues des outils clés dans l'étude des **semi-groupes** de probabilités dans toutes sortes de situations allant des espaces euclidiens aux variétés différentielles et aux espaces métriques. Le **théorème des fonctions implicites de Nash-Moser** est une méthode puissante pour résoudre toutes sortes d'équations aux dérivées partielles non linéaires perturbées. Bien que l'influence très vaste de Nash et de Nirenberg sur la boîte à outils moderne des équations aux dérivées partielles non linéaires ne puisse pas être intégralement couvert ici, la théorie de **Kohn-Nirenberg** des **opérateurs pseudodifférentiels** doit également être mentionnée.

En plus d'être à titre individuel des personnalités imposantes dans l'analyse des équations aux dérivées partielles, Nash et Nirenberg se sont mutuellement influencés à travers leurs différentes contributions et interactions. Les conséquences du dialogue fructueux qu'ils ont commencé dans les années 1950 à l'institut Courant de l'université de New York se ressentent aujourd'hui plus fortement que jamais.

John Nash

Nash fait partie d'une poignée de mathématiciens connus au-delà du monde universitaire en raison du film de 2001 réalisé sur lui, *Un homme d'exception*, adapté de la biographie à succès de Sylvia Nasar *Un cerveau d'exception*. Ce film, qui a remporté un Oscar, romançait le parcours de Nash de la période où il était un brillant étudiant à Princeton jusqu'à son prix Nobel d'économie en 1994.

Inévitablement, la version hollywoodienne de la vie de Nash différait de la réalité sur de nombreux points. En particulier, le film se concentrait sur ses résultats précoces dans le domaine de la **théorie des jeux** qui ont des applications en économie et omettait dans le même temps ses recherches dans le domaine de la géométrie et des équations aux dérivées partielles, que la communauté des mathématiciens considère

pourtant comme son travail le plus important et le plus profond.

John Forbes Nash Jr. est né en 1928 à Bluefield en Virginie occidentale, une petite ville isolée de la région des Appalaches. Son père était ingénieur dans la compagnie d'électricité locale et sa mère institutrice. Il est entré à l'institut Carnegie de technologie de Pittsburgh (appelé aujourd'hui université Carnegie-Mellon) grâce à une bourse d'étude, se spécialisant à l'origine en génie chimique avant de bifurquer vers la chimie et finalement de s'orienter vers les mathématiques.

À Carnegie, Nash a suivi un cours facultatif d'économie qui a inspiré sa première contribution, « Le problème de la négociation », qu'il a écrit alors qu'il était encore étudiant de second semestre à l'université de Princeton. Cet article l'a amené à s'intéresser au nouveau domaine de la théorie des jeux, les mathématiques de la prise de décision. La thèse de doctorat de Nash, « Les jeux non coopératifs », est un des textes fondateurs de la théorie des jeux. Il y a introduit le concept d'équilibre pour les jeux non coopératifs, « l'« **équilibre de Nash** », qui a eu un impact très important en économie et dans les sciences sociales.

Alors qu'il était à Princeton, Nash a également fait sa première découverte capitale en mathématiques pures. Il l'a décrite comme « une belle découverte relative à la géométrie des variétés différentielles et des variétés algébriques réelles ». En deux mots, le théorème montre que toute la géométrie des variétés, un objet topologique comme une surface, peut être décrite par une variété algébrique, un objet géométrique défini par des équations, d'une manière beaucoup plus concise que ce qu'on avait précédemment imaginé possible. Ce résultat était déjà à l'époque perçu par ses pairs comme un travail important et remarquable.

En 1951, Nash a quitté Princeton pour un poste de professeur à l'institut de technologie du Massachusetts. Là-bas, il a commencé à s'intéresser au problème de plongement de Riemann, qui demande s'il est possible de plonger la géométrie d'une variété avec des règles spécifiques sur la distance dans un espace euclidien de dimension n de sorte que ces règles soient maintenues. Nash a fourni deux théorèmes qui ont démontré que la réponse était positive : le premier lorsque la régularité était ignorée et le second dans un cadre qui maintenait la régularité.

Afin de démontrer son second théorème de plongement, Nash devait résoudre des systèmes d'équations aux dérivées partielles qui avaient été considérées jusque-là impossibles à résoudre. Il a conçu une technique itérative qui a été ensuite modifiée par Jürgen Moser et qui est dorénavant connue sous le nom de théorème de Nash-Moser.

Mikhaïl Gromov, un autre lauréat du prix Abel, a déclaré : « Ce que Nash a fait en géométrie est de mon point de vue autrement plus impressionnant que ce qu'il a pu réaliser en économie, et de très loin. Ses découvertes ont représenté un changement incroyable d'attitude sur la manière de penser en termes de géométrie des variétés. Vous pouvez les prendre à mains nues et en faire beaucoup plus de choses que ce que vous pouviez réaliser de manière traditionnelle. »

Au début des années 1950, Nash a travaillé comme consultant pour la société RAND, un groupe de réflexion civil financé par l'armée situé à Santa Monica en Californie. Il a passé quelques étés là-bas, où son travail sur la théorie des jeux a trouvé des applications dans la stratégie militaire et diplomatique des États-Unis.

Nash a obtenu une des premières bourses de la fondation Sloan en 1956 et a choisi de prendre une année sabbatique à l'Institut d'étude avancée de Princeton. Il s'est installé non pas à Princeton mais à New York, où il a passé la plupart de son temps au tout nouvel institut Courant en mathématiques appliquées de l'université de New York. C'est là que Nash a fait la rencontre de Louis Nirenberg, qui lui suggéra de travailler sur un problème ouvert majeur de la théorie non linéaire concernant les inégalités associées à des équations aux dérivées partielles de type elliptique. En seulement quelques mois, Nash a apporté la démonstration de l'existence de ces inégalités. Ce qu'il ne savait pas, c'est qu'un mathématicien italien du nom d'Ennio De Giorgi avait déjà démontré cela en utilisant une méthode différente. Le résultat est ainsi connu sous le nom de théorème de Nash-De Giorgi.

Nash n'était pas un spécialiste. Il travaillait seul et se délectait de résoudre de problèmes ouverts célèbres, apportant souvent des manières complètement novatrices de penser. Louis Nirenberg disait en 2002 : « Il y a environ vingt ans, quelqu'un m'a demandé s'il existait des mathématiciens que je considérais comme des génies. J'ai dit qu'il y en avait qu'un qui me venait à l'esprit et que c'était John Nash... Il est doté d'un esprit remarquable. Il pense différemment des autres gens. »

En 1957, Nash s'est marié avec Alicia Larde, une étudiante en physique qu'il avait rencontrée à l'Institut de technologie du Massachusetts. En 1959, alors qu'Alicia était enceinte de leur fils, Nash a commencé à souffrir de délires et d'extrême paranoïa. Il a dû démissionner de son poste. Durant les trente années suivantes, Nash n'est parvenu à mener des recherches mathématiques sérieuses que durant de brèves périodes de lucidité. Sa santé s'est progressivement améliorée. Dans les années

1990, son état mental était redevenu normal.¹⁹

Durant les années 1990, il a également reçu un certain nombre de distinctions pour son travail. Il a ainsi remporté en 1994 le prix de sciences économiques en mémoire d'Alfred Nobel, qu'il a partagé avec John C. Harsanyi et Reinhard Selten. Il a été élu membre de l'Académie nationale des sciences en 1996. Il a remporté en 1999 le prix Steele (partagé avec **Michael G. Crandall**) de la Société américaine de mathématiques pour une contribution fondamentale à la recherche, avec son théorème de plongement de 1956.

Louis Nirenberg

Louis Nirenberg a connu l'une des carrières mathématiques parmi les plus longues, les plus récompensées et les plus sociables. Durant plus d'un demi-siècle de recherche, il a transformé le domaine des équations aux dérivées partielles, tandis que sa générosité et son don pour les exposés alliés à son charme modeste ont fait de lui une source d'inspiration pour tous ses collaborateurs, étudiants et collègues.

Louis Nirenberg est né à Hamilton au Canada en 1925 et a grandi à Montréal, où son père était professeur d'hébreu. Il a commencé à s'intéresser aux mathématiques grâce à son tuteur d'hébreu qui l'a familiarisé avec les énigmes mathématiques. Il a ensuite étudié les mathématiques et la physique à l'université McGill de Montréal, évitant la conscription durant la deuxième guerre mondiale grâce à la politique canadienne d'exemption des étudiants en science. Il a ainsi obtenu son diplôme en 1945.

L'été suivant, Nirenberg a travaillé au Conseil national de recherches du Canada sur les recherches concernant la bombe atomique. Parmi les physiciens qui y travaillaient se trouvait Ernest Courant, le fils aîné du professeur Richard Courant de l'université de New York, qui était en train de monter le département des mathématiques de l'université. Nirenberg a demandé à l'épouse d'Ernest, qui était son amie depuis sa période à Montréal, de demander à son beau-père de le conseiller sur le meilleur endroit où effectuer des études supérieures en physique théorique. Richard Courant a répondu qu'il devrait étudier les mathématiques dans son propre département de l'université de New York.

Nirenberg s'est rendu à un entretien à New York et s'est vu offrir un poste d'assistant. Il a obtenu sa maîtrise en 1947 et a commencé un

19. NDT. Nash est décédé en 2015, sur le chemin de retour de la cérémonie de remise du prix Abel.

doctorat sous la direction de **James J. Stoker**. Ce dernier lui a suggéré un problème ouvert de géométrie qui avait été énoncé par Hermann Weyl trente ans plus tôt : peut-on plonger isométriquement une sphère bidimensionnelle à courbure positive dans un espace euclidien de dimension 3 sous la forme d'une surface convexe ? Afin de démontrer que c'est possible, il a réduit le problème à une question sur les équations aux dérivées partielles non linéaires. Les équations aux dérivées partielles en question étaient de type elliptique, une catégorie d'équations ayant beaucoup d'applications dans le domaine des sciences. Les travaux ultérieurs de Nirenberg se sont largement concentrés sur les équations aux dérivées partielles elliptiques. Au cours des décennies suivantes, il a développé de nombreux théorèmes importants dans ce domaine.

Nirenberg n'a jamais arrêté de faire des mathématiques ni quitté l'université de New York. Après son doctorat en 1949, il y est resté en tant qu'assistant de recherche. Il est d'ailleurs resté en poste à l'institut Courant des sciences mathématiques durant toute sa carrière, devenant professeur titulaire en 1957. De 1970 à 1972, il a été directeur de l'institut. Il a pris sa retraite en 1999. Il vit toujours à Manhattan.²⁰

Dans les années 1950, l'institut Courant est rapidement devenu un des principaux centres de recherche américains en mathématiques appliquées, sur le même plan que des universités plus établies, bien que le nombre de personnes le constituant fût modeste. Nirenberg était l'un de ses ténors et le mathématicien qui a accompli le plus de travail en fournissant une base théorique à l'analyse moderne des équations aux dérivées partielles.

Nirenberg a toujours préféré travailler en collaboration : plus de 90 % de ses contributions ont été écrites en collaboration. Aucun de ses travaux n'était cependant en collaboration avec Nash, que Nirenberg avait appris à bien connaître durant l'année universitaire 1956-1957. Parmi ses contributions importantes, on trouve les résultats obtenus avec son étudiant August Newlander sur les structures complexes en 1957, avec Shmuel Agmon et Avron Douglis sur la théorie de la régularité pour les équations elliptiques en 1959, avec Fritz John sur l'espace des fonctions à oscillation moyenne bornée en 1961, avec David Kinderlehrer et Joel Spruck sur la théorie de la régularité pour les problèmes de frontière libre en 1978, et avec Basilis Gidas et Wei Ming Ni sur les symétries des solutions d'équations aux dérivées partielles en 1979. Un article sur les solutions des équations de Navier-Stokes, coécrit avec **Luis A. Caffarelli** et **Robert V. Kohn**, a remporté en 2014 le prix Steele

20. NDT. Nirenberg est décédé en 2020.

de la Société américaine de mathématiques pour une contribution fondamentale à la recherche.

En plus de faire preuve de vision et de jouer le rôle de meneur, Nirenberg a montré une énergie et une persévérance remarquables, continuant à produire des travaux novateurs dans différents domaines des équations aux dérivées partielles jusqu'à ses soixante-dix ans. Il n'est pas seulement réputé pour sa maîtrise technique mais également pour son flair, sachant instinctivement les problèmes sur lesquels il est judicieux d'investir du temps. Il a dirigé plus de quarante étudiants en thèse. C'est un excellent conférencier et rédacteur.

Depuis qu'il a passé l'année universitaire 1951-1952 à Zurich et à Göttingen, Nirenberg a été un membre actif de la communauté mathématique internationale, voyageant beaucoup. Lors de sa première visite professionnelle en Italie en 1954 pour assister à une conférence sur les équations aux dérivées partielles, il s'est immédiatement senti comme entouré d'amis. « C'est le message que j'essaie de faire passer aux gens qui ne connaissent rien aux mathématiques : c'est amusant, les maths ! » a-t-il déclaré. « Une des merveilles des mathématiques est que vous vous rendez quelque part dans le monde et que vous rencontrez d'autres mathématiciens. C'est comme une grande famille. Cette famille infinie est une joie merveilleuse. » Il était présent à la première grande conférence américano-soviétique de mathématiques à Novossibirsk en 1963. Dans les années 1970, il a été l'un des premiers mathématiciens américains à se rendre en Chine.

Nirenberg s'est vu décerner un nombre important de récompenses prestigieuses. Il a ainsi remporté le prix Bôcher de la Société américaine de mathématiques en 1959. En 1969, il a été élu à l'Académie nationale des sciences. Il a remporté en 1982 (avec **Vladimir Arnold**) le tout premier prix Crafoord décerné par l'Académie royale des sciences de Suède dans des domaines non couverts par les prix Nobel. Il a reçu en 1994 le prix Steele pour l'ensemble de sa carrière de la part de la Société américaine de mathématiques, ainsi que la Médaille nationale des sciences en 1995, la plus haute distinction aux États-Unis. En 2010, la toute première **médaille Chern** lui a été remise par l'Union mathématique internationale et la fondation Chern.

Bibliographie

- BORRELLI (Vincent), « Raconte-moi ... les plongements de Nash-Kuiper », *Gazette des mathématiciens*, 2019, n° 159, p. 63-69.

- MAWHIN (Jean), « **Éloge de Louis Nirenberg, membre associé de la Classe des Sciences** », *La Thérésienne, Revue de l'Académie royale de Belgique*, 2022, n° 1, p. 1-7.
- VILLANI (Cédric), « **Les prodigieux théorèmes de Monsieur Nash**, *Un texte, un mathématicien* », 2010.
- VILLANI (Cédric), « **Nash et les équations aux dérivées partielles** », *Matapli*, 2015, n° 108, p. 35-53.

PROPRIÉTÉ INTRINSÈQUE OU EXTRINSÈQUE (par ARNE B. SLETSJØE)

En mathématiques, la distinction entre les propriétés intrinsèques et extrinsèques d'un objet géométrique est très importante. Une propriété intrinsèque ne changera pas, quelle que soit la façon dont nous représentons l'objet, alors qu'une propriété extrinsèque n'a pas la même immuabilité.

Un dictionnaire donne comme définition du mot intrinsèque « qui appartient en propre à quelqu'un ou à quelque chose ». Ainsi, une propriété intrinsèque est une propriété d'un objet qui est indépendante de la manière ou du contexte dans lequel l'objet est représenté. Le contraire est une propriété extrinsèque. La longueur d'une courbe est une propriété intrinsèque, alors que la courbure est extrinsèque. Il suffit de considérer la courbe comme une corde inélastique. La longueur est constante, mais la courbure dépend de la façon dont on enroule la corde.

La courbure d'une courbe a été introduite dès le XIV^e siècle et mieux comprise par Leonhard Euler plusieurs centaines d'années plus tard. Mais la compréhension plus profonde de la nature de ces quantités géométriques ne s'est manifestée que lorsque Carl Friedrich Gauss a commencé à étudier les surfaces et a soulevé la question des propriétés intrinsèques par rapport aux propriétés extrinsèques. Il n'est pas surprenant que Gauss ait parlé de la courbure dans ce cas. Contrairement aux courbes, la courbure est une propriété intrinsèque d'une surface.

Dans les *Disquisitiones generales circa superficies curvas* de 1827, Gauss a énoncé ce que l'on appelle le « théorème remarquable » (*theorem egregium*) :

« *Si superficies curva in quacumque aliam superficiem explicatur, mensura curvaturae in singulis punctis invariata manet.* »

(Si une surface courbe est développée sur n'importe quelle autre surface, la mesure de la courbure en chaque point reste inchangée.)

En termes modernes, la courbure de Gauss est une propriété intrinsèque d'une surface. Ce théorème est remarquable, car la courbure était définie à l'origine de manière extrinsèque.

Influencé par la géométrie de Gauss sur une surface dans l'espace euclidien de dimension 3, Bernhard Riemann (1826-1866) a introduit en

Fig. 35 – *Carl Friedrich Gauss (1777-1855), peint par Christian Albrecht Jensen*



1854 la « géométrie riemannienne ». La géométrie riemannienne généralise la géométrie euclidienne. Elle est immédiatement devenue un outil très important pour le développement des idées géométriques et physiques au XX^e siècle. Une variété riemannienne est un objet géométrique défini de manière intrinsèque, c'est-à-dire sans référence à un quelconque plongement de l'objet dans un espace ambiant.

Depuis que le célèbre théorème de plongement de John Nash permet aux géomètres de considérer toute variété riemannienne comme une sous-variété d'un espace euclidien, le problème de la découverte de relations simples et nettes entre les invariants intrinsèques et extrinsèques d'une sous-variété est l'un des problèmes les plus fondamentaux de la théorie des sous-variétés.

Au début, chaque propriété était considérée comme extrinsèque. Peu après que Gauss a attiré notre attention sur la différence entre les propriétés intrinsèques et extrinsèques, Riemann a suivi le mouvement et redéfini les objets géométriques de manière intrinsèque. La conséquence était que les objets géométriques ne pouvaient pas nécessairement être réalisés globalement dans n'importe quel espace ambiant. Les théorèmes de plongement des années 1950 ont suggéré un retour en arrière, pour réaliser une variété riemannienne comme une sous-variété d'un espace euclidien, et ont permis de donner des définitions extrinsèques de propriétés intrinsèques.

LE THÉORÈME DE NASH-KUIPER (par ARNE B. SLETSJØE)

Au milieu des années 1950, John Nash a publié deux articles qui décrivent deux théorèmes connus sous le nom de théorèmes de plongement de Nash. Ces deux articles traitent des plongements isométriques d'objets géométriques dans l'espace euclidien, c'est-à-dire des plongements qui préservent la longueur de chaque chemin dans l'objet géométrique.

Les deux théorèmes sont très différents l'un de l'autre : le premier, appelé théorème C^1 , a une démonstration très simple et conduit à des conclusions très contre-intuitives, tandis que la démonstration du second, le théorème C^k , est très technique, mais le résultat n'est pas très surprenant. Le théorème C^1 a été publié en 1954 et a été étendu par Nicolaas Kuiper l'année suivante. Le théorème C^k a été publié en 1956.

Théorème (Nash-Kuiper). *Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension m et $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ un plongement de classe C^∞ non expansif dans l'espace euclidien \mathbb{R}^n , où $n \geq m + 1$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un plongement $f_\varepsilon : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 qui est*

— *isométrique : pour deux vecteurs tangents quelconques v et $w \in T_x(M)$,*

$$g(v, w) = \langle df_\varepsilon(v), df_\varepsilon(w) \rangle;$$

— *ε -proche de f :*

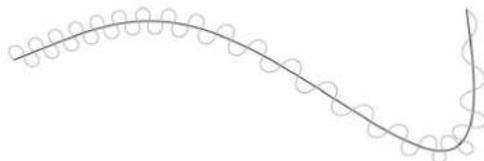
$$|f(x) - f_\varepsilon(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in M.$$

Dans la démonstration du théorème de Nash-Kuiper, un plongement non expansif d'une variété riemannienne dans un espace euclidien est converti en un plongement isométrique de classe C^1 . Un plongement non expansif est une application qui réduit la longueur des courbes. L'esquisse suivante de la démonstration du théorème de Nash-Kuiper est une version simplifiée, faite en dimension un. L'objet géométrique est un cercle et la variété cible est le plan euclidien à deux dimensions.

Soit \mathcal{C} une courbe régulière plane, paramétrée par une application $r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$. La courbe est parcourue à la vitesse $v_0(t) = \|v(t)\| = \|r'(t)\|$. Soit $v(t)$ une autre fonction vitesse, supérieure à $v_0(t)$, c'est-à-dire $v(t) \geq v_0(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$. Le but du problème isométrique unidimensionnel est de savoir s'il est possible de construire une nouvelle courbe régulière \mathcal{C}' , paramétrée par $r' : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, telle que la courbe soit parcourue à une vitesse v . Cela ne pose évidemment aucun

problème, mais nous avons imposé une exigence supplémentaire : la nouvelle courbe doit être aussi proche de la courbe d'origine que nous le souhaitons, à savoir $\|r'(t) - r(t)\| \leq \varepsilon$ pour tout choix de $\varepsilon > 0$.

La réponse à cette question est oui, c'est possible, grâce au théorème de Nash-Kuiper.



La nouvelle courbe C' est construite à partir de l'originale en ajoutant une courbe oscillante dans la direction normale de la courbe. Si la courbe ajoutée a une longueur d'onde suffisamment courte et une amplitude suffisamment faible, les deux conditions, vitesse et proximité, sont remplies. Plus la longueur d'onde est courte, plus la courbe est longue. Pour être sûr que la distance à la courbe d'origine est suffisamment petite, l'amplitude doit être faible. Mais il est possible d'établir une courbe suffisamment longue pour qu'elle soit parcourue à la vitesse donnée.

L'exemple d'un cycliste qui gravit une pente raide illustre bien ce phénomène. La courbe initiale est suivie par la roue arrière, la nouvelle courbe par la roue avant. Avec de nombreuses oscillations rapides, la roue avant parcourt une distance beaucoup plus longue que la roue arrière dans le même laps de temps. La courbe de la roue avant est donc parcourue à une vitesse plus élevée que celle de la roue arrière.



Alors que la version unidimensionnelle du théorème de Nash est

plutôt intuitive, la version bidimensionnelle est plus ou moins contre-intuitive, comme le montre l'illustration suivante. Commençons par un morceau de papier et donnons-lui une forme cylindrique. C'est facile. L'étape suivante est la plus difficile. Il s'agit de transformer le cylindre en une surface en forme de bouée sans étirer ou déchirer le papier. Intuitivement, cela semble impossible. La circonférence extérieure de la bouée est beaucoup plus longue que la circonférence intérieure, mais dans le cylindre original, elles sont de la même longueur. En vertu du théorème de Nash, c'est pourtant possible, du moins en théorie. Nash a démontré le théorème en 1954, mais ce n'est qu'en 2012 qu'une équipe pluridisciplinaire en France, le projet HEVEA, a été en mesure de visualiser le processus par lequel le cylindre est plié en une bouée, de manière isométrique. Les images de la figure 36 illustrent le processus : le papier est enveloppé par une série infinie de vagues, s'empilant jusqu'à former la surface d'une bouée de telle sorte que la feuille de papier d'origine reste intacte.



FIG. 36 – Images d'un plongement isométrique d'un tore plat dans \mathbb{R}^3 (source : projet HEVEA/PNAS).

LES PROBLÈMES DE MINKOWSKI ET DE WEYL

(par ARNE B. SLETSJØE)

En 1953, Louis Nirenberg a publié un article intitulé « Le problème de Weyl et de Minkowski en géométrie différentielle globale ». Dans cet article, il résout deux problèmes ouverts de longue date en géométrie différentielle : le problème de Minkowski soulevé par Hermann Minkowski dans l'article « Volume et surface » publié en 1903, et le problème de Weyl d'après l'article de Hermann Weyl « Sur la détermination d'une surface convexe fermée par son élément de ligne » de 1916.

Le problème de Minkowski (1903). Étant donné une fonction réelle strictement positive f définie sur S^2 , trouver une surface compacte strictement convexe $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ telle que la courbure de Gauss de Σ au point x soit égale à $f(\mathbf{n}(x))$, où $\mathbf{n}(x)$ désigne la normale à Σ en x .



Fig. 37 –
Hermann Minkowski
(1864-1909)

Considérons une sphère de rayon R et de centre C . La sphère est une surface convexe, donc tout rayon partant du centre coupe la sphère en exactement un point. La courbure au point d'intersection est $\frac{1}{R^2}$, comme en tout autre point de la sphère. Minkowski a suggéré de considérer une fonction f sur la sphère, partout strictement positive. Un exemple d'une telle fonction est la pluviométrie annuelle moyenne à la surface de la Terre. Cette fonction est illustrée par une coloration de la surface, où par exemple le rouge signifie un temps sec, et le bleu foncé est la couleur des zones pluvieuses.

Minkowski demande alors si l'on peut construire une nouvelle surface, toujours convexe, telle que la courbure κ dans n'importe quelle direction \mathbf{n} soit précisément la valeur de la fonction donnée f dans cette direction, c'est-à-dire $\kappa(\mathbf{n}) = f(\mathbf{n})$. Dans les zones rouges de la sphère, où la valeur de la « fonction de pluviométrie » est inférieure à la courbure constante $\frac{1}{R^2}$, nous devons « aplatir » la sphère, et dans les zones bleues, elle doit être plus courbée. La courbure totale de la sphère entière est 4π , donc la valeur moyenne de la fonction donnera la « taille » de la nouvelle surface.

Le problème de Weyl (1916). Considérons une sphère S^2 de dimension 2 et supposons que g soit une métrique riemannienne sur S^2 dont la courbure de Gauss est partout strictement positive. Existe-t-il un plongement isométrique de classe C^2 global $X : (S^2, g) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \sigma)$, où σ est la métrique plate standard dans \mathbb{R}^3 ?



Fig. 38 –
Hermann Weyl
(1885-1955)

Le problème de Weyl est étroitement lié au problème de Minkowski. Weyl définit une métrique riemannienne sur une sphère. Une métrique est un concept plus général qu'une fonction. En tant que fonction, elle est également définie en chaque point de la sphère, mais pas par une seule valeur. Une métrique attribue une valeur spécifique à chaque direction en tout point de la sphère. Nous illustrons ce concept à l'aide d'un exemple. Considérons la surface comme une partie d'un paysage et introduisons une métrique qui exprime les différences de vitesse de marche à partir de diverses directions en un point donné. Dans un marais, les valeurs sont faibles par rapport aux valeurs sur un sol sec. Des valeurs différentes dans différentes directions à partir d'un point donné reflètent les variations du sol dans différentes directions. La dis-

tance entre deux points dans cette métrique est le temps passé à marcher entre les points. Un plan avec la métrique euclidienne a une courbure de Gauss nulle, alors que le même plan équipé de la métrique « difficulté de marcher » donnée ci-dessus peut être plutôt courbé. Le problème de Weyl est le suivant : étant donné une telle métrique sur une sphère, pouvons-nous déformer la sphère de telle sorte que, sur la sphère déformée, la distance ordinaire corresponde à la distance mesurée par la métrique ?

L'exemple suivant illustre les idées du problème de Minkowski et de Weyl. Les neurones ne sont pas répartis uniformément dans le corps humain. Certaines parties du corps, comme nos mains, notre visage et notre langue, sont beaucoup plus sensibles aux sensations que d'autres parties. C'est dans ces parties du corps que la densité de neurones est la plus élevée. La métrique euclidienne, nommée d'après le mathématicien grec Euclide, mesure les distances ordinaires entre les points et l'aire de n'importe quelle région d'une surface. Si l'on considère la métrique de la densité des neurones comme la métrique abstraite et le corps humain comme la sphère à deux dimensions, le corps étrange de la figure 39 illustre la réponse positive à la question de Weyl. Les différentes tailles des diverses parties du corps correspondent à la densité des neurones.

Fig. 39 – *La différence de taille des parties du corps reflète la densité des neurones. (source : Musée d'histoire naturelle de Londres)*



Nirenberg, avec ses théorèmes fondamentaux de plongement de la sphère S^2 dans \mathbb{R}^3 avec une courbure de Gauss ou une métrique riemannienne prescrite, a résolu les problèmes classiques de Minkowski et de Weyl (ce dernier problème ayant également été résolu simultanément par Pogorelov). Ces solutions étaient importantes, à la fois parce que les problèmes étaient représentatifs d'un domaine en développement et parce que les méthodes créées étaient les bonnes pour des applications ultérieures. La solution de Nirenberg au problème de Minkowski a constitué un jalon en géométrie globale.

LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES : UN OUTIL MATHÉMATIQUE UNIVERSEL (par ARNE B. SLETSJØE)

Les équations aux dérivées partielles (ou EDP en abrégé) sont utilisées pour décrire les lois fondamentales des phénomènes en physique, en chimie, en biologie et dans d'autres sciences. Elles sont également utiles dans l'analyse d'objets géométriques, comme le démontrent les nombreux succès enregistrés au cours des dernières décennies. John Nash et Louis Nirenberg ont joué un rôle de premier plan dans le développement de cette théorie, en résolvant des problèmes fondamentaux et en introduisant des idées profondes.

Joseph Fourier (1768-1830) a été orphelin, révolutionnaire, conseiller de Napoléon Bonaparte et secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences. Mais il est surtout connu comme mathématicien et physicien très influent. En 1822, Fourier a publié ses travaux sur les flux de chaleur dans un livre, « Théorie analytique de la chaleur », où il introduisit l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \Delta u = 0.$$

La fonction $u = u(t, x)$ mesure la température en un point donné à un moment donné. L'équation donne un modèle mathématique pour le transfert de chaleur. Elle exprime mathématiquement le fait qu'en un point où il fait plus froid que la moyenne des zones environnantes, la température augmentera avec le temps. Ce type d'équation aux dérivées partielles est appelé **EDP parabolique**.

Les premiers instruments à cordes frottées ont peut-être vu le jour dans les cultures équestres d'Asie centrale. Mais l'instrument que nous connaissons aujourd'hui sous le nom de violon a été développé dans le sud de l'Europe à la Renaissance, grâce au noble art de la lutherie de la famille Stradivari entre autres. Les virtuoses enthousiasmaient leur public et les scientifiques se demandaient comment la corde vibrante créait ce son magnifique. En 1746, **Jean le Rond d'Alembert** a découvert l'**équation des ondes** à une dimension. Dix ans plus tard, Leonhard Euler a décrit le phénomène en trois dimensions. L'équation des ondes traduit mathématiquement la dynamique d'une onde. Elle s'écrit généralement sous la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0,$$

où $u = u(t, x)$ décrit l'amplitude de la fonction d'onde qui se propage dans le temps et l'espace. Si l'on considère une corde vibrante ou une

onde en général, on remarque que l'onde ressemble parfois à \frown et parfois à \smile . Dans le premier cas, l'onde commence à descendre ; dans l'autre, elle monte. Le modèle mathématique de ce phénomène est une **EDP hyperbolique**.

Les EDP paraboliques et hyperboliques sont des modèles typiques pour les systèmes dynamiques, c'est-à-dire les systèmes qui évoluent dans le temps. La distinction entre les deux types est la vitesse de propagation : il y a beaucoup plus de vigueur dans un système où la vitesse plutôt que l'accélération est causée par une convexité dans la solution. Le transfert de chaleur, modélisé par une équation parabolique, se propage à une vitesse infinie. Chaque partie de la cuillère en argent est instantanément affectée par le thé chaud, même s'il faut un certain temps avant d'avoir mal aux doigts. Les ondes se propagent à une vitesse finie : la mer est complètement calme avant qu'une vague n'y pénètre.

John Nash et Louis Nirenberg sont principalement associés à un troisième type d'EDP, appelées EDP elliptiques. Les équations elliptiques ont beaucoup en commun avec les équations hyperboliques, mais elles diffèrent sur un point crucial, à savoir l'existence d'une variable temporelle. Dans une EDP elliptique, une telle variable n'existe pas. Toutes les coordonnées sont spatiales.

Une équation aux dérivées partielles elliptique se présente typiquement sous la forme

$$\Delta u = f$$

sans coordonnée temporelle. Les solutions des équations elliptiques sont purement spatiales, il n'y a pas de moyen naturel d'introduire une coordonnée temporelle. Les équations elliptiques modélisent donc généralement des problèmes physiques statiques.

Wiles (2016)

« pour avoir démontré de manière éclatante le dernier théorème de Fermat par le biais de la conjecture de **modularité** pour les courbes elliptiques semi-stables, ouvrant ainsi une nouvelle ère dans la théorie des nombres ».

La théorie des nombres, une belle et ancienne branche des mathématiques, se penche sur l'étude des propriétés arithmétiques des nombres entiers. Dans sa forme moderne, le sujet est fondamentalement lié à l'analyse complexe, à la géométrie algébrique et à la théorie des représentations. Les résultats de la théorie des nombres jouent un rôle important dans nos vies quotidiennes par le biais des algorithmes de cryptage pour les communications, les transactions financières et la sécurité numérique.

Le dernier théorème de Fermat, formulé la première fois par **Pierre de Fermat** au XVII^e siècle, est l'affirmation selon laquelle l'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solution parmi les nombres entiers strictement positifs quand $n > 2$. Fermat a apporté la démonstration de son affirmation pour $n = 4$, Leonhard Euler a trouvé la démonstration pour $n = 3$, et **Germain (Sophie)** a démontré le premier résultat général qui s'applique à une infinité d'exposants premiers. L'étude du problème par Ernst Kummer a dévoilé plusieurs notions de base dans la théorie algébrique des nombres, telles que les nombres **idéaux** et les subtilités de la factorisation unique. La démonstration complète trouvée par Andrew Wiles repose sur trois autres concepts dans la théorie des nombres, à savoir les courbes elliptiques, les formes modulaires et les **représentations galoisiennes**.

Les courbes elliptiques sont définies par des **équations cubiques** à deux variables. Elles sont les domaines naturels de définition des fonctions elliptiques introduites par Niels Henrik Abel. Les formes modulaires sont des fonctions analytiques hautement symétriques définies sur la partie supérieure du plan complexe. Elles se factorisent naturellement à travers des objets appelés « **courbes modulaires** ». Une courbe elliptique est dite modulaire si elle peut être paramétrée par une application de l'une de ces courbes modulaires. La conjecture de modularité, proposée par **Gorō Shimura**, **Yutaka Taniyama** et André Weil dans les

années 1950 et 1960, affirme que toute courbe elliptique définie sur les nombres rationnels est modulaire.

En 1984, **Gerhard Frey** a associé une courbe elliptique semi-stable à tout contre-exemple hypothétique au dernier théorème de Fermat, et a fortement suspecté cette courbe elliptique de ne pas être modulaire. La non-modularité de Frey a été démontrée via la conjecture epsilon de Jean-Pierre Serre par **Kenneth Ribet** en 1986. Ainsi, une démonstration de la conjecture de modularité de Shimura-Taniyama-Weil pour les courbes elliptiques semi-stables permettrait également de démontrer le dernier théorème de Fermat. Cependant, à cette époque, la conjecture de modularité était considérée par beaucoup comme totalement inaccessible. Par conséquent, ce fut une avancée majeure lorsqu'Andrew Wiles, dans une publication révolutionnaire en 1995, a introduit sa technique de relèvement modulaire et démontré le cas semi-stable de la conjecture de modularité.

La technique de relèvement modulaire de Wiles concerne les symétries de Galois des points d'ordre fini dans la structure de groupe abélien sur une courbe elliptique. En s'appuyant sur la théorie des déformations de **Barry Mazur** pour de telles représentations galoisiennes, Wiles a identifié un critère numérique qui assure que la modularité des points d'ordre p peut être relevée à la modularité des points dont l'ordre est n'importe quelle puissance de p , où p est un nombre premier impair. Ce relèvement modulaire est alors suffisant pour démontrer que la courbe elliptique est modulaire. Le critère numérique a été confirmé dans le cas semi-stable en utilisant un important article complémentaire écrit conjointement avec **Richard Taylor**. Des théorèmes de **Robert Langlands** et Jerrold Tunnell montrent que, dans de nombreux cas, la représentation galoisienne donnée par les points d'ordre trois est modulaire. Par le passage ingénieux d'un nombre premier à un autre, Wiles a démontré que dans les cas restants, la représentation galoisienne donnée par les points d'ordre cinq est modulaire. Ceci lui a permis d'achever sa démonstration de la conjecture de modularité, et ainsi également du dernier théorème de Fermat.

Les idées novatrices introduites par Wiles ont eu une importance cruciale pour de nombreux développements ultérieurs, y compris la démonstration en 2001 du cas général de la conjecture de modularité par **Christophe Breuil**, **Brian Conrad**, **Fred Diamond** et Richard Taylor. Pas plus tard qu'en 2015, Nuno Freitas, Bao V. Le Hung et Samir Siksek ont apporté une démonstration de la conjecture de modularité sur les corps quadratiques réels. Peu de résultats ont une histoire mathé-

matique aussi riche et une démonstration aussi éclatante que le dernier théorème de Fermat.

Andrew Wiles est un des rares mathématiciens, sinon le seul, à avoir vu sa démonstration d'un théorème faire les gros titres des nouvelles internationales. En 1994, il a démontré le dernier théorème de Fermat, qui était à cette époque le problème ancien non résolu le plus connu dans l'histoire de cette matière.

La démonstration de Wiles était non seulement le point d'orgue de sa carrière et une révolution dans le monde des mathématiques, mais également le point culminant d'un parcours personnel remarquable commencé trente ans plus tôt. En 1963, alors qu'il n'avait que dix ans et qu'il grandissait à Cambridge en Angleterre, Wiles a trouvé un exemplaire d'un livre sur le dernier théorème de Fermat dans sa bibliothèque locale. Il s'est trouvé immédiatement captivé par ce problème — il n'existe pas de solution en nombres entiers non nuls x , y et z tels que $x^n + y^n = z^n$ dès que n est un entier strictement supérieur à 2 — qui était facile à comprendre mais qui était demeuré non résolu depuis trois siècles. « À partir de ce moment, je savais que je n'allais jamais lâcher le morceau », a-t-il déclaré. « Je devais résoudre ce problème ! »

Wiles a étudié les mathématiques au collège Merton à Oxford, puis est retourné à Cambridge au collège Clare pour son doctorat. Son domaine de recherche était la théorie des nombres, le sujet mathématique qui explore les propriétés des nombres. Sous la direction de **John Coates**, Wiles a étudié les courbes elliptiques, un type d'équation qui avait été étudié la toute première fois à l'occasion de la mesure des longueurs des orbites planétaires. Ensemble, ils ont réalisé les premiers progrès sur l'une des conjectures fondamentales du domaine, la **conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer**, démontrant celle-ci dans certains cas particuliers. Wiles a obtenu son doctorat en 1980 grâce à sa thèse sur « Les lois de réciprocité et la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer ».

Entre 1977 et 1980, Wiles a été professeur adjoint à l'université Harvard, où il a commencé à étudier les formes modulaires, un domaine distinct de celui des courbes elliptiques. Il y a initié une collaboration avec Barry Mazur qui a conduit à leur démonstration en 1984 de la conjecture principale de la **théorie d'Iwasawa**, un domaine de la théorie des nombres. En 1982, il a été nommé professeur à l'université de Princeton.

Durant les premières années de la carrière universitaire de Wiles,

ce dernier n'essayait pas activement de résoudre le dernier théorème de Fermat. Personne d'autre ne le faisait d'ailleurs, puisqu'on percevait généralement ce problème comme trop difficile, et peut-être même comme insoluble. Un tournant est intervenu en 1986 lorsqu'on a montré que le problème datant de trois siècles pouvait être formulé différemment en utilisant les mathématiques des courbes elliptiques et des formes modulaires. Ce fut ensuite un étonnant coup du sort que les deux sujets dans lesquels Wiles s'était spécialisé se soient révélés être précisément les domaines qui étaient nécessaires pour traiter le dernier théorème de Fermat à l'aide d'outils modernes. Il a alors décidé qu'il se pencherait de nouveau sur le problème qui l'avait tellement passionné lorsqu'il était enfant. « Le défi s'est avéré irrésistible », dit-il.

Wiles a fait le choix inhabituel de travailler seul sur le théorème de Fermat plutôt que de collaborer avec des collègues. Ce problème étant très connu, Wiles avait en effet peur que la nouvelle qu'il s'y consacrait attirerait trop d'attention et qu'il y perdrait ainsi progressivement sa concentration. La seule personne à laquelle il s'est confié était son épouse Nada, avec laquelle il s'était marié peu de temps après s'être engagé dans l'aventure de cette démonstration.

Après sept ans d'étude intense et secrète, Wiles pensait tenir sa démonstration. Il décida alors d'en faire part au public à l'occasion d'une série de conférences à un séminaire à Cambridge en Angleterre. Il ne l'avait pas annoncé. Le titre de son exposé, « Formes modulaires, courbes elliptiques et représentations galoisiennes », ne laissait rien transparaître, bien que la rumeur se fût répandue au sein de la communauté mathématique et que deux cents personnes se fussent entassées dans la petite salle de conférence pour l'écouter. Lorsqu'il a rédigé le théorème en conclusion de son exposé, un tonnerre d'applaudissements s'est fait entendre dans la salle.

Cependant, un rapporteur qui contrôlait les détails de sa démonstration a trouvé une erreur dans celle-ci. Wiles était complètement atterré à l'idée de ne pas avoir réellement résolu le dernier théorème de Fermat. Il s'est mis alors immédiatement au travail pour régler ce problème, enrôlant l'un de ses anciens étudiants, Richard Taylor, pour l'aider dans cette tâche. Après une année de travail, Wiles a trouvé un moyen de corriger l'erreur. « J'ai eu cette révélation incroyable », a raconté Wiles en larmes dans un documentaire de la BBC. « C'était le moment le plus important de ma vie professionnelle. »

Non seulement il est rare d'annoncer la démonstration d'un théorème célèbre, mais il est également extrêmement inhabituel de se

remettre au travail et de trouver une erreur telle que celle-ci, en raison de l'épuisement mental occasionné par la première tentative infructueuse. Aucune lacune n'a été trouvée dans la démonstration révisée et elle a été publiée dans la revue *Annals of Mathematics* en 1995, sous le titre « Courbes elliptiques modulaires et dernier théorème de Fermat ».

En plus de l'attention des médias internationaux, Wiles a reçu de nombreuses récompenses. Parmi celles-ci, mentionnons le prix Rolf-Schock, le **prix Ostrowski**, le prix Wolf, la médaille de la Société royale de Londres, le prix de mathématiques de l'Académie nationale des sciences des États-Unis et le **prix Shaw**. L'Union mathématique internationale lui a remis une plaque en argent, pour la seule fois de son histoire. Il a été lauréat du premier **prix Clay pour la recherche**. En 2000, il a été fait chevalier.

Wiles est resté à Princeton entre 1982 et 2010, en dehors de courtes périodes de congé. En 2010, il est retourné à Oxford en tant que professeur de recherche de la Société royale de Londres. Son adresse à l'institut de mathématiques est dans le « bâtiment Andrew-Wiles », qui a ouvert en 2013 et a été nommé en son honneur.

Bibliographie

- EDIXHOVEN (Bas), « **Représentations galoisiennes et théorème de Fermat-Wiles** », *Images des mathématiques*, 2012.

LA LETTRE D'ABEL À HOLMBOE (par ARNE B. SLETSJØE)

Au cours de l'été 1823, le jeune Niels Henrik Abel rendit visite au mathématicien Carl Ferdinand Degen à Copenhague. Dans une lettre adressée à son ancien professeur **Bernt Michael Holmboe**, Abel parle de ses recherches mathématiques et de ses discussions avec Degen :

« Je l'ai prié de lire le petit traité dont vous vous souvenez, qui portait sur les fonctions inverses des transcendentes elliptiques, et dans lequel j'avais démontré une chose impossible. Mais il n'a pu découvrir aucun sophisme, ni comprendre quelle était l'erreur. Dieu sait comment je m'en tirerai. »

Dans cette lettre, Abel fait référence à ses premières recherches sur les fonctions elliptiques, un sujet sur lequel il a continué à travailler dans des articles ultérieurs. Les courbes elliptiques sont un domaine des mathématiques basé sur les découvertes d'Abel en matière de fonctions elliptiques. Le théorème de modularité établit un lien étroit entre les courbes elliptiques et les formes modulaires. Il s'agit d'un lien intéressant entre Abel et Andrew Wiles.

Vers la fin de la même lettre, Abel explique à Holmboe ce qu'il a fait dernièrement. Il écrit :

« En plus de lire, je me consacre aussi à mon propre travail. Ainsi j'ai cherché à démontrer l'impossibilité de l'équation $a^n = b^n + c^n$ en nombres entiers lorsque n est strictement supérieur à 2 ; mais je n'ai pas été très enthousiaste. Je ne suis pas allé plus loin que ces quelques théorèmes, qui sont assez rigoureux. »

Abel énumère quatre théorèmes, tous sans démonstration. Nous en reproduisons deux, le théorème I et le théorème III :

Théorème I. *L'équation $a^n = b^n + c^n$, où n est un nombre premier, est impossible si une ou plusieurs des quantités*

$$a, b, c, a + b, a + c, b - c, \sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{b}, \sqrt[n]{c}$$

est un nombre premier.

Théorème III. *Pour que l'équation $a^n = b^n + c^n$ soit possible, a doit*

avoir l'une des trois formes suivantes

$$a = \frac{x^n + y^n + z^n}{2},$$

$$a = \frac{x^n + y^n + n^{n-1}z^n}{2},$$

$$a = \frac{x^n + n^{n-1}(y^n + z^n)}{2},$$

où x , y et z ne doivent pas avoir de facteurs communs.

Cela établit un nouveau lien mathématique entre Abel et Wiles. La lettre à Holmboe a été écrite au cours de l'été 1823. Il est cependant difficile d'établir une date exacte. En effet, Abel donne la date suivante

$$\sqrt[3]{6\,064\,321\,219}$$

en **nombre décimal**. Si nous procédons ainsi, nous obtenons 1 823,590 83. Soustrayons 1823 et calculons

$$365 \times 0,590\,83 = 215,65.$$

Le 216^e jour de l'année 1823 est le 4 août, date probable de la lettre d'Abel.

En guise de curiosité finale, nous reproduisons la phrase suivante de la lettre, qui fait allusion au fait que le lauréat du prix Abel de cette année est né en Angleterre :

« Les bibliothèques ne sont pas bien pourvues en livres de mathématiques, mais elles possèdent une bonne partie des écrits de la Société royale de Londres, entre autres les *Philosophical Transactions*, dans lesquelles on trouve beaucoup de très bonnes choses, de sorte que les Anglais ne sont pas aussi mauvais en mathématiques que je l'avais cru. »

Nous allons donner une démonstration du théorème I dans le cas où a est un nombre premier.

Supposons que n soit un nombre premier strictement supérieur à 2. C'est donc un nombre impair. Cela donne

$$a^n = b^n + c^n = (b + c)(b^{n-1} - b^{n-2}c + \dots + c^{n-1}).$$

Puisque a est un nombre premier, $b + c$ doit être divisible par a . Cela signifie que

$$c \equiv -b \pmod{a}.$$

Ainsi,

$$b^{n-1} - b^{n-2}c + \dots + c^{n-1} \equiv nb^{n-1} \equiv 0 \pmod{a}.$$

Puisque n est un nombre premier, on doit avoir $n = a$ ou $b \equiv 0 \pmod{a}$. Si a divise b , alors a divisera aussi c . Mais cela contredit le fait que a , b et c n'aient pas de facteur commun. On obtient donc $n = a$ et

$$b^n + c^n \equiv b + c \equiv 0 \pmod{n}.$$

On a aussi $b \leq n$ et $c \leq n$. Donc $b + c = n$. Cela donne

$$b^n + c^n = n^n = (b + c)^n = b^n + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} b^{n-i} c^i + c^n$$

et pour la somme des termes positifs

$$\sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} b^{n-i} c^i = 0.$$

Ceci conduit évidemment à une contradiction.

LE DERNIER THÉORÈME DE FERMAT POUR $n = 4$ (par ARNE B. SLETSJØE)

L'application la plus connue du théorème de modularité est la démonstration du dernier théorème de Fermat. Même si Fermat prétendait avoir trouvé une merveilleuse démonstration de l'énoncé, il est peu probable qu'il ait réellement trouvé une démonstration. Ce que nous savons, c'est que Fermat avait une démonstration du théorème pour $n = 4$, en utilisant sa méthode de démonstration appelée « descente infinie ».

Le cas $n = 4$ est le cas du dernier théorème de Fermat le plus facile à démontrer. La preuve utilise de manière astucieuse une propriété des entiers positifs, appelée théorème de Diophante, du nom de son initiateur, **Diophante d'Alexandrie** (qui vécut entre 200 et 300). Le théorème donne une description précise des **triplets pythagoriciens** dits primitifs, c'est-à-dire des triplets (x, y, z) d'entiers strictement positifs, sans diviseur commun, qui vérifient l'équation de Pythagore $x^2 + y^2 = z^2$.

Théorème (Diophante). *Soient x, y, z des entiers strictement positifs sans facteur commun, et tels que $x^2 + y^2 = z^2$. Alors il existe des entiers strictement positifs $p > q$, sans facteur commun, tels que*

$$x = p^2 - q^2, \quad y = 2pq, \quad z = p^2 + q^2.$$

Nous allons utiliser ce résultat pour démontrer que l'équation

$$x^4 + y^4 = u^2$$

n'a pas de solution parmi les entiers strictement positifs. C'est un résultat plus général que le dernier théorème de Fermat pour $n = 4$, avec la substitution $u = z^2$.

Supposons que l'équation ci-dessus ait au moins une solution. Considérons la solution ayant la plus petite valeur de u . Notre première observation est que x, y et u ne peuvent pas avoir de facteur commun, puisque la division par un tel facteur produirait une nouvelle solution avec un u strictement plus petit.

Pour continuer, nous observons que l'équation peut s'écrire

$$(x^2)^2 + (y^2)^2 = u^2.$$

D'après le théorème de Diophante, nous pouvons trouver des entiers strictement positifs p et q sans facteur commun tels que

$$x^2 = p^2 - q^2, \quad y^2 = 2pq, \quad u = p^2 + q^2.$$

Une autre observation est que tout carré a un reste de 0 ou de 1 lorsqu'il est divisé par 4. La seule façon d'obtenir cela dans ce cas est que p soit impair et que q soit pair. On écrit donc $q = 2c$ et on a $y^2 = 2pq = 4pc$, ou $(\frac{y}{2})^2 = pc$. L'observation suivante est que p et c sont des carrés. En effet, puisque p et q n'ont pas de facteur commun, il en est de même pour p et c . Si $\frac{y}{2} = p_1 p_2 \cdots p_k$ est la décomposition en facteurs premiers de $y/2$, on obtient

$$pc = (\frac{y}{2})^2 = p_1^2 p_2^2 \cdots p_k^2.$$

Mais p et c n'ont pas de facteur premier commun et pour chaque p_i , soit p_i^2 est un facteur de p , soit p_i n'est pas un facteur de p . Il s'ensuit que p et c sont des carrés. En utilisant ce fait, on peut écrire $p = d^2$ et $c = f^2$. En utilisant $x^2 = p^2 - q^2 = (d^2)^2 - (2c)^2 = (d^2)^2 - (2f^2)^2$, on voit que

$$x^2 + (2f^2)^2 = (d^2)^2.$$

Il est assez simple de voir que x , $2f^2$ et d^2 n'ont pas de facteur premier commun. En utilisant à nouveau le théorème de Diophante, nous pouvons écrire

$$x = \ell^2 - m^2, \quad 2f^2 = 2\ell m, \quad d^2 = \ell^2 + m^2,$$

avec ℓ et m sans facteur commun. En utilisant la même technique que ci-dessus pour $f^2 = \ell m$, on obtient que ℓ et m sont des carrés, c'est-à-dire $\ell = r^2$ et $m = s^2$. Donc

$$r^4 + s^4 = \ell^2 + m^2 = d^2.$$

Nous avons trouvé une nouvelle solution à l'équation de départ $x^4 + y^4 = u^2$, avec $d < u$.

Notre hypothèse initiale était que u était le plus petit côté droit parmi toutes les solutions, ce qui contredit l'existence de la solution avec d comme nombre dans le côté droit. Une hypothèse qui conduit à une contradiction ne peut pas être vraie, donc nous avons démontré qu'il ne peut pas exister de solution entière strictement positive de l'équation de Fermat

$$x^4 + y^4 = u^2.$$

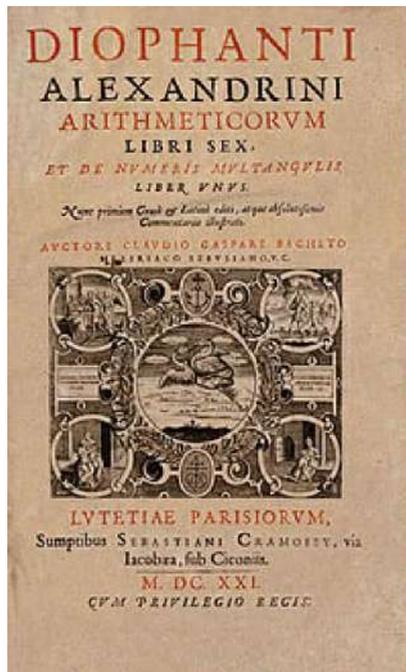


FIG. 40 – L'édition de 1621 des *Arithmétiques* de Diophante. Diophante est souvent appelé le père de l'algèbre.

HANC MARGINIS EXIGUITAS NON CAPERET
 (par Arne B. Sletsjøe)

« *Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.* »

Pierre de Fermat

(Au contraire, il est impossible de partager soit un cube en deux cubes, soit un bicarré en deux bicarrés, soit en général une puissance quelconque supérieure au carré en deux puissances de même degré : j'en ai découvert une démonstration véritablement merveilleuse que cette marge est trop étroite pour contenir.)



Fig. 41 –
Pierre de Fermat

C'est le célèbre commentaire, écrit par Pierre de Fermat vers 1637 dans sa copie du livre des *Arithmétiques* de Diophante. Fermat était un avocat français passionné de mathématiques. L'énoncé auquel il fait référence, connu sous le nom de dernier théorème de Fermat (ce n'était pas sa dernière affirmation, mais la dernière à être démontrée), est l'une des énigmes les plus durables de l'histoire, facile à formuler mais tout aussi difficile à résoudre. De nombreux éminents mathématiciens ont relevé le défi, mais pendant plus de 350 ans, toutes les tentatives pour trouver une démonstration rigoureuse de l'énoncé ont échoué. Cependant, tout cela n'a pas été vain : une grande quantité de connaissances a été créée sur les routes des nombreuses impasses et sur la seule route réussie vers la solution finale.

Très peu de gens croient que Fermat avait réellement une démonstration du théorème. On peut être à peu près certain qu'il aurait été extrêmement difficile, voire impossible, de fournir une démonstration complète de l'affirmation à l'aide des outils et des techniques mathématiques disponibles au XVII^e siècle. Même pour un brillant mathématicien comme Pierre de Fermat, la démonstration du dernier théorème de Fermat donnée par Andrew Wiles aurait été très inaccessible s'il avait eu la possibilité de la lire. Après 1637, il faudra encore des siècles avant que les concepts de courbes elliptiques et de formes modulaires n'émergent.

Aujourd'hui, le commentaire de Fermat dans la marge se formule ainsi :

L'équation $x^n + y^n = z^n$ avec $n > 2$ n'a pas de solutions entières non triviales.

Remarquons que Fermat exige que l'exposant n soit strictement supérieur à 2. Pour $n = 2$, l'affirmation est fautive, puisque l'équation $x^2 + y^2 = z^2$ a de nombreuses solutions entières non triviales, la plus célèbre étant $3^2 + 4^2 = 5^2$. Mais pourquoi cette affirmation est-elle vraie pour $n \geq 3$? Existe-t-il un lien mystérieux entre les puissances et les sommes de puissances? Ou y a-t-il tout simplement trop peu de nombres entiers?

Parmi les 10 000 premiers nombres entiers, il y a 2 691 sommes de deux carrés, 100 carrés et 42 nombres qui sont à la fois un carré et une somme de deux carrés. En revanche, il n'y a que 202 sommes de deux cubes, 21 cubes et, selon le dernier théorème de Fermat, aucun d'entre eux n'est une somme de cubes. Les deux propriétés, être une somme de cubes et être un cube lui-même, sont si rares qu'il est peu probable qu'un nombre puisse être les deux à la fois. Néanmoins, selon les travaux de Wiles, la raison du manque de concordance entre les puissances et les sommes de puissances est beaucoup plus subtile.

Dans les années 1950, deux jeunes mathématiciens japonais, Yutaka Taniyama et Goro Shimura, étudiaient certaines suites de nombres. Ils ont considéré le nombre de solutions d'un type d'équations, appelées courbes elliptiques, et les ont comparées à des expressions spécifiques d'une classe de fonctions, appelées formes modulaires. Taniyama et Shimura ont découvert que les suites de nombres étaient très similaires et ont conclu qu'il ne pouvait s'agir d'une coïncidence. Ils ont conjecturé qu'il existait un lien plus profond entre les courbes elliptiques et les formes modulaires, qui produisent deux suites de nombres identiques dans des sous-domaines mathématiques apparemment différents. Une



Yutaka Taniyama



Goro Shimura



André Weil

dizaine d'années plus tard, ces idées ont été examinées dans une publication de l'influent mathématicien français André Weil. La conjecture a été rapidement saluée comme un sujet d'actualité, sous le nom de conjecture de Taniyama-Shimura-Weil. Malgré de nombreuses tentatives pour résoudre l'énigme, personne ne parvenait à la démontrer.



Gerhard Frey



Ken Ribet

Puis, au milieu des années 1980, le mathématicien allemand Gerhard Frey a affirmé que si la conjecture de Taniyama-Shimura-Weil était vraie, le dernier théorème de Fermat en découlerait. Frey a suggéré que si le dernier théorème de Fermat était faux, alors il existerait une courbe elliptique semi-stable qui ne serait pas modulaire. Or, la conjecture de Taniyama-Shimura-Weil affirme le contraire, à savoir que toutes les courbes elliptiques sont modulaires. Ainsi, lorsque Ken Ribet a démontré quelques années plus tard l'affirmation de Frey, le seul obstacle à la démonstration du dernier théorème de Fermat était de démontrer la conjecture de Taniyama-Shimura-Weil. De nombreux experts considé-

raient qu'il s'agissait d'un défi à relever dans un avenir lointain. Mais Andrew Wiles s'est quand même penché sur le problème et, au bout de sept ans, il a trouvé une démonstration. Il a caché ses découvertes à la communauté mathématique, mais lors d'une conférence à Cambridge au cours de l'été 1993, des rumeurs ont fait état d'une sensation à venir. La tension est montée et le nombre de collègues curieux dans le public a augmenté au cours de la série de conférences que Wiles a données. Dans sa dernière conférence, il a conclu que le dernier théorème de Fermat avait enfin été démontré.

LE THÉORÈME DE MODULARITÉ (par ARNE B. SLETSJØE)

Le théorème de modularité affirme que toute courbe elliptique définie sur les nombres rationnels est modulaire. Dans cette note, nous présentons le contexte du théorème, en introduisant les deux concepts impliqués, les courbes elliptiques et les formes modulaires.

Notons \mathbb{H} la moitié supérieure du plan complexe, c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes à partie imaginaire strictement positive. Une forme modulaire de poids $2k$ pour un entier strictement positif k est une fonction holomorphe f sur \mathbb{H} , telle que pour toutes les matrices 2×2 à coefficients entiers

$$\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}),$$

on ait

$$f(\alpha z) = (cz + d)^{2k} f(z),$$

et telle que f soit holomorphe au point à l'infini, c'est-à-dire lorsque $z \rightarrow i\infty$.

L'action de la matrice α de taille 2×2 sur $z \in \mathbb{H}$ est donnée par la **transformation de Möbius**

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}.$$

En prenant $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on voit que

$$f(z + 1) = f(z),$$

c'est-à-dire que la fonction est invariante par translation. Puisque

$$e^{2\pi i(z+1)} = e^{2\pi iz + 2\pi i} = e^{2\pi iz}$$

on peut écrire f comme une fonction de $q = e^{2\pi iz}$. La condition que f soit holomorphe en $z = i\infty$ est équivalente à ce que la fonction soit holomorphe en $q = 0$. On peut donc écrire

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n q^n, \quad q = e^{2\pi iz}.$$

Une forme modulaire célèbre est le discriminant modulaire

$$\Delta(z) = q \prod_{r=1}^{+\infty} (1 - q^r)^{24}, \quad q = e^{2\pi iz}.$$

En utilisant cette forme modulaire, nous pouvons produire un autre exemple :

$$f(z) = \sqrt[12]{\Delta(z)\Delta(11z)}.$$

Le développement en série de Fourier de $f(z)$ en tant que fonction de q est donné par

$$q - 2q^2 - q^3 + 2q^4 + q^5 + 2q^6 - 2q^7 - 2q^9 - 2q^{10} + q^{11} - 2q^{12} + \dots$$

Nous reviendrons sur cette série, mais nous allons d'abord présenter l'autre concept impliqué, les courbes elliptiques.

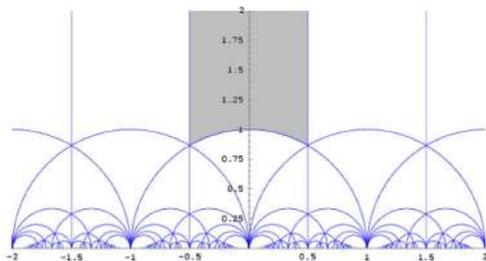


FIG. 42 – La figure illustre l'action sur le demi-plan supérieur du groupe modulaire $SL_2(\mathbb{Z})$. La zone grise est souvent appelée domaine fondamental.

Les courbes elliptiques sont une classe de courbes planes définies par des polynômes de degré trois. L'équation

$$y^2 + y = x^3 - x^2$$

est un exemple de courbe elliptique.

Nous nous intéressons au nombre de solutions entières de l'équation ci-dessus modulo un nombre premier p , c'est-à-dire que nous recherchons des solutions de l'équation parmi l'ensemble des restes $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ lorsque l'on divise par p . Par exemple, prenons $p = 11$. Alors $(x, y) = (10, 4)$ est une solution. En effet, les deux côtés de l'équation donnent le même reste lorsqu'ils sont divisés par 11 :

$$4^2 + 4 = 20 \equiv 9 \pmod{11}$$

et

$$10^3 - 10^2 = 900 \equiv 9 \pmod{11}.$$

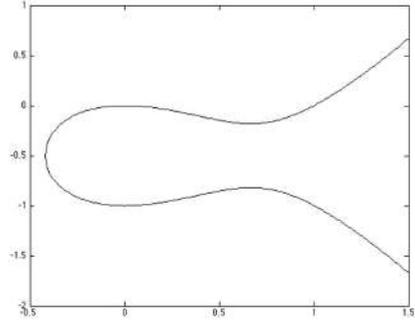


Fig. 43 – *La courbe elliptique*
 $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + y = x^3 - x^2\}$.

Soit $\#E_p$ le nombre de solutions de l'équation ci-dessus dans l'ensemble des restes \mathbb{Z}_p . Pour chaque nombre premier p , soit

$$a_p = p - \#E_p.$$

Pour $p = 2$ il y a 4 solutions de l'équation donnée, $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ et $(1, 1)$, c'est-à-dire que tous les restes possibles sont des solutions, de sorte que $a_2 = -2$. Pour $p = 3$, nous avons aussi quatre solutions : $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$, de sorte que $a_3 = -1$. Pour les nombres premiers suivants, nous avons $a_5 = 1$ et $a_7 = -2$.

p	$\#E_p$	a_p
2	4	-2
3	4	-1
5	4	1
7	9	-2
11	10	1
13	9	4
17	19	-2
19	19	0

TAB. 3 – *La suite de nombres de la dernière colonne doit être comparée aux coefficients dont l'indice est un nombre premier dans le développement en série de Fourier de la forme modulaire ${}^{12}\sqrt{\Delta(z)\Delta(11z)}$ donné précédemment.*

Le fait surprenant est que pour chaque nombre premier p , le nombre a_p pour cette courbe elliptique est égal au coefficient de Fourier de la forme modulaire $f(z) = {}^{12}\sqrt{\Delta(z)\Delta(11z)}$ donnée ci-dessus. Ce type de

phénomène a été observé pour la première fois par Taniyama et Shimura, ce qui a donné lieu à la conjecture TSW. TSW est devenu un théorème et a changé de nom pour devenir le « théorème de modularité » lorsque Wiles en a donné une démonstration. Wiles a démontré que toute courbe elliptique semi-stable est modulaire. C'est une belle façon de dire que la similitude des deux suites de nombres, les coefficients de Fourier de la forme modulaire et le nombre de solutions modulo les nombres premiers de la courbe elliptique, n'est pas une coïncidence.

La dernière pièce du puzzle que représentait le dernier théorème de Fermat a été présentée par Gerhard Frey. Il a affirmé que s'il existe une solution non triviale du dernier théorème de Fermat, alors il existe une courbe elliptique non modulaire. Cette conjecture a été étendue par Jean-Pierre Serre et démontrée plus tard par Ken Ribet.

Meyer (2017)

« pour son rôle majeur dans le développement de la théorie mathématique des **ondelettes** ».

L'analyse de Fourier fournit une manière utile de décomposer un signal ou une fonction en des parties de structure simple telle que des ondes sinusoidales. Ces parties possèdent un spectre de fréquence concentré, mais elles sont très dispersées dans l'espace. L'analyse par ondelettes offre une façon de décomposer les fonctions en différentes parties qui sont localisées à la fois en fréquence et en espace. **Yves Meyer** a été le chef de file visionnaire du développement moderne de cette théorie, au croisement des mathématiques, de l'informatique et des sciences du numérique.

L'histoire des ondelettes remonte à plus de cent ans, aux premiers travaux d'Alfred Haar. À la fin des années 1970, le sismologue **Jean Morlet** a analysé des données de réflexion obtenues dans le cadre de la prospection pétrolière. De manière empirique, il a introduit une nouvelle catégorie de fonctions, maintenant appelées « ondelettes », obtenues à la fois par la contraction et la translation d'une fonction fixe.

Au printemps 1985, Yves Meyer a reconnu que la formule de reconstruction trouvée par Morlet et **Alex Grossmann** était une identité préalablement découverte par **Alberto Calderón**. À cette époque, Meyer était déjà une figure de premier plan dans la théorie de Calderón-**Zygmund** pour les **opérateurs intégraux** singuliers. C'est ainsi que l'étude par Meyer des ondelettes commença. Elle s'est développée en moins de dix ans pour devenir une théorie cohérente et largement applicable.

La première contribution cruciale de Meyer a été la construction d'une **base orthonormée** d'ondelettes régulières. On avait douté qu'une telle base pût exister. Comme dans la construction de Morlet, toutes les fonctions dans la base de Meyer proviennent de la translation et de la contraction d'une seule « ondelette-mère » régulière, qui peut être spécifiée de manière tout à fait explicite. Bien que cette construction soit en réalité élémentaire, elle apparaît comme plutôt miraculeuse.

Stéphane Mallat et Yves Meyer ont alors développé de manière systématique l'analyse **multirésolution**, un cadre flexible et général pour

construire des bases d'ondelettes, qui plaçait beaucoup des constructions antérieures sur une base plus conceptuelle. Grosso modo, l'analyse multirésolution permet d'associer explicitement une base orthonormée d'ondelettes à toute suite bi-infinie de **sous-espaces** de $L^2(\mathbb{R})$ avec quelques propriétés d'invariance. Ce travail a ouvert la voie à la construction de bases orthonormées d'ondelettes à **support compact** par **Daubechies (Ingrid)**.

Durant les décennies suivantes, l'analyse par ondelettes a été utilisée dans des domaines très différents tels que l'analyse harmonique appliquée et numérique, la compression de données, le débruitage, l'imagerie médicale, l'archivage, le cinéma numérique, la **déconvolution** des images du télescope spatial Hubble, et la récente détection par l'observatoire LIGO d'ondes gravitationnelles créées par la collision de deux trous noirs.

Yves Meyer a également contribué de manière fondamentale à résoudre des problèmes de théorie des nombres, d'analyse harmonique et d'équations aux dérivées partielles, sur des sujets tels que les **quasi-cristaux**, les opérateurs intégraux singuliers et les équations de Navier-Stokes. Le couronnement de son travail avant les ondelettes a été sa démonstration avec **Ronald Coifman** et **Alan McIntosh** de la continuité sur l'espace L^2 de l'opérateur de Cauchy pour les courbes **lip-schitziennes**, résolvant ainsi une question ouverte majeure dans le programme de Calderón. Les méthodes développées par Meyer ont eu un impact durable à la fois sur l'analyse harmonique et sur les équations aux dérivées partielles. De plus, c'est l'expertise de Meyer sur les mathématiques de l'école de Calderón-Zygmund qui a ouvert la voie au développement de la théorie des ondelettes, offrant un lien remarquable entre un problème purement mathématique et une théorie ayant de larges applications dans le monde réel.

Yves Meyer, professeur émérite à l'École normale supérieure de Paris-Saclay en France, apporte la preuve que, contrairement à ce que F. Scott Fitzgerald a dit au sujet des vies américaines, une vie dans les mathématiques peut vraiment avoir un deuxième acte, et peut-être même plusieurs autres. Après avoir apporté des contributions importantes dans le domaine de la théorie des nombres au début de sa carrière, l'énergie et la curiosité sans bornes de Meyer l'ont amené à travailler sur des méthodes visant à décomposer des objets mathématiques complexes en composantes ondulatoires simples, un sujet appelé « analyse harmonique ». Cela l'a ensuite conduit à contribuer à élaborer

une théorie sur l'analyse des signaux complexes, avec des conséquences importantes pour les technologies de l'information et de la communication. Puis il est passé à autre chose pour résoudre des problèmes fondamentaux dans le domaine des mathématiques de l'écoulement des fluides.

Cette tendance à traverser les frontières l'a accompagné dès le début de sa vie. Né le 19 juillet 1939 avec la nationalité française, il a grandi à Tunis sur la côte nord-africaine. « Le Tunis de mon enfance était un creuset où les gens de toute la Méditerranée avaient trouvé un sanctuaire », a-t-il déclaré dans un entretien en 2011. « Enfant, j'étais obsédé par le désir d'enjamber les frontières entre ces groupes ethniques distincts. »

Meyer est entré à la prestigieuse École normale supérieure de la rue d'Ulm à Paris en 1957, avec la première place au concours. « Si vous entrez à l'ENS-Ulm, vous savez que vous abandonnez vos aspirations pour l'argent et le pouvoir », dira-t-il plus tard. « C'est un choix de vie. Votre vie sera consacrée à l'acquisition et à la transmission de savoir. »

Après la fin de ses études, Meyer a effectué son service militaire comme professeur dans une école militaire. Mais en dépit de son profond dévouement envers l'enseignement et ses élèves, il n'était pas adapté à ce rôle. « Un bon professeur a besoin d'être beaucoup plus méthodique et organisé que ce que j'étais », admet-il. De plus, il était mal à l'aise d'être celui qui a « toujours raison ». « Faire de la recherche », dit Meyer, « c'est être ignorant la plupart du temps et faire souvent des erreurs ». Néanmoins, il sent que son expérience d'enseignant dans un lycée a façonné sa vie : « J'ai compris que j'étais plus heureux en partageant qu'en possédant. »

Il a rejoint l'université de Strasbourg en tant que maître de conférences. En 1966, il y a obtenu un doctorat, officiellement sous la responsabilité de [Jean-Pierre Kahane](#), mais Meyer témoigne que comme d'autres en France à cette époque il se dirigeait principalement ... lui-même. Il est devenu professeur de mathématiques, d'abord à l'université Paris-Sud (selon le nom actuel), puis à l'École polytechnique et à l'université Paris-Dauphine. En 1995, il a rejoint l'ENS Cachan (renommée récemment ENS Paris-Saclay), où il a travaillé au Centre de mathématiques et de leurs applications (CMLA) jusqu'à son départ formel à la retraite en 2008. Cependant, il est toujours membre associé du centre de recherche.

Recherche de structure

Le travail d'Yves Meyer concerne en termes généraux la compréhension des fonctions mathématiques aux formes complexes et changeantes, un caractère qui peut être décrit par ce qu'on appelle des équations aux dérivées partielles. L'écoulement d'un fluide est par exemple décrit par un ensemble d'équations de ce type, appelées équations de Navier-Stokes. Au cours des années 1990, Meyer a aidé à élucider des solutions particulières pour celles-ci, un thème qui figure parmi l'un des plus grands défis en mathématiques.

L'intérêt de Meyer pour ce qui pourrait être appelé les structures et régularités d'objets mathématiques complexes l'a conduit dans les années 1960 à une théorie des « modèles réguliers », un moyen de décrire des ensembles d'objets pour lesquels la parfaite régularité et la symétrie des réseaux cristallins manquaient. Ce travail, qui est né de la théorie des nombres, a engendré la théorie sous-jacente aux matériaux appelés quasi-cristaux, d'abord identifiés dans les alliages de métaux en 1982 mais préfigurés par les pavages quasipériodiques identifiés par le physicien mathématicien Roger Penrose en 1974. La découverte de quasi-cristaux par Dan Shechtman, un spécialiste de la science des matériaux, a valu à celui-ci le prix Nobel de chimie en 2011. Meyer a conservé son intérêt pour les quasi-cristaux. Avec Basarab Matei, il a contribué en 2010 à élucider leur structure mathématique.

Dans les années 1970, Meyer a apporté des contributions profondes au domaine de l'analyse harmonique qui vise à décomposer les fonctions et les signaux complexes en composantes constituées d'ondes simples. En collaboration avec Ronald Coifman et Alan McIntosh, il a résolu en 1982 un problème ancien dans ce domaine en démontrant un théorème sur une construction appelée opérateur intégral de Cauchy. Cet intérêt pour la décomposition harmonique a conduit Meyer vers la théorie des ondelettes, qui permet à des signaux complexes d'être décomposés en « atomes », avec des sortes de particules mathématiques appelées ondelettes.

La théorie des ondelettes a commencé avec notamment les travaux des lauréats du prix Nobel de physique Eugene Wigner et Dennis Gabor, ceux du géophysicien Jean Morlet et du physicien théoricien Alex Grossmann, ainsi que ceux du mathématicien Jan-Olov Strömberg. Lors d'une conversation autour de la photocopieuse à l'École polytechnique en 1984, Grossmann et Morlet ont remis à Meyer un article sur le sujet. Ce dernier a été littéralement captivé. « J'ai pris le

premier train pour Marseille, où j'ai rencontré Ingrid Daubechies, Alex Grossmann et Jean Morlet », dit-il. « C'était comme un conte de fée. J'ai ressenti que j'avais enfin trouvé mon domicile. »

Décomposer la complexité

À partir du début des années 1980, dans ce qu'il a appelé « sa deuxième vie scientifique », Meyer a rassemblé avec Daubechies et Coifman des travaux antérieurs sur les ondelettes pour constituer un tableau unifié. En particulier, Meyer a montré comment relier les ondelettes de Grossmann et de Morlet au travail du mathématicien argentin Alberto Calderón, qui avait fourni la base pour certaines des contributions les plus significatives à l'analyse harmonique étudiée par Meyer. En 1986, Meyer et Pierre-Gilles Lemarié-Rieusset ont démontré que les ondelettes pouvaient former des ensembles d'objets mathématiques mutuellement indépendants appelés « bases **orthogonales** ».

Coifman, Daubechies et Stéphane Mallat ont continué à développer des applications pour de nombreux problèmes dans le traitement du signal et des images. Dorénavant, la théorie des ondelettes est omniprésente dans beaucoup de ces technologies. L'analyse par ondelettes d'images et de sons leur permet de décomposer en fragments mathématiques qui capturent les irrégularités du motif à l'aide de fonctions mathématiques lisses qui « se comportent bien ». Cette décomposition est importante pour la compression d'images en informatique. Elle est utilisée par exemple dans le format JPEG 2000. Les ondelettes sont également utiles pour caractériser des objets aux formes très complexes, telles que ce qu'on appelle les « **multifractales** ». Meyer dit qu'elles ont suscité son intérêt pour les équations de Navier-Stokes au milieu des années 1990.

Durant les vingt dernières années, la passion de Meyer pour la structure des motifs oscillatoires l'a amené à contribuer au succès de la mission du télescope spatial Herschel. Il a travaillé sur des algorithmes pour détecter des ondes gravitationnelles cosmiques. La contribution de Meyer au traitement d'images est également vaste. En 2001, il a proposé une théorie mathématique afin de décomposer toute image en un « croquis » et une « texture ». Cet algorithme « croquis plus texture » est dorénavant utilisé couramment dans les enquêtes criminelles pour extraire les empreintes digitales d'un milieu complexe.

De cette façon, les travaux de Meyer ont une pertinence qui s'étend de domaines théoriques des mathématiques tels que l'analyse harmo-

nique à l'élaboration d'outils pratiques en informatique et dans les sciences de l'information. Par conséquent, il est l'incarnation parfaite du fait que travailler en mathématiques pures permet souvent de découvrir des applications utiles et importantes dans le monde réel.

Un nomade intellectuel

Meyer est membre de l'Académie des sciences et membre honoraire de l'Académie nationale des sciences des États-Unis. Il a reçu le **prix Salem** (1970) et le **prix Gauss** (2010), ce dernier décerné conjointement par l'Union mathématique internationale et la **Société allemande de mathématiques** pour les avancées en mathématiques qui ont eu un impact en dehors du domaine mathématique. La diversité de son travail, qui est illustrée dans la grande variété des applications, reflète sa conviction que la vitalité intellectuelle se maintient en faisant constamment face à de nouveaux défis. On lui a attribué le propos : « lorsqu'on devient trop expert dans un domaine, alors on doit l'abandonner ». Il est cependant soucieux de ne pas passer ici pour une personne arrogante. « Je ne suis pas plus intelligent que mes collègues les plus stables », dit-il. Simplement, « J'ai toujours été un nomade », sur le plan intellectuel et sur le plan institutionnel.

Certains estiment que Meyer n'a pas encore reçu la reconnaissance que ses réalisations majeures justifient pourtant, peut-être parce qu'il a fait preuve d'un si grand désintéressement en faisant la promotion de la carrière des autres et en se consacrant à l'enseignement des mathématiques ainsi qu'à la recherche. « Les progrès dans les mathématiques sont une entreprise éminemment collective », a-t-il dit. « Nous avons besoin de tout le monde. »

Il a inspiré toute une génération de mathématiciens qui ont continué à faire des contributions importantes par eux-mêmes. Son collaborateur sur la théorie des ondelettes, Stéphane Mallat, l'appelle un « visionnaire » dont le travail ne peut être étiqueté ni comme des mathématiques pures ou appliquées, ni comme de l'informatique, mais simplement comme « incroyable ». Ses étudiants et collègues parlent de son insatiable curiosité, de son énergie, de sa générosité et de son ouverture à d'autres domaines. « Pour pratiquer quelque chose d'aussi difficile que la recherche en mathématiques, il est nécessaire de puiser au plus profond de soi-même », témoigne Meyer. « Vous devez croire que vous possédez un trésor caché dans les profondeurs de votre esprit, un trésor qui doit être dévoilé. »

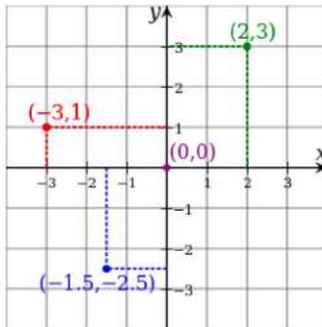
Bibliographie

- ALLOUCHE (Jean-Paul), « Yves Meyer et la théorie des nombres », *Gazette des mathématiciens*, 2011, n° 128, p. 34-38.
- GUIHÉNEUF (Pierre-Antoine), « Yves Meyer et les quasi-cristaux », *Images des mathématiques*, 2017.
- JAFFARD (Stéphane), « Remise du prix Abel 2017 à Yves Meyer », *Images des mathématiques*, 2017.
- JAFFARD (Stéphane), « Yves Meyer, prix Abel 2017 », *Gazette des mathématiciens*, 2017, n° 153, p. 20-26.
- MEYER (Yves), *Nombres de Pisot, nombres de Salem et analyse harmonique*, Berlin, Springer, 1970.
- MEYER (Yves), *Ondelettes et opérateurs, t. I, Ondelettes*, Paris, Hermann, 1989.
- MEYER (Yves), *Ondelettes et opérateurs, t. II, Opérateurs de Calderón-Zygmund*, Paris, Hermann, 1990.
- MEYER (Yves) et COIFMAN (R. R.), *Ondelettes et opérateurs, t. III, Opérateurs multilinéaires*, Paris, Hermann, 1991.
- MEYER (Yves), *Ondelettes et algorithmes concurrents*, Paris, Hermann, 1992.
- MEYER (Yves), *Les Ondelettes : algorithmes et applications*, 2^e éd., Paris, Armand Colin, 1993.
- MEYER (Yves), « Pourquoi Lebesgue essayait de mesurer les surfaces, et n'y arrivait pas », *Un texte, un mathématicien*, 2006.
- MEYER (Yves), « Le rôle de l'analyse temps-fréquence dans la détection des ondes gravitationnelles », École normale supérieure, 2017.
- PAJOT (Hervé), « Yves Meyer et l'opérateur de Cauchy », *Gazette des mathématiciens*, 2011, n° 128, p. 15-33.

LES SYSTÈMES DE FONCTIONS ORTHOGONALES (par ARNE B. SLETSJØE)

Les systèmes de fonctions orthogonales jouent un rôle important dans de nombreux domaines des mathématiques. L'idée de base est d'essayer de trouver un nombre limité de « fonctions de base », qui peuvent servir d'éléments de construction pour toutes les autres fonctions. Les fonctions de base doivent présenter certaines propriétés intéressantes, afin de simplifier la construction.

Il y a environ quatre cents ans, le philosophe et mathématicien **René Descartes** a introduit le concept de système de **coordonnées cartésiennes**, qui permet de décrire simplement la position d'un point. Ce dont nous avons besoin, c'est d'un système de référence. Le système de référence est déterminé par trois caractéristiques essentielles : la position de l'origine, la direction des axes et une échelle. En outre, les axes doivent être mutuellement orthogonaux. Dans ce système, les coordonnées d'un point sont uniques et faciles à calculer.



Cette idée simple peut être généralisée à des applications plus abstraites. Les points dans l'espace sont remplacés par des fonctions. Les axes de coordonnées sont remplacés par certaines fonctions de base et le **produit scalaire** qui détermine les coordonnées est remplacé par un produit scalaire plus général. De même que la coordonnée d'un point est interprétée comme la composante du point dans une direction donnée, la coordonnée d'une fonction le long d'une fonction de base détermine la « composante » de la fonction dans cette direction. Si les fonctions de base sont orthogonales, c'est-à-dire que leurs produits scalaires mutuels sont nuls, le système de fonctions de base est appelé « système de fonctions orthogonales ». Si en outre les fonctions de base sont normalisées,

c'est-à-dire que le produit scalaire d'une fonction avec elle-même est égal à 1, on dit que le système est orthonormé.

La notation habituelle pour un produit scalaire de deux fonctions f et g est $\langle f, g \rangle$. Un produit scalaire possède de nombreuses propriétés intéressantes. Une propriété importante est que le produit scalaire d'une fonction avec elle-même est positif. Une autre propriété est qu'il n'existe qu'une seule fonction dont le produit scalaire avec elle-même est nul : la fonction constante 0. Il existe de nombreux exemples de systèmes de fonctions orthogonales. Le plus célèbre est le système trigonométrique de Fourier, dont les fonctions de base sont les fonctions trigonométriques $\sin nx$ et $\cos nx$ avec $n = 1, 2, \dots$. Dans ce cadre, nous définissons le produit scalaire de deux fonctions f et g par

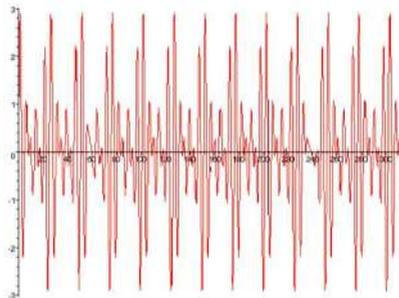
$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t) dt.$$

Par exemple, on a

$$\langle \sin nx, \cos mx \rangle = 0$$

si m et n sont des entiers. De plus, des résultats similaires sont valables quelles que soient les fonctions trigonométriques choisies, tant qu'elles ne coïncident pas.

Une application importante des fonctions trigonométriques consiste à les interpréter comme des ondes sonores de différentes fréquences.



La figure montre une illustration d'un accord majeur à trois tons. Cette fonction d'onde peut être « testée » par rapport à des ondes sinusoïdales pures de différentes fréquences. Par ce test, nous entendons que nous calculons le produit scalaire de cette fonction d'onde avec les fonctions de base $\sin nx$. Les fonctions de base sont mutuellement orthogonales, et le produit scalaire est donc nul sauf lorsque nous « touchons »

précisément l'une des fonctions sinusoïdales qui constituent l'accord à trois tons. On obtient ainsi une procédure (théorique) de décomposition du son en ses ingrédients de base. Certaines personnes douées sont capables de le faire en pratique, comme en témoigne l'anecdote du jeune Mozart de 14 ans qui a écrit la partition du *Miserere* d'Allegri après l'avoir écouté une seule fois au cours de l'office du mercredi au Vatican.

Ce que nous souhaitons vraiment dans un système de fonctions orthogonales, c'est qu'il soit complet. Supposons que nous ayons un système de fonctions orthogonales $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots$, dont nous pouvons supposer qu'il est orthonormé en divisant simplement chaque fonction par le produit scalaire de la fonction par elle-même. Nous aimerions décomposer une fonction arbitraire f par rapport à ce système. Nous calculons les coefficients des composantes

$$\langle f, \phi_j \rangle$$

et les assemblons pour obtenir une nouvelle fonction

$$\bar{f} = \sum_j \langle f, \phi_j \rangle \phi_j.$$

En raison de l'orthonormalité du système, cette fonction aura comme propriété que

$$\overline{\bar{f}} = \bar{f}.$$

La question est de savoir si nous avons $\bar{f} = f$. Si c'est (presque) vrai, nous disons que le système de fonctions est complet. Ce n'est pas toujours le cas, mais si c'est le cas, nous pouvons en déduire des résultats importants sur le système.

Dans ce cas, les fonctions de base s'interprètent comme des ondes stationnaires de fréquences variables. Le système se comporte donc bien pour la décomposition de fonctions de forme similaire aux fonctions de base. Pour d'autres fonctions, moins régulières et avec des changements brusques, les fonctions de base trigonométriques ne sont pas aussi bien adaptées à la décomposition. Supposons que la fonction décrive d'une manière ou d'une autre la numérisation d'une photographie. Les parties de l'image qui sont plutôt homogènes, par exemple le ciel, peuvent être considérées comme stationnaires. Mais les contours et les contrastes se comporteront de manière très instationnaire.

Un outil permettant de traiter ces changements rapides consiste à modifier les fonctions de base trigonométriques de Fourier à l'aide d'une certaine technique de fenêtre, c'est-à-dire que nous ne prenons en



compte qu'une petite partie d'une oscillation harmonique. Pour pouvoir détecter des changements soudains dans un signal ou dans la fonction décrite, nous avons besoin d'une fenêtre étroite. Plus la fenêtre est étroite, plus nous pouvons localiser le changement avec précision. En conséquence, ce que nous « voyons » à travers la fenêtre peut ne pas être suffisant pour déterminer la fréquence. Si nous réduisons la fenêtre à un seul point, nous pouvons bien sûr déterminer exactement le moment du changement, mais nous ne pouvons pas déterminer la fréquence, puisqu'une seule valeur ne suffit pas pour déterminer une fonction. Pour obtenir un bon résultat, nous devons faire varier la largeur de la fenêtre et pas seulement les fréquences, ce qui rend la procédure plutôt compliquée et inefficace.

La théorie moderne des ondelettes, introduite par Jean Morlet et développée en une théorie mathématique robuste par Yves Meyer, traite mieux ces problèmes.

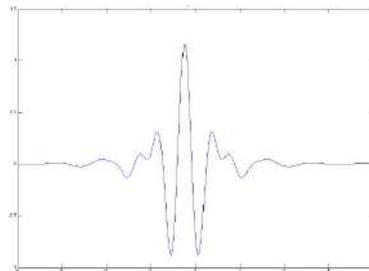
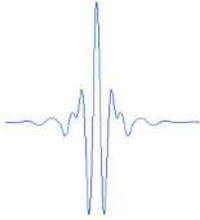


Fig. 44 – *L'ondelette de Meyer*

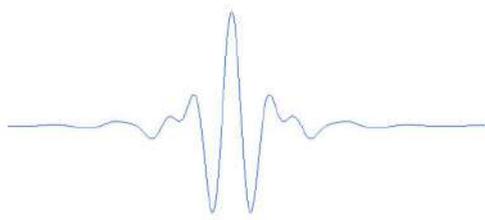
La base de la théorie est une « ondelette mère ». Cette fonction est utilisée pour créer un système de fonctions orthogonales. Ainsi, les fonctions de base ont toutes la même forme. L'ondelette mère peut être une partie mise à l'échelle d'une certaine onde, comme dans l'ondelette de Meyer. En fait, ondelette signifie « petite onde ». Si nous voulons

augmenter la largeur de l'ondelette, il suffit d'étirer le graphique. En conservant la forme, l'augmentation de la largeur entraînera une diminution de la fréquence et vice versa.

Les fonctions de base trigonométriques mises à l'échelle de la fenêtre sont bien adaptées au traitement des signaux non stationnaires avec des changements soudains. Et par chance, elles forment un système de fonctions orthogonales.



*L'ondelette de Meyer,
avec une largeur réduite.*



*L'ondelette de Meyer,
avec une largeur accrue.*

Lorsque Meyer a établi sa théorie générale, le terrain était prêt pour la construction de nouvelles ondelettes, parfaitement adaptées à certaines applications. Tant que l'on utilise la méthode de l'ondelette mère, on n'a pas à se préoccuper du comportement du système de fonctions associé.

L'ŒUVRE D'YVES MEYER (par TERENCE TAO)

Dans son célèbre article de 1960 intitulé « La déraisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences naturelles », Eugene Wigner a souligné l'étrange capacité des notions et découvertes mathématiques, souvent recherchées uniquement pour leur structure et leur beauté intrinsèques, à devenir très pertinentes pour décrire le monde physique. Les travaux du lauréat du prix Abel en 2017, Yves Meyer, illustrent cette capacité des mathématiques pures à passer à des applications pratiques dans le monde réel.

Les **nombres de Fibonacci** 1, 1, 2, 3, 5, 8, ..., sont un exemple simple d'un objet issu des mathématiques pures qui apparaît de manière surprenante dans la nature. Les rapports $1/1, 2/1, 3/2, 5/3, 8/5, \dots$, des nombres de Fibonacci consécutifs convergent extrêmement rapidement vers le célèbre **nombre d'or** $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\ 03\dots$. Ce nombre est particulier à bien des égards. Les puissances $\phi, \phi^2, \phi^3, \dots$, du nombre d'or sont étonnamment proches des entiers : par exemple, $\phi^{11} \approx 199,005$ est exceptionnellement proche de 199. Les premiers travaux de Meyer se sont concentrés sur une classe de nombres (qui comprend le nombre d'or) ayant cette propriété, connus sous le nom de **nombres de Pisot**. Il a découvert que l'on pouvait utiliser ces nombres de Pisot pour créer des ensembles de points (aujourd'hui connus sous le nom d'ensembles de Meyer) sur une droite, un plan ou dans des dimensions supérieures, qui se comportent presque, mais pas tout à fait, comme les ensembles périodiques de points que l'on voit avec les nombres entiers sur la droite réelle ou avec les points d'une grille dans un plan cartésien. Un exemple simple de pareil ensemble serait l'ensemble des nombres, tels que $\phi + \phi^3 + \phi^4$, qui peuvent être formés en additionnant des puissances distinctes du nombre d'or ϕ . Ces ensembles de points ne sont pas parfaitement périodiques, mais présentent une propriété connue sous le nom de « quasi-périodicité » : tout motif observé dans l'ensemble se reproduira infiniment souvent, même si ce n'est pas à des intervalles parfaitement réguliers. La motivation de Meyer était de construire ces ensembles pour répondre à des questions purement théoriques dans l'étude des séries de Fourier (superpositions d'ondes sinusoïdales). Mais une décennie après les travaux de Meyer, on a découvert que les ensembles de Meyer pouvaient être utilisés pour expliquer les propriétés physiques des quasicristaux, des arrangements de molécules qui ne sont pas périodiques comme le sont les véritables cristaux, mais qui se comportent néanmoins comme des cristaux sur de nombreux points essentiels, tels que

leur figure de diffraction. La découverte physique des quasi-cristaux par Dan Schechtman a été récompensée par le prix Nobel de chimie en 2011.

L'un des premiers domaines de recherche d'Yves Meyer a été l'étude des opérateurs intégraux singuliers, certaines intégrales apparaissant dans des domaines tels que l'analyse de Fourier, l'analyse complexe et les équations aux dérivées partielles, et n'étant finies qu'en raison de compensations et d'oscillations délicates dans les expressions intégrées. L'un des outils de base utilisés pour analyser ces intégrales était la formule de représentation de Calderón, qui permettait d'exprimer une fonction arbitraire de l'espace comme une combinaison d'objets plus simples localisés dans l'espace, tout en étant lisses et quelque peu oscillants. Entre-temps, motivés par des applications en géophysique, Morlet et Grossmann ont également expérimenté l'analyse de séries de données temporelles (telles que les données sismiques) à la fois en temps et en fréquence, en mesurant la corrélation entre ces données et des ondes sinusoïdales dans des fenêtres, où la largeur de la fenêtre varie inversement avec la fréquence de l'onde. Meyer s'est rendu compte que les deux transformées étaient essentiellement identiques. Cette constatation a ensuite conduit au développement par Meyer et d'autres de la transformation par ondelettes qui permet de décomposer efficacement et facilement n'importe quel signal en objets oscillatoires localisés, aujourd'hui connus sous le nom d'ondelettes. Cette transformation présente de nombreux avantages par rapport à la transformation de Fourier plus classique (en particulier, la capacité de séparer les aspects des données avec une échelle fine des aspects avec une échelle grossière), tout en présentant moins d'inconvénients (en particulier, les informations sur les caractéristiques spatiales des données, telles que les bords ou les pics, sont beaucoup plus visibles avec la transformée en ondelettes qu'avec la transformée de Fourier). C'est ainsi qu'a commencé la « révolution des ondelettes » dans le **traitement du signal** à la fin des années 1980 et au début des années 1990, la transformation par ondelettes étant désormais couramment utilisée dans de nombreuses tâches de base du traitement du signal telles que la compression (par exemple dans le format de compression d'image JPEG2000) et le débruitage, ainsi que dans des applications plus modernes telles que la détection comprimée (reconstruction d'un signal à l'aide d'un nombre exceptionnellement faible de mesures).

L'intuition de Meyer sur l'interaction entre les composantes de basse et de haute fréquence des fonctions a conduit à de nombreuses avancées

théoriques importantes dans les domaines de l'analyse harmonique et des équations aux dérivées partielles, allant de la solution de problèmes clés ouverts tels que le caractère borné de l'opérateur intégral de Cauchy pour les courbes lipschitziennes (résolu par Coifman, McIntosh et Meyer) au développement de nouveaux outils tels que la compacité par compensation, les paraproduits et le calcul paradifférentiel qui sont désormais indispensables à la compréhension des effets non linéaires dans les équations aux dérivées partielles, en particulier pour les équations qui régissent un comportement oscillatoire tel que le mouvement des ondes dans un milieu. Par exemple, le phénomène important mais encore mal compris de la turbulence dans les fluides, dans lequel le champ de vitesse devient de plus en plus oscillatoire à petite échelle, peut être au moins partiellement expliqué en examinant comment les différents coefficients d'ondelettes du fluide interagissent les uns avec les autres, et en utilisant l'outil technique des paraproduits pour mesurer la force de ces interactions. Cela s'est avéré utile à la fois pour l'analyse théorique des équations de la dynamique des fluides, ainsi que pour les méthodes numériques utilisées pour simuler ces fluides. Les travaux et la perspicacité de Meyer n'ont pas seulement fait progresser les aspects purs et appliqués de l'analyse mathématique, ils les ont également rapprochés de manière étroite.

Langlands (2018)

« pour son programme visionnaire qui relie la théorie des représentations à la théorie des nombres ».

Le **programme de Langlands** prédit l'existence d'un réseau étroit de connexions entre les formes automorphes et les groupes de Galois.

La grande réussite de la théorie algébrique des nombres dans le premier tiers du XX^e siècle a été la théorie des corps de classes. Cette théorie est une vaste généralisation de la loi de réciprocité quadratique de Gauss. Elle offre un éventail d'outils puissants pour l'étude des problèmes régis par les groupes de Galois abéliens. Le cas non abélien s'avère être beaucoup plus difficile. Dans une lettre célèbre adressée à André Weil en 1967, Langlands a décrit un programme de grande envergure qui a révolutionné la compréhension de ce problème.

La reconnaissance par Langlands que l'on devait relier les représentations des groupes de Galois aux formes automorphes implique une idée fondamentale et inattendue, dorénavant appelée fonctorialité de Langlands. Le principe clé de la fonctorialité de Langlands est que les représentations automorphes d'un **groupe réductif** doivent être liées à des représentations galoisiennes dans un groupe dual, via des fonctions L.

Jacquet et Langlands ont été en mesure d'établir un premier cas de fonctorialité pour $GL(2)$, en utilisant la **formule des traces de Selberg**. Les travaux de Langlands sur le changement de corps de base pour les représentations de $GL(2)$ ont révélé d'autres cas de fonctorialités qui ont joué un rôle décisif dans la démonstration de Wiles de cas importants de la conjecture de Shimura-Taniyama-Weil.

Le groupe $GL(2)$ est l'exemple le plus simple d'un groupe réductif non abélien. Pour traiter le cas général, Langlands a vu la nécessité de trouver une formule des traces stable, établie depuis par Arthur. Avec la démonstration par Ngô du « lemme fondamental », conjecturé par Langlands, cela a conduit à la classification endoscopique des représentations automorphes des **groupes classiques** (en fonction de celles des groupes linéaires généraux).

La fonctorialité unifie de manière spectaculaire un certain nombre de résultats importants, y compris la modularité des courbes elliptiques

et la démonstration de la conjecture de Sato-Tate. Elle donne également du poids à de nombreuses conjectures remarquables telles que les conjectures de Ramanujan-Petersson, de **Selberg** et de **Hasse-Weil** pour les fonctions zêta.

La fonctorialité pour les groupes réductifs sur les corps de nombres demeure hors d'atteinte, mais d'importants progrès ont été effectués grâce au travail de nombreux experts parmi lesquels **Drinfeld**, **Lafforgue** et Ngô, tous lauréats de la médaille Fields et inspirés par le programme Langlands.

De nouvelles facettes de la théorie ont évolué, comme les conjectures de Langlands sur les corps locaux et les corps de fonctions, ainsi que le programme géométrique de Langlands. Les idées de Langlands ont accru le rôle des représentations automorphes dans d'autres domaines des mathématiques, bien au-delà des rêves les plus fous des premiers pionniers tels que Weyl et **Harish-Chandra**.

Notice biographique (par ALEX BELLOS)

En janvier 1967, Robert Langlands, professeur à Princeton alors âgé de trente ans, a écrit une lettre au grand mathématicien français André Weil (âgé lui de soixante ans), soulignant certaines de ses nouvelles réflexions mathématiques : « Si vous êtes prêt à lire [cette lettre] comme une pure spéculation, je vous en serais reconnaissant ; sinon, je suis sûr que vous avez une corbeille à papier à portée de main. »

La grande modestie de Langlands apparaît presque comique aujourd'hui. Sa lettre de dix-sept pages présentait une théorie qui a créé une toute nouvelle façon de penser en matière de mathématiques. Il y suggérait des liens entre deux domaines jusqu'alors considérés comme indépendants l'un de l'autre, la théorie des nombres et l'analyse harmonique.

En fait, ses idées étaient si radicales et les mécanismes qu'il a suggérés pour relier ces champs mathématiques étaient si riches que sa lettre a provoqué le lancement d'un projet, le programme de Langlands, qui a occupé des centaines des meilleurs mathématiciens du monde au cours des cinquante dernières années. Il n'existe pas d'autre projet des mathématiques modernes ayant une portée aussi large, ayant produit tant de résultats profonds et ayant mobilisé autant de personnes. Étant donné que sa profondeur et son ampleur se sont accrues, le programme de Langlands est fréquemment décrit comme une grande théorie unifiée des mathématiques.

Robert Phelan Langlands est né en 1936 à New Westminster dans la région de Vancouver au Canada. À l'âge de neuf ans, il a déménagé dans une petite ville touristique près de la frontière américaine, où ses parents avaient un magasin de matériaux de construction. Il n'avait aucune intention d'étudier à l'université jusqu'à ce qu'un professeur lui dise un jour, devant ses camarades, que ce serait trahir ses talents donnés par Dieu de s'arrêter ses études.

Langlands s'est ainsi inscrit à l'université de la Colombie-Britannique à l'âge de seize ans. Il a achevé sa licence de mathématiques en 1957 et sa maîtrise un an plus tard. Il a poursuivi ensuite ses études à l'université Yale en effectuant un doctorat, achevant sa thèse « Semi-groupes et représentations de groupes de Lie » lors de sa première année. Durant sa deuxième année, il a commencé à étudier l'œuvre du norvégien Atle Selberg, qui est devenue plus tard un élément central de ses propres recherches.

En 1960, Langlands a rejoint l'université de Princeton en tant qu'enseignant. Il y a côtoyé Selberg ainsi qu'André Weil et Harish-Chandra, qui étaient tous à l'Institut d'étude avancée. Il y a été particulièrement influencé par le travail de Harish-Chandra sur les formes automorphes. Langlands y a également appris d'autres domaines des mathématiques comme la théorie des corps de classes, un domaine vers lequel son collègue Salomon Bochner l'a poussé en l'encourageant à assurer un cours sur ce sujet. En 1962, Langlands est devenu membre du département de mathématiques de l'Institut.

Durant les vacances de Noël de 1966, Langlands a eu l'idée de base de la « fonctorialité », un mécanisme servant à relier les idées de la théorie des nombres à celles des formes automorphes. Il est tombé sur Weil dans un couloir au début janvier 1967 et a commencé à lui expliquer sa découverte. Weil lui a suggéré alors de détailler ses réflexions dans une lettre.

Langlands s'est donc empressé de rédiger une lettre à la main. Weil l'a alors fait dactylographier pour la diffuser ensuite largement parmi les mathématiciens. Au cours des quelques années qui ont suivi, la lettre a fourni à ces mathématiciens un certain nombre de problèmes nouveaux, profonds et intéressants. À mesure que de plus en plus de personnes rejoignaient le projet pour démontrer ces conjectures, cette entreprise a commencé à être connue sous le nom de programme de Langlands.

« Il y avait des points intéressants qui étaient corrects et me surprennent encore aujourd'hui », a déclaré plus tard Langlands à propos de cette lettre. « Il existait des preuves que ces fonctions L étaient

bonnes, mais on était loin d'être sûr qu'elles auraient ces conséquences pour la théorie algébrique des nombres. »

Langlands a passé l'année 1967-1968 à l'université technique du Moyen-Orient à Ankara. Il parle ainsi couramment le turc. Apprenant avec enthousiasme les langues, il maîtrise également l'allemand et le russe. Langlands est retourné à Yale où il a développé ses idées jumelles de fonctorialité et de réciprocité puis les a publiées sous le titre « Problèmes dans la théorie des formes automorphes » (1970). En 1972, il est revenu à Princeton en tant que professeur à l'Institut d'étude avancée, où il est resté depuis.

Au cours des années 1970, Langlands a continué à travailler sur des idées au sein de son programme. Au milieu des années 1980, il a dirigé son attention sur la **percolation** et l'invariance conforme, ainsi que sur les problèmes de la physique théorique. Au cours des dernières années, il a replongé dans les idées dont il avait été un pionnier, comme celle d'« endoscopie ».

Au cours de sa carrière, Langlands a remporté de nombreux prix, y compris le premier prix de mathématiques à être décerné par l'Académie nationale des sciences des États-Unis en 1988 pour « son extraordinaire vision ». En 1996, il a partagé le prix Wolf avec Andrew Wiles pour « leur travail ayant ouvert la voie ». Parmi ses autres prix, on peut citer le prix Steele 2005 de la Société américaine de mathématiques, le prix Nemmers 2006 en mathématiques et le prix Shaw 2007 en sciences mathématiques (partagé avec Richard Taylor).

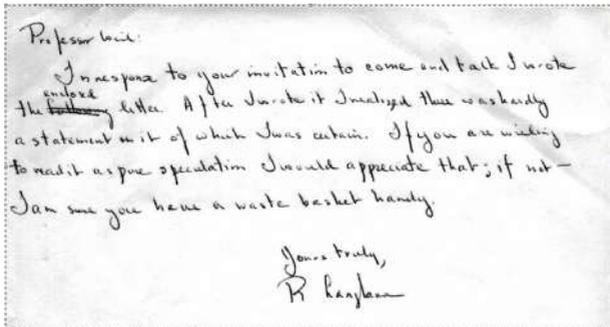
Alors qu'il était à l'université de la Colombie-Britannique, il s'est marié à l'âge de dix-neuf ans avec Charlotte-Lorraine Cheverie et ils ont depuis eu quatre enfants ainsi que plusieurs petits-enfants.

Aujourd'hui âgé de 81 ans, il continue à travailler à l'Institut d'étude avancée, où il est dorénavant professeur émérite et occupe le bureau jadis utilisé par Albert Einstein.

Bibliographie

- LANGLANDS (R. P.), *Les débuts d'une formule des traces stable*, Université Paris VII.

DIX-SEPT PAGES MANUSCRITES QUI ONT FAÇONNÉ TOUT UN PAN DE LA RECHERCHE MATHÉMATIQUE (par ARNE B. SLETS-JØE)



« En réponse à votre invitation à venir discuter, j'ai écrit la lettre ci-jointe. Après l'avoir écrite, je me suis rendu compte qu'il n'y avait pratiquement aucune affirmation dont j'étais certain. Si vous êtes prêt à la lire comme une pure spéculation, je vous en serais reconnaissant ; sinon, je suis sûr que vous avez une corbeille à papier à portée de main. »

Il s'agit du texte de la page de couverture de la lettre manuscrite de dix-sept pages que Robert P. Langlands a adressée à André Weil en janvier 1967. Weil, alors âgé d'une soixantaine d'années, était l'un des mathématiciens les plus influents du xx^e siècle, en particulier dans les domaines de la géométrie algébrique et de la théorie des nombres. Robert Langlands avait trente ans de moins. C'était un mathématicien prometteur, mais n'en était qu'au début de sa carrière. Weil n'a pas répondu à la lettre, mais il l'a fait dactylographier. Cette version dactylographiée a largement circulé parmi les mathématiciens. Le contenu de la lettre sera bientôt connu sous le nom de « conjectures de Langlands ».

Un résultat célèbre de la théorie des nombres stipule qu'un nombre premier impair p peut s'écrire comme la **somme de deux carrés** si et seulement si le nombre premier a un reste égal à 1 lorsqu'il est divisé par 4. En termes mathématiques, cela revient à dire que p est **congru** à 1 modulo 4. Ce résultat a été formulé par Fermat dès 1640 et démontré par Euler cent ans plus tard. Les entiers 5, 13, 17 et 29 sont les

premiers nombres premiers congruents à 1 modulo 4. Les décompositions correspondantes en une somme de deux carrés sont $5 = 1^2 + 2^2$, $13 = 2^2 + 3^2$, $17 = 1^2 + 4^2$ et $29 = 2^2 + 5^2$. En revanche, il n'y a aucune façon d'écrire 3, 7, 11 ou 19 comme des sommes de deux carrés, puisque leur reste est 3 lorsqu'on les divise par 4. Ce résultat est un exemple de loi de réciprocité, car il exprime une propriété arithmétique subtile d'un nombre premier p , dans ce cas la représentation comme somme de deux carrés, avec une condition de congruence sur p .

La représentation d'un nombre premier p sous la forme d'une somme de deux carrés est équivalente à une factorisation de p avec des **entiers de Gauss**. Un entier de Gauss est un nombre complexe dont les parties réelle et imaginaire sont toutes deux entières. Le nombre premier p se factorise comme un entier de Gauss si et seulement s'il existe des entiers m et n tels que

$$p = (m + in)(m - in).$$

Ici i représente le nombre imaginaire, avec la propriété fondamentale $i^2 = -1$. Un calcul simple montre que l'existence d'une telle division est équivalente à $p = m^2 + n^2$, c'est-à-dire que p est une somme de deux carrés.

La décomposition d'un nombre premier p en entiers de Gauss est étroitement liée à ce que l'on appelle la théorie de Galois des nombres rationnels de Gauss. L'ensemble des rationnels de Gauss est la contrepartie rationnelle des entiers de Gauss, c'est-à-dire des nombres complexes dont les parties réelle et imaginaire sont toutes deux des nombres rationnels. Pour tout nombre premier p , il existe un élément particulier dans ce que l'on appelle le groupe de Galois des nombres rationnels de Gauss, l'**automorphisme** de Frobenius, dont l'ordre est crucial pour décider si p peut être représenté comme une somme de deux carrés. L'ordre d'un automorphisme est le plus petit nombre m tel que la m -ième itération de l'automorphisme soit l'identité. L'automorphisme de Frobenius est donné en élevant un nombre à sa puissance p . La puissance p -ième du nombre imaginaire i pour un nombre premier impair p est soit i , soit $-i$, selon que le reste de p dans la division par 4 est 1 ou 3. L'automorphisme de Frobenius permet donc de faire le lien entre la propriété arithmétique et la propriété de congruence du nombre premier p .

Le contenu de la lettre de Langlands à Weil suggère une généralisation de grande envergure du résultat sur les représentations des nombres premiers en tant que sommes de deux carrés. Il cherche à relier les groupes de Galois dans la théorie algébrique des nombres aux formes

automorphes et à la théorie des représentations des groupes algébriques sur les **corps locaux** et les **adèles**.

Une tâche importante en théorie des nombres est de trouver des solutions entières à des équations avec des coefficients entiers. Il est assez évident que s'il existe une solution entière, l'équation peut également être résolue modulo toute puissance p^k d'un nombre premier p , la solution étant le reste de la solution entière modulo p^k . En 1897, **Kurt Hensel** a reformulé cet énoncé en introduisant ce que l'on appelle les nombres p -adiques, qui réduisent l'ensemble des énoncés pour toutes les puissances de p à un seul énoncé sur les nombres p -adiques. L'ensemble des nombres p -adiques est un exemple de corps local. Un théorème célèbre, formulé par Hermann Minkowski et plus tard généralisé par **Helmut Hasse**, donne une réponse positive à la réciproque de l'énoncé, appelée **principe local-global** : l'existence d'une solution à une équation dans l'ensemble des nombres p -adiques garantit-elle l'existence d'une solution entière ? Le **théorème de Hasse-Minkowski** nous dit que c'est vrai pour une équation quadratique. Mais ce n'est pas un fait général. Un contre-exemple célèbre est l'équation de Fermat $x^n + y^n = z^n$, pour $n \geq 3$, dont Andrew Wiles, lauréat du prix Abel, a démontré en 1995 qu'elle n'avait pas de solutions entières. Mais on savait déjà en 1909 que l'équation avait des solutions dans les nombres p -adiques pour tout nombre premier p .

Bien que le principe local-global ne soit pas valable en général, les nombres p -adiques jouent un rôle important dans la théorie des nombres. Un rôle encore plus important est joué par la collection de tous les nombres p -adiques avec les nombres réels, encodés dans un objet algébrique appelé « adèles ».

Début janvier 1967, Langlands et Weil se sont rencontrés par hasard dans un couloir de l'Institut pour l'analyse de la défense à Princeton, tous deux étant arrivés en avance pour assister à une conférence de **Shiing-Shen Chern**. Ne sachant pas trop comment entamer la conversation, Langlands a commencé à décrire ses réflexions sur les liens entre la théorie des nombres et les formes automorphes. Weil, utilisant « un stratagème bien connu pour échapper poliment aux importuns » (selon les propres termes de Langlands), a suggéré que le jeune collègue lui envoie une lettre décrivant ses réflexions.

Les formes automorphes ont été introduites par Henri Poincaré dans les années 1880 dans le cadre de sa thèse de doctorat. Dans une première approche, on peut considérer une forme automorphe comme une fonction de la moitié supérieure du plan complexe soumise à une cer-

taine périodicité. Dans le travail visionnaire de Langlands, il utilise une définition étendue d'une forme automorphe comme une certaine représentation des adèles, toujours soumise à une certaine périodicité.

Rappelons que la correspondance de Langlands cherche à relier les groupes de Galois de la théorie algébrique des nombres aux formes automorphes et à la théorie des représentations des groupes algébriques sur les corps locaux et les adèles. Rappelons également que Langlands indique un programme de recherche et pas nécessairement une liste de théorèmes démontrés.

L'exemple le plus célèbre de cette correspondance est le théorème de modularité, pour lequel Andrew Wiles a reçu le prix Abel en 2016. La conjecture de Taniyama-Shimura-Weil prédit un lien étroit entre le nombre de solutions à un type d'équations, appelées courbes elliptiques, et un type particulier de formes automorphes, appelées formes modulaires. Dans cet exemple, la théorie des représentations du groupe de Galois d'une extension maximale des nombres rationnels produit une suite de nombres qui codent le nombre de solutions d'une courbe elliptique modulo divers nombres premiers p . La correspondance de Langlands relie cette suite à une suite de nombres caractérisant une forme automorphe sur les adèles. Ainsi, la conjecture de Taniyama-Shimura-Weil, et par conséquent le dernier théorème de Fermat, découle d'un cas particulier de la correspondance de Langlands.

Ce n'est qu'un exemple de la manière dont les idées de Langlands ont influencé différents domaines des mathématiques. Il n'est pas exagéré de dire que ses dix-sept pages manuscrites ont façonné tout un pan de la recherche mathématique.

DE LA RÉCIPROCITÉ QUADRATIQUE AU PROGRAMME DE LANGLANDS (par ARNE B. SLETSJØE)

L'une des principales tâches des mathématiques consiste à résoudre des équations. Les premières sources, comme le **papyrus Rhind**, écrit vers 1650 avant notre ère par le scribe **Ahmès**, contiennent des méthodes pour résoudre les **équations linéaires**. Les nombres rationnels et les nombres complexes ont été créés pour résoudre certaines équations. Aujourd'hui encore, les équations et leurs solutions dans divers systèmes de nombres continuent d'être une excellente source de nouvelles connaissances, en mathématiques comme dans d'autres disciplines scientifiques.

Les mathématiciens s'intéressent particulièrement à la recherche de solutions entières d'équations. Ce problème est étroitement lié aux nombreuses tentatives de compréhension de l'objet mathématique le plus fondamental, les entiers naturels $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. La structure additive des nombres naturels est facilement accessible : tout entier strictement positif s'obtient à partir de 1 par des additions répétées. La structure multiplicative est plus subtile. Les nombres premiers 2, 3, 5, 7, ..., qui constituent la base multiplicative des nombres naturels, cachent encore beaucoup de secrets. Par exemple, comment décider efficacement si un nombre donné est un nombre premier ou pas ?

Une première tentative pour décider si une équation polynomiale $P(x_1, \dots, x_n) = 0$ a une solution entière consiste à réduire le problème modulo m , c'est-à-dire à rechercher des solutions dans l'anneau $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ pour divers entiers positifs m . En utilisant le théorème du reste chinois, ceci est équivalent au problème de trouver des solutions modulo les puissances p^k , où p est un nombre premier et $k \geq 1$. La résolution de la congruence (c'est le terme technique pour une équation lorsque l'on travaille modulo un entier)

$$P(x_1, \dots, x_n) \equiv 0 \pmod{p^k}$$

est appelée un « problème local », car nous nous concentrons sur un seul nombre premier (une seule « place ») $p \in \mathbb{Z}$ à la fois. La contrepartie est un « problème global », dans lequel nous résolvons l'équation sur l'ensemble des entiers relatifs \mathbb{Z} .

Kurt Hensel (1861-1941) a reformulé le problème local en 1897 en introduisant les entiers p -adiques :

$$\hat{\mathbb{Z}}_p = \varprojlim_k \mathbb{Z}/p^k \mathbb{Z},$$

une construction qui englobe toutes les puissances p^k , pour $k \geq 1$. La reformulation de Hensel dit que résoudre l'équation pour tout entier m est équivalent à résoudre l'équation dans les entiers p -adiques pour tous les nombres premiers p . En plus des solutions sur les nombres premiers, l'existence d'une solution dans l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels est bien sûr une condition nécessaire pour avoir une solution dans \mathbb{Z} .

Les entiers p -adiques sont définis comme une limite projective et possèdent la topologie de « complétion » correspondante. La topologie peut être définie via la métrique p -adique :

Définition. *Pour un nombre rationnel*

$$q = \frac{p^\alpha m}{n}$$

où n et m ne sont pas divisibles par p , la *valeur absolue p -adique* de q est donnée par

$$|q|_p = p^{-\alpha}.$$

Il s'ensuit que deux entiers naturels sont p -proches (c'est-à-dire par rapport à la métrique p -adique) si leur différence est divisible par une puissance élevée de p . Ainsi, 14 et 15 ne sont pas si 2-proches puisque leur différence n'est pas divisible par une puissance positive de 2, alors que 31 et 63 avec une différence de $63 - 31 = 32 = 2^5$ sont beaucoup plus proches.

On peut localiser $\hat{\mathbb{Z}}_p$ dans l'ensemble multiplicatif des éléments non nuls pour obtenir les nombres p -adiques $\hat{\mathbb{Q}}_p$. Les nombres réels \mathbb{R} sont la complétion des nombres rationnels \mathbb{Q} par rapport à la norme ordinaire. Nous utilisons la notation $|q|_\infty$ pour cette norme. On dit que \mathbb{R} est la complétion de \mathbb{Q} au nombre premier « infini », c'est-à-dire $\hat{\mathbb{Q}}_\infty$.

Chaque $\hat{\mathbb{Q}}_p$, avec $p \leq \infty$, est appelé un « corps local », tandis que \mathbb{Q} lui-même est un corps « global ». Le théorème de Hasse-Minkowski donne un exemple concret du principe local-global : un énoncé est valide sur \mathbb{Q} si et seulement s'il est valide sur tous les corps locaux $\hat{\mathbb{Q}}_p$ pour $p \leq \infty$.

Théorème (Hasse-Minkowski). *Soit Q une forme quadratique non dégénérée. Alors*

$$Q(x_1, \dots, x_n) = 0$$

a une solution entière non triviale si et seulement si elle a une solution réelle et une solution p -adique pour tout nombre premier p .

Remarquons que le théorème de Hasse-Minkowski nous renseigne sur les polynômes quadratiques. Le résultat n'est pas vrai pour les polynômes de degré supérieur. On savait déjà en 1909 que l'équation de Fermat $x^n + y^n = z^n$ a des solutions p -adiques pour tout p . Mais comme nous le savons maintenant, il n'y a pas de solutions entières non triviales.

Un autre exemple d'équation résoluble localement, mais non globalement, a été trouvé par Ernst Selmer (1920-2006) en 1951. Il est donné par la formule

$$3x^3 + 4y^3 + 5z^3 = 0.$$

Selmer a montré que cette équation peut être résolue modulo p pour tout nombre premier p , ainsi que sur \mathbb{R} , mais qu'il n'y a pas de solution dans \mathbb{Z} .

L'équation quadratique

$$x^2 = d,$$

où d est un entier strictement positif, est une équation d'apparence innocente qui a attiré beaucoup d'attention au cours de l'histoire. L'équation a une solution entière si et seulement si d est un carré parfait.

Supposons que d ne soit pas un carré parfait. Alors, par le théorème de Hasse-Minkowski, nous savons que pour certains nombres premiers p , la congruence

$$x^2 \equiv d \pmod{p^k}$$

n'a pas de solution, c'est-à-dire que pour une certaine puissance p^k d'un nombre premier, le nombre d n'est pas un **résidu quadratique**. **Adrien-Marie Legendre** (1752-1833) a reformulé cet énoncé de manière symbolique :

Définition. Soit p un nombre premier impair et d un entier. Le **symbole de Legendre** $\left(\frac{d}{p}\right)$ est défini par

$$\left(\frac{d}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } x^2 \equiv d \pmod{p} \text{ a une solution,} \\ -1 & \text{si } x^2 \equiv d \pmod{p} \text{ n'a pas de solution,} \\ 0 & \text{si } p \text{ divise } d. \end{cases}$$

Le symbole de Legendre est multiplicatif et p -périodique dans l'argument supérieur. On peut montrer que les symboles satisfont la loi de réciprocité quadratique :

Théorème. Soit p et q deux nombres premiers impairs. Alors

$$\left(\frac{p}{q}\right) \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}.$$

La valeur spéciale pour le nombre premier $p = 2$ est donnée par

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

Le symbole de Legendre peut être calculé avec le **critère d'Euler**, introduite par Leonhard Euler (1707-1783) en 1748 :

Théorème. Soit p un nombre premier impair et d un entier. Alors

$$\left(\frac{d}{p}\right) \equiv d^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

Une conséquence immédiate et utile du critère d'Euler est le fait que

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \equiv 1 \pmod{4} \\ -1 & \text{si } p \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Le critère d'Euler se démontre facilement à l'aide du petit théorème de Fermat

$$d^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

En réécrivant cela sous la forme

$$\left(d^{\frac{p-1}{2}} - 1\right) \left(d^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) \equiv 0 \pmod{p}$$

et en utilisant le fait que p est premier, on en déduit que l'un des facteurs doit être congru à 0 (mod p). Si d est un résidu quadratique, c'est-à-dire si $x^2 \equiv d \pmod{p}$ pour un certain x , alors

$$d^{\frac{p-1}{2}} \equiv (x^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p},$$

ce qui fait que le premier facteur est congru à 0. Comme le polynôme $x^2 - d$ est de degré 2, il peut avoir au plus deux racines, x et $-x$. Il y a donc au moins $\frac{p-1}{2}$ résidus quadratiques non nuls. D'autre part, le polynôme

$$x^{\frac{p-1}{2}} - 1$$

peut avoir au plus $\frac{p-1}{2}$ racines non nulles. Il s'ensuit que les $\frac{p-1}{2}$ classes de résidus non quadratiques restantes doivent être des racines du second facteur :

$$d^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}.$$

On a donc $d^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod{p}$, selon que d est un résidu quadratique modulo p ou non.

Un cadre général pour décrire les solutions des équations polynomiales a été introduit par Évariste Galois (1811-1832) en 1832, quelques jours avant qu'il ne meure des suites des blessures subies lors d'un duel, alors qu'il n'avait que vingt ans. Étant donné un polynôme à coefficients entiers, on peut étendre les nombres rationnels avec les solutions de l'équation (trouvées parmi les nombres complexes) pour former une extension de corps E des nombres rationnels \mathbb{Q} . L'idée de Galois était de considérer des automorphismes de l'extension de corps qui laissent invariants les nombres rationnels et, par conséquent, le polynôme lui-même. L'ensemble de ces automorphismes forme un groupe, le groupe de Galois $G(E/\mathbb{Q})$ de l'extension de corps. Les groupes de Galois ont une structure riche qui reflète de nombreuses propriétés de l'équation polynomiale originale. Par exemple, le groupe de Galois est trivial si et seulement si le polynôme se décompose complètement en facteurs linéaires à coefficients entiers.

L'équation $x^2 - d = 0$ a au plus deux racines. Le seul automorphisme non trivial possible de $E = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ qui laisse \mathbb{Q} invariant est la conjugaison $\sigma : \sqrt{d} \mapsto -\sqrt{d}$. Ainsi, le groupe de Galois dans ce cas est l'unique groupe à deux éléments $\mathbb{Z}_2 = \{\text{Id}, \sigma\}$, où $\sigma^2 = \text{Id}$.

Le groupe \mathbb{Z}_2 apparaît également dans un contexte arithmétique, à savoir comme le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}_4)^* = \{1, 3\}$ des unités dans \mathbb{Z}_4 . Dans ce groupe, 1 agit comme l'élément identité, tandis que 3 vérifie $3^2 \equiv 1 \pmod{4}$. Nous définissons une application

$$\phi : (\mathbb{Z}_4)^* \longrightarrow G(E/\mathbb{Q})$$

par $(p \pmod{4}) \mapsto \left(\frac{d}{p}\right)$. Cette application est bien définie d'après le critère d'Euler pour tous les nombres premiers impairs. Il s'agit en fait d'un **morphisme de groupe**.

L'application ϕ est appelée « application d'Artin ». L'image $\phi_p := \phi(p)$ d'un nombre premier p est appelée l'élément de Frobenius du groupe de Galois $G(E/\mathbb{Q})$. L'élément de Frobenius correspond à l'application dite de Frobenius d'un corps fini. Soit E_p une extension de

l'unique corps \mathbb{F}_p d'ordre p . L'application de Frobenius est une application de E_p dans lui-même. Elle est définie par $x \mapsto x^p$. Puisque E_p est une extension de \mathbb{F}_p , l'application de Frobenius définit un **morphisme d'anneaux**. Cela découle du fait que $p = 0$ dans \mathbb{F}_p . Dans le cas d'une extension de corps dite non ramifiée, on peut relever l'application de Frobenius d'une manière unique de $G(E_p/\mathbb{F}_p)$ vers $G(E/\mathbb{Q})$. Le résultat de ce relèvement est l'élément de Frobenius.

Dans \mathbb{F}_p , l'application de Frobenius est l'application identité, en vertu du petit théorème de Fermat. Dans l'exemple quadratique traité ci-dessus, on peut calculer $x \mapsto x^p$ pour un élément $v + w\sqrt{d} \in \mathbb{F}_p[\sqrt{d}]$. On obtient

$$\begin{aligned} (v + w\sqrt{d})^p &= v^p + w^p (\sqrt{d})^p \\ &= v + wd^{\frac{p-1}{2}} \sqrt{d}. \end{aligned}$$

Nous nous intéressons donc à la valeur de $d^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$. D'après le petit théorème de Fermat, on a

$$0 = d^p - d = d \cdot \left(d^{\frac{p-1}{2}} - 1 \right) \left(d^{\frac{p-1}{2}} + 1 \right).$$

Puisque \mathbb{F}_p est un corps, l'un des trois facteurs doit être nul. Notre hypothèse que p ne divise pas $2d$ exclut le premier facteur. Il nous reste les deux autres. Pour

$$d^{\frac{p-1}{2}} = 1,$$

l'application de Frobenius est l'identité, tandis que pour

$$d^{\frac{p-1}{2}} = -1,$$

l'application de Frobenius correspond à l'automorphisme de conjugaison $\sigma : \sqrt{d} \mapsto -\sqrt{d}$. Mais nous avons aussi que le premier cas correspond au fait que d soit un résidu quadratique, l'autre non. On remarque aussi que lorsque d est un résidu quadratique, le polynôme $x^2 - d$ se décompose complètement en facteurs linéaires.

Même si l'application d'Artin dans cet exemple semble plutôt innocente, elle reflète un lien profond entre deux objets d'origine assez différente : le groupe de Galois de l'équation d'un côté et l'arithmétique de \mathbb{F}_p de l'autre.

En 1923, le mathématicien autrichien Emil Artin (1898-1962) a formulé ce que l'on appelle aujourd'hui la loi de réciprocité d'Artin. Il

s'agissait d'abord d'une conjecture, mais quelques années plus tard, il a pu en donner une démonstration. La **loi de réciprocité d'Artin** peut être considérée comme une généralisation de la loi de réciprocité quadratique. Dans cette généralisation, nous considérons des extensions de corps de \mathbb{Q} plus générales, mais nous nous limitons aux extensions E telles que le groupe de Galois $G(E/\mathbb{Q})$ soit abélien. La généralisation correspondante du côté gauche de l'application d'Artin est l'anneau adélique, introduit par **Claude Chevalley** (1909-1984) au début des années 1950. L'anneau adélique est le produit dit restreint de toutes les complétions $\widehat{\mathbb{Q}}_p$, avec $p \leq \infty$, des nombres rationnels. Nous pouvons considérer l'anneau adélique comme la collection de toutes les propriétés locales du corps global \mathbb{Q} .

La loi de réciprocité d'Artin donne une correspondance précise entre une extension de corps abélienne, c'est-à-dire une extension de corps telle que le groupe de Galois correspondant soit abélien, et l'anneau adélique. Nous pouvons considérer cette correspondance comme un exemple du principe local-global, où la théorie de Galois représente la partie globale et l'anneau adélique la partie locale. Dans l'exemple ci-dessus, le groupe de Galois est **cyclique** d'ordre 2 et $(\mathbb{Z}_4)^*$ est le quotient correspondant du groupe des idèles, qui est à nouveau le groupe des unités de l'anneau adélique.

La loi de réciprocité d'Artin a été généralisée par Robert P. Langlands, en commençant par la lettre adressée à André Weil en 1967. Artin ayant traité le cas abélien, il était naturel de se demander s'il était possible d'étendre l'application d'Artin aux groupes de Galois non abéliens. La question était loin d'être sans intérêt : il suffit de remarquer que le corps de décomposition du polynôme $x^3 - 2$ a déjà un groupe de Galois non abélien sur \mathbb{Q} . La réponse à ce problème a été d'introduire une sorte de non-commutativité également sur le « côté adèle » de la correspondance.

Pour préparer une telle extension à un cadre non commutatif, nous pouvons changer notre point de vue sur la loi de réciprocité d'Artin en tant que théorie purement commutative. Le point clé est la théorie des représentations pour les groupes, et le fait important qu'un groupe abélien est complètement décrit par ses représentations à une dimension. Ainsi, au lieu d'étudier le groupe lui-même, nous considérons l'ensemble des représentations unidimensionnelles $\rho : G \rightarrow \mathbb{C}^* = GL_1(\mathbb{C})$ du groupe et rien n'est perdu. En revanche, nous remplaçons l'anneau adélique \mathbb{A} par un quotient approprié de $GL_1(\mathbb{A})$, le **groupe multiplicatif des unités** de \mathbb{A} .

Langlands a suggéré de trouver une description similaire des représentations de dimension supérieure $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ des groupes de Galois non abéliens. Ces représentations devraient correspondre aux représentations du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ sur un quotient approprié de lui-même, ce que l'on appelle les formes automorphes. La correspondance décrite est maintenant connue sous le nom de correspondance de Langlands.

Uhlenbeck (2019)

« pour ses travaux pionniers dans le domaine des équations aux dérivées partielles d'origine géométrique, des théories de jauge et des systèmes intégrables, et pour l'impact fondamental de ses résultats sur l'analyse, la géométrie et la physique mathématique ».

Karen Keskulla Uhlenbeck fait partie des fondateurs de l'analyse géométrique moderne. Son point de vue a façonné cette discipline et a conduit à certaines des avancées les plus spectaculaires en mathématiques de ces quarante dernières années.

L'analyse géométrique est une discipline des mathématiques où les techniques d'analyse des équations différentielles s'entremêlent à l'étude de problèmes géométriques et topologiques. Plus précisément, on étudie des objets tels que les courbes, les surfaces, les connexions ou les champs qui sont des points critiques de fonctionnelles représentant des quantités géométriques telles que l'énergie et le volume. Par exemple, les surfaces minimales sont les points critiques de l'aire et les fonctions harmoniques sont les points critiques de l'énergie de Dirichlet. Les principales contributions d'Uhlenbeck sont des résultats fondateurs sur les surfaces minimales et les applications harmoniques, la théorie de Yang-Mills et les systèmes intégrables.

L'analyse des surfaces minimales et des « bulles »

Un outil important de l'analyse globale, antérieure aux travaux d'Uhlenbeck, est la condition de compacité de Palais-Smale. Cette condition, inspirée par des travaux plus anciens de Morse, garantit l'existence de minimiseurs de fonctionnelles géométriques. Elle est particulièrement efficace en dimension un, comme pour l'étude des géodésiques fermées.

Uhlenbeck a compris que la condition de Palais-Smale n'était pas réalisée dans le cas des surfaces pour des raisons topologiques. Les articles d'Uhlenbeck, coécrits avec Sacks, sur la fonctionnelle d'énergie pour les applications de surfaces à valeurs dans une variété riemannienne, ont eu une influence considérable et décrivent en détail la perte

de la condition de Palais-Smale : une suite d'applications minimisantes converge en dehors d'un nombre fini de points singuliers. En utilisant des changements d'échelle, le comportement près des singularités est décrit comme des bulles ou des instantons, qui sont les solutions standard de l'application minimisante de la sphère de dimension 2 vers la variété cible.

Uhlenbeck a écrit, en collaboration avec Schoen, deux articles fondateurs sur les applications harmoniques en dimension supérieure. Ces articles ont apporté une compréhension profonde des singularités des solutions d'équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires. L'ensemble singulier, qui dans le cas des surfaces est constitué uniquement de points isolés, est remplacé en dimension supérieure par un ensemble de **codimension 3**.

Les méthodes utilisées dans ces articles révolutionnaires font dorénavant partie de la boîte à outils standard de tout géomètre et de tout analyste. Elles ont été appliquées avec succès à plusieurs autres équations aux dérivées partielles issues de contextes géométriques. En particulier, le phénomène de bulle apparaît dans de nombreux travaux sur les équations aux dérivées partielles, dans l'étude du **problème de Yamabe**, dans les travaux de Gromov sur les courbes pseudoholomorphes, ainsi que dans les applications physiques des instantons, en particulier en théorie des cordes.

Théories de jauge et équations de Yang-Mills

À la suite d'un exposé d'Atiyah à Chicago, l'intérêt d'Uhlenbeck s'est porté sur les théories de jauge. Elle a été la pionnière de l'étude des équations de Yang-Mills d'un point de vue analytique rigoureux. Ce travail a servi de base pour toutes les recherches ultérieures sur les théories de jauge.

Les théories de jauge utilisent un fibré vectoriel auxiliaire sur une variété riemannienne. Les objets fondamentaux à étudier sont les connexions sur ce fibré vectoriel. Après le choix d'une trivialisations (ou jauge), une connexion peut être décrite par une forme à valeurs dans les endomorphismes du fibré. Les connexions de Yang-Mills sont des points critiques de fonctionnelles avec invariance de jauge. Uhlenbeck a abordé et résolu la question fondamentale consistant à exprimer les équations de Yang-Mills comme un système elliptique à l'aide de la **jauge de Coulomb**. Ce fut le point de départ du célèbre théorème de compacité d'Uhlenbeck pour les connexions ayant une courbure bornée

dans l'espace L^p , ainsi que de ses résultats obtenus ultérieurement sur les singularités évitables des connexions de Yang-Mills définies sur des boules épointées en dimension 4. L'étude des singularités évitables des connexions de Yang-Mills en dimension supérieure n'a été achevée que beaucoup plus tard par **Gang Tian** et Terence Tao. Le théorème de compacité d'Uhlenbeck a été un outil crucial de la théorie de Hodge non abélienne, en particulier pour démontrer le caractère propre de la fibration de **Hitchin** et pour l'existence des applications harmoniques **équivariantes** démontrée par Corlette.

Un autre résultat majeur d'Uhlenbeck est son travail en commun avec **Yau** sur l'existence de connexions hermitiennes de Yang-Mills sur les fibrés vectoriels holomorphes stables sur des variétés complexes de dimension n , ce qui généralise un résultat antérieur de Donaldson sur les surfaces complexes. Ce résultat de Donaldson-Uhlenbeck-Yau relie la géométrie différentielle et la géométrie algébrique, et représente un résultat fondamental pour les applications de la **théorie des cordes hétérotique** à la physique des particules.

Les idées d'Uhlenbeck ont bâti les fondements analytiques qui permettent l'application des théories de jauge à la géométrie et à la topologie, de l'important résultat de **Taubes** sur le **recollement** des variétés autoduales de dimension 4 aux travaux historiques de Donaldson qui relient théorie de jauge et topologie en dimension 4, ainsi que beaucoup d'autres résultats dans ce domaine. Le livre écrit par Uhlenbeck et **Dan Freed** sur « Les instantons et la topologie en dimension 4 » a inspiré une génération entière de spécialistes en géométrie différentielle. Uhlenbeck a continué à travailler dans ce domaine. Elle a en particulier obtenu un résultat important avec **Lesley Sibner** et Robert Sibner sur les solutions non autoduales des équations de Yang-Mills.

Systèmes intégrables et applications harmoniques

L'étude des systèmes intégrables trouve ses racines dans la mécanique classique du XIX^e siècle. En utilisant le langage des théories de jauge, Uhlenbeck et Hitchin ont compris que les applications harmoniques de surfaces à valeurs dans les espaces homogènes se répartissent en familles de dimension 1. En se basant sur cette observation, Uhlenbeck a décrit algébriquement les applications harmoniques de sphères à valeurs dans les **grassmaniennes**, et montré qu'elles sont reliées à un système intégrable de dimension infinie sur lequel agit l'**algèbre de Virasoro**. Ce travail fondateur a conduit à une série d'articles fonda-

mentaux d'Uhlenbeck et **Chuu-Lian Terng**, ainsi qu'à la création d'une école active et fructueuse.

L'impact de l'œuvre charnière d'Uhlenbeck va au-delà de l'analyse géométrique. L'un des ses premiers articles, très influent, a été consacré à l'étude de la théorie de la régularité d'un système d'équations elliptiques non linéaires, adapté à l'étude des points critiques de fonctionnelles d'énergie d'ordre supérieur. Ce travail approfondit et étend les résultats précédents obtenus par Nash, De Giorgi et Moser sur la régularité des solutions d'une seule équation non linéaire aux solutions de systèmes.

Les résultats pionniers de Karen Uhlenbeck ont eu un impact fondamental sur l'analyse contemporaine, la géométrie et la physique mathématique. Ses idées et son influence sur la communauté ont transformé le paysage mathématique dans son ensemble.

Notice biographique (par JIM AL-KHALILI)

En 1990, à Kyoto au Japon, Karen Uhlenbeck est devenue la deuxième femme seulement à donner une conférence plénière au Congrès international des mathématiciens, le plus grand et le plus important rassemblement de mathématiciens au monde, qui se déroule une fois tous les quatre ans. La première femme ayant eu cet honneur était Emmy Noether en 1932. Cette statistique choquante reflète à quel point il est difficile pour de nombreuses femmes d'obtenir la reconnaissance qu'elles méritent dans une discipline dominée par les hommes. Mais à ce stade de sa carrière, Uhlenbeck s'était déjà imposée comme l'un des mathématiciens les plus en vue, ayant surmonté de nombreux obstacles, à la fois sur le plan personnel et sur le plan professionnel. En 2000, elle a reçu la Médaille nationale de la science des États-Unis. De nombreuses personnes considèrent cependant que la reconnaissance de ses réalisations aurait dû être beaucoup plus grande, car son travail a conduit à certaines des avancées les plus importantes en mathématiques de ces quarante dernières années.

Karen Uhlenbeck (née Keskulla), l'aînée de quatre enfants, est née à Cleveland dans l'état de l'Ohio en 1942. Son père, Arnold Keskulla, était ingénieur et sa mère, Carolyn Windeler Keskulla, artiste et enseignante. Sa famille a déménagé dans le New Jersey lorsque Karen était en CE2. En tant que jeune fille, elle était d'une grande curiosité pour à peu près tout. Son amour pour l'art et la musique lui a été inculqué par ses parents. Elle a développé elle-même une passion durable pour

le plein air, parcourant régulièrement la campagne locale près de sa maison.

Plus que tout, elle adorait lire, s'isolant chaque fois qu'elle le pouvait pour dévorer des livres scientifiques, veillant tard le soir et lisant même en cachette dans la classe. Elle rêvait de devenir chercheuse, particulièrement si cela signifiait éviter les interactions excessives avec d'autres gens, non pas parce qu'elle était une enfant timide, mais plutôt parce qu'elle appréciait la paix et la solitude. La dernière chose qu'elle souhaitait faire était de suivre les traces de sa mère et finir par enseigner, une attitude qui changera radicalement plus tard dans sa vie.

L'histoire d'amour d'Uhlenbeck avec les mathématiques ne s'est développée qu'après son entrée à l'université. Marquée au lycée par les écrits de grands physiciens tels que Fred Hoyle et George Gamow, elle s'est inscrite à l'université du Michigan, prévoyant initialement de se spécialiser en physique. Néanmoins, elle a vite découvert que c'était le défi intellectuel représenté par les mathématiques pures qui la motivait vraiment. Cela signifiait également qu'elle pouvait éviter le travail de laboratoire qu'elle n'appréciait guère.

Diplômée en 1964, elle a épousé un an plus tard son petit ami biophysicien, Olke Uhlenbeck, et a décidé de se lancer dans des études de troisième cycle. Déjà bien consciente de la culture masculine et souvent misogyne prédominante au sein du milieu universitaire, elle a évité de postuler dans des établissements prestigieux tels que Harvard, vers lequel Olke se dirigeait pour son doctorat et où la concurrence pour réussir était probablement féroce. Au lieu de cela, elle s'est inscrite à l'université Brandeis, où elle a reçu une généreuse bourse d'études supérieures de la part de la Fondation nationale pour la science. Elle y a achevé son doctorat en mathématiques en travaillant sur le calcul des variations, une technique qui implique l'étude de la façon dont de petits changements dans une quantité peuvent nous aider à trouver la valeur maximale ou minimale d'une autre quantité, comme trouver la plus courte distance entre deux points. On pourrait penser que c'est la ligne droite, mais ce n'est pas toujours aussi simple. Par exemple, si vous devez traverser une ville avec un trafic dense de voitures, l'itinéraire le plus rapide n'est pas nécessairement le plus court. Inutile de dire que la contribution d'Uhlenbeck en la matière a été un peu plus complexe que cela !

Après une brève période d'enseignement à l'institut de technologie du Massachusetts, elle a déménagé ensuite à Berkeley en Californie, où elle a étudié la relativité générale et la géométrie de l'espace-temps, des

sujets qui ont façonné ses futurs travaux de recherche. Bien qu'étant une pure mathématicienne, Uhlenbeck s'est inspirée de la physique théorique dans ses travaux. En retour, elle a eu une influence majeure sur l'élaboration de la physique théorique en développant des idées comportant une large gamme d'applications différentes.

Par exemple, les physiciens avaient prédit l'existence d'objets mathématiques appelés « instantons », qui décrivent le comportement de surfaces dans l'espace-temps à quatre dimensions. Uhlenbeck est ainsi devenue l'un des experts mondiaux dans ce domaine. Son manuel classique, « Les instantons et la topologie en dimension 4 », coécrit en 1984 avec Dan Freed, a inspiré toute une génération de mathématiciens.

En 1971, elle est devenue professeur adjoint à l'université de l'Illinois à Urbana-Champaign, où elle s'est sentie isolée et sous-évaluée. Cinq ans plus tard, elle a rejoint l'université de l'Illinois à Chicago. Il y avait là-bas plusieurs autres femmes professeurs qui lui ont apporté des conseils et du soutien, ainsi que d'autres mathématiciens qui ont pris son travail plus au sérieux. En 1983, elle est devenue professeur titulaire à l'université de Chicago, devenant l'un des mathématiciens les plus en vue de sa génération. Elle s'intéressait particulièrement aux équations aux dérivées partielles non linéaires, à la géométrie différentielle, aux théories de jauge, à la théorie topologique des champs et aux systèmes intégrables. En 1987, elle a repris la chaire Richardson en mathématiques à l'université du Texas à Austin. Elle y a élargi sa compréhension de la physique en étudiant avec le physicien Steven Weinberg, lauréat du prix Nobel. Elle est restée à l'université du Texas jusqu'à la fin de sa carrière.

Les travaux d'Uhlenbeck les plus remarquables se sont concentrés sur les théories de jauge. Ses articles ont analysé les connexions de Yang-Mills en dimension 4 et ont jeté les bases d'un grand nombre des idées les plus révolutionnaires de la physique moderne, du modèle standard de la physique des particules à la recherche d'une théorie de la gravité quantique. Ses articles ont également inspiré les mathématiciens Cliff Taubes et Simon Donaldson, ce qui a ouvert la voie au travail qui a valu à Donaldson la médaille Fields en 1986.

Uhlenbeck, dorénavant de retour dans le New Jersey, reste un ardent défenseur d'un meilleur équilibre entre hommes et femmes en mathématiques et en sciences. Elle a parcouru un long chemin depuis le temps où, jeune fille, elle recherchait la solitude. Pendant longtemps, elle a eu du mal à accepter son propre succès, mais elle admet aujourd'hui qu'elle apprécie ce succès, le considérant comme un privilège. Elle a

déclaré être consciente de représenter un modèle, en particulier pour les jeunes mathématiciennes, mais que

« c'est difficile, parce qu'elle doit vraiment montrer aux étudiants à quel point des personnes peuvent être imparfaites et pourtant réussir pleinement. Tout le monde sait que si les gens sont intelligents, drôles, beaux ou bien habillés, ils réussiront. Mais il est également possible de réussir avec toutes nos imperfections. Je suis peut-être une mathématicienne remarquable et célèbre pour cette raison, mais je suis aussi très humaine. »

Karen Uhlenbeck est vraiment un être humain remarquable.

Bibliographie

- HÉLEIN (Frédéric), « [Sur les travaux de Karen Uhlenbeck, I](#) », *Images des mathématiques*, 2019.
- HÉLEIN (Frédéric), « [Sur les travaux de Karen Uhlenbeck, II](#) », *Images des mathématiques*, 2019.
- UHLENBECK (Karen K.), « [Autoportrait](#) » (trad. J. Germoni), *Images des mathématiques*, 2019.

LES THÉORIES DE JAUGE (par ARNE B. SLETSJØE)

Les théories de jauge sont des théories mathématiques introduites par Hermann Weyl en 1918, qui trouvent leur origine dans la physique théorique et la théorie de la relativité générale d'Einstein. L'une des idées clés des travaux d'Einstein est que les lois de la physique doivent être les mêmes dans tous les référentiels. C'est également l'idée générale d'une théorie de jauge : trouver des connexions qui comparent des mesures prises en différents points d'un espace et rechercher des quantités qui ne changent pas. Cette interprétation physique a été approfondie par Yang et Mills dans les années cinquante, dans ce que l'on appelle aujourd'hui les équations de Yang-Mills.

Pour révéler les secrets de la physique théorique, il faut travailler dans un espace avec (au moins) quatre dimensions : trois coordonnées spatiales et une coordonnée temporelle. Une loi physique doit être la même quel que soit l'endroit où l'on se trouve dans l'espace-temps, c'est-à-dire indépendamment du choix du référentiel.

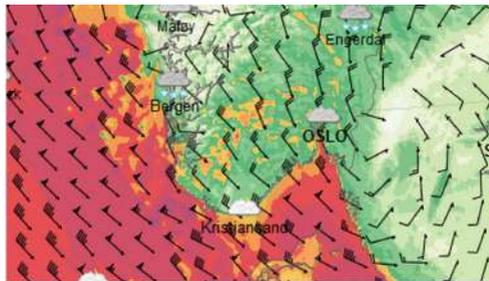


FIG. 45 – *C. N. Yang (1922-) et Robert Mills (1927-1999) à Stony Brook en 1999.*

Karen Uhlenbeck s'est attaquée à ce problème d'un point de vue mathématique. Après avoir entendu un exposé de Michael Atiyah à Chicago, Karen Uhlenbeck s'est intéressée aux théories de jauge. Elle a été la première à étudier les équations de Yang-Mills d'un point de vue analytique rigoureux. Ses travaux ont constitué la base de toutes les recherches ultérieures dans le domaine des théories de jauge.

Les théories de jauge sont généralement considérées comme une notion empruntée à la physique, mais le concept a aussi une vie mathématique pure. Une jauge peut être considérée comme le choix d'un système de coordonnées, choisi pour pouvoir mesurer diverses quantités. Une transformation de jauge décrit comment changer de système de coordonnées, et une théorie de jauge modélise un système physique ou mathématique qui a toutes les chances d'être invariant par rapport à la jauge, c'est-à-dire qu'il traite de quantités qui restent inchangées sous l'effet des transformations de jauge.

À titre d'exemple, considérons le fibré en cercles sur une sphère S . En chaque point $x \in S$ de la sphère, l'espace des directions peut être identifié au cercle standard S^1 . Pour pouvoir mesurer une direction, nous devons choisir une orientation et une direction de référence. Un bon choix pourrait être le nord comme direction de référence et le sens inverse des aiguilles d'une montre comme orientation. Mais n'importe quel autre choix pourrait fonctionner également. Le cercle des directions au point x de la sphère est noté C_x . La collection $C_X = \{C_x\}_{x \in X}$ de tous les cercles de directions en tous points de la sphère est appelée le fibré en cercles. Remarquons que la spécification des directions en tout point de la sphère est ce que nous appelons une **section du fibré**. Si la sphère est la Terre et que les directions sont celles du vent, une section s du fibré en cercles donne une carte globale de la direction du vent.



Pour pouvoir présenter des prévisions météorologiques utiles, nous devons nous mettre d'accord sur le choix du référentiel pour les directions des points de la sphère, c'est-à-dire sur le choix d'une jauge pour le fibré en cercles. La valeur numérique de la direction du vent ou la notation plus traditionnelle comme S.S.O. (sud-sud-ouest) ne nous est utile que lorsque nous sommes d'accord sur le référentiel, mais le vent lui-même est invariant et indépendant du choix de la jauge.

L'électromagnétisme, modélisé par les équations de Maxwell, est un exemple d'invariance de jauge en physique. Si \mathbf{E} représente le champ électrique, \mathbf{B} le champ magnétique, ϕ le potentiel électrique et \mathbf{A} le potentiel-vecteur, nous avons les relations

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}, \\ \mathbf{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}.\end{aligned}$$

En utilisant le fait (purement mathématique) que

$$\nabla \times \nabla = 0$$

et que

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla f = \nabla \frac{\partial f}{\partial t},$$

nous voyons que les substitutions

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &\mapsto \mathbf{A} + \nabla f \\ \phi &\mapsto \phi - \frac{\partial f}{\partial t},\end{aligned}$$

avec une fonction f deux fois différentiable, ne changent pas les équations, c'est-à-dire que les équations de Maxwell sont invariantes sous les transformations de jauge données.

LE CALCUL DES VARIATIONS (par ARNE B. SLETSJØE)

Le calcul des variations remonte au XVII^e siècle et à Isaac Newton. Newton a développé cette théorie pour résoudre le problème de la résistance minimale et, plus tard, le problème de la **courbe brachistochrone**.

Le problème de la résistance minimale consiste à déterminer la surface formée d'un cylindre incurvé qui subit la résistance minimale lorsqu'elle se déplace dans un fluide homogène. La surface se déplace à vitesse constante et dans la direction de l'axe du cylindre.

Le problème de la courbe brachistochrone, posé à l'origine par **Jean Bernoulli**, consiste à trouver la courbe qui relie deux points de sorte qu'une bille qui glisse sans frottement parcourt la courbe en un temps minimal. La bille part du repos et se déplace uniquement sous l'influence d'un champ gravitationnel uniforme.

Le calcul des variations a été développé par Leonhard Euler et plus tard par Joseph-Louis Lagrange. La formulation générale de la théorie est la suivante :

Soit J une fonction qui associe une valeur numérique à n'importe quelle fonction dans un espace de fonctions. Trouvez la fonction qui minimise J .

Un exemple simple de calcul des variations est le problème de la recherche du plus court chemin entre deux points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) dans le plan. Soit $y = f(x)$ une fonction qui relie les deux points, c'est-à-dire $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Alors la longueur de la courbe définie par la fonction f est donnée par

$$J(f) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Nous voulons minimiser la longueur de la courbe, c'est-à-dire trouver une fonction f telle que J atteigne sa plus petite valeur.

Les travaux d'Euler et de Lagrange sur le calcul des variations ont abouti à l'**équation d'Euler-Lagrange**, qui donne une solution générale au problème. Le résultat indique que pour trouver la fonction critique pour la fonctionnelle

$$J(f) = \int_S L(f, f', x) dx,$$

où L est une fonction de x , de $f(x)$ et de la dérivée $f'(x)$, et S est le domaine d'intégration, on doit résoudre l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial f'} = 0.$$

Dans l'exemple ci-dessus, la fonction L est donnée par $L(f, f', x) = \sqrt{1 + (f')^2}$. On a alors

$$\frac{\partial L}{\partial f} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial f'} = \frac{f'}{\sqrt{1 + (f')^2}}$$

et l'équation d'Euler-Lagrange prend la forme

$$-\frac{d}{dx} \frac{f'}{\sqrt{1 + (f')^2}} = 0,$$

ou

$$\frac{f'}{\sqrt{1 + (f')^2}} = c.$$

En cherchant f' , on trouve que $f'(x)$ est constant, c'est-à-dire $f(x) = ax + b$. La solution exprime le fait que le chemin le plus court entre deux points est la ligne droite.

Les surfaces minimales sont des illustrations du calcul des variations en dimension supérieure. Soit $f : S \rightarrow M$ une application (suffisamment lisse) de la surface S d'une sphère vers une variété M (nous pouvons considérer M comme l'espace euclidien à trois dimensions). Supposons maintenant qu'il y ait deux trous dans M et que la surface $f(S)$, image d'une sphère, entoure les deux trous. Le problème est de trouver une surface qui remplisse ces conditions et qui ait une aire minimale. Puisque nous sommes obligés d'entourer les deux trous, il n'est pas possible de réduire la surface à une aire nulle, nous pouvons donc espérer qu'il existe en fait une surface d'aire minimale.

Preons un exemple proche de la situation que nous venons de décrire. Nous considérons deux cercles parallèles, face à face, de même rayon r et distants de d . Considérons une surface donnée comme l'image $u(S)$ d'un cylindre S , où les cercles du bord ∂S sont envoyés sur les deux cercles parallèles.

Si l'on suppose que la surface est une **surface de révolution** autour de l'axe qui relie les deux cercles, c'est-à-dire définie par la révolution d'une fonction $y = f(x)$ le long de l'axe, l'aire du « cylindre de savon » est donnée par

$$A(f) = \int 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

En appliquant l'équation d'Euler-Lagrange à la fonction $L(f, f', x) = f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}$ et en utilisant l'identité de **Beltrami** (qui donne une

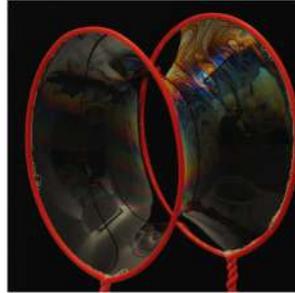


Fig. 46 – *Un film de savon qui relie deux cercles parallèles.*

version simplifiée de l'équation d'Euler-Lagrange dans le cas où $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$), on voit que la fonction minimisante doit vérifier

$$\frac{d}{dx} \left(f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} - \frac{f(x)f'(x)^2}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} \right) = 0$$

ou de manière équivalente

$$\frac{f(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} = c.$$

La solution de cette équation différentielle est la **chaînette** :

$$y = c \cosh(x/c).$$

La chaînette est également connue sous le nom de courbe du câble suspendu. C'est la courbe qu'un câble suspendu idéalisé forme sous son propre poids lorsqu'il n'est soutenu que par ses extrémités. La révolution de la chaînette autour de l'axe donne ce que l'on appelle une **caténoïde**. Ainsi, la surface minimale attachée à des cercles parallèles prendra la forme d'une caténoïde.



Fig. 47 – *Une toile d'araignée est constituée d'un grand nombre de fils suspendus.*

Revenons au problème de la courbe brachistochrone. Même si la ligne droite est le chemin le plus court entre deux points, ce n'est pas le plus rapide. Au début, nous devons prendre de la vitesse, et même si la conséquence est un chemin plus long, l'augmentation de la vitesse compense largement l'augmentation de la distance.

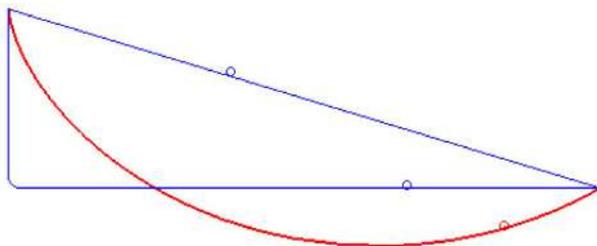


FIG. 48 – Les trois billes ont été lâchées en même temps depuis le point supérieur. La bille rouge atteindra le point final en premier.

Le temps de parcours d'un point P à un autre point Q le long d'une courbe γ d'équation $y = f(x)$ est donné par l'intégrale

$$T(\gamma) = \int_P^Q \frac{ds}{v} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + f'(x)^2}}{\sqrt{2f(x)}} dx$$

(nous supposons que l'accélération de la gravitation est $g = 1$ pour simplifier).

L'équation d'Euler-Lagrange et l'identité de Beltrami donnent l'équation différentielle pour la solution $y = f(x)$,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\sqrt{1 + f'(x)^2}}{\sqrt{2f(x)}} - \frac{f'(x)^2}{\sqrt{1 + f'(x)^2} \sqrt{2f(x)}} \right) = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{1}{\sqrt{1 + f'(x)^2} \sqrt{2f(x)}} = c$$

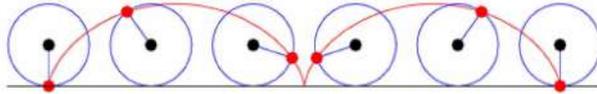
et

$$(1 + f'(x)^2)f(x) = k^2,$$

où $k = \frac{\sqrt{2}}{2c}$. La solution de cette équation peut être donnée sous la forme d'une courbe paramétrée

$$x = \frac{1}{2}k^2(\theta - \sin \theta), \quad y = \frac{1}{2}k^2(1 - \cos \theta).$$

Cette courbe est la **cycloïde**, souvent décrite comme la courbe tracée par un point sur la jante d'une roue circulaire lorsque la roue roule le long d'une ligne droite sans glisser.



L'histoire du calcul des variations est étroitement liée à l'histoire des mathématiques. De nombreux mathématiciens de renom ont contribué à la théorie. Nous avons déjà mentionné Isaac Newton, Jean Bernoulli, Leonhard Euler et Joseph-Louis Lagrange. Plus tard, des mathématiciens comme Hamilton, Jacobi, **Dirichlet** et Hilbert ont apporté leur contribution. À l'époque moderne, le calcul des variations a continué d'occuper le devant de la scène, témoignant d'avancées théoriques majeures, ainsi que d'applications très variées en physique, en ingénierie et dans toutes les branches des mathématiques.

Les problèmes de minimisation qui peuvent être analysés par le calcul des variations servent à caractériser les configurations d'équilibre de presque tous les systèmes physiques continus, qu'il s'agisse d'élasticité, de mécanique des solides et des fluides, d'électromagnétisme, de gravitation, de mécanique quantique, de théorie des cordes ou de bien d'autres domaines.

LES BULLES (par ARNE B. SLETSJØE)

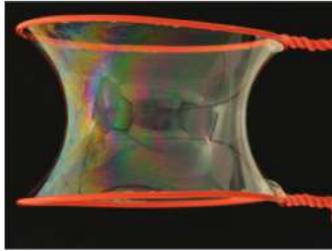
Les bulles de savon sont de beaux objets, aux formes parfaites et présentant un merveilleux jeu de couleurs dû aux interférences de la lumière qui se reflète sur les surfaces avant et arrière du film de savon. Les bulles de savon sont également de beaux objets dans un contexte mathématique, car elles constituent des exemples de surfaces minimales. Lorsque le volume d'air enfermé dans la bulle est fixe, le film de savon minimise la tension de la paroi, attirant la bulle vers la forme avec la plus petite surface enfermant un volume fixe, connue depuis des siècles pour être une sphère parfaite.



Si au lieu de faire exploser la bulle nous plongeons une boucle de fil métallique fortement déformée dans une solution de bulles de savon, le film de savon formera un disque dont le bord est donné par la boucle de fil métallique et dont la surface est minimale. Contrairement à la bulle en forme de sphère, ce film est soumis à une pression égale de chaque côté, ce qui en fait une surface à courbure moyenne nulle, c'est-à-dire que la courbure moyenne dans toutes les directions est nulle. Même si le film de savon est presque instantanément capable de former une surface minimale, le calcul analytique de la forme de la surface est une tâche assez compliquée.

Parmi les courbes qui relient deux points dans l'espace, on peut toujours trouver le chemin le plus court. L'affirmation analogue n'est pas vraie pour les surfaces lorsque l'on considère leur aire. Le problème est que pour réduire l'aire d'une surface, il se peut que la surface se réduise à une courbe, qui n'est évidemment pas considérée comme une surface minimale. La surface minimale tubulaire qui relie deux cercles parallèles en est un exemple.

Si la distance entre les cercles est faible par rapport à leur rayon, la surface minimale ressemble à un cylindre légèrement concave appelé caténoïde. Lorsque l'on écarte les cercles, le cylindre se rétrécit dans la



région située entre les cercles. À un certain moment, la partie centrale du cylindre incurvé s'effondre le long de la ligne reliant les centres des deux cercles parallèles. Lorsque l'on écarte davantage les cercles, il n'y a plus de surface minimale tubulaire qui les relie.

En 1968, Karen Uhlenbeck a obtenu son doctorat à l'université Brandeis avec une thèse intitulée « Le calcul des variations et l'analyse globale ». Son directeur de thèse était **Richard Palais**, qui avait introduit quelques années plus tôt avec **Stephen Smale** la condition C dite de Palais-Smale. Cette condition donne un critère pour l'existence de minimiseurs pour les fonctionnelles sur les espaces de fonctions. « Minimiser une fonctionnelle sur un espace de fonctions » est une expression plus générale que « trouver la surface d'aire minimale », mais la condition C peut également être appliquée au problème de la surface minimale. Cependant, dans ce cas, elle échoue. Motivée par l'inexistence générale de surfaces minimales, Uhlenbeck a voulu comprendre ce qui se passe lorsque la condition C n'est pas respectée. Dans un article cosigné avec Jonathan Sacks, elle a décrit en détail la situation où l'on ne peut pas se fier à la conclusion de la condition C. Ils ont construit une suite d'applications d'une sphère dans l'espace d'arrivée qui satisfont à la condition C, mais de telle manière que la limite ne la satisfasse pas. En dehors d'un ensemble fini de points singuliers, tout fonctionne bien. Mais à proximité des singularités apparaît ce que l'on appelle le phénomène de bulle. L'aire de la surface limite est strictement inférieure à la limite des aires des surfaces de la suite. La différence est concentrée dans un ensemble fini de points isolés, qui constituent la limite des « bulles » dans la suite de surfaces.

Les idées et les méthodes de cet article révolutionnaire sont devenues depuis sa publication un outil mathématique efficace. En particulier, le phénomène de bulle a eu une grande influence en tant que méthode de résolution de problèmes dans divers domaines des mathématiques.

Furstenberg et Margulis (2020)

« pour leur travail de pionnier dans l'utilisation des méthodes probabilistes et dynamiques en théorie des groupes, théorie des nombres et combinatoire ».

Une branche centrale de la théorie des probabilités est l'étude des marches aléatoires, telles que la déambulation d'un touriste qui explore une ville inconnue et qui décide de tourner à droite ou à gauche à chaque intersection en tirant à pile ou face. Hillel Furstenberg et Grigori Margulis ont utilisé les marches aléatoires pour étudier la structure des groupes linéaires, c'est-à-dire des familles de matrices stables par inverse ou produit. Il s'agit de comprendre comment le produit de matrices choisies au hasard évolue, et ce que la croissance de ce produit dit sur la structure du groupe.

Furstenberg et Margulis ont introduit des concepts visionnaires et puissants, résolu de formidables problèmes et découvert des liens surprenants et fructueux entre la théorie des groupes, la théorie des probabilités, la théorie des nombres, la combinatoire et la théorie des graphes. Leur travail a créé une école de pensée qui a eu un impact profond sur de nombreux domaines des mathématiques et de leurs applications.

En partant en 1963 de l'étude des produits de **matrices aléatoires**, Furstenberg a introduit et classifié une notion d'importance fondamentale, appelée aujourd'hui frontière de Furstenberg. Grâce à celle-ci, il a démontré une **formule intégrale de Poisson** qui exprime les fonctions harmoniques sur un groupe général en termes de ses valeurs sur le bord. Dans ses travaux sur les marches aléatoires au début des années 1960, certains en collaboration avec **Harry Kesten**, il a également obtenu un critère important de positivité pour le plus grand exposant de Liapounov.

Motivé par l'**approximation diophantienne**, Furstenberg a introduit en 1967 la notion de couplage de systèmes ergodiques, une notion proche de celle d'entiers premiers entre eux. Cette notion naturelle s'est avérée extrêmement profonde et s'applique à un large éventail de domaines, comme le traitement du signal et les questions de filtrage en génie électrique, la géométrie des ensembles fractals, les flots homogènes et la théorie des nombres. Sa « conjecture $\times 2$ et $\times 3$ » est d'une simplicité magnifique et a engendré de nombreux développements. En par-

tant des deux applications du **cercle unité** du plan complexe dans lui-même qui consistent à élever au carré et au cube, il a montré que les seuls ensembles fermés invariants par ces deux applications sont soit le cercle tout entier, soit finis. Il a conjecturé que les seules mesures invariantes sont soit de support fini, soit invariantes par rotation. Malgré les efforts de nombreux mathématiciens, cette question de classification de mesures reste ouverte. La classification de mesures invariantes sous l'action de groupes est devenue un vaste domaine de recherche, qui a influencé les travaux sur l'ergodicité quantique, sur les surfaces de translation, sur la version de Margulis de la **conjecture de Littlewood** et sur les travaux spectaculaires de **Marina Ratner**. Dans un cadre géométrique, Furstenberg a démontré en 1972 un autre résultat de classification de mesures : l'unique ergodicité du flot **horocyclique** pour les **surfaces hyperboliques**, un résultat avec une descendance nombreuse.

En utilisant la théorie ergodique et son théorème de récurrence multiple, Furstenberg a donné en 1977 une nouvelle et étonnante démonstration du théorème de Szemerédi sur l'existence de grandes progressions arithmétiques pour les sous-ensembles d'entiers de densité strictement positive. Plus tard, avec **Yitzhak Katznelson**, **Benjamin Weiss** et d'autres collaborateurs, il a trouvé des généralisations de grande portée du théorème de Szemerédi en dimension supérieure ainsi que de nouvelles applications de la dynamique topologique et de la théorie ergodique à la **théorie de Ramsey** et à la combinatoire additive. Ces résultats ont influencé de nombreux travaux ultérieurs, notamment ceux de Ben Green, Terence Tao et **Tamar Ziegler** sur la **conjecture de Hardy-Littlewood** et sur les progressions arithmétiques de nombres premiers.

Grigori Margulis a révolutionné l'étude des réseaux de **groupes semi-simples**. Un réseau dans un groupe est un sous-groupe discret tel que le quotient ait un volume fini. Pour les groupes semi-simples, Margulis a classifié ces réseaux avec ses théorèmes de « **superrigidité** » et d'« **arithméticité** » au milieu des années 1970. **Borel (Armand)** et Harish-Chandra avaient construit des réseaux dans des groupes semi-simples en utilisant des constructions arithmétiques, essentiellement en tant que groupes de matrices à coefficients entiers dans un grand groupe de matrices. Margulis a démontré que tous les réseaux de rang 2 ou plus proviennent de cette construction arithmétique, comme Atle Selberg l'avait prédit. En 1978, Margulis a dévoilé la structure de ces réseaux dans son « **théorème du sous-groupe normal** ». Au centre de ses techniques se trouve l'utilisation surprenante de méthodes probabilistes (marches aléatoires, théorème d'Oseledets, **moyennabilité**, frontière de

Furstenberg) ainsi que de la **propriété (T) de Kazhdan**.

Dans sa thèse de 1970, Margulis a construit la mesure de « Bowen-Margulis » pour une variété riemannienne compacte de courbure strictement négative. En utilisant la propriété de mélange du **flot géodésique**, il a démontré un analogue du théorème des nombres premiers : une formule asymptotique pour le nombre de géodésiques fermées plus courtes qu'une longueur donnée. Auparavant, le seul résultat de comptage de ce type provenait de la formule des traces de Selberg, formule uniquement valable dans le cadre des **espaces localement symétriques**. Depuis lors, de nombreux problèmes de comptage et d'**équidistribution** ont été résolus en utilisant l'approche par mélange de Margulis.

Une autre application spectaculaire de ses méthodes est la démonstration en 1984 de la **conjecture d'Oppenheim** en théorie des nombres, conjecture vieille de plusieurs décennies : une forme quadratique non dégénérée avec au moins 3 variables et qui n'est pas le multiple d'une forme à coefficients rationnels prend sur les entiers un ensemble **dense** de valeurs.

En théorie des graphes, la créativité de Margulis a abouti à la construction en 1973 de la première famille explicite d'expandeurs connue, grâce à la propriété (T) de Kazhdan. Un expandeur est un graphe avec une connectivité élevée. Cette notion, introduite par **Mark Pinsky**, a son origine dans l'étude des graphes dans les systèmes de communication. Les graphes expandeurs sont désormais un outil fondamental en informatique, notamment pour les codes correcteurs d'erreurs. En 1988, Margulis a construit des expandeurs optimaux, maintenant connus sous le nom de **graphes de Ramanujan**, et qui ont été découverts indépendamment par **Alex Lubotzky**, **Peter Sarnak** et Ralph Phillips.

L'influence de Furstenberg et de Margulis s'étend bien au-delà de leurs résultats et de leur domaine d'origine. Ils sont reconnus comme des pionniers par une large communauté de mathématiciens, qui va de la théorie de Lie, des groupes discrets et des matrices aléatoires jusqu'à l'informatique et la théorie des graphes. Ils ont démontré l'omniprésence des méthodes probabilistes et l'utilité qu'il y a à franchir les frontières entre les disciplines mathématiques, en dépassant la dichotomie traditionnelle entre mathématiques pures et appliquées.

Hillel Furstenberg

Lorsque Hillel (Harry) Furstenberg a publié l'un de ses premiers articles, une rumeur a circulé selon laquelle ce dernier n'était pas un individu, mais plutôt un pseudonyme pour un groupe de mathématiciens. L'article en question contenait un si grand nombre d'idées émanant de domaines différents qu'il ne pouvait certainement pas être l'œuvre d'une seule personne.

L'anecdote est peut-être apocryphe, mais elle illustre une vérité qui a été consolidée tout au long de sa vie universitaire : Furstenberg maîtrise des connaissances techniques approfondies dans divers domaines et a réussi à établir des liens à la fois perspicaces et surprenants entre eux. Il a plus particulièrement contribué de manière fondamentale au domaine de la théorie ergodique, domaine qui a connu des retombées considérables en matière de théorie des nombres, de géométrie, de combinatoire, de théorie des groupes et de théorie des probabilités.

Furstenberg est né à Berlin en 1935. Sa famille était juive. Quelques mois avant le début de la seconde guerre mondiale, elle a réussi à quitter l'Allemagne et s'est réfugiée aux États-Unis. Son père est mort pendant le voyage. Hillel a été élevé par sa mère et sa sœur aînée dans une communauté juive orthodoxe de New York.

Son intérêt pour les mathématiques est né lorsqu'il a vu son professeur se démenner pour expliquer des théorèmes bien connus. L'élève a pris plaisir à chercher ses propres solutions. « Il arrive que même les mauvais enseignants fassent du bon travail! », dit-il. Il a fréquenté le lycée et l'université Yeshiva, où il a obtenu en 1955 une licence et une maîtrise. Il publiait déjà des articles lorsqu'il était étudiant de premier cycle : « Note sur un type de forme indéterminée » (1953) et « Sur l'infinité des nombres premiers » (1955) sont tous deux parus dans la revue *American Mathematical Monthly*. Le deuxième article offre une démonstration topologique du célèbre **théorème d'Euclide** selon lequel il existe une infinité de nombres premiers.

Par la suite, Furstenberg a étudié à l'université de Princeton pour préparer son doctorat sous la direction de Salomon Bochner. Il a obtenu son doctorat en 1958 avec une thèse intitulée « Théorie de la prédiction ». Lorsqu'elle a été publiée en 1960, un commentateur a déclaré : « ce travail est une thèse de premier ordre et très originale sur un sujet très difficile. »

Après avoir passé un an comme chargé de cours à Princeton et un an à l'institut de technologie du Massachusetts, il a obtenu son premier

emploi comme professeur adjoint en 1961 à l'université du Minnesota. Dans une série d'articles ayant débuté en 1963 avec « Une formule de Poisson pour les groupes de Lie semi-simples », il a continué à s'imposer comme un penseur révolutionnaire. Ses recherches montrant que le comportement des trajectoires aléatoires sur un groupe est étroitement lié à la structure du groupe, qui ont donné naissance à ce que l'on appelle aujourd'hui la « frontière de Furstenberg », ont eu une influence considérable sur l'étude des réseaux et des groupes de Lie.

Il a été promu professeur titulaire à l'université du Minnesota. Mais en 1965, il a quitté les États-Unis pour l'université hébraïque de Jérusalem, où il a continué à travailler jusqu'à sa retraite en 2003.

Dans son article de 1967, « Couplage en théorie ergodique, ensembles minimaux et un problème d'approximation diophantienne », Furstenberg a introduit la notion de couplage, une notion pour les systèmes ergodiques qui est analogue à celle des nombres premiers entre eux. Cette notion a trouvé sa place dans des domaines tels que la théorie des nombres, les fractales, le traitement du signal et le génie électrique.

Dans son article de 1977, « Comportement ergodique de mesures diagonales et un théorème de Szemerédi sur les progressions arithmétiques », Furstenberg a utilisé des méthodes de la théorie ergodique pour démontrer un résultat célèbre d'Endre Szemerédi (lauréat du prix Abel en 2012) qui affirme que tout sous-ensemble des entiers avec une densité supérieure strictement positive contient des progressions arithmétiques de longueur arbitraire. La démonstration de Furstenberg était plus conceptuelle que celle de Szemerédi et elle a complètement changé la donne. Ses intuitions sont également devenues très fructueuses, conduisant à des résultats importants tels que la démonstration par Ben Green et Terence Tao que la suite des nombres premiers contient de progressions arithmétiques de longueur arbitraire.

Le choix de Furstenberg de passer presque toute sa carrière en Israël a aidé à faire de ce pays un véritable pôle international des mathématiques, en particulier pour la théorie ergodique. Au cours de l'année universitaire 1975-1976, il a dirigé avec Benjamin Weiss un programme d'un an sur la théorie ergodique à l'Institut israélien d'étude avancée, dont on considère qu'il a transformé le domaine.

Parmi ses nombreuses récompenses, le professeur Furstenberg a remporté le prix Israël, considéré comme la plus haute distinction en Israël, et le prix Wolf en mathématiques. Il est membre de l'Académie d'Israël et de l'Académie américaine des arts et des sciences.

Hillel a épousé en 1958 Rochelle, une journaliste spécialisée dans les

arts et la culture. Ils ont eu ensemble cinq enfants qui leur ont donné seize petits-enfants et un nombre toujours plus important d'arrière-petits-enfants.

Grigori Margulis

Tout au long de son illustre carrière de mathématicien, Grigori (Gricha) Margulis a introduit de nombreuses idées déterminantes, trouvé des solutions à des questions ouvertes depuis des décennies et découvert des liens profonds entre différents domaines mathématiques. Sa particularité a été d'utiliser la théorie ergodique de manière inattendue et ingénieuse, ce qui a conduit à la création de nouveaux domaines d'étude.

Né à Moscou en 1946, c'est à l'âge de seize ans qu'il a acquis une première reconnaissance internationale en remportant notamment une médaille d'argent aux **Olympiades internationales de mathématiques**. Il a étudié à l'université d'État de Moscou, où il a obtenu son doctorat en 1970 sous la direction de Iakov Grigorievitch Sinaï (lauréat du prix Abel en 2014). Sa thèse a mis en exergue une originalité particulière : il a construit une mesure, désormais appelée mesure de Bowen-Margulis, qui lui a permis de découvrir de nouvelles propriétés sur la géométrie des espaces hyperboliques. Par la suite, ses méthodes ont suscité de nombreuses et inédites réflexions ainsi que de nouveaux domaines de recherche active.

Le jeune Margulis a remporté la médaille Fields en 1978, à seulement trente-deux ans, pour ses travaux sur les réseaux dans les groupes de Lie, notamment ses théorèmes d'arithméticité et de superrigidité. Le théorème d'arithméticité affirme que tous les réseaux irréductibles dans les groupes de Lie semi-simples de rang supérieur à 2 sont arithmétiques, et le théorème de superrigidité qu'une représentation d'un tel réseau s'étend à une représentation du groupe de Lie ambiant. La démonstration de la superrigidité a mis en évidence de nouvelles applications de la théorie ergodique, en établissant de nouvelles méthodes puissantes qui sont devenues très influentes dans de nombreux domaines.

Jacques Tits (lauréat du prix Abel en 2008) a mentionné Margulis en 1978 dans son discours en disant : « Il n'est pas exagéré de dire que, à plusieurs reprises, il a déconcerté les experts en résolvant des questions qui semblaient alors totalement hors de portée. »

Margulis n'a cependant pas pu recevoir la médaille Fields dans la

mesure où les autorités soviétiques lui ont refusé son visa pour assister à la cérémonie de remise des prix à Helsinki en Finlande. Ce n'est qu'en 1979 qu'il a été autorisé à voyager à l'étranger, lorsque les universitaires soviétiques ont bénéficié de plus de libertés individuelles. Au cours des années 1980, il s'est rendu dans des universités en Suisse, en France et aux États-Unis, avant de s'installer en 1991 à Yale, où il vit depuis lors.

Au début de sa carrière, Margulis a été victime de discrimination en raison de son origine juive. En dépit de son statut de jeune mathématicien émérite, il n'a pas été en mesure de trouver un emploi à l'université de Moscou. C'est pourquoi il a travaillé à l'Institut pour les problèmes de transmission de l'information, un organisme plus modeste. Ses relations professionnelles avec ses collègues de l'institut ont cependant abouti à une découverte remarquable. Ces derniers lui ont parlé d'un type de graphe appelé « graphe expasseur ». En quelques jours, Margulis avait construit le premier exemple connu de graphe expasseur en utilisant des idées de la théorie des représentations, un domaine abstrait et apparemment sans rapport. La découverte qu'il a faite était révolutionnaire et a donné lieu à la création de nombreuses applications dans le domaine de l'informatique.

Margulis a de nouveau mis en évidence son talent pour démontrer des théorèmes de manière surprenante lorsqu'en 1978, il a révélé ce que l'on appelle aujourd'hui son théorème du sous-groupe normal sur les réseaux dans les groupes de Lie. Sa démonstration est une combinaison très originale de la théorie des groupes moyennables d'une part et de la propriété (T) de Kazhdan découlant de la théorie des représentations d'autre part.

En 1984, il a démontré la conjecture d'Oppenheim en théorie des nombres, énoncée pour la première fois en 1929, en utilisant des méthodes de la théorie ergodique. L'idée d'utiliser la théorie ergodique de cette manière était plus importante que le résultat. Cela a créé un nouveau domaine appelé aujourd'hui « dynamique homogène ». Les travaux réalisés par trois récents lauréats de la médaille Fields ([Elon Lindenstrauss](#), [Maryam Mirzakhani](#) et [Akshay Venkatesh](#)) s'appuient tous sur les idées antérieures de Margulis.

Margulis a été aussi prolifique que ses travaux ont été diversifiés. En 2008, la revue *Pure and Applied Mathematics Quarterly* a publié un article de plus de cinquante pages qui énumérait les principaux résultats de Margulis.

En 2001, il a été élu à l'Académie nationale des sciences des États-Unis. Il a reçu les prix Lobatchevski et Wolf.

Margulis et sa femme Raïssa (Raya) sont parents d'un fils, mais également grands-parents d'une petite-fille.

Bibliographie

- ALVAREZ (Aurélien), « **Une infinité de nombres premiers, d'après Furstenberg** », *Images des mathématiques*, 2020.
- DE SAXCÉ (Nicolas), « Ensembles invariants par $\times 2$ et $\times 3$ », *Gazette de la Société mathématique de France*, 2023, n° 175, p. 25-34.
- DUCHESNE (Bruno), « **Hillel Furstenberg et Grigori Margulis reçoivent le prix Abel 2020** », *Images des mathématiques*, 2020.

LA MARCHÉ ALÉATOIRE, UNE BONNE STRATÉGIE POUR TROUVER UNE FRIANDISE, TANT POUR LE CHIEN QUE POUR LE MATHÉMATICIEN (par ARNE B. SLETSJØE)

Si vous cachez des friandises dans votre jardin et que vous demandez à votre chien de les trouver, il commencera immédiatement à les chercher. La trajectoire le long de laquelle il renifle semble être tout à fait aléatoire. Le chien n'est apparemment pas un adepte de la recherche systématique. Néanmoins, après un court laps de temps, le chien trouve la récompense. L'instinct du chien lui dicte d'utiliser une technique de marche aléatoire, c'est-à-dire que la direction de sa recherche change constamment de manière aléatoire.

En mathématiques, le comportement du chien est représenté par le concept de marche aléatoire. Une marche aléatoire est un objet mathématique qui décrit une trajectoire composée d'une succession de pas aléatoires dans un espace mathématique donné. Il existe de nombreux exemples de systèmes physiques modélisés par des marches aléatoires : le comportement des molécules de gaz, les marchés boursiers, les propriétés statistiques de la dérive génétique et l'activité des neurones dans le cerveau, pour n'en citer que quelques-uns. Mais les marches aléatoires peuvent également être considérées comme un outil permettant d'explorer un objet mathématique, de la même manière que le chien essaie d'explorer le jardin. Harry Furstenberg et Grigori Margulis n'utilisent pas les marches aléatoires pour trouver des friandises dans le jardin. Ils utilisent les marches aléatoires sur des graphes ou des groupes afin de révéler les secrets de ces objets.

Les groupes de Lie, nommés d'après le mathématicien norvégien Sophus Lie (1842-1899), constituent une famille intéressante d'objets mathématiques. Les groupes de Lie sont des objets qui décrivent les symétries d'objets géométriques, comme la symétrie de rotation dans l'espace tridimensionnel. Sophus Lie s'est inspiré des travaux antérieurs d'Abel et de Galois sur les solutions d'équations algébriques. La démonstration par Abel du caractère non résoluble par radicaux de l'équation du cinquième degré et la théorie révolutionnaire de Galois, qui permet de relier les solutions d'équations polynomiales à certains groupes d'automorphismes d'extensions de corps, sont deux exemples brillants de la manière dont on peut comprendre les détails en élargissant l'horizon. L'idée de Lie était d'introduire une méthode similaire pour étudier les symétries des équations différentielles. Depuis lors, il est important de comprendre la structure de ces groupes afin de se

rapprocher de la solution des équations différentielles sous-jacentes.

Furstenberg et Margulis ont contribué de manière significative à notre compréhension des groupes de Lie en inventant des concepts et en démontrant des théorèmes. En général, un groupe de Lie est infini et non compact : quelle que soit la façon dont on considère le groupe, il possède une certaine dimension non bornée. Les techniques de marche aléatoire sont bien adaptées pour étudier tout ce qui n'est pas borné.

Si la trajectoire du chien est ergodique, le chien s'approchera à long terme de la friandise. En fait, si nous traçons un cercle autour de la friandise, de petit rayon arbitraire, le chien reniflera après un certain temps à l'intérieur du cercle et découvrira probablement la friandise. Il s'agit d'un exemple de récurrence. La notion de récurrence d'un système dynamique remonte aux travaux d'Henri Poincaré vers la fin du XIX^e siècle. Il a démontré sous certaines conditions qu'un système dynamique (un système qui évolue dans le temps) revient, ou du moins revient presque, à n'importe quel point de l'espace ambiant. En utilisant la technique des marches aléatoires, nous pouvons relier la taille du groupe à la question de la récurrence. Si le groupe est « trop grand », il est probable qu'aucune récurrence ne se produira au cours de la marche aléatoire, et vice versa.

L'héritage mathématique de Furstenberg et Margulis contient de nombreuses inventions basées sur la théorie ergodique, la récurrence, les groupes de Lie et les marches aléatoires. Furstenberg a introduit les frontières de Furstenberg et le couplage. Margulis a élaboré le concept de superrigidité et le théorème des sous-groupes normaux. Margulis a également fourni une démonstration de la conjecture d'Oppenheim relative à la quasi-solution en nombres entiers des équations quadratiques en trois variables. Furstenberg a redémontré le théorème d'Endre Szemerédi sur l'existence de progressions arithmétiques de longueur arbitraire, à chaque fois à l'aide de la théorie ergodique. Les deux derniers exemples illustrent bien la façon dont les deux lauréats démontrent l'omniprésence des méthodes probabilistes et l'efficacité du franchissement des barrières entre des disciplines mathématiques distinctes, comme le souligne la citation du comité Abel.

Le jardin mathématique recèle de nombreuses friandises cachées. Les travaux des lauréats du prix Abel de cette année suggèrent que la marche aléatoire pourrait être une bonne stratégie pour en révéler certaines.

LES PROPRIÉTÉS ASYMPTOTIQUES DES GROUPES (par ARNE B. SLETSJØE)

Un groupe abstrait est un ensemble avec une opération binaire qui vérifie certaines propriétés comme l'associativité et l'existence d'inverses. L'opération binaire peut être l'addition, la multiplication ou la composition d'éléments ou de fonctions, selon le groupe auquel on pense. Les groupes peuvent avoir un nombre fini ou infini d'éléments, et ils peuvent avoir une structure assez complexe. Mais les groupes peuvent aussi avoir une structure plus ou moins triviale, comme le groupe additif $\{0\}$ à un seul élément. D'autres exemples de groupes sont les entiers \mathbb{Z} avec l'addition ordinaire comme opération binaire, l'ensemble des matrices inversibles de taille $n \times n$ avec la multiplication comme opération binaire, ou l'ensemble des symétries d'un cube avec la composition, qui est en fait le même groupe que l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{A, B, C, D\}$.

De la même manière que le groupe des symétries d'un cube agit sur les sommets du cube, un groupe abstrait peut agir sur un ensemble arbitraire. L'action doit refléter la structure binaire du groupe, c'est-à-dire que si $\rho_g(x)$ désigne l'action de l'élément de groupe g sur l'élément $x \in X$, il est nécessaire que $\rho_{gg'}(x) = \rho_g(\rho_{g'}(x))$.

Les atomes du monde des groupes sont les groupes simples. Pour les groupes finis, les groupes simples sont complètement classifiés grâce au travail de nombreux mathématiciens pendant plusieurs décennies, parmi lesquels le lauréat du prix Abel 2008 John Griggs Thompson a joué un rôle de premier plan.

Les groupes peuvent avoir une structure supplémentaire compatible avec l'opération binaire du groupe, comme les groupes topologiques. Un groupe topologique est un groupe qui est également un espace topologique avec une opération binaire continue. Comme exemple de groupe topologique, considérons le groupe du cercle

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

L'opération de groupe est donnée par l'addition des angles. En fait, le groupe du cercle est ce qu'on appelle un groupe topologique compact.

Une propriété importante d'un groupe est sa taille. Pour les groupes finis, nous pouvons compter les éléments pour trouver l'ordre du groupe, mais pour les groupes infinis, ce n'est pas si simple. Nous avons besoin de mesures plus sophistiquées. Nous nous concentrons sur deux propriétés différentes : la moyennabilité et la propriété (T) de Kazhdan.

Pour définir la moyennabilité, nous utilisons la notion de suite de Følner. Une suite de Følner pour l'action d'un groupe G sur un ensemble dénombrable X est une suite d'ensembles finis qui « remplit » X et telle que l'action sur X « ne bouge pas trop ». La définition précise est la suivante :

Définition. Soit G un groupe qui agit sur un ensemble dénombrable X . Une suite de Følner pour cette action est une suite $F_1 \subset F_2 \subset \dots$ de sous-ensembles finis de X tels que $\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j = X$ et tels que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|gF_j \Delta F_j|}{|F_j|} = 0$$

pour tout $g \in G$, où Δ représente la *différence symétrique*, c'est-à-dire $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

On dit qu'un groupe discret dénombrable G est moyennable s'il contient au moins une suite de Følner pour l'action du groupe sur lui-même.

Le groupe des entiers relatifs \mathbb{Z} est un exemple de groupe moyennable. Il possède une suite de Følner $F_j = [-j, \dots, j]$ dont l'union est l'ensemble \mathbb{Z} et telle que

$$(z + F_j) \Delta F_j = [j + 1, \dots, j + z] \cup [-j, \dots, -j + z]$$

a un cardinal égal à $2z$. Puisque z est fixe, la limite de la fraction avec $|F_j| = 2j + 1$ au dénominateur est 0.

Une définition équivalente pour les groupes discrets dénombrables, due à **J. Dixmier**, est qu'il existe des *vecteurs unitaires* ξ dans $\ell^2(G)$ tels que $\|g\xi - \xi\|$ tende vers 0 pour tout $g \in G$. On dit que ξ est un vecteur presque invariant. Remarquons que les groupes finis, les groupes résolubles et les groupes à croissance polynomiale engendrés par un nombre fini d'éléments sont tous moyennables.

Le degré de croissance d'un groupe est une notion bien définie en analyse asymptotique. Dire qu'un groupe engendré par un nombre fini d'éléments a une croissance polynomiale signifie que le nombre d'éléments de longueur (par rapport à un ensemble générateur symétrique) au plus n est majoré par une fonction polynomiale $P(n)$. Le degré de croissance est alors le plus petit degré d'une telle fonction polynomiale P .

L'autre propriété que nous considérons est la propriété (T) de Kazhdan.

Définition. Soit G un groupe localement compact et $\rho : G \rightarrow U(H)$ une *représentation unitaire* de G sur un *espace de Hilbert* H . Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout sous-ensemble compact $S \subset G$, un vecteur unitaire $\xi \in H$ est dit (ε, S) -invariant si

$$\|\rho(g)\xi - \xi\| < \varepsilon \quad \forall g \in S.$$

On dit que G a la propriété (T) de Kazhdan si toute représentation unitaire de G qui a un vecteur unitaire (ε, S) -invariant pour tout $\varepsilon > 0$ et tout sous-ensemble compact S a un vecteur invariant non nul.

En utilisant la définition de Dixmier de la moyennabilité, nous remarquons la relation entre les deux définitions : la moyennabilité est équivalente à l'existence d'un vecteur unitaire (ε, S) -invariant $\xi \in H$, et la propriété (T) de Kazhdan dit que si G a un vecteur unitaire (ε, S) -invariant pour tout $\varepsilon > 0$ et tout sous-ensemble compact S , alors il a un vecteur invariant non nul. Nous avons quelques exemples de groupes qui ont la propriété (T) : les groupes finis, les groupes topologiques compacts et les groupes de Lie simples réels de rang réel au moins égal à deux, y compris les *groupes spéciaux linéaires* $SL_n(\mathbb{R})$ pour $n \geq 3$.

Examinons également quelques exemples de groupes qui n'ont pas la propriété (T) : le groupe additif \mathbb{Z} des entiers relatifs ou le groupe additif des nombres réels \mathbb{R} , les groupes résolubles non compacts, les groupes libres non triviaux et les groupes abéliens libres, ainsi que les groupes spéciaux linéaires $SL_2(\mathbb{Z})$ et $SL_2(\mathbb{R})$.

Pour illustrer certains aspects techniques de cet univers, nous donnons une démonstration du fait que tout groupe fini possède la propriété (T) :

Démonstration. Soit G un groupe fini. Soit $\rho : G \rightarrow U(H)$ une représentation unitaire de G qui possède un vecteur unitaire (ε, S) -invariant ξ pour tout sous-ensemble $S \subset G$ et $\varepsilon > 0$. On peut évidemment supposer que

$$\sup_{s \in G} \|\rho(s)\xi - \xi\| < \sqrt{2}.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}
 1 - \frac{\|\rho(s)\xi - \xi\|^2}{2} &= 1 - \frac{1}{2}\langle \rho(s)\xi - \xi, \rho(s)\xi - \xi \rangle \\
 &= 1 - \frac{1}{2}\left(\langle \rho(s)\xi, \rho(s)\xi \rangle + \langle -\xi, \rho(s)\xi \rangle \right. \\
 &\quad \left. + \langle \rho(s)\xi, -\xi \rangle + \langle -\xi, -\xi \rangle\right) \\
 &= \frac{1}{2}\left(\langle \xi, \rho(s)\xi \rangle + \langle \rho(s)\xi, \xi \rangle\right) \\
 &= \Re\langle \rho(s)\xi, \xi \rangle > 0.
 \end{aligned}$$

Soit

$$\eta = \sum_{g \in G} \rho(g)\xi.$$

Par construction, ce vecteur est invariant. Il est également non nul puisque

$$\Re\langle \eta, \xi \rangle \neq 0$$

par le raisonnement précédent. Nous avons donc montré que des vecteurs presque invariants produisent un vecteur invariant non nul. \square

Nous donnons aussi une démonstration d'un cas où nous avons la conclusion opposée : le groupe \mathbb{R} ne vérifie pas la propriété (T) de Kazhdan.

Démonstration. Soit $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \ell^2(\mathbb{R})$ la **représentation régulière** gauche de \mathbb{R} :

$$\lambda(t)f(x) = f(x - t).$$

Soit $Q \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble compact, borné par M , et soit $\varepsilon > 0$ un nombre réel. Considérons l'intervalle $I = [a, b]$ dans \mathbb{R} tel que $b - a > \frac{2M}{\varepsilon^2}$.

Soit

$$\xi = (b - a)^{-\frac{1}{2}}\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

où χ est la **fonction caractéristique** de $[a, b]$. On a alors

$$\|\xi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \xi^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\chi^2}{b - a} dx = 1$$

et ξ est unitaire. De plus, on a

$$\begin{aligned}
 (\lambda(t)\xi - \xi)^2 &= (\xi(x - t) - \xi(x))^2 \\
 &= \frac{1}{b - a} (\chi_{[a, a+t]} + \chi_{[b, b+t]}),
 \end{aligned}$$

où nous avons utilisé que $|t| < b - a$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\|\lambda(t)\xi - \xi\|^2 &= \int_{\mathbb{R}} (\lambda(t)\xi - \xi)^2 dx \\ &= \frac{2|t|}{b-a} < \frac{2M}{b-a} < \varepsilon^2.\end{aligned}$$

Il en résulte que la représentation régulière possède presque des vecteurs invariants.

Par contre, la représentation régulière n'a pas de vecteurs invariants. En effet, supposons

$$\lambda(t)f(x) = f(x - t) = f(x)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors f est constante, différente de 0. Mais les fonctions constantes strictement positives n'appartiennent pas à $\ell^2(\mathbb{R})$. \square

DEUX PROBLÈMES DE THÉORIE DES NOMBRES RÉSOLUS PAR DES MÉTHODES DE THÉORIE ERGODIQUE : LE THÉORÈME DE SZEMERÉDI ET LA CONJECTURE D'OPPENHEIM
(par ARNE B. SLETSJØE)

Le premier problème concerne les progressions arithmétiques. Une progression arithmétique est une suite d'entiers avec des différences fixes. Les ensembles $\{5, 8, 11, 14, 17\}$ et $2\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$ sont deux exemples de progressions arithmétiques. La première a une longueur de 5 et une raison égale à 3, la seconde a une longueur infinie et une raison égale à 2. Considérons maintenant un sous-ensemble A des entiers relatifs \mathbb{Z} . Sur la base d'un article de 1936 des deux mathématiciens hongrois Paul Erdős et Pál Turán, on a conjecturé que si le sous-ensemble A a une densité strictement positive, alors il contient des progressions arithmétiques de longueur arbitraire.

La densité d'un ensemble A reflète la probabilité qu'un nombre entier arbitrairement choisi fasse partie de A . La définition formelle est la suivante :

Définition. *Un ensemble A de nombres entiers a une densité supérieure strictement positive si*

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{|A \cap \{-N, \dots, N\}|}{2N + 1} > 0.$$

L'ensemble $2\mathbb{Z}$ a une densité de 2. Un ensemble fini a une densité nulle. Les ensembles infinis peuvent également avoir une densité nulle, comme c'est le cas de l'ensemble des nombres premiers.

La conjecture d'Erdős-Turán a été démontrée pour la première fois en 1975 par Endre Szemerédi, lauréat du prix Abel en 2012, à l'aide d'arguments combinatoires.

Théorème (Szemerédi, 1975). *Soit $k \geq 1$ un entier et soit A un ensemble d'entiers de densité supérieure strictement positive. Alors A contient une progression arithmétique non triviale de longueur k .*

En 1977, Furstenberg a donné une autre démonstration de la conjecture, en établissant ce qui est maintenant appelé le théorème de récurrence multiple de Furstenberg :

Théorème (Furstenberg, 1977). *Soit $k \geq 1$ un entier, $(\mathbb{Z}, \chi, \mu, T)$ un système qui préserve la mesure sur \mathbb{Z} et $E \subset \mathbb{Z}$ un ensemble de mesure strictement positive. Il existe alors $r > 0$ tel que*

$$E \cap T^{-r}E \cap \dots \cap T^{-(k-1)r}E \neq \emptyset.$$

Pour voir que le théorème de récurrence multiple de Furstenberg implique le théorème de Szemerédi (en évitant quelques détails techniques plus profonds), prenons pour E l'ensemble A et prenons pour T l'opérateur de décalage $x \mapsto x + 1$ sur \mathbb{Z} . Alors si A ne contient aucune progression arithmétique de longueur k , l'intersection

$$A \cap T^{-r}A \cap \dots \cap T^{-(k-1)r}A \neq \emptyset \quad \text{pour tout } r > 0.$$

En fait, si l'intersection est non vide, nous pouvons trouver des éléments a_0, \dots, a_{k-1} dans A tels que

$$a_0 = a_1 - r = a_2 - 2r = \dots = a_{k-1} - (k-1)r.$$

Mais alors

$$a_{k-1}, a_{k-2} = a_{k-1} + r, \dots, a_0 = a_{k-1} + (k-1)r$$

est une progression arithmétique dans A de longueur k , ce qui contredit la conclusion du théorème de récurrence multiple.

Le second problème est connu sous le nom de conjecture d'Oppenheim, du nom du mathématicien britannique **Alexander Oppenheim**. Cette conjecture concerne les solutions des équations quadratiques en nombres rationnels. Un **théorème d'A. Meyer** datant de 1884 indiquait qu'une grande classe d'équations quadratiques (correspondant à des formes quadratiques indéfinies) à cinq variables ou plus et avec des coefficients entiers ont des solutions rationnelles.

Théorème (A. Meyer, 1884). *Soit Q une forme quadratique indéfinie à cinq variables ou plus sur les nombres rationnels \mathbb{Q} . Si*

$$Q(x) = 0$$

a une solution non nulle dans \mathbb{R} , alors elle a aussi une solution non nulle dans \mathbb{Z} .

Le théorème est optimal en ce qui concerne le nombre de variables. Considérons la forme quadratique

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 - p(x_3^2 + x_4^2),$$

où p est un nombre premier congru à 3 modulo 4. L'équation $Q = 0$ a évidemment des solutions réelles, mais pas de solutions entières. En effet, un carré parfait est congru à 0 modulo 4 ou congru à 1 modulo 8.

Supposons que x_1, x_2, x_3, x_4 n'aient pas de facteur commun. Alors au moins l'un d'entre eux est congru à 1 modulo 8. On peut montrer qu'il n'y a pas de solutions de la congruence $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ modulo 8. Mais il est alors impossible qu'il existe des solutions entières.

Oppenheim a conjecturé que les équations quadratiques de la même classe, mais avec des coefficients plus généraux et seulement en trois variables ou plus, peuvent être approchées par des nombres rationnels. La formulation précise de la conjecture d'Oppenheim est la suivante :

Conjecture (Oppenheim, 1929). *Soit Q une forme quadratique indéfinie réelle non dégénérée à trois variables ou plus. Supposons que Q ne soit pas un multiple d'une forme à coefficients rationnels. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un vecteur rationnel non nul x tel que $|Q(x)| < \varepsilon$.*

La conjecture n'est pas vraie pour les équations quadratiques à deux variables. En fait, on sait que pour un nombre algébrique α qui est solution d'une équation quadratique à coefficients entiers, il existe un nombre réel C tel que $|\alpha - \frac{p}{q}| \geq \frac{C}{q^2}$ pour tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$. Considérons la forme quadratique $Q(x, y) = \alpha^2 x^2 - y^2$. Pour les entiers p et q on a alors

$$\begin{aligned} |Q(p, q)| &= |\alpha^2 p^2 - q^2| \\ &= |(\alpha p - q)(\alpha p + q)| \\ &\geq \frac{C}{p} |\alpha p + q| \\ &\geq C |\alpha| \end{aligned}$$

qui montre que la conjecture n'est pas vraie pour les formes quadratiques à deux variables.

La conjecture d'Oppenheim a été démontrée en 1987 par Margulis en toute généralité en utilisant des méthodes de la théorie ergodique.

RÉCURRENCE DES MARCHES ALÉATOIRES DANS \mathbb{Z} ET \mathbb{Z}^2 , MAIS PAS DANS \mathbb{Z}^3 (par ARNE B. SLETSJØE)

Supposons que nous soyons en mesure, à un moment donné, de localiser chaque molécule de gaz dans un récipient fermé, de noter sa position et sa vitesse, c'est-à-dire de décider de l'état du gaz. Juste après ce moment privilégié, les molécules de gaz continueront à se déplacer dans le récipient, se heurtant constamment les unes aux autres et aux parois d'une manière plutôt chaotique. Il semble un peu paradoxal que le gaz atteigne à nouveau le même état que celui observé précédemment, mais c'est exactement ce qui se produit selon le **théorème de récurrence d'Henri Poincaré** qui date de 1890. Vous pouvez comparer cela au fait que si vous continuez à écrire des lettres au hasard, vous finirez par écrire par accident une version rigoureusement correcte de la célèbre pièce de Henrik Ibsen *Une maison de poupée*. Cela peut prendre un certain temps, mais cela se produira tôt ou tard.

Divers résultats sur la récurrence ont été présentés depuis la discussion de Poincaré en 1890. Le fondement mathématique du concept a été posé par Birkhoff en 1930 avec sa démonstration du **théorème ergodique**. Ce théorème stipule que pour une transformation qui préserve la mesure d'un système de volume fini, presque tous les points de départ seront atteints de manière répétée.

Pour illustrer le phénomène de récurrence, nous pouvons étudier les marches aléatoires dans \mathbb{Z}^n pour $n = 1, 2$ ou 3 avec une distribution de probabilité uniforme.

Considérons une marche aléatoire uniformément distribuée le long de \mathbb{Z} . À partir de x , on atteint $x+1$ avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et $x-1$ avec la même probabilité. Soit $M \in \mathbb{Z}$. Pour simplifier, supposons $M > 0$. Pour tout $0 < x < M$, nous posons la question : quel nombre atteignons-nous en premier, 0 ou M ? Soit $m(x)$ la probabilité d'atteindre M en premier. Que se passe-t-il à l'étape suivante? Avec la probabilité $\frac{1}{2}$, on saute vers $x+1$, où la probabilité d'atteindre M en premier est $m(x+1)$. Avec la même probabilité, on saute vers $x-1$, où la probabilité correspondante est $m(x-1)$. Ceci donne la relation

$$\frac{1}{2}m(x-1) + \frac{1}{2}m(x+1) = m(x)$$

avec les conditions aux bords $m(0) = 0$ et $m(M) = 1$. La solution de cette équation aux différences est $m(x) = \frac{x}{M}$. La probabilité d'atteindre 0 en premier est alors $1 - \frac{x}{M}$. Supposons que nous n'atteignons pas du tout 0 . Cela équivaut au fait que nous atteignons n'importe quel

nombre positif M avant d'atteindre 0, c'est-à-dire $m(x) = \frac{x}{M} = 1$ pour tout $M \in \mathbb{Z}$ et toute valeur de départ x . Ceci est bien sûr impossible, ce qui signifie que nous reviendrons à coup sûr en 0.

En fait, nous pouvons calculer la probabilité que la marche aléatoire revienne après $2n$ pas (ce doit être un nombre pair). En utilisant le **triangle de Pascal**, nous voyons que la probabilité de revenir après $2n$ pas est

$$\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}.$$

Ce nombre peut être évalué approximativement pour de grandes valeurs de n par la **formule de Stirling**. La formule de Stirling dit que $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$. Donc

$$\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \simeq \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n}}{2^{2n} (n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n})^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Soit p la probabilité de revenir en 0. Alors la probabilité de revenir exactement n fois est $p^{n-1}(1-p)$. L'**espérance** de cette distribution est

$$E = \sum_{n=1}^{+\infty} np^{n-1}(1-p) = \frac{1}{1-p}.$$

L'espérance du nombre de retours en 0 peut être exprimée comme la somme des espérances d'un seul retour après $2n$ étapes,

$$E = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}},$$

qui diverge. Donc $1-p=0$: on reviendra à coup sûr en 0.

On peut utiliser le même formalisme pour montrer la récurrence dans \mathbb{Z}^2 . Dans ce cas, nous devons revenir en 0 dans deux directions, c'est-à-dire que la probabilité est donnée par

$$\frac{1}{\sqrt{\pi n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = \frac{1}{\pi n}.$$

Une fois de plus, nous constatons que

$$E = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi n}.$$

diverge et que $1 - p = 0$.

Si l'on continue à augmenter la dimension, c'est-à-dire si l'on considère \mathbb{Z}^3 , on remarque que la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\sqrt{\pi n})^3}$$

converge. Donc $p \neq 1$, ce qui signifie que nous ne pouvons pas être sûrs de revenir en 0. La probabilité de retour est environ $p \approx 0,3405$.

LA CONSTRUCTION PAR MARGULIS D'UNE FAMILLE DE GRAPHS EXPANSEURS, C'EST-À-DIRE DE GRAPHS PEU DENSES DOTÉS DE FORTES PROPRIÉTÉS DE CONNECTIVITÉ
(par ARNE B. SLETSJØE)

Rappelons qu'un graphe est constitué d'un ensemble de nœuds V et d'un ensemble d'arêtes E entre certaines paires de nœuds. Dans un graphe complet, il existe une arête entre n'importe quelle paire de nœuds ; il est donc loin d'être peu dense. Dans un **graphe connexe**, deux nœuds quelconques sont reliés par une suite d'arêtes. Les graphes **expandeurs** sont des graphes peu denses dotés de fortes propriétés de connectivité. Les graphes **expandeurs** ont trouvé de nombreuses applications dans la **théorie de la complexité**, la conception de réseaux informatiques robustes et la théorie des codes correcteurs d'erreurs, pour n'en citer que quelques-unes.

Une façon de décrire un graphe G est de considérer la **matrice d'adjacence**. La matrice d'adjacence $A = (a_{ij})$ est une matrice carrée de taille $n \times n$ dont le nombre de colonnes et de lignes est égal au nombre de nœuds ($n = |G|$) et telle que

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{i, j\} \in E, \\ 0 & \text{si } \{i, j\} \notin E. \end{cases}$$

On peut aussi définir l'opérateur d'adjacence $A : \ell^2(V) \rightarrow \ell^2(V)$ sur les fonctions $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ par la formule

$$Af(v) = \sum_{\{v,w\} \in E} f(w),$$

c'est-à-dire que l'on prend la somme de la fonction sur tous les voisins de v . Le nombre de voisins d'un nœud $v \in V$ est appelé le **degré** de v , noté $\deg(v)$.

La matrice d'adjacence est **symétrique** avec des **valeurs propres**

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n.$$

Les valeurs propres révèlent différentes propriétés du graphe. Pour un **graphe k -régulier**, c'est-à-dire un graphe pour lequel chaque nœud a précisément k voisins, on a $\lambda_1 = k$ et $\lambda_n \geq -k$. On a également $\lambda_n = -k$ si et seulement si G contient un graphe biparti non vide comme **composante connexe**. Pour un graphe k -régulier sur n sommets, on a

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = nk.$$

Pour tout sous-ensemble W de nœuds dans G , on note ∂W l'ensemble des nœuds situés en dehors de W mais ayant une arête menant à W :

$$\partial W = \{v \in V \setminus W \mid \exists w \in W, \{v, w\} \in E\}.$$

Pour tout ensemble W de nœuds dans G , on utilise la notation

$$\varepsilon(W, \partial W) = \{ \{v, w\} \in E \mid w \in W, v \in \partial W \}.$$

Définition. Soit $G = (V, E)$ un graphe fini. Le *taux d'expansion* (ou constante de *Cheeger*) $h(G)$ de G est donné par

$$h(G) = \min_W \left\{ \frac{|\varepsilon(W, \partial W)|}{|W|} \right\},$$

où W parcourt les sous-ensembles non triviaux de nœuds dans G de cardinal $|W| \leq \frac{1}{2}|V|$.

Définition. Un graphe est un (d, ε) -*expandeur* s'il est d -régulier et $h(G) \geq \varepsilon$.

Remarquons que $\varepsilon(W, \partial W) \leq d|W|$. En d'autres termes, $h(G)$ est le plus petit rapport possible entre le nombre d'arêtes sortant de W et la taille de W , lorsque W est un ensemble de sommets non vide mais pas trop grand. Le taux d'expansion donne des informations précieuses sur la connectivité de G . En fait, on peut montrer que G est connexe si et seulement si $h(G) > 0$. Un autre fait est que si W est un sous-ensemble de nœuds avec

$$\frac{|W|}{|V|} = \delta < \frac{1}{2},$$

il faut enlever au moins $\delta \cdot h(G) \cdot |V|$ nœuds pour déconnecter W du reste du graphe.

Définition. Une famille $\{G_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de graphes connexes finis non vides $G_i = (V_i, E_i)$ est une *famille d'expandeurs* s'il existe des constantes $\nu \geq 1$ et $h > 0$, qui ne dépendent pas de i , telles que

— le nombre de nœuds tend vers l'infini :

$$|G_i| \rightarrow +\infty \text{ quand } i \rightarrow +\infty;$$

— le nombre de voisins est limité (c'est la non densité) : pour tout $i \in \mathbb{N}$ et $v \in V_i$,

$$\deg(v) \leq \nu;$$

— la connectivité est contrôlée : pour tout $i \in \mathbb{N}$, le taux d'expansion vérifie

$$h(G_i) \geq h > 0.$$

Même s'il est assez facile de trouver des exemples de graphes expandeurs, ce n'est qu'en 1973 que l'on a su construire une famille de tels graphes. Margulis a proposé la construction suivante.

Pour tout n , soit G_n un graphe dont l'ensemble des sommets est $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$, c'est-à-dire que G_n a n^2 nœuds. Définissons quatre fonctions

$$S(a, b) = (a, a + b), \quad T(a, b) = (a + b, b),$$

$$s(a, b) = (a + 1, b), \quad t(a, b) = (a, b + 1),$$

où l'addition se fait modulo n . Un sommet $(a, b) \in G_n$ est relié aux huit autres sommets donnés par

$$s, s^{-1}, t, t^{-1}, S, S^{-1}, T, T^{-1}.$$

Margulis a démontré que $h(G_n) \geq 0,46$ pour tout n . Il s'ensuit que G_n est une famille d'expandeurs de degré constant égal à 8, et de taux d'expansion minoré par 0,46.

Très rapidement après cette première construction en 1973, d'autres exemples ont été construits.

Soit p un nombre premier et soit $V = \mathbb{Z}_p$. On définit un graphe 3-régulier $G = (V, E)$ où les arêtes sont de deux types : $(x, x + 1)$ et $(x, x - 1)$ pour tout $x \in \mathbb{Z}_p$. On pose $0^{-1} = 0$. Il s'agit d'un $(3, \varepsilon)$ -expandeur pour un $\varepsilon > 0$ fixé.

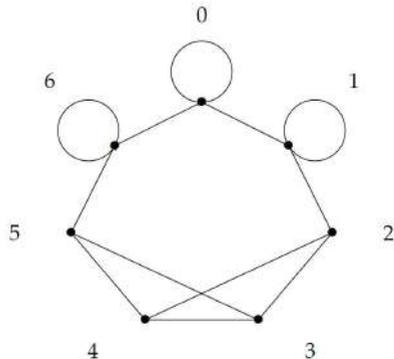


Fig. 49 – Le graphe du dernier exemple pour $p = 7$. Remarquons qu'une boucle compte pour une arête.

Lovász et Wigderson (2021)

« pour leurs contributions fondamentales à l'informatique théorique et aux mathématiques discrètes, et pour leur rôle de premier plan dans leur transformation en domaines centraux des mathématiques contemporaines ».

L'informatique théorique est l'étude de la puissance et des limites du calcul. Elle trouve son origine dans les travaux fondateurs de **Kurt Gödel**, **Alonzo Church**, **Alan Turing** et John von Neumann, qui ont conduit au développement de véritables ordinateurs physiques. L'informatique théorique comprend deux sous-disciplines complémentaires : l'**algorithmique**, qui développe des méthodes efficaces pour une multitude de problèmes de calcul, et la complexité, qui montre les limites inhérentes à l'efficacité des algorithmes. La notion d'algorithmes en temps polynomial mise en avant dans les années 1960 par **Alan Cobham**, **Jack Edmonds** et d'autres, ainsi que la célèbre **conjecture $P \neq NP$** de **Stephen Cook**, **Léonid Lévine** et **Richard Karp** ont eu un fort impact sur le domaine et sur les travaux de Lovász et de **Wigderson**.

Indépendamment de son impact considérable sur l'informatique en général et sur sa pratique, l'informatique théorique fournit les bases de la **cryptographie** et a maintenant une influence croissante sur plusieurs autres sciences, ce qui permet de faire de nouvelles découvertes en « chaussant des lunettes d'informaticien ». Les structures discrètes telles que les graphes, les chaînes de caractères et les permutations sont au cœur de l'informatique théorique. Les mathématiques discrètes et l'informatique théorique ont naturellement été des domaines étroitement liés. Ces deux domaines ont certes énormément bénéficié des champs de recherche plus traditionnels des mathématiques, mais on constate également une influence croissante dans le sens inverse. Les applications, concepts et techniques de l'informatique théorique ont engendré de nouveaux défis, ouvert de nouvelles directions de recherche et résolu d'importants problèmes ouverts en mathématiques pures et appliquées.

László Lovász et Avi Wigderson ont joué un rôle clé dans cette évolution au cours des dernières décennies. Leurs travaux sont imbriqués de nombreuses manières. En particulier, ils ont tous les deux apporté

des contributions fondamentales à la compréhension de l'aléa dans le calcul et à l'exploration des limites du calcul efficace.

En collaboration avec [Arjen Lenstra](#) et [Hendrik Lenstra](#), László Lovász a développé l'[algorithme LLL de réduction de réseau](#). Étant donné un réseau de grande dimension, cet algorithme produit une bonne base, presque orthogonale. En plus de ses nombreuses applications telles qu'un algorithme de factorisation des polynômes rationnels, l'algorithme LLL est l'un des outils préférés des cryptanalystes et a réussi à casser plusieurs cryptosystèmes proposés. Fait surprenant, l'analyse de l'algorithme LLL est également utilisée pour concevoir et garantir la sécurité de nouveaux cryptosystèmes à base de réseaux qui semblent même résister aux attaques des ordinateurs quantiques. Quant à certaines primitives cryptographiques exotiques, telles que le [chiffrement homomorphe](#), les seules constructions connues sont celles de ces cryptosystèmes à base de réseaux.

L'algorithme LLL n'est que l'un des nombreux apports visionnaires de Lovász. Il a également démontré le « [lemme local](#) », un outil unique pour montrer l'existence d'objets combinatoires dont l'existence est rare, par opposition à la méthode probabiliste standard utilisée lorsque les objets existent en abondance. Aux côtés de [Martin Grötschel](#) et de [Lex Schrijver](#), il a montré comment résoudre efficacement des [programmes semi-définis](#), ce qui a conduit à une révolution dans la conception des algorithmes. Il a contribué à la théorie des marches aléatoires avec des applications aux problèmes d'[isopérimétrie](#) euclidienne et au calcul du volume approximatif des structures de grande dimension. Son article avec [Uriel Feige](#), [Shafi Goldwasser](#), [Shmuel Safra](#) et [Mario Szegedy](#) sur les [preuves vérifiables en probabilité](#) a donné une première version du [théorème PCP](#), un résultat extrêmement influent qui montre que l'exactitude des preuves mathématiques peut être vérifiée de manière probabiliste, avec une grande confiance, en ne lisant qu'un petit nombre de symboles ! Par ailleurs, il a également résolu des problèmes anciens tels que la conjecture des [graphes parfaits](#), la conjecture de [Kneser](#), la détermination de la [capacité](#) de Shannon du graphe pentagonal, et ces dernières années il a développé la théorie des limites de graphes (en collaboration avec Christian Borgs, [Jennifer Chayes](#), Lex Schrijver, [Vera Sós](#), [Balázs Szegedy](#) et Katalin Vesztergombi). Ces travaux relient entre eux des éléments de [théorie des graphes extrémaux](#), de théorie des probabilités et de physique statistique.

Avi Wigderson a largement et profondément contribué à tous les aspects de la théorie de la complexité, en particulier au rôle du hasard

dans le calcul. Un **algorithme probabiliste** est un algorithme qui tire à pile ou face pour calculer une solution correcte avec une probabilité élevée. Au cours des dernières décennies, les chercheurs ont découvert des algorithmes déterministes pour de nombreux problèmes pour lesquels seul un algorithme probabiliste était auparavant connu. L'**algorithme déterministe** pour le **test de primalité Agrawal-Kayal-Saxena** est un exemple frappant de ce type d'algorithme dérandomisé. Face à ces résultats de dérandomisation, la question se pose de savoir si le hasard est vraiment essentiel. Dans ses travaux avec **László Babai**, Lance Fortnow, **Noam Nisan** et **Russell Impagliazzo**, Wigderson a démontré que la réponse est probablement négative. Formellement, ils ont montré une conjecture de calcul, similaire dans l'esprit à la conjecture $P \neq NP$, qui implique que $P = BPP$. Autrement dit, tout algorithme probabiliste peut être dérandomisé et transformé en un algorithme déterministe d'une efficacité comparable. En outre, la dérandomisation est générique et universelle et ne dépend pas des détails internes de l'algorithme probabiliste.

Une autre façon de considérer ce travail est de le voir comme un compromis entre la difficulté du calcul et le hasard : s'il existe un problème suffisamment dur, le hasard peut être simulé par des algorithmes déterministes efficaces. Les travaux menés par la suite par Wigderson avec Impagliazzo et Valentine Kabanets prouvent le contraire : des algorithmes déterministes efficaces, même pour des problèmes spécifiques avec des algorithmes probabilistes connus, impliqueraient qu'il doit exister un problème aussi dur.

Ce travail est intimement lié aux constructions d'objets pseudo-aléatoires (c'est-à-dire à l'aspect aléatoire). Les travaux de Wigderson ont permis de construire des **générateurs pseudoaléatoires** qui transforment quelques bits réellement aléatoires en de nombreux bits pseudo-aléatoires, des extracteurs qui extraient des bits aléatoires presque parfaits d'une source imparfaite d'aléa, des graphes de Ramsey et des graphes expanseurs qui sont creux et qui ont néanmoins une densité élevée. Avec **Omer Reingold** et **Salil Vadhan**, il a introduit le **produit zigzag de graphes**, qui a donné une méthode élémentaire pour construire des graphes expanseurs, et inspiré la preuve combinatoire du théorème PCP d'**Irit Dinur** et un algorithme efficace en mémoire pour le problème de densité des graphes de Reingold. Ce dernier explique comment naviguer dans un grand labyrinthe tout en ne se souvenant que de l'identité d'un nombre constant de jonctions du labyrinthe!

Les autres contributions de Wigderson comprennent des **preuves à**

divulgaration nulle de connaissance qui permettent de prouver des affirmations sans révéler d'autre information que la validité des affirmations, et des bornes inférieures sur l'efficacité des protocoles de communication, des circuits et des systèmes formels de preuve.

Sous l'impulsion de Lovász et Wigderson, les mathématiques discrètes et le domaine relativement jeune de l'informatique théorique sont désormais établis comme des domaines centraux des mathématiques modernes.

László Lovász

Génie des mathématiques depuis son adolescence, László Lovász a fait bien plus que tenir sa promesse initiale en devenant l'un des mathématiciens les plus en vue des cinquante dernières années. Ses travaux ont permis d'établir des liens entre les mathématiques discrètes et l'informatique. Ils ont aidé à poser des fondements théoriques ainsi qu'à concevoir des applications pratiques pour ces deux grands domaines qui occupent une place de plus en plus importante dans les sciences. Il a également servi sa communauté en tant qu'auteur prolifique de livres connus pour leur clarté et leur accessibilité, en tant que conférencier charismatique, et même en tant que dirigeant grâce à son mandat de président de l'Union mathématique internationale (2007-2010).

Né en 1948 à Budapest, Lovász faisait partie d'une génération dorée de jeunes mathématiciens hongrois nourris par la culture unique des mathématiques adoptée dans les écoles du pays. Il faisait partie du premier groupe d'une expérience au cours de laquelle des élèves doués d'un lycée de Budapest ont reçu des cours de mathématiques spécialisés. Parmi ses camarades de classe se trouvait Katalin Vesztergombi, sa future épouse. Lovász a excellé et a remporté la médaille d'or aux Olympiades internationales de mathématiques de 1964, 1965 et 1966, avec une note parfaite à ces deux dernières occasions. Il a également gagné un concours de la télévision hongroise diffusé aux heures de grande écoute, où des étudiants étaient placés dans des cages en verre et devaient résoudre des problèmes de mathématiques.

Toutefois, le moment le plus important de son adolescence a été probablement sa rencontre avec son héros des mathématiques, Paul Erdős, le mathématicien hongrois nomade et célèbre pour son caractère sociable. Erdős était un adepte insatiable du partage de problèmes et a servi d'inspiration à Lovász pour travailler dans la combinatoire « à la hongroise », essentiellement axée sur les propriétés des graphes. Cela a

non seulement fixé une direction de recherche initiale, mais également poussé Lovász vers une façon de faire des mathématiques, ouvertement et en collaboration.

Lovász a étudié à l'université Loránd-Eötvös de Budapest. Il a obtenu un doctorat (ou plutôt le C. Sc., l'équivalent hongrois) à l'âge de vingt-deux ans en 1970. À cette époque, il était déjà intervenu lors de conférences internationales et comptait quinze articles publiés à son palmarès. En raison d'une particularité du système hongrois, il n'a obtenu son diplôme qu'en 1971, un an après avoir obtenu son doctorat.

La combinatoire est l'étude mathématique des motifs et du dénombrement des motifs. La théorie des graphes correspond aux mathématiques des connexions, comme dans un réseau. Ces deux domaines se retrouvent sous l'égide des mathématiques « discrètes », car les objets d'étude ont des valeurs discontinues, plutôt que de varier en douceur comme un point qui se déplacerait le long d'une courbe. Erdős aimait étudier ces domaines par pur plaisir intellectuel, sans se préoccuper de leur utilité dans le monde réel. Lovász quant à lui est devenu le chef de file d'une nouvelle génération de mathématiciens qui ont compris que les mathématiques discrètes avaient un nouveau domaine d'application passionnant, l'informatique.

Par exemple, la théorie des graphes est devenue dans les années 1970 l'un des premiers domaines des mathématiques pures capables d'éclairer le nouveau domaine de la complexité. En effet, l'un des impacts majeurs des travaux de Lovász a été d'établir des manières dont les mathématiques discrètes peuvent permettre d'aborder les questions théoriques fondamentales en informatique. « J'ai eu la chance de vivre l'une de ces périodes où les mathématiques se développaient en même temps qu'un domaine d'application », a-t-il déclaré.

Parmi ses contributions aux fondements de l'informatique figurent des algorithmes puissants avec un très vaste éventail d'applications. L'algorithme LLL, qui tient son nom de Lovász et des frères Arjen et Hendrik Lenstra, a notamment représenté une véritable percée conceptuelle dans la compréhension des réseaux (un objet géométrique de base) et a eu des applications remarquables dans des domaines tels que la théorie des nombres, la cryptographie et l'informatique mobile. Actuellement, les seuls systèmes de chiffrement connus qui peuvent résister à l'attaque d'un ordinateur quantique sont basés sur des réseaux et ont recours à l'algorithme LLL.

Dans les années 1970 et 1980, Lovász était basé en Hongrie, d'abord à l'université Loránd-Eötvös puis à l'université Attila-József de Szeged

où il a pris la chaire de géométrie en 1978. Il est retourné à l'université Loránd-Eötvös en 1982 pour occuper la chaire d'informatique. Au cours de ces premières décennies, il a résolu des problèmes importants et de grande envergure dans de nombreux domaines des mathématiques discrètes. L'un de ses premiers résultats majeurs, en 1972, a été de résoudre la « conjecture des graphes parfaits », un problème ouvert ancien dans la théorie des graphes. En 1978, il a également résolu la conjecture de Kneser, toujours dans la théorie des graphes, mais a surpris ses collègues à cette occasion par une démonstration qui utilise la topologie algébrique, un domaine complètement différent. En 1979, il a résolu un problème classique de théorie de l'information, en déterminant la « capacité de Shannon » du graphe pentagonal.

L'étude de méthodes probabilistes constitue un thème majeur de l'œuvre de Lovász en combinatoire et dans la conception d'algorithmes. Dans ce domaine, la découverte lui ayant valu une reconnaissance bien particulière est le lemme local de Lovász, un outil important et fréquemment utilisé comme **méthode probabiliste** en combinatoire pour établir l'existence d'objets rares, par opposition aux outils plus standard utilisés lorsque les objets sont plus abondants. Lovász a également contribué à un premier article influent sur les preuves vérifiables en probabilité, qui est devenu l'un des domaines les plus importants de la complexité.

En 1993, Lovász a été nommé professeur d'informatique et de mathématiques sur la chaire William K. Lanman à l'université Yale. En 1999, il a quitté l'université pour occuper un poste de directeur de recherche chez Microsoft, avant de retourner en 2006 à l'université Loránd-Eötvös, où il est actuellement professeur.

Lovász a beaucoup voyagé. Il a été professeur invité dans les universités Vanderbilt (1972-1973), de Waterloo (1978-1979), de Bonn (1984-1985), de Chicago (1985), Cornell (1985) et de Princeton (1989-1993), sans oublier un an à l'Institut d'étude avancée de Princeton (2011-2012). Surnommé « Laci » par ses amis et collègues, il est connu pour sa modestie, sa générosité et son ouverture d'esprit, autant de qualités qui l'ont conduit à des postes au sein du comité exécutif de l'Union mathématique internationale (y compris en tant que président) et à l'Académie hongroise des sciences (dont il a été président de 2014 à 2020). Lovász a remporté de nombreux prix, dont les prix Wolf et Knuth en 1999, le **prix Gödel** en 2001 et le prix de Kyoto en 2010.

Il a eu quatre enfants avec Katalin Vesztergombi, mathématicienne qui fait également partie de ses collaborateurs fréquents, et a sept petits-enfants.

Avi Wigderson

Lorsque Avi Wigderson a commencé sa carrière universitaire à la fin des années 1970, la théorie de la « complexité », qui se penche sur la vitesse et l'efficacité des algorithmes, n'en était qu'à ses débuts. Wigderson a probablement contribué plus que quiconque à l'élargissement et à l'approfondissement du domaine. Ce qui n'était alors qu'un sujet naissant est devenu aujourd'hui un domaine établi des mathématiques et de l'informatique théorique. La complexité est désormais incroyablement importante, car elle pose les bases théoriques de la sécurité d'Internet.

Wigderson est né à Haïfa en Israël en 1956. En 1977, il est entré au Technion, l'Institut israélien de technologie, et a obtenu sa licence d'informatique en 1980. Il s'est installé à Princeton pour ses études de troisième cycle et a obtenu son doctorat en 1983 avec la thèse « Études sur la complexité combinatoire », sous la direction de [Richard Lipton](#). En 1986, Wigderson est retourné en Israël pour occuper un poste à l'université hébraïque de Jérusalem. Il a obtenu un poste permanent l'année suivante. Il est devenu professeur en 1991.

Dans les années 1970, les théoriciens de l'informatique ont formulé certaines idées fondamentales sur la nature du calcul, notamment les notions de [classe P](#) et de [classe NP](#). La classe P représente l'ensemble des problèmes que les ordinateurs peuvent résoudre facilement, par exemple en quelques secondes, tandis que la classe NP contient également des problèmes difficiles à résoudre pour les ordinateurs, autrement dit, des problèmes auxquels les méthodes connues ne permettraient d'apporter une réponse qu'au bout de millions d'années. La question fondamentale de la complexité est de savoir si tous ces problèmes difficiles peuvent être réduits à des problèmes faciles, c'est-à-dire déterminer si $P = NP$ ou pas. Cette question est d'ailleurs considérée aujourd'hui comme l'une des plus grandes questions non résolues de toutes les mathématiques.

Wigderson a réalisé d'incroyables avancées dans ce domaine en étudiant le rôle du hasard dans l'aide au calcul. La difficulté de certains problèmes peut être réduite à l'aide d'algorithmes incitant l'ordinateur à tirer à pile ou face pendant le calcul. Toutefois, lorsqu'un algorithme s'appuie sur le tirage à pile ou face, il y a toujours la possibilité qu'une erreur puisse se glisser dans la solution. Wigderson a démontré, d'abord en collaboration avec Noam Nisan puis avec Russell Impagliazzo, que pour tout algorithme rapide qui peut résoudre un problème difficile

grâce au tirage à pile ou face, il existe un algorithme presque aussi rapide qui n'a pas recours à cette méthode, pourvu que certaines conditions soient remplies.

Wigderson a mené des recherches sur tous les principaux problèmes ouverts dans la théorie de la complexité. À bien des égards, le domaine s'est développé autour de lui, non seulement en raison de son inlassable curiosité, mais aussi grâce à sa personnalité accessible et son enthousiasme pour les collaborations. Il a coécrit des articles avec plus de cent personnes et a accompagné un grand nombre de jeunes théoriciens de la complexité. « Je me considère incroyablement chanceux de vivre à cette époque », a-t-il déclaré. « [La complexité] est un domaine jeune. C'est un domaine très démocratique, très convivial, très collaboratif, qui convient à ma nature. Et indéniablement, il regorge de problèmes intellectuels et de défis. »

En 1999, Wigderson a rejoint à l'Institut d'étude avancée de Princeton, où il demeure toujours. Lors d'un événement organisé en 2016 à l'occasion du soixantième anniversaire de Wigderson, le directeur de l'institut, Robbert Dijkgraaf, a déclaré qu'il y avait inauguré un âge d'or de l'informatique théorique.

Wigderson est connu pour sa capacité à établir des liens entre des domaines apparemment sans rapport. Il a approfondi les liens entre les mathématiques et l'informatique. Par exemple, le « produit zigzag de graphes », qu'il a développé avec Omer Reingold et Salil Vadhan, relie la théorie des groupes, la théorie des graphes et la théorie de la complexité, avec des applications surprenantes telles que la meilleure façon de sortir d'un labyrinthe.

L'application actuelle la plus importante de la théorie de la complexité est la cryptographie, qui est utilisée pour sécuriser des informations sur Internet, telles que les numéros de carte de crédit et les mots de passe. Les créateurs de cryptosystèmes doivent par exemple s'assurer que le décodage de leur système soit un problème NP, c'est-à-dire un problème que les ordinateurs mettraient des millions d'années à résoudre. Au début de sa carrière, Wigderson a apporté des contributions fondamentales à un nouveau concept en cryptographie, la preuve à divulgation nulle de connaissance, qui aujourd'hui, plus de trente ans après, est utilisée dans la technologie des **chaînes de blocs**. Dans une preuve à divulgation nulle de connaissance, deux personnes doivent prouver une affirmation sans révéler d'autre information que la validité de cette affirmation, comme l'exemple des deux millionnaires qui veulent déterminer qui est plus riche sans qu'aucun des deux n'évoque

l'ampleur exacte de sa fortune. Wigderson, en collaboration avec **Oded Goldreich** et **Silvio Micali**, a démontré que les preuves à divulgation nulle de connaissance peuvent être utilisées pour prouver, en secret, tout résultat public au sujet de données confidentielles. Imaginons par exemple que vous vouliez prouver à quelqu'un que vous avez démontré un théorème mathématique, mais sans révéler de détails sur votre façon de procéder. Vous pourrez le faire avec une preuve à divulgation nulle de connaissance.

En 1994, Wigderson a remporté le prix Rolf-Nevanlinna, décerné par l'Union mathématique internationale tous les quatre ans pour récompenser l'aspect informatique des mathématiques. Parmi ses nombreux autres prix figurent le prix Gödel en 2009 et le prix Knuth en 2019.

Wigderson est marié à Edna, qu'il a rencontrée au Technion et qui travaille au service informatique de l'Institut d'étude avancée. Ils ont trois enfants et deux petits-enfants.

LA PREUVE HORS DE TOUT DOUTE RAISONNABLE (par ARNE B. SLETSJØE)

Pour obtenir une condamnation devant un tribunal, l'accusation doit prouver son bien-fondé hors de tout doute raisonnable. En mathématiques, ce niveau de justification n'est généralement pas considéré comme suffisant. Une démonstration mathématique doit être déterministe, basée sur la logique formelle. Le théorème de Pythagore, selon lequel la somme des carrés des deux côtés d'un triangle rectangle est égale au carré de l'hypoténuse, a déjà été démontré dans l'Antiquité. Ses (nombreuses) démonstrations sont déterministes, car elles peuvent être reproduites et donneront le même résultat à chaque fois.

Le développement des ordinateurs à haute performance a remis en question le rôle de la tradition de la démonstration déterministe. Il a également ouvert la voie à la mise en œuvre d'algorithmes qu'il était impossible de réaliser à la main. Ces nouvelles possibilités ont soulevé de nouvelles questions. Quelles sont les limites de l'informatique ? À quelle vitesse peut-on factoriser un entier ? Est-il possible de vérifier quelque chose en utilisant un argument probabiliste ?

En général, il est très difficile de factoriser les nombres entiers. Si vous choisissez un nombre entier à mille chiffres au hasard et que vous demandez de trouver la décomposition en nombres premiers, votre ordinateur pourra trouver la réponse, mais cela prendra beaucoup de temps. Il se peut que le Soleil ait disparu avant que vous n'obteniez la réponse. En revanche, si l'on vous donne un candidat pour la factorisation, il sera facile pour votre ordinateur de vérifier que la réponse est correcte. Il est beaucoup plus difficile de trouver une aiguille dans une botte de foin que de vérifier que c'est bien une aiguille que vous avez trouvée. C'est l'essence même d'un célèbre défi mathématique, le problème $P \neq NP$, l'un des sept **problèmes du prix du millénaire** en mathématiques.

Les lauréats du prix Abel, László Lovász et Avi Wigderson, ont joué un rôle de premier plan dans le développement des fondements mathématiques de l'informatique théorique et de ses deux sous-disciplines complémentaires : la conception d'algorithmes et la complexité informatique. Ils ont tous deux apporté des contributions fondamentales à la compréhension du rôle de l'aléatoire dans le calcul et à l'exploration des limites d'un calcul efficace.

L'algorithme de réduction de réseau de Lovász-Lenstra-Lenstra

Un exemple des contributions du lauréat à la conception d'algorithmes est l'algorithme LLL de réduction de réseau, nommé d'après Lovász et les frères Lenstra, Arjen et Hendrik. Étant donné un réseau de nombres entiers de dimension supérieure (une grille), cet algorithme trouve une bonne base, presque orthogonale, pour ce réseau. Cet algorithme est devenu l'un des outils préférés des cryptanalystes, qui ont ainsi réussi à casser plusieurs cryptosystèmes proposés. Il a également servi de base à la réfutation de la [conjecture de Mertens](#).

La conjecture de Mertens a été énoncée par [Thomas Joannes Stieltjes](#) dans une lettre adressée à [Charles Hermite](#) en 1885, puis publiée par [Franz Mertens](#) en 1897. La conjecture est une affirmation concernant la [fonction de Möbius](#). La fonction de Möbius, notée μ , prend un nombre naturel n comme entrée et renvoie -1 , 0 ou 1 en fonction du nombre de facteurs premiers de n . Si n contient un carré, la valeur est 0 . La valeur $\mu(n)$ d'un nombre n sans carré est -1 si n a un nombre impair de facteurs premiers et $+1$ si le nombre de facteurs premiers est pair. Pour énoncer la conjecture de Mertens, on additionne tous les $\mu(n)$ pour tous les entiers positifs inférieurs à un certain nombre réel x et on désigne cette somme par $M(x)$. La conjecture est que le carré $M(x)^2$ est inférieur à x pour tout choix de nombre réel positif x .

La conjecture de Mertens est un résultat fort. En fait, si la conjecture était vraie, elle impliquerait l'hypothèse de Riemann, un autre des sept problèmes du millénaire en mathématiques. Malheureusement, il s'agit d'une implication à sens unique, de sorte que la réfutation de la conjecture de Mertens n'a aucune conséquence sur le statut de l'hypothèse de Riemann.

La conjecture de Mertens est un exemple frappant de conjecture mathématique qui s'est avérée fautive malgré un grand nombre de calculs informatiques en sa faveur. Après être restée non démontrée pendant près d'un siècle, l'algorithme LLL de réduction des réseaux a permis à [Andrew Odlyzko](#) et [Herman Te Riele](#) de finalement réfuter la conjecture.

Les preuves à divulgation nulle de connaissance

Lorsque vous vous rendez à votre banque pour effectuer un retrait, l'authentification est un point crucial. La banque doit être sûre de qui vous êtes, que vous vous rendiez à la banque en personne ou que vous

entriez dans la banque par voie électronique. Lorsque vous présentez votre code personnel à la banque, celle-ci doit être en mesure de vérifier que vous êtes le véritable titulaire du compte. Mais pour des raisons de sécurité, la banque ne souhaite pas conserver votre code personnel. La banque peut-elle donc vérifier un code qu'elle ne connaît pas ? La réponse est oui, en utilisant ce que l'on appelle une preuve à divulgation nulle de connaissance.

Les preuves à divulgation nulle de connaissance ont été conçues pour la première fois en 1985 par Shafi Goldwasser, Silvio Micali et **Charles Rackoff**. Quelques années plus tard, Oded Goldreich, Silvio Micali et Avi Wigderson, le lauréat du prix Abel, ont approfondi la théorie en créant un système de preuve à divulgation nulle de connaissance pour le problème de **coloration de graphe** avec trois couleurs. C'était extrêmement important, car l'existence de cette preuve garantit l'existence de preuves similaires pour tout problème de même complexité.

Le système de preuve à divulgation nulle de connaissance pour le problème de coloration de graphe avec trois couleurs se présente de la manière suivante. Supposons que nous ayons décomposé un plan en régions contiguës, comme dans le cas d'une carte. Notre tâche consiste à colorer chaque pays de sorte que deux pays adjacents n'aient pas la même couleur. En 1976, **Kenneth Appel** et **Wolfgang Haken** ont apporté la première démonstration du fait que, quelles que soient les positions des pays les uns par rapport aux autres, il est possible de parvenir à la coloration avec seulement **quatre couleurs**. Mais supposons que vous ne disposiez que de trois couleurs différentes. Dans ce cas, vous ne pourrez généralement pas colorer la carte. La Bolivie et ses pays voisins en sont un bon exemple. La Bolivie a cinq voisins : le Chili, l'Argentine, le Paraguay, le Brésil et le Pérou. Ces cinq voisins entourent complètement la Bolivie. Comme nous le voyons dans la figure 50, où les arêtes symbolisent des frontières communes, trois couleurs ne suffisent pas.

Au contraire, supposons que nous ayons une carte où il existe une coloration avec seulement trois couleurs. Alice peut-elle convaincre Robert que c'est le cas, sans pour autant lui montrer la carte ? Wigderson et ses collaborateurs ont donné une réponse positive. Alice couvre la carte de sorte que Robert ne voie que les pays et les frontières, mais pas les couleurs. Robert choisit deux pays adjacents et demande à Alice de découvrir les couleurs. Alice obéit et Robert voit de ses propres yeux que les couleurs sont différentes. Alice cache les couleurs et Robert choisit une nouvelle paire de voisins pour sa vérification des couleurs. Alice

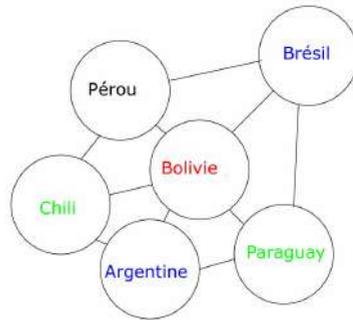


Fig. 50

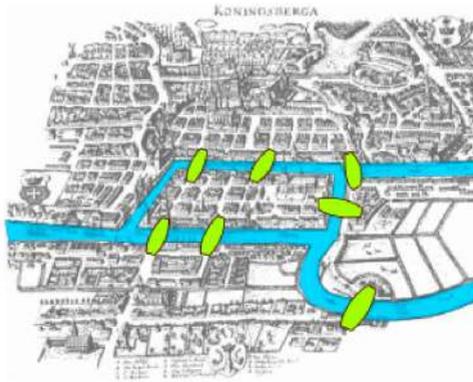
révèle à nouveau les couleurs et Robert est satisfait de ce qu'il voit. Pourquoi Robert n'acquiert-il aucune connaissance à l'issue de cette procédure ? Le secret réside dans le fait qu'entre deux révélations de couleurs, Alice permute les couleurs de manière aléatoire. Ainsi, ce que Robert constate, c'est que les deux pays adjacents ont des couleurs différentes, ce qui est une information périssable. Après plusieurs étapes, Robert se rend compte que la seule possibilité pour qu'Alice réussisse à chaque fois est qu'elle ait réussi à colorer la carte avec seulement trois couleurs.

Alice a ainsi fourni à Robert une preuve à divulgation nulle de connaissance. Les preuves à divulgation nulle de connaissance sont probabilistes, dans le sens où l'argument décisif pour Robert est la probabilité écrasante qu'Alice ait raison. Il accepte l'affirmation d'Alice, car il estime qu'elle est démontrée hors de tout doute raisonnable.

Grâce aux efforts des lauréats du prix Abel 2021, l'informatique théorique a trouvé sa place dans les mathématiques modernes. L'approche probabiliste s'est avérée être une partie efficace de l'univers mathématique, qui nous fournit des techniques et des stratégies fructueuses. Il ne fait aucun doute qu'elle a élargi nos connaissances mathématiques.

DES INVARIANTS DE GRAPHES (par ARNE B. SLETSJØE)

La ville de Königsberg en Prusse était située sur les rives du Pregel (c'est aujourd'hui Kaliningrad en Russie, sur les rives de la Pregolia). Le fleuve entourait deux grandes îles, Kneiphof et Lomse. Les îles étaient reliées l'une à l'autre, ainsi qu'au continent de part et d'autre, par plusieurs ponts. Au total, la ville comptait sept ponts. Un problème mathématique célèbre consistait à trouver un parcours à travers la ville qui traverserait chacun des sept ponts une fois et une seule.



Le problème a été résolu dans les années 1730, lorsque le grand mathématicien Leonhard Euler a démontré qu'un tel parcours n'existait pas. Mais plus que la solution elle-même, c'est la façon avec laquelle Euler a attaqué le problème qui importe : elle a donné naissance à un nouveau domaine des mathématiques, aujourd'hui connu sous le nom de théorie des graphes.

La théorie des graphes peut être considérée comme une approche abstraite de l'étude des relations entre objets, avec les graphes comme notion de base.

Définition. *Un graphe $G = (V, E)$ est une paire ordonnée comprenant*

- *un ensemble V de sommets ou de nœuds,*
- *un ensemble E d'arêtes entre des paires de nœuds.*

Près de trois siècles après qu'Euler a marché sur les ponts de Königsberg, la théorie des graphes s'est développée en tant que discipline mathématique et a trouvé de nombreuses applications importantes.

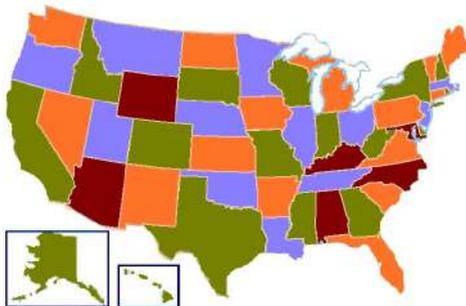
Néanmoins, de nombreuses questions n'ont toujours pas été résolues et de nouveaux problèmes ne cessent d'apparaître.

La classification est une tâche fondamentale dans tous les domaines des mathématiques. La théorie des graphes ne fait pas exception. Cependant, les invariants de classification de cette théorie ne sont pas gravés dans la pierre. Voici quelques suggestions.

Le premier **invariant** présenté est le **nombre chromatique** :

Définition. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Le nombre chromatique $\gamma(G)$ de G est le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorier les sommets du graphe de sorte que deux sommets adjacents ne partagent pas la même couleur.

Le nombre chromatique est un concept central du théorème des quatre couleurs, démontré par Appel et Haken en 1976. Le théorème des quatre couleurs affirme que le nombre chromatique d'un graphe planaire est égal à quatre. Une formulation équivalente est le théorème des cartes à quatre couleurs, qui stipule qu'il ne faut pas plus de quatre couleurs pour colorer les régions d'une carte de manière à ce que deux régions adjacentes n'aient pas la même couleur.



La figure présente une coloration des États-Unis à l'aide de quatre couleurs. Remarquez que le théorème n'est pas vrai si nous remplaçons le nombre quatre par trois. Vous pouvez vous en convaincre en essayant de colorer la Bolivie et ses pays voisins avec seulement trois couleurs.

Une caractéristique importante d'un graphe est sa densité, c'est-à-dire le nombre d'arêtes du graphe par rapport au nombre maximal d'arêtes d'un graphe ayant le même nombre de nœuds. Les extrêmes sont le graphe totalement déconnecté, sans aucune arête, et le graphe complet, qui comprend toutes les arêtes possibles. Le nombre d'arêtes

d'un graphe complet à n nœuds est $\binom{n}{2}$. Soit $G = (V, E)$ un graphe et $S \subset V$ un sous-ensemble de sommets de G . Alors le **sous-graphe** induit $G[S]$ est le graphe dont l'ensemble des sommets est S et dont l'ensemble des arêtes est constitué de toutes les arêtes de E dont les deux extrémités se trouvent dans S .

L'invariant suivant est le nombre de **clique** :

Définition. Soit G un graphe. Une clique dans G est un sous-graphe induit complet. La taille de la plus grande clique dans G est notée $\omega(G)$ et appelée « nombre de clique ».

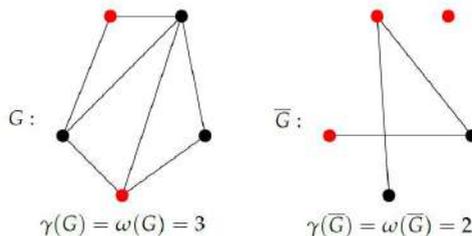
Dans un graphe complet, tous les nœuds sont adjacents les uns aux autres. Dans une coloration, ils doivent tous avoir des couleurs différentes. Le nombre chromatique d'un graphe complet est donc égal au nombre de sommets. Dans un graphe arbitraire, le nombre chromatique peut dépasser le nombre de clique : $\omega(G) \leq \gamma(G)$.

Définition. Un graphe $G = (V, E)$ est dit parfait si pour tous les sous-graphes induits $S \subset G$, le nombre chromatique et le nombre de clique coïncident, c'est-à-dire $\omega(G[S]) = \gamma(G[S])$.

Dans un article publié en 1972, László Lovász, le lauréat du prix Abel, a démontré le **théorème (faible) des graphes parfaits** :

Théorème. Un graphe $G = (V, E)$ est parfait si et seulement si le **graphe complémentaire** \bar{G} est parfait.

Le graphe complémentaire \bar{G} a les mêmes nœuds que G , mais l'ensemble des arêtes est complémentaire, c'est-à-dire que si $e \in E(G)$ alors $e \notin E(\bar{G})$ et vice versa. L'exemple suivant illustre le théorème des graphes parfaits :



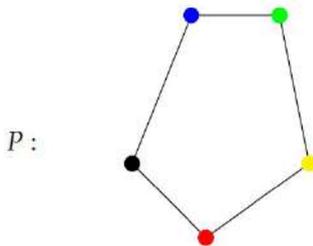
Le prochain invariant de graphe sur lequel nous insistons est la stabilité du graphe. Un **stable** dans un graphe est un sous-ensemble de nœuds deux à deux non adjacents.

Définition. La stabilité d'un graphe $G(V, E)$, notée $\alpha(G)$, est la taille maximale d'un stable de G .

Dans l'illustration ci-dessus, les ensembles de nœuds rouges dans les deux graphes sont des **stables de taille maximale**. Donc $\alpha(G) = 2$ et $\alpha(\overline{G}) = 3$. Les invariants de l'illustration ci-dessus reflètent un fait général, à savoir que le nombre de clique d'un graphe coïncide avec la stabilité du graphe complémentaire, $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$.

À la fin des années 1920, les électroniciens **Harry Nyquist** et **Ralph Hartley** ont introduit certaines idées fondamentales relatives à la transmission de l'information, en particulier dans le contexte du télégraphe en tant que système de communication. Quelques années plus tard, dans les années 1940, Claude Shannon a développé le concept de capacité des canaux, basé en partie sur les idées de Nyquist et Hartley, et a ensuite formulé une théorie complète de la transmission de l'information.

La capacité de Shannon modélise la quantité d'informations qui peut être transmise par un canal de communication bruyant dans lequel certaines valeurs de signaux peuvent être confondues. La confusion est codée dans le graphe de confusion, où les différents signaux sont représentés par des nœuds, et une confusion possible entre deux signaux est représentée par une arête entre les deux signaux. La figure montre un graphe de confusion, illustré par un graphe pentagonal.



Le signal rouge peut être confondu avec le noir et le jaune, mais sera distingué du bleu et du vert, et ainsi de suite. La capacité de Shannon du graphe est d'au moins 2, représentée par exemple par le stable $\{\bullet, \bullet\}$. Si, au lieu de signaux uniques, nous décidons de transmettre des paires de signaux, nous pouvons en fait trouver cinq paires qui ne peuvent pas être confondues, par exemple

$$(\bullet\bullet) \quad (\bullet\bullet) \quad (\bullet\bullet) \quad (\bullet\bullet) \quad (\bullet\bullet)$$

La capacité de Shannon est mesurée par signal. En utilisant des paires, nous augmentons la capacité à $\sqrt{5}$. Pendant longtemps, on n'a pas su s'il était possible d'augmenter encore la capacité en utilisant des combinaisons de signaux plus complexes. La façon mathématique d'aborder ce problème est la suivante :

Définition. Soient $G = (V, E)$ et $H = (W, F)$ deux graphes. Le produit des graphes G et H , noté $G * H$ est le graphe suivant :

- les sommets de $G * H$ sont l'ensemble de toutes les paires (g, h) avec $g \in V$ et $h \in W$;
- il existe une arête entre (g, h) et (g', h') si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- (a) $g = g'$ et $[h, h'] \in F$
- (b) $h = h'$ et $[g, g'] \in E$
- (c) $[g, g'] \in E$ et $[h, h'] \in F$.

L'itération de la construction du produit permet d'obtenir un graphe multiproduit $G_1 * G_2 * \dots * G_k$.

Avec cette définition en main, nous pouvons introduire formellement la capacité de Shannon, comme l'a fait Claude Shannon dans les années 1940.

Définition. Soit $G = (V, E)$ un graphe et k un entier naturel. La capacité de Shannon de G , notée $\Theta(G)$ est définie par

$$\Theta(G) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (\alpha(G * G * \dots * G))^{1/k},$$

où le produit est le produit de k copies de G .

La capacité de Shannon d'un graphe arbitraire n'est pas facile à calculer. La complexité du calcul n'est pas connue. Comme indiqué ci-dessus, la capacité de Shannon du graphe pentagonal est restée inconnue pendant de nombreuses années. Elle a finalement été trouvée par Lovász en 1979. Comme outil principal, Lovász a introduit un autre invariant de graphe, connu sous le nom de nombre de Lovász.

Définition. Soit $G = (V, E)$ un graphe à n sommets. Un ensemble ordonné de n vecteurs unitaires $U = \{u_i \mid i \in V\} \subset \mathbb{R}^N$ est appelé une représentation orthonormée de G dans \mathbb{R}^N si u_i et u_j sont orthogonaux chaque fois que les sommets i et j ne sont pas adjacents dans G :

$$u_i^T u_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } [i, j] \notin E \end{cases}$$

Définition. Le nombre de Lovász du graphe $G(V, E)$ est défini par

$$\theta(G) = \min_{c, U} \max_{i \in V} \frac{1}{(c^T u_i)^2},$$

où c est un vecteur unitaire dans \mathbb{R}^N et U est une représentation ortho-normée de G dans \mathbb{R}^N .

Le nombre de Lovász $\theta(G)$ peut être calculé numériquement avec une grande précision en temps polynomial. Lovász a démontré le théorème dit du sandwich de Lovász qui relie le nombre de clique, le nombre de Lovász et le nombre chromatique.

Théorème. Pour un graphe $G = (V, E)$ nous avons les inégalités suivantes

$$\omega(G) \leq \theta(\overline{G}) \leq \gamma(G).$$

Lovász a également démontré que le nombre de Lovász est une borne supérieure pour la capacité de Shannon,

$$\alpha(G) \leq \Theta(G) \leq \theta(G),$$

où l'inégalité la plus à gauche est plus ou moins évidente. En combinant les deux inégalités et en utilisant le fait que $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$, nous obtenons

$$\omega(\overline{G}) \leq \Theta(G) \leq \theta(G) \leq \gamma(\overline{G}).$$

Il s'ensuit que pour un graphe parfait G , où $\omega(G) = \gamma(G)$, les inégalités ci-dessus sont des égalités et la capacité de Shannon est égale au nombre de Lovász.

Qu'en est-il du graphe pentagonal P ? La figure 51 montre le graphe complémentaire \overline{P} .

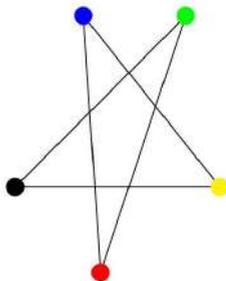


Fig. 51

Ce graphe a un nombre chromatique $\gamma(\overline{P}) = 3$ et un nombre de clique $\omega(\overline{P}) = 2$. On a donc

$$2 \leq \Theta(G) \leq \theta(G) \leq 3.$$

Nous avons déjà vu que $\sqrt{\alpha(P * P)} \geq \sqrt{5}$, ce qui réduit l'intervalle à

$$\sqrt{5} \leq \Theta(G) \leq \theta(G) \leq 3.$$

Enfin, on montre que le nombre de Lovász pour le graphe pentagonal vérifie $\theta(P) \leq \sqrt{5}$, de sorte que

$$\Theta(G) = \theta(G) = \sqrt{5}.$$

En effet, soit $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ l'ensemble de vecteurs unitaires dans \mathbb{R}^3 donnés par

$$u_k = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \beta_k \\ \sin \alpha \sin \beta_k \end{pmatrix},$$

où $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ et $\beta_k = \frac{2\pi k}{5}$. Alors

$$\begin{aligned} u_k \cdot u_\ell &= \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha (\cos \beta_k \cos \beta_\ell + \sin \beta_k \sin \beta_\ell) \\ &= \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos(\beta_k - \beta_\ell) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cos(\beta_k - \beta_\ell). \end{aligned}$$

Si $|k - \ell| = 2$, alors $\frac{2k\pi}{5} - \frac{2\ell\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}$ et $\cos \frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{\sqrt{5}-1}$. Ainsi

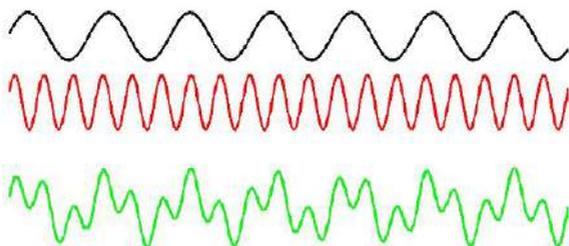
$$u_k \cdot u_\ell = \frac{1}{\sqrt{5}} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \frac{-1}{\sqrt{5}-1} = 0$$

et l'ensemble ordonné de cinq vecteurs unitaires $U = \{u_i | i \in V\} \subset \mathbb{R}^3$ constitue une représentation orthonormée de P dans \mathbb{R}^3 . Soit $c = (1, 0, 0)$. Le nombre de Lovász de P est alors

$$\theta(P) = \min_{c,U} \max_{i \in V} \frac{1}{(c^T u_i)^2} \leq \max_{i \in V} \frac{1}{(c^T u_i)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt[4]{5}}\right)^2} = \sqrt{5}.$$

L'ALGORITHME DE RÉDUCTION DE RÉSEAU DE LENSTRA-LENSTRA-LOVÁSZ (par ARNE B. SLETSJØE)

Il y a près de deux cents ans, le mathématicien français Joseph Fourier a eu l'idée que toute fonction continue pouvait s'écrire comme une somme infinie d'ondes sinusoïdales. Cela a eu des implications considérables, par exemple pour l'enregistrement et la reproduction du son. Une onde sinusoïdale pure peut être convertie en son par un haut-parleur et les sons des instruments d'orchestre peuvent être considérés comme une superposition d'ondes sinusoïdales d'une fréquence fondamentale et de multiples entiers de cette fréquence. Chaque fréquence contribue au son avec une amplitude individuelle. Lors de l'enregistrement du son, le défi consiste à séparer le spectre des fréquences.



Dans un cadre mathématique, nous pouvons considérer chaque fréquence comme une coordonnée distincte dans un vaste espace vectoriel. En introduisant un produit scalaire approprié, le système de coordonnées des fréquences constitue une base orthogonale pour l'espace des ondes sinusoïdales de différentes fréquences. La procédure de décomposition prend beaucoup moins de temps dans une base orthogonale que dans une base arbitraire. Cet exemple illustre parfaitement l'intérêt de trouver des bases orthogonales.

L'**algorithme de Gram-Schmidt** est un algorithme efficace pour produire des bases orthogonales :

Lemme. Soit $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subset \mathbb{R}^n$ une base d'un espace vectoriel V . Posons $b_1^* = b_1$. Pour $1 < k \leq n$, posons

$$b_k^* = b_k - \sum_{i=1}^{k-1} \mu_{k,i} b_i^* \quad \text{où} \quad \mu_{k,i} = \frac{\langle b_k, b_i^* \rangle}{\|b_i^*\|^2}.$$

Alors $B^* = \{b_1^*, b_2^*, \dots, b_n^*\}$ est une base orthogonale de \mathbb{R}^n . Les nombres $\mu_{k,i}$ sont appelés les coefficients de Gram-Schmidt de la base B .

Une base orthogonale d'un espace vectoriel est facilement transformée en une base orthonormée, c'est-à-dire une base qui est orthogonale et telle que chaque vecteur de base ait une longueur égale à 1.

L'informatique est par nature discrète et non continue. Nous sommes donc obligés de travailler sur un réseau \mathbb{Z}^n plutôt que sur un espace vectoriel \mathbb{R}^n . Il est toujours très utile d'avoir une base orthogonale à portée de main, ainsi que des vecteurs de base « courts ». La définition d'un vecteur « court » est assez vague. Elle fait référence à la longueur ordinaire du vecteur. Un vecteur d'un réseau est considéré comme court si sa longueur est proche de la longueur minimale de n'importe quel vecteur du réseau. À titre d'exemple, considérons le réseau engendré par les deux vecteurs « longs » (6 386, 51) et (71 999, 575). Une autre base pour le même réseau est constituée des vecteurs « courts » (1, 0) et (0, 1).

Le problème des réseaux par rapport aux espaces vectoriels réside dans les obstacles suivants :

- il n'est pas évident qu'il existe une base orthogonale pour le réseau ;
- il peut être assez difficile de trouver des vecteurs « courts » dans le réseau.

Une solution à ce problème consiste à produire une base réduite de Lenstra-Lenstra-Lovász (ou base LLL-réduite en abrégé) :

Définition. Une base $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ pour le réseau L est LLL-réduite s'il existe un paramètre $\delta \in]0,25; 1]$ tel que

- pour tout $1 \leq j < i \leq n$, $|\mu_{i,j}| \leq 0,5$ (réduction de la taille) ;
- pour tout $k = 2, 3, \dots, n$, $\delta \|b_{k-1}^*\|^2 \leq \|b_k^* + \mu_{k,k-1} b_{k-1}^*\|^2$ (condition de Lovász),

où B^* désigne la base de Gram-Schmidt.

En utilisant le produit scalaire ordinaire, nous pouvons écrire

$$\langle b_i, b_j^* \rangle = \|b_i\| \|b_j^*\| \cos(\theta),$$

où θ est l'angle entre b_i et b_j^* . La première condition s'écrit alors

$$\|b_j^*\| |\cos(\theta)| \leq \frac{\|b_i\|}{2}.$$

L'inégalité est satisfaite si b_i et b_j sont proches de l'orthogonalité, c'est-à-dire si $\cos(\theta)$ est proche de 0, ou si les vecteurs de base sont ordonnés

par longueur. Pour une base orthogonale, la condition de Lovász dit que

$$\delta^{n-1} \|b_1^*\|^2 \leq \delta^{n-2} \|b_2^*\|^2 \leq \dots \leq \delta \|b_{n-1}^*\|^2 \leq \|b_n^*\|^2.$$

Ainsi, dans tous les cas, nous obtenons des vecteurs de base ordonnés en fonction de leur longueur.

Dans un article de 1972, László Lovász (le lauréat du prix Abel) et les frères Lenstra (Arjen et Hendrik) ont inventé l'algorithme LLL. L'algorithme LLL est conçu pour produire une base LLL-réduite à partir d'une base arbitraire pour le réseau. Il comporte deux composantes principales : la réduction de la longueur et la permutation des vecteurs de base. La réduction de la longueur est effectuée par un processus de type Gram-Schmidt. Des permutations sont nécessaires pour conserver intact l'ordre approximatif des longueurs des vecteurs de base.

Pour illustrer l'algorithme, considérons le réseau $L \simeq \mathbb{Z}^3$ engendré par les trois vecteurs

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

La longueur euclidienne des trois vecteurs est de $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ et $\sqrt{70}$. Après avoir exécuté l'algorithme LLL, nous obtenons la base

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

où $\|v_1\| = 1$, $\|v_2\| = \sqrt{2}$ et $\|v_3\| = \sqrt{5}$. Les coefficients de Gram-Schmidt de la base résultante sont $\mu_{2,1} = \mu_{3,1} = 0$ et $\mu_{3,2} = \frac{1}{2}$.

L'algorithme LLL a plusieurs applications, en particulier dans le domaine de la cryptographie. Mais une autre application intéressante est la conjecture de Mertens. La conjecture de Mertens a été énoncée vers la fin du XIX^e siècle par le mathématicien polonais Franz Mertens. La conjecture concerne essentiellement la distribution des nombres premiers. Sa conséquence la plus importante est l'hypothèse de Riemann. Malheureusement, la conjecture est fautive et l'attaque de l'hypothèse de Riemann par la voie de Mertens n'a donc pas abouti.

L'ingrédient essentiel de la conjecture de Mertens est la fonction de Möbius. La fonction de Möbius μ a été introduite par le mathématicien allemand August Ferdinand Möbius en 1832. Elle est définie ainsi :

— si n contient un carré, alors $\mu(n) = 0$;

— si n est un nombre qui ne contient pas de carré et qui a r facteurs premiers, alors $\mu(n) = (-1)^r$.

Ainsi, pour les petits nombres, nous avons $\mu(1) = 1$, $\mu(2) = \mu(3) = \mu(5) = -1$, $\mu(4) = 0$ et $\mu(6) = 1$.

Lorsqu'on dispose d'une suite de nombres, on peut les rassembler dans ce qu'on appelle une **série de Dirichlet** :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} &= 1 - \frac{1}{2^s} - \frac{1}{3^s} - \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} - \frac{1}{7^s} \dots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \left(1 - \frac{1}{5^s}\right) \dots, \end{aligned}$$

où s est une variable complexe. Il existe une relation étroite entre la série de Dirichlet de la fonction de Möbius et la fonction zêta de Riemann

$$\zeta(s) = \sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots$$

En multipliant la fonction zêta de Riemann par $\frac{1}{2^s}$ et en soustrayant, on obtient

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) &= \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots\right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \dots\right) \\ &= 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \dots \end{aligned}$$

Nous faisons de même pour tous les nombres premiers et obtenons

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \left(1 - \frac{1}{5^s}\right) \dots = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

Ainsi, la série de Dirichlet de la fonction de Möbius coïncide avec l'inverse de la fonction zêta de Riemann :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

La conjecture de Mertens a été énoncée par Thomas Joannes Stieltjes, dans une lettre adressée à Charles Hermite en 1885, puis publiée par Franz Mertens en 1897. La conjecture de Mertens donne une borne supérieure à la somme de la fonction de Möbius :

Conjecture (Mertens). *On a*

$$M(x) = \sum_{n < x} \mu(n) \leq \sqrt{x}$$

pour tout $x \geq 1$.

Remarquons que puisque $M(x)$ est constant sur chaque intervalle $[n, n + 1[$, on a

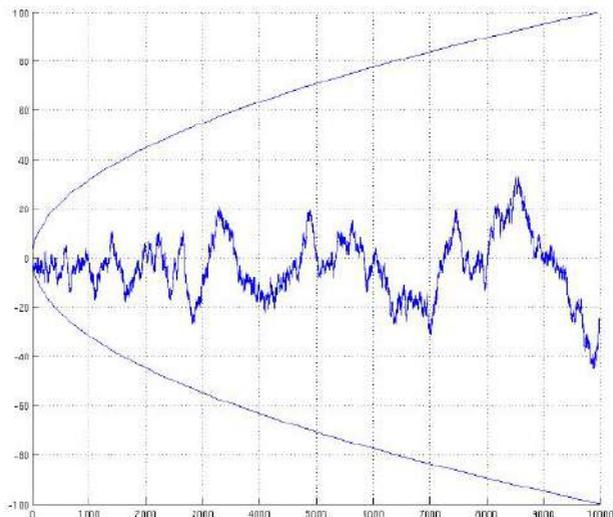
$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta(s)} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{M(n) - M(n-1)}{n^s} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} M(n) \frac{1}{n^s} - \sum_{n=0}^{+\infty} M(n) \frac{1}{(n+1)^s} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} M(n) \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} M(n) \int_n^{n+1} \frac{s dx}{x^{s+1}} \\ &= s \int_0^{+\infty} \frac{M(x) dx}{x^{s+1}}. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que la conjecture de Mertens soit vraie, c'est-à-dire que $M(x) \leq \sqrt{x}$. On aurait alors

$$\frac{1}{\zeta(s)} \leq s \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{x^{s+1}} = s \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^{s+\frac{1}{2}}}.$$

La dernière intégrale définit une fonction analytique pour $\Re(s) > \frac{1}{2}$, ce qui donnerait un prolongement analytique de $\frac{1}{\zeta(s)}$ à $\Re(s) > \frac{1}{2}$. En particulier, cela impliquerait que $\zeta(s)$ n'a pas de zéros pour $\Re(s) > \frac{1}{2}$, ce qui est exactement l'énoncé de l'hypothèse de Riemann. Ainsi, si la conjecture de Mertens était vraie, il en serait de même pour l'hypothèse de Riemann. Malheureusement, la conjecture de Mertens n'est pas vraie. Elle a été réfutée par Andrew Odlyzko et Herman Te Riele en 1985. Néanmoins, la conjecture de Mertens est un exemple frappant de conjecture mathématique qui s'est avérée fautive malgré un grand nombre d'indices informatiques en sa faveur, comme l'illustre la figure ci-dessous. La courbe extérieure est la fonction $f(x) = \pm\sqrt{x}$ et la courbe

intérieure en zigzag est la fonction de Mertens $M(x)$. La conjecture stipule que la courbe en zigzag reste à l'intérieur de la courbe extérieure pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.



Un point crucial de la démonstration d'Odlyzko et de Te Riele a été l'application de l'algorithme de réduction de réseau de Lenstra, Lenstra et Lovász. En utilisant l'algorithme LLL, ils ont pu montrer que

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{M(x)}{\sqrt{x}} > 1,06$$

et

$$\liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{M(x)}{\sqrt{x}} < -1,009,$$

ce qui contredit l'inégalité de la conjecture. Dans leur démonstration, ils ne donnent pas de valeur exacte pour laquelle la conjecture échoue, mais on a montré par la suite que le premier contre-exemple apparaît dans l'intervalle entre 10^{16} et 10^{40} .

Sullivan (2022)

« pour ses contributions révolutionnaires à la topologie dans son sens le plus large, et en particulier dans ses aspects algébriques, géométriques et dynamiques ».

La topologie est née à la fin du XIX^e siècle comme une nouvelle approche qualitative de la géométrie. En topologie, un cercle et un carré sont identiques, mais la surface de la Terre et celle d'une bouée sont différentes. Le développement d'un langage précis et d'outils quantitatifs pour mesurer les propriétés invariantes des objets après une déformation a été inestimable en mathématiques, avec des applications significatives dans des domaines tels que la physique, l'économie ou encore la science des données.

À plusieurs reprises, Dennis Sullivan a changé le paysage de la topologie en introduisant de nouveaux concepts, en établissant des théorèmes fondamentaux, en répondant à d'anciennes conjectures et en formulant de nouveaux problèmes qui ont fait avancer le domaine. Il est passé d'un domaine à l'autre sans effort apparent, en utilisant des idées algébriques, analytiques et géométriques comme un véritable virtuose.

Ses premiers travaux ont porté sur la classification des variétés, des espaces qui localement ne peuvent pas être distingués de l'espace plat euclidien, mais qui sont globalement différents (par exemple, la surface d'une sphère est localement plate). S'appuyant sur les travaux de [William Browder](#) et de [Sergueï Novikov](#), il a développé une perspective issue de la topologie algébrique sur ce sujet et a inventé des techniques puissantes et élégantes pour résoudre les problèmes qui se posaient. Les idées suivantes en font partie : « localiser un espace en utilisant un nombre premier » et « compléter un espace en utilisant un nombre premier ». Ce sont des idées exportées de l'algèbre pure qui ont fourni un nouveau langage pour exprimer les phénomènes géométriques et qui sont devenues des outils utiles pour résoudre de nombreux autres problèmes. De nos jours, il est courant de travailler en utilisant un nombre premier à la fois, avec différentes méthodes pour différents nombres premiers.

Une autre percée majeure de Sullivan a été l'étude des invariants en dehors des nombres premiers, ce qu'on appelle la théorie de l'homotopie rationnelle. Daniel Quillen et lui ont donné deux descriptions

algébriques complètes et différentes de ce qui reste d'un espace dans ce contexte. Le modèle de Sullivan est basé sur les formes différentielles, un concept du calcul différentiel à plusieurs variables qui permet un lien direct avec la géométrie et l'analyse. Cela a rendu une grande partie de la topologie algébrique accessible au calcul, ce qui s'est avéré révolutionnaire. L'utilisation des formes différentielles, en combinaison avec la théorie de Hodge, a rendu la topologie algébrique particulièrement pertinente pour la géométrie algébrique comme le montrent les travaux de Sullivan avec Pierre Deligne, Phillip Griffiths et **John Morgan**.

Pour comprendre les variétés lisses, des complétions sont nécessaires. L'un des points forts de son travail dans ce sujet a été sa démonstration de la conjecture d'Adams, indépendamment de Quillen. Sullivan a également attiré l'attention sur l'idée d'un espace des points fixes homotopiques, formulant une conjecture centrale en homotopie et introduisant un outil largement utilisé. La « conjecture de Sullivan » a été résolue de nombreuses années plus tard par **Haynes Miller**.

Sullivan s'est ensuite attaqué à de nombreux problèmes topologiques, dynamiques et analytiques, toujours en utilisant l'idée qu'une structure géométrique sur un espace joue un rôle central.

Il a montré que la structure topologique sur une variété de dimension cinq ou plus peut toujours être relevée en une structure lipschitzienne, ce qui permet d'utiliser des méthodes analytiques. Son argument utilise des groupes arithmétiques pour remplacer le tore de **Kirby** par une **variété hyperbolique** immergée dans l'espace euclidien. Avec Simon Donaldson, il a démontré que de telles structures n'existaient pas toujours en dimension quatre.

En dynamique, Sullivan a introduit un dictionnaire entre les groupes kleiniens et l'itération des **fractions rationnelles**, dictionnaire basé sur la théorie des structures complexes mesurables. Il a démontré que les fractions rationnelles n'ont pas de composante errante, ce qui a résolu une conjecture de **Fatou** vieille de soixante ans et établi brillamment un parallèle avec le théorème de finitude d'**Ahlfors**. Il a ensuite utilisé des méthodes similaires pour fournir une démonstration conceptuelle de l'universalité de **Feigenbaum** pour les **casades de doublements de période**, en réinterprétant ces résultats comme l'unicité d'une structure lisse sur un attracteur étrange. Le dictionnaire de Sullivan, son théorème de rigidité pour les groupes kleiniens et ses bornes *a priori* pour la renormalisation sont maintenant des principes fondamentaux en dynamique holomorphe.

Revenant par la suite avec Moira Chas sur la structure algébrique

des variétés, il a étonné les spécialistes en introduisant un nouvel invariant : forte de ses liens avec la théorie topologique des champs, la « topologie des cordes » est rapidement devenue un sujet à part entière.

La quête opiniâtre de Dennis Sullivan pour comprendre les causes profondes, sa capacité à voir des analogies entre différents domaines des mathématiques et à jeter des ponts entre ceux-ci ont à jamais changé la discipline.

Dennis Parnell Sullivan est un mathématicien états-unien, célèbre notamment pour ses travaux novateurs en topologie et sur les systèmes dynamiques, deux domaines dans lesquels les idées sur la structure géométrique jouent un rôle central. Membre charismatique et actif de la communauté mathématique, il a trouvé des liens profonds entre une variété impressionnante de domaines des mathématiques.

Sullivan est né à Port Huron dans le Michigan le 12 février 1941. Quand il était enfant, sa famille a déménagé à Houston au Texas. Il est resté dans cette ville jusqu'à son entrée à l'université Rice, d'abord pour étudier la chimie, puis ensuite les mathématiques. Il a obtenu son diplôme en 1963.

Alors qu'il était étudiant de troisième cycle à l'université de Princeton, Sullivan a travaillé sur la classification des variétés, l'une des questions fondamentales de la topologie, en s'appuyant sur les travaux de William Browder, son directeur de thèse, et ceux de Sergueï Novikov. En 1966, sa thèse de doctorat « Triangulation des équivalences d'homotopie » a développé des techniques et fourni des idées qui ont contribué à révolutionner le domaine. L'année suivante, il a écrit un article sur une conjecture importante en topologie géométrique, appelée *Hauptvermutung*, pour lequel il a remporté en 1971 le prix Oswald-Veblen en géométrie de la Société américaine de mathématiques, le premier des nombreux prix qu'il a remporté pendant sa carrière.

Après son doctorat, Sullivan a obtenu des bourses des universités de Warwick en Angleterre (1966-1967), de Berkeley (1967-1969) et de l'institut de technologie du Massachusetts (1969-1973), où il faisait partie du programme de la fondation Sloan. À cette époque, il a progressivement changé la façon dont les mathématiciens pensaient à la topologie algébrique et géométrique, en présentant de nouvelles idées et en construisant un nouveau vocabulaire. En 1970, il a écrit un ensemble de notes inédites qui ont été largement diffusées et qui sont considérées comme extrêmement influentes. Elles ont eu un impact direct sur la classification des variétés lisses et sur des problèmes centraux en topo-

logie algébrique. L'impact à long terme de ses idées a été tel que ces « Notes du MIT » ont finalement été publiées en 2006.

Sullivan a été invité à présenter une conférence plénière au Congrès international des mathématiciens de 1974, un honneur décerné aux meilleurs mathématiciens dans leurs domaines. Il avait passé l'année universitaire 1973-1974 à l'université d'Orsay en France. À la fin de ce séjour, il a été nommé professeur permanent à l'Institut des hautes études scientifiques (IHÉS) près de Paris.

Pendant son passage en France, Sullivan a fait l'une de ses découvertes les plus importantes, une nouvelle façon de comprendre la théorie de l'homotopie rationnelle, un sous-domaine de la topologie algébrique. Le domaine avait déjà été introduit d'un point de vue algébrique par Daniel Quillen en 1969, mais les travaux de Sullivan utilisaient des formes différentielles, un concept du calcul différentiel à plusieurs variables qui ouvrait le champ de la théorie et rendait les calculs beaucoup plus faciles.

En 1981, Sullivan a été nommé titulaire de la chaire Albert-Einstein en sciences de l'université de la ville de New York. Il a conservé son poste à l'IHÉS et a passé les quinze années suivantes à faire la navette entre Paris et New York, souvent en Concorde.

À la fin des années 1970, Sullivan avait commencé à travailler sur des problèmes de systèmes dynamiques, l'étude de points qui se déplacent dans un espace géométrique, un domaine généralement considéré comme très éloigné de la topologie algébrique, le domaine dans lequel il a commencé sa carrière. La capacité des ordinateurs à itérer des fonctions au-delà de ce qui est humainement possible avait créé un grand intérêt pour ce domaine connu dans le grand public sous le nom de « théorie du chaos », car de nombreux systèmes dynamiques présentent un comportement chaotique.

L'une des images les plus connues des systèmes dynamiques est un **diagramme de bifurcation** dans lequel une ligne se divise à plusieurs reprises en deux d'une manière apparemment chaotique. Le physicien Mitchell Feigenbaum a découvert certains rapports dans ces diagrammes qui étaient universels et communs à tous les systèmes. En 1988, Sullivan a pu fournir une démonstration conceptuelle de cette universalité. Un autre résultat marquant dans ce domaine a été de démontrer en 1985 que les fractions rationnelles n'ont pas de composante errante.

Sullivan a quitté l'IHÉS en 1997 pour devenir professeur à l'université d'État de New York à Stony Brook, où il est maintenant professeur

émérite. Revenant à la topologie, Sullivan et Moira Chas ont découvert en 1999 un nouvel invariant pour les variétés basé sur des boucles, inaugurant ainsi la topologie des cordes, un domaine qui s'est rapidement développé ces dernières années. En 2008, Sullivan a également écrit un article dans le *Journal of Topology* avec le milliardaire et philanthrope Jim Simons.

Parmi les récompenses reçues par Sullivan, mentionnons le premier prix Élie-Cartan de l'Institut de France en 1981, le **prix international Roi-Fayçal** en sciences en 1993, la Médaille nationale des sciences des États-Unis en 2005, le prix Steele pour l'ensemble de ses réalisations de la Société américaine de mathématiques en 2006, le prix Balzan pour les mathématiques en 2014 et le prix Wolf en 2010.

Il est membre de l'Académie nationale des sciences des États-Unis, de l'Académie des sciences de New York et de l'Académie américaine des arts et des sciences. Entre 1990 et 1993, il a été vice-président de la Société américaine de mathématiques.

Il a six enfants : Lori, Amanda, Michael (qui est mathématicien), Tom, Ricardo et Clara.

LA TOPOLOGIE (par ARNE B. SLETSJØE)

Les domaines fondamentaux classiques des mathématiques sont l'arithmétique et la géométrie. L'arithmétique traite des nombres, tandis que la géométrie étudie et classe les formes, qu'elles soient abstraites ou observées autour de nous. Nous avons une capacité bien développée à distinguer les formes géométriques les unes des autres. Mais nous sommes également capables de voir des caractéristiques communes dans des formes par ailleurs différentes. La similitude en est un exemple. La similitude signifie que deux figures ont la même forme, mais sont de tailles différentes.

Dans certains contextes, il peut être judicieux de placer dans la même classe des objets dont les variations sont encore plus importantes : Il existe de nombreux ronds-points différents, mais nous doutons rarement que quelque chose soit un rond-point. Il ne s'agit pas de détails dans la conception ou la taille ; il s'agit simplement de la zone au milieu du rond-point que l'on est censé contourner dans la bonne direction. La définition d'un rond-point a une certaine saveur topologique. Un espace ouvert dans les rues de la ville ne devient un rond-point que si l'on supprime une zone au centre de l'espace.



Vus à travers des lunettes topologiques, un cercle et un carré sont identiques, tandis qu'une boule et un tore sont différents. De même, un cercle et une ligne droite sont topologiquement différents, non pas parce que l'un est droit et l'autre courbe, mais parce que l'un a deux extrémités libres, tandis que l'autre est une courbe fermée et n'a donc

pas d'extrémités libres.

La classification topologique est une classification très grossière des objets géométriques. Elle ne tient pas compte des détails insignifiants et se concentre sur les principales caractéristiques de la géométrie. Comme pour les ronds-points, peu importe leur apparence, pourvu qu'il y ait une zone au milieu où personne n'est censé conduire. Sullivan a largement contribué à la construction d'une boîte à outils adaptée à la caractérisation des espaces topologiques.

Le premier outil à avoir été placé dans cette boîte, bien avant l'époque de Sullivan, est le **groupe fondamental**.

Le groupe fondamental

Ce n'est que lorsque l'homme a été capable de lancer une fusée dans l'espace que l'on a pu voir de ses propres yeux ce que l'on savait depuis des centaines d'années : la Terre est ronde. Au quotidien, la Terre semble raisonnablement plate. Cela reflète la différence entre le local et le global. Nous sommes tentés de dire que la topologie ne se préoccupe pas particulièrement du local, mais qu'elle s'intéresse davantage aux aspects globaux. Qu'un corps soit arrondi sur les bords ou qu'il ait des angles vifs n'a pas d'importance. Mais une bouée et une boule sont fondamentalement différents. En revanche, une tasse à café avec une anse est identique à une bouée.

Nous verrons comment les topologues quantifient la différence entre une boule et une bouée. Plus généralement, considérons un objet géométrique X , une surface, un solide, ou quelque chose qui peut être composé de ces objets. Un **lacet** sur l'objet est une application

$$\gamma : S^1 \rightarrow X$$

d'un cercle sur l'objet. Si X est une sphère, nous considérons cette courbe comme un lacet placé sur la sphère. Il existe bien sûr un nombre infini de lacets de ce type sur une sphère. Pour distinguer l'importance topologique de l'insignifiance topologique, nous disons que deux lacets sont équivalents si nous pouvons faire glisser l'un dans l'autre d'une manière continue. Notons qu'un point unique est aussi formellement un lacet, puisque l'application $\gamma : S^1 \rightarrow X$ peut facilement réduire le cercle entier à un seul point. Nous appelons ce lacet le lacet 0. Un lacet plus général sera alors équivalent au lacet 0 si l'on peut réduire le lacet à un point sans quitter la surface ni couper le lacet.

Il est facile de voir que cela est possible tant que le lacet est sur une sphère. Sur une surface en forme de bouée (de tore), la situation est tout à fait différente. Si le lacet fait le tour du trou du tore comme indiqué par la courbe bleue de la figure 52, ou fait le tour du tube en suivant la courbe rouge, alors il sera impossible de réduire la courbe à un point. Cette construction décrit ce que l'on appelle le groupe fondamental π_1 de l'objet géométrique :

$$\pi_1(X) = \{\gamma : S^1 \rightarrow X\} / \sim .$$

La notation $/\sim$ signifie que plutôt que d'étudier des courbes individuelles, nous nous intéressons à des classes d'équivalence de courbes. Sur une sphère S^2 , tous les lacets peuvent être réduits à un point et $\pi^1(S^2) = 0$, tandis que sur le tore, nous avons deux cercles, le bleu b autour du trou et le rouge r autour du tube. De plus, le lacet peut parcourir chaque trajectoire de nombreuses fois dans des ordres différents. Un exemple de cet élément du groupe fondamental du tore est

$$bbrb^{-1}rrb$$

qui correspond à un lacet qui (lu de droite à gauche) fait d'abord le tour du cercle bleu, puis deux fois le tour du rouge, puis le tour en sens inverse du bleu (b^{-1}), le tour du rouge et enfin deux fois le tour du bleu.

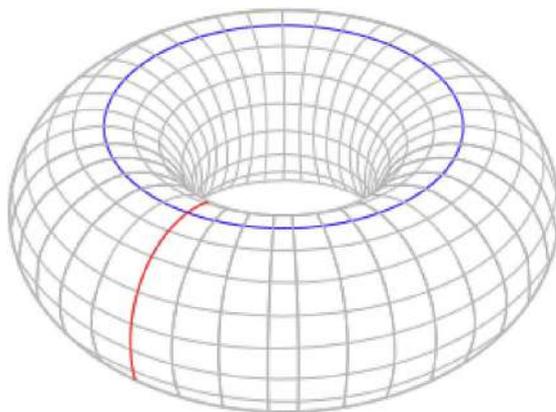


Fig. 52

Le groupe fondamental mesure le nombre de classes d'équivalence de cercles présentes dans l'objet géométrique. Nous allons examiner un exemple où cette question est importante.

Prenons comme objet géométrique le réseau électrique d'une région, un peu schématisé et simplifié comme dans la figure 53. Un facteur de sécurité important associé à un réseau d'alimentation électrique est la robustesse du réseau en cas de rupture d'une ligne. Si nous coupons l'électricité à un endroit, il doit toujours y avoir un autre moyen de contourner la coupure. Cela signifie qu'il doit y avoir au moins un lacet dans le réseau, c'est-à-dire une image du cercle S^1 , et que le groupe fondamental du réseau contribue à la robustesse du réseau. Plus il y a de lacets, et donc plus le groupe fondamental est complexe, plus il est facile pour l'électricité de trouver un autre chemin.

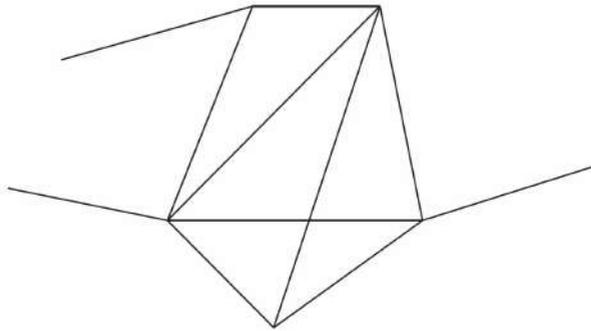


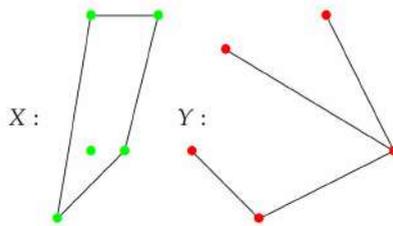
Fig. 53

UN MODÈLE ALGÈBRIQUE POUR LES ESPACES TOPOLOGIQUES (par ARNE B. SLETSJØE)

Le comité Abel précise :

« Le modèle de Sullivan est basé sur les formes différentielles, un concept du calcul différentiel à plusieurs variables qui permet un lien direct avec la géométrie et l'analyse. Cela a rendu une grande partie de la topologie algébrique accessible au calcul, ce qui s'est avéré révolutionnaire. »

Algébrisation de la topologie



Les deux figures X et Y ont toutes deux 5 sommets et 4 arêtes. Mais même si les deux paires de nombres sont identiques, cela n'implique pas que les figures soient identiques. Certes il n'est pas très difficile de décrire la différence entre les deux figures, mais ce fut tout de même un grand pas en avant pour la topologie lorsque Emmy Noether, au milieu des années 1920, lança l'idée d'introduire de l'algèbre dans la topologie. Elle a suggéré de remplacer le nombre de certains objets par le nombre correspondant de copies de \mathbb{Z} et de coder la relation entre les arêtes et les coins dans une fonction d entre deux versions de \mathbb{Z}^5 :

$$\mathbb{Z}^5 \xrightarrow{d} \mathbb{Z}^5.$$

Ce complexe de chaînes de l'espace topologique peut être utilisé efficacement pour calculer certains invariants topologiques des deux figures. Pour X, nous obtenons les groupes d'homologie

$$H_0(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2, \quad H_1(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z},$$

qui expriment que X a deux composantes et une boucle, tandis que nous obtenons pour Y

$$H_0(Y, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad H_1(Y, \mathbb{Z}) = 0.$$

Ainsi, Y a une composante et aucune boucle. Il est implicite dans les deux dernières formules que H_0 mesure le nombre de composantes et que H_1 « compte » le nombre de boucles.

Théorème de de Rham

Un autre exemple d'algébrisation de la topologie remonte au début des années 1930 et au mathématicien suisse **Georges de Rham**. Le théorème de de Rham stipule que pour une variété lisse M sans bord, il existe un isomorphisme entre les groupes de cohomologie

$$H_{dR}^n(M) \simeq H^n(M, \mathbb{R})$$

pour tout $n \geq 0$. La **cohomologie de de Rham** $H_{dR}^n(M)$ est donnée comme le quotient des **n -formes fermées** (les formes ω telles que $d\omega = 0$) par les **formes exactes** (pour lesquelles $\omega = d\eta$) de la variété M , tandis que $H^n(M, \mathbb{R})$ est étroitement lié aux groupes d'homologie de X et Y , comme indiqué ci-dessus. L'isomorphisme entre les deux théories de cohomologie est défini de telle sorte que pour toute classe d'homologie $[c]$ de M , on associe à une n -forme ω l'intégrale de la forme le long de la classe d'homologie :

$$\omega \mapsto \int_{[c]} \omega.$$

Grâce au théorème de Stokes, l'application est bien définie :

$$d\omega \mapsto \int_{[c]} d\omega = \int_{\partial[c]} \omega = 0.$$

Le théorème de de Rham relie deux descriptions différentes de la variété M . Un isomorphisme en cohomologie est souvent appelé un quasi-isomorphisme des complexes sous-jacents :

$$(\Omega^\bullet(M), d_{dR}) \xrightarrow{\simeq} (C^\bullet(M), \partial).$$

Le complexe de de Rham est construit sur des formes différentielles et encode des propriétés de la structure différentiable de M . Le complexe $(C^\bullet(M), \partial)$ reflète la structure de M comme étant composée d'objets géométriques plus simples, par exemple des segments, des triangles, des tétraèdres, etc. En cohomologie, la géométrie de chaque constituant sera insignifiante ; ce qui est essentiel, c'est la combinatoire dans la structure. Considérons un cercle ordinaire. Si nous joignons deux segments, nous obtenons quelque chose qui est topologiquement identique

à un segment. En revanche, si nous joignons par paire les extrémités, nous obtenons quelque chose qui ressemble davantage à un cercle. La cohomologie ne se préoccupe pas de l'aspect des segments, mais elle permet de déterminer s'il y a une ou deux jonctions entre les segments.

Le modèle de Sullivan

Le complexe de de Rham est un exemple de ce que l'on appelle une algèbre différentielle **graduée** commutative (ADGC). Les ADGC sont des objets dotés d'une structure riche et bien adaptée aux calculs. Le théorème de de Rham peut être considéré comme un moyen de relier la structure géométrique décrite ci-dessus à un objet mathématique adapté aux calculs. L'hypothèse du théorème de de Rham est que l'objet géométrique est une variété lisse. Sullivan avait l'ambition d'étendre le théorème de Rham à tous les espaces topologiques X dépourvus de la structure différentielle nécessaire. Le modèle de Sullivan est sa réponse à ce défi. De manière systématique et pas à pas, Sullivan construit une ADGC basée sur la structure géométrique de l'espace X . L'algèbre retient les propriétés les plus importantes de la géométrie de telle sorte que la connaissance de l'algèbre est en fait suffisante pour reconstruire l'objet, bien sûr pas dans les détails, mais en mettant l'accent sur la structure géométrique.

La force de cette construction réside dans le fait qu'une structure géométrique est remplacée par une structure algébrique presque équivalente, avec plus de souplesse dans les calculs.

Comme exemple de modèle de Sullivan, nous considérons le cercle S^1 . Il n'existe aucune application de S^n avec $n \geq 2$ dans le cercle qui ne puisse être réduite à un point. Cela signifie que le modèle de Sullivan n'a qu'un seul élément de base a de degré 1 et une différentielle triviale. On suppose que le modèle est commutatif gradué. On obtient donc pour $a_1 = a_2 = a$

$$a^2 = a_1 \cdot a_2 = (-1)^{1 \cdot 1} a_2 \cdot a_1 = -a^2.$$

Ainsi, $a^2 = 0$.

Pour la sphère S^2 , la situation est un peu différente. Pour toutes les n -sphères, il existe un générateur a de degré $n = 2$. Contrairement au cas impair $n = 1$, on obtient dans le cas pair $n = 2$

$$a^2 = a_1 \cdot a_2 = (-1)^{2 \cdot 2} a_2 \cdot a_1 = a^2.$$

Il n'y a donc aucune condition sur a^2 . Pour éviter que a^2 ne contribue au modèle, nous introduisons un élément b de degré 3, tel que $db = a^2$. Ainsi, le modèle de Sullivan pour une sphère paire devient

$$(\wedge(a, b), a^2 = db, da = 0),$$

où $\deg(a) = 2$ et $\deg(b) = 3$.

LES COMPOSANTES ERRANTES (par ARNE B. SLETSJØE)

Le comité Abel écrit dans sa citation :

« En dynamique, Sullivan a introduit un dictionnaire entre les groupes kleinien et l'itération des fractions rationnelles, dictionnaire basé sur la théorie des structures complexes mesurables. Il a démontré que les fractions rationnelles n'ont pas de composante errante, ce qui a résolu une conjecture de Fatou vieille de soixante ans. »

Les orbites des systèmes dynamiques

Un système dynamique est un modèle mathématique qui décrit l'évolution temporelle d'un système physique. Un système dynamique a deux composantes principales :

- un ensemble d'états pour le système, chaque état étant une spécification des valeurs de tous les paramètres inclus dans le modèle ;
- une règle qui décrit la dynamique du système, c'est-à-dire la manière dont le système passe d'un état à l'autre.

Une orbite d'un système dynamique est un ensemble ordonné d'états, où l'état suivant est celui que la loi de la dynamique assigne à l'état précédent.

La prévision météorologique est un système dynamique. Un état du système météorologique est une liste de données météorologiques, telles que la température, la pression atmosphérique, l'humidité, la vitesse et la direction du vent, et éventuellement d'autres paramètres. Sur la base d'un état spécifique, les météorologues peuvent, en s'appuyant sur les lois de la nature, faire une prédiction fiable de ce que seront les mêmes paramètres un instant plus tard. Des ordinateurs puissants peuvent répéter ce processus des milliers de fois et établir sur cette base des prévisions météorologiques relativement précises.

La prévision météorologique est un système dynamique complexe. Pour illustrer les concepts liés à la théorie des systèmes dynamiques, considérons un système moins complexe. Les états sont les nombres réels et la dynamique est donnée par la fonction $f(x) = x^2 - 1$. Une orbite du système dynamique est entièrement déterminée par une valeur initiale x_0 et des itérations de la fonction f , c'est-à-dire $x_0, f(x_0), f^2(x_0)...$ Pour un point initial $x_0 = 2$, l'itération de la fonction $f(x) = x^2 - 1$ donne la trajectoire

$$\{2; 3; 8; 63; 3968; \dots\}$$

ce qui implique que $f^n(x_0) \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Si d'autre part nous choisissons le point initial $x_0 = 1$, l'orbite sera périodique

$$\{1; 0; -1; 0; -1; \dots\}$$

puisque $f(-1) = 0$ et $f(0) = -1$. Si nous changeons le point initial en $x_0 = 0,9$, l'orbite devient

$$\{0,9; -0,19; -0,96; -0,07; -0,99; \dots\}.$$

Cette orbite finira par converger vers l'orbite périodique $\{-1; 0\}$.

Puisque la fonction est la même pour toutes les orbites, les orbites doivent être déterminées de manière unique par leur point initial. Une classification des orbites revient donc à une classification des points initiaux.

Des points initiaux différents peuvent engendrer des orbites très différentes. Nous avons vu que le point initial $x_0 = 2$ force l'itération à tendre vers $+\infty$, contrairement au point initial $x_0 = 0,9$ où l'orbite converge vers une orbite périodique. Cette dernière situation sera en fait le cas pour tous les points initiaux de l'intervalle

$$\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < x_0 < \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

sauf pour $z = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ où la fonction a un point fixe : $f(z) = z$.

Nous divisons l'ensemble des points initiaux en deux catégories : les points « apprivoisés » et les points « sauvages ». Les points apprivoisés sont caractérisés par le fait que les orbites des points proches partagent un grand nombre de leurs propriétés essentielles. Les points de l'intervalle $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x_0 < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, où toutes les orbites sauf une convergent vers l'orbite périodique $\{-1; 0\}$, partagent cette propriété. Nous appelons l'ensemble des points apprivoisés l'ensemble de Fatou du système dynamique. Le complémentaire de l'ensemble de Fatou, constitué uniquement des points sauvages, est appelé **l'ensemble de Julia**. Un exemple de point de l'ensemble de Julia pour l'itération $f(x) = x^2 - 1$ est le point fixe $z = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. L'orbite de z se compose uniquement de z , mais si nous commençons l'itération en nous éloignant de z tout en restant proches, les itérations continueront à s'éloigner de z et finiront par converger vers l'orbite périodique $\{-1; 0\}$. Une description alternative est qu'un point initial z de l'ensemble de Julia est instable pour le type d'orbite qu'il engendre.

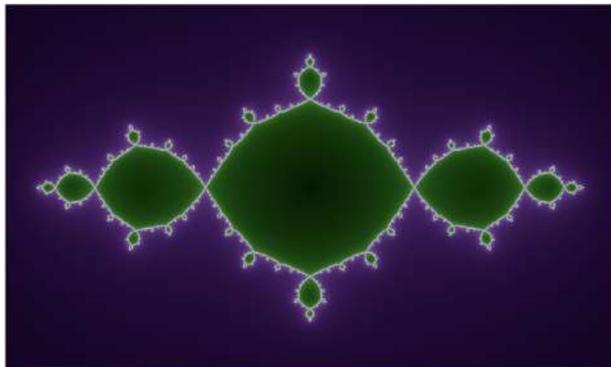


FIG. 54 – Illustration du système dynamique $f(z) = z^2 - 1$, $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. La courbe blanche est l'ensemble de Julia, tandis que les ensembles violet et vert sont les deux composantes de l'ensemble de Fatou. L'ensemble violet montre tous les points initiaux où les itérations tendent vers ∞ , tandis que les points initiaux de l'ensemble vert forment des orbites qui convergent vers l'orbite périodique $\{-1; 0\}$.

La conjecture de Fatou sur l'absence de composante errante

Dans les années 1920, Pierre Fatou a émis une conjecture sur les points apprivoisés d'un système dynamique rationnel sur le plan complexe étendu $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Sullivan a démontré la conjecture en 1985 et a ainsi changé le statut du résultat de conjecture de Fatou en théorème de Sullivan.

Théorème (Sullivan, 1985). *Si $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ est une fraction rationnelle de degré $d \geq 2$, alors toute composante U de l'ensemble de Fatou $F(f)$ est asymptotiquement périodique.*

Le terme « composante non errante » fait référence au fait que les composantes périodiques ne sont pas errantes. Une composante errante U satisfait $U \cap f^p(U) = \emptyset$ pour tout $p \geq 2$. On trouve un exemple de composante errante avec l'itération de $f(z) = z + 2\pi \sin z$. Les zones blanches de la figure 55 sont des composantes errantes de l'ensemble de Fatou. L'orbite du point $z_0 = \pi/2$ est donnée par

$$\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \dots$$

Remarquons que la fonction $f(z) = z + 2\pi \sin z$ n'est pas rationnelle et ne viole donc pas le théorème de Sullivan.

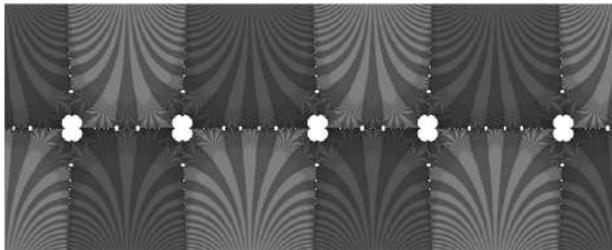


FIG. 55 – *Illustration du système dynamique donné par $f(z) = z + 2\pi \sin z$ avec $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.*

La démonstration de Sullivan du théorème sur l'absence de composante errante s'appuie sur une connaissance approfondie de la géométrie du plan complexe étendu et des fonctions qui y sont définies. L'hypothèse selon laquelle il existe des composantes errantes pour une fraction rationnelle de degré $d \geq 2$ conduit à l'existence d'une infinité de fractions rationnelles linéairement indépendantes de degré $d \geq 2$. Cependant, il est bien connu que l'espace vectoriel des fractions rationnelles de degré $d \geq 2$ est de dimension finie. Cette contradiction démontre que le théorème est vrai.

UN APERÇU DU TRAVAIL DU LAURÉAT (par ALEX BELLOS)

Le comité Abel a décerné à Dennis Parnell Sullivan le prix Abel 2022 pour ses contributions dans les domaines de la topologie et des systèmes dynamiques. Les textes ci-dessous expliquent brièvement certains de ses travaux dans ces deux domaines.

La topologie

Au XIX^e siècle, les mathématiciens ont commencé à s'intéresser de plus près aux propriétés essentielles des formes. Un nouveau domaine de la géométrie est apparu, dans lequel deux objets sont considérés comme identiques si l'un d'eux peut être transformé en l'autre en l'étirant ou en le comprimant, mais sans le déchirer ni le coller. Dans ce domaine appelé topologie, la lettre « a » est la même que la lettre « b », un carré est la même chose qu'un cercle et une tasse à thé est la même chose qu'une bouée.

Un concept de base en topologie est celui de « variété », une forme qui est la même partout, ce qui signifie qu'elle n'a pas d'extrémité, de bord, d'intersection ou de ramification. La classification des variétés, c'est-à-dire la détermination du nombre de types différents de variétés et de leur nature, est l'un des domaines fondamentaux de la recherche en topologie depuis le début de cette discipline. C'est dans ce domaine que Dennis Sullivan a commencé sa carrière, qu'il a rédigé sa thèse et qu'il a effectué d'importants premiers travaux.

Commençons par notre propre classification simplifiée, en commençant par les variétés de dimension 1. Les formes à une dimension sont plus facilement représentées par des ficelles. Nous pouvons fabriquer la lettre « a » avec de la ficelle, mais il est clair qu'il ne s'agit pas d'une variété, car elle a deux extrémités, à la pointe et à la base de la lettre. Il en va de même pour les lettres « b » et « c ». En revanche, la lettre « o » fabriquée avec de la ficelle est une variété : elle n'a pas d'extrémité, d'intersection ou de branche. En fait, le « o », une boucle fermée, est la seule variété de dimension 1 qui puisse être fabriquée à partir d'une quantité finie de ficelle.

Passons maintenant à deux dimensions. Les formes en dimension 2 sont plus facilement représentées par des feuilles. Une feuille de papier a deux dimensions si l'on ne tient pas compte de l'épaisseur, mais ce n'est pas une variété parce qu'elle a un bord. La sphère (la surface d'une boule) en revanche est une variété. Où que vous soyez sur une

sphère, votre environnement immédiat est exactement le même.

Le tore, la surface d'une bouée, est également une variété. Le double tore, qui ressemble à la surface d'un bretzel en forme de huit, est également une variété. En fait, le triple tore, le quadruple tore, etc., sont tous des variétés. Pour résumer notre classification bidimensionnelle, la sphère et la famille des tores sont les seules variétés de dimension 2 orientables qui peuvent être fabriquées avec une quantité finie de feuilles.

Passons à la dimension 3. Les formes à trois dimensions sont plus facilement représentées par de la pâte à modeler. Mais ici, nos analogies visuelles s'effondrent et nous nous dirigeons vers l'abstraction. Remarquons que les variétés unidimensionnelles faites de ficelles, comme la lettre « o », existent en dimension 2, et que le tore bidimensionnel existe en dimension 3. De même, les variétés en pâte à modeler de dimension 3 existent en quatre dimensions ou plus. Ces formes ne peuvent pas être construites dans l'espace tridimensionnel dans lequel nous vivons.

La classification des variétés est le sujet de la conjecture de Poincaré, qui était l'un des problèmes ouverts les plus célèbres de toutes les mathématiques jusqu'à ce que le mathématicien russe **Grigori Perelman** la démontre en 2002-2003. Perelman a gagné un million de dollars pour sa démonstration et a surpris beaucoup de monde en refusant le prix.

Continuons à monter dans les dimensions. La classification des variétés de dimension 4 est pleine de problèmes ouverts et de mystères.

Curieusement, la classification devient plus facile lorsque nous atteignons les variétés de dimension 5 et plus. Les topologues utilisent la « chirurgie » pour opérer sur ces variétés et en construire de nouvelles. En termes simples, plus il y a de dimensions, plus il y a de « place » pour se mouvoir.

La thèse et les premiers travaux de Dennis Sullivan portaient sur la chirurgie. Il a contribué à déterminer le type de choses que l'on pouvait introduire dans le programme de la chirurgie. L'une de ses innovations a été d'organiser cette théorie à l'aide d'« **espaces classifiants** » et d'utiliser ces espaces comme clé pour comprendre toutes les variétés de grande dimension. Ses travaux ont permis de dresser un tableau complet des variétés en dimension 5 et plus et de leur comportement.

Les systèmes dynamiques

Au milieu des années 1970, les ordinateurs ont stimulé un grand nombre de nouvelles recherches mathématiques. Il est devenu possible

par exemple d'étudier le comportement de systèmes qui reposent sur de nombreux calculs répétés, dont certains révèlent des formes fractales fascinantes et magnifiques.

Les spécialistes de **biomathématiques** ont notamment mis au point des modèles pour expliquer comment les populations animales varient. Une formule simple, appelée application logistique, rend compte de l'évolution d'une population animale d'une année à l'autre :

$$x_{n+1} = r x_n(1 - x_n).$$

La valeur x_n est un nombre compris entre 0 et 1, qui représente la taille d'une population animale l'année n en tant que proportion de la population maximale. La valeur x_{n+1} est la taille de la population l'année $n + 1$. Le paramètre r est le taux de reproduction (la fertilité) du système.

L'application logistique est itérative, ce qui signifie qu'à partir d'une population de l'année 1, on calcule la population de l'année 2, puis on insère à nouveau cette valeur dans l'équation pour obtenir le résultat pour l'année 3, puis pour l'année 4, et ainsi de suite. L'équation rend compte à la fois de la croissance proportionnelle des populations (c'est la partie rx_n) et de leur diminution lorsque la surpopulation exerce une pression à cause de ressources limitées (c'est la partie $1 - x_n$).

L'application logistique révèle un comportement complexe inattendu en fonction de la valeur de r , comme l'illustre la figure 56, qui représente la valeur de r sur l'axe horizontal et la valeur limite de la population sur l'axe vertical.

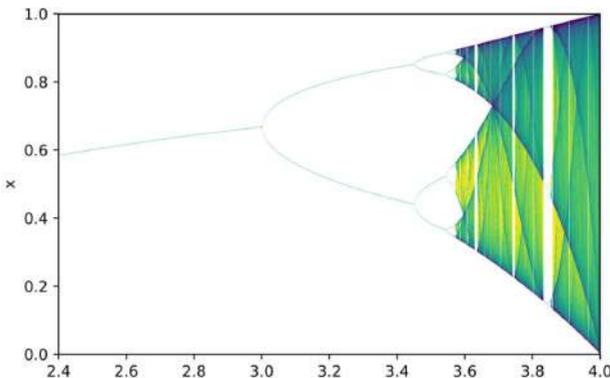


FIG. 56

Par exemple, lorsque r est compris entre 2,4 et 3, la population finit par s'établir à une valeur fixe, quelle que soit sa taille initiale, d'où la ligne unique sur le graphique.

Mais lorsque r atteint 3, la ligne bifurque, ce qui signifie que la population ne se fixe pas à une valeur unique. Au lieu de cela, la population limite oscille une année sur deux entre deux valeurs. Lorsque r augmente, les deux branches bifurquent à nouveau. La population oscille alors entre quatre valeurs.

Ce graphique, également connu sous le nom de diagramme de bifurcation, est l'une des images mathématiques les plus célèbres des années 1970. Les cascades de doublements de période sont un exemple de ce qui est devenu connu sous le nom de théorie du chaos, dans laquelle de minuscules changements dans les conditions initiales peuvent avoir des conséquences extrêmement différentes. Un autre terme courant pour désigner ce phénomène est l'« effet papillon ».

Le physicien Mitchell Feigenbaum a découvert une caractéristique fascinante de l'application logistique : les rapports des distances entre les points de bifurcation convergent vers un nombre fixe qui vaut 4,6692... et qui est appelé « **constante de Feigenbaum** ». En fait, la constante de Feigenbaum apparaît non seulement dans la formule itérative $rx_n(1 - x_n)$ comme ci-dessus, mais aussi pour d'autres formules. Il s'agit d'une caractéristique universelle de ce type de système, indépendante des détails de la formule.

Dennis Sullivan a montré que les limites des cascades de doublements de période sont universelles. Ses travaux dans ce domaine ont permis de mieux comprendre le concept de « renormalisation », qui fait désormais partie des fondements du domaine. Son approche novatrice a révélé comment la riche théorie des nombres complexes peut être exploitée pour comprendre l'émergence du phénomène de rigidité dans la dynamique réelle.

La topologie et les systèmes dynamiques habitent des paysages mathématiques différents. Pourtant, le travail de Sullivan peut être considéré comme faisant partie d'une entreprise visionnaire unique et cohérente, l'étude des structures géométriques sur les espaces, que cet espace soit une variété ou une fractale. Les vastes intérêts de Sullivan et ses profondes connaissances ont fait de lui, selon les termes de la citation pour le prix Abel, « un véritable virtuose ».

Caffarelli (2023)

« pour ses contributions à la théorie de la régularité pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, y compris les problèmes à frontière libre et l'équation de Monge-Ampère ».

Les équations aux dérivées partielles apparaissent naturellement comme des lois de la nature pour décrire des phénomènes aussi différents que l'écoulement de l'eau ou la croissance des populations. Ces équations ont été une source constante d'étude approfondie depuis l'époque d'Isaac Newton et de Gottfried Leibniz. Pourtant, malgré les efforts substantiels de nombreux mathématiciens au cours des siècles, des questions fondamentales concernant l'existence, l'unicité, la régularité et la stabilité des solutions de certaines des équations clés restent non résolues.

Pendant plus de quarante ans, **Luis Caffarelli** a apporté des contributions révolutionnaires à l'exclusion ou à la caractérisation des singularités. Cela s'appelle la théorie de la régularité et permet de saisir les principales caractéristiques qualitatives des solutions au-delà du cadre initial de l'analyse fonctionnelle. Elle est conceptuellement importante pour la modélisation (par exemple, l'hypothèse de champs qui varient macroscopiquement est-elle cohérente ?) et éclaire les stratégies de discrétisation, ce qui est crucial pour une simulation numérique efficace et fiable. Les théorèmes de Caffarelli ont radicalement changé notre compréhension de certaines classes d'équations aux dérivées partielles non linéaires avec de nombreuses applications. Les résultats vont au cœur du sujet, les techniques font preuve à la fois de virtuosité et de simplicité et couvrent de nombreux domaines différents des mathématiques et de leurs applications.

Une grande partie du travail de Caffarelli concerne les problèmes à frontière libre. Prenons par exemple le problème de la fonte de la glace dans l'eau. Ici, la frontière libre est l'interface entre l'eau et la glace. C'est une partie de l'inconnue qui doit être déterminée. Un autre exemple est celui de l'eau qui s'infiltre à travers un milieu poreux. Là encore, il s'agit de comprendre l'interface entre la partie saturée et la partie non saturée du milieu.

Une classe particulière de problèmes à frontière libre est appelée

« **problème de l'obstacle** », par exemple un ballon pressé contre un mur ou un corps élastique reposant sur une surface. Caffarelli a donné des solutions pénétrantes à ces problèmes avec des applications aux interfaces solide-liquide, aux écoulements de jet et à la cavitation, aux écoulements de gaz et de liquides dans un milieu poreux, ainsi qu'aux mathématiques financières. Les résultats de régularité de Caffarelli reposent sur un agrandissement au niveau de la frontière libre et sur la classification des explosions qui en résultent, les explosions non génériques correspondant à des singularités de la frontière libre.

Les équations de Navier-Stokes incompressibles modélisent l'écoulement des fluides tels que l'eau. La régularité des solutions de ces équations en trois dimensions est l'un des problèmes du prix du millénaire de l'**institut Clay**. En 1983, Caffarelli, Kohn et Nirenberg ont montré en se basant sur les travaux antérieurs de Scheffer que l'ensemble des singularités de solutions **faibles** appropriées ne peut pas contenir de courbe, c'est-à-dire qu'il doit être très « petit ».

Les théorèmes de régularité de Caffarelli des années 1990 ont représenté une avancée majeure dans notre compréhension de l'équation de Monge-Ampère, une équation aux dérivées partielles fortement non linéaire typique, qui est par exemple utilisée pour construire des surfaces de courbure de Gauss prescrite. D'importants résultats d'existence ont été établis par Alexandrov ; des propriétés centrales ont été démontrées antérieurement par Caffarelli en collaboration avec Nirenberg et Spruck, avec d'autres contributions clés d'Evans et de Krylov. Caffarelli a cependant comblé le fossé dans notre compréhension des singularités en démontrant que les exemples explicitement connus de solutions singulières étaient les seuls.

Caffarelli et ses collaborateurs ont appliqué ces résultats au problème du **transport optimal de masse de Monge-Kantorovich**, en s'appuyant sur des travaux antérieurs de **Brenier**. Caffarelli et Vasseur ont donné des résultats profonds de régularité pour l'équation quasi-géostrophique, en partie en appliquant l'article exceptionnellement influent de Caffarelli et Silvestre sur le laplacien fractionnaire.

En outre, Caffarelli a apporté des contributions décisives à la théorie de l'**homogénéisation**, qui vise à caractériser le comportement effectif ou macroscopique des milieux qui présentent une microstructure, par exemple parce qu'ils sont constitués d'un matériau composite. Un problème typique concerne un milieu poreux, comme un réservoir d'hydrocarbures, où l'on a une roche solide avec des pores, ce qui représente une structure complexe et dans une large mesure inconnue à travers

laquelle les fluides s'écoulent.

Caffarelli est un mathématicien exceptionnellement prolifique qui a eu plus de 130 collaborateurs et plus de 30 doctorants sur une période de cinquante ans. En combinant une vision géométrique remarquable avec des outils et des méthodes analytiques ingénieux, il a eu et continue d'avoir un impact énorme sur le domaine.

Notice biographique (par ALEX BELLOS)

Né à Buenos Aires en Argentine en 1948, Caffarelli a étudié les mathématiques à l'université de cette même ville. Sous la direction de Calixto Calderón, il a obtenu son doctorat en 1972 avec une thèse sur les polynômes intitulée « Sur la conjugaison et la sommabilité des séries de Jacobi ». L'année suivante, il a intégré l'université du Minnesota pour effectuer un postdoctorat. Il a rejoint Calderón qui y avait obtenu un poste permanent.

Dans le Minnesota, Caffarelli a changé l'orientation de ses recherches après avoir assisté à une série de conférences sur l'analyse harmonique présentée par **Hans Lewy**, un mathématicien américain d'origine polonaise à la retraite. Caffarelli a demandé à Lewy de lui soumettre quelques problèmes sur lesquels travailler. Lewy lui a suggéré le « problème de l'obstacle », une question classique dans le domaine des EDP non linéaires sur la façon dont une membrane élastique repose sur un obstacle donné. Caffarelli a dû tout apprendre sur ce sujet, car il partait de zéro. Il a été captivé et a rapidement commencé à faire des progrès surprenants sur ce sujet et dans le domaine plus large des « problèmes à frontière libre ». En 1976, il a publié six articles. En 1977, il a eu son premier article publié dans la prestigieuse revue *Acta Mathematica* : « La régularité des frontières libres dans les dimensions supérieures ».

En 1980, Caffarelli a rejoint l'institut Courant de l'université de New York, spécialisé dans les mathématiques appliquées. En marchant un jour dans le quartier chinois avec Robert Kohn et Louis Nirenberg (le lauréat du prix Abel 2015, décédé en 2020), les trois hommes décidèrent de travailler ensemble sur les équations de Navier-Stokes, un système d'EDP qui modélise la dynamique des fluides. De cette collaboration est né l'article « Régularité partielle de solutions faibles convenables des équations de Navier-Stokes » publié en 1982, un article de référence qui a remporté par la suite le prix Steele 2014 de la Société américaine de mathématiques pour sa contribution significative à la recherche. Lorsque Nirenberg fut interrogé plus tard sur Caffarelli en tant que

mathématicien, il répondit : « Une intuition fantastique, tout simplement remarquable... J'ai eu du mal à le suivre. D'une certaine manière, il voit immédiatement des choses que les autres ne voient pas. »

Au début des années 1980, Caffarelli était déjà bien reconnu dans la communauté mathématique. Il a remporté le prix Guido-Stampacchia en 1982, le premier d'une longue liste de prix prestigieux. Il a été conférencier au Congrès international des mathématiciens à Varsovie en 1983 et a remporté le prix Bôcher en 1984.

Caffarelli a été professeur à l'université de Chicago de 1983 à 1986. Puis il a rejoint pour une dizaine d'années l'Institut d'étude avancée de Princeton. Au cours de cette période, l'un des principaux axes de son travail a été l'équation de Monge-Ampère, une autre EDP non linéaire bien connue. Il a développé ce qu'on appelle maintenant la « théorie de la régularité de Caffarelli », qui a des applications importantes dans d'autres domaines tels que la théorie du transport optimal.

Caffarelli a souhaité à nouveau travailler avec des étudiants de doctorat, car cette activité lui manquait. Il est donc retourné à l'institut Courant en 1994. Depuis 1997, il est titulaire de la chaire Sid-Richardson en mathématiques à l'université du Texas à Austin, où il a fait notamment des progrès passionnants dans l'étude de la théorie de l'homogénéisation, un domaine de recherche impliquant les EDP qui examine les propriétés physiques à différentes échelles.

Caffarelli est non seulement remarquable par la profondeur de son travail, mais il est aussi extraordinairement prolifique. Il a publié 320 articles. Âgé de 74 ans, il continue de publier plusieurs articles par an. Il est très aimé au sein de la communauté et a coécrit des articles avec plus de 130 personnes, ses collaborations les plus fréquentes étant avec Avner Friedman. Les articles de Caffarelli ont été cités 19 000 fois d'après la base de données MathSciNet, un nombre qui témoigne de son influence dans le domaine. Il a supervisé plus de trente doctorants. En 2018, son étudiant de postdoctorat **Alessio Figalli** a remporté la médaille Fields. Parmi les autres récompenses obtenues par Caffarelli, on trouve le prix Rolf-Schock 2005, le prix Steele 2009 de la Société américaine de mathématiques pour l'ensemble de ses réalisations, le prix Wolf 2012, la médaille Solomon-Lefschetz 2013 et le prix Shaw 2018. Il a été élu à l'Académie nationale des sciences des États-Unis en 1991. Il est membre de plusieurs autres académies nationales.

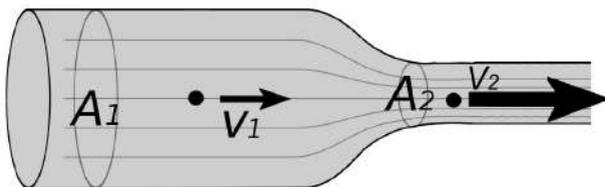
Caffarelli est marié à la mathématicienne argentine Irene Martínez Gamba, titulaire d'une chaire en informatique à l'université du Texas à Austin. Ils ont trois fils : Alejandro, Nicolas et Mauro.

LES MODÈLES MATHÉMATIQUES (par ARNE B. SLETSJØE)

Si vous prédisez que le temps d'aujourd'hui sera le même que celui d'hier, vous aurez raison avec une probabilité d'environ 0,5. Si vous incorporez en plus quelques vieux dictons météorologiques, comme « ciel rouge la nuit, les marins se réjouissent ; ciel rouge le matin, les marins se méfient », vous augmenterez sensiblement vos capacités de voyance. Cependant, si vous prévoyez de traverser la mer, vous préféreriez sans doute des prévisions fondées sur des connaissances plus approfondies. C'est pourquoi vous consultez Internet ou écoutez votre radio pour lire ou entendre ce que le météorologue peut vous dire sur les défis que vous aurez à relever au cours de votre voyage imminent.

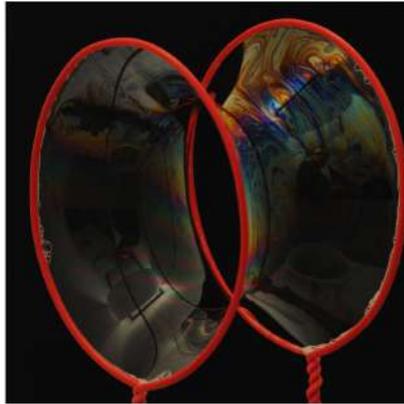
En mettant vos lunettes de soleil et en vous réjouissant que le vent souffle juste comme il faut dans la grand-voile, vous envoyez une pensée chaleureuse au météorologue qui a alimenté son ordinateur avec un grand nombre de données et quelques lois physiques pour vous donner une description presque parfaite du beau temps d'aujourd'hui.

Les prévisions météorologiques, ainsi que de nombreux autres modèles de phénomènes naturels, sont basées sur ce que l'on appelle des « équations aux dérivées partielles », ou EDP en abrégé. La caractéristique générale d'une EDP en tant que modèle mathématique de quelque chose que nous observons dans la nature est la correspondance entre une force agissante et une réaction résultante. La réaction peut être décrite comme un processus temporel ou simplement comme une configuration géométrique sans temps. La force agissante peut provenir de différentes sources : un champ gravitationnel, une pression ou un gradient de température. Outre la source de la force agissante, la géométrie de l'objet étudié joue un rôle majeur.



Le comportement d'un gaz qui s'écoule dans un tuyau dépend fortement de la forme de ce dernier. Si nous rétrécissons le tuyau, le gaz s'écoulera plus rapidement et les obstacles provoqueront des turbulences. Si l'on plonge un cadre métallique dans une eau savonneuse,

propice à la formation de bulles, le film de savon formera une surface d'aire minimale, la forme du cadre étant la seule contrainte.



L'écoulement de gaz dans un tuyau est modélisé par ce que l'on appelle les équations de Navier-Stokes. Ces équations résultent de l'application de la deuxième loi de Newton au mouvement des fluides, ainsi que d'hypothèses sur la manière dont les molécules du fluide interagissent.

Une solution des équations de Navier-Stokes est un champ de vitesse, qui décrit la vitesse du fluide à tout moment et en tout point. Le caractère borné de cette solution signifie que la vitesse de n'importe quelle partie du fluide ne dépassera jamais une certaine valeur donnée. Dans le monde physique, ce n'est pas un problème puisqu'une vitesse infinie est impossible. Mais nous pouvons toujours poser la question véritablement physique : existe-t-il une limite pour la vitesse d'une tornade ou allons-nous constamment observer de nouveaux records de vitesse ? D'un point de vue mathématique, cette question se reformule sous la forme d'une question de bornes pour les solutions. Les équations de Navier-Stokes développent-elles des solutions non bornées en temps fini ? Cette question est appelée le problème de l'existence et de la régularité des équations de Navier-Stokes. L'institut Clay pour les mathématiques a désigné ce problème comme l'un des sept problèmes ouverts les plus importants en mathématiques et a offert un prix d'un million de dollars américains pour une solution ou un contre-exemple.

Les équations de Navier-Stokes impliquent le temps comme paramètre, c'est-à-dire que l'équation modélise ce qui se passe dans le temps en fonction des forces agissantes et de la géométrie. Le phénomène de

surface minimale est un exemple de phénomène physique modélisé par une EDP qui n'implique pas le temps comme paramètre. Lorsque vous plongez un cadre en fil d'acier dans de l'eau savonneuse, si vous avez de la chance, vous verrez un film de savon s'attacher au cadre. Étant donné que les molécules de savon préfèrent rester collées les unes aux autres autant que possible, le film de savon présentera toujours une surface minimale. Cela signifie que si le film est attaché au cadre, il n'est pas possible de trouver une surface de plus petite aire.

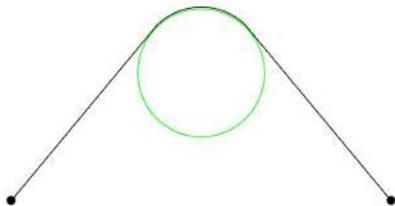
Même si nous considérons la formation de la surface minimale comme un résultat purement géométrique, il existe bien sûr un processus dépendant du temps qui se déroule après avoir plongé le cadre en fil d'acier dans l'eau savonneuse. Les molécules de savon agissent rapidement et atteignent leur position finale en une fraction de seconde. Au cours de ce processus, elles se déplacent un peu, jouant leur jeu avec toutes les autres molécules, mais finissent par se stabiliser. Elles ont atteint un état d'équilibre. Ainsi, la solution du modèle indépendant du temps peut également être considérée comme l'état d'équilibre d'un processus dépendant du temps.

Un problème commun à tous les modèles mathématiques est de trouver des solutions. Supposons que vous élaboriez un modèle mathématique pour quelque chose qui se passe dans la nature et que vous soyez assez intelligent pour trouver des solutions aux équations impliquées. Vous serez alors en mesure de prédire l'avenir sur la base d'un raisonnement scientifique. Vos prédictions auront beaucoup plus de valeur que si vous vous contentez de deviner.

En général, il est très difficile de trouver des solutions. Dans de nombreux cas, il est même difficile de démontrer qu'il existe des solutions. Et si vous savez qu'il existe des solutions, elles peuvent avoir de mauvaises propriétés. Luis Caffarelli a consacré sa vie professionnelle à l'étude de la nature des solutions de diverses équations aux dérivées partielles. Grâce à ses efforts et à la contribution de nombreux autres mathématiciens, notre connaissance de la nature des solutions s'est considérablement accrue au cours des cinquante dernières années. Le comité du prix Abel écrit dans sa citation pour le prix Abel de cette année : « En combinant une vision géométrique remarquable avec des outils et des méthodes analytiques ingénieux, Caffarelli a eu et continue d'avoir un impact énorme sur le domaine. »

LE PROBLÈME DE L'OBSTACLE (par ARNE B. SLETSJØE)

Un élastique tendu forme une ligne droite. La raison est assez simple : la propriété inhérente d'un élastique est de se resserrer, avec pour résultat de former le chemin le plus court entre les deux points d'extrémité. La distance la plus courte entre deux points est la ligne droite.



Placez maintenant l'élastique sur une balle et étirez-le de chaque côté. La forme de l'élastique sera composée de trois parties. Une ligne droite allant de votre main à la balle, une partie incurvée le long et au-dessus de la balle et une autre ligne droite allant de la balle à votre autre main. En utilisant un peu de mathématiques, nous pouvons facilement calculer la forme de l'élastique. Il quittera le ballon exactement au point où la tangente au ballon est dirigée directement vers vos doigts. Si nous connaissons la position des mains ainsi que la position et la taille de la balle, le calcul est simple. On utilise à nouveau le fait que la distance la plus courte entre deux points est la ligne droite.

Si vous préférez écraser une mouche avec un marteau-pilon, vous pouvez examiner le raisonnement suivant pour justifier le fait que « la distance la plus courte entre deux points est la ligne droite ».

Soient P et Q deux points du plan. Soit

$$\mathcal{C} : r(t) = (x(t), y(t))$$

une courbe paramétrée qui relie les deux points. Le calcul différentiel élémentaire indique que la longueur de la courbe est donnée par l'intégrale

$$\int_{\mathcal{C}} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{\mathcal{C}} \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

La courbe la plus courte est donc la solution au problème consistant à trouver la plus petite valeur de l'intégrale ci-dessus lorsque \mathcal{C} varie parmi toutes les courbes qui relient les points P et Q. En insérant le

lagrangien $L(x, y, y') = \sqrt{1 + (y')^2}$ de ce problème d'optimisation dans l'équation d'Euler-Lagrange, nous obtenons

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} = - \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = C$$

pour une certaine constante C . En résolvant par rapport à y' , on obtient

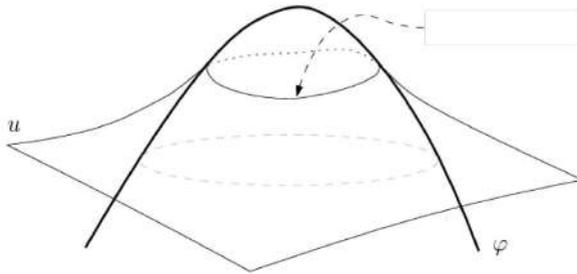
$$y'(x) = \frac{C}{1 - C^2}.$$

Une fonction dont la dérivée est constante est rectiligne, c'est-à-dire que son graphe est une droite.

Pour étendre ce problème au cas de deux dimensions, remplaçons l'élastique par un film de savon supposé incassable. Le bord du film de savon est une courbe quelconque de l'espace. L'obstacle est à nouveau une balle. Le film de savon a la même propriété que l'élastique, à savoir qu'il se resserre pour former une surface d'aire minimale. Si le bord est suffisamment lisse et si l'obstacle est supprimé, ce problème peut être résolu. Résoudre ce problème signifie que nous pouvons trouver une formule pour la surface résultante.

En réintroduisant l'obstacle, ou plus exactement en poussant la balle contre le film de savon incassable, nous sommes confrontés à un problème similaire à celui de l'élastique. Le bord extérieur du film de savon est attaché au cadre. Dans la partie intérieure, il y a une région où le film est en contact complet avec la balle : c'est la partie que nous appelons la surface de contact. Enfin, entre la surface de contact et le cadre, le film de savon essaiera de réaliser son souhait le plus profond, à savoir minimiser sa surface.

Comme nous l'avons vu dans le cas sans obstacle, lorsque le bord est suffisamment lisse, il est possible de trouver une solution au problème de la surface minimale. Lorsque nous introduisons l'obstacle, nous avons toujours un problème de surface minimale, mais le bord a maintenant deux composantes, en plus du bord extérieur, il y a un bord intérieur, la frontière de la surface de contact, appelée « frontière libre ». L'une des principales difficultés de la résolution de ce problème réside dans le fait que cette frontière libre n'est pas fixe. Si elle était fixe, nous pourrions résoudre le problème de la surface minimale. Mais la frontière



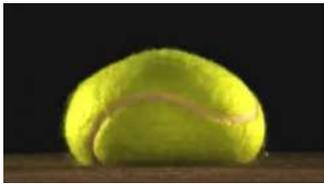
libre est en quelque sorte une conséquence de la formation de la surface minimale. Nous sommes donc confrontés à un problème couplé : la solution du problème de la surface minimale dépend fortement de la frontière libre, mais la forme de la frontière libre dépend de la formation de la surface minimale.

Luis Caffarelli a apporté d'importantes contributions à la compréhension du problème de l'obstacle, en particulier dans l'étude de la frontière libre. Dans les deux cas que nous avons étudiés, l'élastique unidimensionnel et le film de savon bidimensionnel, notre intuition pourrait nous dire que la frontière libre est plutôt lisse. S'il y avait eu une arête vive ou un pli, la première pensée naturelle serait que l'élasticité de l'élastique ou la contractilité du film de savon étirerait et lisserait le tout. On dit souvent qu'un film de savon est plus sage qu'un mathématicien, ce qui signifie que le film de savon calcule immédiatement la forme de la surface minimale, alors que le mathématicien ne peut trouver la solution qu'après des heures de travail acharné. Dans le cas présent, Caffarelli s'est acquitté de ce lourd travail une fois pour toutes, en démontrant que la frontière libre est en fait plutôt lisse. Comment démontrer quoi que ce soit à propos d'un objet dont on ne connaît rien d'autre que l'existence ? C'est l'une des raisons pour lesquelles Luis Caffarelli a été choisi comme lauréat du prix Abel 2023, car il a réussi à mener à bien cette tâche apparemment impossible.

Le problème de l'obstacle ne se limite pas aux élastiques ou aux films de savon. Parmi d'autres exemples d'applications, il y a l'étude de l'infiltration des fluides dans les milieux poreux, le chauffage sous contrainte, l'élastoplasticité, le **contrôle optimal** et les **mathématiques financières**.

LES PROBLÈMES À FRONTIÈRE LIBRE (par ARNE B. SLETSJØE)

Comme à un signal, la foule se tait. Les deux meilleures joueuses de tennis du monde se regardent nerveusement, attendant le service décisif dans la finale du tournoi de Wimbledon de cette année. La joueuse la mieux classée remonte sa visière d'un petit centimètre et commence à faire rebondir la balle. La balle tombe sur le gazon bien taillé et revient dans la main de la joueuse avec un bruit presque inaudible...



Comment se fait-il que la balle rebondisse ? L'image de la balle déformée illustre ce qui se passe. En heurtant le sol à une certaine vitesse, la balle est comprimée. En raison de la forme plutôt stable de la balle, les forces internes de la balle commencent à la repousser vers sa forme d'origine. Ce processus se produit à une certaine vitesse due à l'élasticité de la balle. Cette vitesse est suffisamment élevée non seulement pour remodeler la balle, mais aussi pour lui donner une certaine vitesse ascensionnelle. La joueuse de tennis expérimentée sait qu'une partie de l'énergie cinétique est perdue lors de la collision inélastique avec le sol et ajuste son lancer pour le rebond de manière adaptée.

Pour un physicien, cette explication est satisfaisante, mais le mathématicien doit aller plus loin. Est-il possible d'établir un modèle mathématique pour la forme de la balle lors de la collision ? Le modèle doit combiner les lois du mouvement, les forces causées par l'augmentation de la pression dans la balle lorsqu'elle est comprimée et l'élasticité du matériau de la balle.

Avant de toucher le sol, nous supposons que la balle est une sphère parfaite. Lorsqu'elle touche le sol plat, la surface de contact entre la balle et le sol est également plate. Le reste de la balle ressemblera à un ovale. Un problème majeur dans la modélisation de la déformation est que la surface de contact entre la balle et le sol varie au cours de la collision, allant d'un point initial à une certaine partie de la surface de la balle. En tenant compte de toutes les lois physiques connues, il n'est toujours pas facile d'établir un modèle mathématique pour la déformation de la balle. Il est encore plus difficile de trouver une solution au

modèle, c'est-à-dire de donner une bonne description des mouvements de chaque point de la balle.

Un problème majeur dans la recherche de la solution est qu'il s'agit d'un « problème à frontière libre », l'une des spécialités du lauréat du prix Abel de cette année, Luis Caffarelli. En général, lorsqu'on cherche la solution d'un modèle mathématique, il est essentiel de connaître la géométrie de l'objet étudié. En particulier, vous devez être en mesure de décrire les limites de l'objet.

Supposons que vous mettiez une cuillère en argent dans votre tasse de thé. La chaleur se propage du thé chaud à travers le métal jusqu'au bout de vos doigts. Pour calculer la distribution de la chaleur dans la cuillère en fonction du temps avec le modèle de diffusion de la chaleur de Fourier, il est essentiel de connaître la forme et les dimensions de la cuillère. Il en sera de même pour la balle rebondissante. Le problème de la déformation est que pendant la collision inélastique, la limite de la partie ovale de la balle change continuellement. Mais la variation de la frontière dépend du modèle physique de la collision. On se retrouve donc avec un problème couplé, la solution du modèle mathématique qui devrait donner la forme de la partie ovale de la balle dépend de la limite de la surface de contact entre la balle et le sol, et la limite de la surface de contact dépend de la solution pour la forme de l'ovale. Ce problème couplé, dans lequel les solutions de deux problèmes partiels dépendent mutuellement l'une de l'autre, est un exemple de problème de frontière libre.



Il existe de nombreux autres exemples de problèmes de frontières libres dans la nature et même dans notre vie quotidienne. Si vous placez un glaçon dans un verre d'eau, la chaleur sera transférée de l'eau à la glace et la glace fondra peu à peu. La diffusion de la chaleur est bien décrite par le modèle de diffusion de la chaleur, qui tient compte de la différence de capacité calorifique entre la glace et l'eau. Dans ce modèle, la frontière est la surface du glaçon, que vous devez connaître

pour trouver une solution exacte au problème. Mais la frontière n'est pas constante. Elle change constamment en raison du processus de fonte en cours.

Une fois de plus, nous sommes confrontés à un problème couplé. Pour résoudre le problème de la diffusion de la chaleur dans l'eau et la glace, il est nécessaire de connaître exactement la frontière du glaçon. Mais pour obtenir cette frontière, nous devons résoudre l'équation de diffusion de la chaleur avec la condition aux limites instantanée. Le problème du glaçon qui fond est connu sous le nom de problème de Stefan à deux phases, du nom de **Josef Stefan**, un physicien slovène qui a introduit cette catégorie générale de problèmes vers 1890.

En général, il est impossible de donner la solution complète d'un problème à frontière libre. En guise de pis-aller, d'un point de vue mathématique, on aimerait avoir un certain contrôle sur la façon dont la frontière évolue au cours du processus. Pour le problème de Stefan, cela peut également avoir un intérêt plus général. Si l'on augmente l'échelle du glaçon dans le verre d'eau, on peut en fait être confronté à un problème global. En Antarctique, le glacier Thwaites (surnommé le glacier de l'apocalypse) en est un exemple. En raison des changements climatiques provoqués par l'homme, le glacier se dirige vers la mer. Si le glacier entier s'effondrait dans l'océan, le niveau de la mer augmenterait globalement de 65 cm. En outre, des glaçons de différentes tailles flotteraient pendant un certain temps dans les océans. La taille du glacier est comparable à celle de la Grande-Bretagne. Un éventuel effondrement donnerait certainement lieu à une étude plus approfondie du problème Stefan.

Dans un article de 1977 intitulé « La régularité des frontières libres en dimension supérieure », Luis Caffarelli a apporté une contribution révolutionnaire à la compréhension des frontières des problèmes à frontière libre. Il a montré que la forme de la frontière au cours du processus présente une certaine régularité mathématique. Dans le cas d'un glaçon en train de fondre, cela signifie que la surface de la glace restera plutôt lisse et ne se transformera pas en une sorte de milieu poreux.

L'article de Caffarelli de 1977 est devenu l'un des points de départ d'une recherche approfondie visant à mieux comprendre la régularité des solutions d'une variété de modèles mathématiques, y compris les équations de Navier-Stokes, le problème de l'obstacle et l'équation de Monge-Ampère, auxquels Luis Caffarelli a apporté d'importantes contributions et pour lesquels il a joué un rôle de premier plan.

UN APERÇU DU TRAVAIL DU LAURÉAT (par ALEX BELLOS)

Le comité Abel a décerné le prix Abel 2023 à Luis A. Caffarelli pour ses contributions fondamentales à l'étude des équations aux dérivées partielles non linéaires. Le texte ci-dessous explique brièvement certains de ses travaux dans ce domaine.

La découverte, au XVII^e siècle, que l'univers peut être décrit par des équations mathématiques a marqué le début de la science moderne. La deuxième loi du mouvement de Newton est un exemple précoce de pareille équation : elle stipule que la force exercée sur un objet est égale à la masse de cet objet multipliée par son accélération, généralement exprimée par la formule $F = ma$. Non seulement les lois de Newton représentaient un progrès conceptuel, mais elles nécessitaient également un nouveau type de mathématiques.

Ces nouvelles mathématiques, développées par Newton et Leibniz, sont connues sous le nom de calcul infinitésimal et introduisent l'idée d'un « taux de variation » instantané. Comme ces taux de variation instantanés sont calculés en considérant des différences infinitésimales, les équations du calcul sont devenues des équations différentielles. Il existe deux catégories d'équations différentielles : les équations différentielles ordinaires, qui ne comportent qu'une seule variable, et les équations aux dérivées partielles (EDP), qui comportent plus d'une variable.

Les EDP sont omniprésentes dans la science. Elles sont à la base de notre compréhension du monde physique, en modélisant admirablement des phénomènes allant de la chaleur au son, en passant par l'électromagnétisme et la mécanique quantique. Les EDP apparaissent également en sciences sociales. Elles interviennent par exemple dans le comportement des épidémies, dans les taux d'intérêt et dans les options pour acheter d'actions. En fait, partout où il existe un système qui implique de multiples variables soumises à des changements continus, on trouve des EDP.

La force d'une équation différentielle réside dans le fait qu'elle prédit l'avenir. Si par exemple je lance une balle, je sais grâce à la deuxième loi de Newton qu'elle se déplacera dans l'air en suivant une parabole. Je sais également que si je lance la balle avec un peu plus de puissance ou avec un angle légèrement différent, la balle se déplacera toujours en suivant une parabole, même si elle est un peu plus grande ou un peu plus petite. En d'autres termes, la deuxième loi de Newton est bien posée : si je modifie légèrement les valeurs d'entrée, il n'y a pas de mauvaises surprises dans les résultats. Les recherches de Luis Caffarelli

posent des questions similaires sur les EDP : lorsque vous modifiez les données d'entrée, agissent-elles toujours de la manière prévue, ou y a-t-il des valeurs qui déclenchent un comportement instable, irrégulier ou erratique ?

Le premier domaine de recherche de Caffarelli a été le problème de l'obstacle, un exemple classique dans le domaine des EDP non linéaires, qui demande quelle est la position d'équilibre lorsqu'une membrane élastique pousse contre un obstacle rigide, comme par exemple lorsqu'un ballon presse contre un mur. Ces travaux l'ont conduit au domaine plus vaste des « problèmes à frontière libre », ainsi nommés parce que la frontière en question, par exemple l'endroit où la membrane rencontre l'obstacle, ou l'endroit où le ballon rencontre le mur, est inconnue au départ ; c'est ce qu'il faut déterminer. D'autres exemples de problèmes à frontière libre sont la fonte de la glace dans l'eau ou l'infiltration d'eau à travers un milieu poreux. Dans le cas de la fonte de la glace dans l'eau, la frontière libre est l'interface entre la glace et l'eau. Elle peut être utilisée pour modéliser d'autres exemples de transitions de phase en physique, en biologie et en finance.

Caffarelli a révolutionné l'étude des problèmes à frontière libre dans les années 1970, après quoi il s'est intéressé aux EDP probablement les plus célèbres de toutes les mathématiques, les équations de Navier-Stokes. Formalisées au milieu du XIX^e siècle, ces deux équations décrivent le mouvement des fluides visqueux, comme l'écoulement de l'eau dans un ruisseau ou de l'huile dans un tuyau :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{V} &= 0, \\ \rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} &= -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{V} + \rho \mathbf{g}.\end{aligned}$$

La première équation indique que le fluide est incompressible. La seconde équation est une application de la deuxième loi de Newton : elle dit que la masse multipliée par l'accélération (à gauche du signe égal) est égale à la force (à droite), qui se décompose en forces internes (pression et viscosité) et en forces externes (généralement la gravité, d'où le g).

Les physiciens et les ingénieurs utilisent quotidiennement les équations de Navier-Stokes pour prédire le comportement des écoulements de fluides. Ces équations fonctionnent très bien. Malgré leur importance pratique, ces équations ne sont pas entièrement comprises. Par exemple, la question de savoir si les équations sont toujours « régulières » ou si elles peuvent parfois « exploser » reste ouverte. En d'autres termes, si

l'on modifie en douceur la pression, la viscosité, etc., on ne sait pas si les vitesses à l'intérieur du fluide changeront toujours de manière régulière ou si les équations peuvent faire apparaître un point où la vitesse devient infinie. Dans le monde réel, la vitesse ne peut jamais être infinie, de sorte que la découverte de singularités avec une vitesse infinie signifierait que les équations sont en quelque sorte des modèles inadéquats du comportement physique. La question de la régularité des équations de Navier-Stokes a gagné en notoriété ces dernières années, car il s'agit d'un problème du millénaire, l'un des sept problèmes pour lesquels l'institut Clay de mathématiques a décidé de décerner un prix d'un million de dollars à la première personne qui apportera une solution.

En 1982, Caffarelli, avec Robert Kohn et Louis Nirenberg, a démontré que si les équations de Navier-Stokes produisent des singularités, celles-ci disparaissent instantanément parce que les singularités produites ne peuvent pas remplir une courbe dans l'espace-temps (c'est-à-dire les trois dimensions de l'espace et l'unique dimension du temps traitées comme quatre dimensions). L'article de 1982 reste le plus proche de la démonstration ou de la réfutation du caractère régulier des équations de Navier-Stokes, même après quatre décennies de recherches intensives dans ce domaine.

Les EDP apparaissent lorsque les scientifiques tentent de décrire les lois naturelles, mais elles sont étudiées par les mathématiciens pour leur cohérence interne et leur beauté. Luis Caffarelli a consacré sa vie au désir d'établir que ces outils reposent sur des fondements mathématiques rigoureux. Il a joué un rôle déterminant dans l'approvisionnement de leur caractère sauvage, en veillant à ce que les EDP soient des représentations significatives de la réalité.

Talagrand (2024)

« pour ses contributions révolutionnaires à la théorie des probabilités et à l'analyse fonctionnelle, avec des applications remarquables en physique mathématique et en statistique ».

Le développement de la théorie des probabilités a été motivé à l'origine par des problèmes qui se posaient dans le contexte des jeux de hasard ou de l'évaluation des risques. Il est désormais évident qu'une compréhension approfondie des phénomènes aléatoires est essentielle dans le monde d'aujourd'hui. Par exemple, les algorithmes aléatoires sont à la base de nos prévisions météorologiques et des grands modèles linguistiques. Dans notre quête de miniaturisation, nous devons tenir compte d'effets tels que la nature aléatoire des impuretés dans les cristaux, les fluctuations thermiques dans les circuits électriques et la décohérence des ordinateurs quantiques. Michel Talagrand s'est attaqué à de nombreuses questions fondamentales qui se posent au cœur de notre description mathématique de ces phénomènes.

L'un des fils conducteurs des travaux de Talagrand consiste à comprendre les propriétés géométriques d'un phénomène en grande dimension et à les cristalliser sous la forme d'estimations précises ayant un large champ d'application. Cela l'a conduit à obtenir de nombreuses inégalités influentes. Par exemple, Talagrand a obtenu des résultats quantitatifs puissants pour démontrer les phénomènes de seuils qui apparaissent souvent dans l'étude des transitions de phase en mécanique statistique. Il a également obtenu une inégalité utile sur le coût de transport quadratique entre une mesure de probabilité et une loi gaussienne qui fait intervenir leur entropie relative.

Une grande partie des travaux de Talagrand concerne la géométrie des processus stochastiques. Un problème classique remontant à Kolmogorov, qui se pose par exemple lorsque l'on veut analyser les propriétés de régularité des processus stochastiques, consiste à estimer la borne supérieure d'une famille de variables aléatoires corrélées. En s'appuyant sur les travaux de Fernique et de Dudley, Talagrand a développé sa théorie du « chaînage générique », qui fournit des inégalités précises pour l'espérance de la borne supérieure de processus gaussiens. Cette théorie a mis en lumière le lien mystérieux entre la fonction distance

(sur l'ensemble d'indices sous-jacent) déterminée par la **covariance** du processus et l'espérance de sa borne supérieure.

Un résultat clé de la théorie des probabilités est la loi des grands nombres, qui affirme que la somme normalisée de variables aléatoires indépendantes converge vers sa moyenne. Cette somme normalisée est donc « concentrée » selon la terminologie inventée dans les premiers travaux de **Milman**, ou « auto-moyennante » selon la terminologie utilisée en physique. On s'est progressivement rendu compte que la concentration était omniprésente, puisque de nombreuses variables aléatoires définies comme des fonctions d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes se rapprochent de leur moyenne avec une forte probabilité. Dans un tour de force étonnant, Talagrand a fourni des versions quantitatives de ce phénomène qui sont valables de manière très générale, y compris dans le cas de **variables aléatoires discrètes**. Ce résultat s'applique aux fonctions de variables indépendantes qui sont lipschitziennes par rapport à la distance euclidienne et **convexes**, ce qui donne l'une des célèbres « **inégalités de Talagrand** ». Il a jeté les bases d'une théorie non asymptotique de l'indépendance applicable aux problèmes statistiques en grande dimension.

Depuis les travaux d'Edwards et d'**Anderson**, les physiciens sont fascinés par les comportements complexes des systèmes désordonnés, qui décrivent des phénomènes comme l'aimantation en présence d'impuretés, et plus récemment aussi les surfaces d'énergie potentielle qui apparaissent dans l'apprentissage automatique. En 1980, **Parisi** (prix Nobel de physique en 2021) a proposé une expression pour l'énergie libre de l'un des modèles les plus simples de ce type, à savoir le modèle de Sherrington-Kirkpatrick. Guerra a démontré rigoureusement que cette formule est une borne supérieure pour l'énergie libre. Dans un article novateur, Talagrand a démontré la borne inférieure complémentaire, complétant ainsi la démonstration de la formule de Parisi. Cette démonstration a jeté les bases du développement d'une théorie mathématique des **verres de spin** et de ses applications dans le domaine de l'apprentissage statistique.

Talagrand a également obtenu un grand nombre de résultats importants en **théorie de la mesure** et en analyse fonctionnelle. Pour ne citer que le plus récent, il a répondu par la négative à une question posée il y a longtemps par von Neumann et **Maharam**, en montrant qu'il existe des sous-mesures exhaustives qui ne sont **absolument continues** par rapport à aucune **mesure simplement additive**. Ce fait implique l'existence d'**algèbres de Boole** radicalement nouvelles.

Talagrand est un mathématicien exceptionnellement prolifique dont les travaux ont transformé la théorie des probabilités, l'analyse fonctionnelle et la statistique. Ses recherches se caractérisent par le désir de comprendre les problèmes intéressants à leur niveau le plus fondamental, en construisant de nouvelles théories mathématiques en cours de route. Il a diffusé un grand nombre de ses idées sous la forme de monographies de recherche très influentes. En combinant la virtuosité technique avec des idées analytiques et géométriques profondes pour construire de nouveaux outils puissants et répondre à d'anciennes questions difficiles, Michel Talagrand a eu et continue d'avoir un impact énorme sur les mathématiques et leurs applications.

Notice biographique

Michel Talagrand est né le 15 février 1952 en France et a grandi à Lyon aux côtés de sa sœur cadette, d'un père professeur de mathématiques et d'une mère professeur de français.

À l'âge de cinq ans, il a perdu un œil à cause d'une maladie génétique. Une dizaine d'années plus tard, son autre œil fut aussi menacé et sa scolarité fut interrompue pendant six mois. Craignant de devenir aveugle, il a énormément étudié pendant cette période et s'est ainsi découvert un talent pour les mathématiques et la physique. Il a ensuite poursuivi ses études de mathématiques localement à l'université de Lyon.

En 1974, il s'est vu offrir un poste de chercheur au Centre national de la recherche scientifique (CNRS) à Paris, où il a obtenu son doctorat en 1977. Il y est resté jusqu'à son départ à la retraite en 2017. Il a été membre de l'équipe d'analyse fonctionnelle de l'**Institut de mathématiques de Jussieu** et directeur de recherche au CNRS à partir de 1985. Très tôt dans sa carrière, il a travaillé avec **Gustave Choquet**, **Gilles Pisier** et Vitali Milman, qui l'ont influencé.

Talagrand est marié à Wansoo Rhee, une professeur de sciences de gestion à l'université d'État de l'Ohio désormais à la retraite. Il l'a rencontrée lors de son premier voyage aux États-Unis. Ils ont deux fils.

Le style mathématique de Talagrand est atypique. Il ne voit pas d'inconvénient à étudier de petits problèmes comme autant de tremplins vers d'autres découvertes importantes. Il a lui-même écrit à propos de sa méthode qu'« il est utile d'être humble et de commencer par comprendre pleinement les situations simples. Lorsque je travaille sur une conjecture, je trouve également utile d'essayer alternativement de la

démontrer et de la réfuter. Les progrès se font par bonds, un peu comme lorsqu'on fait correspondre deux pièces d'un puzzle. C'est presque instantané. Vous le voyez maintenant, alors que l'instant d'avant vous ne le voyiez pas. Après de tels progrès, vous pouvez avoir une vision beaucoup plus claire du problème. »

Outre sa bibliographie très étoffée, il s'est également investi dans l'exposition de ses résultats et de ses réalisations. Ses livres sur le chaînage générique et les verres de spin font autorité dans ces domaines. Son ouvrage d'introduction à la théorie quantique des champs représente un autre aspect de ses centres d'intérêt et de ses contributions qui sera utile à de nombreux chercheurs. Les résultats impressionnants de Talagrand, illustrés par des solutions révolutionnaires à des conjectures fondamentales et par la découverte de nouvelles inégalités très profondes, ont été extrêmement influents.

Talagrand a été élu membre de l'Académie des sciences en 2004 et nommé au grade de chevalier de la Légion d'honneur en 2011. Il a reçu plusieurs prix, dont le [prix Loève](#) (1995), le [prix Fermat](#) (1997) et le [prix Shaw](#) (2019).

Suite à la remise du prix Shaw, il a invité la communauté mathématique à gagner des récompenses en résolvant des énigmes publiées sur son site sous le titre « devenez riche avec mes prix ». Sa façon ludique d'aborder la vie et la science transparait également dans la première phrase de sa page personnelle, « les mathématiques vous donnent des ailes », qui renvoie au tableau *Allégorie de la sagesse divine* (1680) de Luca Giordano. La sagesse mathématique de Talagrand semble l'avoir mené loin.

Bibliographie

- « [Entretien avec Michel Talagrand](#) », *Gazette des mathématiciens*, 2019, n° 160, p. 27-31.
- FERNIQUE (Xavier), « [Fonctions aléatoires gaussiennes, les résultats récents de M. Talagrand](#) », *Séminaire Bourbaki*, 1986, exposé n° 660.
- LEDOUX (Michel), « [Inégalités isopérimétriques en analyse et probabilités](#) », *Séminaire Bourbaki*, 1993, exposé n° 773.
- TALAGRAND (Michel), « [Verres de spin et optimisation combinatoire](#) », *Séminaire Bourbaki*, 1999, exposé n° 859.
- TALAGRAND (Michel), « [Le chaînage, une longue histoire](#) », Institut Henri-Poincaré, 16/03/2022.

TALAGRAND ET SES MATHÉMATIQUES (par ARNE B. SLETSJØE)

L'écart par rapport à ce qui est attendu

En 2007, S. R. Srinivasa Varadhan a reçu le prix Abel, également pour ses contributions à la théorie des probabilités. Le lien entre les deux lauréats peut être illustré par la loi des grands nombres. La loi des grands nombres a été démontrée pour la première fois par le mathématicien suisse Jacques Bernoulli dans son traité *Ars Conjectandi* publié en 1713, huit ans après sa mort.

Bernoulli étudie un événement qui se produit avec une certaine probabilité, mais cette probabilité lui est malheureusement inconnue. Son objectif est donc d'estimer la probabilité comme le rapport entre le nombre de fois où l'événement se produit et le nombre de fois où l'expérience est répétée.

L'objectif de Bernoulli est d'estimer la proportion de boules blanches dans une urne qui contient un nombre inconnu de boules blanches et noires. Sa stratégie consiste à tirer une série de n boules de l'urne, en remettant la boule en place après chaque tirage, et à estimer la proportion inconnue de boules blanches dans l'urne par la proportion des boules tirées qui sont blanches. Bernoulli démontre, en choisissant n suffisamment grand, qu'il peut obtenir n'importe quelle précision et fiabilité pour l'estimation. Il s'agit précisément de la version faible de la loi des grands nombres.

La loi nous dit que la probabilité que la différence entre la moyenne estimée et l'espérance soit inférieure à une certaine valeur choisie est aussi proche de 1 que nous le souhaitons, à condition que nous répétions l'expérience suffisamment de fois. Si après un grand nombre d'essais nous avons trouvé deux fois plus de boules blanches que de boules noires, nous avons de plus en plus d'indices que la même proportion se trouve dans l'urne.

Parmi les contributions importantes de Talagrand, nous trouvons un certain nombre de résultats appelés « inégalités de Talagrand ». L'écart par rapport à l'espérance dans la loi des grands nombres est un exemple typique d'inégalité dans ce contexte : donner une borne supérieure pour la probabilité d'un écart donné en fonction de la probabilité de l'événement et du nombre de répétitions de l'événement.

Varadhan, un ancien lauréat du prix Abel, a étudié la **queue de la loi de probabilité**, c'est-à-dire l'apparition d'événements en dehors de l'intervalle de l'inégalité, car comme on dit « l'inattendu est aussi



FIG. 57 – Jacques Bernoulli (1654-1705) et S. R. S. Varadhan (1940-)

attendu ». L'approche de Varadhan peut être illustrée par l'un des maux de tête des compagnies d'assurance : comment pouvons-nous nous préparer à l'inattendu, comme une inondation centennale ou un tremblement de terre dans une zone géologiquement stable ? L'approche de Talagrand consiste à donner une plage dans laquelle le modèle de probabilité est susceptible d'être valide. Par exemple, quelle est la précision des prévisions météorologiques ou dans quelle mesure pouvons-nous être sûrs qu'une intelligence artificielle n'a pas d'hallucination ?

Coût de transport entre des mesures

Une autre contribution importante mentionnée par le comité Abel est « une inégalité utile sur le coût de transport quadratique entre une mesure de probabilité et une loi gaussienne qui fait intervenir leur entropie relative ». Pour un non-spécialiste, cela pourrait ressembler davantage à une collection de mots étranges qu'à une phrase raisonnable.

Le contenu de cette phrase peut être illustré par l'exemple suivant. Le portefeuille du fonds de pension global norvégien, d'une valeur de 17 000 milliards de couronnes norvégiennes²¹, est réparti sur un grand nombre d'investissements. Chaque jour, les analystes négocient des actions et des obligations à grande échelle, en essayant d'optimiser le rendement du fonds. Chaque transaction a un coût propre. Un défi important pour les analystes est de décider comment « restructurer » le portefeuille pour obtenir le coût total le plus bas possible. Si nous supposons que le montant total du fonds est de 1, nous pouvons considérer le portefeuille comme une **loi de probabilité** sur l'ensemble des banques,

21. NDT. Environ 1 500 milliards d'euros.

des fonds, des entreprises et des autres types d'investissement. Le profil du portefeuille deux jours consécutifs décrit deux mesures de probabilité différentes sur le même ensemble. La stratégie de transfert (ou de transport) de l'argent entre les différents types d'investissement a un prix donné par la fonction de coût. Ainsi, chaque stratégie de transport a un coût propre.

Nous pouvons « appliquer » l'inégalité de Talagrand pour obtenir une borne pour le coût de transport dans cet exemple illustratif. Le résultat serait alors que la solution optimale pour minimiser le coût de transport pour le réarrangement du portefeuille est essentiellement bornée par une valeur numérique liée à la dépendance des deux distributions du portefeuille. Cette valeur numérique est ce que l'on appelle l'entropie relative. Elle mesure essentiellement la différence entre deux profils du portefeuille. Si les profils du portefeuille sont identiques, il n'y a pas de coût de transport entre eux. Si la variation est importante, le coût de transport augmentera. Dans les deux cas, les coûts de transport sont essentiellement contrôlés par l'entropie relative des deux profils, comme l'a souligné Talagrand.

Des bornes pour l'énergie libre des verres de spin

Voici un autre extrait de la citation, qui fait référence à la formule de Parisi relative au modèle de Sherrington-Kirkpatrick pour l'énergie libre d'un verre de spin : « cette formule est une borne supérieure pour l'énergie libre. Dans un article novateur, Talagrand a démontré la borne inférieure complémentaire, complétant ainsi la démonstration de la formule de Parisi. »

Les verres de spin sont des alliages formés de métaux nobles dans lesquels une petite quantité de fer est mélangée. Les molécules de fer sont trop éloignées les unes des autres pour s'influencer réellement. Ce n'est que lorsqu'elles sont influencées par un champ magnétique extérieur qu'elles resserrent les rangs et deviennent un joli ferromagnétique. Les verres de spin se distinguent de leurs cousins ferromagnétiques par le fait que lorsque le champ extérieur est supprimé, l'aimantation des verres de spin diminue rapidement. Ce phénomène est décrit par des considérations relatives à l'énergie libre du système. La formule de Parisi pour le modèle de Sherrington-Kirkpatrick fait référence à une conjecture ancienne sur les bornes de l'énergie libre.

Mathématiquement, nous pouvons considérer le spin de chaque molécule de fer comme une variable aléatoire. Le comportement macro-

scopique du verre de spin est donc lié aux valeurs asymptotiques d'un grand nombre de variables aléatoires faiblement corrélées. Cela montre le lien avec les centres d'intérêt du lauréat du prix Abel de cette année. La démonstration par Talagrand de la formule de Parisi montre comment la théorie mathématique peut contribuer à l'amélioration des connaissances dans des domaines autres que les mathématiques.

LES PROCESSUS STOCHASTIQUES (par ARNE B. SLETSJØE)

D'après la citation du comité Abel, « une grande partie des travaux de Talagrand concerne la géométrie des processus stochastiques ».

Si l'on lance une pièce de monnaie une fois, elle peut donner soit « pile », soit « face ». Pour faciliter le calcul, nous associons à pile la valeur 1 et à face la valeur 0. Les deux résultats ont la même probabilité, à savoir $\frac{1}{2}$ chacun. L'espérance est la somme des produits des résultats par la probabilité correspondante. Pour le lancer d'une pièce, l'espérance est $\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}$, même si cette valeur n'est jamais atteinte.

Si en revanche nous utilisons 10 pièces, ou si nous lançons une pièce 10 fois, nous obtenons un résultat en comptant le nombre de « face » et en divisant par 10, le nombre de lancers. L'espérance est toujours égale à $\frac{1}{2}$, mais cette valeur s'obtient désormais si l'expérience aboutit à 5 fois « face » et 5 fois « pile ». Sur les 1024 résultats possibles des 10 lancers, il y en a 252 (soit environ 25 %) qui contiendront 5 fois « pile » et 5 fois « face ». Si nous élargissons l'éventail des résultats acceptables pour inclure également 4 ou 6 fois « face », le taux de réussite passe à environ 66 %. L'espérance du nombre de « face » pour 10 pièces est égale à 5. On peut donc considérer que 4 ou 6 représentent un écart de 20 % par rapport à la moyenne. Pour 20 pièces, un écart inférieur à 20 % par rapport à la moyenne correspond à 8, 9, 10, 11 ou 12 fois « face » sur 20 lancers. Un calcul montre que dans ce cas, le nombre de fois avec « face » représente environ 75 % de tous les résultats possibles. Si nous augmentons encore le nombre de pièces, ce pourcentage augmentera encore et s'approchera de 1 à mesure que nous augmentons le nombre de tirages.

Nous pouvons généraliser cet exemple en remplaçant le jeu de pile ou face par une variable aléatoire. Une variable aléatoire est une variable dont les valeurs changent aléatoirement selon une certaine loi de probabilité. L'ensemble des valeurs que la variable aléatoire peut prendre s'appelle l'**univers**. La variable aléatoire qui modélise le jeu de pile ou face a un univers composé de deux éléments {pile, face} avec des probabilités égales. Notons également que le résultat d'un lancer est indépendant du résultat de tous les autres.

Dans un cadre plus général, l'univers est susceptible d'être beaucoup plus complexe que les deux résultats d'un jeu de pile ou face. Le lancer d'un dé donne un univers avec six résultats possibles, alors que le prix d'une action en bourse peut varier dans une fourchette assez large.

Mais contrairement à la pièce ou au dé, le prix de l'action mesuré jour après jour n'est pas une variable indépendante. Le prix du lendemain ne sera pas très différent de celui de la veille. Les variables aléatoires sont corrélées.

Talagrand s'est intéressé à ce problème et a fourni des résultats importants pour la borne supérieure d'une famille de variables aléatoires corrélées.

CONCENTRATION DE LA MESURE (par ARNE B. SLETSJØE)

Un disque de rayon 1 (ou **disque unité**) peut être décrit comme l'ensemble des points (x, y) dans le plan tels que $x^2 + y^2 \leq 1$. On sait bien que l'aire du disque unité est π . À l'intérieur du disque unité, plaçons un disque concentrique de rayon $1 - \varepsilon$, où ε est un petit nombre strictement positif. L'aire de ce disque plus petit est $\pi(1 - \varepsilon)^2$ et l'aire de la **couronne** est $\pi(2\varepsilon - \varepsilon^2) \approx 2\pi\varepsilon$. En fraction de la surface totale, le disque interne compte pour

$$\frac{\pi(1 - \varepsilon)^2}{\pi} = (1 - \varepsilon)^2.$$

Si nous faisons la même construction pour une sphère, d'équation $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, la fraction occupée par la sphère intérieure de rayon $1 - \varepsilon$ par rapport à la sphère unité est

$$\frac{\frac{4}{3}\pi(1 - \varepsilon)^3}{\frac{4}{3}\pi} = (1 - \varepsilon)^3.$$

Pour une **3-sphère** de rayon R et de volume $\frac{1}{2}\pi^2 R^4$, la fraction vaut

$$\frac{\frac{1}{2}\pi^2((1 - \varepsilon)R)^4}{\frac{1}{2}\pi^2 R^4} = (1 - \varepsilon)^4.$$

La fraction correspondante pour une d -sphère, donnée par l'équation $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{d+1}^2 = 1$ dans l'espace euclidien \mathbb{R}^{d+1} , est égale à $(1 - \varepsilon)^{d+1}$. La conséquence est que pour une sphère en grande dimension, lorsque d tend vers l'infini, la quasi-totalité de son volume sera concentrée dans une mince couronne.

De la même manière, on peut montrer que pour les sphères en grande dimension, la quasi-totalité de sa surface est concentrée dans une petite ceinture autour de l'équateur.

Un autre phénomène géométrique étrange en grande dimension concerne le volume d'une d -sphère de rayon 1. Le volume est proportionnel à $\pi^{\lfloor d/2 \rfloor}$, qui croît sans limite lorsque d augmente.

Dans la citation, le comité Abel dit : « l'un des fils conducteurs du travail de Talagrand consiste à comprendre les propriétés géométriques d'un phénomène en grande dimension et à les cristalliser sous forme d'estimations précises ayant un large champ d'application. » L'exemple ci-dessus pour les sphères en grande dimension est au cœur de cette citation.

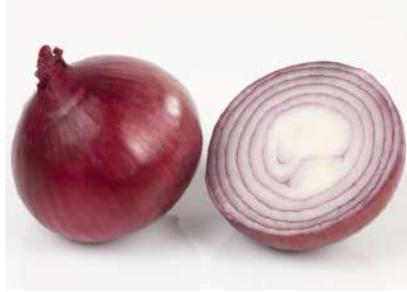


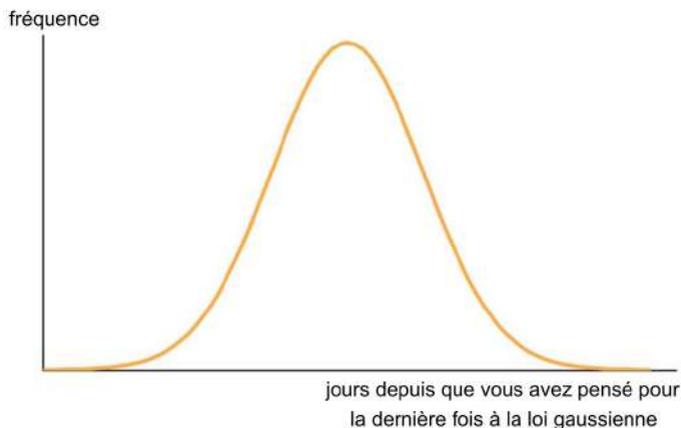
FIG. 58 – *La quasi-totalité du contenu d'un oignon en grande dimension se trouve dans l'enveloppe extérieure.*

Nous pouvons donner une description plus générale du phénomène de « **concentration de mesure** ». Supposons que nous ayons un grand nombre de « bonnes » variables aléatoires et que nous considérons leur somme. Si les variables aléatoires sont suffisamment indépendantes, la somme se concentrera fortement dans un intervalle qui est beaucoup plus étroit que ce que l'on pourrait attendre à première vue.

UN APERÇU DU TRAVAIL DU LAURÉAT (par MATT PARKER)

Michel Talagrand est un expert en matière de compréhension et de maîtrise des processus stochastiques complexes. Le hasard peut se manifester de multiples façons et Talagrand en a exploré de nombreux types. L'un des types d'aléa les plus courants, et sans doute le plus important, provient des « processus gaussiens ». La loi gaussienne a été un élément constant de la carrière de Talagrand. Il est donc intéressant de la considérer comme un exemple concret lorsque l'on explore son travail.

La loi gaussienne (parfois appelée « loi normale » ou « courbe en cloche ») se retrouve avec une fréquence surprenante dans le monde qui nous entoure. Le poids des bébés à la naissance, les résultats obtenus par les élèves à l'école ou l'âge auquel les athlètes prennent leur retraite sont autant d'éléments apparemment aléatoires qui suivent parfaitement la loi gaussienne. Celle-ci se caractérise par une moyenne autour de laquelle se situent la plupart des valeurs, et par un nombre décroissant de cas à mesure que les valeurs s'écartent au-dessus ou en dessous de la moyenne.



Lors de l'observation d'un processus stochastique, il y a certaines choses qu'il serait intéressant de savoir. Par exemple, si l'on prend la moyenne des valeurs produites, dans quelle mesure celle-ci est-elle proche de la véritable valeur moyenne du processus gaussien sous-jacent ? Quelles sont les valeurs probables dans le futur ?

Talagrand a obtenu des bornes rigoureuses et étroites avec des incertitudes précises, de sorte que lorsque ce type de processus stochastique est observé, nous savons exactement à quel point nous pouvons raisonnablement être confiants quant à ce que le processus fera dans le futur.

Considérer les travaux de Talagrand à travers l'exemple d'une seule loi gaussienne est une simplification extrême de la généralité et de la portée de ses résultats. Des situations plus compliquées impliquent plusieurs variables aléatoires différentes, avec des lois différentes qui se combinent de manière complexe. Au lieu d'être une simple loi unidimensionnelle, si chaque variable aléatoire est considérée comme un axe indépendant, l'espace probabilisé total qui en résulte est un objet multidimensionnel, qui dépasse l'entendement humain direct.

Talagrand a pu sonder et comprendre ces espaces en dimensions supérieures. Poser des questions de probabilités sur ces espaces revient à essayer de trouver leurs volumes, un domaine des mathématiques appelé « théorie de la mesure ». Dans un espace bidimensionnel simple, nous pouvons considérer une surface comme une somme de surfaces si nous divisons une distribution en petits carrés et que nous les comptons tous. Dans les dimensions supérieures, il n'est pas aussi simple de calculer la mesure d'un ensemble de points. Le paradoxe de Banach-Tarski est un résultat célèbre selon lequel, si l'on ne fait pas attention, une boule peut être divisée en morceaux dont le volume total est le double du volume d'origine.

Le défi consiste à trouver des espaces qui se comportent suffisamment bien pour avoir une mesure significative, puis à établir des bornes sur ce que cette mesure peut être. Talagrand a pu le faire avec des espaces qui dépassent ce que l'intuition humaine est capable de traiter. Ces formes en dimensions supérieures peuvent avoir des comportements très surprenants.

Le travail de Talagrand consistant à convertir ces objets en idées probabilistes implique souvent de savoir où l'hypervolume est susceptible d'être concentré. Dans le cas d'un objet comme une boule, cela semble évident : une boule est définie comme l'ensemble des points situés à une distance du centre inférieure au rayon. Mais cela peut être trompeur.

Imaginons une boule bidimensionnelle, c'est-à-dire un disque circulaire, coincé entre quatre disques unités, le tout dans une boîte (fig. 59a). Le plus grand rayon possible pour le cercle central est de 0,41421, ce qui est beaucoup plus petit que les cercles unités qui l'en-

tourent.

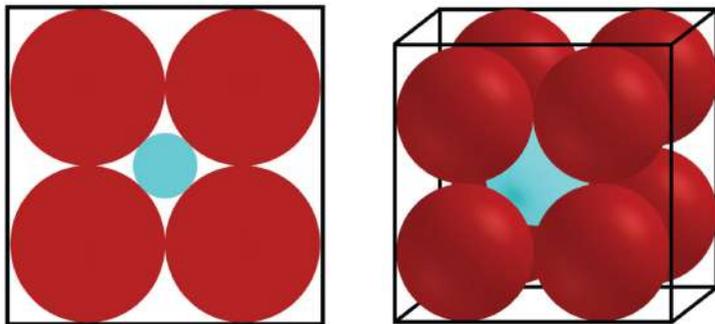


FIG. 59 – (a) Exemple en dimension 2. (b) Exemple en dimension 3.

En dimension 3, nous pouvons empiler dans une boîte huit sphères unités (fig. 59b) et la petite sphère qui peut se trouver au milieu aurait un rayon de 0,73205, ce qui est un peu plus grand que dans le cas de la dimension 2. Mais notre intuition humaine nous dit que même si les dimensions supplémentaires offrent un peu plus de marge de manœuvre, la sphère centrale restera en fin de compte bornée.

Ce n'est absolument pas le cas. En dimension 4, les seize sphères unités d'une boîte laissent suffisamment d'espace pour une sphère centrale de la même taille qu'elles, avec un rayon égal à 1. En dimension 10, cette sphère centrale est si grande qu'elle sort de la boîte. En dimension 26, elle est deux fois plus large que la boîte.

La « forme » et la distribution du contenu d'une sphère de dimension supérieure ne correspondent pas à ce que nous attendons. Dans un sens (techniquement incorrect mais néanmoins instructif), les sphères sont plus hérissées que nous ne le pensons, avec des extrémités minces qui peuvent atteindre et entourer d'autres objets. Dans un autre sens, moins incorrect, les sphères de dimensions supérieures sont presque entièrement constituées d'une enveloppe extérieure, le volume central étant très réduit.

Talagrand a travaillé avec des formes de ce type et a trouvé de nouvelles façons de déterminer des bornes à l'intérieur desquelles l'essentiel d'une loi de probabilité pouvait se situer.

L'omniprésence des processus gaussiens signifie qu'il existe de nombreuses applications possibles du travail de Talagrand. L'une d'entre elles est le problème de physique de la matière condensée appelé « verre

de spin ». Il s'agit d'un arrangement de la matière qui n'est pas un verre comme dans une fenêtre, mais plutôt une structure aléatoire de moments magnétiques.

Les verres de spin ont des propriétés magnétiques intermédiaires entre celles des matériaux ferromagnétiques très organisés et celles des matériaux paramagnétiques dont l'arrangement est aléatoire. Si une substance ferromagnétique est chauffée et si un champ magnétique extérieur est utilisé pour aligner tous les moments magnétiques internes, cet alignement net persistera même après le refroidissement de la substance. Une substance paramagnétique perdra exponentiellement son champ magnétique interne une fois le champ extérieur supprimé. Cependant, un verre de spin perdra également son propre arrangement magnétique, mais à une vitesse et d'une manière qui défient actuellement notre compréhension.

Les structures magnétiques internes d'un verre de spin sont disposées de manière aléatoire, mais avec un certain ordre qui est à l'origine de leurs comportements complexes. Les physiciens ont élaboré des théories et établi des bornes sur le comportement de cet agencement aléatoire. Talagrand a été capable, tout en ignorant la physique, d'utiliser les mathématiques pour fournir une démonstration solide que les bornes étaient effectivement correctes.

Les travaux de Michel Talagrand sur la théorie des probabilités et les domaines connexes ont donné lieu à plusieurs idées et démonstrations clés qui font appel à des techniques nouvelles. Ces résultats seraient magnifiques en soi, mais leur application directe à des systèmes physiques leur confère une signification supplémentaire.

Index

- 3-sphère, 395
- Abel (Niels Henrik), 1
Absolue continuité, 386
Acta Mathematica, 371
Action de groupe, 91
Agmon (Schmuel), 213
Ahlfors (Lars Valerian), 349
Ahmès, 273
Aire, 42
Airy (George Biddell), 37
Ajtai (Miklós), 138
Algèbre, 18
Algèbre de Boole, 386
Algèbre de Hopf, 94
Algèbre de Kac-Moody, 63
Algèbre graduée, 359
Algorithme de Gram-Schmidt, 342
Algorithme de tri, 160
Algorithme déterministe, 324
Algorithme LLL, 323
Algorithme probabiliste, 324
Algorithmique, 322
Analyse, 13
Analyse complexe, 42
Analyse convexe, 59
Analyse fonctionnelle, 59
Analyse géométrique, 281
Analyse harmonique, 41
Analyse numérique, 26
Analysis situs, 5
Anderson (Philip W.), 386
Angle, 17
Annals of Mathematics, 96
Anneau adélique, 271
Anneau factoriel, 93
Anossov (Dmitri), 197
Appel (Kenneth), 333
Application harmonique, 281
Application identité, 190
Application lipschitzienne, 251
Application quasi-conforme, 42
Apprentissage automatique, 160
Apprentissage PAC, 160
Approximation diophantienne, 298
Arête (Géométrie), 99
Arête (théorie des graphes), 143
Arithmétique, 18
Arithmétiques, 241
Arnold (Vladimir), 219
Ars Conjectandi, 389
Artin (Emil), 85
Association internationale de physique
 mathématique, 199
Associativité, 308
Atiyah (Michael), 13
Attracteur de Hénon, 49
Attracteur étrange, 42
Automorphisme, 270
Axiome des parallèles, 145
- Babai (László), 324
Base orthonormée, 250
Beilinson (Alexander), 167
Beltrami (Eugenio), 292
Bernoulli (Jacques), 52
Bernoulli (Jean), 291
Bernstein (Joseph), 167
Besicovitch (Abram), 51
Billard, 197
Billard de Sinaï, 198
Biomathématique, 367
Birkhoff (George David), 34
Bochner (Salomon), 267
Boltzmann (Ludwig), 197
Bolyai (János), 145
Bonnet (Pierre-Ossian), 99
Borne supérieure, 385
Borne supérieure et borne inférieure, 148
Borsuk (Karol), 108
Bott (Raoul), 130
Bourbaki (Nicolas), 115
Bourse Guggenheim, 55
Bourse Sloan, 55
BPP (complexité), 324
Brauer (Richard), 71
Brenier (Yann), 370
Breuil (Christophe), 232
Broch (Ole Jacob), 70
Browder (William), 348
- Caffarelli (Luis), 218, 369

- Calcul des variations, 77
 Calcul différentiel, 123
 Calcul infinitésimal, 19
 Calderón (Alberto), 250
 Capacité d'un canal, 323
 Caractère de Chern, 23
 Cardinalité, 142
 Carleson (Lennart), 41
 Carré intégrable, 41
Cascade de doublements de période, 349
 Casson (Andrew), 127
 Caténoïde, 293
 Cauchy (Augustin-Louis), 69
 Cayley (Arthur), 69
 Centre de recherches mathématiques, 138
 Cercle, 6
 Cercle osculateur, 131
 Cercle unité, 299
 Chafarevitch (Igor), 85
 Chaînette, 293
 Chaire savillienne de géométrie, 15
 Champ algébrique, 167
 Châtelet (François), 91
 Chayes (Jennifer), 323
 Chaîne de blocs, 329
 Cheeger (Jeff), 320
 Chern (Shiing-Shen), 271
 Chevalley (Claude), 279
 Chiffrement homomorphe, 323
 Choquet (Gustave), 387
 Church (Alonzo), 322
 Classe caractéristique, 96
 Classe de Todd, 23
 Classification des groupes simples finis, 71
 Clique, 337
 Coates (John), 233
 Cobham (Alan), 322
 Cobordisme, 96
 Code correcteur, 2
 Codimension, 282
 Cohomologie de de Rham, 358
 Cohomologie de Weil, 172
 Cohomologie étale, 172
 Cohomologie galoisienne, 117
 Coloration de graphe, 333
 Combinatoire, 137
 Combinatoire extrémale, 153
 Commande optimale, 378
 Compacité, 79
 Complétion, 274
 Complexe simplicial, 107
 Composante connexe (théorie des graphes), 319
 Concentration de mesure, 396
 Condition de Hölder, 213
 Condition de Palais-Smale, 281
 Condition initiale, 33
 Congruence sur les entiers, 269
 Congrès européen de mathématiques, 43
 Congrès international des mathématiciens, 55
 Conique, 5
 Conjecture d'Erdős-Faber-Lovász, 143
 Conjecture d'Oppenheim, 300
 Conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer, 233
 Conjecture de Catalan, 4
 Conjecture de Goldbach, 141
Conjecture de Hardy-Littlewood, 299
 Conjecture de Hodge, 167
 Conjecture de Littlewood, 299
 Conjecture de Mertens, 332
 Conjecture de Milnor, 95
 Conjecture de Milnor (théorie des nœuds), 96
 Conjecture de Poincaré, 104
 Conjecture de Ramanujan, 166
 Conjecture de Satō-Tate, 85
 Conjecture de Selberg sur la fonction zêta, 266
 Conjectures de Weil, 166
 Connexion, 281
 Conrad (Brian), 232
 Consistance, 34
 Continuité, 7
 Cook (Stephen), 322
 Coordonnées cartésiennes, 257
 Corps de nombres, 85
 Corps fini, 2
 Corps global, 91
 Corps local, 271
 Corrélacion, 385
 Cosinus, 10
 Courant (Richard), 28
 Courbe brachistochrone, 291
 Courbe cubique, 10
 Courbe elliptique, 10
 Courbe modulaire, 231

- Courbe pseudoholomorphe, 81
 Courbe stable, 167
 Courbure d'un arc, 108
 Courbure de Gauss, 75
 Courbure moyenne, 76
 Courbure négative, 63
 Courbure principale, 76
 Couronne, 395
 Covariance, 386
 Cramér (Harald), 52
 Crandall (Michael), 217
 Critère d'Euler, 276
 Cryptographie, 322
 Cryptographie à clé publique, 2
 Cube, 122
 Cycloïde, 295
 Cylindre, 34
- D'Alembert (Jean le Rond), 229
 De Giorgi (Ennio), 213
 De Rham (Georges), 358
 De Vries (Gustav), 37
 Déconvolution, 251
 Degré (théorie des graphes), 319
 Degré d'un polynôme, 8
 Deligne (Pierre), 166
 Dénominateur, 92
 Densité asymptotique, 137
 Dérivée, 21
 Dernier théorème de Fermat, 1
 Descartes (René), 257
 Diagramme de bifurcation, 351
 Diamond (Fred), 232
Différence symétrique, 309
 Différentielle, 123
 Difféomorphisme, 101
 Dimension, 6
 Dinur (Irit), 324
 Diophante d'Alexandrie, 239
 Dirichlet (Johann Peter Gustav Lejeune), 295
 Disque unité, 395
Disquisitiones arithmeticae, 91
 Distance de Gromov-Hausdorff, 79
 Diviseur, 180
 Divisibilité, 183
 Dixmier (Jacques), 309
 Dobrouchine (Roland), 199
 Donaldson (Simon), 25
 Donsker (Monroe D.), 53
- Drinfeld (Vladimir), 266
 Dyck (Walther von), 69
 Dynamique holomorphe, 95
 Dynamique symbolique, 197
- e (nombre), 89
 E (Weinan), 197
 Edmonds (Jack), 322
 Effet papillon, 200
Éléments de mathématique, 167
 Ellipse, 10
 Ellipsoïde, 5
 Endomorphisme, 90
 Énergie de Dirichlet, 281
 Ensemble convexe, 109
 Ensemble de Julia, 362
 Ensemble dénombrable, 143
 Ensemble mesurable, 211
 Entier algébrique, 88
 Entier de Gauss, 270
 Entier naturel, 7
 Entier relatif, 92
 Entropie de Shannon, 207
 Entropie métrique, 196
 Entropie relative, 385
 Entropie topologique, 95
 Équation aux dérivées partielles, 18
 Équation aux dérivées partielles elliptique, 27
 Équation aux dérivées partielles hyperbolique, 230
 Équation aux dérivées partielles parabolique, 229
 Équation cubique, 231
 Équation d'Einstein, 32
 Équation d'Euler-Lagrange, 291
 Équation de Burgers, 37
 Équation de Kadomtsev-Petviashvili, 40
 Équation de Korteweg-de Vries, 38
 Équation de la chaleur, 32
 Équation de Monge-Ampère, 369
 Équation de Schrödinger, 27
Équation de Schrödinger non linéaire, 40
Équation de sine-Gordon, 40
 Équation des ondes, 229
 Équation différentielle, 13
 Équation différentielle stochastique, 53
 Équation du cinquième degré, 2
 Équation du second degré, 8
 Équation linéaire, 273

- Équation polynomiale, 1
 Équations d'Euler, 35
 Équations de Boussinesq, 40
 Équations de Cauchy-Riemann, 81
 Équations de Maxwell, 32
 Équations de Navier-Stokes, 32
 Équilibre de Nash, 215
 Équivariance, 283
 Erdős (Paul), 89
 Espace classifiant, 366
 Espace de Hardy, 214
 Espace de Hilbert, 310
 Espace de modules, 167
 Espace euclidien, 6
 Espace L^2 , 251
 Espace lenticulaire, 107
 Espace L^p , 213
 Espace métrique, 79
 Espace probabilisé, 398
 Espace symétrique, 300
 Espace topologique, 5
 Espérance mathématique, 317
 Euclide, 17
 Euler (Leonhard), 75
 Exposant de Liapounov, 201
 Extension de corps, 92
- Factorielle, 160
Faisceau pervers, 167
Famille de graphes expanseurs, 320
 Fatou (Pierre), 349
 Feige (Uriel), 323
 Feigenbaum (Mitchell), 349
 Feit (Walter), 62
 Fenchel (Werner), 108
 Fermat (Pierre de), 231
 Fermé, 23
 Fibré tangent, 23
 Fibré vectoriel, 117
 Figalli (Alessio), 372
 Flot géodésique, 300
 Foncteur, 95
 Fonction, 10
 Fonction à oscillation moyenne bornée, 214
Fonction à support compact, 251
 Fonction analytique, 90
 Fonction caractéristique (théorie des ensembles), 311
 Fonction convexe, 386
- Fonction de hachage parfait, 138
 Fonction de Möbius, 332
 Fonction elliptique, 10
 Fonction harmonique, 281
 Fonction holomorphe, 181
 Fonction L, 85
 Fonction méromorphe, 14
 Fonction périodique, 181
 Fonction somme des puissances k -ièmes des diviseurs, 182
 Fonction tau de Ramanujan, 179
 Fonction zêta, 170
 Fonction zêta de Hasse-Weil, 266
 Fonction zêta de Riemann, 188
 Fonctionnelle, 213
Formation de classes, 23
 Forme automorphe, 85
 Forme différentielle, 80
 Forme différentielle exacte, 358
 Forme différentielle fermée, 358
 Forme modulaire, 12
 Forme quadratique, 91
 Formulation faible, 370
 Formule de Gauss-Bonnet, 77
 Formule de Stirling, 317
 Formule des traces de Selberg, 265
 Fourier (Joseph), 41
 Fractale, 50
 Fraction, 92
 Fraction rationnelle, 349
 Freed (Dan), 283
 Freedman (Michael), 104
 Frey (Gerhard), 232
 Fuchs (Lazarus), 176
 Furstenberg (Hillel), 138
- Gabber (Ofer), 167
 Galois (Évariste), 5
 Gårding (Lars), 27
 Gauss (Carl Friedrich), 5
 Gelfand (Israel), 24
 Générateur pseudo-aléatoire, 324
 Géodésique, 77
 Géodésique fermée, 281
 Géométrie, 1
 Géométrie algébrique, 1
 Géométrie analytique, 5
 Géométrie arithmétique, 86
 Géométrie différentielle, 13
Géométrie diophantienne, 89

- Géométrie discrète, 63
Géométrie non euclidienne, 145
Géométrie riemannienne, 72
Géométrie symplectique, 72
Glimm (James), 26
Gödel (Kurt), 322
Goldreich (Oded), 330
Goldwasser (Shafi), 323
Gorenstein (Daniel), 71
Gowers (Timothy), 138
Grandes déviations, 52
Graphe, 137
Graphe aléatoire, 158
Graphe biparti, 150
Graphe complet, 150
Graphe complémentaire, 337
Graphe connexe, 319
Graphe de Ramanujan, 300
Graphe expasseur, 163
Graphe parfait, 323
Graphe régulier, 319
Grassmannienne, 283
Green (Ben Joseph), 149
Greene (John M.), 38
Griffiths (Phillip), 169
Gromov (Mikhaïl), 72
Grossmann (Alex), 250
Grothendieck (Alexandre), 14
Grötschel (Martin), 323
Groupe, 7
Groupe abélien, 70
Groupe algébrique, 63
Groupe classique, 265
Groupe cyclique, 67, 279
Groupe d'homotopie, 7
Groupe de Galois, 91
Groupe de Lie, 63
Groupe de permutations, 69
Groupe de renormalisation, 197
Groupe des classes d'idéaux, 93
Groupe des unités, 279
Groupe discret, 72
Groupe fini, 62
Groupe fondamental, 354
Groupe hyperbolique, 95
Groupe libre, 63
Groupe linéaire, 62
Groupe modulaire, 82
Groupe Monstre, 63
Groupe moyennable, 299
Groupe nilpotent, 82
Groupe réductif, 265
Groupe résoluble, 63
Groupe semi-simple, 299
Groupe simple, 62
Groupe spécial linéaire, 310
Groupe sporadique, 63
Groupe symplectique, 194
Groupe topologique, 308
Groupes finis simples, 62
Haar (Alfréd), 146
Hadamard (Jacques), 201
Haken (Wolfgang), 333
Hamilton (William Rowan), 80
Harish-Chandra, 266
Hartley (Ralph), 338
Hasse (Helmut), 271
Hauteur, 85
Hénon (Michel), 42
Hensel (Kurt), 271
Heptagone, 9
Hermite (Charles), 332
Hilbert (David), 167
Hirzebruch (Friedrich), 13
Hitchin (Nigel), 283
Holmboe (Bernt Michael), 236
Homéomorphisme, 94
Homogénéisation, 370
Homologie, 115
Homologie de Floer, 81
Homologie et cohomologie, 90
Homotopie, 6
Horocycle, 299
Hugoniot (Pierre-Henri), 36
Hypersphère, 1
Hypersurface, 94
Hypocycloïde, 51
Hypothèse de Riemann, 89
Hypothèse ergodique, 34
Hypoténuse, 205
Idéal, 231
Immeuble de Tits, 63
Impagliazzo (Russell), 324
Indépendance (probabilités), 52
Inégalité d'interpolation de Gagliardo-Nirenberg, 214
Inégalité de Talagrand, 386
Inégalité triangulaire, 46

- Instanton, 14
 Institut Courant des sciences mathématiques, 28
 Institut d'étude avancée, 15
 Institut de mathématiques Clay, 370
 Institut de mathématiques de Jussieu, 387
 Institut de recherche en sciences mathématiques de Berkeley, 139
 Institut de recherches mathématiques Alfréd-Rényi, 138
 Institut de statistique mathématique, 55
 Institut des hautes études scientifiques, 73
 Institut indien de statistique, 54
 Institut Mittag-Leffler, 43
 Intégrale elliptique, 10
 Intégration, 18
 Invariant de graphe, 336
Isogénie, 85
 Isopérimétrie, 323
- Jacobi (Carl Gustav Jakob), 10
 Jacquet (Hervé), 265
Jauge de Coulomb, 282
 John (Fritz), 214
 Jordan (Camille), 69
- K-théorie, 14
 K-théorie algébrique, 94
 K-théorie de Milnor, 96
 Kac (Mark), 53
 Kadison (Richard), 14
 Kahane (Jean-Pierre), 252
 Takeya (Sōichi), 51
 Kakutani (Shizuo), 46
 Karp (Richard), 322
 Katz (Nicholas Michael), 194
 Katznelson (Yitzhak), 299
 Kazhdan (David), 194
 Kervaire (Michel), 94
 Kesten (Harry), 298
 Kirby (Robion), 349
 Klein (Felix), 68
 Kneser (Martin), 323
 Kohn (Joseph), 214
 Kohn (Robert), 218
 Kollár (János), 146
 Kolmogorov (Andrei), 41
 Komlós (János), 138
- Korteweg (Diederik), 37
 Kronecker (Leopold), 23
 Kruskal (Martin), 27
 Kuiper (Nicolaas), 212
 Kummer (Ernst), 91
- Lacet, 354
 Lafforgue (Laurent), 266
 Lagrange (Joseph-Louis), 5
 Lagrangien, 377
 Lamé (Gabriel), 91
 Langlands (Robert), 232
 Lax (Peter), 26
 Lefschetz (Solomon), 91
 Legendre (Adrien-Marie), 275
 Leibniz (Gottfried Wilhelm), 18
 Lemme de régularité de Szemerédi, 138
 Lemme local de Lovász, 323
 Lenstra (Arjen), 323
 Lenstra (Hendrick), 323
 Leray (Jean), 194
 Lévine (Léonid), 322
 Lewy (Hans), 371
 Lie (Sophue), 68
 Limite de graphes, 138
 Lindenstrauss (Elon), 304
 Liouville (Joseph), 91
 Lipton (Richard), 328
 Logarithme, 160
 Logarithme complexe, 192
 Logique mathématique, 18
 Loi de probabilité, 390
 Loi de réciprocity d'Artin, 279
 Loi de réciprocity quadratique, 89
 Loi des grands nombres, 52
 Loi normale, 57
 Lorenz (Edward), 47
 Louzine (Nikolaï), 41
 Lovász (László), 144
 Lubotzky (Alex), 300
 Lusztig (George), 167
- MacLane (Saunders), 63
 Maharam (Dorothy), 386
 Mallat (Stéphane), 250
 Marche aléatoire, 53
 Margulis (Grigori), 194
 Martingale, 53
 Mathématiques discrètes, 137
 Mathématiques financières, 378

- Matrice aléatoire, 298
 Matrice d'adjacence, 319
 Matrice symétrique, 319
 Mazur (Barry), 232
 McIntosh (Alan), 251
 McKean (Henry), 14
 Médaille Boltzmann, 199
 Médaille Cantor, 65
 Médaille Chern, 219
 Médaille Dirac, 199
 Médaille Fields, 2
 Médaille Sylvester, 64
 Médaille Wigner, 16
 Mertens (Franz), 332
 Mesure, 47
 Mesure de Carleson, 42
 Mesure de probabilité, 385
 Mesure simplement additive, 386
 Méthode de descente infinie, 239
 Méthode probabiliste, 327
 Métrique riemannienne, 75
 Meunier (Jean-Baptiste), 76
 Meyer (Yves), 250
 Micali (Silvio), 330
 Miller (Haynes), 349
 Milman (Vitali D.), 386
 Milnor (John), 94
 Minkowski (Hermann), 213
 Mirzakhani (Maryam), 304
 Mittag-Leffler (Gösta), 43
 Miura (Robert M.), 38
 Module d'un nombre complexe, 189
Module de Tate, 85
 Moise (Edwin E.), 105
 Monodromie, 176
 Morgan (John), 349
 Morlet (Jean), 250
 Morphisme d'anneaux, 278
 Morphisme de groupes, 277
 Morse (Marston), 281
 Moser (Jürgen), 214
 Motif, 85
 Moyenne, 57
 Multifractale, 254
 Multiplicateur de Fourier, 51
 Multirésolution, 250
 Mumford (David), 85

n-sphère, 111
 Nash (John F.), 212

 Neumann (John von), 30
 Newton (Isaac), 18
 Ngô (Bao Châu), 167
 Nirenberg (Louis), 27
 Nisan (Noam), 324
 Noether (Emmy), 115
 Nœud de trèfle, 4
 Nombre algébrique, 4
Nombre chromatique, 336
 Nombre complexe, 9
 Nombre d'or, 262
 Nombre de Betti, 190
 Nombre de Pisot, 262
 Nombre de Van der Waerden, 148
 Nombre décimal, 237
 Nombre irrationnel, 157
 Nombre *p*-adique, 85
 Nombre premier, 1
 Nombre rationnel, 89
 Nombre réel, 129
 Nombre transcendant, 89
 Nombres de Feigenbaum, 368
 Nombres de Fibonacci, 262
Nombres de Ramsey, 164
 Nombres premiers jumeaux, 142
 Novikov (Sergueï), 348
 Noyau de la chaleur, 14
 Noyau de Poisson, 298
 NP (complexité), 328
 Nyquist (Harry), 338

 Octonion, 129
 Odlyzko (Andrew), 332
 Oleinik (Olga), 37
 Olympiades internationales de mathématiques, 303
 Onde de choc, 30
 Ondelette, 250
 Opérateur différentiel, 39
 Opérateur elliptique, 23
 Opérateur intégral, 250
 Opérateur pseudo-différentiel, 214
 Opérateur unitaire, 39
 Opération binaire, 70
 Oppenheim (Alexander), 314
 Optimisation, 143
 Optimisation non linéaire, 59
 Optimisation semi-définie positive, 323
 Ordre (théorie des groupes), 232
 Orientabilité, 23

- Ornstein (Donald), 207
 Orthogonalité, 254
- P (complexité), 328
 Palais (Richard), 297
 Papanicolaou (George), 53
 Papyrus Rhind, 273
 Paradoxe de Banach-Tarski, 398
 Paris (Giorgio), 386
 Partie dense, 300
 Partition d'un ensemble, 152
 Penrose (Roger), 253
 Perelman (Grigori), 366
 Permutation, 62
 Petersson (Hans), 166
 Petit théorème de Fermat, 89
 Phénomène de Gibbs, 45
 Phillips (Ralph S.), 27
 Physique mathématique, 40
 Pi, 44
 Pinsky (Mark), 300
 Pippenger (Nick), 138
 Pisier (Gilles), 387
 Plan complexe, 9
 Plan tangent, 76
 Poincaré (Henri), 5
 Point critique, 281
 Point fixe, 190
 Polygone, 9
 Polynôme, 89
 Polynôme unitaire, 92
Presque partout, 41
 Preuve à divulgation nulle de connaissance, 325
 Preuve vérifiable en probabilité, 323
 Principe de Phragmén-Lindelöf, 27
 Principe local-global, 271
 Principe variationnel, 53
 Prix Abel, 1
 Prix Alfréd-Rényi, 139
 Prix Balzan, 2
 Prix Birkhoff, 55
 Prix Bolyai, 74
 Prix Bôcher, 16
 Prix Chauvenet, 28
 Prix Clay, 235
 Prix Cole, 87
 Prix Crafoord, 168
 Prix de Kyoto, 74
 Prix Élie-Cartan, 74
 Prix Fermat, 388
 Prix François-Deruyts, 168
 Prix Gaston-Julia, 2
 Prix Gauss, 255
 Prix George-Pólya, 139
 Prix Gödel, 327
 Prix Henri-Poincaré, 199
 Prix international Roi-Fayçal, 352
 Prix Knuth, 146
 Prix Lobatchevski, 74
 Prix Loève, 388
 Prix Nemmers en mathématiques, 74
 Prix Nevanlinna, 43
 Prix Norbert-Wiener, 28
 Prix Ostrowski, 235
 Prix Oswald-Veblen, 74
 Prix Schock, 139
 Prix Shaw, 235
 Prix Steele, 2
 Prix Wolf, 2
 Problème à N corps, 200
 Problème bien posé, 33
 Problème de l'aiguille de Kakeya, 42
 Problème de Riemann, 34
 Problème des sept ponts de Königsberg, 143
 Problème du stable maximum, 338
 Problème $P \neq NP$, 322
 Problèmes de Hilbert, 167
 Problèmes du prix du millénaire, 331
 Processus de Markov, 53
 Processus gaussien, 385
 Processus stochastique, 385
 Produit scalaire, 257
 Produit zigzag de graphes, 324
 Programme de Langlands, 265
 Propriété virtuelle, 82
Publications mathématiques de l'IHÉS, 65
 Pythagore, 88
- Quadrilatère, 17
 Quasi-cristal, 251
 Quaternion, 129
 Queue d'une loi de probabilité, 389
 Quillen (Daniel), 135
- Racine carrée, 8
 Racine cubique, 8
 Racine d'un polynôme, 89

- Racine de l'unité, 8
 Rackoff (Charles), 333
 Radó (Tibor), 105
 Ramanujan (Srinivasa), 178
 Rankin (Robert Alexander), 194
 Rankine (William), 36
 Rao (C. R.), 54
 Ratner (Marina), 299
 Rayon, 79
 Rayon de courbure, 130
 Réduction de bases de réseaux, 323
 Réflexion, 67
 Reingold (Omer), 324
 Représentation d'un groupe de Lie, 267
 Représentation galoisienne, 231
 Représentation régulière, 311
 Représentation unitaire, 310
 Réseau, 182
 Réseau de Leech, 184
 Réseau de Toda, 40
 Réseau de tri, 138
 Résidu quadratique, 275
 Retournement de la sphère, 20
 Ribet (Kenneth), 232
 Riemann (Bernhard), 34
 Riesz (Frigyes), 146
 Riesz (Marcel), 146
 Rigidité, 191
 Rokhline (Vladimir A.), 73
 Roth (Klaus), 137
 Ruelle (David), 197

 Safra (Shmuel), 323
 Sarnak (Peter), 300
 Satō (Mikio), 87
 Schauder (Juliusz), 213
 Schéma, 89
Schémas abéliens, 90
 Schoen (Richard), 282
 Schrijver (Alexander), 323
 Schrödinger (Erwin), 197
 Schéma de Lax-Friedrichs, 26
 Schéma de Lax-Wendroff, 26
 Scott Russell (John), 37
 Section d'un fibré, 289
 Segal (Graeme), 24
 Selberg (Atle), 267
Semi-groupe, 214
 Série de Dirichlet, 345
 Série de Fourier, 41

 Serre (Jean-Pierre), 1
 Shannon (Claude), 209
 Shimura (Gorō), 231
 Sibner (Lesley), 283
 Simplexe, 107
 Sinaï (Iakov), 196
 Singer (Isadore), 13
 Singularité isolée, 94
 Sinus, 10
 Smale (Stephen), 297
 Société mathématique européenne, 15
 Société allemande de mathématiques, 255
 Société américaine de mathématiques, 16
 Société de mathématiques appliquées et industrielles, 28
 Société mathématique de Londres, 15
 Société mathématique de Moscou, 74
 Société mathématique János-Bolyai, 139
 Soliton, 27
 Sommet (théorie des graphes), 143
 Sós (Vera), 323
 Sous-espace vectoriel, 251
 Sous-graphe, 337
 Sous-groupe normal, 299
 Spectre d'anneau, 89
 Spectre d'un opérateur linéaire, 197
 Sphère, 6
 Sphère exotique, 94
 Stable (théorie des graphes), 337
 Stasheff (James), 96
 Statistique, 52
 Steenrod (Norman), 94
 Stefan (Josef), 381
 Stein (Elias), 214
 Steinitz (Ernst), 105
 Stieltjes (Thomas Joannes), 332
 Stoker (James), 218
 Stokes (George Gabriel), 37
 Stroock (Daniel W.), 53
 Structure d'incidence, 137
 Structure différentielle, 94
 Structure presque complexe, 80
 Suite, 52
 Suite spectrale, 194
 Sullivan (Dennis), 84
Superrigidité, 299
 Surface de révolution, 292
 Surface de Riemann, 135

- Surface hyperbolique*, 299
 Surface minimale, 76
 Sylow (Ludwig), 70
 Symbole d'un opérateur différentiel, 23
 Symbole de Legendre, 275
 Symétrie axiale, 67
 Symétrie de rotation, 67
 Système de coordonnées, 128
 Système dynamique, 42
Système hyperbolique, 26
 Système intégrable, 26
Systèmes hyperboliques et lois de conservation, 36
 Szegedy (Balázs), 323
 Szegedy (Mario), 323
 Szemerédi (Endre), 137

 Talagrand (Michel), 385
 Tangente, 11
 Taniyama (Yutaka), 231
 Tao (Terence), 149
 Tate (John), 85
 Taubes (Clifford), 283
 Taux d'expansion (théorie des graphes), 320
 Taylor (Richard), 232
 Te Riele (Herman), 332
 Test de primalité AKS, 324
 Tétraèdre, 126
Theorema egregium, 76
 Théorème central limite, 52
Théorème d'Ambrose-Singer, 14
Théorème d'arithmétique de Margulis, 299
 Théorème d'équidistribution, 300
 Théorème d'Euclide sur les nombres premiers, 301
 Théorème d'Euler (arithmétique), 89
 Théorème de Cauchy (groupes), 71
Théorème de décomposition de Hodge, 90
 Théorème de décomposition de Milnor, 94
 Théorème de Fáry-Milnor, 108
 Théorème de Feit-Thompson, 62
 Théorème de Green-Tao, 138
 Théorème de Gromov sur les groupes à croissance polynomiale, 72
 Théorème de Hasse-Minkowski, 271
Théorème de Hurwitz, 129
 Théorème de l'indice d'Atiyah-Singer, 13
 Théorème de la boule chevelue, 128
Théorème de la signature, 13
 Théorème de Lax, 26
 Théorème de Lax-Milgram, 27
 Théorème de Meyer, 314
 Théorème de modularité, 231
 Théorème de Mordell-Weil, 85
 Théorème de Nash-Moser, 214
 Théorème de plongement de Nash, 212
 Théorème de Pythagore, 182
 Théorème de récurrence de Poincaré, 316
 Théorème de Riemann-Roch, 23
 Théorème de Stokes, 13
 Théorème de Szemerédi, 137
 Théorème de Szemerédi-Trotter, 138
 Théorème des deux carrés de Fermat, 269
 Théorème des graphes parfaits, 337
 Théorème des nombres premiers, 89
 Théorème des quatre couleurs, 333
 Théorème des restes chinois, 89
 Théorème du point fixe de Brouwer, 190
 Théorème du point fixe de Lefschetz, 190
 Théorème ergodique, 316
 Théorème fondamental de l'algèbre, 46
 Théorème PCP, 323
 Théorème spectral, 46
 Théorèmes de Sylow, 71
 Théorie algébrique des nombres, 85
 Théorie analytique des nombres, 89
 Théorie combinatoire des groupes, 96
Théorie combinatoire des nombres, 89
 Théorie d'Iwasawa, 233
 Théorie de Galois, 69
 Théorie de Hodge, 13
 Théorie de jauge, 14
 Théorie de l'information, 137, 209
 Théorie de la complexité, 319
 Théorie de la mesure, 386
 Théorie de la percolation, 268
 Théorie de Morse, 96
 Théorie de Ramsey, 299
 Théorie de Yang-Mills, 281
 Théorie des catégories, 63
 Théorie des cordes, 14
 Théorie des cordes hétérotique, 283
 Théorie des corps de classes, 85
 Théorie des graphes, 137
 Théorie des graphes extrémaux, 323

- Théorie des groupes, 64
Théorie des jeux, 214
Théorie des nœuds, 96
Théorie des nombres, 1
Théorie des probabilités, 52
Théorie des représentations, 166
Théorie des singularités, 94
Théorie des systèmes dynamiques, 41
Théorie du chaos, 200
Théorie du transport, 370
Théorie ergodique, 137
*Théorie mathématique de la communi-
cation*, 209
Théorie quantique des champs, 13
Thom (René), 14
Thompson (John G.), 62
Thurston (William), 95
Tian (Gang), 283
Tietze (Heinrich), 105
Tits (Jacques), 62
Topologie, 1
Topologie algébrique, 5
Topologie combinatoire, 94
Topologie différentielle, 94
Tore, 121
Traitement du signal, 263
Transformation de Möbius, 246
Tri fusion, 161
Triangle, 17
Triangle de Pascal, 317
Triangle équilatéral, 51
Triangle isocèle, 175
Triangles isométriques, 100
Triangles semblables, 100
Triangulation, 105
Trigonométrie, 9
Triplet pythagoricien, 239
Turán (Pál), 137
Turing (Alan), 322

Uhlenbeck (Karen), 281
Un homme d'exception, 214
Union mathématique internationale, 43
Univers, 393

Vadhan (Salil), 324
Valeur absolue p-adique, 274
Valeur propre, 319
Valiant (Leslie), 160
Van der Waerden (Bartel Leendert), 147
Varadhan (Srinivasa), 52
Variable aléatoire discrète, 386
Variable aléatoire, 52
Variance, 57
Variété, 23
Variété abélienne, 85
Variété algébrique, 14
Variété complexe, 80
Variété de dimension 3, 94
Variété différentielle, 25
Variété hyperbolique, 349
Variété lisse, 23
Variété parallélisable, 128
Variété riemannienne, 72
Variété symplectique, 72
Variété topologique, 123
Vecteur unitaire, 309
Venkatesh (Akshay), 304
Verre de spin, 386
Voïevodski (Vladimir), 95

Weil (André), 91
Weiss (Benjamin), 299
Weyl (Hermann), 213
Wiener (Norbert), 53
Wigderson (Avi), 322
Wigner (Eugene), 262
Wiles (Andrew), 2
Witten (Edward), 24
Wolf (Joseph A.), 132

Yau (Shing-Tung), 283

Ziegler (Tamar), 299
Zygmund (Antoni), 250

Ce livre regroupe la plupart des textes de vulgarisation publiés par l'Académie norvégienne des sciences et des lettres à l'occasion de la remise du prix Abel depuis 2003. En 2021, à l'initiative de l'académie, ces textes ont été en partie traduits en une dizaine de langues parmi lesquelles le français.