

# Utilisation de l'expérience de drainage à pas de pression multiples pour la détermination des fonctions hydrauliques du sol par la méthode inverse

## Présentation et évaluation de la méthode

M. El. MEDDAHI(1), Dirk MALLANTS(1), Moussa BADJI(1), Jan FEYEN(1), Harry VEREECKEN(2)

(1) Institut de gestion des ressources en terre et en eau, Katholieke Universiteit, Vital Decosterstraat 102, 3000 Leuven-Belgique

(2) Forschungszentrum Jülich, Erdöl und Geochemie, ICH5, Allemagne

### RÉSUMÉ

*L'optimisation des paramètres des fonctions décrivant les propriétés hydrauliques du sol  $\theta(h)$  et  $K(h)$ , basée sur les résultats de l'expérience de drainage interne à pas de pression multiples est une méthode prometteuse. En effet, cette dernière fournit suffisamment d'informations sur les propriétés hydrauliques essentielles d'un sol. Le modèle utilisé pour décrire les relations entre la teneur en eau volumique  $\theta$  et la pression de l'eau  $h$ , d'une part, et entre la conductivité hydraulique  $K$  et  $h$ , d'autre part, est celui de CAMPBELL (1974) dans sa version améliorée par HUTSON et CASS (1987).*

*Les résultats montrent que ce modèle décrit raisonnablement le processus du drainage en fonction du temps correspondant à des pas de pressions croissantes. La solution de la méthode d'identification des paramètres est unique tant que les valeurs assignées aux paramètres au départ sont proches ( $\pm 20\%$ ) de celles du sol étudié. L'effet d'une erreur expérimentale allant jusqu'à 10 % n'est pas significatif pour les résultats des paramètres optimisés.*

MOTS-CLÉS : Drainage à pas de pression multiples – Méthode inverse – Propriétés hydrauliques du sol.

### ABSTRACT

APPLICATION OF THE MULTI-STEP OUTFLOW EXPERIMENTS FOR DETERMINING SOIL HYDRAULIC PROPERTIES.  
PRESENTATION AND EVALUATION OF THE METHOD

*Optimization of the parameters pertaining to the soil hydraulic functions  $\theta(h)$  and  $K(h)$ , based on cumulative outflow data obtained from application of multiple pressure steps, seems a promising method. Indeed, this method allows to obtain enough information with regard to the required soil hydraulic properties. The model uses the HUTSON and CASS (1987) modification of CAMPBELL's (1974) retentivity function and unsaturated hydraulic conductivity relationship. Results show that the model describes the cumulative drainage versus time process, corresponding to successively higher pressure steps, reasonably well. The solution of the parameter identification problem is unique as long as the initial parameter values are close to the measured soil parameters ( $\pm 20\%$ ). Effects of experimental error in the data up to 10 % are insignificant for the final parameter estimates.*

KEY WORDS: Multi-step outflow experiments – Inverse method – Soil hydraulic properties.

## INTRODUCTION

La relation entre la pression de l'eau et la teneur en eau volumique,  $h(\theta)$ , et celle entre la conductivité hydraulique et la teneur en eau,  $K(\theta)$ , sont essentielles dans la prédition du transport d'eau et de solutés.

Plusieurs techniques au laboratoire et *in situ* ont été développées pour mesurer les propriétés hydrauliques du sol non saturé (BOELS *et al.*, 1978 ; BOUMA, 1983 ; DANE et HRUSKA, 1983 ; KLUTE, 1986). Ces méthodes sont relativement laborieuses et très onéreuses, surtout quand il s'agit de la détermination de la conductivité hydraulique. À ces limitations s'ajoutent les conclusions de certaines études (NIELSEN *et al.*, 1973 ; RUSSO et BRESLER, 1981) qui ont montré que les propriétés hydrauliques du sol varient de façon significative dans le temps et dans l'espace. Cette variabilité implique la nécessité d'évaluer plusieurs échantillons pour caractériser une parcelle donnée. Pour contourner ce problème, plusieurs chercheurs ont proposé des modèles basés sur la distribution de la taille des pores pour prédire la conductivité hydraulique à partir des mesures faciles de la rétention d'eau du sol (MILLINGTON et QUIRK, 1959 ; MUALEM, 1976). Récemment, les travaux se sont concentrés sur la possibilité de déterminer simultanément les fonctions de rétention d'eau du sol et de conductivité hydraulique par la méthode indirecte ou méthode inverse (ZACHMAN *et al.*, 1981, 1982 ; DANE et HRUSKA, 1983 ; KOOL *et al.*, 1985). Ces travaux sont réalisés au laboratoire et il sont basés sur l'analyse des résultats de l'expérience de drainage à pas de pression unique.

L'approche de la méthode inverse est basée sur l'optimisation des paramètres des fonctions  $\theta(h)$  et de  $K(h)$ . Expérimentalement, la procédure consiste à collecter le volume d'eau drainée en fonction du temps d'un échantillon de  $100 \text{ cm}^3$  (5 cm de diamètre et 5,3 cm de hauteur) mis dans une cellule de pression. Au départ, l'échantillon est saturé par le bas pendant 48 heures, ensuite on augmente la pression pneumatique (air comprimé) jusqu'à une certaine valeur qui demeure constante par la suite durant toute l'expérience. Le résultat du volume cumulé d'eau drainée avec le temps correspondant est introduit dans un modèle de simulation numérique qui résout l'équation de RICHARDS (1931) où les conditions initiale et aux limites sont connues. Les relations entre la teneur en eau volumique  $\theta$ , la conductivité hydraulique  $K$  et la pression de l'eau  $h$ , nécessaires pour la résolution de l'équation

de RICHARDS, sont décrites par des fonctions paramétrées (GARDNER, 1956 ; CAMPBELL, 1974 ; MUALEM, 1976 ; VAN GENUCHTEN, 1980 ; HUTSON et CASS, 1987). Les paramètres de ces fonctions sont optimisés par minimisation de l'écart entre les flux de drainage cumulés, mesuré et calculé (KOOL *et al.*, 1987 ; YEH, 1987 ; KOOL et PARKER, 1988).

Dans ce travail, le modèle de simulation numérique de l'écoulement est adapté pour utiliser les fonctions de  $\theta(h)$  et  $K(h)$  données par CAMPBELL (1974) et améliorées par HUTSON et CASS (1987). Ces fonctions présentent moins de paramètres inconnus (deux paramètres) que celles données par les auteurs cités précédemment dans le texte (quatre à six paramètres). En outre le protocole expérimental, dérivant de celui à pression unique (KOOL *et al.*, 1985), considère plusieurs pas de pressions croissantes (100, 200, 400 et 800 cm d'eau). Nous présentons dans un premier temps l'expérience de drainage à pas de pression multiples, la méthode inverse, et nous discutons l'application de cette méthode aux résultats de l'expérience de drainage à pas de pression multiples pour déterminer simultanément les fonctions hydrauliques  $\theta(h)$  et  $K(h)$ . Une analyse exhaustive est faite dans le but : (1) d'évaluer l'effet des valeurs initiales des paramètres des fonctions hydrauliques sur le résultat final de la méthode inverse ; (2) d'étudier la sensibilité des paramètres de ces fonctions ; (3) la sensibilité de la méthode inverse aux erreurs expérimentales dans le résultat de l'expérience de drainage à pas de pression multiples. Dans un deuxième article, les résultats de 30 échantillons de sol seront présentés.

## MATÉRIEL ET MÉTHODE

Un échantillon de sol (sablo-limoneux de structure bien développée) de  $100 \text{ cm}^3$  (5 cm de diamètre et 5,3 cm de hauteur) est placé dans une cellule de pression (fig. 1) sur une plaque poreuse en céramique, puis saturé par le bas. L'expérience de drainage commence par application d'un premier pas de pression de 100 cm d'eau à la surface de l'échantillon par de l'air comprimé. Le débit d'eau drainée ( $Q_0(t)$ ) est noté à des pas de temps de 5 minutes à 2 heures suivant la valeur de ce débit (diminue dans le temps). Ce premier pas de pression a durée 24 heures avant que l'équilibre soit atteint. Ensuite on a augmenté la pression pneumatique à 200, 400 et 800 cm d'eau, la durée d'application de chacune de ces pressions étant

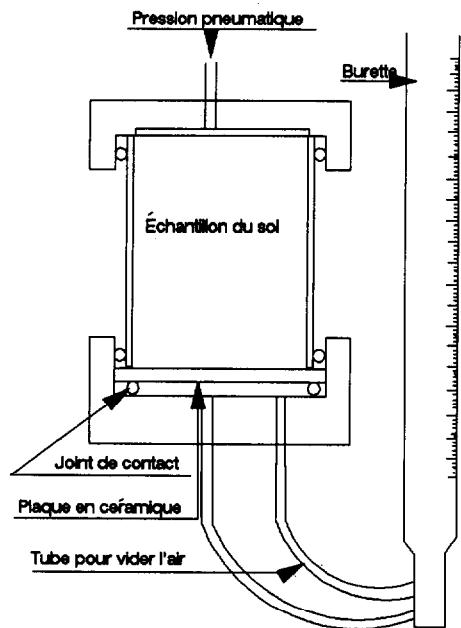


FIG. 1. – Dispositif expérimental de l'expérience de drainage à pas de pression multiples.

*Cross section of tempe-pressure cell in multi-step outflow experiment.*

respectivement de 24, 48 et 48 heures. Ces pressions provoquent un écoulement non saturé dans l'échantillon du sol. La plaque poreuse reste toujours saturée.

Pour un écoulement monodimensionnel et vertical avec les conditions aux limites appropriées, l'équation qui décrit ce processus est celle donnée par RICHARDS (1931), avec l'axe des x orienté positivement vers le bas :

$$C(h) \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ K(h) \left( \frac{\partial h}{\partial x} - 1 \right) \right] \quad (1)$$

avec  $C(h) = dq/dh$ , capacité capillaire du milieu poreux

$K(h)$  = conductivité hydraulique en  $\text{cm} \text{ j}^{-1}$

$x$  = distance verticale en cm

$t$  = temps en j

$h$  = pression de l'eau en cm.

Les conditions initiale et aux limites de l'expérience de drainage à pas de pression multiples (fig. 1) sont :

$$h = h_0(x) \quad t = 0 \quad , \quad 0 < x < L \quad (2a)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 1 \quad t > 0 \quad , \quad x = 0 \quad (2b)$$

$$h = h_L - h_a \quad t > 0 \quad , \quad x = L \quad (2c)$$

où  $x = 0$  est pris à la surface de l'échantillon,  $x = L$  est la distance verticale jusqu'au fond de la plaque poreuse,  $h_L$  est la pression sous la plaque poreuse et  $h_a$  est la pression pneumatique appliquée à la surface de l'échantillon ; sa valeur est déterminée par :

$$h_a = \Delta p / \rho g \quad (2d)$$

où  $\Delta p$  est la pression pneumatique appliquée à l'échantillon,  $g$  est l'accélération de la pesanteur, et  $\rho$  est la densité de l'eau.

L'équation (1) est résolue pour un système composé des deux couches constituées par le sol et la plaque poreuse. Comme la plaque est saturée, sa capacité de rétention spécifique est nulle et sa conductivité hydraulique est celle à la saturation (égale à  $0,03096 \text{ cm hr}^{-1}$ ). La résolution numérique des équations (1) et (2) est obtenue par le modèle de GALERKIN, dans sa version modifiée par VAN GENUCHTEN (1978). Le drainage cumulé est calculé par l'équation suivante :

$$Q(t) = A \int_0^L [\theta(x,0) - \theta(x,t)] dx \quad (3)$$

Où  $A$  est la surface de l'échantillon perpendiculaire à la direction de l'écoulement en  $\text{cm}^2$ ,  $\theta$  est la teneur en eau volumique  $\text{cm}^3 \text{ cm}^{-3}$ ,  $L$  est la hauteur de l'échantillon en cm et  $Q(t)$  est le débit drainé cumulé en  $\text{cm}^3$ .

Les fonctions  $\theta(h)$  et  $K(h)$  sont celles données par CAMPBELL (1974) :

$$h = a (\theta / \theta_s)^b \quad (4)$$

où  $a$  et  $b$  sont des paramètres,  $\theta_s$  est la teneur en eau volumique à la saturation en  $\text{cm}^3 \text{ cm}^{-3}$ ,  $\theta$  est la teneur en eau volumique en  $\text{cm}^3 \text{ cm}^{-3}$  et  $h$  la pression de l'eau en cm. La constante  $a$  est souvent considérée comme la valeur de la pression d'entrée d'air. L'équation (4) est exponentielle, discontinue aux valeurs  $h = a$  et  $\theta / \theta_s = 1$ . Une meilleure représentation de la courbe de rétention aux potentiels élevés est décrite par une fonction parabolique (CLAPP et HORNBERGER, 1978). HUTSON et CASS (1987) ont modifié l'équation (4) en définissant un tronçon parabolique pour les potentiels de pression compris entre 0 et  $h_c$ , et ils ont proposé l'expression suivante :

$$h = \frac{a(1 - \theta / \theta_s)^{1/2} (\theta_c / \theta_s)^{-b}}{(1 - \theta_c / \theta_s)^{1/2}} \quad (5)$$

où  $h_c$  et  $\theta_c$  sont les coordonnées du point de rencontre entre les deux courbes exponentielle et parabolique.

$h_c$  et  $\theta_c$  sont donnés par les équations suivantes :

$$h_c = a[2b/(1+2b)]^{-b} \quad (6)$$

$$\theta_c = 2b \theta_s/(1+2b) \quad (7)$$

La courbe de rétention est sigmoïde, continue et a une capacité capillaire  $d\theta/dh = 0$  à la saturation. La capacité capillaire est donnée par les expressions suivantes pour les deux tronçons de la courbe de rétention :

$$\text{pour } h < h_c \quad C = d\theta/dh = -\theta_s h^{-(1/b+1)}/ba^{-1/b} \quad (8)$$

$$\text{pour } h > h_c \quad C = d\theta/dh = \frac{-2\theta_s(1-\theta_c/\theta_s)h}{a^2(\theta_c/\theta_s)^{-2b}} \quad (9)$$

En appliquant le modèle de capillarité à l'équation (4), CAMPBELL (1974) dérive l'équation de la conductivité hydraulique en fonction de la teneur en eau volumique dont l'expression est donnée par :

$$K(\theta) = K_s(\theta/\theta_s)^{2b+2+p} \quad (10)$$

où  $K(\theta)$  est la conductivité hydraulique en  $\text{cm j}^{-1}$ ,  $K_s$  est la conductivité hydraulique à la saturation en  $\text{cm j}^{-1}$  et  $p$  est un paramètre représentant l'interaction entre la taille des pores. JACKSON (1972) a montré que la valeur de  $p = 1$  donne une meilleure estimation de  $K(\theta)$ . Aux potentiels inférieurs à  $h_c$ , l'équation (10) est modifiée pour mieux décrire la partie parabolique de la courbe de  $K(\theta)$  dont l'expression est donnée par :

$$K = K_s(a/h)^{2+(2+p)/b} \quad (11)$$

## OPTIMISATION DES PARAMÈTRES DES FONCTIONS HYDRAULIQUES

Dans la procédure d'optimisation des paramètres des fonctions  $\theta(h)$  et  $K(h)$ , on calcule numériquement

le débit d'eau drainée  $Q_s(t)$  correspondant à une combinaison de valeurs initiales assignées aux paramètres des fonctions  $\theta(h)$  et  $K(h)$ . La somme des carrés des écarts entre les débits drainés calculé et mesuré est la fonction objective considérée dans la procédure d'optimisation :

$$\text{SSE} = \sum_{i=1}^n [Q_0(t) - Q_s(t,b)]^2 \quad (12)$$

Où SSE est la somme des carrés des écarts,  $Q_0$  est le débit drainé cumulé mesuré,  $Q_s(t,b)$  est le débit drainé cumulé calculé, correspondant à une combinaison de paramètres  $b$  et  $n$  est le nombre de  $Q_0(t)$  mesurés (au cours de toutes les pressions appliquées). La fonction objective est minimisée itérativement, sa valeur minimum correspond à une combinaison optimale des paramètres. La méthode non linéaire d'optimisation des moindres carrés de MARQUARDT (1963) est utilisée dans cette procédure.

Les résultats de la méthode inverse sont assignés au tableau I, et les courbes de rétention d'eau du sol et de la conductivité hydraulique qui en résultent sont représentées aux figures 2a, 2b. Au cours de l'optimisation des paramètres la teneur en eau volumique a été gardée fixe et égale à sa valeur mesurée.

## ANALYSE DE LA SENSIBILITÉ

L'analyse de la sensibilité a pour but l'évaluation de l'effet des variations structurelles dans le modèle, la détermination de l'importance relative des différents paramètres du modèle ainsi que l'interaction entre les paramètres les plus critiques.

L'analyse de la sensibilité d'un modèle peut être réalisée en étudiant l'effet de la variation des paramètres un à un (analyse monodimensionnelle) ou celui de la variation simultanée de deux paramètres (analyse bidimensionnelle) sur les résultats prédicts.

TABLEAU I  
Résultats de la méthode d'optimisation inverse  
Results obtained by the inverse optimization method

Variables	Valeurs optimisées	Coef.E.S*	Int. de conf. prob. au seuil 0,05		SSE**	R2
			Min	Max		
1/a	0,08746	0,0082	0,0710	0,1039		
b	14,65148	1,1330	12,3720	16,9306		
Ks $\text{cm hr}^{-1}$	0,02033	0,1130	0,0024	0,0431		
$\theta_s$ (fixe)	0,4500					

\* Coefficient d'erreur standard

\*\* Somme des carrés des écarts

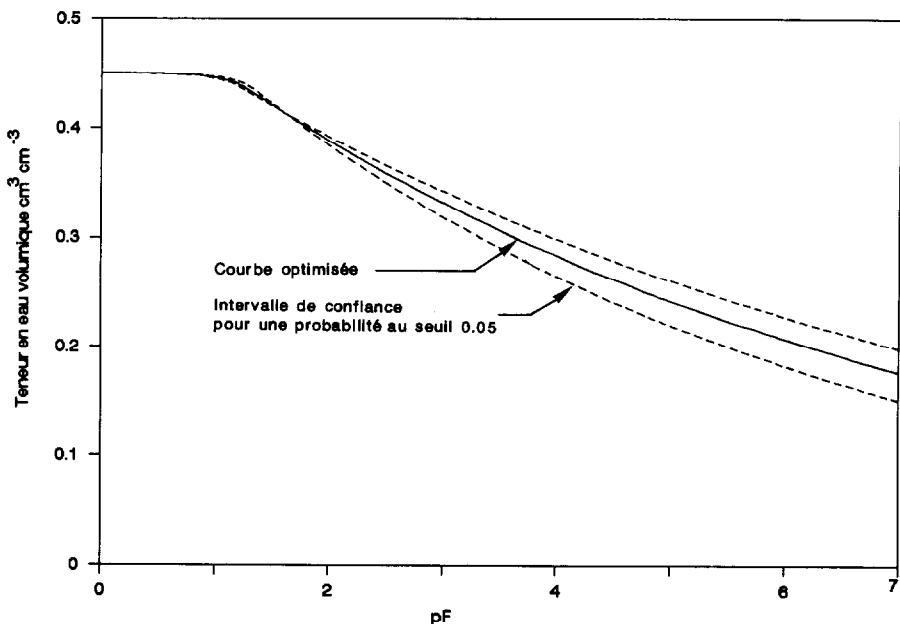


FIG. 2a. – Courbe caractéristique de rétention d'eau du sol en désorption, optimisée (Modèle de CAMPBELL, 1974).

*Confidence interval (95 %) on the predicted water retention curve for Campbell model.*

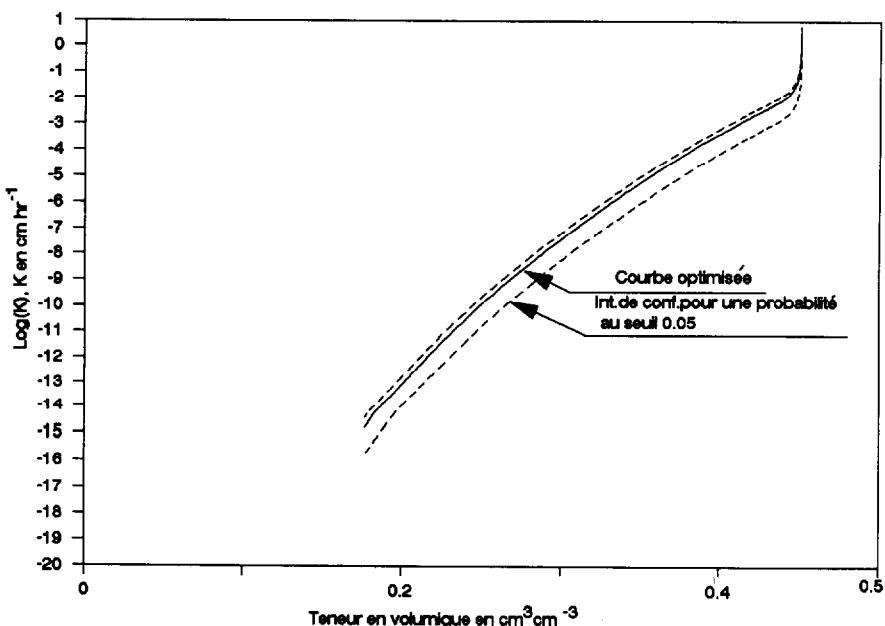


FIG. 2b. – Courbe de la conductivité hydraulique optimisée (Modèle de CAMPBELL, 1974).

*Confidence interval (95 %) on the predicted hydraulic conductivity curve for Campbell model.*

#### Analyse monodimensionnelle

L'analyse monodimensionnelle a pour but de déterminer : (1) le rang d'importance des différents paramètres dans le modèle et (2) la zone critique de chacun des paramètres. La sensibilité des pa-

mètres suivants a été étudiée :  $1/a$ ,  $b$ ,  $\theta_s$  et  $K_s$ . La procédure adoptée consiste à changer séparément et à tour de rôle la valeur de chaque paramètre avec des pourcentages fixés allant de  $\pm 10\%$  à  $\pm 90\%$  de la valeur optimale. La variation des

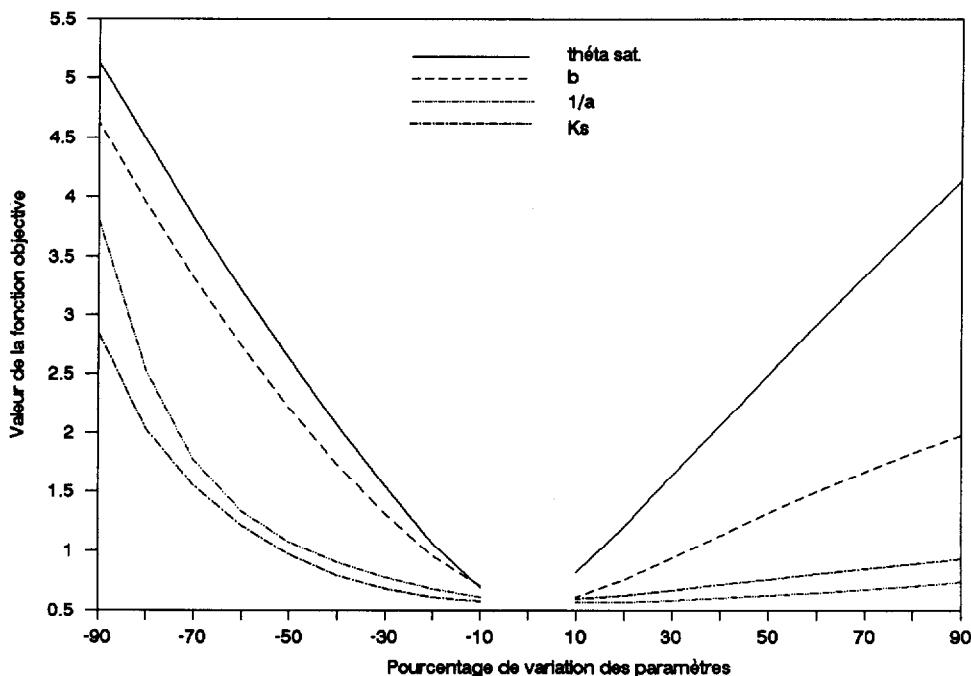


FIG. 3. – Résultats de l'analyse monodimensionnelle de la sensibilité des paramètres des fonctions  $\theta(h)$  et  $K(h)$ , basée sur la valeur absolue de la fonction objective.

*One dimensional sensitivity analysis for Campbell model parameters, based on the absolute values of the objective function.*

paramètres est faite relativement aux valeurs optimales données par le tableau I. Les résultats sont représentés à la figure 3.

Suite à l'observation de la figure 3, il apparaît que les paramètres  $\theta_s$  et  $b$  sont les plus critiques à gauche de l'optimum, et le sont aussi à droite mais avec un degré moindre. Les paramètres  $1/a$  et  $K_s$  sont sensibles seulement lorsqu'ils sont sous-estimés (à gauche de la valeur optimale). D'après les résultats de ce graphique, le rang de chaque paramètre est donné comme suit : (1) à gauche on a le paramètre  $\theta_s$  secondé par  $b$  puis  $1/a$  et  $K_s$  et (2) à droite on a  $\theta_s$  puis  $b$ ; la sensibilité de  $1/a$  et  $K_s$  est nulle (courbes sensiblement parallèles à l'axe des x).

L'analyse de la sensibilité des paramètres telle qu'elle est présentée dans la figure 3 ne donne qu'une vue d'ensemble de l'importance des paramètres qui peut dépendre des données utilisées (BADJI, 1984). Pour pallier cet inconvénient d'échelle, BADJI (1984) propose une procédure basée sur l'étude de la sensibilité relative, dépendant moins des données utilisées. La sensibilité relative est définie par la variation relative de la fonction objective causée par une variation relative de la valeur du paramètre considéré. Les valeurs de

la sensibilité relative sont déterminées de la façon suivante (BADJI, 1984) :

a) Pour une variation de la valeur optimale égale à  $\pm 10\%$ , la sensibilité relative est donnée par :

$$SREL_i = \Delta UR_i / \Delta VR_i \quad (13)$$

$$\text{avec } \Delta UR_i = |U_i - U_0| / U_0 \quad (14)$$

$$\Delta VR_i = |V_i - V_0| / V_0 \quad (15)$$

(b) Pour une variation de la valeur optimale différente et au-delà de  $\pm 10\%$ , la sensibilité relative est donnée par :

$$SREL_i = \Delta UR_i / \Delta VR_i \quad (16)$$

$$\text{avec } \Delta UR_i = |U_i - U_{i-1}| / U_0 \quad (17)$$

$$\Delta VR_i = |V_i - V_{i-1}| / V_0 \quad (18)$$

L'indexe  $i$  indique le degré de variation du paramètre (p.e.,  $i = 3$  et  $i = -3$  signifient des variations respectives de  $+30\%$  et de  $-30\%$  de la valeur optimale).

$V$  = valeur du paramètre après la variation

$V_0$  = valeur optimale du paramètre

$U$  = valeur de la fonction objective quand le paramètre est égal à  $V$

$U_0$  = valeur de la fonction objective quand le paramètre est égal à  $V_0$

$\Delta UR$  = variation relative de la fonction objective

$\Delta VR$  = variation relative de la valeur du paramètre

La sensibilité relative exprimée par les équations (14) et (17) n'a aucune signification à la valeur optimale.

Les résultats de cette analyse sont représentés à la figure 4. Ces courbes sont interprétées de la manière suivante : une courbe croissante avec une augmentation en valeur absolue de la différence entre la valeur actuelle du paramètre et la valeur à l'optimum signifie une influence beaucoup plus prononcée du paramètre quand sa valeur s'écarte de la valeur optimale. Inversement, une courbe décroissante signifie une influence moins importante du paramètre au fur et à mesure qu'on s'écarte de l'optimum. Une droite parallèle à l'axe des abscisses veut dire que l'influence du paramètre est nulle. L'observation des résultats montrés par la figure 4 conduit aux conclusions suivantes :

(1) à gauche de l'optimum tous les paramètres sont sensibles. Le rang décroissant des paramètres est  $1/a$ ,  $K_s$ ,  $\theta_s$ , et  $b$ .

(2) à droite de l'optimum, tous les paramètres présentent une influence nulle au-delà d'une valeur correspondant à une variation absolue du paramètre égale à 20 %. En deçà de cette valeur,  $K_s$  et  $1/a$  présentent une faible sensibilité alors que  $\theta_s$  et  $b$  ont une influence plus prononcée.

Les observations précédentes nous permettent de conclure que, mis à part  $\theta_s$  et  $K_s$ , paramètres qu'on peut mesurer, les deux autres ( $1/a$  et  $b$ ) sont critiques à des degrés différents lorsqu'ils sont sous-

estimés ;  $1/a$  vient au premier rang lorsqu'on dépasse une variation absolue de - 40 %.

#### Analyse bidimensionnelle

La question que l'on peut également se poser est : (a) y a-t-il une indépendance entre les paramètres des fonctions hydrauliques ? (b) sinon, comment sont-ils liés, autrement dit y a-t-il une corrélation entre eux ? est-elle positive ou négative ? C'est à ces questions que l'analyse bidimensionnelle nous permet de répondre.

L'analyse bidimensionnelle peut être réalisée en faisant varier simultanément les valeurs de couples formés par les paramètres dont on désire étudier l'interaction. On détermine ensuite la variation correspondante de la valeur de la fonction objective.

L'analyse bidimensionnelle de la sensibilité a été appliquée aux couples de paramètres ( $1/a$ ,  $b$ ), ( $1/a$ ,  $K_s$ ) et ( $b$ ,  $K_s$ ). La méthodologie utilisée pour réaliser l'analyse bidimensionnelle de la sensibilité est la suivante : à chaque couple de valeurs correspond une valeur de la fonction objective. La forme relative est obtenue en divisant la valeur actuelle de la fonction objective par celle à l'optimum. Les valeurs relatives de la fonction objective, déterminées pour les différentes variations des couples de paramètres considérés, permettent de générer des lignes d'égale valeur de la fonction objective. Pour plus de détail sur cette méthodologie, le lecteur peut se référer à BADJI (1984).

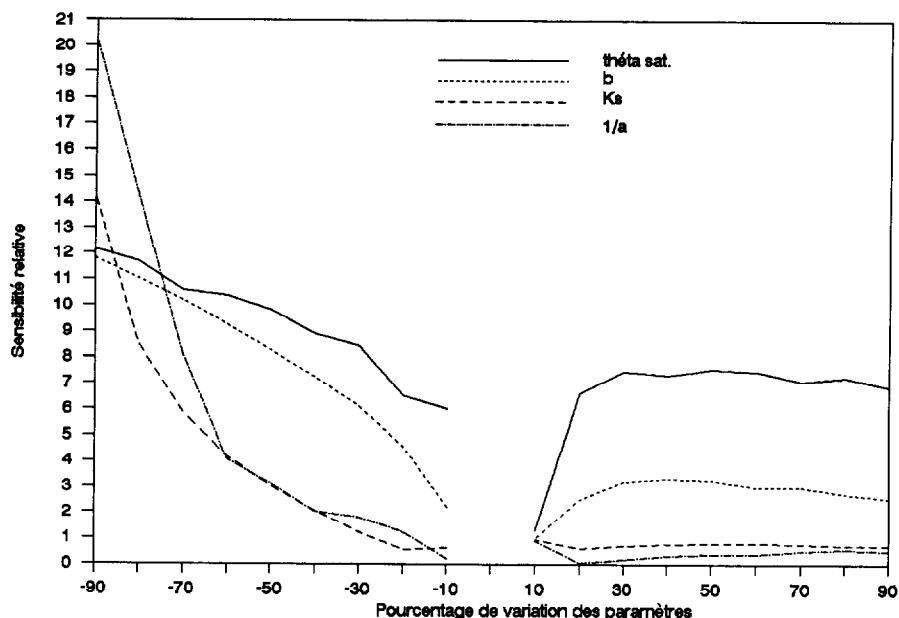


FIG. 4. – Résultats de l'analyse monodimensionnelle des paramètres des fonctions  $\theta(h)$  et  $K(h)$ , basée sur la sensibilité relative.  
One dimensional sensitivity analysis for Campbell model parameters, based on the relative values of the objective function.

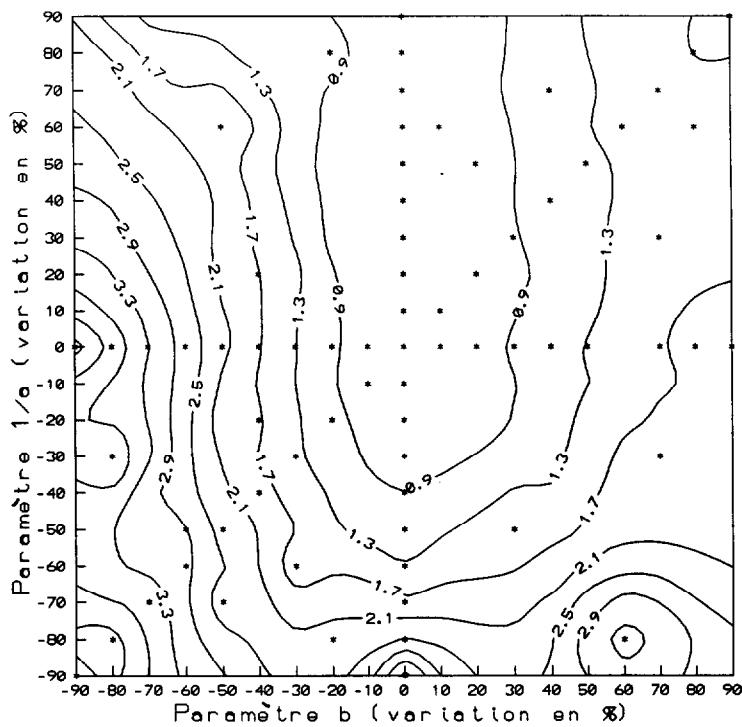


FIG. 5a. – Surface de la sensibilité montrant l'interaction entre les paramètres  $1/a$  et  $b$  des fonctions  $\theta(h)$  et  $K(h)$ .  
*Two-dimensional sensitivity analyses for Campbell model,  $1/a$  and  $b$  parameters.*

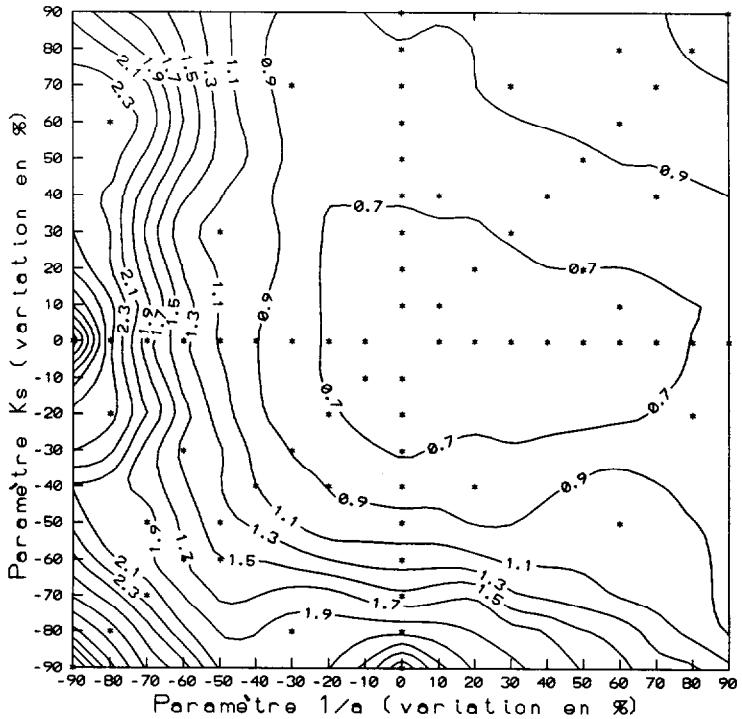


FIG. 5b. – Surface de la sensibilité montrant l'interaction des paramètres  $1/a$  et  $K_s$  des fonctions  $\theta(h)$  et  $K(h)$ .  
*Two-dimensional sensitivity analyses for Campbell model,  $1/a$  and  $K_s$  parameters.*

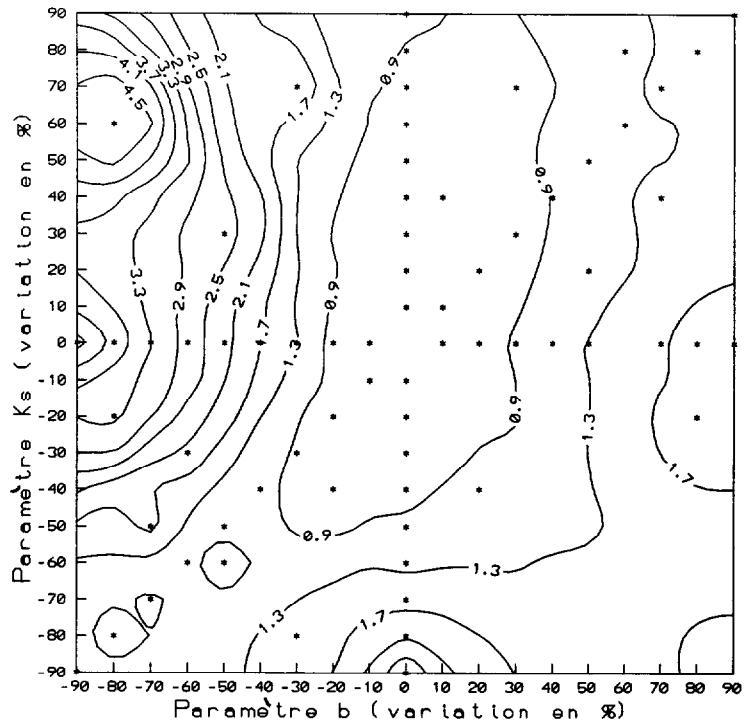


FIG. 5c. – Surface de la sensibilité montrant l'interaction entre les paramètres  $b$  et  $K_s$  des fonctions  $\theta(h)$  et  $K(h)$ .  
Two-dimensional sensitivity analyses for Campbell model,  $b$  and  $K_s$  parameters.

Les figures 5a, 5b et 5c représentent la forme des surfaces de sensibilité résultant des variations simultanées des valeurs des couples  $(1/a, b)$ ,  $(1/a, K_s)$  et  $(b, K_s)$  respectivement. Suite à l'observation des figures 5a,c on peut conclure qu'il existe une dépendance entre les paramètres  $b$  et  $K_s$  mais les deux autres couples sont quasi indépendants. Une dépendance signifie que les valeurs des deux paramètres  $b$  et  $K_s$  varient dans le même sens.

#### Analyse de la sensibilité aux erreurs expérimentales

L'effet d'une erreur des données expérimentales sur le résultat de la méthode inverse est analysé en générant des données de drainage cumulé entachées d'erreur en utilisant l'équation proposée par KOOL *et al.*, (1985) :

$$Q_p(t_i) = Q_0(t_i)[1+2p(R-0,5)] \quad (19)$$

où  $Q_p(t_i)$  est le drainage cumulé auquel on additionne une erreur aléatoire au temps  $t_i$ ,  $Q_0(t_i)$  représente la quantité d'eau drainée mesurée,  $R$  est un nombre aléatoire compris entre 0 et 1 et  $p$  est l'erreur relative.

Pour simuler des erreurs de mesure de 2, 5, 10 et 15 %, on assigne à  $p$  les valeurs de 0,02 (cas 1),

0,05 (cas 2), 0,10 (cas 3) et 0,15 (cas 4). Les résultats sont donnés par le tableau II et représentés aux figures 6a,b. Les valeurs initiales de  $1/a$ ,  $b$ , et  $K_s$ , utilisées pour appliquer la méthode inverse, sont 0,0204, 2,767, et 0,0045 respectivement. Ces valeurs représentent la meilleure estimation des paramètres initiaux ; leur utilisation conduit à une convergence rapide de la méthode inverse vers la solution optimale.

L'analyse du tableau II et l'observation des figures 6a, b montrent que la solution de la méthode inverse n'est pas sensible à des erreurs de 2 à 10 % sur les données expérimentales. Cependant, dès que cette erreur devient supérieure ou égale à 15 %, la solution de la méthode inverse s'écarte de l'optimum et elle est parfois non convergente.

#### L'UNICITÉ DE LA SOLUTION DE LA MÉTHODE INVERSE

Les valeurs des paramètres  $1/a$ ,  $b$  et  $K_s$  sont obtenues par la solution numérique inverse de l'équation de l'écoulement. Une combinaison de valeurs initiales de ces paramètres est utilisée pour la résolution de cette équation. Après un certain

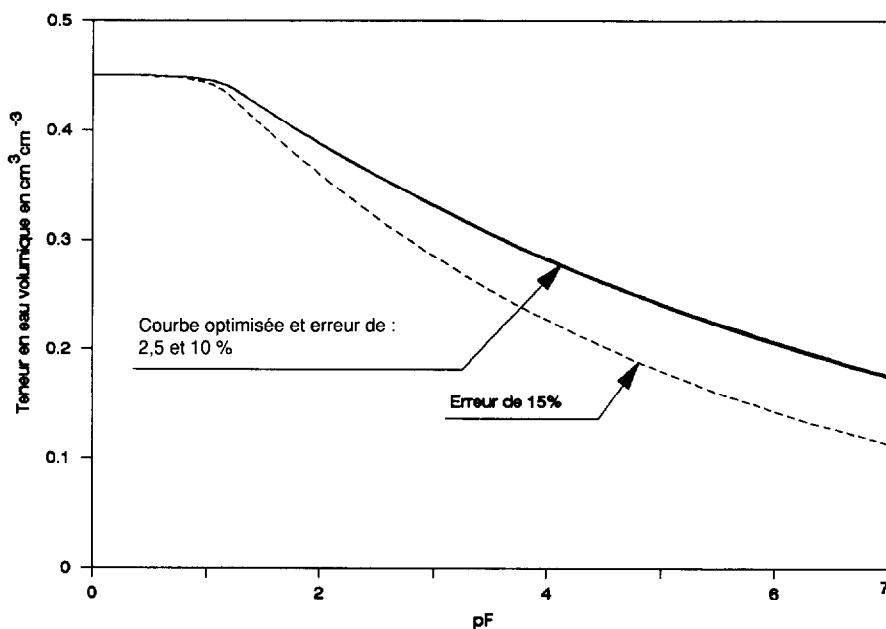


FIG. 6a. – La sensibilité de la méthode inverse aux erreurs expérimentales dans les résultats de l'expérience de drainage à pas de pression multiples (2, 5, 10 et 15 %) : effet de ces erreurs sur la courbe  $\theta(h)$ .

*Sensitivity of the inverse method to experimental errors in the multi-step outflow experiments (2, 5, 10 and 15 %): effects of these errors on the predicted water retention curve.*

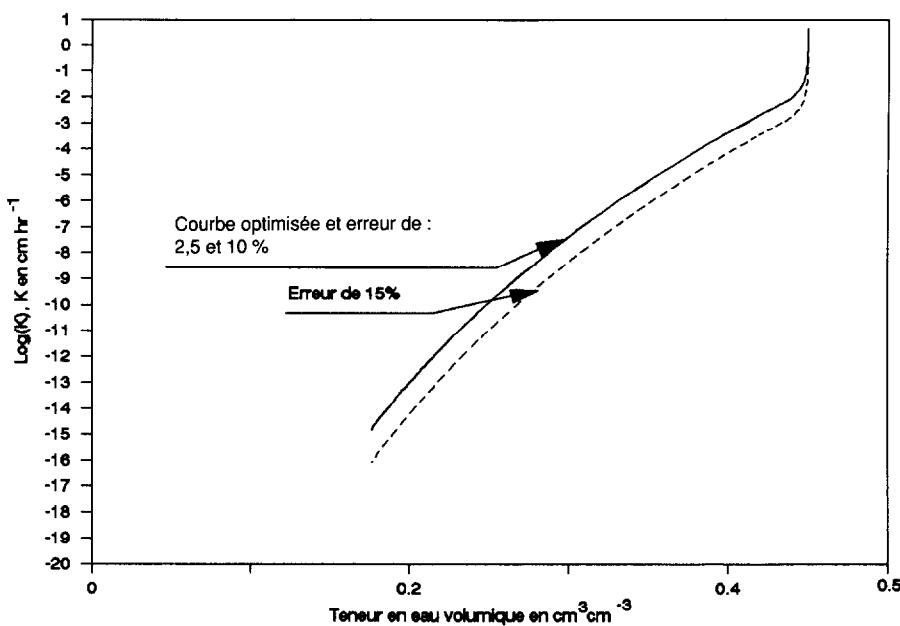


Fig. 6b. – La sensibilité de la méthode inverse aux erreurs expérimentales dans les résultats de l'expérience de drainage à pas de pression multiples (2, 5, 10 et 15 %) : effet de ces erreurs sur la courbe  $K(h)$ .

*Sensitivity of the inverse method to experimental errors in the multi-step outflow experiments (2, 5, 10 and 15 %) : effect of these errors on the predicted hydraulic conductivity curve.*

TABLEAU II  
La sensibilité de la méthode inverse aux erreurs expérimentales  
The susceptibility of the inverse method to the experimental errors

Cas	1/a	Valeurs initiales			1/a	Valeurs optimisées			R2	SSE
		b	$\Theta_s^*$	$K_s$ (cm h <sup>-1</sup> )		b	$\Theta_s^*$	$K_s$ (cm h <sup>-1</sup> )		
1	0,0204	2,767	0,45	0,0045	0,0864	14,571	0,45	0,0199	0,97	0,553
2	0,0204	2,767	0,45	0,0045	0,0865	14,623	0,45	0,0203	0,97	0,546
3	0,0204	2,767	0,45	0,0045	0,0860	14,432	0,45	0,0198	0,97	0,588
4	0,0204	2,767	0,45	0,0045	0,0950	10,000	0,45	0,0047	0,93	0,906

\*  $\Theta_s$  est gardée fixe

nombre d'itérations, une combinaison optimale est obtenue. Cet optimum correspond à une valeur minimale de la fonction objective. La question qui se pose est : la combinaison de valeurs obtenues est-elle unique ? ou dépend-elle des valeurs initiales assignées aux paramètres ? Pour répondre à cette question, différentes valeurs initiales de (1/a, b,  $K_s$ ) sont choisies pour étudier l'unicité de la solution de la méthode inverse. La variation de  $\pm 5\%$  à  $\pm 50\%$  des paramètres de la solution optimale sont utilisés pour cette étude. Dans cette pro-

cédure, tous les paramètres (1/a, b,  $K_s$ ) sont laissés libres. Cela est différent de la procédure suivie dans l'analyse de la sensibilité, où les paramètres sont fixes et égaux à leur valeur optimale.

Les tableaux III, IV et V contiennent les valeurs initiales et finales de 1/a, b et  $K_s$ , le nombre d'itérations et la valeur de la fonction objective (SSE). Le nombre d'itérations indique la vitesse de convergence de la solution d'optimisation inverse. Les figures 7a,d, 8a,d et 9a,d représentent les courbes  $\theta(h)$  et  $K(h)$  pour les différents jeux de paramètres initiaux.

TABLEAU III  
Unicité de la solution de la méthode inverse par rapport aux variations du paramètre 1/a. Les valeurs initiales des autres paramètres sont : b = 2,767  $K_s$  = 0,0045 et  $\Theta_s$  = 0,45 (fixe)  
Unicity of the inverse method as related to the variations in parameter 1/a. The initial values of the other parameters are :  
b = 2.767,  $K_s$  = 0.0045 and  $\Theta_s$  = 0.45 (fixed)

Variations en %	Valeurs initiales			Valeurs finales			SSE	N*
	1/a	b	$K_s$	1/a	b	$K_s$		
+5	0,021	-	-	0,0875	14,669	0,0205	0,567	6
+10	0,022	-	-	0,0876	14,687	0,0206	0,567	5
+15	0,023	-	-	0,0872	14,626	0,0201	0,567	5
+20	0,024	-	-	0,0245	0,2767	0,0045	05,25	1**
+25	0,025	-	-	0,0569	08,003	0,0080	1,820	1**
+30	0,026	-	-	0,0601	09,229	0,0030	0,779	2
+35	0,027	-	-	0,0275	02,767	0,0045	05,247	1**
+40	0,029	-	-	0,0788	10,890	0,0055	0,6221	5
+45	0,030	-	-	0,0656	09,129	0,0103	1,5800	1**
+50	0,031	-	-	****	****	****	****	*
-5	0,019	-	-	0,0701	13,026	0,0121	0,6016	3
-10	0,018	-	-	0,0688	13,006	0,0147	0,6160	2
-15	0,017	-	-	0,0870	14,918	0,0237	0,5667	9
-20	0,016	-	-	0,0872	14,576	0,0197	0,5678	5
-25	0,015	-	-	0,0794	14,464	0,0191	0,5778	3
-30	0,014	-	-	0,0877	14,719	0,0208	0,567	8
-35	0,013	-	-	0,0865	14,523	0,0190	0,568	4
-40	0,012	-	-	0,0876	14,718	0,0209	0,568	7
-45	0,011	-	-	0,0874	14,636	0,0202	0,567	8
-50	0,010	-	-	0,0808	15,463	0,0185	0,682	3

\* N Nombre d'itérations

\*\* Valeurs élevées de SSE

\*\*\* Solution ne converge pas

TABLEAU IV

Unicité de la solution de la méthode inverse par rapport aux variations du paramètre  $b$ . Les valeurs initiales des autres paramètres sont :  $1/a = 0,0204$ ,  $K_s = 0,0045$  et  $\theta_s = 0,45$  (fixe)

Unicity of the inverse method as related to the variations in parameter  $b$ . The initial values of the other parameters are :  $1/a = 0.0204$ ,  $K_s = 0.0045$  and  $\theta_s = 0.45$  (fixed)

Variations en %	Valeurs initiales			Valeurs finales			SSE	N*
	1/a	b	$K_s$	1/a	b	$K_s$		
+5	-	2,905	-	0,0687	13,541	0,0169	0,6002	2
+10	-	3,44	-	0,0712	13,428	0,0150	0,5924	4
+15	-	3,182	-	0,0712	13,707	0,0171	0,5878	4
+20	-	3,320	-	0,0706	13,442	0,0155	0,5916	3
+25	-	3,459	-	0,0715	13,797	0,0176	0,5853	3
+30	-	3,597	-	0,0717	13,613	0,0156	0,5893	3
+35	-	3,735	-	0,0724	13,688	0,0157	0,5899	3
+40	-	3,874	-	0,0706	13,185	0,0126	0,5984	3
+45	-	4,012	-	0,0402	09,464	0,0090	1,2100	1**
+50	-	4,150	-	0,0873	14,792	0,0216	0,5680	10
-5	-	2,629	-	0,0873	14,972	0,0228	0,5674	6
-10	-	2,490	-	0,0873	14,752	0,0213	0,5679	5
-15	-	2,352	-	0,0872	14,736	0,0212	0,5679	6
-20	-	2,214	-	0,0874	14,648	0,0203	0,5678	6

\* N Nombre d'itérations

\*\* Valeurs élevées de SSE

TABLEAU V

Unicité de la solution de la méthode inverse par rapport aux variations du paramètre  $K_s$ . Les valeurs initiales des autres paramètres sont :  $1/a = 0,0204$   $b = 2,767$ , et  $\theta_s = 0,45$  (fixe).

Unicity of the inverse method as related to the variations in parameters  $K_s$ . The initial values of the other parameters are :  $1/a = 0.0204$ ,  $b = 2.767$  and  $\theta_s = 0.45$  (fixed).

Variations en %	Valeurs initiales			Valeurs finales			SSE	N*
	1/a	b	$K_s$	1/a	b	$K_s$		
+5	-	-	0,0047	0,0819	14,448	0,0193	0,572	3
+10	-	-	0,0049	0,0832	14,573	0,0208	0,570	5
+15	-	-	0,0052	0,0702	13,105	0,0129	0,599	5
+20	-	-	0,0054	0,0428	07,710	0,0086	1,981	1**
+25	-	-	0,0056	0,0703	12,864	0,0115	0,605	6
+30	-	-	0,0058	0,0874	14,469	0,0179	0,568	7
+35	-	-	0,0061	0,0693	12,747	0,0102	0,612	4
+40	-	-	0,0063	0,0691	12,324	0,0091	0,620	6
+45	-	-	0,0065	0,0704	12,306	0,0092	0,619	4
+50	-	-	0,0067	0,0694	12,145	0,0082	0,631	4
-5	-	-	0,0042	0,0874	14,648	0,0203	0,567	7
-10	-	-	0,0040	0,0873	14,763	0,0214	0,568	5
-15	-	-	0,0038	0,0843	14,514	0,0189	0,569	3
-20	-	-	0,0036	0,0872	14,668	0,0206	0,568	6
-25	-	-	0,0034	0,0859	14,405	0,0160	0,569	3
-30	-	-	0,0031	0,0875	14,683	0,0207	0,568	8
-35	-	-	0,0029	0,0865	14,231	0,0168	0,570	4
-40	-	-	0,0027	0,0876	14,709	0,0209	0,568	5
-45	-	-	0,0025	0,0866	14,641	0,0206	0,568	4
-50	-	-	0,0022	*,****	*,***	,****	,***	*

\* N Nombre d'itérations

\*\* Valeurs élevées de SSE

\*\*\*

\*\*\*\*

\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*

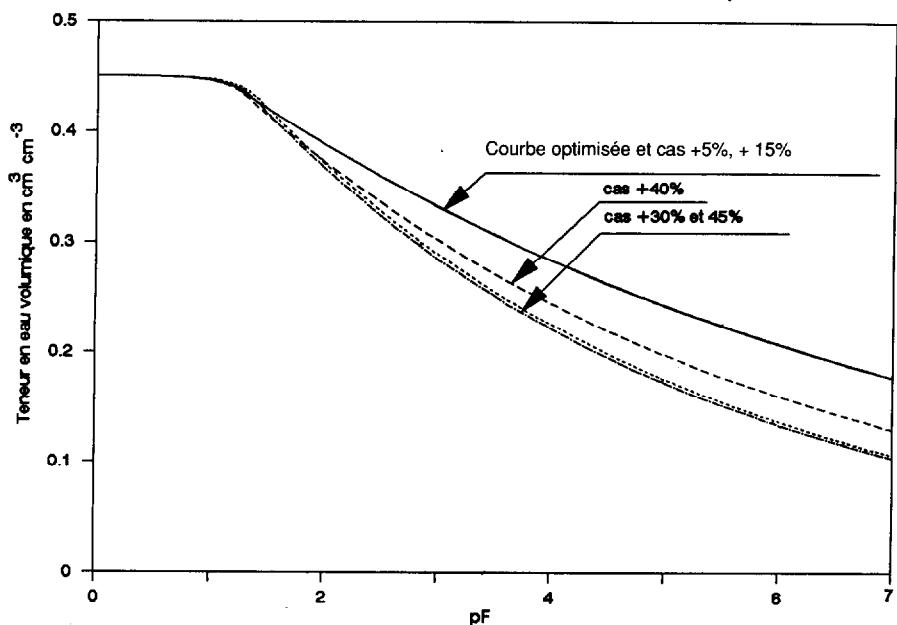


FIG. 7a. – Effet des différentes valeurs initiales assignées au paramètre 1/a sur le résultat final des paramètres optimisés de la fonction  $\theta(h)$  de CAMPBELL, (1974).

Water retention curves corresponding to different values of the final estimates of the Campbell parameters, as affected by perturbations on the initial 1/a parameter values.

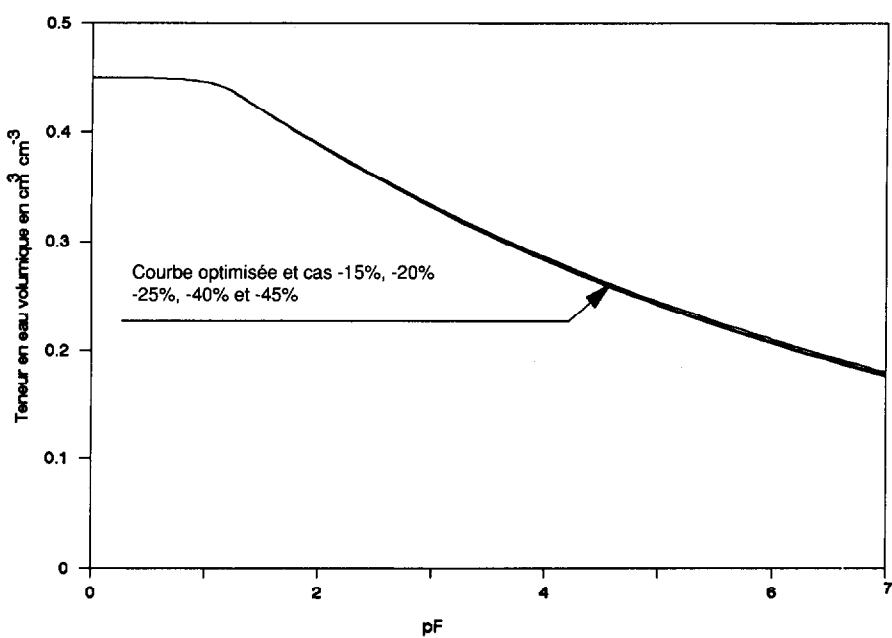


FIG. 7b. – Effet des différentes valeurs initiales assignées au paramètre 1/a sur le résultat final des paramètres optimisés de la fonction  $\theta(h)$  de CAMPBELL, (1974).

Water retention curves corresponding to different values of the final estimates of the Campbell parameters, as affected by perturbations on the initial 1/a parameter values.

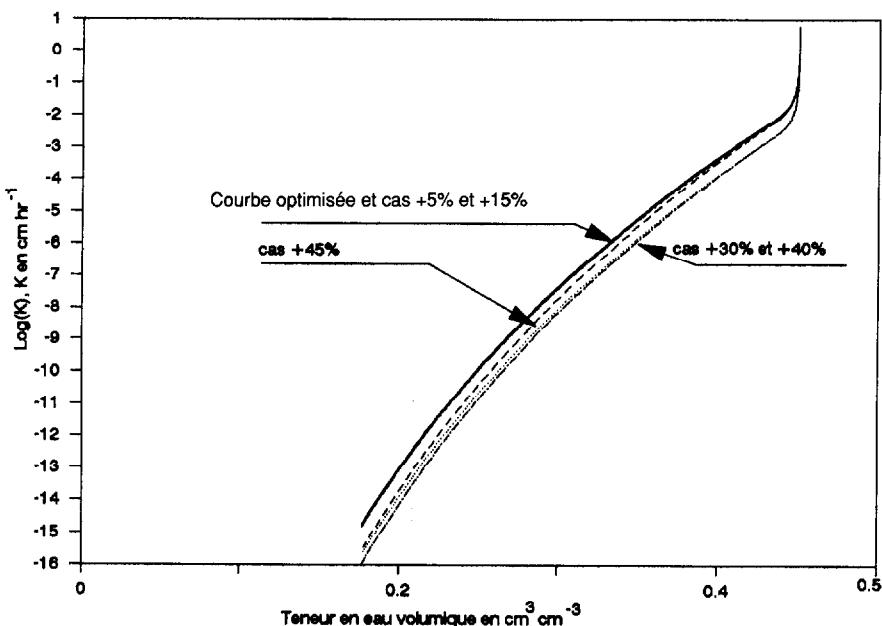


FIG. 7c. – Effet des différentes valeurs initiales assignées au paramètre 1/a sur le résultat final des paramètres optimisés de la fonction K(h) de CAMPBELL, (1974).

*Hydraulic conductivity curves corresponding to different values of the final estimates of the Campbell parameters, as affected by perturbations on the initial 1/a parameter values.*

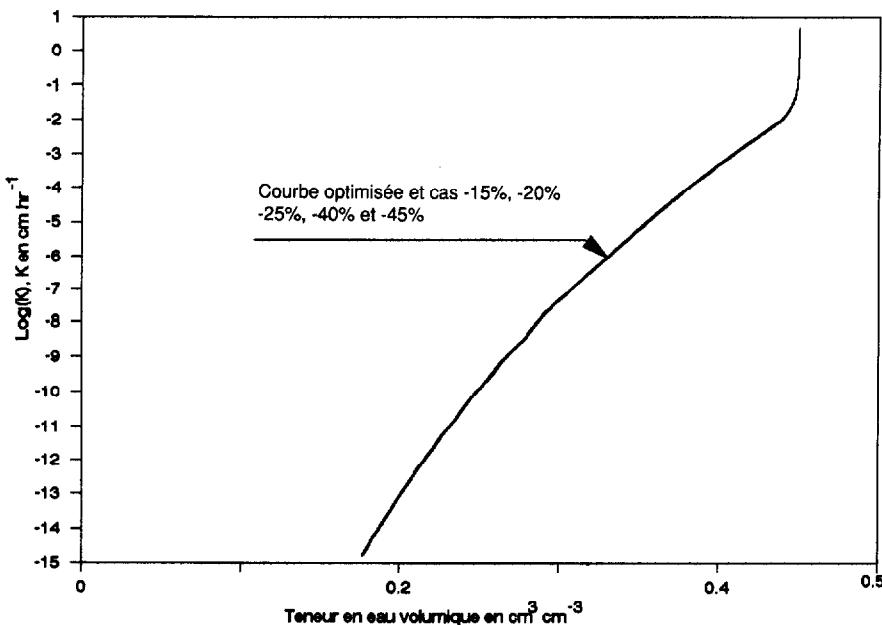


FIG. 7d. – Effet des différentes valeurs initiales assignées au paramètre 1/a sur le résultat final des paramètres optimisés de la fonction K(h) de CAMPBELL, (1974).

*Hydraulic conductivity curves corresponding to different values of the final estimates of the Campbell parameters, as affected by perturbations on the initial 1/a parameter values.*

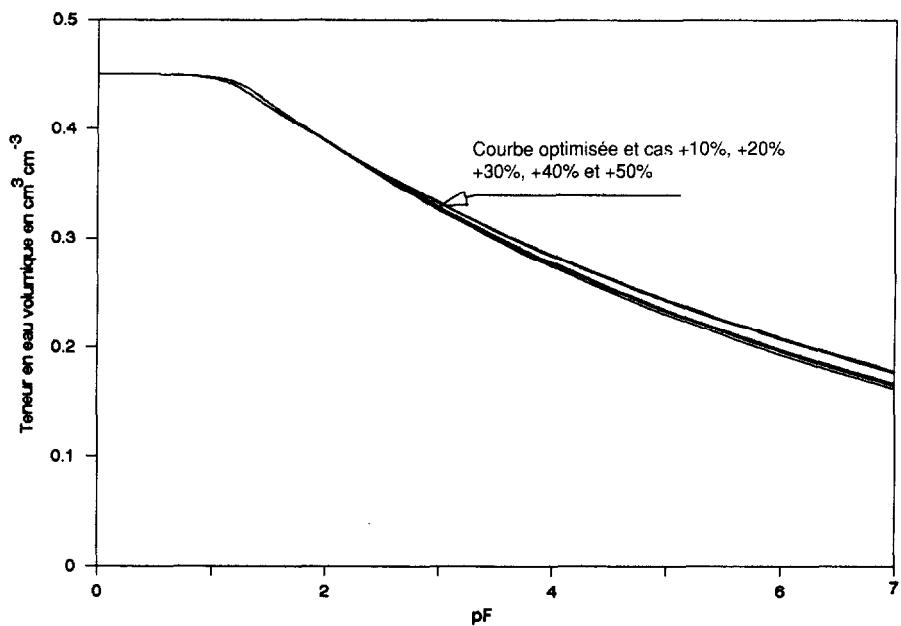


FIG. 8a. – Effet des différentes valeurs initiales assignées au paramètre  $b$  sur le résultat final des paramètres optimisés de la fonction  $\theta(h)$  de CAMPBELL (1974).

Water retention curves corresponding to different values of the final estimates of the Campbell parameters, as affected by perturbations on the initial  $b$  parameter values.

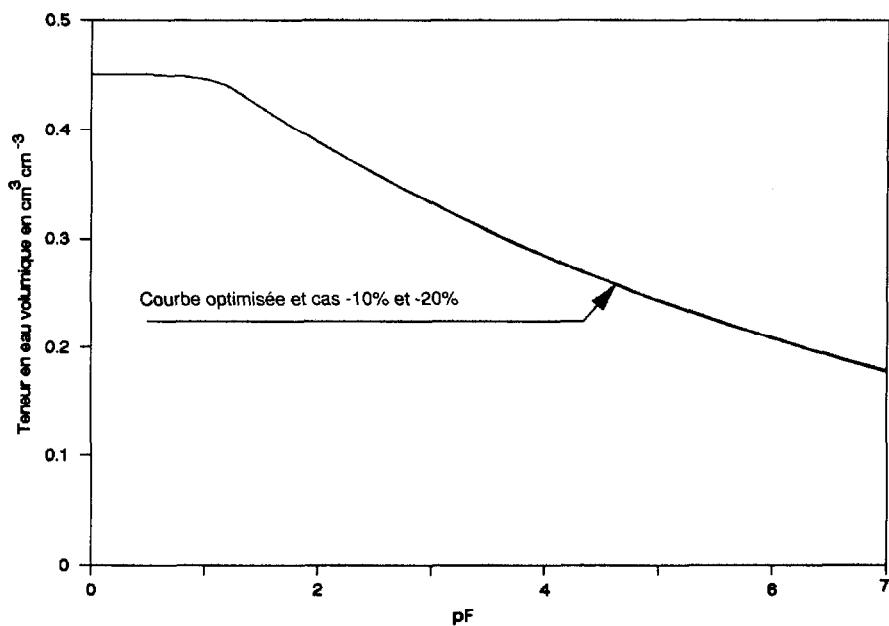


FIG. 8b. – Effet des différentes valeurs initiales assignées au paramètre  $b$  sur le résultat final des paramètres optimisés de la fonction  $\theta(h)$  de CAMPBELL (1974).

Water retention curves corresponding to different values of the final estimates of the Campbell parameters, as affected by perturbations on the initial  $b$  parameter values.

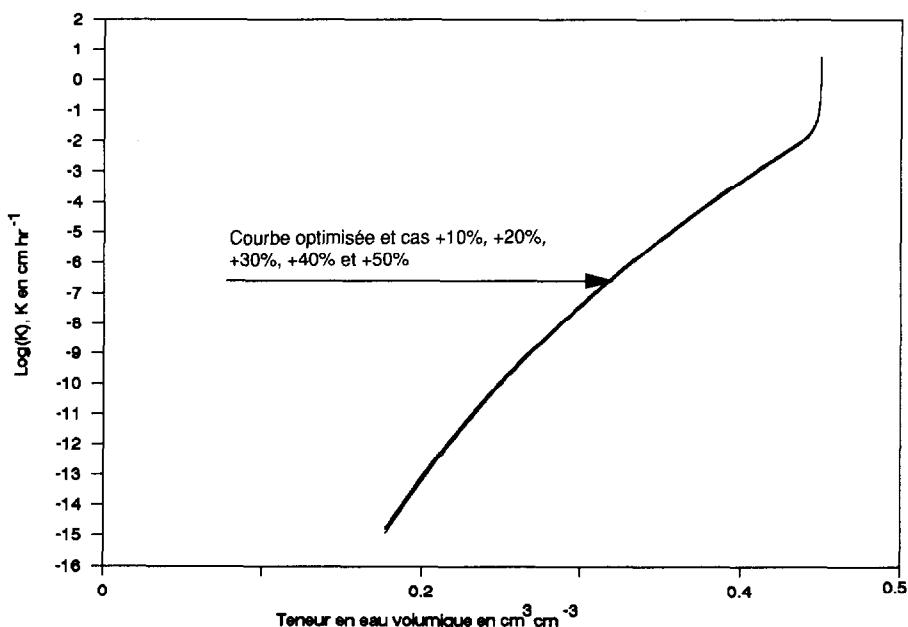


FIG. 8c. – Effet des différentes valeurs initiales assignées au paramètre b sur le résultat final des paramètres optimisés de la fonction K(h) de CAMPBELL (1974).

*Hydraulic conductivity curves corresponding to different values of the final estimates of the Campbell parameters, as affected by perturbations on the initial b parameters values.*

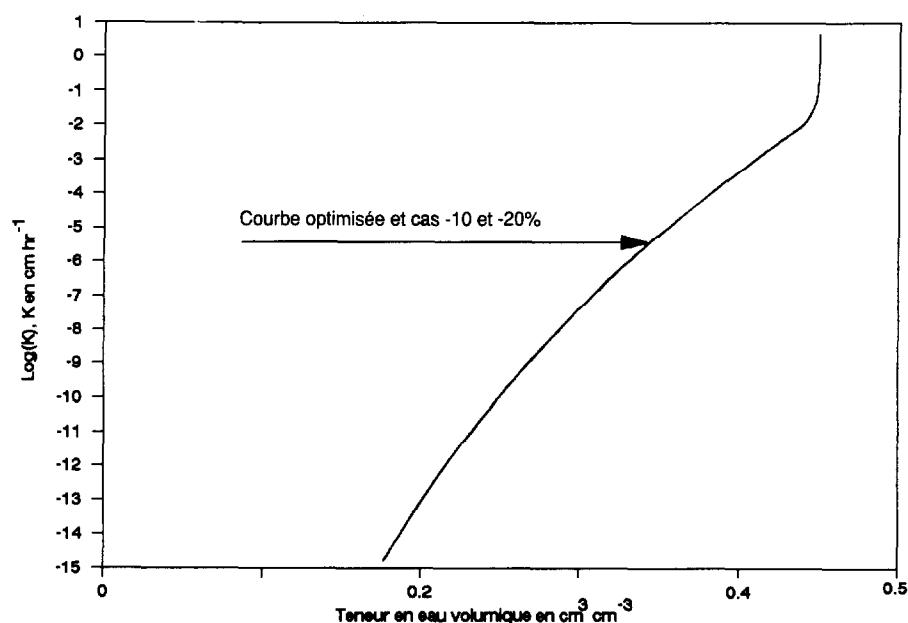


FIG. 8d. – Effet des différentes valeurs initiales assignées au paramètre b sur le résultat final des paramètres optimisés de la fonction K(h) de CAMPBELL (1974).

*Hydraulic conductivity curves corresponding to different values of the final estimates of the Campbell parameters, as affected by perturbations on the initial b parameter values.*

L'observation des figures 7a,d et du tableau III montre qu'une variation de 1/a au-delà de +15 % résulte en d'autres combinaisons optimales de paramètres. Ces combinaisons correspondent à des valeurs élevées de la fonction objective (p.ex., les cas + 20, + 25, + 35 et + 45 % où les valeurs de SSE sont respectivement 5,25, 1,820, 5,247 et 1,58). Les courbes  $\theta(h)$  et  $K(h)$  qui en résultent s'écartent de la courbe optimale. Par ailleurs, une diminution de la valeur de 1/a allant jusqu'à - 45 % est sans effet sur le résultat final. Les courbes  $\theta(h)$  et  $K(h)$  sont toutes confondues à la courbe optimale. Aussi les valeurs de la fonction objective ne présentent pas de différences importantes par rapport à la valeur à l'optimum.

Les figures 8a,d et le tableau IV présentent les résultats relatifs aux variations du paramètre b. Lorsque b est sous-estimé en deçà de - 20 %, la solution ne converge pas, ou la valeur de la fonction objective est élevée ( $> 3$ ) pour prendre en considération le résultat. Une légère dispersion des courbes  $\theta(h)$  aux pF élevés ( $> 3$ ) est remarquée lorsque la variation de b est supérieure à + 30 %. Mais les courbes  $K(h)$  correspondant à toute la

gamme de variation de b (de - 20 à  $\pm 50 \%$ ) sont confondues à la courbe optimale.

Les résultats relatifs aux variations de  $K_s$  sont assignés au tableau V et représentés aux figures 9a,b. Les variations de  $K_s$  supérieures à + 15 % conduisent à différentes combinaisons de (1/a, b,  $K_s$ ) avec des valeurs de (SSE) supérieures à la valeur à l'optimum. Néanmoins, jusqu'à une valeur de + 30 % de variation, les courbes  $\theta(h)$  obtenues sont incluses entre celles qui correspondent aux limites de l'intervalle de confiance pour une probabilité au seuil 0,05, donné par la figure 1.

De cette analyse de l'effet des valeurs initiales des paramètres sur le résultat final, on peut conclure que dans une certaine limite raisonnable de variation (jusqu'à  $\pm 20 \%$ ) la solution de la méthode d'optimisation inverse est univoque.

## CONCLUSION

L'analyse des résultats de l'expérience de drainage à pas de pression multiples constitue un moyen efficace pour la détermination des fonctions

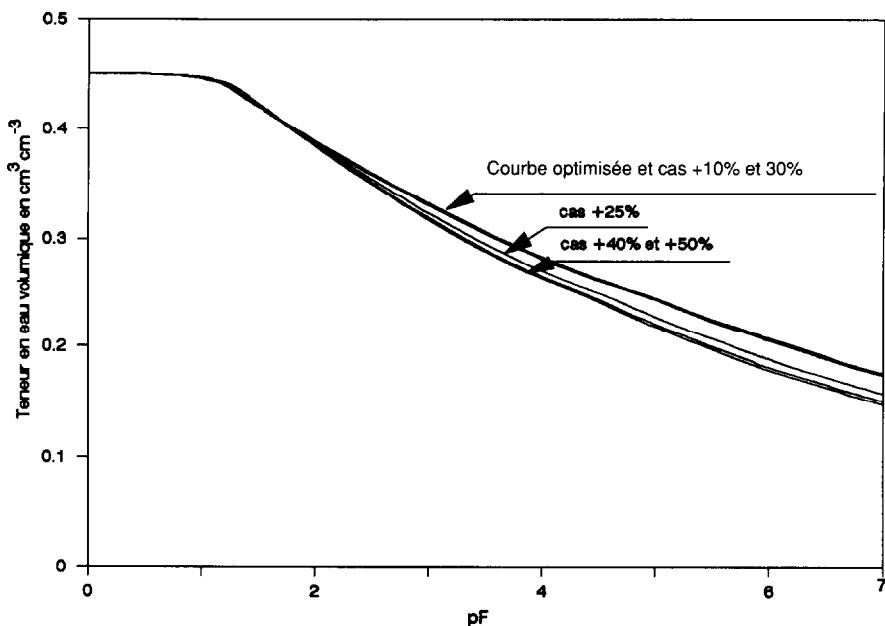


FIG. 9a. – Effet des différentes valeurs initiales assignées au paramètre  $K_s$  sur le résultat final des paramètres optimisés de la fonction  $\theta(h)$  de CAMPBELL (1974).

*Water retention curves corresponding to different values of the final estimates of the Campbell parameters, as affected by perturbations on the initial  $K_s$  parameter values.*

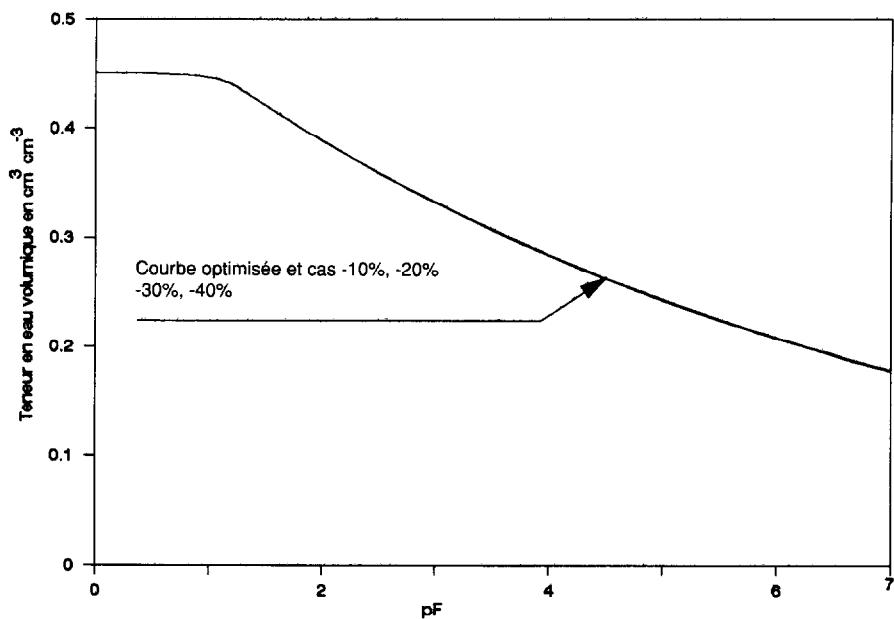


FIG. 9b. – Effet des différentes valeurs initiales assignées au paramètre  $K_s$  sur le résultat final des paramètres optimisés de la fonction  $\theta(h)$  de CAMPBELL (1974).

*Water retention curves corresponding to different values of the final estimates of the Campbell parameters, as affected by perturbations on the initial  $K_s$  parameters values.*

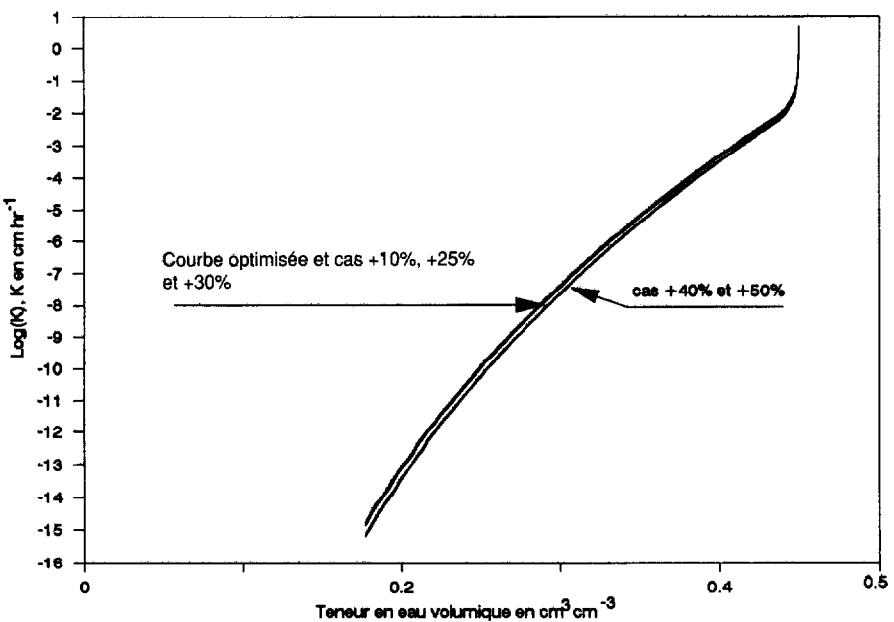


FIG. 9c. – Effet des différentes valeurs initiales assignées au paramètre  $K_s$  sur le résultat final des paramètres optimisés de la fonction  $K(h)$  de CAMPBELL (1974).

*Hydraulic conductivity curves corresponding to different values of the final estimates of the Campbell parameters, as affected by perturbations on the initial  $K_s$  parameter values.*

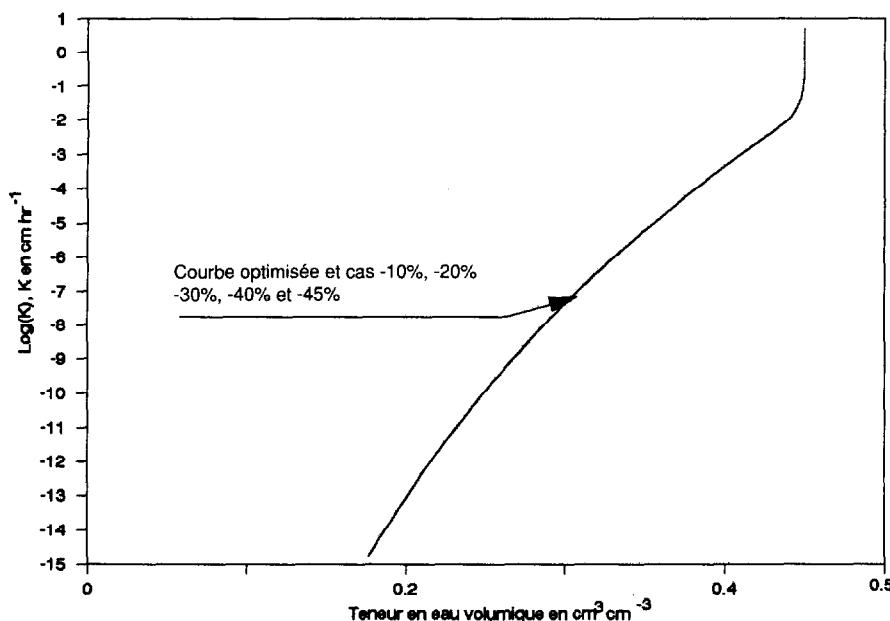


FIG. 9d. – Effet des différentes valeurs initiales assignées au paramètre  $K_s$  sur le résultat final des paramètres optimisés de la fonction  $K(h)$  de CAMPBELL (1974).

*Hydraulic conductivity curves corresponding to different values of the final estimates of the Campbell parameters, as affected by perturbations on the initial  $K_s$  parameters values.*

hydrauliques du sol par la méthode inverse. En effet, cette méthode permet de considérer la gamme des teneurs en eau volumiques allant de la saturation jusqu'à celle correspondant à  $\text{pF } 3$  (la pression d'entrée d'air de la plaque poreuse est de 1 bar). Cette gamme est celle où la plupart des processus de transport d'eau et de solutés prennent place. Au-delà de cette pression, la teneur en eau volumique et surtout la conductivité hydraulique sont faibles pour la majorité des sols. Le modèle de CAMPBELL (1974) décrivant  $\theta(h)$  et  $K(h)$  dans sa version améliorée par HUTSON et CASS (1987) utilisé dans la méthode inverse décrit raisonnablement le processus du drainage du sol étudié. De plus, l'analyse monodimensionnelle et bidimensionnelle de la sensibilité montre que les deux paramètres ( $1/a$  et  $b$ ) sont critiques lorsqu'ils sont sous-estimés. Le paramètre  $1/a$  vient au premier rang lorsqu'on dépasse une variation absolue de - 40 %. Le paramètre  $b$  est dépendant de la conductivité hydraulique à la saturation, ce qui signifie que  $b$  et  $K_s$  varient dans le même sens. L'analyse de la sen-

sibilité de la méthode inverse aux erreurs expérimentales dans les résultats du drainage à pas de pression multiples montre que cette méthode n'est pas sensible aux erreurs allant jusqu'à 10 %. Cependant, des erreurs supérieures ou égales à 15 % entraînent une divergence dans les résultats des paramètres estimés, et parfois la solution ne converge pas.

Les valeurs initiales assignées aux paramètres de  $\theta(h)$  et  $K(h)$  doivent former une combinaison proche de celle représentant les propriétés hydrauliques du sol étudié. En effet l'étude de l'unicité de la solution de la méthode inverse pour les paramètres estimés montre que la solution est unique tant que la combinaison de paramètres choisie au départ est proche de la combinaison optimale du sol étudié. Cette combinaison initiale de paramètres peut être estimée par les modèles de régression utilisant les propriétés physiques du sol.

*Manuscrit accepté par le Comité de rédaction le 17 mars 1994.*

## BIBLIOGRAPHIE

- BADJI (M.), 1984. – *Utilisation de l'eau du sol par une culture (Bracharia Riziensis) en conditions climatiques semi - arides*. Th. de Doct. Nr.125, Faculté des Sciences Agronomiques, K.U.Leuven, 157p.
- BOELS (D.), VAN GILS (J.B.H.M.), VEERMAN (G.J.), WIT (K.E.), 1978. – Theory and system of automatic determination of soil moisture characteristics and unsaturated hydraulic conductivities. *Soil Sci.*, 126 : 191-199.
- BOUMA (J.), 1983. – Use of soil survey data to select measurement technique for hydraulic conductivity. *Agric. Water Manag.*, 6 : 177-190.
- BRÄKENSIEK (D.L.), RAWLS (W.J.), 1983. – Agricultural management effects on soil water processes-part I : Green and Ampt parameters for crusting soils. *Trans. Amer. Soc. Agri. Engin.*, 26 : 1751-1757.
- CAMPBELL (G.S.), 1974. – A simple method for determining unsaturated conductivity from moisture retention data. *Soil Sci.*, 117 : 311-314.
- CLAPP (P.R.), HORNBERGER (G.M.), 1978. – Empirical equations for some soil hydraulic properties. *Water Resour. Res.*, 14 : 601-604.
- DANE (J.H.), HRUSKA (S.), 1983. – In *in situ* determination of soil hydraulic properties during drainage. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 47 : 619-624.
- HUTSON (J.L.), CASS (A.), 1987. – A retentivity function for use in soil-water simulation models. *Journal of Soil Sci.*, 38 : 105-113.
- JACKSON (R.D.), 1972. – On the calculation of hydraulic conductivity. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, 36 : 380-382.
- KLUTE (A.), 1986. – *Method of soil analysis*. Part 1. 2nd ed. Agronomy 9.
- KOOL (J.B.), PARKER (J.C.), VAN GENUCHTEN (M.Th.), 1985. – Determining soil hydraulic properties from one-step outflow experiment : I. Theory and Numerical studies. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 49 : 1348-1354.
- KOOL (J.B.), PARKER (J.C.), VAN GENUCHTEN (M.Th.), 1987. – Parameter estimation for unsaturated flow and transport models. A review. *J. Hydrology*, 91 : 255-293.
- MALLANTS (D.), KIM (D.J.), MEDDAHI (M.), RAMOS (J.), FEYEN (J.) VAN DAM (J.C.), 1992a. – Determination of soil hydraulic properties from multi-step outflow experiments : I. Numerical analyses. (soumis à *Journal of hydrology*).
- MALLANTS, (D.), KIM (D.J.), MEDDAHI (M.), RAMOS (J.), FEYEN (J.), VAN DAM (J.C.), 1992b. – Determination of soil hydraulic properties from multi-step outflow experiments : II. Experimental studies (soumis à *Journal of hydrology*).
- MARQUARDT (D.W.), 1963. – An algorithm for least-squares estimation on nonlinear parameters. *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, 11 : 432-441.
- MILLINGTON (R.J.) QUIRK (J.P.), 1959. – Permeability of porous media. *Nature*, 183 : 383-388.
- MUALEM (Y.), 1976. – A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media. *Water Resour. Res.*, 12 : 513-522.
- NIELSEN (D.R.), BIGGAR (J.W.) ERH (K.T.), 1973. – Spatial variability of field measured soil water properties. *Hilgardia*, 42 : 215-259.
- PARKER (J.C.), KOOL (J.B.), VAN GENUCHTEN (M.Th.), 1985. – Determining soil hydraulic properties from one-step outflow experiments : II. Experimental studies. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 49 : 1354-1359.
- PASSIOURA (J.B.), 1976. – Determining soil water diffusivities from one-step outflow experiments. *Aust. J. Soil Res.*, 15 : 1-8.
- RICHARDS (L.A.), 1931. – Capillary conduction of liquids through porous medium. *Physics*, 1 : 318-333.
- RUSSO (D.), BRESLER (E.), 1981. – Soil hydraulic properties as stochastic processes : I. an analysis of field spatial variability. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 45 : 682-687.
- VAN GENUCHTEN (M.Th.), 1980. – A closed form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 44 : 892-898.
- ZACHMAN (D.W.), DUCHATEAU (P.C.), KLUTE (A.), 1981. – The calibration of the Richards flow equation for a draining column by parameter identification. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 45 : 1012-1015.
- ZACHMAN (D.W.), DUCHATEAU (P.C.) KLUTE (A.), 1982. – Simultaneous approximation of water capacity and soil hydraulic conductivity by parameter identification. *Soil Sci.*, 134 (3) : 157-163.