

UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE

PARIS VI

THÈSE

présentée en vue de l'obtention
du Doctorat de l'Université Paris VI
mention: Sciences de la terre

par

Edith PERRIER

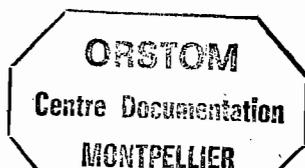
Structure géométrique et fonctionnement hydrique des sols Simulations exploratoires

Soutenue le 16 Mai 1994 devant le jury composé de

G.de MARSILY
M.VAUCLIN
R.LENORMAND
M.RIEU
C.MULLON
R.ALT
G.PEDRO
B.MANDELBROT

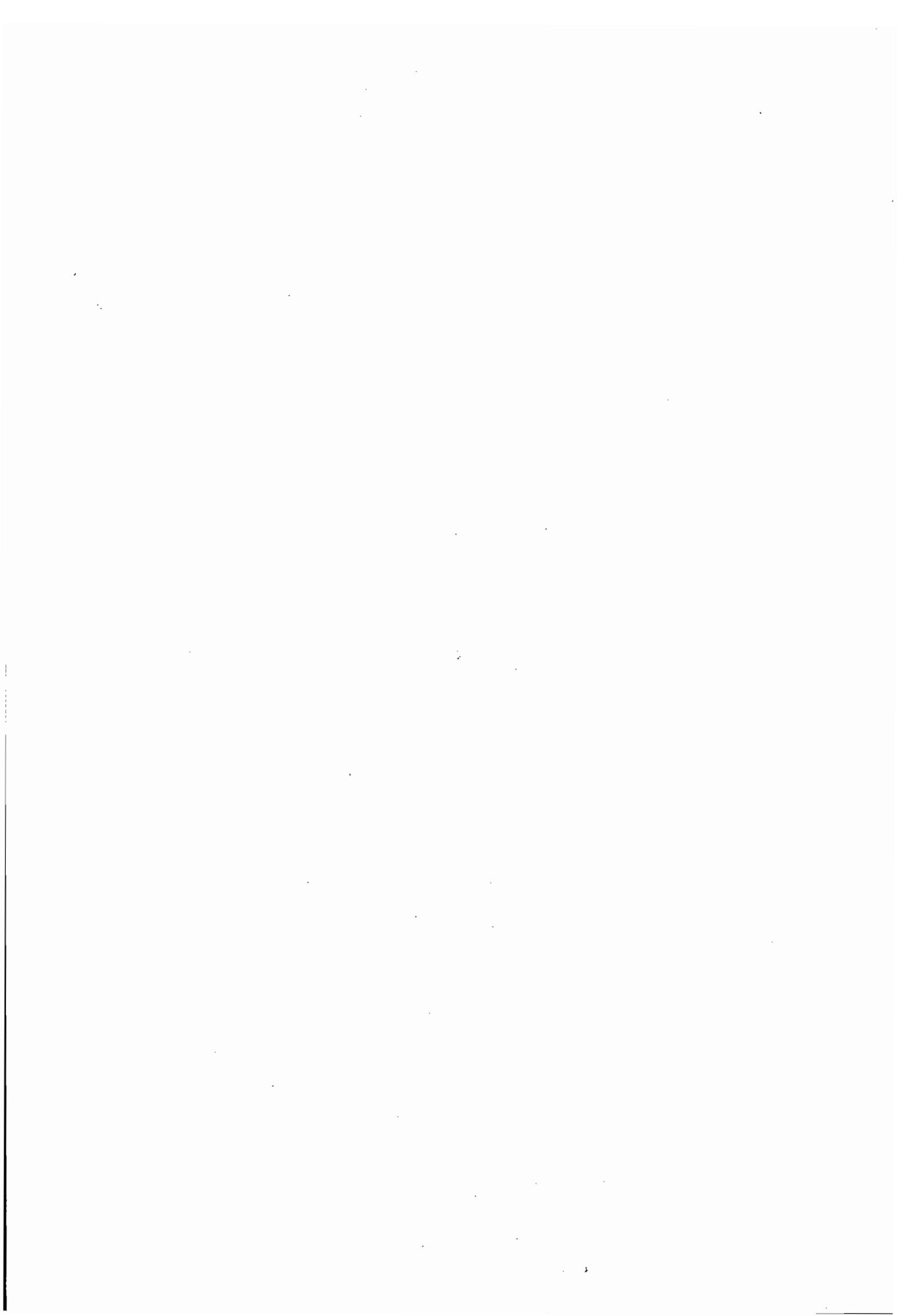
Président
Rapporteur
Rapporteur
Examineur
Examineur
Examineur
Examineur
Examineur

18 MAI 1995



068
PROSOL
PER

h2 74118
2er Body FA
F 41.271 ✓



REMERCIEMENTS

Je remercie Mr de Marsily, Professeur à l'Université Paris VI, pour m'avoir offert le meilleur encadrement de thèse que je pouvais souhaiter. Pour l'intérêt qu'il a bien voulu accorder à mon travail, pour ses conseils clairs et ses questions constructives, pour ses corrections approfondies, pour la motivation qu'il sait inspirer, je lui exprime ici toute ma reconnaissance.

A Michel Rieu, Directeur de Recherches à l'ORSTOM, je dois tant! Depuis mon intégration à l'ORSTOM comme ingénieur en 1987, il m'a constamment soutenue et dirigée tout en me laissant une grande liberté. C'est ensuite grâce à lui que j'ai pu effectuer les travaux présentés. Parce que mon sujet de recherche est aussi le sien, j'ai eu le plaisir de beaucoup travailler avec lui. La pertinence de ses conseils de pédologue et de modélisateur, ainsi que les longues heures qu'il m'a accordées aux difficiles moments de la rédaction, m'ont beaucoup appris et encouragée.

Je remercie aussi Christian Mullon, Directeur de Recherches à l'ORSTOM, qui m'a beaucoup apporté tant sur le plan des idées que sur les méthodes de travail. J'ai amplement bénéficié et surtout aux débuts de ce projet de recherche, de son aide scientifique et amicale, et des réponses éclairées qu'il a données aux nombreuses questions que je n'ai cessé de lui poser .

Mr Lenormand, Ingénieur de Recherches à l'Institut Français du Pétrole, et M. Vauclin, Directeur de Recherches CNRS à l'Institut de Mécanique de Grenoble ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Je les remercie tous deux vivement pour leurs critiques averties.

Je remercie aussi Mr Pedro, Directeur de Recherches à l'INRA, et Mr Alt, Professeur d'informatique à l'Université Paris VI, d'avoir bien voulu participer au jury de cette thèse. Leur présence témoigne du double aspect de mon travail: en effet c'est d'abord un sujet de recherche en pédologie auquel je me suis intéressée et que je développe dans ce mémoire, mais une part essentielle de mon activité a été consacrée à la mise au point de programmes de simulation.

Je suis particulièrement sensible à l'honneur que me fait Mr Mandelbrot, en acceptant de faire partie de mon jury, et je lui témoigne ici la vive admiration que j'ai, comme tant d'autres, pour ses travaux sur les fractales.

C'est à toute l'équipe du groupe Hydrophysique de l'ORSTOM que j'adresse mes remerciements, pour m'avoir considérée comme des leurs malgré les distances géographiques plus ou moins grandes qui me séparent du Laboratoire d'Hydrophysique des Sols de Bondy et du Laboratoire de Science du Sol de Dakar: à Erik Braudeau, qui a passé tant de temps à m'expliquer ses convictions sur le comportement des sols déformables, et à Pascal Boivin, pour nos nombreuses discussions, son constant appui scientifique et amical, je renouvelle ici mon amitié. Je remercie également J.M. Iris, en souvenir de notre étroite collaboration à mes débuts en hydrophysique, C. Valentin, qui m'a permis de travailler dans de bonnes conditions, M. Grimaldi pour ses encouragements, G. Bellier, pour tous les visiteurs qu'il m'a amenés, ... et tous les pédologues, chercheurs confirmés ou compagnons de thèse qui ont de près ou de loin témoigné de l'intérêt pour mes travaux.

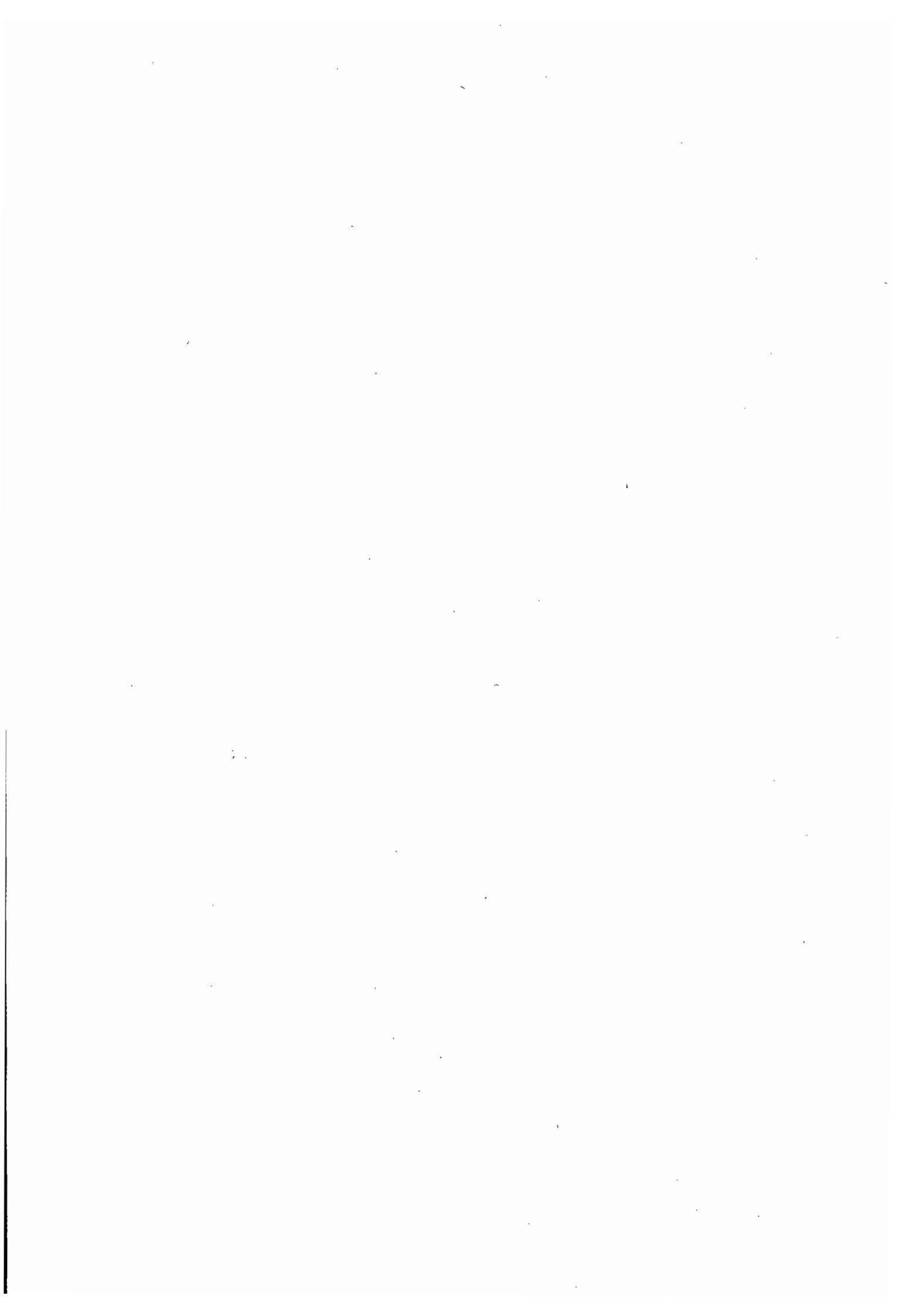
Mon travail a été effectué au Laboratoire d'Informatique Appliquée de l'ORSTOM. J'y ai rencontré chaque jour, des scientifiques passionnés, de chaleureuses amitiés, et malgré la grande diversité des thématiques étudiées, tant de points communs, tant de sujets de discussion sur la modélisation ou la programmation, sur les grands espoirs ou les états d'âmes des "simulateurs" de tous horizons. A Gaston, puis Jean-Pierre, mes "coturnes", pour avoir tant de fois interrompu leur travail pour participer au mien, à Dominique pour avoir partagé mes casses-têtes de programmation, à François en souvenir de nos thèses partagées, à Christophe C. pour ses rappels à la raison, à Christophe L. pour ses relectures, à Marie pour avoir suivi amicalement toutes les étapes de cette aventure, à toute l'équipe de la MTI et à tous ceux qui ont supporté mes images monotones de polygones et mes occupations de machines, merci.

Je remercie mon père pour m'avoir fait faire tous mes travaux pratiques sur "l'eau et le sol" et ma mère pour m'avoir, la première, enseigné la géométrie.

Enfin je te remercie, Michel, parce que je t'ai rendu la vie difficile et parce que tu m'as attendue malgré tout, durant ces mois de rédaction qui n'en finissaient pas .

*à nos enfants chéris
Vincent, Lucie, Thibault.*

INTRODUCTION



INTRODUCTION

Bien que la structure d'un sol soit considérée comme déterminante pour son fonctionnement hydrique, il semble difficile d'établir des liaisons quantitatives rigoureuses entre deux volets (caractérisation structurale, caractérisation hydrodynamique) que l'on ouvre généralement de façon séparée dans une étude pédologique. Il serait pourtant d'un intérêt majeur de pouvoir mieux prévoir les écoulements d'eau dans le sol à partir d'observations et de mesures simples de structures.

Deux axes de recherche du groupe hydrophysique de l'Orstom conduisent actuellement à de nouvelles mesures de structure: l'un relève de l'utilisation de la géométrie fractale (Chap.2), l'autre de l'étude des déformations de structure (Chap.1). Ils suscitent un renouveau de la notion de structure, en dépassant une approche jusqu'ici essentiellement qualitative.

Dans le cadre de l'unité modélisation de l'environnement du laboratoire d'informatique appliquée de l'Orstom, où l'on s'intéresse à la simulation de milieux naturels complexes dans des domaines très divers, nous avons décidé de rechercher des méthodes de représentation de structures de sols permettant d'intégrer les connaissances acquises par l'observation et les mesures des pédologues, puis d'explorer par simulation leur comportement hydrique.

Citons Matheron (1967) sans pour autant vouloir nous situer au niveau extrêmement théorique de ses travaux: *"On ne sait pas encore rattacher de façon précise la perméabilité d'un milieu poreux aux granulométries qui expriment ses caractères géométriques. Mais on ne doit pas pour autant vouer ces études à un empirisme définitif". "Mis en face de la réalité d'un milieu poreux, l'esprit peut s'effrayer d'abord de la tâche à entreprendre. Ces millions de grains et la variété inépuisable de leurs formes et de leurs dimensions, le réseau compliqué de leurs interstices, où mille détours possibles s'offrent au cheminement d'un fluide, semblent défier les ressources de la description (...) La raison empirique (...) élabore la multiplicité informe qui lui est donnée, lui impose ses propres cadres, et se construit ainsi un objet sur lequel elle peut agir et qu'elle peut étudier."*

PLAN

La **première partie** de ce mémoire (Chap.1, 2, 3) consiste à préciser le problème qui nous est posé par les chercheurs en science du sol et à inventorier les méthodologies existantes qui tentent de le résoudre. Elle consiste essentiellement en une réflexion et une revue bibliographique sur:

- d'une part différentes caractérisations de la structure en science du sol (Chap.1), et en particulier sur l'utilisation des principes de la géométrie fractale pour modéliser des structures de sol (Chap.2);
- d'autre part les modèles hydrodynamiques permettant de prendre en compte la structure d'un milieu poreux (Chap.3).

La **deuxième partie** (Chap.4) présente l'approche originale que nous avons suivie pour construire des modèles de structures poreuses qui tiennent compte de l'organisation géométrique spécifique du sol. Le sol y est représenté comme un ensemble d'objets géométriques individualisés, des éléments solides et des pores formant un assemblage hiérarchisé et déformable.

La **troisième partie** (Chap.5, 6, 7, 8) est consacrée à notre recherche d'hypothèses simples de fonctionnement qui puissent rendre compte qualitativement de propriétés hydriques et de déformation observées. Nous y présentons un certain nombre d'expériences effectuées sur les structures simulées et nos principaux résultats concernant trois courbes caractéristiques du comportement hydrique du sol (courbe de pression/teneur en eau, Chap.5, courbe de volume/teneur en eau, Chap.6, courbe de conductivité hydraulique/teneur en eau, Chap.7) que nous avons cherché à reproduire. Tout au long de cette étude, nous nous sommes particulièrement intéressés à des modèles de structures fractales. Recherchant dans quelle mesure la détermination d'une dimension fractale sur un sol permet de prédire ses caractéristiques hydriques ou vice-versa, l'accent est mis sur la modélisation de la courbe de pression/teneur en eau, à propos de laquelle nous présentons une analyse comparative de plusieurs approches théoriques de la fractalité des sols (Chap.8).

PREMIÈRE PARTIE

CADRE DE LA RECHERCHE ET REVUES BIBLIOGRAPHIQUES



CHAPITRE 1. CADRE DE LA RECHERCHE: CARACTÉRISATION STRUCTURALE ET CARACTÉRISATION HYDRODYNAMIQUE EN PÉDOLOGIE

1.1 CARACTÉRISATION DE LA STRUCTURE DES SOLS

1.1.1 Notion de structure en science du sol

Toute étude de sol commence par une reconnaissance de sa structure. La pédogenèse, longue histoire d'un sol issu de fragmentations et altérations successives de la roche mère ou de dépôts sédimentaires, ainsi que l'observation, enseignent que ce milieu est naturellement structuré, et ceci à toutes les échelles, qu'il s'agisse des grandes unités structurales dans un paysage, des "horizons" ou différents volumes pédologiques observés sur un profil vertical, de la décomposition de mottes de terre en agrégats ou même de l'arrangement géométrique des particules les plus fines dans des agrégats argileux. La première approche du pédologue est toujours naturaliste et vise à repérer le type d'organisation du sol, à définir des unités structurales apparemment homogènes, à en décrire la morphologie et l'assemblage.

Les constituants élémentaires du sol sont des particules solides dont la distribution en différentes classes de tailles (argiles, limons, sables, Fig.1.1) définit la texture du sol et sert de base à une classification des sols (sable limoneux, limon argileux...etc).

Argile	Limon	Sable		Gravier
		Fin	Grossier	
0.002	0.02	0.2	20	Diamètre des particules en mm

Figure 1.1. Texture des sols et taille des particules primaires (Classification de la société internationale de science du sol)

La structure* est l'arrangement géométrique de ces éléments solides dans le sol en place. Hillel (1982) note à ce propos: "Since soil particles differ in shape, size, and orientation, and can be variously associated and interlinked, the mass of them can form complex and irregular configurations which are in general exceedingly difficult if not impossible to characterize in

* Le langage pétrographique inverse la signification des mots texture et structure.

exact geometric terms". Il distingue, tout comme Hénin (1976) trois grandes catégories de structures, les structures à éléments particulières, les structures massives (ou continues) et les structures agrégées (ou fragmentaires):

- Une structure "particulaire" correspond à un assemblage lâche de particules totalement séparées les unes des autres, et l'on parle parfois abusivement de sols sans structure. C'est le cas par exemple des sables purs.

- La structure est "massive" ou "continue" lorsque les particules sont fortement liées en blocs cohésifs de grandes dimensions. C'est le cas par exemple d'une argile très sèche qui forme des blocs rigides que l'on peut considérer comme des fragments à une échelle supérieure. Entre aussi dans ce cadre le cas d'une argile très humide dont la structure "continue" devient boueuse ou "fondue".

- Entre ces deux extrêmes se trouve le type de sol jugé le plus favorable pour la croissance des plantes: sa structure "fragmentaire" se caractérise par la présence de regroupements plus ou moins stables de particules en agrégats de différentes formes et tailles. C'est le cas pour de nombreux sols, dès qu'une certaine quantité d'argile est présente.

La notion de structure des sols est étroitement liée à celle d'agrégats dont la création ou la destruction peuvent être expliquées par plusieurs facteurs physico-chimiques; la recherche de ces facteurs est source de nombreuses études sur la régénération ou la dégradation de la structure (par exemple Russel, 1971). La forme (anguleuse, arrondie, ...) et la taille des agrégats permettent d'affiner la description de la structure (Fig.1.2). On parle de structure granulaire, cubique, prismatique, colonnaire, polyédrique, lamellaire...etc (Nikiforoff, 1941). Les observations effectuées à l'oeil nu s'accompagnent d'études micromorphologiques de sections de sol (des lames minces) à différents degrés de résolution. Tout un vocabulaire spécifique est développé (Brewer, 1964); il est adapté à une description détaillée (par exemple, Chrétien, 1986, Fiès et Stengel, 1984) de l'assemblage des particules fines ou "plasma", apparemment continu à certains degrés de résolution, et de sa répartition spatiale autour du "squelette" formé par des particules plus grossières et bien identifiables .

L'observation de la structure à différentes échelles révèle très souvent plusieurs niveaux d'agrégation, et l'usage de différents synonymes d'agrégats (particules secondaires, grumeaux, agglomérats, micro-peds, peds,...) inclut une certaine connotation d'échelle. L'ensemble des agrégats est parfois décrit comme un système hiérarchique (Kornblyum, 1975, Oades et Warters, 1991). Au mot agrégat dans le Dictionnaire de science du sol (Lozet et Mathieu, 1990) correspondent la figure 1.2 et la définition suivante: "L'agrégat primaire est le plus simple du

matériau pédologique; il ne peut être divisé en agrégats plus petits mais il peut être arrangé avec d'autres pour former des agrégats composés d'un niveau plus élevé d'organisation".

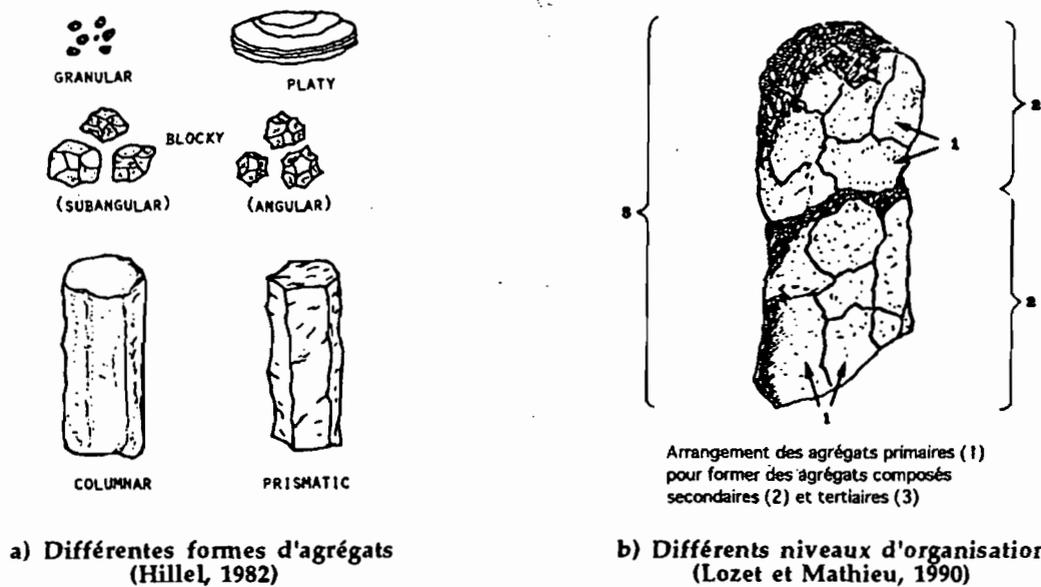


Figure 1.2. Représentation schématique d'agrégats.

Pour Hénin (1976), "il est évident qu'une connaissance cohérente de l'état physique du sol implique que l'on puisse rattacher entre elles les notions de texture, d'assemblage élémentaire et même de structure".

Par ailleurs la structure du sol se définit parfois aussi comme le complémentaire de la phase solide. Les pores ou cavités ménagées entre les solides peuvent être observés à l'oeil et essentiellement en micromorphologie. On distingue ainsi différentes sortes de pores, des lacunes interparticulaires, des cavités irrégulières apparemment isolées, des alvéoles reliées par des chenaux cylindriques, des fissures planaires...etc (par exemple, Ringrose-Voase et Bullock, 1984). Ces pores sont occupés par de l'air, de l'eau (ou d'autres fluides, des solutés, de la matière organique, des racines, des vers de terre...etc). D'un point de vue strictement structural, on parle souvent, abusivement, des "vides" du sol.

Le terme de structure regroupe en général ces différents aspects, ou encore l'ensemble des propriétés géométriques, topologiques, morphologiques de l'ensemble des éléments solides et des pores. La description de la structure des sols est donc essentiellement qualitative; elle est assortie d'une nomenclature riche et non universelle qui met en lumière la complexité et la diversité des organisations naturelles. Il est cependant possible d'effectuer un certain nombre de mesures.

1.1.2 Mesures structurales disponibles.

Nous ne donnons ici qu'un simple aperçu des différents types de mesures, sachant bien que chaque point recouvre un large domaine de réflexions méthodologiques, de développements techniques, et de difficultés opératoires spécifiques. Pour une revue, on peut consulter Low(1954) ou Coleuille(1993).

Certains indicateurs globaux de structures couramment mesurés sont: la densité* moyenne de la phase solide (masse des solides/volume des solides), la densité apparente à l'état sec (masse des solides/volume des solides et des vides), la porosité totale (volume des vides/volume des solides et des vides)...etc (par exemple Monnier et al, 1973).

En ce qui concerne la mesure des éléments structuraux eux-mêmes, citons trois axes principaux.

- Mesures destructives et distributions des éléments solides du sol.

L'identification des éléments solides du sol suppose la rupture des liaisons qui assurent la cohésion de ces éléments en un assemblage structuré. Différentes techniques de dispersion des éléments solides existent (vibrations mécaniques ou soniques, désagrégation à l'eau ou avec des solvants organiques tels que divers alcools, ...etc). Dans le cas d'une séparation ménagée, on isole ainsi des agrégats ou des éléments grossiers. La séparation peut aussi être poussée jusqu'au stade ultime des particules primaires du sol. Les résultats dépendent en partie du mode opératoire, en particulier en ce qui concerne les agrégats, qui sont plus ou moins stables suivant la durée, l'intensité et le type de fragmentation imposés.

On procède alors à une granulométrie des éléments individualisés, c'est-à-dire un tri par tamisage (ou par calcul de vitesse de sédimentation pour les éléments les plus fins), qui permet de déterminer la distribution de la masse des éléments solides en différentes classes de taille.

La granulométrie des particules primaires (analyse mécanique) est pratiquée très couramment (on a vu qu'elle servait de base pour la classification texturale des sols) et les granulométries d'agrégats assez couramment déterminées.

- Mesures non destructives mais indirectes de la distribution des pores.

On peut avoir un accès indirect à la structure du sol par des mesures relatives aux fluides remplissant les vides du sol. C'est ainsi qu'en représentant schématiquement les pores du sol par un ensemble de tubes cylindriques de différentes tailles et en se basant sur un modèle capillaire simple (cf. Chap.3), on suppose que la quantité d'eau (mesurable) retenue dans le sol

* "La densité du matériau sol est définie en pédologie comme une masse volumique.

à une pression h (mesurable) correspond au volume des pores de taille inférieure au rayon $r(h)$ donné par la loi de Laplace (cf.annexeA). On en déduit une distribution de tailles de "pores équivalents". Le nombre de classes dépend du nombre de mesures (teneur en eau, pression de l'eau) qui peuvent éventuellement se réduire à deux points structurellement stratégiques (Thomasson, 1978). On peut mesurer de même la fraction de la porosité envahie par d'autres fluides: la porosimétrie au mercure fournit ainsi en routine des distributions de tailles de pores couramment utilisées pour caractériser ou suivre l'évolution de la structure des sols (par exemple, Fiès, 1992). Il est par ailleurs admis que les mesures de tailles obtenues correspondent plus à la taille des cols ou passages étroits de la porosité qu'aux ouvertures maximales de chaque pore (par exemple, Vachier et al, 1979).

- Mesures directes et non destructives en deux dimensions.

L'analyse d'images de lames minces (fines sections de sol) ou ultraminces donne accès à des mesures de forme et de surface des vides et des solides (par exemple, Bartoli et al, 1991). Différents algorithmes de traitement d'images numérisées permettent de calculer des indices de formes, la surface ou le périmètre des pores, le nombre de pores par unité de surface ou d'estimer des tailles moyennes d'ouverture des pores. On étudie parfois une série de coupes très rapprochées afin de calculer des indicateurs de la topologie réelle de l'espace poral (Dullien, 1991, Scott et al, 1988a et b)

- Echelle des mesures.

Ces différentes mesures sont complémentaires et elles sont souvent utilisées en parallèle dans l'étude d'un sol donné. Chacune d'elles privilégie une échelle d'observation. En analyse d'images l'échelle est imposée par les moyens de prise de vue (photographie ou macrophotographie à l'échelle du dm au mm, microscope électronique à transmission (de 1nm à 10 μ m) ou à balayage (de 1 μ m à 100 μ m) et par le degré de résolution choisi (Bartoli et al, 1991). En porosimétrie au mercure, la taille de l'échantillon est de l'ordre du cm³ et celle des pores équivalents varie entre 3,5 nm et 80 μ m. La taille des agrégats définis par une méthode de fractionnement donnée est bornée par la taille des échantillons utilisés (de millimétrique à décimétrique). Plusieurs auteurs (Oades et Warters, 1991, Perfect et Kay, 1991) montrent que pour certains sols les agrégats issus d'un premier fractionnement peuvent être redécomposés en sous-agrégats en augmentant l'intensité de la technique de séparation et ainsi de suite sur plusieurs niveaux avant d'atteindre le stade des particules primaires. La distribution d'agrégats est alors fonction de l'échelle associée à une énergie de fragmentation. Les mesures de porosité totale elles-mêmes ne sont pas

* Sous le terme pression, nous nous référons dans tout ce mémoire à la pression capillaire à l'interface eau-air $h = \text{pression}(\text{air}) - \text{pression}(\text{eau})$, c'est-à-dire à l'opposé de la pression de l'eau proprement dite si l'air est supposé à une pression atmosphérique nulle. En milieu non saturé, il s'agit d'une valeur positive que l'on nomme aussi succion.

indépendantes de l'échelle de mesure et il arrive souvent que la porosité augmente avec la taille de l'échantillon (Monnier et al, 1973). Les caractérisations fractales de la structure des sols (Chap.2) cherchent à établir un lien entre des mesures effectuées à différents niveaux d'observation.

1.1.3 Déformabilité de la structure.

- Modifications de structure.

La structure des sols est évolutive et peut être modifiée par toutes sortes de facteurs: état hydrique, travail humain, charge des engins, plantations, faune du sol, présence de matières organiques ou chimiques...etc.

Les déformations sont bien étudiées en mécanique des sols (Costet et Sanglerat, 1981), essentiellement les tassements sous l'effet d'une charge mécanique appliquée à la surface du sol. La diminution du volume total d'un échantillon de sol saturé d'eau et drainé est une fonction de la pression mécanique appliquée, et se représente sous forme de courbes oedométriques qui dépendent du type de sol. La structure des sols est plus ou moins modifiée par un compactage suivant l'état hydrique auquel il a lieu (Grimaldi, 1986a, montre que les modifications concernent tous les niveaux d'organisation structurale).

En conditions naturelles, les modifications de structure sont en grande partie dues aux variations climatiques: le sol gonfle en période humide et se rétracte en période sèche. Ceci est particulièrement sensible dans le cas des sols argileux, la porosité correspondant à l'assemblage des particules argileuses présentant des capacités de retrait-gonflement à l'eau très importantes pour la plupart des argiles (par exemple, Tessier et Pedro, 1984). Si les sables purs sont considérés comme indéformables, même un sol dit sableux, mais comportant une faible proportion d'argile, subit des modifications de structure avec la teneur en eau. "La distribution de taille des pores varie, et ce même si la porosité totale ne varie pas" dit Hénin (1976). Ceci complique toute tentative de mesure de la structure dans un sol dit "gonflant". Certaines mesures sont effectuées pour des raisons techniques à l'état sec (analyse d'images, porosimétrie au mercure). Différents procédés permettent de déshydrater des échantillons humides sans trop modifier leur organisation et d'obtenir des mesures structurales dans des conditions d'humidité données (de tels procédés sont utilisés par Grimaldi, 1986a, Mapangui, 1991, Newman et Thomasson, 1979), mais leur usage reste délicat.

- Etude du gonflement et du retrait en fonction de la teneur en eau.

D'un point de vue qualitatif, l'allure des fentes de retrait superficielles provoquées par le dessèchement des sols très gonflants est observable à l'oeil nu par tout promeneur attentif. L'orientation, la densité et la connectivité du réseau de fissures planaires se développant en profondeur dans un sol argileux est étudiée par Scott et al (1986, 1988a, 1988b) sur des sections de quelques centimètres carrés. L'étude se limite aux fissures de largeur supérieure à 60 μ m discernables par macrophotographie et comptage. Les auteurs distinguent un premier réseau de fissures approximativement parallèles dans une direction privilégiée variable suivant les sols, auquel se superpose un deuxième réseau isotrope formé par des fissures plus fines. La mesure du nombre et de l'espacement des fissures interceptées par des segments rectilignes permet de conclure à une distribution poissonnienne de fissures dans le plan. La connectivité est estimée à partir de plusieurs sections rapprochées comme le nombre moyen de chemins reliant deux points quelconques de l'espace poral accessible.

La dynamique du retrait est étudiée par Hallaire (1988a,b) au moyen d'un suivi photographique d'échantillons argileux se desséchant; elle est décrite par une première étape de fissuration fine et régulière à tendance horizontale, propice à la circulation de l'eau, puis une "prise en masse" de l'ensemble générant de larges fissures verticales séparant des blocs compacts.

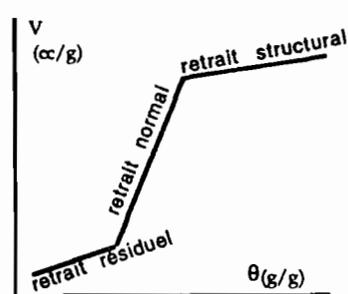
A l'échelle microscopique, c'est la déformation d'une argile pure qui peut être observée en microscopie électronique; différentes argiles se différencient par le type d'assemblage des particules qui permet plus ou moins bien les réorganisations géométriques (Tessier et al, 1980a).

La compréhension des mécanismes physiques des processus de gonflement/retrait se situe à cette échelle, où les variations de l'espace poral saturé d'eau séparant d'innombrables feuillettes d'argile (de l'ordre du nm) peuvent être reliées à des mesures de pression osmotique, ou de pression de gonflement (Low, 1987), ou de pression capillaire (Tessier 1980b).

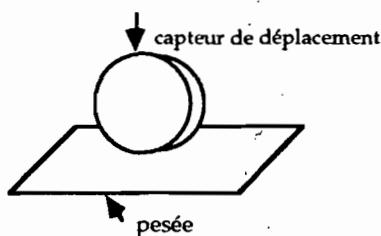
Sans préjuger de la nature des contraintes hydriques, l'étude quantitative de la déformation des sols débute avec Haines (1923) et se ramène essentiellement à l'expression de la relation reliant le volume d'un élément de sol à sa teneur en eau (volume total de sol et volume d'eau rapportés à une référence constante, la masse de l'élément de sol à l'état sec): c'est la courbe de retrait qui est principalement étudiée. L'élément de sol peut être, sur un profil vertical, une couche de sol d'épaisseur donnée dont on suit les déplacements verticaux par rapport à une tige de référence ancrée en profondeur (Hallaire, 1987b, Brownswijk, 1991, Coquet, 1994), ou bien le volume de sol de plusieurs mètres cubes contenu dans un lysimètre (Mitchell et van Genuchten, 1992), ou un échantillon structuré de taille centimétrique à décimétrique prélevé sur le terrain (Hallaire, 1987b, Braudeau, 1988c, Bruand, 1986), ou un massif d'agrégats argileux reconstitué (Chang et

Warkentin, 1968, Grimaldi et Tessier, 1986b), ou encore un volume d'argile pure extraite du sol (Haines 1923, Tessier, 1984) *. Suivant les conditions expérimentales, le volume est directement mesuré, ou bien calculé à partir de déplacements de l'élément de sol dans une direction donnée, généralement verticale, en supposant l'isotropie de retrait (hypothèse discutée par Hallaire, 1987, en particulier à l'échelle d'un profil ou d'échantillons de taille décimétrique).

Une mesure très précise de courbes de retrait est obtenue en routine grâce à un appareillage de laboratoire** mis au point par Braudeau (1988a) qui permet de mesurer le retrait d'échantillons de sol non remaniés, initialement saturés et soumis à un dessèchement en conditions contrôlées. Sur ces échantillons structurés, de taille centimétrique et de teneur en argile variable, on mesure en continu le retrait vertical au moyen d'un capteur de déplacement, et la teneur en eau par pesée (Fig.1.3.b).



(a) Courbes de retrait schématisées (Mc Garry, 1987)



b) Mesure en continu du retrait d'échantillon de sols structurés (Braudeau 1988a)

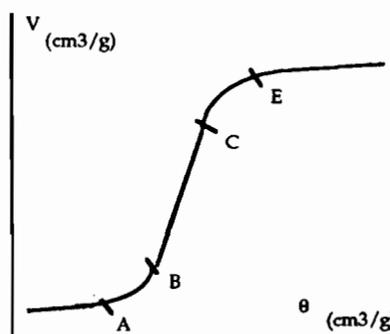


Figure 1.3. Courbe de retrait

Quel que soit le type de mesure, la courbe de retrait obtenue est la représentation graphique d'une fonction volume/teneur en eau monotone (croissante). Ceci laisse envisager la possibilité de mesurer la teneur en eau du sol à partir de mesures simples de déplacements (Voltz et Cabidoche, 1987). La valeur du retrait total (différence de volume entre l'état saturé et l'état sec) permet de comparer le caractère plus ou moins "gonflant" de différents types de sol, et d'étudier les facteurs influençant l'aptitude au gonflement.

Par ailleurs, la prise en considération de l'ensemble de la courbe de retrait et de sa forme fait apparaître plusieurs points d'inflexion qui délimitent différentes phases de réorganisation structurale. Beaucoup d'auteurs, dont Haines (1923), ou McGarry et Malafant (1987) reconnaissent généralement trois phases approximativement linéaires sur des sols essentiellement argileux (Fig.1.3.a). La signification de ces changements de pente est discutée

* Pour une revue, on pourra consulter Coquet (1994).

** mesures effectuées au laboratoire d'Hydrophysique de Bondy et de Dakar, ORSTOM

par chaque auteur suivant la forme précise de la courbe de retrait, suivant la connaissance qu'il a par ailleurs de la structure du milieu étudié et suivant l'échelle à laquelle il se trouve. C'est ainsi que Braudeau (1988b) analyse les courbes de retrait d'échantillons non remaniés en considérant une différenciation nette entre le fonctionnement d'une microporosité très déformable au sein d'agrégats argileux et celui de la macroporosité complémentaire interagrégats dans l'échantillon structuré. Nous présenterons ce modèle de façon détaillée au chapitre 6 (§6.2). L'ajustement de chaque phase de courbe de retrait par une expression analytique conforme aux hypothèses du modèle permet alors de déterminer deux niveaux d'organisation structurale, et de mesurer leur porosité à chaque état hydrique. La rétractométrie devient une méthode de mesure de la structure du sol. Cette méthodologie de caractérisation des sols, initialement testée sur des sols ferrallitiques, est désormais couramment utilisée à l'Orstom sur des sols très divers (Boivin, 1990, Mapangui, 1993, Coleuille, 1993, ...etc).

1.2 CARACTÉRISATION HYDRIQUE DES SOLS

Un élément constamment présent dans le sol, en plus ou moins grande quantité, est l'eau. C'est la présence de l'eau qui permet le développement de la végétation et c'est à travers l'eau que se font les transferts de tous les solutés et les apports nutritifs pour la plante. Le sol est aussi la zone d'échange entre les processus hydrologiques souterrains et de surface, un maillon privilégié du cycle de l'eau. Un aspect important de la caractérisation des sols par les pédologues consiste à évaluer les capacités de stockage et de transfert de l'eau pour différents types de sol, afin de transmettre ces informations par exemple aux agronomes ou aux hydrologues.

Certaines approches consistent à imaginer le sol comme un réservoir ou une succession de réservoirs dont on évalue les capacités de stockage et de déstockage en effectuant des suivis de bilans hydriques à des échelles journalières ou mensuelles (par exemple, Poss, 1991). Plus généralement, et à une échelle plus fine, la modélisation de la dynamique de l'eau dans le sol est basée sur l'évaluation des flux d'eau en tout point et à chaque instant en s'appuyant sur une description mécaniste des écoulements d'eau dans le sol.

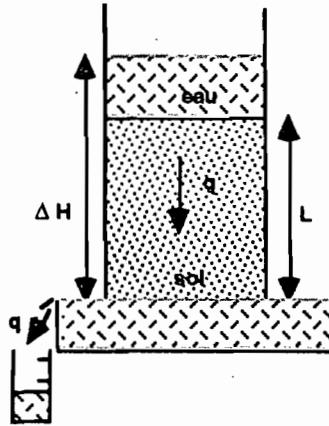
1.2.1 Modélisation classique des transferts hydriques dans la zone non saturée du sol

Le modèle de référence pour l'étude de l'hydrodynamique des sols à l'échelle du terrain ou de la colonne de terre en laboratoire est basé sur la loi empirique de Darcy, qui permet de décrire les écoulements permanents et unidimensionnels dans un milieu poreux saturé: le flux d'eau ou vitesse de Darcy q traversant un élément de sol (débit par unité de surface totale traversée) est proportionnel à la différence de charge hydraulique H dans la direction du flux (Fig.1.4).

On considère que les écoulements unidimensionnels verticaux permanents ou non sont régis par:

$$q = -K \frac{\delta H}{L} = -K \frac{\delta(h-z)}{\delta z}$$

où K est la conductivité hydraulique du sol saturé d'eau, z représente la cote sur un axe vertical orienté vers le bas, et la charge hydraulique H se décompose en la somme des potentiels de pression h (exprimée en hauteur d'eau) et de gravité z .



$$q = -K \frac{\Delta H}{L}$$

Fig.1.4 Expérience de Darcy

Dans la zone non saturée du sol, la loi de Darcy est généralisée en supposant que la conductivité K et la pression h dépendent de la teneur en eau de façon univoque et s'écrit:

$$q = -K(\theta) \left(\frac{\delta(h(\theta))}{\delta z} - 1 \right)$$

Le couplage de la loi de Darcy généralisée avec l'équation de continuité $\frac{\delta \theta}{\delta t} = - \frac{\delta q}{\delta z}$ qui traduit la conservation de la matière permet d'écrire une équation différentielle fortement non linéaire

$$\frac{\delta \theta}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta z} \left(K(\theta) \left(\frac{\delta(h(\theta))}{\delta z} - 1 \right) \right) \quad (1.1)$$

On peut écrire cette équation soit en fonction de la variable θ

$$\frac{\delta \theta}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta z} \left(K(\theta) \frac{dh}{d\theta} \frac{\delta \theta}{\delta z} \right) - \frac{dK}{d\theta} \frac{\delta \theta}{\delta z} \quad (\text{équation de Childs et Collis-Georges, 1950})$$

soit en fonction de la variable h (équation de Richards, 1931).

Dans les deux cas il suffit de connaître les fonctions $h(\theta)$ et $K(\theta)$ pour pouvoir résoudre l'équation d'écoulement, numériquement dans le cas général.

Les relations $h(\theta)$ et $K(\theta)$ sont les deux caractéristiques hydriques majeures du sol non saturé (Fig.1.5).

Elles sont déterminées expérimentalement et ne sont pas des fonctions univoques de la teneur en eau; cependant pour pouvoir résoudre (1.1) dans des conditions acceptables, l'hystérésis est négligée et les données expérimentales remplacées par des fonctions dérivables de la teneur en

eau θ . La liste des expressions analytiques possibles pour modéliser les fonctions $h(\theta)$ et $K(\theta)$ est longue (Hillel, 1988) et nous en donnons ici deux exemples:

pour $h(\theta)$,

$$\text{Brooks et Corey(1964): } \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \left(\frac{h}{h_b}\right)^\lambda \quad \text{pour } h \geq h_b, \quad \theta = \theta_s \quad \text{pour } h < h_b \quad (1.2)$$

$$\text{Van Genuchten(1980): } \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \frac{1}{[1 + (\alpha h)^n]^m} \quad \text{pour } h \geq 0 \quad (1.3)$$

et pour $K(\theta)$,

$$\text{Brooks et Corey(1964): } K = K_s \left(\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r}\right)^\mu \quad (1.4)$$

$$\text{Touma (1987): } K = K_s \exp\left(\beta \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r}\right) \quad (1.5)$$

(θ_s teneur en eau à saturation, θ_r teneur en eau résiduelle souvent supposée nulle, K_s conductivité à saturation, les autres paramètres étant des paramètres d'ajustement)

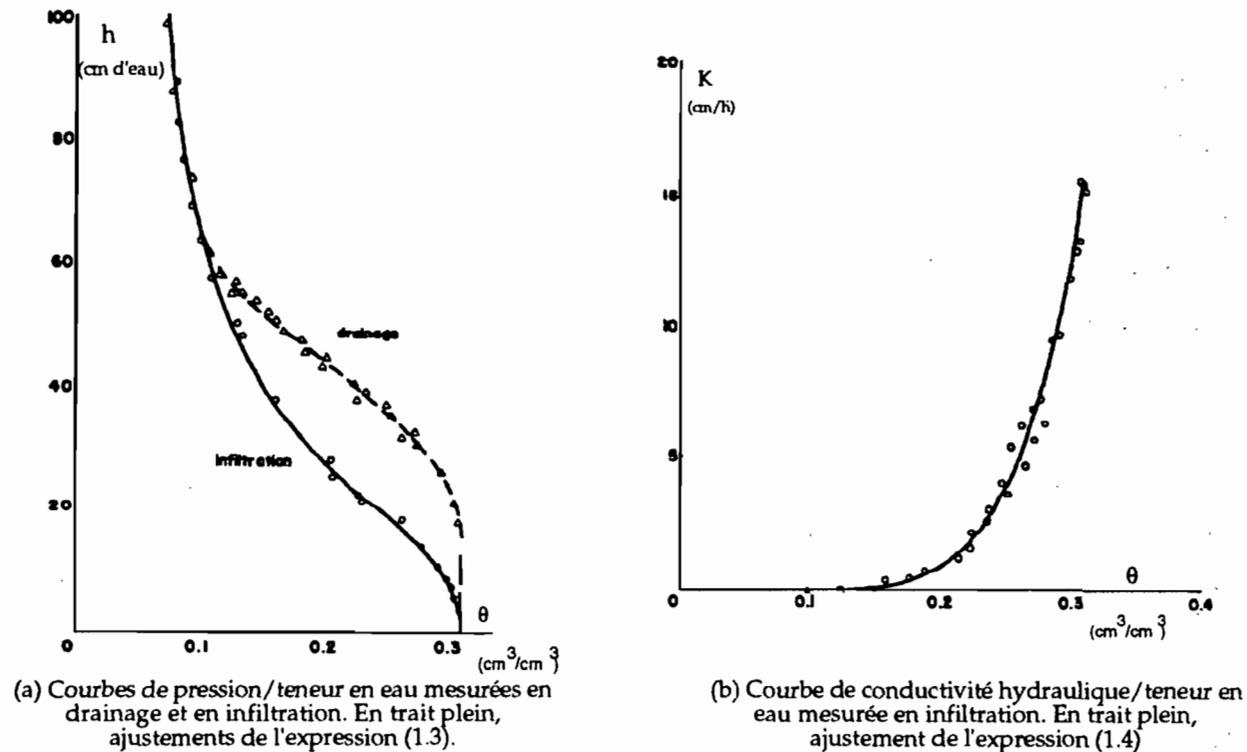


Figure 1.5. Deux caractéristiques hydriques majeures du sol non saturé $h(\theta)$ et $K(\theta)$ (Données de Touma, 1984, sur un échantillon de sol sableux de l'Isère, France)

Connaissant les caractéristiques hydriques du sol, ce modèle est couramment utilisé (par exemple, Touma, 1987, Perrier, 1989) pour simuler les écoulements sur un profil vertical de sol,

en négligeant les transferts latéraux. Beaucoup de travaux ont été consacrés à l'amélioration des différents algorithmes possibles et à la prise en compte de conditions aux limites variées.

On considère que les écoulements d'eau sont régis par l'équation (1.1) sous réserve d'un certain nombre d'hypothèses restrictives: milieu continu, homogène, isotrope, indéformable, eau incompressible et pure, air constamment à la pression atmosphérique et supposé sans effet sur l'écoulement, écoulement non turbulent dans de trop gros pores, température constante, etc... (Touma, 1984). Plusieurs extensions du modèle initial sont étudiées. Citons l'extension à des écoulements en trois dimensions en remplaçant la conductivité scalaire par un tenseur de conductivité, ou une approche biphasique (Morel-Seytoux et Billica, 1985, Vauclin, 1989) qui permet la prise en compte du mouvement de l'air en écrivant deux équations analogues à (1.1), une pour chaque fluide. Dans le cas de sols déformables, plusieurs méthodes sont développées, qui consistent soit à travailler dans un repère mobile attaché à la phase solide soit à rajouter une équation pour décrire les mouvements de solide (Angulo et al, 1990). Dans tous les cas de figure, le modèle est mieux validé sur des sols remaniés en laboratoire qu'in situ sur des sols structurés.

Le problème essentiel posé par la généralisation du modèle à l'échelle du terrain est la grande variabilité des caractéristiques hydriques et en particulier de la conductivité d'un point de mesure à un autre. Une approche stochastique est alors préconisée (pour une revue, Jury et Kabala, 1991), la plus simple consistant à introduire des concepts statistiques dans le modèle déterministe en considérant les fonctions $K(\theta)$ et $h(\theta)$ (ou plutôt les paramètres des expressions analytiques qui peuvent les décrire) comme des variables aléatoires dont on peut estimer la structure spatiale (par exemple, Boivin, 1990).

1.2.2 Détermination des caractéristiques hydriques d'un sol.

Les caractéristiques hydriques sont déterminées en effectuant des expériences d'infiltration ou de drainage de l'eau. Les valeurs de h et de θ sont mesurées (divers capteurs de pression ou tensiomètres pour h , sondes à neutrons ou banc gammamétrique au laboratoire pour θ); les valeurs de K sont calculées, en se basant sur le modèle d'écoulement, suivant des protocoles expérimentaux variés (par exemple suivi du drainage interne d'un profil de sol initialement saturé, sous condition de flux nul en surface). On obtient des données discrètes pour des teneurs en eau variables, données pour lesquelles on recherche le meilleur modèle analytique possible (Fig.1.5). On vérifie ensuite par simulation si les schémas numériques et le modèle dans son intégralité permettent bien de retrouver les valeurs expérimentales.

Malheureusement, la mise en place de ces expériences est longue (le suivi du drainage interne de certains sols peut durer plusieurs mois) et coûteuse, en particulier in situ. Compte tenu de la présence de discontinuités géométriques, l'implantation et le suivi des appareils de mesure posent des problèmes techniques délicats dans des sols dits structurés, ne serait-ce que pour ne pas modifier la structure en installant le dispositif de mesure, ou pour évaluer le volume de sol sur lequel porte effectivement la mesure dans le cas de techniques nucléaires par exemple. (La présence de discontinuités importantes peut même remettre en compte le formalisme du modèle d'écoulement écrit dans le cadre des milieux continus). L'hétérogénéité naturelle du sol rend aussi très difficile l'étalonnage des instruments de mesure.

Le cas des sols déformables pose des problèmes métrologiques plus importants encore. En ce qui concerne les mesures de pression par exemple, Vauclin (1987) écrit: "Pour les milieux déformables, tensiomètre, chambre de pression et psychromètres ne donnent pas accès aux mêmes grandeurs physiques". Quel que soit le sol, les volumes sur lesquels les mesures sont intégrées diffèrent suivant les appareils utilisés; que la masse volumique du solide soit elle aussi variable complique encore l'analyse des données.

De plus, compte tenu de la grande variabilité spatiale des caractéristiques hydriques à l'échelle du terrain, les mesures doivent être multipliées.

1.3 STRUCTURE ET ÉCOULEMENTS DE L'EAU DANS LE SOL

Caractérisation structurale et caractérisation hydrodynamique demeurent deux volets indépendants de l'étude des sols. Dans l'approche hydrodynamicienne classique, la connaissance de la structure des sols n'intervient que lors du choix de l'implantation des appareils de mesure in situ ou du protocole d'échantillonnage: on peut ainsi déterminer des zones apparemment représentatives du sol étudié; ou encore identifier des volumes pédologiques plus ou moins homogènes sur un profil vertical afin d'intensifier son dispositif de mesures à certaines profondeurs, lorsque plusieurs couches de sol de structure différentes se succèdent de façon rapprochée, ou au contraire d'espacer les mesures dans des zones plus homogènes.

En effet la structure du sol semble bien être l'élément déterminant ses propriétés hydriques. Chacun sait par exemple que la porosité totale des sols argileux est plus élevée que celle des sols sableux, mais que les pores sont plus fins et la conductivité hydraulique moins forte. Plusieurs auteurs montrent que les principaux "horizons" délimités sur des critères morphologiques se différencient nettement par l'allure de la courbe de rétention (par exemple, Robain et Curmi, 1986) mais aussi par leur fonctionnement hydrodynamique qualitatif (par exemple, Grimaldi et Boulet, 1990).

On sait donc que les transferts hydriques dépendent fortement de la structure du sol. Mais lorsque l'on se trouve en présence d'un sol donné, même si l'on a décrit finement son organisation structurale, on ne sait pas prévoir précisément ses caractéristiques hydriques. On les mesure alors, indépendamment de toute la connaissance acquise sur le sol, soit in situ, et cela pose un certain nombre de problèmes métrologiques, soit au laboratoire, mais les échantillons prélevés sont souvent remaniés et la structure en partie détruite.

La détermination des caractéristiques hydriques des sols à partir de caractéristiques structurales peut s'envisager de deux façons complémentaires:

- La première consiste à établir a posteriori des liaisons statistiques entre les fonctions $h(\theta)$ et $K(\theta)$ d'une part et des données structurales aisément mesurables d'autre part.

Rawls et Brakensiek (1989) expliquent divers paramètres d'ajustements des fonctions $h(\theta)$ et $K(\theta)$ en établissant des régressions linéaires significatives par rapport à des variables telles que (% sable, % d'argile, densité réelle, porosité totale...etc et des variables composées des précédentes). McKeague et al (1982) proposent une typologie des sols basée sur des classes de critères structuraux et morphologiques qualitatifs et concordant avec des mesures de conductivité à saturation.

Le problème de cette approche réside dans le choix des caractéristiques structurales à prendre en compte, si l'on ne tient pas à multiplier les mesures et les observations de toute nature.

- Le deuxième type d'approche possible est déterministe et change d'échelle.

Il s'agit de rechercher des mécanismes explicatifs du fonctionnement hydrique à une échelle plus fine que le milieu continu sur lequel s'applique la loi de Darcy, en se plaçant au niveau où la structure des sols révèle la géométrie de l'espace poral dans lequel l'eau circule. La pratique intensive de la porosimétrie au mercure est née de ce type d'approche. Certains modèles présentés dans les chapitres 2 et 3 vont dans ce sens.

1.4. CONCLUSION ET SIMULATION DE STRUCTURES DE SOLS

Dans les modèles classiquement utilisés pour simuler les transferts hydriques dans la zone non saturée du sol, basés sur la loi de Darcy, deux caractéristiques hydriques majeures sont les relations pression/teneur en eau $h(\theta)$ et conductivité hydraulique/teneur en eau $K(\theta)$. Leur détermination expérimentale in situ sur des sols structurés pose des problèmes d'ordre technique et même financier, et devient encore plus délicate dans le cas des sols déformables.

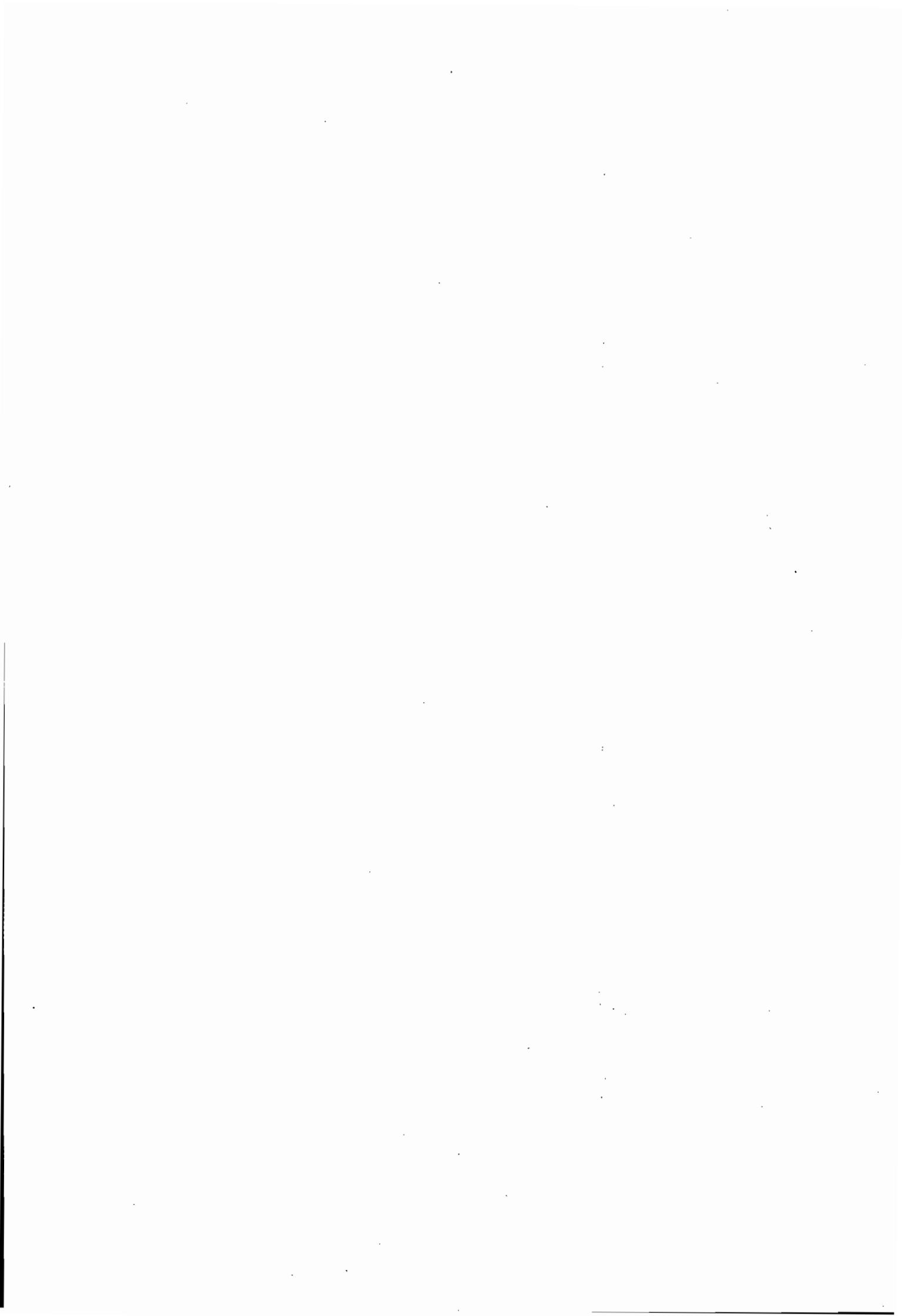
Les caractéristiques structurales obtenues par observations, analyses d'images de section de sol, granulométrie, porosimétrie ou rétractométrie semblent plus simples à obtenir et il serait

d'un grand intérêt de déterminer le fonctionnement hydrique des sols directement à partir de telles données.

Nous avons décidé d'élaborer un générateur de structures et de construire des structures de sol afin d'étudier, par une approche déterministe, la relation entre propriétés structurales et propriétés hydriques. Nous nous plaçons à une échelle microscopique où la structure discontinue des sols est apparente. Il s'agit de trouver des règles de construction, assez générales pour que différents types de structures de sol puissent être représentés. Ces règles devront tenir compte des constatations de base suivantes:

- Une structure de sol est d'abord un ensemble de particules solides. Ces constituants élémentaires définissent la texture du sol qui peut être déterminée de façon relativement précise et aisée. La structure elle-même est l'assemblage de ces constituants dans le sol en place. Elle est destructible, évolutive et déformable. Elle se caractérise dans de nombreux sols par la présence d'agrégats ou paquets aisément observables de particules solidaires, et par plusieurs niveaux d'organisation. La structure du sol semble ainsi se différencier nettement de celle d'autres milieux poreux.
- Une caractérisation de la structure peut s'effectuer à partir de l'ensemble complémentaire du solide, celui des vides ou pores ménagés lors de l'assemblage. On peut alors représenter une structure par une distribution de pores. Mais l'espace poral n'est pas un invariant de la structure et dépend en particulier de l'état d'humidité.

Les modèles géométriques de structures de sol créés par notre générateur devront prendre en compte différents niveaux d'organisation en agrégats et aussi des déformations. L'interdépendance entre ces éléments structuraux amènera à considérer une structure simulée comme l'ensemble spatialement cohérent de ces différents constituants.



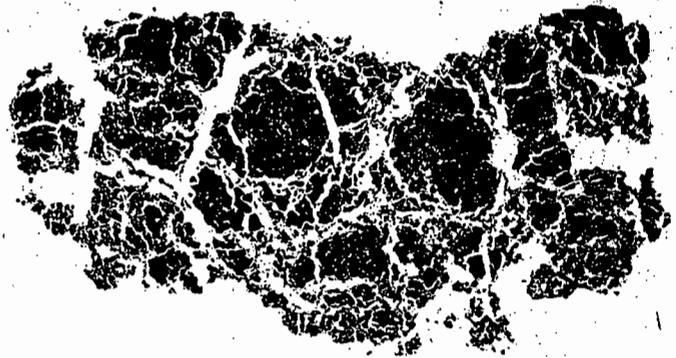
2.1 INTRODUCTION

Qu'est-ce qu'une fractale? La notion reste parfois assez vague: "Une structure fractale est la même de près comme de loin" (Gouyet, 1992). Falconer (1990) souligne l'absence d'une définition universelle et note: "Many fractals have some degree of self-similarity, they are made up of parts that resemble the whole in some way". Sont désormais célèbres les images d'un motif donné qui se reproduit en se multipliant en des motifs identiques mais réduits qui eux-mêmes se reproduisent et se réduisent de la même façon, suivant un processus itératif répété à l'infini (The beauty of fractals, Peitgen, 1986).



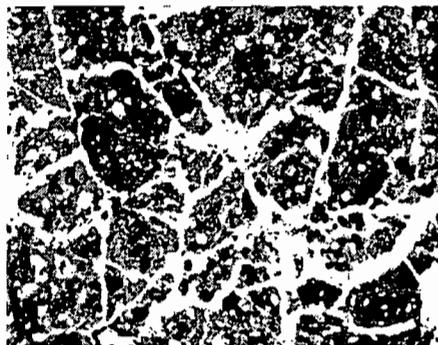
10 cm

Photographie: E. Perrier
(a) Photographie de la surface du sol



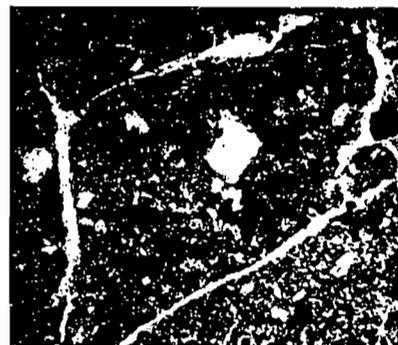
1 cm

Photographie: B. Velde
(b) Macro-photographie d'une section de motte



1 mm

Photographie: H. Coleuille
(c) Microscopie optique (section d'horizon profond)



0,1 mm

Photographie: H. Coleuille
(d) Microscopie optique (section d'horizon profond)

Figure 2.1: Images d'un sol vertical à différents degrés de résolution (il s'agit du même sol, au Nord du Sénégal, sur les photographies (a) (c) et (d), mais la photographie (a) n'est pas prise à la même période de l'année)

C'est ainsi que l'on peut assez bien imaginer un sol formé de mottes de terre se décomposant en agrégats (Figure 2.1a), qui eux-mêmes se décomposent en sous-agrégats similaires. L'observation de sections de ces mottes à un plus grand niveau de résolution (Figure 2.1b) révèle de nouveaux détails de la structure, et le réseau de pores plus fins développé au sein des mottes présente une forte analogie avec le réseau de macro-fissures les entourant.

Une première question se pose: comment passer du stade qualitatif ("cet objet fait penser à une fractale") au stade quantitatif ("je peux montrer que cet objet est fractal et le quantifier par des paramètres caractéristiques d'une fractale")? Le paramètre essentiel, souvent le seul, déterminant un objet fractal est sa dimension fractale. Le rêve du géomètre fractal est justement de caractériser une structure complexe par un nombre unique. Un premier problème se pose en parcourant la littérature, abondante sur le sujet: la définition d'une dimension fractale semble changer d'un article à l'autre et l'on se demande au premier abord si l'on mesure bien la même chose. Il ne s'agit pas ici de refaire un traité sur la géométrie fractale. Depuis l'ouvrage de référence de Mandelbrot(1982), de nombreux livres ont été consacrés à ce sujet (citons Jullien et Botet, 1986, Feder, 1988, Vicsek, 1989, Le Méhauté, 1990, Falconer, 1990, Schroeder, 1991, Gouyet, 1992, ...). Les notions de base présentées en annexe (annexe B) sont celles qui sous-tendent les modèles fractals de sol qui vont être maintenant exposés. De façon générale, il apparaît qu'un certain nombre de grandeurs physiques mesurées sur le sol varient en loi de puissance avec l'échelle de mesure, au moins dans un domaine limité d'échelles de longueur. Cette constatation expérimentale peut vraisemblablement traduire le caractère fractal de certaines structures de sol. La dimension fractale qui est déduite de l'exposant de ces lois de puissances est alors une caractéristique de l'organisation structurale du sol. Cette interprétation fractale permet d'imaginer des modèles géométriques de structure représentant l'hétérogénéité naturelle des sols.

2.2 MODÈLES FRACTALS DE STRUCTURES DE SOL OU DE MATÉRIAUX VOISINS

Le premier exemple traite d'un milieu poreux artificiel et non d'un sol; il montre la genèse d'une structure fractale dans un matériau soumis à des contraintes hydriques: Skjeltorp et Meakin (1988) décrivent et modélisent la fissuration de micromodèles plans formés d'un réseau régulier de billes de polystyrène contractables dispersées initialement dans de l'eau. Un séchage lent s'accompagne d'une réduction de taille des billes et il se crée des fissures linéaires aux ramifications de taille décroissante. Leurs images (Fig.2.2.) présentent un caractère net d'auto-similarité que confirme l'analyse fractale.

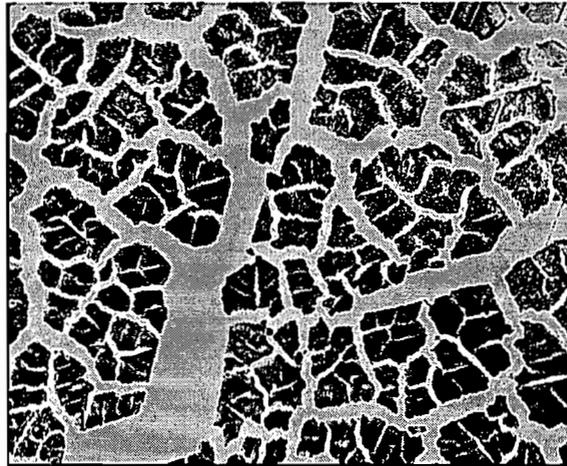


Figure 2.2 Fissuration fractale lors du séchage d'une monocouche de billes contractables (Skjeltorp et Meakin 1988)

Les approches suivantes relèvent d'une recherche de caractérisation d'un matériau en place, de façon statique, par la détermination d'une dimension fractale souvent associée à un modèle de structure. La structure du sol est classiquement représentée comme un ensemble d'éléments solides (particules primaires ou agrégats), soit comme un espace poral.

2.2.1 Modèles fractals de distributions des éléments solides

Il s'agit parfois de modèles purement illustratifs, montrant que la complexité apparente de la structure des sols peut être simulée à partir d'algorithmes de construction simples: c'est ainsi que Moore et Krepfl (1991) dessinent en 2 ou 3 dimensions la répétition sur des échelles de taille successives d'un motif de base représentant la forme et l'orientation de quelques particules primaires et considèrent que les images obtenues font penser à des structures de sol typiques.

Une première caractérisation quantitative est basée sur l'analyse de la distribution des tailles des éléments solides dans un sol ou des matériaux voisins (ce peut être des fragments de roches, des agrégats de sol ou même des particules primaires). Une collection d'objets peut être définie comme fractale lorsque la distribution du nombre d'objets en fonction de leur taille l (dimension linéaire équivalente) suit une loi en puissance de la forme

$$[N>l] \sim l^{-D} \quad (2.1)^*$$

où $[N>l]$ est le nombre d'objets de dimension linéaire supérieure à l . D est la dimension fractale de l'ensemble, un nombre non entier inférieur à la dimension euclidienne dans lequel l'objet est "plongé". Cette expression est vérifiée, et D estimé, en effectuant une régression linéaire de $\text{Log}([N>l])$ par rapport à $\text{Log}(l)$.

* - signifie proportionnel à

Turcotte (1986) s'intéresse surtout à la fragmentation des roches. Il passe en revue différentes relations empiriques connues, caractéristiques usuelles de la distribution des morceaux obtenus par fragmentation naturelle ou artificielle, exprimées souvent en terme de masse, et montre qu'elle peuvent toutes se ramener à une loi de puissance entre le nombre et la taille des fragments, i.e. l'expression(2.1). Reprenant des données antérieures, il établit que des objets fragmentés de nature variée (astéroïdes, charbon cassé, granite ou gneiss désagrégés, sols...) suivent cette relation de proportionnalité et calcule par exemple une dimension fractale de 2.6 pour des sols sablo-argileux et de 2.8 pour des sables avec graviers.

Il en déduit que le processus de fragmentation doit être invariant avec l'échelle d'observation, et décrit un modèle de fragmentation illustré par la figure 2.3: un cube de dimension linéaire L peut se diviser en 8 cubes de dimension $L/2$, chacun de ces huit cubes peut se diviser en cubes de dimension $L/2^2$, et ainsi de suite. Le modèle fractal introduit une fragmentation incomplète caractérisée par une probabilité p de fragmentation identique à chaque niveau: chaque cube de dimension $L/2^i$ a la probabilité p de se décomposer en 8 cubes de dimension $L/2^{i+1}$. Le nombre $[N>l]$ de fragments de taille supérieure à $l=L/2^m$ obtenus au bout d'un nombre important m d'itérations est en très bonne approximation tel que $[N>l] \sim l^{-D}$; $D = \text{Log}(8p) / \text{Log}(2)$; et $0 < D < 3$ pour $1/8 < p < 1$.

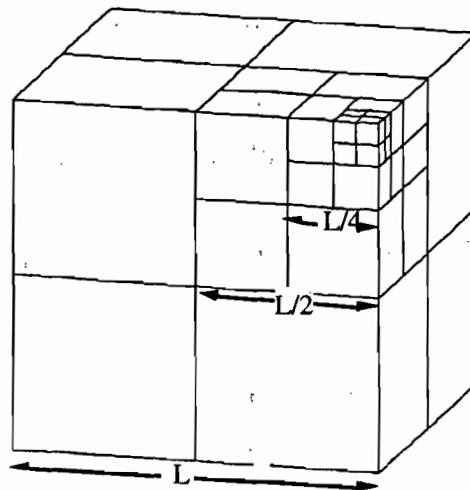


Figure 2.3. Fragmentation fractale selon Turcotte.

L'existence et la valeur d'une probabilité réelle de fragmentation indépendante de l'échelle sont déduites de différentes représentations de la fragilité d'une roche. Par une méthode relevant de la théorie du groupe de renormalisation (voir Allègre et al, 1982), Turcotte détermine une probabilité potentielle de fragmentation au niveau p_{n+1} en fonction de la probabilité p_n au niveau n : $p_{n+1} = f(p_n)$. Il obtient un point critique caractérisé par l'égalité des probabilités p_{n+1} et p_n . L'égalité pour deux niveaux consécutifs conduit alors à une probabilité invariante sur

l'ensemble des niveaux possibles. Cette valeur constante p dépend du modèle choisi pour représenter la fragilité de la roche, et on obtient ainsi une dimension fractale différente suivant le type de résistance à la fragmentation.

Dans les sols, on dispose de nombreuses données sur la distribution de la masse des éléments solides en fonction de leur taille sur lesquelles plusieurs auteurs, se référant à Turcotte, cherchent à vérifier l'équation (2.1). Nous devons distinguer les études portant sur des distributions de particules de celles traitant de distributions d'agrégats.

2.2.1.1 Distributions fractales de taille des particules primaires du sol.

Tyler et Wheatcraft (1989) analysent les distributions de particules obtenues par analyse mécanique sur des sols sableux ou limoneux. Pour se ramener à la définition (2.1), ils transforment les données de masse en nombre de particules: le nombre de particules de taille l (où l est la moyenne arithmétique de deux ouvertures successives des tamis utilisés) est calculé en divisant la masse mesurée par la masse moyenne d'un grain sphérique de taille l . L'expression (2.1) s'ajuste alors correctement sur les données expérimentales et permettrait de prédire la courbe de rétention d'eau. L'article a donné lieu un certain nombre de critiques car les dimensions fractales reportées sont supérieures à 3, ce qui est impossible théoriquement pour un ensemble fractal contenu dans l'espace de dimension euclidienne 3. Trois ans plus tard, Tyler et Wheatcraft (1992) font leur autocritique. Les dimensions fractales supérieures à 3 seraient essentiellement dues à la méthode de calcul du nombre de grains dans une classe de taille donnée: le calcul par moyenne arithmétique de la taille moyenne des grains introduisant un biais puisqu'il existe un nombre croissant de grains de petite taille à l'intérieur d'une classe donnée; de plus il s'avérerait que l'ajustement linéaire Log/Log utilisé (sur une grande étendue d'échelles de taille) est dominé par les valeurs importantes de $[N > l]$ aux faibles valeurs de l , rendant impossible l'évaluation des écarts à la linéarité. Une méthode alternative est proposée, basée sur le calcul direct de la masse des grains de taille inférieure à une taille l de tamis donnée:

$$[M < l] \sim l^{3-D} \quad (2.2)$$

où $[M < l]$ est la masse des particules de dimension linéaire inférieure à l , et D la dimension fractale des particules. Cette méthode est théoriquement équivalente à la première* si la densité

* Une façon rapide et approximative de considérer l'équivalence entre (2.1) et (2.2) est proposée par Turcotte qui utilisait en fait déjà des données en termes de masse. En considérant les dérivées $(2.2) \Leftrightarrow d[M < l] \sim l^{2-D}$ et $(2.1) \Leftrightarrow d[N > l] \sim l^{-D-1}$. A condition de supposer une densité de grains constante (et un facteur de forme constant), l'accroissement de masse $d[M]$ est proportionnel à l'accroissement du volume des grains, soit le nombre de grains $d[N]$ que multiplie l^3 (représentant le volume d'un grain, en supposant un facteur de forme constant). $d[M] \sim d[N]l^3$, ce qui donne bien l'équivalence entre (2.1) et (2.2) au niveau des dérivées. La démonstration de Tyler et Wheatcraft en termes d'intégrales fait apparaître les effets de bords dus à l'utilisation de nombres et masses cumulés, cumulés inversés par ailleurs puisque l'on considère $[N > l]$ et $[M < l]$.

des particules peut être considérée comme constante. Les résultats sont plus réalistes, seuls certains sols étudiés sont fractals (dimension variant de 2 à 2.8), et sur certains intervalles d'échelles de taille seulement. Mais la relation simple entre dimension fractale de particules et courbe de rétention doit être abandonnée.

De façon similaire, Wu et al (1993) s'intéressent à des distributions de particules dans des sols sableux ou limoneux. Plusieurs méthodes de séparation et de mesures sont comparées, en particulier des techniques optiques permettent de mesurer des tailles de particules comprises entre 20nm et 5cm. Les auteurs observent une distribution fractale entre 50nm et 100µm environ, de dimension égale à 2.8 ± 0.1 pour tous les sols étudiés.

2.2.1.2 Distributions de taille d'agrégats

D'autres auteurs ont cherché à caractériser de façon analogue des distributions d'agrégats. Mais la définition des agrégats et leur mode de séparation expérimentale sont moins standardisés que pour une granulométrie de particules.

Perfect et Kay (1991) mesurent des distributions d'agrégats sur des échantillons d'un sol limoneux (silt loam soil) soumis à différents traitements cultureux. Ils vérifient expérimentalement la relation:

$$[N>l] \sim l^{-D} \quad (2.3)$$

où $[N>l]$ est ici le nombre d'agrégats de taille supérieure à l et D est une dimension fractale d'agrégats.

Ils utilisent différentes techniques expérimentales de décomposition du sol en agrégats, par tamisage direct d'échantillons humides ou après submersion (wet sieving) avec des seuils d'énergie variables pour l'appareil effectuant la séparation des agrégats. Ils concluent que la théorie fractale peut être utilisée pour caractériser des distributions de tailles d'agrégats et comparent les dimensions fractales d'agrégats D relatives aux différents traitements du sol. Cependant les valeurs trouvées varient avec la technique de séparation des agrégats: une augmentation de l'énergie appliquée pour fragmenter le sol en agrégats ferait augmenter le degré de fragmentation et aussi la dimension fractale D qui tendrait à rejoindre celle des particules au sens de Tyler et Wheatcraft 1989. Par ailleurs les valeurs de dimensions fractales d'agrégats dépassent encore couramment 3! Remarquons que le nombre d'agrégats est calculé à partir des mesures de masse en supposant une densité constante des agrégats, ce qui est une approximation encore plus forte qu'une densité constante de particules. Cette approximation est par ailleurs infirmée par les données analysées par Young et Crawford (1991) et Rieu et Sposito (1991c). Deux reformulations de l'équation (2.3) en termes de masses sont testées par Rasiah, Perfect et Kay (1993): celle de Tyler et Wheatcraft 1992 (équation 2.2), et une deuxième

s'affranchissant de l'hypothèse de densité constante des agrégats mais faisant intervenir une probabilité de fragmentation variable à chaque niveau d'échelle associé à une taille de tamis (pour une même énergie appliquée par le dispositif de séparation en agrégats). Les estimations de dimensions fractales deviennent inférieures à 3 en utilisant l'équation (2.2.); mais celles obtenues avec la deuxième reformulation sont jugées plus fiables car proches de celles déduites de l'application directe de l'équation (2.3), elles varient entre 2.22 et 3.19. Dans un deuxième article, Perfect, Kay et Rasiah (1993) proposent une formulation théorique de la prise en compte d'une diminution de la probabilité de fragmentation avec la taille des agrégats, conduisant à une version multifractale du modèle de fragmentation de Turcotte(1986). Ils justifient les valeurs de dimensions fractales supérieures à 3 par le fait que le modèle n'est plus strictement auto-similaire et prévoit plus d'agrégats non fragmentés vers les petites tailles que l'approche fractale classique. Les applications ne sont pas convaincantes: en effet les agrégats sont comptés "visuellement" et l'ajustement Log/Log de la relation (2.3), testé sur six valeurs $[N > 4]$ (six tailles de tamis), fournit cinq pentes, considérées comme le spectre de dimensions fractales du sol (silt loam) étudié.

Young et Crawford (1991) mesurent eux aussi des distributions fractales d'agrégats, sur des échantillons préalablement séchés. Ils montrent que la masse M d'un agrégat varie en loi de puissance avec sa taille :

$$M(L) \sim L^D \quad (2.4)$$

où $M(L)$ est la masse d'un agrégat de dimension linéaire L et D une dimension fractale d'agrégats.

Des corrections sont apportées par rapport aux mesures directes: d'une part les agrégats sont manuellement arrondis pour les rendre plus sphériques, d'autre part, lorsque des éléments grossiers sont présents, une correction numérique permet d'éviter une surestimation de D . Sur plusieurs répétitions d'échantillons prélevés sur un sol sablo-limoneux, la dimension fractale trouvée est environ 2.75 avant mise en culture et 2.93 après.

Les définitions (2.3) et (2.4) d'un sol fractal données par les auteurs précédents ne s'appuient pas sur un modèle particulier de représentation géométrique fractale du sol. Le modèle de fragmentation du sol en agrégats emboîté proposé par Rieu et Sposito (1991b) vérifie à la fois les propriétés (2.3) et (2.4). Une illustration du modèle (Fig.2.4) peut être fournie par un volume cubique de côté d_0 représentatif du sol. Ce cube initial est formé de N sous-agrégats de taille d_1 . De façon itérative, chaque agrégat de dimension linéaire d_i est décomposé en N sous-agrégats similaires de taille d_{i+1} , avec un rapport de similitude constant $r = d_{i+1}/d_i < 1/N^{1/3}$, ménageant à chaque itération un espace poral entre les agrégats. La dimension fractale de ce modèle est $\text{Log}N/\text{Log}(1/r)$ et peut varier entre 0 et 3.

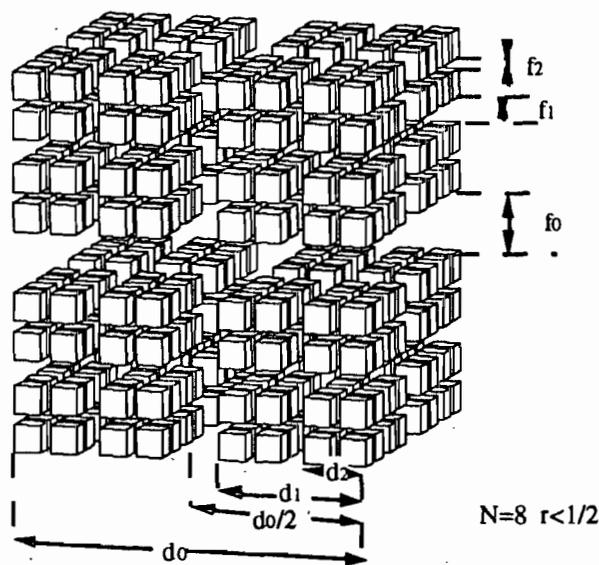


Figure 2.4. Illustration du modèle de fragmentation fractale de Rieu et Sposito (1991b)

Une constatation expérimentale servant de base à l'élaboration de ce modèle est que la densité des agrégats varie en loi de puissance avec la taille de l'agrégat. Sur ce modèle, à chaque niveau de fragmentation i , on peut vérifier que $\sigma(d_i)/\sigma(d_0)=(d_i/d_0)^{D-3}$, où $\sigma(d_i)$ est la densité d'un agrégat de taille d_i . Cette expression peut aussi s'écrire sous la forme:

$$\sigma(L) \sim L^{D-3} \quad \text{identique à (2.4)}$$

où $\sigma(L)$ est la densité d'un agrégat de dimension linéaire L .

Cette expression est équivalente à l'expression (2.4) puisque $\sigma(L)=M(L)/L^3$.

Quant à la distribution des agrégats, elle est fractale en nombre, de dimension D , puisque, à chaque niveau de fragmentation, chaque agrégat de taille d_i contient N sous-agrégats de dimension d_i/r . On peut exprimer ainsi la variation du nombre d'agrégats en fonction de leur taille:

$$[N=l] \sim l^{-D}$$

où $[N=l]$ est le nombre d'agrégats de taille l . (en effet, à l'itération i , on a $[N=l]=N^i$ agrégats de taille l , $l=d_i=d_0 \cdot r^i$, or $N=(1/r)^D$ et $N^i=(1/r)^{Di}=(r^i)^{-D}=d_i^{-D}$).

Le passage en nombre cumulé $[N \geq l]$ vérifie encore asymptotiquement la relation de proportionnalité:

$$[N \geq l] \sim l^{-D} \quad \text{c'est-à-dire l'expression (2.3).}$$

Rieu et Sposito supposent par ailleurs que ce modèle représente un processus théorique de fragmentation qui n'est que partiellement mené à son terme dans le sol réel. Se référant à Turcotte, ils considèrent alors un modèle de fragmentation incomplète où des ponts subsistent entre les agrégats, assurant la stabilité de la structure dans son ensemble. A chaque niveau de fragmentation, certaines fissures, en proportion constante, ne sont pas ouvertes. Le modèle de

fragmentation incomplète reste équivalent au premier en termes de distributions de taille d'agrégats et de pores. Il peut être associé à un modèle complètement fragmenté de même rapport de similitude r , mais où chaque agrégat se fragmente en N_r sous-agrégats au lieu de N si la fragmentation avait été complète ($N_r < N$). Cela conduit à une dimension fractale D_r ($D_r = \text{Log}N_r / \text{Log}(1/r)$) plus élevée que celle de son analogue complètement fragmenté ($D = \text{Log}N / \text{Log}(1/r)$). Ils expliquent ainsi la différence entre les estimations de dimensions fractales sur des données mesurées sur le sol fragmenté artificiellement par des techniques de laboratoire (telle la destruction en agrégats de différentes taille par des méthodes mécaniques) et celles obtenues sur un sol ayant conservé sa structure (mesures de densités d'agrégats). L'expression(2.3) permet alors d'estimer D , et l'expression(2.4) permet d'estimer D_r .

Pour les vérifications expérimentales, ils choisissent dans la littérature des données qui fournissent non seulement la masse des agrégats de différentes classe de tailles, mais aussi la densité des agrégats. Cela leur permet d'une part de vérifier l'ajustement de la relation(2.4), et d'autre part un calcul correct du nombre d'agrégats dans chaque classe pour vérifier l'ajustement de la relation(2.3). L'estimation de D est effectivement plus faible que celle de D_r (Ex: 2.84 au lieu de 2.95 Sharpsburg soil). Ces dimensions fractales restent inférieures à 3, mais dans certains cas, deux pentes et donc deux domaines fractals distincts ont pu être identifiés.

2.2.1.3 Comparaisons entre ces différentes approches

Les différentes définitions utilisées peuvent être illustrées par des modèles géométriques simples. Si l'on prend comme images le tapis de Serpinski ou l'éponge de Menger(cf. annexe B), les lacunes représentent la partie solide (les particules) chez Tyler et Wheatcraft (1989,1992), et la partie vide (les pores) chez Rieu et Sposito (1991b) (ou chez Tyler et Wheatcraft (1990), voir paragraphe suivant). Malgré l'analogie entre les définitions (2.1) et (2.3), ces modèles sont différents (et les dimensions fractales calculées par les formules associées, a priori différentes aussi); ils sont différents en théorie, parce que le modèle fractal utilisé est inversé, mais aussi en pratique, parce que l'un modélise des distributions de particules, l'autre modélise des distributions d'agrégats. En particulier la relation (2.4) relative à la masse ou densité des agrégats n'est pas équivalente à la relation (2.2) qui s'exprime aussi en termes de masse.

Dans le modèle de Tyler et Wheatcraft, la notion d'agrégat n'est pas étudiée. Dans le modèle de Rieu et Sposito, le caractère fractal de la distribution des particules primaires n'est pas pris en compte. Le premier modèle représente la texture du sol; il est appliqué à des exemples de sol à structure particulières, et permet de déterminer une dimension fractale que nous appellerons texturale. Le deuxième représente l'organisation d'un sol structuré en agrégats et permet d'estimer une dimension fractale que nous nommerons structurale.

2.2.2 Modèles fractals de l'espace poral

La géométrie fractale a aussi été utilisée pour décrire l'interface entre le solide et les pores ou bien seulement le volume poral.

2.2.2.1 Caractérisations fractales de l'espace poral

Pfeifer et Avnir (1983->1990) s'intéressent aux phénomènes d'adsorption à la surface de différents types de matériaux à l'échelle moléculaire. Cette surface, au sens de surface spécifique ou interface grains-pores est trouvée fractale, de dimension D . Les modèles géométriques choisis comme illustration sont indifféremment une version tridimensionnelle du flocon de Von Koch ou l'éponge de Menger. Deux méthodes de mesures de l'aire A de la surface d'adsorption du matériau sont proposées, l'une consiste à faire varier la taille r des molécules adsorbées, et l'on observe que $A \sim r^{-D}$, la deuxième consiste à prendre des particules adsorbantes de différentes tailles R pour une même dimension de molécules adsorbées, et l'on observe que $A \sim R^D$. Pour la quasi totalité des matériaux très variés testés (quartz, gels de silice, roches, sols, etc.), une dimension fractale comprise entre 2 et 3 caractérise l'irrégularité de ces surfaces d'adsorption qui peut être si grande (D tendant vers 3) que le concept d'aire tend à perdre sa signification. Van damme (1986) analyse par simulation les conditions d'application de ce type d'analyse fractale (suivant la forme des molécules utilisées et l'ordre de grandeur de la dimension fractale à estimer), dans le cas de matériaux compacts pour lesquels seule la surface est irrégulière et fractale.

Dans le cas d'un matériau poreux où la surface d'adsorption est l'interface solide-vide, Pfeifer et Avnir (1983) établissent que cette surface est fractale si et seulement si le volume poral suit la relation:

$$d[V>r]/dr \sim r^{2-D} \quad (2.5)$$

où $[V>r]$ est le volume de pores de rayon équivalent $\geq r$.

Dans des ouvrages généraux sur les fractales, Jullien et Botet (1986) et Vicsek (1989) reprennent l'expression (2.5) comme la principale méthode de détermination de la dimension fractale d'un milieu poreux et l'expliquent à partir de considérations générales.

Friesen et Mikula (1987) reprennent les travaux de Pfeifer et Avnir et l'appliquent au charbon. Les distributions de pores rencontrées dans ce matériau sont comparables à celles d'un sol et sont mesurées par porosimétrie au mercure. Ces auteurs discutent d'un point de vue théorique la signification de D dans l'expression (2.5). Ils reconsidèrent différentes versions de l'éponge de Menger, représentant soit le volume poral soit l'interface solide-vide. Ils concluent que la relation $d[V>r]/dr \sim r^{2-D}$ peut être vérifiée sans que l'on puisse conclure sur sa véritable

signification (fractale de surface ou de volume) lorsque $D > 2$. Mais c'est de toute façon la formule qu'ils utilisent pour définir et estimer une dimension fractale. Cette formule est en fait traduite en termes de pression d'injection du mercure, en appliquant la loi de Laplace (et en négligeant les problèmes de connectivité ou de rétrécissement local de pores), ce qui permet de l'utiliser directement sur les données expérimentales mesurées. Le volume de pores $[V > r]$ est alors le volume de mercure ayant envahi le milieu poreux à la pression capillaire $p - 1/r$. L'expression (2.5) se transforme alors en:

$$\text{Log} (d[V > r]/dp) - (D-4)\text{Log} p \quad (2.6)$$

où $[V > r]$ est le volume de mercure injecté à la pression p .

Les ajustements sur plusieurs jeux de données expérimentales sont bons à condition de considérer trois domaines fractals distincts et donc plusieurs dimensions fractales suivant l'échelle considérée.

Cette méthode de caractérisation fractale d'une structure poreuse à partir de la distribution de pores (cf. 2.6), directement applicable aux mesures de porosimétrie au mercure, est utilisée de façon systématique par des chercheurs en science du sol (Bartoli et al, 1991, Grimaldi et Coleuille 1993, communication orale)

Katz et Thompson (1985) travaillent sur les grès qu'ils caractérisent aussi comme un milieu fractal. Leur principale caractérisation d'un milieu fractal est une loi de puissance de la porosité $\Phi = A(l_{\min}/l_{\max})^{3-D}$, sur un domaine fractal borné par deux échelles de tailles extrêmes l_{\min}/l_{\max} . Cette formule n'est pas expliquée, A est une constante dont on dit seulement qu'elle peut être choisie égale à 1, et D est la dimension fractale de l'interface solide-vide. Les mesures de dimension fractales sont effectuées par analyse d'images par deux méthodes complémentaires (comptage du nombre d'intersections d'une droite et de la surface des grains en fonction du degré de résolution et mesure de la fonction d'auto-corrélation de l'espace poral par augmentation de la distance de translation entre deux clichés identiques). Katz et Thompson concluent à l'égalité des dimensions fractales de volume et de surface et expliquent par la dimension fractale l'exposant de la loi d'Archie qui permet de calculer la conductivité électrique d'une roche comme une puissance de la porosité.

La controverse entre les dimensions fractales de surface et de volume est encore ouverte. Guyon et al (1989) signalent que la prétendue égalité est source de confusions et de déterminations erronées chez Katz et Thompson. Toledo et al (1990) parlent d'une "distinction utile", mais sans s'y attarder.

Par ailleurs, les comparaisons entre dimensions fractales de la phase solide et de la phase vide sont peu nombreuses. Citons Bartoli et al (1991), qui estiment D à partir de l'équation (2.4) (D

est nommé une dimension fractale de masse) en analysant des images de sols à différents degrés de résolution et estiment sur les mêmes sols D à partir de (2.5) (D est nommé une dimension fractale de surface). Leurs résultats donnent une assez bonne concordance entre ces deux estimations, malgré les différences d'échelles de mesure.

Il se trouve que les modèles géométriques qui vont être exposés au paragraphe suivant, qu'ils soient représentés comme un espace poral continu à frontière fractale, ou comme un ensemble discret de pores (définis et étudiés essentiellement par la distribution du volume poral développé en fonction des tailles de pores, sans référence explicite à l'interface solide-vide) présentent cependant de fortes analogies. En particulier ils vérifient la relation (2.5) qui caractérise chez de nombreux auteurs un espace poral fractal et sa dimension.

2.2.2.2 Modèles géométriques d'un espace poral fractal

Les modèles qui suivent sont des représentations géométriques de l'espace poral servant à étudier de façon théorique les propriétés hydriques d'un milieu poreux fractal (cf. § suivant).

- de Gennes (1985) compare des milieux poreux quelconques et des milieux où l'espace poral est défini par une surface fractale (Fig.2.5). L'irrégularité de l'interface solide-vide dans un milieu poreux fractal est représentée par deux exemples de modèles géométriques très différents. L'espace poral est représenté sous une forme continue, mais les aspérités de la paroi forment des zones de taille décroissante où l'eau est retenue en quantité variable suivant la valeur de la pression capillaire dans le milieu poreux. Ce modèle local de structure permet de calculer la relation pression/teneur en eau dans un milieu fractal (voir paragraphe suivant).

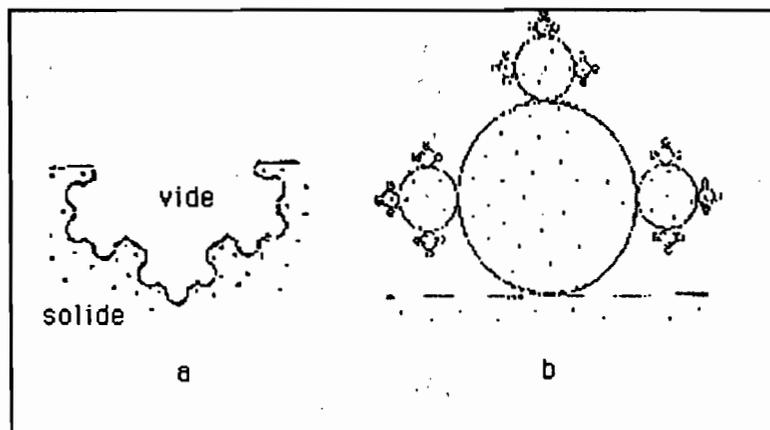


Figure 2.5. L'irrégularité fractale de la surface des pores selon de Gennes (1985).

- Tyler et Wheatcraft (1990) utilisent un modèle bidimensionnel basé sur le tapis de Sierpinski pour représenter des structures de sol. Les lacunes du tapis représentent les pores,

contrairement au solide dans l'article de 1992. La porosité de ce tapis tend vers 1 pour des échelles de longueur infiniment petites. Afin de représenter un sol réel, les auteurs renoncent à représenter la phase solide du sol et le tapis devient un modèle de l'espace poral seul. C'est une section bidimensionnelle d'un volume poral formé de parallélépipèdes comme indiqué sur la figure 2.6. Des variantes du tapis, utilisant divers générateurs, représentent alors des sols de dimensions fractales différentes.

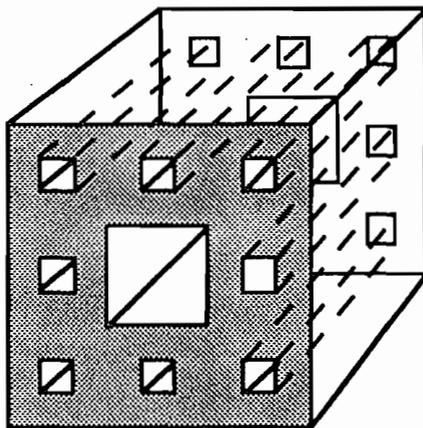


Figure 2.6: Un tapis de Sierpinski pour représenter l'espace poral d'un sol fractal

- Les pores issus du modèle de fragmentation fractale de Rieu et Sposito(1991b) déjà présenté suivent une distribution de taille fractale de même dimension que la distribution des agrégats. Ce sont des fractures d'ouverture f_i décroissante avec le niveau de fragmentation dans le même rapport de similitude que les agrégats $r = f_{i+1}/f_i = d_{i+1}/d_i$ (Figure 2.4).

2.2.3.Expression des caractéristiques hydriques d'un sol fractal

2.2.3.1 Relation entre la teneur en eau θ et la pression capillaire h

Une caractéristique hydrique fondamentale pour la modélisation des transferts d'eau dans un sol non saturé est la relation exprimant la teneur en eau en fonction de la pression capillaire dans le sol. L'expression de cette relation dans un sol fractal a été largement étudiée. Dans tous les travaux cités ici sans exception, cette expression est obtenue en utilisant un modèle capillaire (cf.chap.3) qui l'associe de façon univoque à une distribution de taille de pores: la teneur en eau θ à la pression capillaire h est égale à la somme des volumes des pores de rayon équivalent r de taille inférieure à la valeur $r(h)$ donnée par la loi de Laplace (cf. annexe A).

Distributions fractales de particules

Arya et Paris (1981) ont proposé une estimation de la courbe de rétention à partir de données fournies par l'analyse granulométrique (cf. chapitre suivant, § 3.2.2). Une simple granulométrie

permettrait de prédire à elle seule la courbe de rétention. Mais leur méthode comporte le calage d'un exposant α empirique représentant une certaine tortuosité des pores. Les travaux suivants prétendent expliquer cet exposant par la dimension fractale de la distribution des particules.

- Tyler et Wheatcraft (1989) représentent la tortuosité des pores par les contours d'un ensemble fractal de particules, et proposent, par un raisonnement géométrique, la valeur $\alpha=D-2$. Cette valeur est de l'ordre de grandeur du paramètre de calage d'Arya et Paris. Les comparaisons entre valeurs prédites et observées pour plusieurs jeux de courbes de rétention semblaient prometteuses. Mais leur méthode améliorée de détermination de D de 1992 ne donne plus de bons résultats.

- Fuentes (1992) propose, par un raisonnement analytique, une estimation de α en fonction de $\nu=D/3$. Son résultat est différent du précédent, $\alpha=1+\frac{1}{3}\left(\frac{2\nu-1}{1-\nu}\right)$, mais permet aussi de retrouver assez précisément le paramètre de calage d'Arya et Paris, lorsqu'il est appliqué aux cinq sols cités par ces auteurs. (Fuentes s'est intéressé de façon théorique à la dimension fractale d'un ensemble de grains D -échelle de Stokes-, qu'il distingue de la dimension fractale D_0 d'une distribution de pores -échelle de Laplace-. Ses travaux en hydrodynamique des sols, de nature mathématique et analytique, ne reposent pas sur un modèle géométrique particulier. Un raisonnement complexe conduit à exprimer la dimension fractale D en fonction de la porosité totale ϕ et à la calculer en résolvant l'équation implicite $(1-\phi)^\nu+\phi^{2\nu}=1$).

Distributions fractales de pores

- Alh et Niemeyer (1989a) se réfèrent à Friesen et Mikula (1987) pour définir un sol fractal par la relation (2.5). Ils en déduisent, en utilisant la loi de Laplace, une expression $V(r)\sim h^{D-3}$ où $V(r)$ est un volume cumulé de pores. Ils déterminent alors des dimensions fractales par ajustement Log/Log sur des courbes de rétention d'eau (sans préciser l'expression analytique de $\theta(h)$ utilisée).

- Tyler et Wheatcraft (1990) utilisent la loi de Laplace sur l'ensemble de pores représenté sur la figure 2.6 et en déduisent l'expression analytique suivante:

$$\frac{\theta}{\theta_{\max}} = \left(\frac{h_{\min}}{h}\right)^{2-D} \quad (2.7)$$

où θ_{\max} est la teneur en eau maximale, h_{\min} la pression d'entrée d'air dans un milieu initialement saturé, et D est la dimension fractale du modèle géométrique bidimensionnel.

Ils généralisent ensuite leur calcul à une distribution fractale quelconque de pores. Ils retrouvent donc la forme simplifiée $\theta/\theta_{\max}=(h_{\min}/h)^\lambda$ de l'expression établie par Brooks et Corey(1964)

et la dimension fractale du sol expliquerait l'exposant λ traditionnellement estimée de façon empirique. Ce résultat purement théorique justifie aux yeux des auteurs le modèle fractal exposé. La valeur de λ estimée par la formule de Brooks et Corey, pourrait s'expliquer par D ($\lambda=2-D$) et en même temps fournir une estimation de la dimension fractale des sols.

- Brakensiek et Rawls (1992) mettent en pratique ce raisonnement en reprenant une base de données expérimentales. Ils estiment ainsi des dimensions fractales bidimensionnelles augmentant avec la finesse de la texture des sols (taille décroissante des grains du sol), de 1.41 pour les sables à 1.87 pour les argiles, valeurs auxquelles on rajoute 1 pour comparer avec un modèle tridimensionnel.

- de Gennes(1985), sur ses deux modèles différents de surface fractale des pores, utilise la loi de Laplace pour établir que l'expression du taux de saturation en eau S dans un espace poral fractal sous la forme : $S-h^{D-3}$.

Nous posons $\theta = S\theta_{max}$, pour obtenir une expression (2.8) similaire à (2.7), D étant ici la dimension fractale d'un modèle tridimensionnel.

$$\frac{\theta}{\theta_{max}} = \left(\frac{h_{min}}{h}\right)^{3-D} \quad (2.8)$$

La formule (2.8) due à de Gennes est citée comme caractérisant un milieu fractal par Guyon et al (1989). Elle est vérifiée expérimentalement sur des données correspondant à des saturations très faibles, par Davis (1989) pour des grès, ainsi que par Toledo et al (1990) pour des sols sableux. Ces derniers établissent à leur tour la correspondance avec la formule $\theta(h)$ de Brooks et Corey ($\lambda=3-D$).

- Rieu et Sposito(1991b) calculent $\theta(h)$ comme les auteurs précédents par application de la loi de Laplace: dans leur modèle, la teneur en eau à chaque pression capillaire h correspond au volume calculable des fractures d'ouverture f les plus fines ($f < f(h)$) remplies d'eau. Les valeurs discrètes obtenues suivent l'expression analytique suivante :

$$\theta + 1 - \theta_{max} = \left(\frac{h_{min}}{h}\right)^{3-D} \quad (2.9)$$

La relation (2.9) s'ajuste très bien sur les données expérimentales testées et permet d'estimer la dimension fractale D_f d'un sol non déstructuré (et donc incomplètement fragmenté). On estime ainsi par exemple sur un sol (Ariana soil) une dimension fractale $D_f=2.90$ lorsque l'estimation sur les distributions de tailles d'agrégats était: $D=2.83$.

- La différence entre les expressions (2.8) (ou 2.7) et (2.9) fera l'objet d'un développement particulier au cours de cette thèse (chapitre 8).

Dans les études précédentes de $\theta(h)$, les dimensions fractales sont estimées à partir des courbes de rétention d'eau. Ce n'est donc pas la connaissance d'une donnée structurale D qui permet de

calculer une propriété hydrique, mais l'inverse. Néanmoins, en théorie, la dimension fractale de l'espace poral peut être aussi déduite des mesures de densité d'agrégats, selon Rieu et Sposito (1991b), bien que le manque de données expérimentales ait empêché toute vérification. Elle devrait aussi pouvoir se rattacher aux autres caractérisations d'un espace poral fractal.

2.2.3.2 Conductivité hydraulique

- Pour exprimer la conductivité hydraulique en fonction de la teneur en eau, on utilise souvent des expressions analytiques en loi de puissance pour ajuster les données expérimentales $K(\theta) \sim \theta^\mu$. Des études semi-empiriques existent, en dehors de toute théorie fractale, qui établissent un lien arithmétique entre l'exposant μ de $K(\theta)$ et l'exposant λ de l'expression de la courbe de rétention lorsqu'elle est exprimée sous la forme $\theta(h) \sim h^{-\lambda}$ de Brooks et Corey. (par exemple $\mu = 3 + 2/\lambda$ d'après l'approche de Burdine(1953), $\mu = 5/2(\lambda + 5)\lambda$ selon Mualem 1976). Dans un sol fractal de dimension D , plusieurs auteurs expriment alors μ comme une fonction $f(D)$.

- Le raisonnement de Tyler et Wheatcraft (1990) consiste à dire que, puisque selon eux la dimension fractale D permet de calculer λ ($\lambda = 2 - D$), il suffit d'utiliser une des expressions précédentes pour calculer la conductivité hydraulique en fonction de D : $\mu = 2 \frac{D-3}{D-2}$ ou bien $\mu = 2,5 \frac{D-7}{D-2}$. Aucune vérification expérimentale n'est faite.

- Toledo et al (1990) proposent un exposant particulier μ pour $K(\theta)$ mais seulement aux faibles teneurs en eau, lorsque la conductivité est assurée par des films d'eau recouvrant les parois du solide: $\mu = \frac{3}{m\lambda}$, où m est un coefficient caractéristique des fluides en présence et non du milieu poreux, choisi égal à 0.5. Selon eux, dans un sol fractal, $\lambda = 3 - D$ donc $\mu = f(D) = \frac{3}{m(3-D)}$, ce qui est assez bien vérifié sur quelques jeux de données.

- Fuentes(1992) considère que l'expression $\theta(h) \sim h^{-\lambda}$ de Brooks et Corey est un cas particulier de distribution de pores que l'on peut interpréter par la géométrie fractale. Dans ce cas et sous certaines conditions, il exprime la perméabilité comme $K(\theta) \sim \theta^\mu$ avec $\mu = 2\nu(2/\lambda + 1)$ où $\nu = D/3$. où D est ici la dimension fractale des particules.

- Rieu et Sposito (1991b) calculent la conductivité hydraulique sur leur modèle. A un état de saturation donnée θ_j , l'eau remplit les fractures de plusieurs niveaux successifs j ($i < j < m$). Le calcul de la conductivité hydraulique K_j dans une direction donnée est proportionnel à la somme des conductances élémentaires données par la loi de Poiseuille (cf. annexe A, $K(i) \sim f_i^3$) pour chaque classe de fractures remplie d'eau suivant la direction choisie, somme pondérée ici par un facteur $p(i)$ qui traduit la connectivité de la classe de taille de pores de niveau i : $K_j \sim \sum p(i) K(i)$. On n'obtient pas une formule analytique pour la relation $K(\theta)$ mais autant de

couples (θ_j, K_j) que de niveaux de fragmentation j . Les coefficients $p(i)$ sont calculés de façon théorique à partir des deux dimensions fractales D (fragmentation complète, D estimé sur les distributions d'agrégats) et D_r (fragmentation incomplète, D_r estimé sur la courbe de rétention d'eau). En effet, le modèle fractal incomplètement fragmenté présente une distribution de tailles de pores qui pourrait encore être représentée mathématiquement par le cube de la figure 2.4. Mais la fermeture de certains pores due à la fragmentation incomplète du milieu naturel entraîne une répartition spatiale différente qui peut être illustrée par la figure 2.7. $p(i)$ est une estimation de la continuité du réseau formé par les fractures d'ouverture inférieure ou égale à r_i , qui sont toutes remplies d'eau à l'état de saturation θ_i , mais n'assurent que partiellement le transport de l'eau d'une face de l'échantillon de sol à l'autre. $p(i)$ diminue en loi de puissance avec le niveau i , et les pores les plus fins participent de moins en moins au transport de l'eau. Cette méthode est appliquée avec succès aux données d'un sol limoneux.

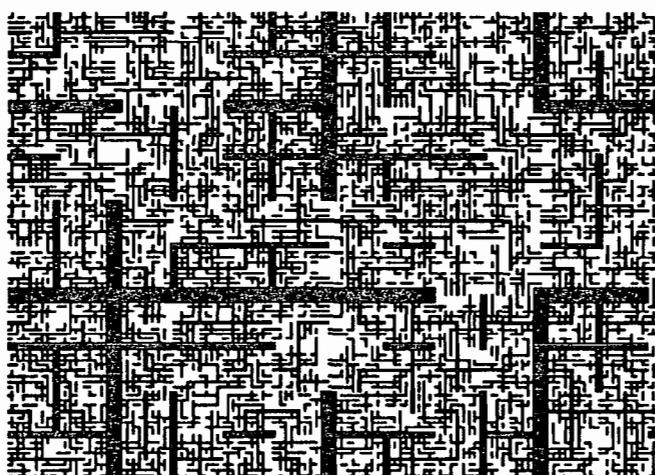


Figure 2.7. Une section du modèle de fragmentation incomplète selon Rieu et Sposito (1991b).

- Par ailleurs, Shepard (1993), retrouve de façon numérique le passage de $\theta(h)$ à $K(\theta)$ présenté au début du paragraphe en utilisant un modèle où ni la distribution des pores, ni celle des particules ne sont considérées comme fractales. Le modèle fractal (courbe de Von Koch) représente la tortuosité T^i des pores qui augmente lorsque la taille des pores r_i diminue. La conductivité de l'ensemble est envisagée comme une somme pondérée des conductivités élémentaires $K(i) \sim r_i^4$ de chaque classe i de tailles de pores cylindriques: $K = \sum K(i) / T^i$.

2.3 VOLUME ÉLÉMENTAIRE REPRÉSENTATIF D'UNE STRUCTURE DE SOL

Construire un ensemble discontinu d'éléments solides et de pores représentant l'organisation structurale du sol, et étudier ses propriétés hydriques, impose de définir un volume minimal représentatif des propriétés structurales ou hydriques d'intérêt. La notion de VER (volume élémentaire représentatif, cf. de Marsily, 1986) suppose que l'on puisse calculer pour une

propriété donnée (par exemple la porosité, ou la teneur en eau, ou encore la conductivité hydraulique) une valeur qui est globale à l'échelle du VER ("moyenne" spatiale) mais qui peut être considérée comme la valeur ponctuelle d'une fonction continue à l'échelle supérieure à laquelle s'effectuent les mesures de cette propriété.

Dans bon nombre de simulations théoriques d'un milieu poreux, les éléments solides sont classiquement des grains cubiques ou sphériques dont la distribution des tailles est peu étendue. La taille du VER pour la porosité est assez vite atteinte pour une longueur caractéristique l_1 (Fig. 2.8) de l'ordre de quelques grains, au-delà de laquelle la porosité moyenne du sol devient homogène (i.e. indépendante de la taille de l'échantillon).

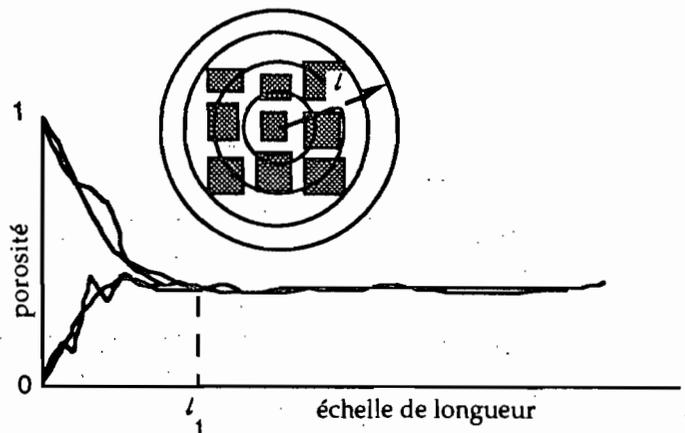


Figure 2.8. Taille (l_1) d'un Volume Élémentaire Représentatif de la porosité, d'après Lenormand, 1981.

La simulation d'un milieu poreux "réaliste" se heurte à une première difficulté: la gamme étendue d'échelles de tailles rencontrées dans la plupart des milieux naturels. L'importance des hétérogénéités locales peut conduire à utiliser un VER de longueur caractéristique l_2 nettement augmentée (Fig. 2.9) et à manipuler une quantité énorme de grains et pores. De plus, si l'on s'intéresse à d'autres propriétés, comme la conductivité, la taille du VER peut encore augmenter à cause d'autres sources de fluctuations liées à la topologie du réseau de pores ou de fractures assurant le transport d'eau (Charlaix, 1987).

L'approche fractale apporte un éclairage différent: de nombreux travaux semblent indiquer que l'hétérogénéité du sol n'est pas toujours de nature aléatoire, et que sous le désordre apparent peut se cacher une structure fractale que l'on peut quantifier. Sur le domaine fractal, la porosité augmente en loi de puissance avec la taille de l'échantillon et l'on peut s'attendre à ce que d'autres caractéristiques du système, hydriques par exemple, suivent aussi des variations simples en fonction de l'échelle. On requiert d'habitude l'invariance par translation (statistiquement parlant) du volume simulé pour pouvoir généraliser les résultats à l'échelle supérieure. L'approche fractale prend en compte l'invariance par dilatation (homothétie interne)

pour réduire l'intervalle d'étude à deux niveaux successifs d'organisation fractale. Ce sont les relations de récurrence permettant le passage d'un niveau à l'autre qui vont être déterminantes pour le comportement de l'ensemble (Delannay et al, 1989). L'auto-similarité caractérisant une structure fractale permet malgré tout de réduire la taille du VER.

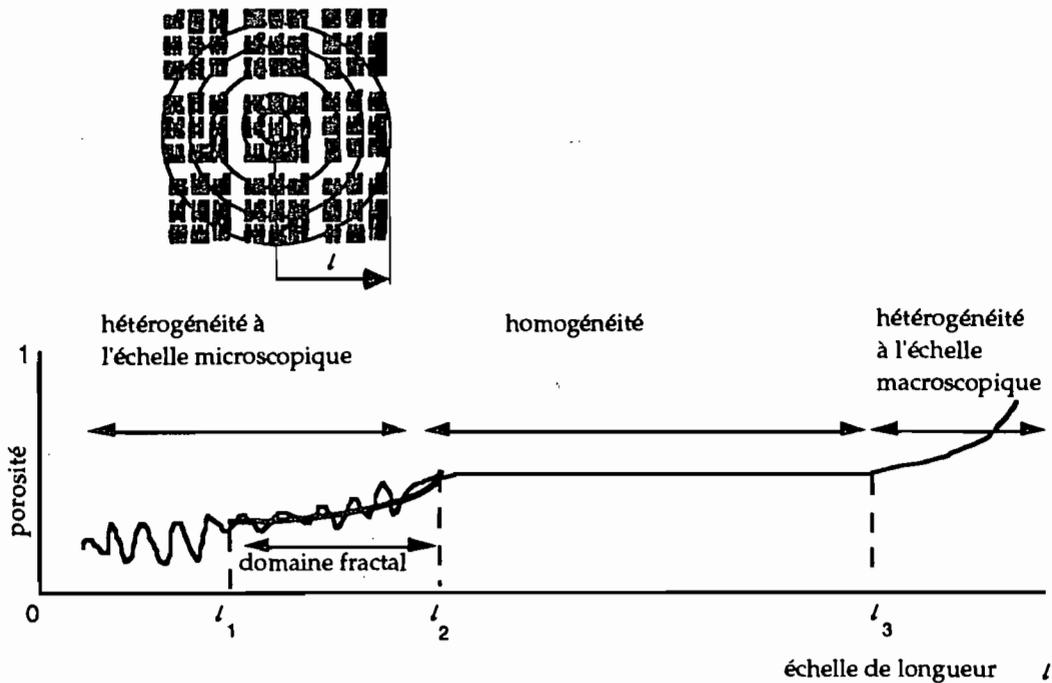


Figure 2.9. Une hétérogénéité de type fractal permet de réduire la taille du VER.

L'invariance d'échelle, qui permet de réduire l'intervalle d'étude à quelques niveaux d'organisation du sol, semble être observée seulement dans des certains domaines d'échelle de longueur. Sur la figure 2.9, le domaine hétérogène fractal se situe entre l'échelle l_1 et l_2 , au delà le sol devient homogène, mais peut à nouveau présenter des hétérogénéités, fractales ou non à l'échelle par exemple des fractures géologiques. Un domaine fractal $[l_1, l_2]$ a souvent pu être identifié à l'échelle des pores qui nous intéresse pour la simulation des transferts hydriques dans la zone non saturée du sol. Un volume de longueur caractéristique l compris entre l_1 et l_2 devrait suffire pour représenter l'ensemble du domaine fractal; ce volume élémentaire devrait permettre aussi de représenter un volume pédologique de longueur caractéristique inférieure à l_3 , formé de la juxtaposition (translations) de plusieurs volumes fractals de taille l_2 , et donc d'extrapoler à l'échelle d'un horizon homogène de sol.

2.4 CONCLUSION

Depuis une dizaine d'années, de nombreux travaux théoriques et expérimentaux ont été conduits pour conforter et vérifier l'hypothèse de structure fractale des sols. Étant donné l'absence de modèles de caractérisation structurale qui recouvre l'ensemble des échelles

d'observation, le modèle fractal offre l'opportunité de caractériser l'organisation de certains sols, sur un domaine d'échelle de longueur qui semble couvrir la gamme de tailles des pores assurant la majeure partie des transports d'eau dans un sol non saturé.

A l'issue de cette revue bibliographique, il s'avère que les modèles fractals de sols ont été envisagés de façons variées, et qu'une définition unique de la fractalité possible d'un sol n'a pas été établie. Si la diversité des travaux présentés est un peu déroutante, elle incite malgré tout à penser le sol comme un ensemble d'éléments solides et de pores plus ou moins auto-similaires sur plusieurs échelles successives (Shroeder, 1991, parle d'une nouvelle façon de penser, "thinking self-similar").

Les deux approches classiques du sol, vu soit comme un ensemble d'éléments solides, soit comme un ensemble de pores, demeurent en général distinctes. Tyler et Wheatcraft qui ont considéré alternativement ces différents points de vues concluent ainsi leur article de 1992: "it will be necessary to examine the relationships between the fractal properties of the solids and voids"... "the fractal behavior may hold promise for understanding aggregated media such as structured soils. It is far more likely that the process of aggregation will yield both solid and void structure amenable to fractal scaling." Le modèle de Rieu et Sposito (1991b) va déjà dans ce sens. Ce sera le point de départ de nos simulations de structures fractales de sols.

Nous cherchons à construire un simulateur de structures de sol, de portée aussi générale que possible, qui prenne en compte l'organisation de ce matériau poreux spécifique en plusieurs niveaux d'agrégation d'éléments solides et de pores. Dans ce cadre, nous nous intéresserons particulièrement à l'approche fractale. En effet, que la simulation de quelques niveaux d'organisation du sol puisse avoir une portée générale au-delà du domaine réduit représenté est une idée particulièrement séduisante. Les modèles géométriques conceptuels présentés dans ce chapitre sont des représentations simplifiées et parfaitement auto-similaires du sol. Nous rechercherons plus de réalisme en construisant des extensions statistiques ou approchées.

Le but est de pouvoir simuler le comportement hydrique des sols en fonction de différentes hypothèses théoriques sur son organisation structurale. L'étude des propriétés hydriques d'un sol fractal concerne principalement la relation $\theta(h)$ entre teneur en eau et pression capillaire. Nous étudierons tout particulièrement cette relation. Les calculs de conductivité hydraulique disponibles utilisent des pondérations abstraites des conductivités élémentaires de chaque classe d'une distribution fractale de pores. Nous chercherons à représenter effectivement la répartition spatiale de ces pores et à simuler la relation $K(\theta)$ dans un modèle de structure qui représentera aussi les particules primaires, les agrégats et les agrégats d'agrégats à des échelles croissantes d'observation.

CHAPITRE 3. REPRÉSENTATION D'UNE STRUCTURE POREUSE ET MODÉLISATION HYDRODYNAMIQUE À L'ÉCHELLE DES PORES

Notre objectif est d'étudier par simulation les conséquences de l'organisation structurale des sols sur leurs propriétés hydriques. Le sol est un ensemble de particules solides, un milieu poreux dispersé dont l'assemblage est souvent caractérisé par plusieurs niveaux d'agrégation de particules et sa déformabilité. Nous voulons construire un modèle de structure. Ne cherchant pas à innover sur le plan de la modélisation des écoulements proprement dit, nous nous tournons, comme c'est couramment fait en science du sol, vers les méthodes utilisées en physique des fluides dans un milieu poreux. Quel type de modélisation hydrodynamique allons-nous utiliser? La réponse influence fortement le modèle de structure, et les propriétés structurales que ce modèle pourra ou non représenter.

3.1. MODÉLISATION HYDRODYNAMIQUE DANS UN MILIEU POREUX. PLUSIEURS ÉCHELLES D'ÉTUDE

3.1.1 L'échelle macroscopique de Darcy

A l'échelle d'une colonne de sol au laboratoire ou celle d'un profil vertical de sol sur le terrain, on considère généralement que les écoulements d'eau sont décrits par la loi empirique de Darcy (cf. Chap.1). La conductivité hydraulique K (en m/s) caractérise macroscopiquement l'aptitude d'un volume homogène et isotrope de sol, ou de milieu poreux quelconque, à conduire une eau pure et incompressible. Si l'on découple les propriétés du fluide eau de celle du milieu poreux, on écrit $K = k\rho g / \mu$, où $\rho g / \mu$ introduit des constantes caractéristiques de l'eau pour une température donnée et k est une caractéristique du milieu poreux nommée perméabilité* (en m^2).

A cette échelle, le milieu poreux est défini comme un milieu continu et la perméabilité se mesure. A une échelle plus fine, où la distinction est faite entre les phases solide et vide, on peut essayer de la calculer à partir de la géométrie de l'espace poral.

3.1.2 Echelle des équations de mouvement d'un fluide

* La perméabilité intrinsèque d'un volume de poreux se mesure lorsqu'il est saturé par un fluide. Lorsque plusieurs fluides sont en présence, la perméabilité relative à un des fluides caractérise la fraction du volume poreux remplie par ce fluide.

Equations de Navier Stokes

Dans un milieu fluide continu représenté par des champs de vitesses et de pressions ponctuelles, les mouvements du fluide sont régis par les équations différentielles de Navier-Stokes. Dans des cas très simples, on sait intégrer ces équations (par exemple, Ganoulis, 1989 et Fig.3.4); on sait déterminer en particulier le flux d'eau traversant une fracture ou un tube lorsqu'un gradient de pression est appliqué entre chaque extrémité (loi de Poiseuille, cf. annexe A). Dans le cas d'un milieu poreux naturel comme le sol, l'intégration mathématique des équations de Navier-Stokes est particulièrement difficile, car les solides sont des obstacles à l'écoulement des fluides qui fournissent des conditions aux limites très complexes.

Il existe cependant un certain nombre de voies de résolution, en termes analytiques ou probabilistes. La recherche de méthodes approchées d'intégration d'équations différentielles mettant en jeu des variables théoriques ponctuelles pour en déduire des relations entre des variables macroscopiques moyennes mesurables est l'objet de recherches approfondies de la part de physiciens et mathématiciens des milieux poreux.

Les valeurs macroscopiques moyennes $\langle x \rangle$ peuvent être définies par intégration volumique des variables ponctuelles x sur un volume V élémentaire de milieu poreux ("prise de moyenne volumique", Whitaker, 1986). Un deuxième type d'approche consiste à définir la géométrie du milieu poreux comme la réalisation d'une fonction aléatoire (ergodique et stationnaire), une fonction de porosité ponctuelle égale à 0 dans les grains et à 1 dans les pores, dont la covariance exprime la structure spatiale. Les valeurs moyennes (celle de la porosité ou celle d'une propriété quelconque du milieu poreux) sont alors égales à des espérances mathématiques de fonctions aléatoires (Matheron, 1967, de Marsily 1992).

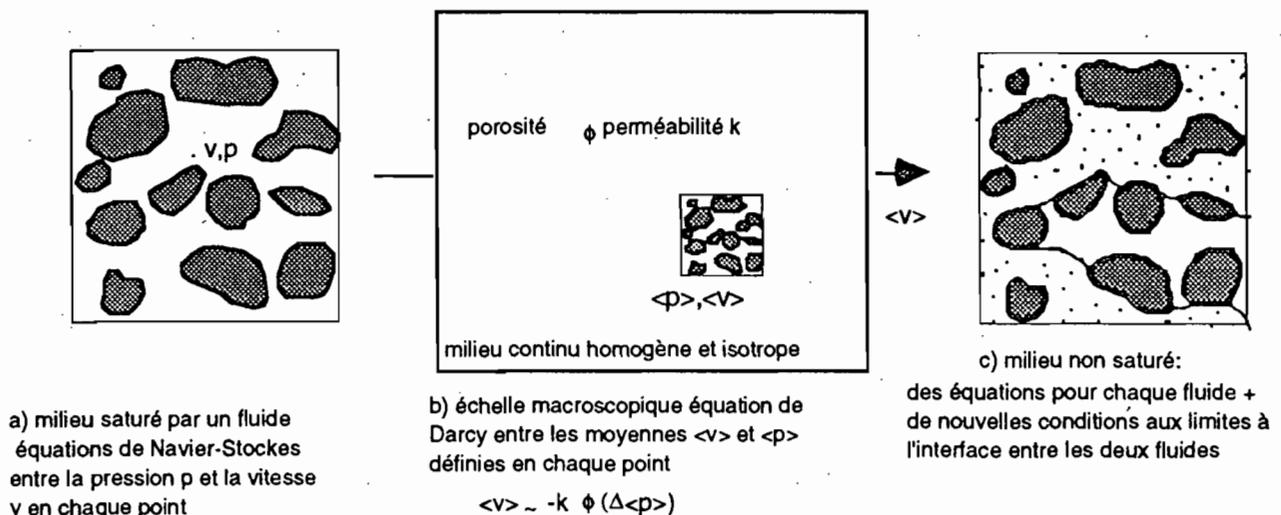


Figure 3.1. Intégration par "prise de moyenne" sur un volume élémentaire représentatif (d'après Whitaker, 1986)

Dans les deux cas, on peut effectuer un transfert d'échelle en déduisant des équations différentielles microscopiques la forme et les coefficients d'équations différentielles macroscopiques. C'est ainsi que l'on peut montrer dans quelles conditions la loi de Darcy découle de l'intégration de Navier-Stokes (Fig.3.1.) en introduisant le coefficient de perméabilité qui relie la vitesse moyenne et le gradient de pression moyenne (Matheron, 1967, Whitaker, 1986).

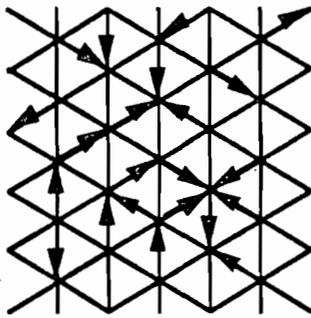
On montre que la perméabilité est une grandeur intégrant les caractéristiques géométriques de l'espace poral. Sa détermination précise par prise de moyenne volumique fait l'objet de procédures complexes de "fermeture des équations" et n'est possible de façon analytique que sur des assemblages périodiques d'éléments géométriques très simples (Whitaker, 1986). Il est aussi possible de générer des milieux poreux numériques de géométrie plus complexe, en simulant des réalisations d'une fonction porosité aléatoire dont les caractéristiques géométriques sont statistiquement équivalentes à celles mesurées sur des images binarisées de sections de milieux poreux isotropes (Adler et al, 1990 cité in Adler et al 1992) ou quelconques (Anguy et Bernard, 1992). Les équations différentielles de mouvement du fluide sont alors résolues numériquement sur le milieu simulé, sous l'hypothèse de périodicité spatiale, et le tenseur de perméabilité en deux ou trois dimensions déterminé par des méthodes de différences finies, éléments finis ou volumes finis. L'importance du type de structuration et des modifications de la géométrie microscopique du milieu poreux peuvent être alors finement analysées (Anguy et Bernard, 1992). Mais les calculs sont extrêmement lourds.

C'est à cette échelle que l'on peut étudier théoriquement les interactions entre les mouvements de plusieurs fluides en milieu non saturé, des déformations (Whitaker, 1986) ou l'effet conjoint d'autres phénomènes physiques, et progresser dans la compréhension des mécanismes fondamentaux, mais les méthodes mathématiques utilisées sont très abstraites. Récemment, des méthodes résolument numériques sont apparues avec les simulations de "gaz sur réseau".

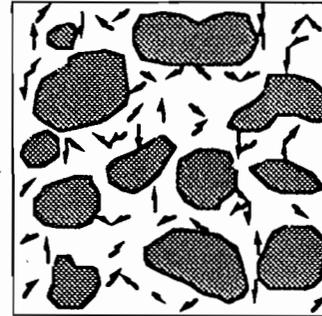
Simulation numérique : gaz sur réseaux

Pour représenter le système dynamique formé par un fluide en mouvement, l'espace, le temps sont discrétisés, mais aussi le fluide lui-même, et le système représenté par un ensemble de "particules" évoluant à chaque instant sur un réseau (Frisch et al, 1987). Des règles de collision entre particules sont établies de façon à respecter des principes physiques élémentaires tels que la conservation de masse et de la quantité de mouvement. Pour respecter l'isotropie des flux, le choix d'un réseau hexagonal est communément accepté en deux dimensions. Des extensions un peu plus complexes existent en trois dimensions. Il se trouve que la simulation de règles très

simples établies à ce niveau que l'on peut qualifier de pré-microscopique permet de retrouver les équations de Navier-Stokes (Fig.3.2.a).



(a) simulation des équations de mouvement de fluide



(b) simulation de la loi de Darcy dans un milieu poreux

Figure 3.2. Simulations par la méthode des "gaz sur réseaux".

Dès lors il est possible d'introduire de nouvelles règles telles que des règles de choc contre une paroi solide et de simuler la circulation d'un fluide dans un milieu poreux à géométrie quelconque. Pour un nombre de particules suffisant, on peut ainsi simuler l'apparition de la loi de Darcy (Fig.3.2.b) en simulant une différence de pression par l'injection de particules sur une face du réseau (par exemple Jeulin, 1990). Pour représenter un milieu non saturé, on utilise deux "couleurs" de particules. Pour deux fluides non miscibles, on donne un poids plus élevé aux règles de collision qui favorisent le regroupement des particules de même couleur, ce qui permet de faire apparaître l'équivalent de la tension superficielle aux interfaces entre différentes phases prévue par la loi de Laplace (Rothman, 1989). D'autres processus physiques sont reproduits de façon analogue...

L'invasion de l'eau dans une structure de sol agrégé est ainsi étudiée par DiPietro et al (1993) sur deux agrégats de particules séparés par un macropore vertical (en deux dimensions, et en donnant à l'air dans une première étude le comportement de la vapeur d'eau). L'eau apportée à la surface s'infiltré d'abord très rapidement par gravité dans le macropore, puis au bout d'un certain temps, l'infiltration lente dans les micropores est mise en évidence, verticale à partir de la surface inondée et latérale à partir du macropore.

Cette méthode fournit un exemple fondamental du passage de comportements microscopiques simples à un fonctionnement macroscopique dont la complexité rejoint celle observée dans le monde réel. Elle donne de l'espoir dans le principe même de toute recherche d'un monde simulé composé d'objets élémentaires au comportement simple dont la cohabitation en grand nombre résulterait en l'émergence d'un comportement macroscopique reproduisant les phénomènes réels. Bien qu'il existe des études théoriques sur la question, il s'agit principalement d'une méthode de simulation, d'un outil d'exploration de la réalité via des expériences numériques, qui permet d'étudier qualitativement des domaines jusqu'ici inexplorés.

3.1.3 Echelle des pores

Une approche schématique de milieu poreux consiste à le modéliser comme un ensemble de pores aux formes géométriques simples pour lesquels on dispose des formes intégrales des équations de mouvement de fluides.

L'approche la plus simple consiste à le représenter par un ensemble de tubes cylindriques parallèles (Fig.3.3a). La distribution de taille des tubes est donnée soit par des distributions théoriques possibles, soit par l'analyse de la répartition de deux fluides non miscibles en présence dans le milieu en fonction de la loi de Laplace. Pour cet ensemble de tubes et une pression capillaire h donnée, un fluide non mouillant tel que le mercure ou l'air en présence d'eau occupe tous les pores de taille supérieures à la valeur $r=f(h)$ donnée par la loi de Laplace et le fluide mouillant les pores restants. On peut ainsi déterminer un faisceau de capillaires "équivalents" à la réalité au sens où il permet de reproduire une courbe pression/teneur en fluide $h(\theta)$ expérimentale (Fig.3.3b).

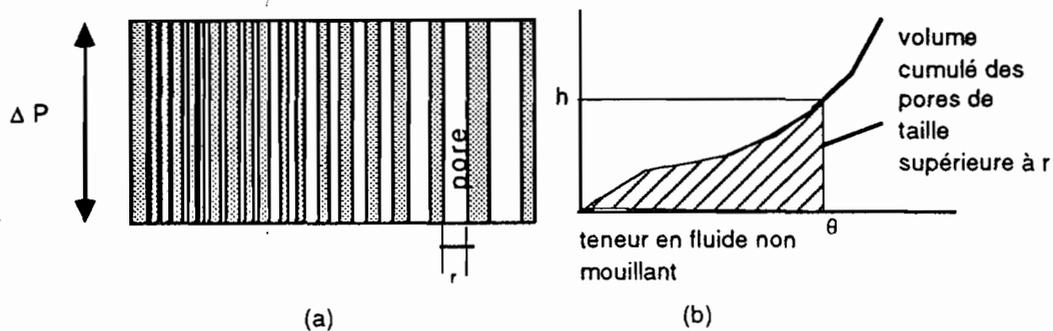


Figure 3.3. Faisceau de tubes capillaires.

En milieu saturé, on calcule alors le flux dans chaque pore, proportionnel à la différence de pression ΔP appliquée aux extrémités du tube (loi de Poiseuille) et le flux total obtenu par sommation est donc encore proportionnel à ΔP , comme le prévoit la loi de Darcy pour un milieu poreux réel; on en déduit la perméabilité de l'ensemble du milieu poreux modélisé. En milieu non saturé, on détermine la perméabilité relative à un fluide en sommant les flux sur l'ensemble des pores remplis par ce fluide.

Mais la perméabilité ainsi calculée est surestimée. On cherche alors à représenter les pores dans un milieu réel.

Marshall (1958) imagine l'assemblage de plusieurs pores successifs d'ouvertures variables et "pas tout à fait en face les uns des autres". Il en déduit une réduction du flux de plus en plus

forte pour les tubes les plus fins et propose une formule simple. Elle est établie pour n classes de tubes de taille moyenne r_i décroissante et de volume identique:

$$k = \epsilon 2^{n-2} (r_1^2 + r_2^3 + \dots + (2n-1)r_n^2) / 8 \quad (3.1)$$

où ϵ est la porosité totale et les coefficients $(\epsilon (2i-1)/n^2)$ pondèrent la perméabilité due à la classe i de taille de pores.

En non saturé, seul les pores pleins d'eau sont conducteurs, et la sommation (3.1) ne porte que sur ces pores: la porosité ϵ est remplacée par la teneur en fluide θ .

La plupart des auteurs introduisent le concept de tortuosité. La perméabilité d'un élément de milieu poreux de longueur L est calculée en multipliant le flux total par L , alors que le flux dans chaque pore est inversement proportionnel à sa propre longueur l ; le pore est tortueux quand $l > L$, c'est-à-dire quand il fait des détours le long des grains. Les pores les plus fins sont considérés comme les plus tortueux et contribuent moins à la perméabilité de l'ensemble que dans le modèle de tubes parallèles.

Le même modèle sous-tend les calculs des fonctions $h(\theta)$ et $K(\theta)$ à partir d'une distribution de pores fractales, où la pondération de chaque classe de taille de pores est effectuée suivant des critères de connectivité ou de tortuosité (Rieu et Sposito, 1991b, Shepard, 1993, cf. Chap.2).

Les sommations discrètes effectuées s'expriment sous une forme continue lorsque la distribution de taille des pores est décrite par une fonction de densité de distribution $f(r)$ (densité volumique des pores en fonction de leur taille).

Cette fonction peut être définie par:

$$\theta(h) = \int_{\text{pores pleins}} f(r) dr$$

La perméabilité se calcule alors, toujours à partir de la loi de Poiseuille:

$$K(\theta) = T(\theta) \int_{\text{pores pleins}} r^2 f(r) dr$$

et en pondérant par un facteur de tortuosité $T(\theta)$ (Burdine, 1952). Si l'on dispose d'une expression analytique pour $\theta(h)$, on peut en déduire l'expression analytique de $K(\theta)$ (Brooks et Corey 1964).

La perméabilité du milieu poreux est donc calculée à partir d'une forme intégrale des équations de mouvement pour chaque pore et d'une deuxième intégration effectuée sur l'ensemble des pores.

3.1.4 Représentation de la structure poreuse du sol et choix d'une échelle

A l'échelle de Darcy, une structure poreuse est vue comme un milieu continu, et les caractéristiques de l'agencement des éléments structuraux ne peuvent être introduites que sous la forme de paramètres globaux.

Par ailleurs, à l'échelle microscopique, une structure poreuse se définit comme un ensemble de grains individualisés dans un espace poral continu. S'il est possible de représenter ainsi certains sols à structure particulaire et de tailles de particules assez homogènes, la prise en compte des sols structurés en agrégats, souvent sur plusieurs niveaux, nécessite de pouvoir représenter un nombre assez important d'éléments solides. Nous avons pensé que la méthode des gaz sur réseaux, séduisante parce qu'elle permet de travailler sur des géométries quelconques de milieux poreux, ne permettrait pas, pour des raisons pratiques de limites informatiques, de travailler sur un ensemble de particules représentatif d'une structure de sol. De plus il est possible que les maillages réguliers utilisés pour discrétiser l'espace soient un facteur limitant les possibilités de représentation de déformation de structure.

Nous avons donc choisi un niveau d'approche intermédiaire, à l'échelle des pores. Une structure poreuse se définit comme un ensemble de pores individualisés, un ensemble équivalent à une structure réelle. Il s'agit d'une décomposition conceptuelle de l'espace poral en éléments simples dont le comportement élémentaire est déduit de l'intégration des lois de fonctionnement à l'échelle microscopique. Dans le paragraphe suivant, nous présentons des extensions du modèle de base dont nous nous sommes inspirés (§3.2.1). La phase solide n'est généralement pas représentée mais l'échelle des pores est du même ordre de grandeur que l'échelle des particules et il est possible d'associer un ensemble de pores à une distribution de tailles de particules (§3.2.2).

3.2 EXTENSIONS DU MODÈLE CAPILLAIRE

Du fait de sa simplicité extrême, un modèle de tubes cylindriques parallèles ne peut rendre compte entièrement du comportement hydrique d'un milieu poreux. En particulier, le modèle ne permet pas de représenter l'hystérésis bien connue* de la relation $h(\theta)$ (Fig3.5.a), puisque cette relation est calculée de façon univoque à partir de la distribution du volume des pores en fonction de leur taille. Ce modèle ne permet pas non plus de rendre compte des phénomènes de piégeage (lorsque la saturation en eau n'atteint pas les valeurs extrêmes de 0% ou 100% de la porosité totale). Il conduit aussi à une surestimation de la conductivité à saturation, à moins d'introduire des coefficients de pondérations empiriques. Ce modèle est à la base de

* on constate expérimentalement que la relation $h(\theta)$ est différente en imbibition - lorsque la teneur en eau ou en fluide mouillant augmente- et en drainage - lorsque la teneur en eau ou en fluide mouillant diminue.

nombreuses extensions, que nous regroupons sous le terme de "modèles capillaires". Thirriot(1982) note que l'utilisation intensive de "l'imagerie capillaire" a souvent été jugée sclérosante par certains, mais permet de "représenter les traits essentiels du comportement naturel d'un milieu poreux".

3.2.1 Modèles basés sur une distribution de tailles de pores

Premières extensions du faisceau de tubes capillaires

Introduction locale, au niveau d'un pore, d'irrégularités expliquant piégeage et/ou hystérésis

Un certain nombre de travaux concernent l'amélioration du motif de base du modèle capillaire, en modifiant la géométrie des parois du tube cylindrique initial, qui peuvent devenir rugueuses, sinusoïdales, alternativement divergentes et convergentes ou présentant des constriction périodiques. La géométrie de ces capillaires reste assez régulière pour pouvoir résoudre les équations de Navier-Stokes pour des écoulements diphasiques et permettent, par une utilisation fine de la loi de Laplace donnant la position des interfaces entre deux fluides, d'expliquer les phénomènes d'hystérésis (Lévine et al, 1980, Fig.3.4.b) ou de piégeage dans les aspérités des parois (Danis et Quintard,1984, Fig.3.4.a).

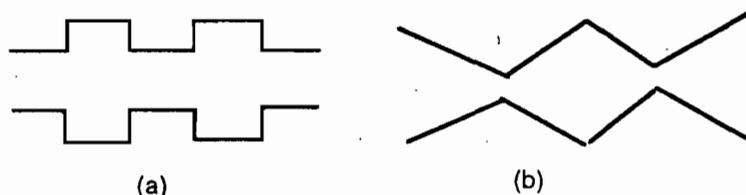
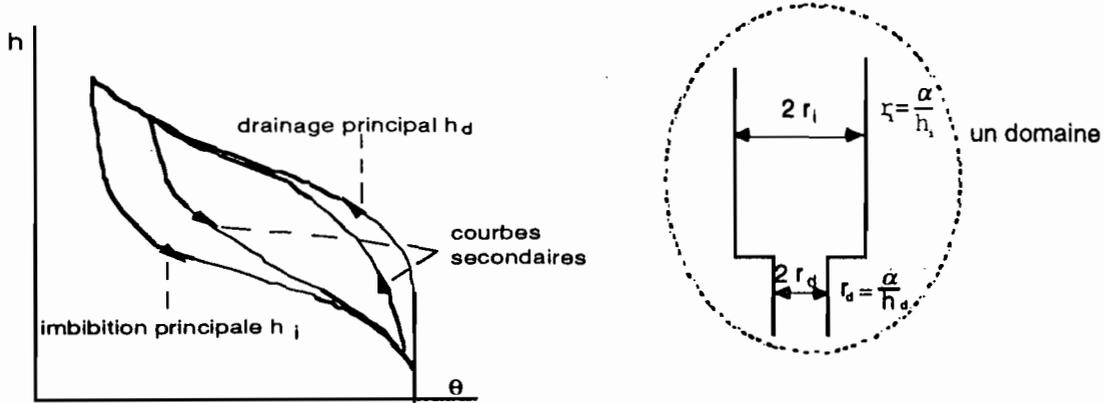


Figure 3.4. Forme étendue de la géométrie locale des pores.

Théorie des domaines

Fort des travaux précédents permettant de penser qu'un certain nombre de phénomènes globaux peuvent être expliqués physiquement par la géométrie locale des pores, d'autres auteurs remplacent le tube capillaire par une "boîte noire" appelée "domaine", défini comme un volume élémentaire de l'espace poral affecté de caractéristiques élémentaires propres (Everett,1955). Suivant la valeur de la pression capillaire, l'état d'un domaine est soit plein d'eau soit vide. Ses caractéristiques sont un volume, une pression seuil entre les deux états saturés en eau ou en air ou bien une hystérésis interne sous la forme d'un doublet (pression de drainage, pression d'imbibition), éventuellement des capacités de piégeage d'air ou d'eau ou encore une valeur de conductivité pour l'état saturé.

Prenons l'exemple de la "théorie des domaines indépendants" développée en particulier par Poulouvassilis(1969,1974) et Mualem(1973,1974,1975,1976,) pour rendre compte et étudier l'hystérésis de $h(\theta)$ et $K(\theta)$.



(a) Modélisation de l'hystérésis d'après Mualem (1974)

(b) Illustration d'un domaine élémentaire de l'espace poral affecté d'une hystérésis propre.

Figure 3.5. Hystérésis de la relation $h(\theta)$

A une même teneur en eau θ correspondent deux valeurs extrêmes de h sur les branches principales d'hystérésis (Fig.3.5.a), une pression de drainage h_d et une pression d'imbibition h_i ($h_d > h_i$) auxquelles on peut associer des rayons de pores équivalents r_d et r_i selon la loi de Laplace ($r_d < r_i$). "In a wetting process, water fills pores of a larger opening radius than in drainage", dit Mualem (1976). Un domaine est alors construit par l'association virtuelle de deux pores (Fig.3.5.b). Le domaine ne peut être rempli d'eau que si le plus gros pore est de rayon suffisamment petit et drainé que si le plus petit pore est de taille suffisamment grande. Deux fonctions de distribution f_d et f_i du volume poral, fonctions respectivement des rayons r_d et r_i sont alors calculées à partir des branches principales d'hystérésis de $h(\theta)$ calculées expérimentalement. Puis un modèle analytique permet de prévoir les branches secondaires, sous forme d'une intégrale double à variables séparables (d'où le nom de domaines indépendants), intégrale calculée, pour une pression et un historique des cycles d'imbibition et de drainage donné, sur l'ensemble des domaines pleins d'eau déterminé au moyen de diagrammes adaptés.

$$\theta(h) = \iint_{\substack{\text{domaines} \\ \text{pleins}}} f(r_d, r_i) dr_d dr_i = \iint_{\substack{\text{domaines} \\ \text{pleins}}} f_d(r_d) f_i(r_i) dr_d dr_i.$$

Plusieurs versions du modèle existent, dont les plus sophistiquées améliorent les prévisions quantitatives.

La conductivité hydraulique est aussi calculée de façon analytique et prévoit une hystérésis moins marquée que $\theta(h)$ conformément aux données expérimentales.

$$K(\theta) = S^n \iint_{\substack{\text{domaines} \\ \text{pleins}}} r_d r_i f_d(r_d) f_i(r_i) dr_d dr_i.$$

Le calcul de $K(\theta)$ est pondéré par un facteur de tortuosité S^n où S représente un taux de saturation normalisé et n un exposant qui peut varier suivant le type de sol. Moyennant un facteur supplémentaire d'ajustement, à savoir une valeur de conductivité mesurée expérimentalement, les données calculées concordent très bien avec les données observées.

Assemblage de domaines en série ou en couplage "parallèle-série"

Un modèle formé par l'assemblage en série de N domaines de caractéristiques différentes (Thirriot, 1982, Billotte, 1986) peut être considéré comme une extension des modèles à domaines indépendants.

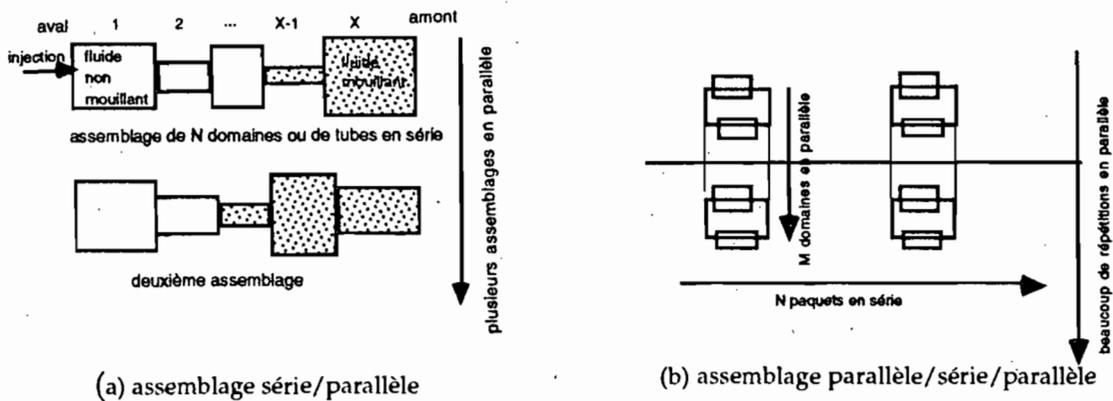


Figure 3.6. Assemblages de plusieurs domaines ou tubes capillaires.

Le milieu étant initialement saturé par un fluide A, on injecte un fluide B à partir de la phase aval. Le fluide B ne peut chasser le fluide A que si la pression d'injection de B est supérieure à la pression (imbibition ou drainage suivant le cas de figure) caractéristique du domaine. Le domaine X ne peut être envahi par B que si les domaines 1,2,...,X-1, sont envahis (Fig.3.6.a). La probabilité pour X d'être envahi peut être calculée pour des lois de distributions données de pressions caractéristiques des domaines. La teneur en fluide peut alors être calculée pour une pression capillaire donnée et l'on peut montrer par des calculs probabilistes qu'elle n'est pas la même en drainage et en imbibition, et ceci même si chaque domaine élémentaire est réduit à un tube cylindrique et ne présente pas d'hystérésis propre. Pour obtenir des allures réalistes des courbes d'imbibition et de drainage, le nombre N de tubes en série doit être réduit de façon à éviter les phénomènes d'engorgements et les résultats lissés par la prise en compte de plusieurs motifs série assemblés en parallèle. L'hystérésis de la relation $h(\theta)$ peut être ainsi mise en évidence, mais pas les phénomènes de piégeage, car le fluide A peut toujours s'échapper par la face amont.

Par contre l'assemblage en série de plusieurs sous-assemblages en parallèles (Fig.3.6.b) permet des chemins d'entrée variés du fluide B qui peut contourner un domaine rempli de fluide A et l'isoler complètement, piégeant ainsi une certaine quantité de fluide A pour lequel il n'existe pas

de chemin continu entre le domaine considéré et l'amont. Billotte (1986), toujours en termes probabilistes, a effectué une étude systématique de ce modèle qui permet de simuler des cycles d'hystérésis principaux ouverts (lorsque pour un état initial totalement saturé par un fluide mouillant et après un premier drainage, une imbibition ne permet pas d'atteindre l'état de saturation initial) ou fermés et des cycles intermédiaires d'ordre quelconque fermés. Il propose une formulation analytique des résultats pour certaines lois théoriques de répartition des volumes des domaines. Son étude de la perméabilité est conduite de façon analogue mais plus ardue et ne peut être menée à terme que par de longues simulations numériques sur un nombre fini de motifs.

Réseaux de pores

Réseaux simples de liens

Dans le sens d'une complexité croissante et aussi d'une meilleure représentation des phénomènes, on est alors amené à imaginer l'espace poral comme un assemblage de pores en réseaux. Ces réseaux sont des maillages réguliers de l'espace bi- ou tridimensionnel de topologie variées (Fig.3.7).

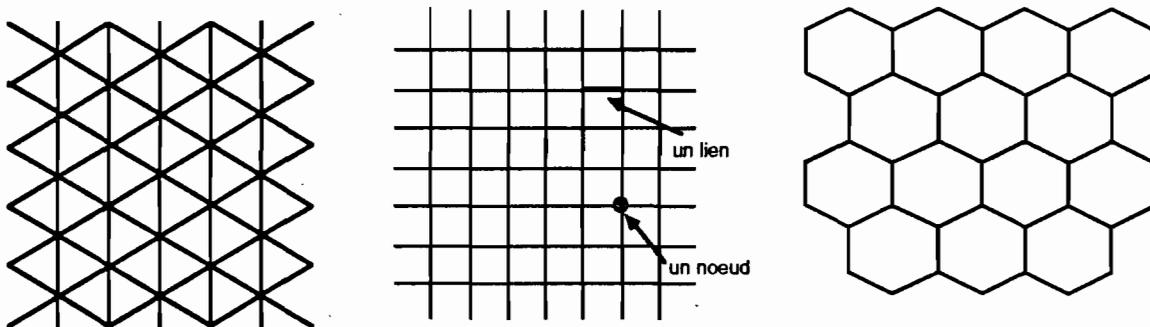


Figure3.7. Différents types de réseaux bidimensionnels

Chaque lien du réseau représente un pore élémentaire défini par un rayon équivalent et un volume. Il s'agit souvent d'un tube cylindrique, dont le volume définit une longueur variable (qui n'est pas celle du lien servant à représenter le pore). On représente généralement l'invasion d'un fluide sur un domaine carré, progressant d'une face choisie comme "face aval" vers la face "amont" opposée, en supposant les deux autres faces fermées. Dans certains cas simplifiés, on peut encore raisonner en termes probabilistes.

- C'est ainsi que Thirriot (1982) établit la forme des branches principales d'hystérésis de $h(\theta)$ sur des réseaux hexagonaux ou carrés en deux dimensions: les liens du réseau représentent des pores tubulaires de longueur identiques et dont les rayons suivent une loi de distribution assez

simple; un fluide est injecté à partir d'une face du réseau et progresse toujours vers l'avant, au fur et à mesure que des pores deviennent accessibles et de taille convenable pour être envahis.

Mais la plupart des travaux sur les réseaux de pores sont effectués par simulation, ce qui permet de travailler avec des distributions de pores quelconques.

- Fatt (1956) est le pionnier en matière de simulation de réseaux de pores. Il travaille sur des réseaux bidimensionnels sur lesquels il simule l'invasion par un fluide non mouillant. Il étudie différentes distributions théoriques de tailles de pores et différents types de réseaux. Il montre que plus la coordinance du réseau augmente (plus le nombre de liens se rencontrant en un même noeud est élevé), plus les résultats se rapprochent de ceux obtenus avec un faisceau de tubes parallèles.

Pour calculer la perméabilité, il met en pratique l'analogie entre réseaux de tubes conducteurs de fluide et réseaux de résistances électriques (cf.annexe A), en construisant réellement des réseaux électriques avec des éléments conducteurs de résistance variable. Pour simuler un milieu poreux se désaturant en fluide mouillant, il enlève au fur et à mesure les plus faibles résistances et les remplace dans un deuxième réseau représentant l'emplacement du fluide non mouillant; il mesure à chaque étape la résistance équivalente des deux réseaux, et en déduit la forme des deux courbes de perméabilité relative.

Son étude de sensibilité sur la longueur l affectée à chaque pore de rayon r représenté par un lien du réseau conclut à $l \sim r^{-1}$ comme le choix le plus apte à reproduire qualitativement des courbes expérimentales.

- Wise (1991), s'appuyant sur les travaux de Fatt, simule un réseau cubique dont les liens représentent des tubes capillaires cylindriques (de largeurs et longueurs proportionnels $l \sim r$). La distribution de tailles de pores est déterminée à partir de courbes de rétention en drainage. Wise s'intéresse à la valeur de la perméabilité à saturation calculée numériquement par analogie électrique. Il montre que les résultats dépendent de la répartition spatiale des pores sur le réseau. Dans le cas d'une répartition aléatoire, la perméabilité est sous-estimée, en raison du passage obligé du fluide par des pores très fins. La distribution de taille des pores est alors tronquée en dessous d'une valeur r_c déterminée empiriquement de façon à faire concorder les perméabilités simulée et calculée; cela conduit à supprimer environ la moitié des pores (en termes de volume et beaucoup plus en nombre), l'ensemble des pores conservés pour le calcul définissant "the permeability structure of the medium".

- Ce sont les fractures d'une roche qui sont modélisées par un réseau tridimensionnel de coordinance variable, et la perméabilité par analogie électrique chez Cacas et al (1992). La

distribution de taille des fractures simulée est statistiquement identique à la distribution réelle des tailles directement mesurées sur le terrain. Les prévisions du modèle sont en accord avec les mesures de perméabilité à plus grande échelle.

Théorie de la percolation.

La théorie de la percolation (voir Stauffer 1985 ou de Gennes 1976 pour des revues) permet de décrire des phénomènes de transport sur un ensemble d'objets dont les interconnexions peuvent être représentées par leurs positions relatives sur les liens ou les noeuds d'un réseau. Suivant la proportion d'objets "actifs" et "inactifs", c'est-à-dire permettant ou non le transport localement, et à condition qu'ils soient répartis aléatoirement sur le réseau, on peut établir des lois théoriques et très générales pour le comportement global d'un réseau infini. On distingue la percolation de sites lorsque les éléments actifs et inactifs sont répartis sur les noeuds d'un réseau et la percolation de liens lorsqu'ils sont répartis sur les liens d'un réseau.

Pour une faible proportion p d'éléments actifs on peut seulement constater que la plupart d'entre eux se regroupent en paquets ou amas finis. On montre qu'il existe une proportion critique p_c , un seuil de percolation, à partir duquel apparaît un amas infini qui permet statistiquement le transport entre deux points quelconques du réseau*.

La plupart des travaux sur les réseaux de pores y font référence. On pourra consulter Chatzis et Dullien(1982) pour une étude détaillée à l'issue de laquelle ils concluent que " les propriétés des réseaux aléatoires obtenus d'après la théorie de la percolation des sites rendent bien compte de l'évolution en drainage et de la perméabilité relative au mercure des échantillons de grès étudiés".

En milieu saturé, on peut modéliser ainsi une roche mal connectée et saturée d'eau par un réseau dont chaque lien représente une fissure ou l'absence de fissure: au delà d'une certaine densité de fissures le milieu est conducteur (Billaux, 1990).

On modélise de la même façon un milieu poreux très bien connecté mais non saturé. Lorsque deux fluides non miscibles sont en présence et qu'on les suppose répartis en tout ou rien dans

* Deux exemples parmi beaucoup d'autres: on peut représenter une forêt par un ensemble d'arbres en place ou abattus disposés sur les noeuds d'un réseau et considérer la propagation d'un feu de forêt: les arbres non abattus (actifs) permettent le transport du feu vers les sites voisins, les arbres abattus (non actifs) ne le permettent pas. On imagine aisément que la propagation du feu d'un bout à l'autre de la forêt sera possible ou non suivant la proportion d'arbres abattus. De même un réseau dont certains liens sont des conducteurs électriques et d'autres des isolants permettra ou non le transport de l'électricité entre deux points éloignés du circuit. La théorie établit que les valeurs des seuils dépendent seulement de la coordinance du réseau (i.e. le nombre de liens se rejoignant en un même noeud), du type de percolation (sites ou liens), et de la dimension de l'espace dans lequel on travaille; et surtout que de nombreuses propriétés ("conductivité" totale, distribution du nombre d'amas en fonction de leur taille, etc) ont un comportement universel autour du seuil de percolation. Plusieurs propriétés mesurables liées au transport varient en $(p-p_c)^\alpha$ où α est un exposant critique qui ne dépend pas du phénomène étudié, ni des détails géométriques du réseau, mais seulement de la dimension euclidienne de l'espace dans lequel on se trouve. On peut donc se placer dans le cadre général de cette théorie pour en transposer les résultats à un cas d'étude particulier.

chaque pore dans un réseau de liens capillaires simple, les liens actifs pour le transport du fluide X sont les pores remplis par ce fluide. La perméabilité relative au fluide X est nulle en deçà du seuil de percolation qui dépend de la coordinance du réseau (nombre de liens se rencontrant en chaque noeud) et de la dimension euclidienne.

- De façon très théorique, Golden (1980) montre que l'hystérésis de la relation $h(\theta)$ est expliquée de façon beaucoup plus simple par les réseaux de percolation que par la théorie des domaines indépendants: il considère que les pores de taille convenable pour être envahis par un fluide ne le sont effectivement que s'ils appartiennent à un amas infini de percolation. Il en déduit la présence logique de l'hystérésis (et de ses boucles secondaires) qu'il s'agisse d'un réseau de liens ou d'un réseau de sites.

- Percolation d'invasion

On a vu que l'on modélisait souvent la pénétration d'un fluide sur un réseau en imposant un chemin continu d'alimentation à partir de la face d'injection (ou des faces ou points d'injection). Lorsque cette condition est imposée sur un réseau de percolation, on parle alors de "percolation d'invasion" (Lenormand et al, 1985, Charlaix, 1987, Chatzis et Dullien, 1982). Dans ce cas, la pénétration du fluide ne se fait que dans les pores connectés à la source d'alimentation: en dessous du seuil de percolation, il s'agit d'amas finis dont la teneur θ en fluide peut être considérée comme nulle si l'on se rapporte à un réseau infini. Le seuil de percolation est caractérisé par l'apparition d'un amas infini dont la structure est fractale (Lenormand et al, 1985), tout comme dans un réseau de percolation simple, et par une transition abrupte entre une teneur en fluide quasi nulle et une valeur proche de la saturation. La courbe $h(\theta)$ traduit cette forte variation de teneur en eau pour une faible variation de pression capillaire d'une façon jugée très proche des courbes observées sur certains milieux poreux (Fig.3.8).

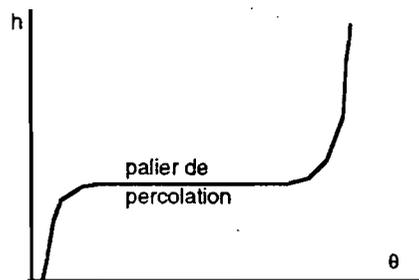


Figure 3.8. Palier de percolation pour la courbe pression/teneur en fluide non mouillant*

* Il convient de noter (Lenormand, comm.pers.) que la présence d'un véritable palier de percolation (observé par plusieurs auteurs) n'est vraisemblablement dû qu'aux effets de taille finie des réseaux simulés: en effet, la forme de la courbe d'invasion est théoriquement (au dessus du seuil de percolation h_c) celle d'une loi de puissance $\theta \sim (h-h_c)^2$. Il conviendra de tenir compte de cette remarque lorsque qu'il sera fait mention à ce palier ultérieurement (Chap.5 et conclusion)

- Réseaux de sites et de liens.

Un exemple de réseau qui semble être très utilisé est développé par Diaz et al (1987) et Kantzas et al (1988); le modèle est repris par Daian et Saliba(1991) et par Kutilek et al (1992). Les pores sont distribués à la fois sur les sites et les liens d'un réseau cubique (Fig 3.9). Le lien qui relie deux sites est choisi de diamètre toujours plus fin que ceux des sites l'entourant (on parle de sites et liens corrélés); les liens représentent les constriction de l'espace poral et les sites les élargissements des pores. Il s'agit d'une recherche de réalisme et aussi, selon ces auteurs, de la "structure la plus apte à rendre compte de l'hystérésis capillaire".

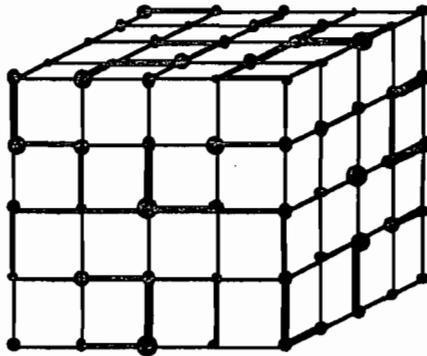


Figure 3.9 Réseau de sites et de liens alternés

On se donne d'abord une distribution du nombre de sites en fonction de leur taille, pour N classes de tailles de sites numérotées de 0 à N par ordre décroissant de taille. Les liens sont répartis dans ces classes: ils sont affectés à la classe du plus petit site adjacent.

L' invasion d'un fluide est décrite en termes de percolation de sites (du point de vue de la progression du fluide, les liens sont ignorés). En imbibition, les sites les plus fins sont envahis les premiers, et les liens sont seulement automatiquement envahis dès que leurs sites adjacents sont envahis. En drainage, les sites les plus gros (les premières classes de taille) sont envahissables, mais ils ne sont effectivement envahis que s'il existe un chemin continu de sites depuis la face d'alimentation, et aussi si les liens de la même classe sont envahissables, deux conditions sources d'hystérésis. On simule ainsi un schéma de type percolation d'invasion pour le fluide non mouillant et de type percolation simple pour le fluide mouillant ("l'eau peut accéder à tout pore par diffusion de vapeur et s'y condenser" dit Daian).

Pour déterminer $h(\theta)$, il faut connaître le volume représenté par chaque pore: les fonctions de densité volumique des distributions de liens et de noeuds en fonction du diamètre sont déterminées par ajustement sur les données expérimentales. Afin de représenter de larges distributions de pores et des pourcentages de volumes non négligeables pour les pores les plus fins, Daian et Saliba (1991) sont conduits à identifier proportions en nombre et proportion en

volume (chaque site et chaque lien représente un faisceau de cylindres parallèles d'autant plus nombreux que leur diamètre est petit).

La perméabilité en milieu non saturé relative à un fluide donné est alors calculée par analogie électrique. La conductance de chaque site est soit négligée (Kantzas et al), soit répartie sur les six liens adjacents (Daian et Saliba), de façon à se ramener à l'étude d'un réseau de liens conducteurs.

Pour le calcul de la perméabilité relative au fluide non mouillant, la présence de pores non conducteurs car vides pose un problème algorithmique: on leur assigne donc une conductance très faible (Kantzas et al). Par contre les pores sont supposés toujours conducteurs en fluide mouillant pour des raisons physiques: pour Kantzas, les pores contiennent toujours une faible quantité de fluide mouillant retenu dans les aspérités des parois des pores (en quantité mal connue); pour Daian, ils contiennent de la vapeur (d'eau) dont la diffusion est assimilée en pratique à une conduction.

La comparaison avec des données expérimentales s'avère dans tous les cas satisfaisante en drainage, et mauvaise en imbibition ("for imbibition conditions the deviations from the experimental data strongly indicate that the modelling is not satisfactory", Kantzas et al).

- Lenormand(1981) étudie la dynamique des fluides non miscibles dans des capillaires à la fois théoriquement et expérimentalement. La visualisation des déplacements de fluides dans des réseaux plans de capillaires gravés permet de juger de la validité des hypothèses émises dans les simulations, et par exemple d'évaluer l'importance des phénomènes de piégeage.

Il apparaît (Lenormand 1983a et b) que si la progression d'un fluide non mouillant est essentiellement soumise à des conditions de pression, l'imbibition est liée à des conditions de débit qui dépendent des conditions expérimentales. Lorsque l'imbibition est lente, l'écoulement est possible le long des arêtes des grains et même par film le long des parois pour un débit très faible: la présence simultanée des deux fluides dans un même pore est alors possible. Dans le cas d'une imbibition rapide, il est possible de représenter le milieu poreux par un seul réseau de sites et de liens et l'imbibition en termes de percolation de sites. Dans le cas d'une imbibition lente, on peut introduire un réseau dual dont les sites sont situés au centre des grains, et simuler l'imbibition en termes de percolation de liens dans le réseau dual. Il semble aussi que les différents mécanismes physiques d'imbibition dépendent du rapport de taille entre les élargissements et les cols du réseau.

Par ailleurs Lenormand et al (1989) montrent que le modèle de percolation d'invasion en drainage ne convient que lorsque les forces visqueuses sont négligeables devant les forces capillaires (les effets visqueux pouvant être très importants lorsque l'huile est un des fluides)

Dans une revue sur les simulations de réseaux de pores, Dullien(1991) conclut qu'il n'y a pas actuellement un modèle "garanti", mais qu'il est conseillé de travailler sur des réseaux tridimensionnels et qu'il est nécessaire de déterminer par visualisation différentes propriétés structurales (parmi lesquelles la coordinance "réelle" moyenne, les distributions de taille respective des élargissements et rétrécissements de pores, et l'identification des réseaux secondaires dans les milieux à plusieurs niveaux de porosité). C'est ce que lui-même recherche en analysant des séries de sections rapprochées et parallèles; il signale aussi la possibilité d'utiliser des méthodes optiques de mesures de densités par analyse d'images.

"Un exemple de système secondaire de pores est celui des capillaires dans les argiles" dit Chatzis (1982). Kutilek et al (1992) superposent ainsi deux réseaux pour modéliser la courbe de rétention de sols à distribution de pores bimodale.

3.2.2 Modèles basés sur une distribution des éléments solides

Bien que Matheron (1967) considère que la granulométrie des grains d'un milieu poreux est plus sujette à caution que la granulométrie des pores obtenue par porosimétrie au mercure, il semble bien que la distribution du volume des particules primaires du sol en fonction de leur taille soit une donnée assez fiable et très facilement mesurable. Plusieurs auteurs recherchent alors un modèle qui puisse associer un ensemble de pores à un ensemble de particules donné, de façon à pouvoir utiliser un modèle capillaire pour déterminer ses caractéristiques hydriques.

Le sol est à nouveau défini par ses éléments solides, mais sans tenir compte de leur répartition spatiale. Ceci signifie que l'ensemble de pores associé aux éléments solides est de nouveau défini par une simple distribution de tailles de pores. L'objectif est simple et ambitieux: une simple granulométrie permettrait de déterminer les caractéristiques hydriques du sol.

- Arya et Paris (1981) proposent une méthode pour obtenir $h(\theta)$ à partir d'une distribution de taille de particules en N classes.

Le principe employé pour déduire une distribution de taille de pores est le suivant: on considère que plus les particules sont fines, plus leur empilement ménage des vides étroits. A chacune des N classes de taille de particules, on associe un pore (N pores au total). La classe de taille R_i est supposée contenir des particules sphériques de diamètre R_i dont on peut donc déterminer le nombre N_i . Le pore cylindrique associé est supposé "suivre le bord" des particules juxtaposées et sa longueur est $l_i = N_i \cdot R_i^\alpha$ (α est égal à 1 pour un pore rectiligne et c'est un paramètre à estimer pour une géométrie naturelle) (Fig.3.10). Reste à trouver le diamètre r_i de ce pore: supposant que l'indice des vides e (rapport volume des pores/volume des particules) est le même pour

chaque classe et égal à celui de l'échantillon tout entier, le calcul se fait aussitôt:
 $r_i = R_i(2/(3eNi(1-\alpha)))^{1/2}$.

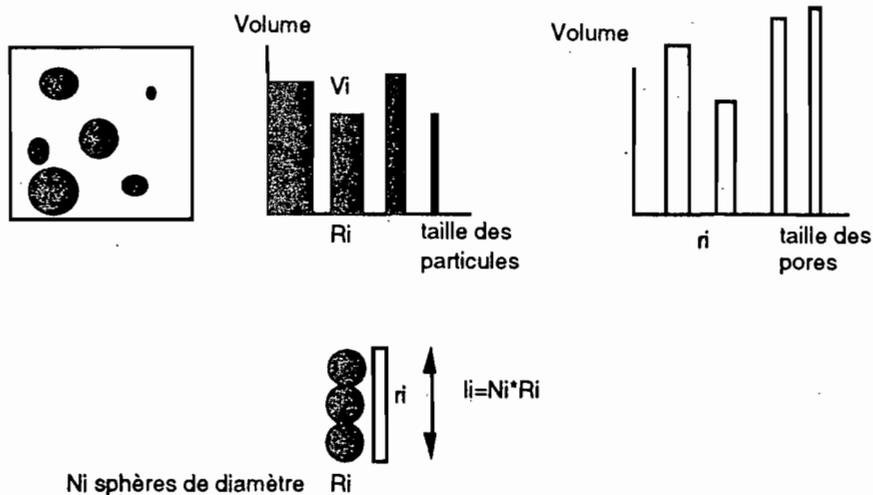


Figure 3.10. Détermination de la distribution de taille des pores à partir de la distribution de taille des particules (Arya et Paris, 1981).

Le modèle capillaire utilisé est donc un ensemble de N tubes capillaires indépendants, qui permet de calculer N couples de valeurs (h, θ) . Le paramètre α est déterminé par calage sur les données expérimentales en comparant les courbes $h(\theta)$ obtenues par ajustement de l'expression analytique de Van Genuchten (Chap1, formule 1.3) sur les données calculées et observées. Les résultats sont jugés "satisfaisants pour les sols non gonflants et en négligeant l'hystérésis".

- Haverkamp et Parlange (1986) associent à une distribution cumulée de taille de particules $F(R)$ une distribution cumulée de tailles de pores $f(r)$ puis une courbe de rétention $h(\theta)$. L'hypothèse est que $r=R/\gamma$, où γ est une constante de proportionnalité caractérisant l'assemblage structural des particules. Les paramètres (λ, h_b) de l'expression analytique de $h(\theta)$ de Brooks et Corey (Chap1, formule 1.2) sont exprimés par régression statistique à partir des paramètres (μ, R_g) correspondants dans une expression analytique similaire pour $F(R)$. Les paramètres obtenus par calage peuvent inversement permettre de calculer $h(\theta)$ à partir d'une courbe granulométrique, de la densité du solide, et de la teneur en eau à saturation naturelle. Dans une approche similaire à celle de Mualem (ce chapitre, §3.2.1.), la modélisation d'une des courbes principales de drainage ou d'imbibition permet de prévoir l'autre et les courbes secondaires. L'interprétation de l'hystérésis est faite par deux paramètres d'assemblages des particules (γ_d en drainage et γ_i en imbibition) et deux distributions de pores associées à la même distribution des particules. Les dix sols étudiés sont des sables. Les auteurs signalent des extensions du modèle en cours pour d'autres types de sols; en particulier le coefficient γ n'est

plus indépendant de la teneur en eau "when packing involves multisized particle arrangements with different levels of aggregates".

3.3 CONCLUSION: SIMULATION DE STRUCTURES DE SOL ET TYPE DE MODÉLISATION HYDRODYNAMIQUE; CHOIX RETENUS.

Si la structure du sol se définit en premier lieu à partir de l'assemblage des éléments solides, c'est dans l'espace poral que circule l'eau. La géométrie complexe de la frontière de cet espace rend impossible l'intégration exacte des équations microscopiques du mouvement des fluides. Nous avons choisi de travailler par simulation et non pas avec une approche mathématique basée sur une conceptualisation statistique ou analytique de la géométrie des milieux poreux. Nous avons aussi écarté les méthodes de simulations par "gaz sur réseaux" afin de rester à une échelle suffisamment grande pour pouvoir tenir compte de plusieurs niveaux d'organisation dans les sols.

Une alternative est fournie par le modèle capillaire, postulant qu'il est possible de trouver un ensemble de pores aux formes géométriques simples équivalent à la réalité. On attribue à chaque pore un comportement hydrodynamique élémentaire basé sur des lois physiques. Lorsque deux fluides non miscibles tels que l'air et l'eau sont présents dans l'espace poral, le modèle capillaire schématise leur répartition en considérant que certains pores sont pleins d'eau, et les autres pleins d'air (Loi de Laplace). La conductivité hydraulique de chaque pore plein d'eau est calculée à partir des formes intégrales des équations de mouvement dans un pore schématique (Loi de Poiseuille). L'équivalence entre le modèle et la réalité se situe au niveau du comportement macroscopique de l'ensemble des pores. L'intégration des comportements élémentaires peut se faire de multiples façons, et les modèles capillaires formés de pores indépendants ont été progressivement améliorés pour tenir compte des interconnexions des pores en les répartissant aléatoirement sur les liens ou sites d'un réseau. Le fonctionnement d'un réseau de pores partiellement saturé par un fluide est décrit par simulation, en empruntant au formalisme de la théorie de la percolation. De nombreux types de réseaux ont été étudiés, dans le sens d'une complexité croissante afin de se rapprocher au mieux des données expérimentales.

Les modèles capillaires ne représentent que l'espace poral du sol. Plusieurs auteurs ont cherché à associer un ensemble de pores à l'assemblage des particules du sol (Fig.3.11). Dans le même esprit, nous chercherons à déduire la structure de l'espace poral des contraintes imposées par

l'organisation des éléments solides, en construisant des structures simulées qui représentent à la fois les éléments solides et les vides du sol (Chap.4).

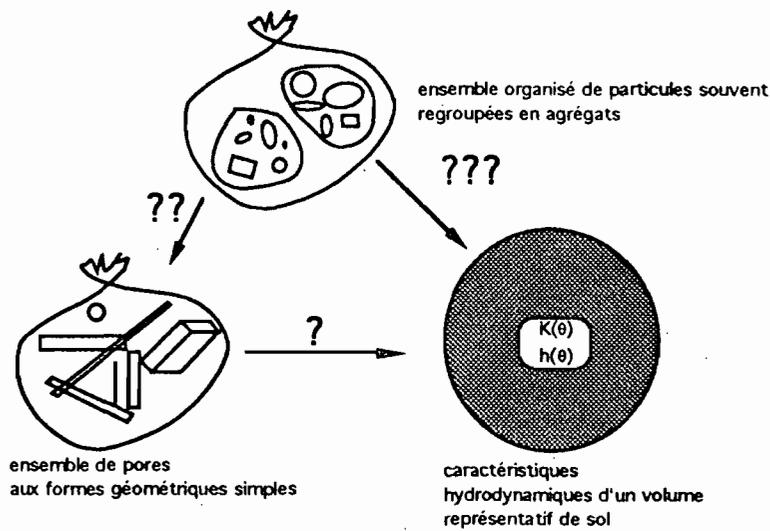


Figure 3.11. Recherche d'un ensemble de pores déduit de l'organisation structurale des sols

Mais avec une approche différente, nous chercherons à tenir compte de l'organisation spatiale des pores et de leurs interconnexions dans la détermination des caractéristiques hydriques de l'ensemble. Pour cela nous nous inspirons (Chapitres 5,6,7) des méthodes qui ont été présentées concernant les simulations de réseaux de pores.

DEUXIÈME PARTIE

RÉALISATION D'UN SIMULATEUR DE STRUCTURES DE SOL

CHAPITRE 4. CONSTRUCTION DE MODÈLES DE SOL STRUCTURÉS SUR PLUSIEURS NIVEAUX D'ORGANISATION ET DÉFORMABLES

4.1. CONCEPTION D'UNE STRUCTURE DE SOL COMME UN ENSEMBLE ORGANISÉ D'OBJETS ÉLÉMENTAIRES (PARTICULES, AGRÉGATS, PORES)

Nous avons voulu réaliser un modèle de structure, à la fois assez riche pour retenir la complexité de la réalité telle qu'elle est décrite par les pédologues, et assez formalisé pour être opérationnel, c'est-à-dire pour permettre la modélisation des écoulements d'eau. Nous avons choisi une voie intermédiaire entre une description réaliste mais difficilement exploitable de l'organisation des sols et un formalisme purement mathématique qui demande beaucoup d'abstraction et de simplifications. Nous avons essayé de "simuler" un échantillon de sol au sens le plus concret que l'on puisse donner à ce mot, c'est-à-dire en reconstruisant sur ordinateur une structure telle qu'elle peut être décrite par un observateur de terrain, sachant bien que nous ne pourrions pas échapper à des schématisations.

Une observation du sol de type naturaliste révèle des objets de natures variées, particules fines, agrégats, grains de sable, racines, vers de terre.... nous nous contentons d'une observation structuraliste: particules primaires, agrégats de particules et agrégats d'agrégats sont les objets de base de notre construction.

On cherche à déduire de cette organisation structurale des informations sur le fonctionnement hydrodynamique du sol. L'eau circule dans l'espace des vides ménagés entre les éléments solides. Pour pouvoir simuler les écoulements d'eau en nous basant sur un minimum de principes physiques (cf.Chap.3), nous avons choisi un modèle de type capillaire qui impose de décomposer l'espace poral en un ensemble de pores géométriques simples. La notion de pore, et le découpage d'un espace poral plus ou moins continu en un ensemble discret de pores est un modèle qui permet une approche simplifiée des processus hydriques. Les pores, objets conceptuels tellement manipulés qu'ils ont tendance à devenir concrets, sont une classe d'éléments fondamentaux de notre modèle.

Tous ces objets individuels sont solidaires les uns des autres et une représentation réaliste de l'ensemble doit se soumettre à plusieurs contraintes. Une composante de nos structures simulées est un réseau de pores particulier qui résulte des hypothèses faites sur l'organisation spatiale des solides. Réciproquement, la recherche de formes géométriques simples pour les pores impose des contraintes géométriques pour la représentation des éléments solides. De plus la structure est déformable. A tout instant, la répartition géométrique des différents objets peut évoluer en respectant une contrainte de base de conservation totale de la masse: les particules primaires bougent mais conservent leur forme et leur taille. Le respect de ces contraintes géométriques se traduit par un partage strict de l'espace entre ces différents objets.

Le sol peut donc se définir comme un ensemble de particules et de pores assemblés en agrégats sur plusieurs niveaux successifs. La structure proprement dite ou l'organisation spatiale de ces objets est définie par leurs relations de voisinages et leur interdépendance locale et hiérarchique.

Notre reconstruction de la réalité est "orientée-objet"* dans le sens où nous identifions les composants élémentaires de la structure et les propriétés qui leur sont propres, et où nous définissons l'organisation structurale par les relations existant entre ces objets et le fonctionnement de l'ensemble comme la résultante des comportements élémentaires et de leurs interactions.

L'implémentation de ce modèle de sol sur ordinateur est facilitée par la manipulation d'objets informatiques individualisés (cf. Annexe C) qui permet la construction de structures complexes. Les références informatiques seront peu présentes dans ce mémoire, mais savoir que la représentation informatique des objets physiques est directement calquée sur leur description par le langage courant peut aider à la compréhension des simulations qui suivront. "Chaque objet est une cellule, une brique de base pour la constitution d'un organisme complexe" (Ferber, 1990). Les particules primaires, les agrégats et les pores sont les briques de notre jeu de construction qui vise à reconstruire un édifice poreux qui puisse représenter une structure de sol. On présentera ensuite (chapitre 5 et suivants) des expériences numériques effectuées sur cet ensemble d'objets élémentaires (invasion d'eau, déformation) afin de déterminer les paramètres structuraux qui peuvent expliquer l'émergence des caractéristiques hydriques mesurées à l'échelle macroscopique sur des sols réels.

* L'expression "orientée-objet" est surtout utilisée à propos de méthodes et de langages de programmation (cf. annexe C). Il va de soi qu'il est toujours possible d'écrire un programme donné dans n'importe quel langage. L'utilisation d'un langage orienté objet rend plus aisée la construction d'entités individuelles et la manipulation des interactions entre les différentes classes d'objets propres à sa vision du réel. "The objects in the program model objects in the physical world in a much clearer and much direct way (Science, Peskin, 1993).

4.2. CONSTRUCTION D'UNE STRUCTURE DE SOL PAR FRAGMENTATION

Il semble très difficile de se donner a priori deux ensembles de pores et d'éléments solides, déduits de données expérimentales par exemple, et d'envisager ensuite la reconstruction du sol comme un puzzle. Si l'on se donne un ensemble de pores, on peut envisager différentes répartitions spatiales, sur les liens d'un réseau par exemple (cf. chapitre 3) auxquels on affecte une longueur et une épaisseur données, mais cette abstraction représente la topologie de l'espace poral et non sa géométrie, et les mailles du réseau ne peuvent pas représenter des éléments solides de taille imposée. Si au contraire, on se donne un ensemble d'éléments solides, on peut représenter aisément différents assemblages géométriques de ces éléments (différents empilements de particules sphériques par exemple), mais on aura du mal ensuite à faire correspondre l'espace vide restant à une distribution donnée de pores.

Pour respecter des contraintes spatiales cohérentes, nous avons mis au point un procédé de création simultanée d'éléments solides et de pores. C'est a posteriori que le réalisme des distributions générées dans tel ou tel cas particulier sera discuté.

Nous travaillons en 2 dimensions. La troisième dimension de l'espace est une fonction de cette représentation plane qui dépend des hypothèses faites sur le milieu (cf. §4.5).

4.2.1. Partition du plan

Les modèles de sol que nous avons construits sont définis par une partition exacte de l'espace en un ensemble d'éléments solides et de pores individualisés.

Pour cela une zone polygonale quelconque du plan Z_0 représentant un échantillon de sol simulé est d'abord fragmentée en sous-zones polygonales disjointes.

Le découpage de Z_0 en zones pourrait être associé à un quadrillage ou à un type quelconque de réseau. Pour préserver la possibilité de générer des fragments de tailles et positions variables, nous avons eu recours à un procédé connu de partition de l'espace nommé "tesselation de Voronoï" (ou encore construction des polygones de Thiessen en hydrologie) qui associe la distribution des fragments à une distribution quelconque de points initiaux que nous appelons des germes de fragmentation.

Soit donc N germes de fragmentation à l'intérieur de Z_0 . A chaque germe est associée une zone d'influence polygonale: le polygone P associé à un germe M est l'ensemble des points du plan dont le germe le plus proche est M . Un jeu de germes initiaux étant donné, on démontre mathématiquement qu'il en résulte une partition unique de Z_0 (Preparata et Shamos, 1988,

Serra 1982), que l'on imagine très bien intuitivement*. Les polygones d'une tessellation donnée ont un nombre de côtés variable.

A partir d'un jeu quelconque de germes initiaux (Fig.4.1.a), nous obtenons donc une partition du plan en zones polygonales dont la distribution spatiale et la distribution en taille sont directement fonction du type de lancer de germes (Fig.4.1b). Le cas de figure auquel nous nous référerons sous le terme "structure à germes aléatoires" correspond à un lancer de germes dont l'abscisse et l'ordonnée sont tirées au sort dans une loi uniforme (Fig.4.2ab), c'est-à-dire à une distribution de germes poissonniens dans le plan. La gestion de certains cas particuliers nécessite un développement adapté. C'est ainsi que lorsque les germes sont disposés sur un quadrillage régulier (Fig.4.3a) (points cocirculaires) les polygones générés (Fig.4.3b) ne sont qu'approximativement carrés (ce sont souvent des pentagones dont le cinquième côté est indiscernable).

C'est à partir de cette partition en zones que sont définies des structures de sol. L'ensemble des zones de fragmentation est appelé le squelette des structures de sol simulées.

* D'un point de vue numérique et algorithmique, la détermination exacte de ces polygones est beaucoup plus compliquée qu'elle n'en a l'air (cf annexe C), et a demandé un important travail de programmation (aisément réutilisable dans d'autres domaines).

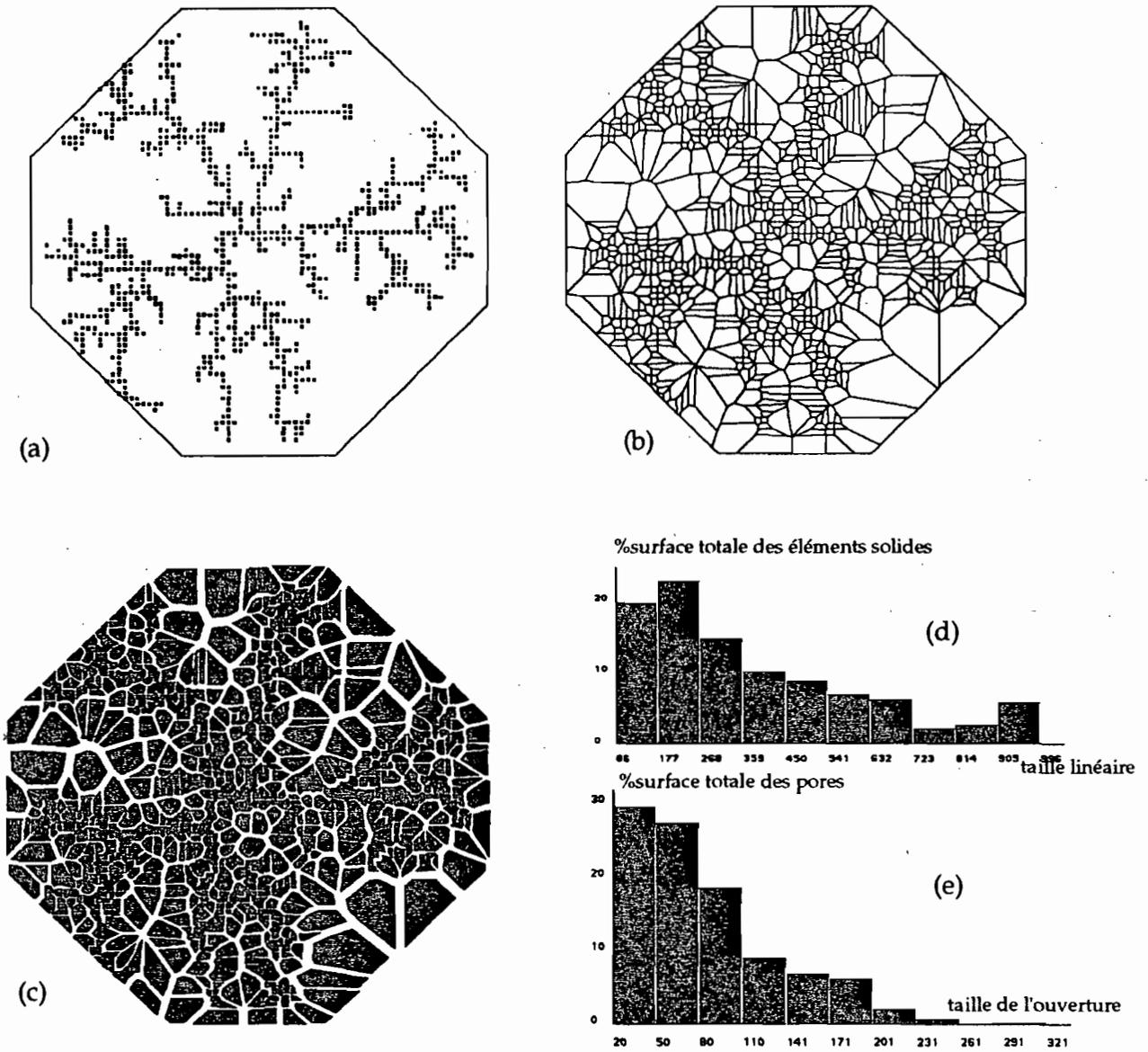


Figure 4.1. Fragmentation et structure de sol. Exemple 1.

a) Un ensemble de germes de fragmentation quelconque (ici construit par diffusion par agrégation limitée autour d'un point central) dans une zone initiale quelconque (900 germes).

b) Squelette (Tessellation de Voronoï).

c) Structure obtenue par des transformations homothétiques de rapports constants ($k=0.8$) et de centres situés aux centres de gravité des zones de fragmentation.

d) Distribution des éléments solides

e) Distribution des pores.

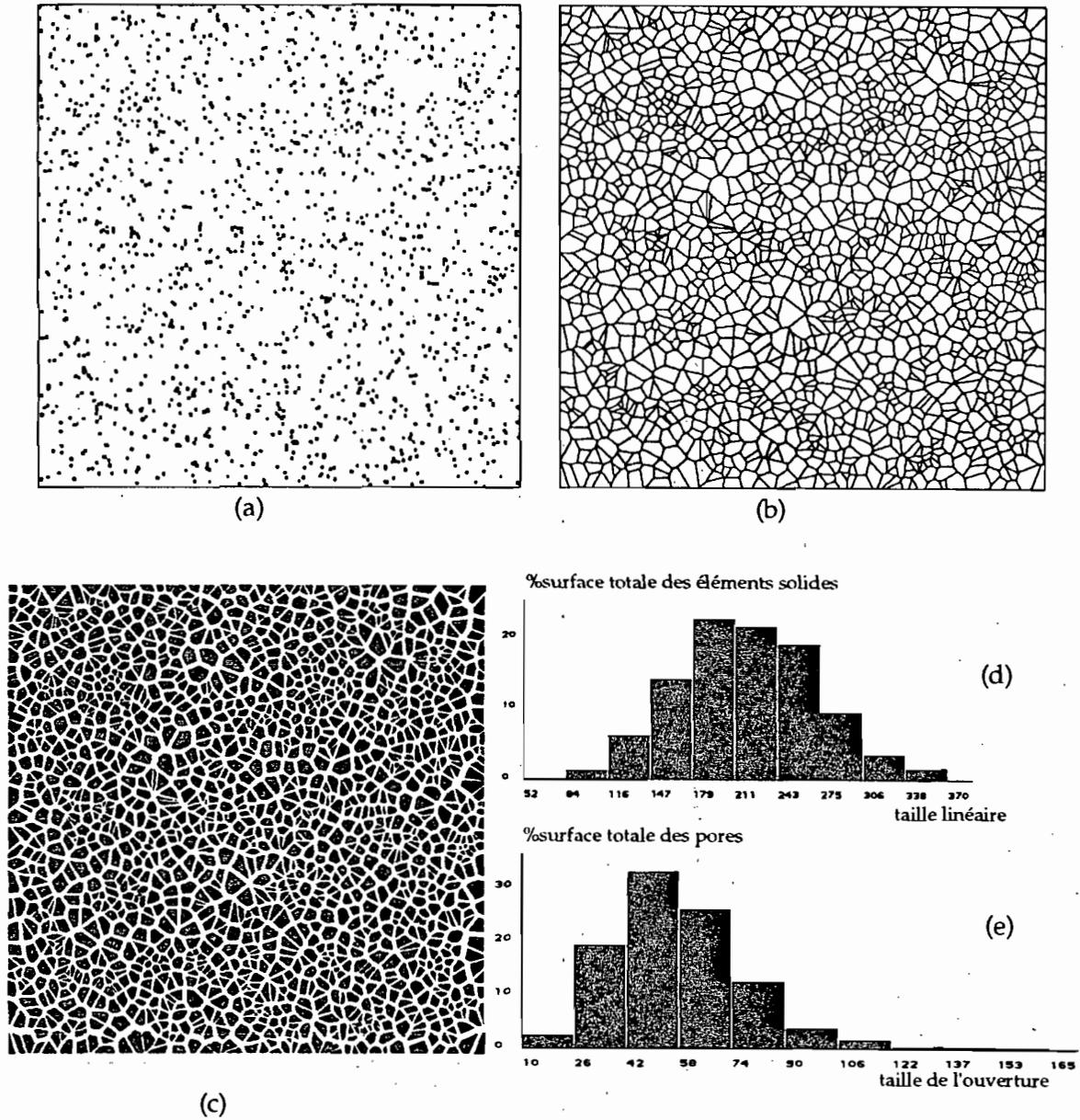


Figure 4.2. Fragmentation et structure de sol. Exemple 2.

- a) Des germes de fragmentation aléatoires (900 germes)
- b) Squelette (Tessellation de Voronoï).
- c) Structure obtenue par des transformations homothétiques de rapports constants ($k=0.8$) et de centres situés aux centres de gravité des zones de fragmentation.
- d) Distribution de taille des éléments
- e) Distribution de taille des pores.

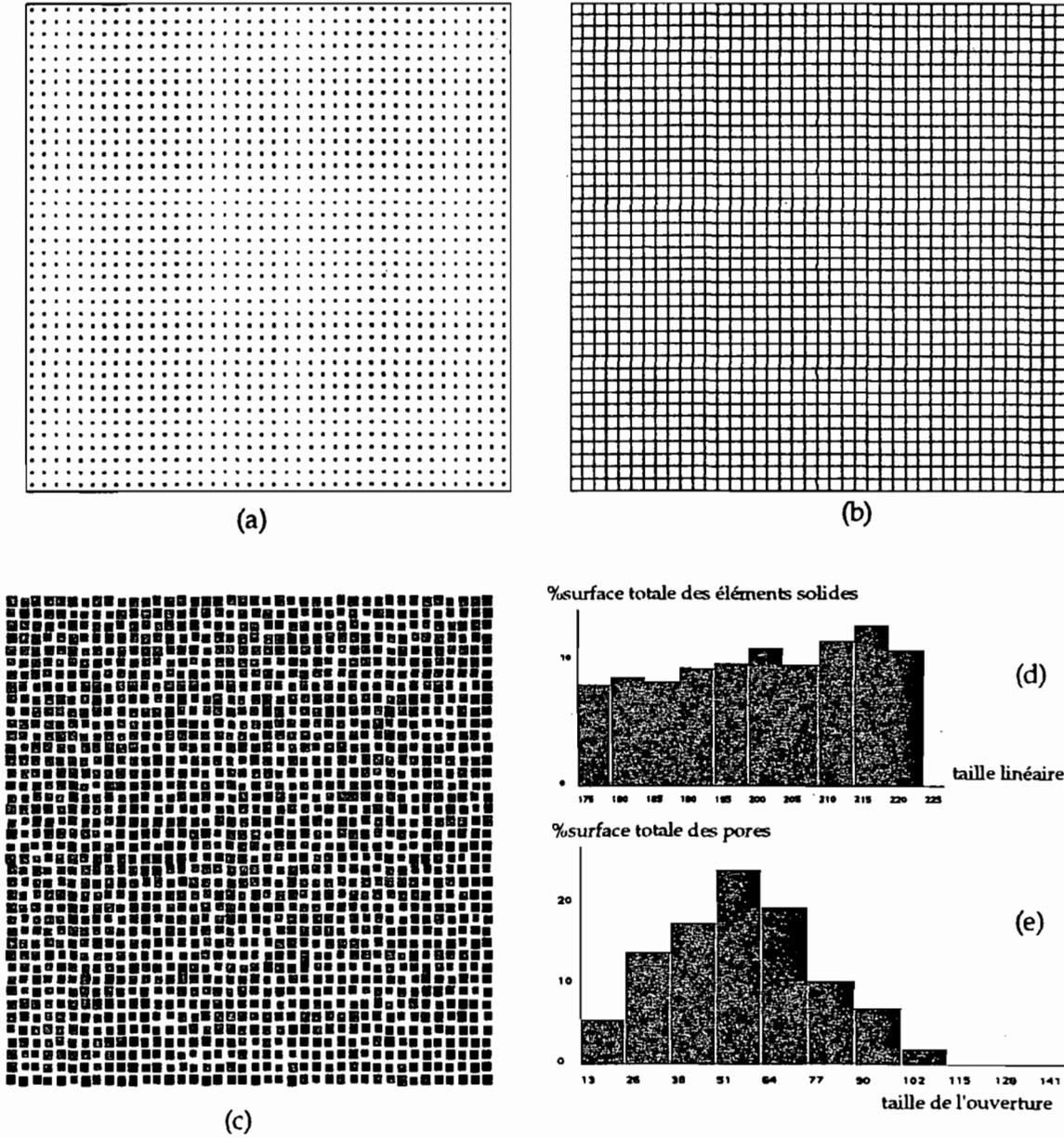
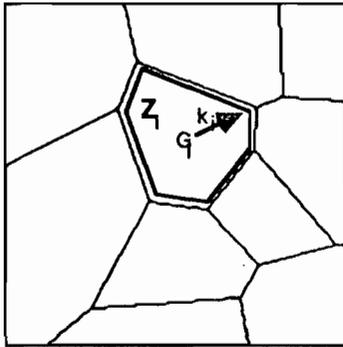


Figure 4.3. Fragmentation et structure de sol. Exemple 3.

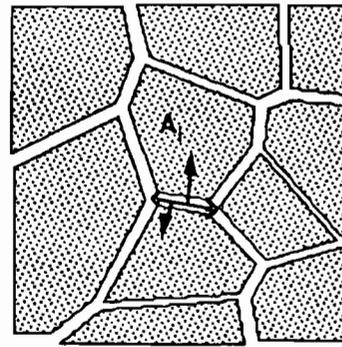
- a) Des germes de fragmentation disposés sur une grille régulière (900 germes)
- b) Squelette (Tessellation de Voronoï).
- c) Structure obtenue par des transformations homothétiques de rapports variables (tirés au sort entre 0.7 et 0.8) et de centres aléatoires
- d) Distribution de taille des éléments solides
- e) Distribution de taille des pores.

4.2.2. Création simultanée d'éléments solides et de pores

Les zones de fragmentation Z_i ($1 \leq i \leq N$) définissent des éléments solides entourés par un espace poral. Les éléments solides et les pores sont générés en effectuant une réduction homothétique $\mathcal{H}(G_i, k_i)$ de chaque zone Z_i : le centre d'homothétie G_i est un point à l'intérieur du polygone Z_i , par défaut son centre de gravité et le rapport d'homothétie k_i est un nombre réel compris entre 0 et 1 (Fig.4.4.a).



a) une homothétie sur chaque zone de fragmentation



(b) création simultanée d'éléments solides et de pores

Figure 4.4. Création d'éléments solides et de pores individuels.

L'ensemble des éléments solides est formé par l'ensemble des homothétiques des zones. Un élément solide est défini localement par une zone de fragmentation et un rapport d'homothétie (Fig.4.4.b).

L'espace poral est le complémentaire des solides. Il est découpé en un ensemble de pores individuels. Chaque pore est l'espace ménagé entre deux éléments solides voisins (Fig.4.4.c). Un pore est défini par deux zones voisines et deux rapports d'homothéties. Géométriquement, c'est la réunion de deux trapèzes, c'est-à-dire un polygone proche d'un rectangle.

Remarque: Le choix du centre d'homothétie peut varier. Ce peut être n'importe quel point à l'intérieur de la zone de fragmentation (à l'intérieur de façon à éviter des problèmes géométriques). Il est choisi par défaut au centre de gravité de la zone. Mais on peut le choisir aussi aléatoirement (cf. Fig.4.3), ou bien décalé vers un sommet (cf. §4.3.3 ou chapitre 7.3.1). Changer la position du centre d'homothétie équivaut à translater localement un élément solide et permet seulement de modifier sa position par rapport à ses voisins.

Des exemples des structures simulées sont présentés sur les figures 4.1.c, 4.2.c et 4.3.c.

L'exactitude de la réalisation informatique de cette construction géométrique est vérifiée d'une part visuellement (relations de voisinages*) et d'autre part numériquement (on a bien une partition car la somme des surfaces des pores et éléments solides individuels est égal à la surface totale de la zone Z_0).

4.2.3. Mesures sur les structures simulées

Distributions des éléments solides et des pores

Le programme fournit des outils de calcul et de représentation graphique des distributions générées.

En "mesurant" pour chaque pore la surface du polygone qui le représente sur la construction géométrique, on peut calculer la distribution de la surface des pores en fonction de leur taille, où la taille d'un pore est définie comme la distance entre les parois des deux éléments solides qu'il sépare.

De même, on peut "mesurer" la surface S de chaque élément solide et sa taille, définie comme une dimension linéaire équivalente par \sqrt{S} , puis représenter la distribution de la surface des éléments solides par rapport à leur taille.

A chaque création de structure, on peut visualiser ces distributions, choisir un nombre de classes, des échelles linéaires ou logarithmiques, une distribution en surface ou en nombre d'éléments, cumulée ou non, de façon à comparer visuellement avec les différents types de graphiques présentés dans la littérature pour décrire les distributions naturelles.

Exemples

- Différentes distributions de zones et homothéties de rapports égaux:

Le choix de rapports d'homothéties k_i égaux pour toutes les zones consiste à relier directement la taille des pores à celle des éléments solides, les pores les plus fins entourant les éléments les plus petits, ce qui est une hypothèse assez réaliste (Figures 4.1.c,4.2.c). Si ces rapports sont identiques, l'ensemble des éléments solides a une distribution en taille proportionnelle à celle des zones initiales, déterminée par le lancer de germes (Figures 4.1.d,4.2.d). La distribution des

* La représentation graphique de l'ensemble des zones de fragmentation se présente sous la forme d'un réseau irrégulier, mais chaque zone est définie individuellement dans la mémoire de l'ordinateur comme un objet connaissant sa propre position et ses voisins immédiats.

La représentation graphique des pores est un espace poral continu, mais chaque objet pore informatique est défini individuellement et renferme la connaissance des éléments solides et pores qui l'entourent. De même, un élément solide se repère dans l'espace et par rapport à ses voisins immédiats.

pores est homogénéisée puisqu'un pore dépend de deux zones de fragmentation adjacentes, mais elle conserve une allure voisine de celle des éléments solides (Figures 4.1.e,4.2.e).

- Une distribution de zones régulières et des homothéties de rapports variables (Fig.4.3): Les rapports d'homothéties peuvent aussi être choisis dans une distribution de nombres aléatoires ou comme une quelconque fonction de la taille des zones de fragmentation. Avec de telles homothéties "variables", on peut obtenir une distribution étendue de pores, même si le découpage en zones est un quadrillage régulier du plan. Localement, les pores sont alors d'autant plus gros que les éléments solides sont petits.

Calcul de la porosité totale.

On peut toujours mesurer la porosité sur telle ou telle construction. Mais dans le cas où les homothéties ont un rapport k_i constant égal à k , la porosité totale Φ est directement calculable comme complémentaire du pourcentage de surface occupé par les éléments solides. En effet, après une homothétie de rapport k_i , la surface $S(A_i)$ du grain A_i homothétique de la zone Z_i de surface $S(Z_i)$ est: $S(A_i)=k_i^2 S(Z_i)$. Si N zones polygonales ont été générées, la surface totale SA de l'ensemble des éléments solides est calculable:

$$SA = \sum_{i=1}^{i=N} k_i^2 S(Z_i) = \sum_{i=1}^{i=N} k^2 S(Z_i) = k^2 \sum_{i=1}^{i=N} S(Z_i) = k^2 S(Z_0)$$

car les zones Z_i constituent une partition de la surface totale.

Exprimée en pourcentage de la surface totale,

$$SA\% = k^2 \tag{4.1}$$

et l'on obtient:

$$\Phi = 1 - SA\% = 1 - k^2 \tag{4.2}$$

Ainsi il suffit de choisir la valeur de k pour obtenir une porosité donnée.

Remarque: La position du centre d'homothétie est un point de détail par rapport aux distributions globales; cela n'a absolument aucune influence sur la distribution de taille des éléments solides, ni sur la porosité totale, et peu d'influence sur la distribution de taille des pores.

4.2.4. Discussion

Il est possible de représenter ainsi, sur un seul niveau de fragmentation, des sols à structure particulières tels par exemple des sables purs. Les éléments solides représenteraient alors des grains de sable, dont la distribution des tailles est de faible étendue pour les exemples présentés. On peut aussi générer des distributions de taille étendues en choisissant des germes de fragmentation de façon appropriée. On verra un exemple au chapitre 8. Il serait aussi

possible de choisir des germes de fragmentation dans des distributions statistiques variées ou en fonction d'une quelconque distribution spatiale de la densité des germes.

Mais il est aussi possible qu'une observation plus fine révèle des pores plus petits à l'intérieur de ce que nous avons appelé jusqu'ici des éléments solides et qui s'avèrent être des agrégats de particules primaires ou des agrégats d'agrégats (cf. § suivant).

4.3. PLUSIEURS NIVEAUX DE FRAGMENTATION EN AGRÉGATS EMBOÎTÉS

Le processus de fragmentation présenté jusqu'ici peut se répéter à différentes échelles.

On peut ainsi simuler des structures de sol fractales (cf. Chap.2), ou plus simplement, deux ou plusieurs niveaux d'organisation dans un sol (modèles à double porosité, porosité inter ou intra-agrégats, cf. Chap.1).

4.3.1. Méthode générale de construction

La construction s'appuie alors sur le principe itératif suivant et illustré sur la figure 4.5: un polygone initial se fragmente en petits polygones comme au paragraphe précédent. Des agrégats et pores de niveau 1 sont générés par réduction homothétique. Chaque agrégat de niveau 1 se fragmente alors en sous-agrégats et pores de niveau 2, et ainsi de suite.

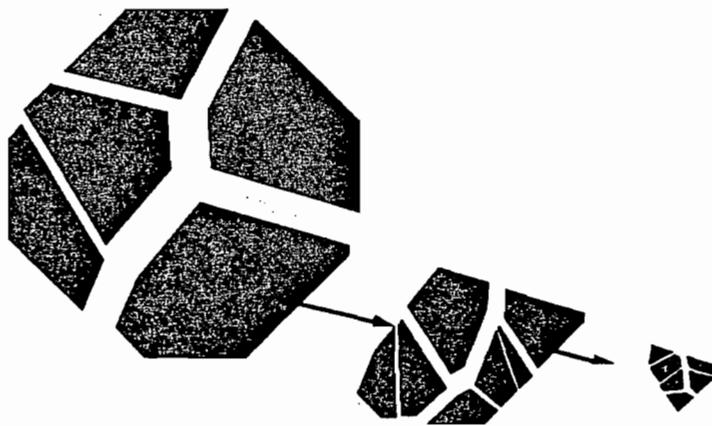


Figure 4.5. Plusieurs niveaux de fragmentations successives. Principe.

On suppose qu'il existe un dernier niveau de fragmentation n , où l'on atteint l'échelle des particules primaires du sol. Pour diverses raisons (limitations de la mémoire de l'ordinateur, choix délibéré) il pourra arriver que l'on s'arrête avant ce stade ultime et l'on ne simule alors que des agrégats et des pores inter-agrégats.

Un squelette de sol sur plusieurs niveaux

Plus précisément, un échantillon de sol simulé est représenté par une zone polygonale initiale Z_0 (Il s'agit souvent d'un carré). Un premier lancer de N_0 germes de fragmentation permet un découpage de Z_0 en N_0 sous-zones Z_{1j} de niveau 1. Dans chaque zone Z_{1j} , un nouveau lancer de N_{1j} germes détermine une fragmentation de Z_{1j} en N_{1j} sous-zones Z_{2j} de niveau 2 ... et ainsi de suite... chaque zone Z_{ij} de niveau i se fragmente en $N_{(i+1)j}$ zones $Z_{(i+1)j}$ de niveau $(i+1)$... jusqu'à un dernier niveau de fragmentation noté n . Dans la notation Z_{ij} , l'indice i indique le niveau de fragmentation, j est un indice muet indiquant une zone donnée j parmi les zones de niveau i . On obtient ainsi au dernier niveau n un squelette de sol constitué de zones emboîtées (Fig.4.6.A).

Création d'un ensemble d'agrégats, de particules primaires et de pores.

Des homothéties à chaque niveau de fragmentation

A chaque niveau i , des agrégats A_{ij} sont créés par une réduction homothétique de la zone Z_{ij} à laquelle ils sont associés: d'abord les homothéties de niveau 1: une zone Z_{1j} et une homothétie $H(G_{1j}, k_{1j})$, où G_{1j} est un point à l'intérieur de la zone Z_{1j} et k_{1j} est un nombre réel ($0 \leq k_{1j} \leq 1$), définissent un agrégat A_{1j} . Toutes les zones filles de Z_{1j} subissent aussi cette homothétie. A leur tour, chacune des zones Z_{2j} , au moyen de l'homothétie $H(G_{2j}, k_{2j})$ qui lui est attachée, définit un agrégat de niveau 2, ... etc. (Fig.4.6.B et 4.6.C)*

Pour une zone Z_{ij} donnée, N_{ij} , G_{ij} et k_{ij} peuvent prendre a priori une infinité de valeurs. Plusieurs structures poreuses peuvent ainsi être associées au même squelette (Figures 4.7): suivant la valeur de k_{ij} , un agrégat A_{ij} s'individualise ($k_{ij} < 1$) ou non ($k_{ij} = 1$) sur la représentation graphique.

Calcul de la surface d'un agrégat ou d'une particule primaire:

La surface $S(A_{ij})$ d'un agrégat A_{ij} peut se calculer à partir de la surface $S(Z_{ij})$ de la zone Z_{ij} définissant cet agrégat et des rapports d'homothéties successivement appliquées à ses zones mères et à elle-même par construction. $S(A_{ij}) = (k_{1j}^2 \dots k_{ij}^2) S(Z_{ij})$. (Fig.4.6.B et C)

$$S(A_{ij}) = \left(\prod_{m=1}^{m=i} k_{mj}^2 \right) S(Z_{ij}). \quad (4.3)$$

où k_{mj} est le rapport d'homothétie appliqué à la zone Z_{mj} de niveau m dont descend Z_{ij} , j étant toujours un indice muet signifiant une zone donnée parmi les zones d'un niveau donné.

* D'un point de vue informatique, la construction de cette hiérarchie d'objets de nombre et niveaux variables est réalisée pour une infinité de configurations possibles dans les limites de la mémoire disponible. Les objets créés (allocation dynamique des zones mémoires) ne sont pas gérés globalement par des indices fastidieux, mais se repèrent individuellement dans leur environnement en enregistrant leur propre niveau et l'adresse de leur père en mémoire.

De même pour une particule primaire au niveau n,

$$S(A_{nj}) = \left(\prod_{m=1}^{m=n} k_{mj}^2 \right) S(Z_{nj}). \quad (4.4)$$

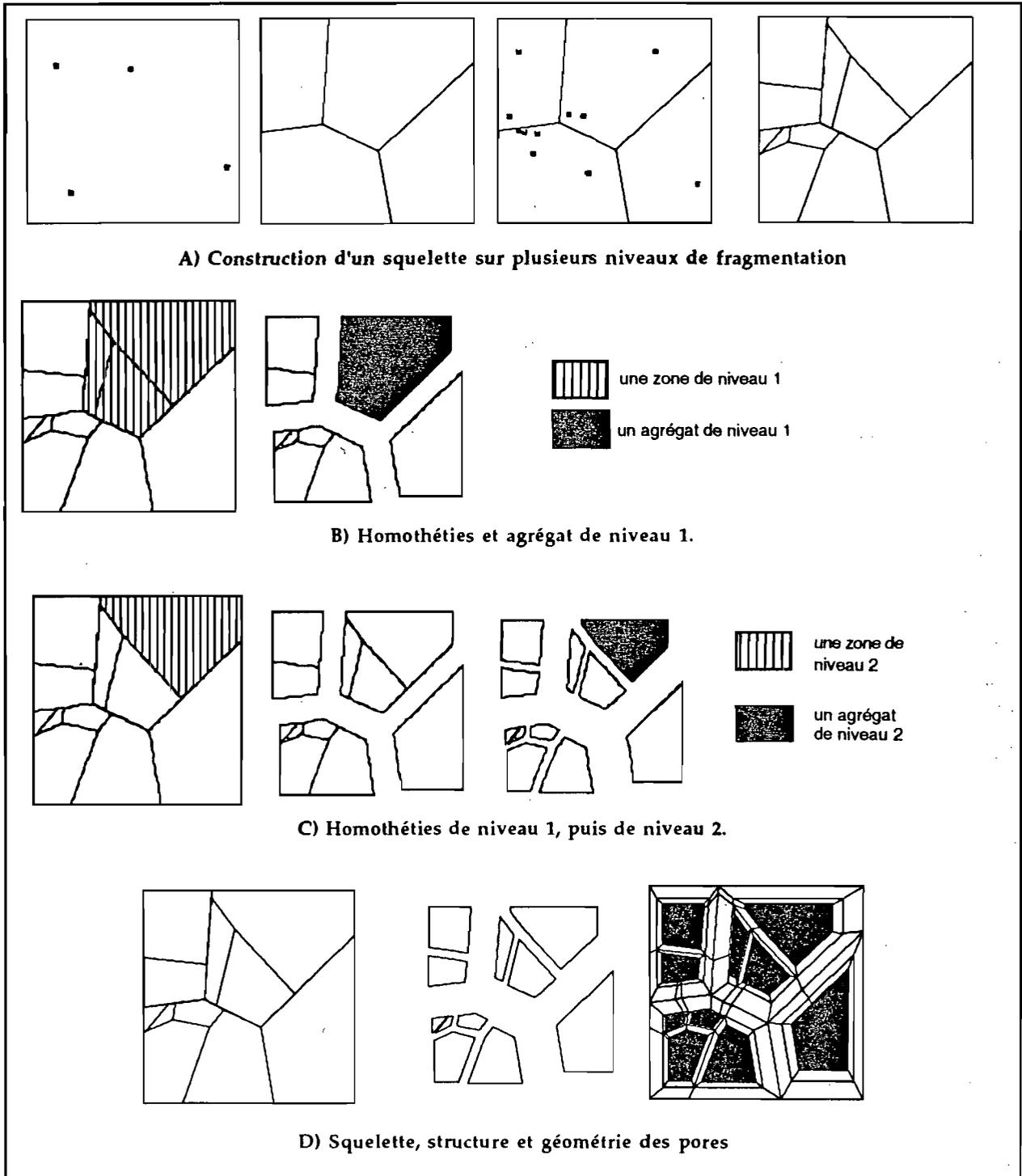


Figure 4.6. Plusieurs niveaux de fragmentations successives. Réalisation.

Création de pores.

Les pores résultant de cette construction sont définis par deux agrégats adjacents de dernier niveau (Fig.4.6.D). Leur représentation géométrique est une juxtaposition de trapèzes. Les points de rencontre de plusieurs pores sont appelés des noeuds. Dans les représentations graphiques qui suivent, seul l'espace poral est apparent, sous une forme continue.

4.3.2. Structures simulées

Principaux paramètres et différentes réalisations aléatoires d'une structure.

Seuls certains cas particuliers de cette construction ont été étudiés, car nous avons limité le nombre de paramètres d'étude.

Le premier paramètre est le nombre de niveaux de fragmentation, soit n .

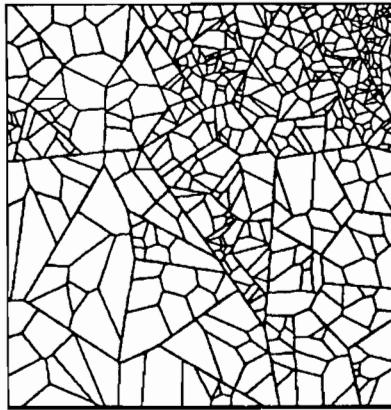
Dans toutes les applications présentées à partir d'ici (sauf au chapitre 8) le nombre N_{ij} de germes de fragmentation à l'intérieur d'une zone de fragmentation donnée ne dépend que de son niveau i . Pour un niveau donné, toutes les zones se fragmentent en un même nombre de sous-zones. Un squelette est donc défini par n paramètres $\{N_i\}_{i=0,\dots,n}$. Les N_i germes de fragmentation à l'intérieur d'une zone donnée sont en général lancés de façon aléatoire (points poissonniens, cf.Fig.4.2) ou parfois sur un quadrillage régulier (cf.Fig.4.3).

Le rapport d'homothétie k_{ij} dépend aussi seulement du niveau i (sauf au chapitre 7.3.1). On a donc aussi n paramètres $\{k_i\}_{i=0,\dots,n}$. Le paramètre k_0 est choisi égal à 1 dans les exemples suivants, ce qui signifie que l'on ne représente pas une porosité externe à l'agrégat A_0 , qui est assimilé à la zone Z_0 .

Une structure simulée est donc désormais définie par les paramètres suivants:

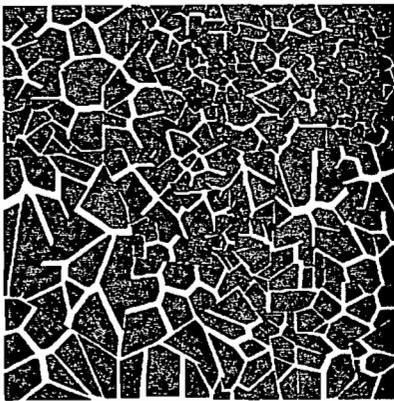
$$n, \{N_i\}_{i=0,\dots,n}, \{k_i\}_{i=0,\dots,n}$$

Dans le cas de germes aléatoires, différentes réalisations d'une même structure de sol (mêmes paramètres) correspondent à différents tirages au sort de ces germes. Dans certains cas particuliers qui seront alors précisés, d'autres sources de variabilité (position aléatoire des centres d'homothétie ou variation aléatoire des rapports d'homothétie autour de k_i) pourront être introduites.



a) un squelette sur plusieurs niveaux de fragmentation.

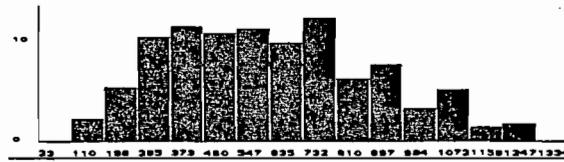
$$n=3, N_1=N_2=N_3=8$$



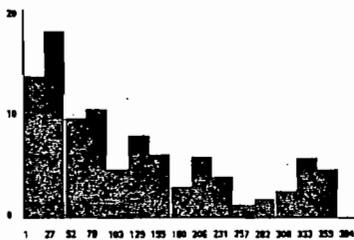
b) une première structure de sol.
 $k_0=k_1=k_2=1, k_3=0.941$



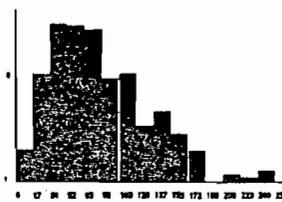
c) une deuxième structure de sol.
 $k_0=1, k_1=k_2=k_3=0.98$



d) distribution de taille des éléments solides dans les structures b) et c)



e) distribution de taille des pores de b)



f) distribution de taille des pores de c)

Figure 4.7. Plusieurs niveaux de fragmentations successives. Exemple.

Exemple 1.

Sur la figure 4.7, à un même squelette défini par les paramètres ($n=3, N_1=N_2=N_3=8$) sont associées deux structures simulées de sol (paramètres $k_0=k_1=k_2=1, k_3=0.941$ pour la première et $k_0=1, k_1=k_2=k_3=0.98$ pour la seconde) représentées pour une même réalisation aléatoire du squelette.

Exemple 2. Structure à double porosité

Sur la figure 4.8, on observe une structure définie sur deux niveaux de fragmentation seulement. Plus le nombre N_2 de particules contenues dans chacun de ces agrégats est important, ou bien plus le rapport k_2/k_1 est élevé, plus la bimodalité de la distribution de taille des pores est apparente. Cette figure évoque des milieux à double porosité (inter et intra-agrégats).

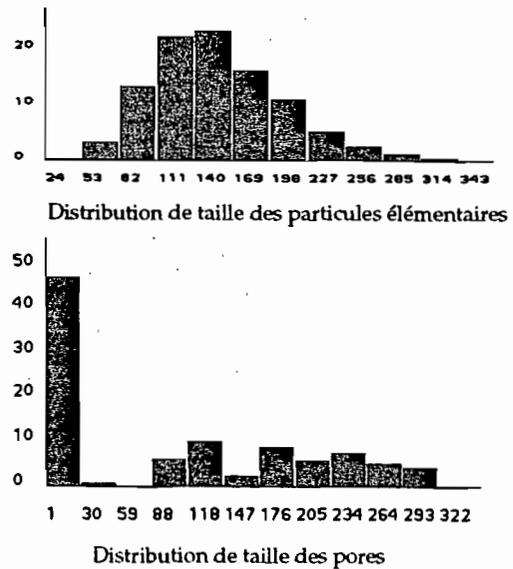
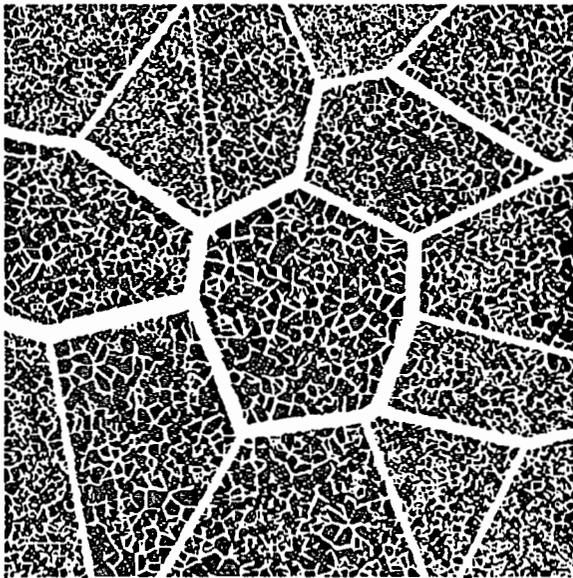
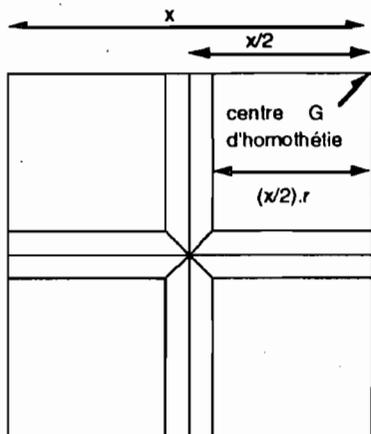


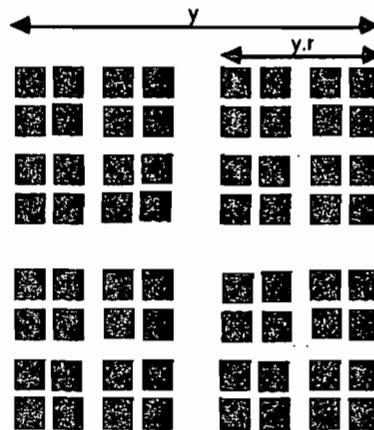
Figure 4.8. Structure à double porosité $n=2, N_1=15, N_2=300, k_1=k_2=0.95$

Exemple 3. Modèle fractal.

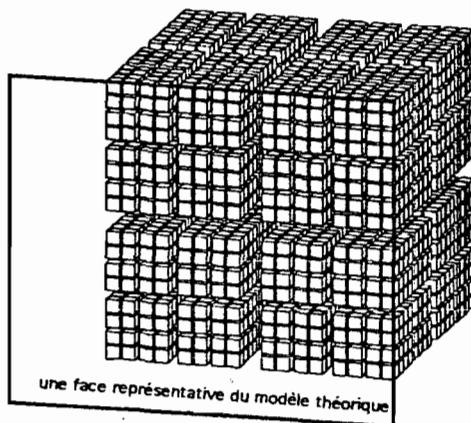
Un modèle de structure que nous avons particulièrement étudié est basé sur le modèle fractal théorique de Rieu et Sposito (1991b) (cf. Chap. 2) et est construit comme suit. Le nombre de sous agrégats N_{ij} est constant pour tous les agrégats de tous les niveaux ($1 \leq i \leq n$), $N_{ij}=N$, les rapports d'homothéties sont eux aussi constants, $k_{ij}=k$, et les centres d'homothéties choisis comme les centres de gravité des zones de fragmentation (sauf pour les sous-zones de fragmentation situées sur les bords de leur zone mère, pour lesquelles on choisit le centre d'homothétie sur les bords externes de la zone mère, translatant les sous-agrégats associés vers les bords de l'agrégat dont ils sont issus, Fig.4.9.a).



a) Squelette à zones carrées et homothéties au premier niveau de fragmentation



b) Structure fractale (itérations sur trois niveaux).



c) Modèle de structure fractale de sol selon Rieu et Sposito 1991b

Figure 4.9. Structure fractale, zones de fragmentation carrées.

Dans le cas de zones de fragmentation carrées, on obtient ainsi une figure parfaitement auto-similaire (Fig.4.9.b) et représentant exactement une face du cube fractal servant d'illustration à Rieu et Sposito (Fig.4.9.c). Chaque agrégat carré de côté y est divisé en N sous-agrégats carrés de taille ry . La dimension fractale de cet ensemble est $D_2 = \frac{\text{Log}N}{\text{Log}(1/r)}$. Ici r s'exprime en fonction de k et de N . En effet chaque zone de fragmentation, carrée, de côté x , est divisée en N sous zones de côté x/\sqrt{N} . L'homothétie de rapport k générant les agrégats associe alors à un agrégat de taille y N sous-agrégats de taille ky/\sqrt{N} . Donc $r=k/\sqrt{N}$. Il s'ensuit que la distribution de ces agrégats est fractale de dimension:

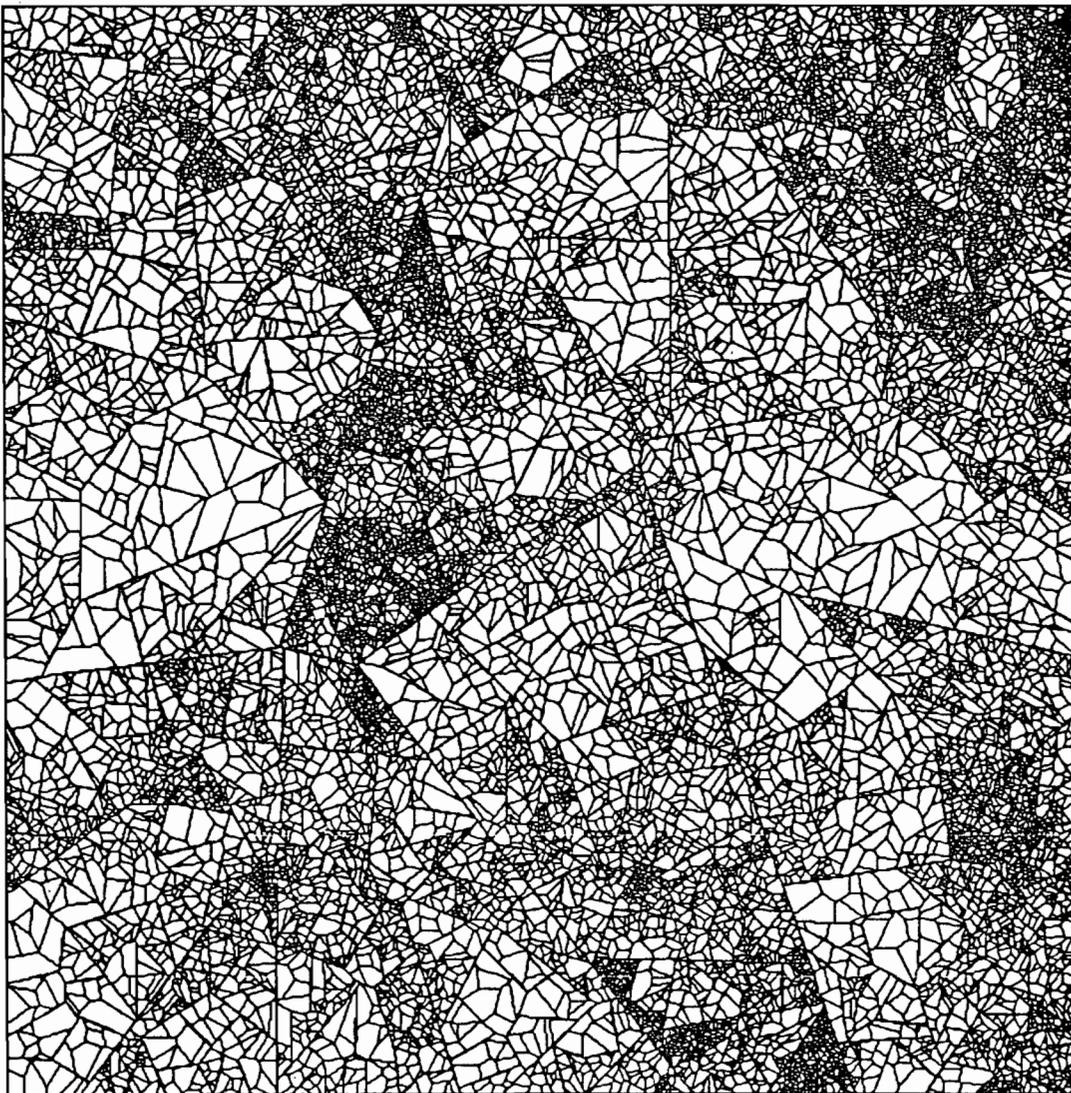
$$D_2 = 2 \frac{\text{Log}N}{\text{Log}N - 2\text{Log}k} \quad 0 \leq D_2 \leq 2 \quad (4.5)$$

Notre construction est bidimensionnelle, ce qui explique la notation D_2 .*

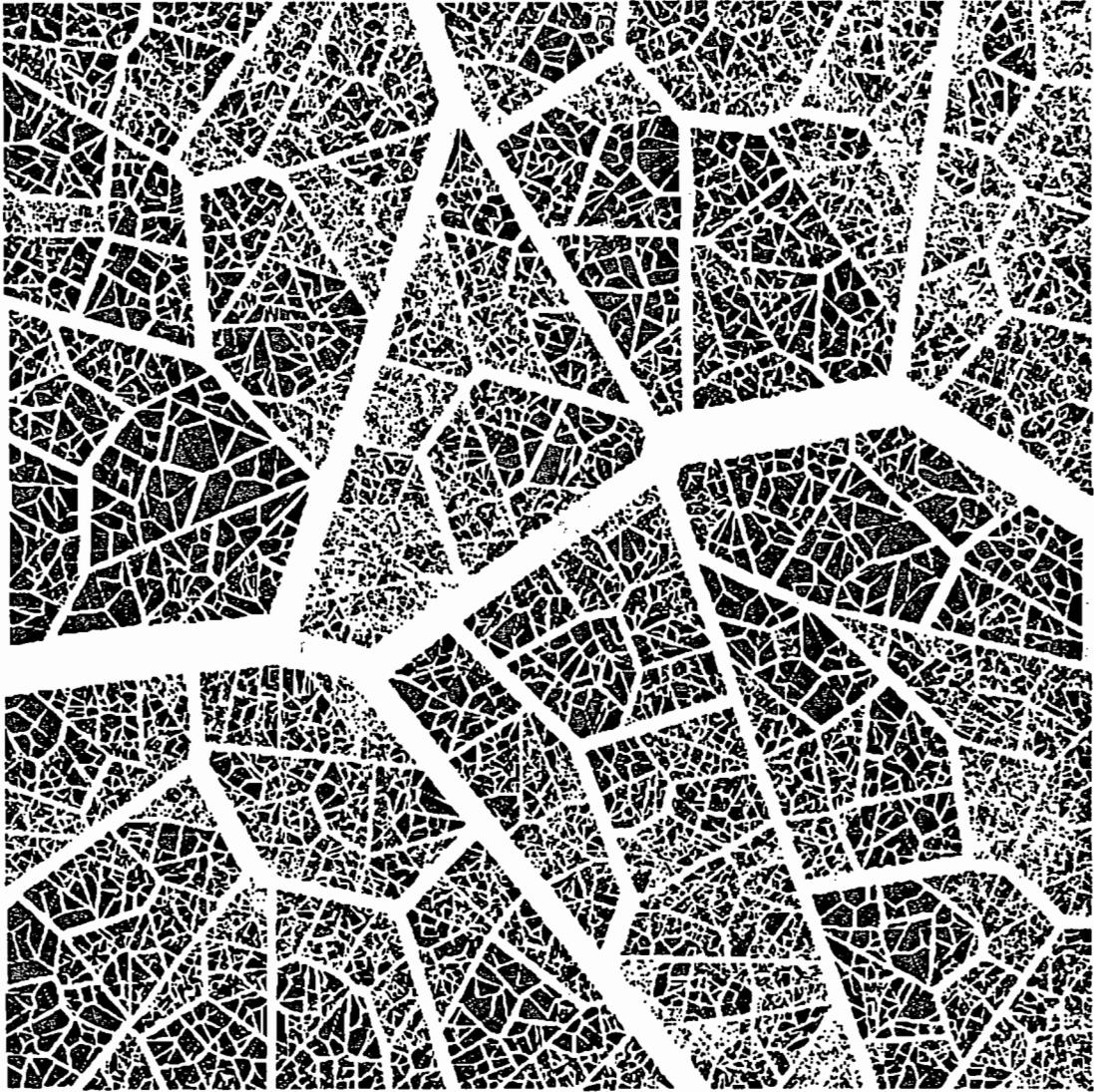
* On étudiera ce modèle de structure tel quel. Cependant on étudiera aussi une extension à la troisième dimension de façon à représenter fidèlement le modèle cubique tridimensionnel. Deux façons d'imaginer la troisième dimension seront comparées au paragraphe 4.5 et dans les chapitres suivants.

On peut vérifier, comme l'ont fait Rieu et Sposito (1991b), que l'ensemble des pores est aussi fractal, de même dimension que l'ensemble des agrégats.

Ce modèle est ensuite étendu au cas où les germes sont générés aléatoirement à chaque niveau (Fig.4.10.a). Le squelette est alors formé de zones de fragmentation de formes et tailles irrégulières qui se refragmentent en un nombre constant de sous-zones. La variabilité des tailles à l'intérieur d'un même niveau de fragmentation augmente avec le niveau et produit des hétérogénéités locales qui confèrent plus de réalisme aux structures simulées.



a) Squelette. $N=7$ $n=5$



b) Structure associée au squelette (a). $k=0.96$

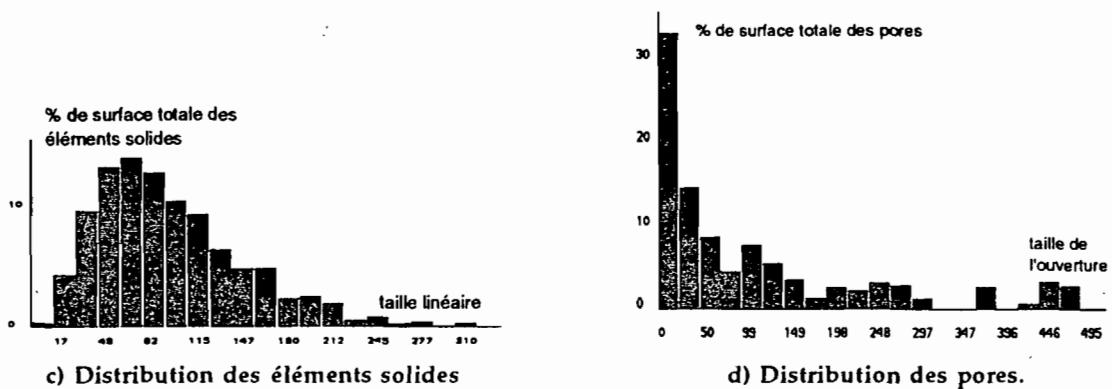


Figure 4.10. Structure fractale simulée, une réalisation aléatoire de $\mathcal{F}(5,7,0.96)$.

Une structure est associée à ce squelette en effectuant des homothéties de rapport constant k à chaque niveau, exactement de la même façon que pour des zones carrées (Fig.4.10b).

Cette structure n'est qu'approximativement auto-similaire. On verra au chapitre suivant qu'elle peut encore être considérée comme fractale, de dimension D_2 . Elle est définie par trois paramètres (n,N,k) , elle est appelée structure fractale simulée, et notée $\mathcal{F}(n,N,k)$. Différentes réalisations aléatoires d'une structure $\mathcal{F}(n,N,k)$ seront étudiées.

4.3.3. Mesures sur les structures simulées

Distributions des éléments solides et des pores

Les distributions des pores et des éléments solides mesurées sur la construction sont visualisées (Figures 4.7, 4.8,4.10). Sur la figure 4.7, on observe des structures de sols dont la distribution des éléments solides est identique (supposons qu'il s'agit de particules primaires) et les distributions de pores différentes. Sans informations supplémentaires sur l'assemblage des particules, une distribution de particules primaires ne suffit donc pas à définir une structure de sol.

Calcul de la porosité totale dans le cas de coefficients constants:

Lorsque les rapports d'homothéties sont constants à l'intérieur d'un niveau de fragmentation donné, la formule 4.3 devient

$$S(A_{ij}) = \left(\prod_{m=1}^{m=i} k_m^2 \right) S(Z_{ij}) = \lambda(i) S(Z_{ij}) \quad \text{avec } \lambda(i) = \prod_{m=1}^{m=i} k_m^2$$

La surface occupée par l'ensemble des agrégats de niveau i est:

$$SA(i) = \sum_j S(A_{ij}) = \sum_j \lambda(i) S(Z_{ij}) = \lambda(i) \sum_j S(Z_{ij}) = \lambda(i) S(Z_0)$$

car l'ensemble des zones Z_{ij} de niveau i constituent une partition de la surface totale.

Le pourcentage de surface occupée par l'ensemble des agrégats de niveau i est:

$$SA\%(i) = \prod_{m=1}^{m=i} k_m^2 \quad (4.6)$$

Le pourcentage de surface occupée par l'ensemble des agrégats de dernier niveau n (l'ensemble des particules primaires en général) est:

$$SA\%(n) = \prod_{m=1}^{m=n} k_m^2$$

La porosité totale Φ est égale à soit $1-SA\%(n)$ et ne dépend que des rapports d'homothéties.

$$\Phi = 1 - \prod_{m=1}^{m=n} k_m^2 \quad (4.7)$$

Dans le cas fractal, on obtient:

$$\Phi = 1 - k^{2n} \quad (4.8)$$

4.4. TRAITEMENT DE LA DÉFORMATION: STRUCTURES À GÉOMÉTRIE VARIABLE

Si la distribution de taille des particules primaires semble bien être une caractéristique invariable du sol aux échelles courtes de temps qui nous intéressent, il n'en va pas de même de la distribution des agrégats qui dépend en particulier de l'état d'humidité. Les simulations de déformation de structure s'appuient sur l'hypothèse suivante: nous considérons que la notion d'agrégat conserve son sens géométrique au cours des cycles d'humidification-dessiccation. Un agrégat est un assemblage de particules ou d'agrégats qui peut se réorganiser de façon interne, l'assemblage est plus ou moins compact, le volume des agrégats et la porosité intra-agrégats varient, mais la structure de l'ensemble, dans son acceptation topologique (i.e. au sens du squelette du sol), reste invariante.

Nous avons déjà présenté différentes images de structures poreuses possibles pour une même distribution de taille de grains ou encore différents états d'ouverture d'un sol plus ou moins agrégé (Fig.4.7). Ces images peuvent aussi représenter deux états de gonflement différents d'un sol déformable. On peut ainsi imaginer sur la figure 4.7b l'état d'un sol saturé, et sur la figure 4.7c l'état du même sol qui s'est fissuré en se desséchant.

La méthode de construction de structure poreuse proposée, basée sur des décompositions en zones de fragmentation convexes (le squelette) et des transformations homothétiques avait pour objectif parmi d'autres de permettre la manipulation de déformations de structure. Nous traitons la déformation entre deux états de gonflements (s) et (s') en jouant sur les rapports d'homothéties. Les mêmes rapports d'homothétie qui ont servi à générer une structure à partir d'un squelette, et donc à "ouvrir" une porosité donnée, sont maintenant utilisés pour simuler des déformations, en modifiant dynamiquement l'ouverture des pores. Au cours d'un processus de déformation, le squelette est invariant et un état de gonflement (s) de la structure est défini par ce squelette et des rapports d'homothéties qui dépendent de (s). On peut dire qu'une structure rigide est définie par un squelette (une zone initiale Z_0 divisée en zones de fragmentation Z_{ij} sur une succession de niveaux i de fragmentation) et un ensemble $\{k_{ij}\}_{i=0\dots n}$ de rapports d'homothéties, avec $k_0=1$; et qu'une structure déformable est définie par un squelette et un ensemble $\{k_{ij}(s)\}_{i=0\dots n}$ de rapports d'homothéties variables avec l'état de gonflement (s).

Le paramètre k_0 avait été supposé jusqu'ici égal à 1. La zone de fragmentation Z_0 et l'agrégat A_0 associé pouvaient être confondus. Les variations de $k_0(s)$ correspondent maintenant à des variations isotropes de la surface de A_0 , agrégat représentant l'élément total de sol simulé, et permettent de simuler des variations de volume macroscopique. Cette surface est notée $SA(0,s)$, et se calcule en fonction de la surface $S(Z_0)$: elle est égale à $k_0(s)^2 S(Z_0)$.

$$SA\%(0,s) = k_0(s)^2 \quad (4.9)$$

$SA\%(0,s)$ est exprimée en pourcentage de la surface de référence constante $S(Z_0)$.

Les variations des rapports d'homothéties ne peuvent pas être quelconques et doivent respecter au moins les deux contraintes géométriques suivantes:

- Les agrégats sont déformables, mais dans la limite où leur déformation n'entraîne pas de recouvrement des grains qui doivent rester disjoints (conservation de la masse).
- Les particules primaires sont considérées comme indéformables. Chacune d'elle doit conserver sa forme et sa taille.

A l'intérieur de l'agrégat A_0 , la surface de chaque sous-agrégat A_{ij} de niveau i peut varier. Cette surface à l'état de gonflement s dépend du rapport d'homothétie $k_i(s)$ qui a affecté la zone Z_{ij} , mais aussi de tous les rapports d'homothéties $k_0(s), \dots, k_{(i-1)}(s)$ qui ont affecté les zones mères de Z_{ij} (cf. formule 4.3). Les contraintes portent essentiellement sur le retrait: les diminutions de surface de A_{ij} ne doivent pas excéder la porosité interne à cet agrégat.

Si le dernier niveau n représente l'échelle des particules primaires, chaque particule A_{ij} doit rester identique à elle-même quel que soit l'état de gonflement. Puisque toutes les homothéties successives conservent la forme de la particule, il faut et il suffit que la surface de la particule,

$$S(A_{ij}) = \left(\prod_{m=1}^{m=n} k_m(s) \right)^2 S(Z_{ij}) \quad (\text{cf. formule 4.4}), \text{ soit indépendante de } (s). \text{ Puisque } Z_{ij} \text{ est une}$$

zone fixe du squelette (invariant), cette contrainte s'exprime ainsi:

$$\text{Le produit } \prod_{m=1}^{m=n} k_m(s)^2 \text{ des rapports d'homothéties affectant la hiérarchie des zones de}$$

fragmentation associée à une particule donnée doit être indépendant de s .

Dans le cas simplifié de rapports d'homothéties constants à chaque niveau de fragmentation auquel nous allons principalement nous restreindre, et supposant des variations de volumes similaires pour les agrégats d'un niveau d'organisation donné, on peut effectuer un certain nombre de calculs globaux sur la déformation à un niveau i de fragmentation.

En tenant compte du coefficient k_0 , la formule 4.7 se réécrit:

$$SA\%(i,s) = \prod_{m=0}^{m=i} (k_m(s))^2 \quad (4.11)$$

$SA\%(i,s)$ est exprimée en pourcentage de la surface de référence constante $S(Z_0)$.

Les variations de $SA\%(i,s)$ avec (s) représentent les variations de volume des agrégats de niveau i . $SA\%(i,s)$ peut prendre toutes sortes de valeurs tant qu'il n'y a pas de recouvrement de grains.

Si n représente l'échelle des particules primaires, $SA\%(n,s)$ représente le volume de la phase solide et doit rester constant. La formule 4.11 devient

$$SA\%(n,s) = \prod_{m=0}^{m=n} (k_m(s))^2 \quad (4.12)$$

et $\prod_{m=0}^{m=n} (k_m(s))^2$ doit en fait être indépendant de l'état de gonflement (s) .

Exemple:

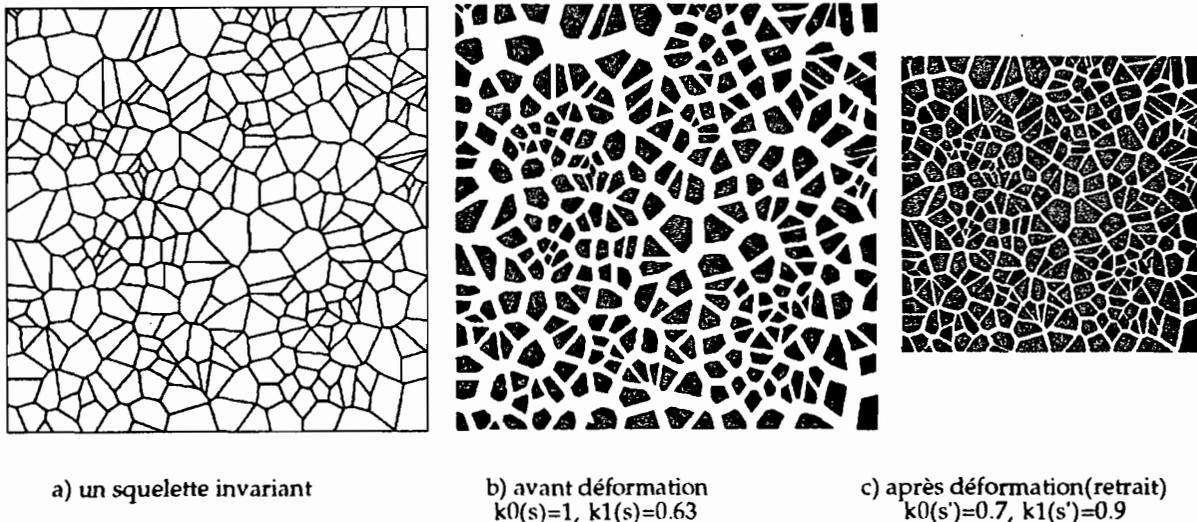


Figure 4.11. Exemple de déformation d'une structure simulée.

Prenons un exemple simple sur un seul niveau de fragmentation. Une zone Z_0 est divisée en N zones Z_{1j} . A chaque zone est associée un élément solide de niveau 1 défini par un rapport d'homothétie $k_{1j}(s)$. On suppose que ces éléments de niveau 1 représentent des particules primaires indéformables. Le pourcentage de surface occupée par une particule j donnée est $(k_0(s)k_{1j}(s))^2$. Si $k_0(s)$ varie et passe de 1 (état s) à 0.7 (état s'), on simule une diminution de surface totale isotrope. Pour conserver des particules identiques, il faut et il suffit que pour toute particule j , $k_{1j}(s') = \frac{k_{1j}(s)}{0.7}$. Dans l'exemple de la figure 4.11, $k_{1j}(s)$ est indépendant de j et

vaut 0.63. La diminution de surface totale de 51% ($SA\%(0,s)=0.7^2=0.49$, $SA\%(0,s')=1$) n'est possible sans recouvrement des particules que si la porosité à l'état (s) ($\Phi(s)=1-SA\%(1,s)=1-(1)^2(0.63)^2=0.6$, cf. formule 4.7) est supérieure à 51%.

Ayant construit un modèle de structure de sol topologiquement invariable, mais dont l'espace poral est à géométrie variable, nous pourrons ainsi simuler (chapitre 6) des phénomènes de gonflement et de retrait d'un sol en fonction de son état d'humidité, en sachant gérer différents états de gonflement par variation des rapports d'homothéties.

4.5. EXTRAPOLATION À LA TROISIÈME DIMENSION

4.5.1. Modèle "purement bidimensionnel"

Un modèle plan d'un milieu réel tridimensionnel suppose toujours explicitement ou pas une association entre les entités du modèle bidimensionnel et leurs analogues en trois dimensions. Sur notre construction plane, les surfaces d'éléments solides et de pores représentent des volumes. Jusqu'ici nous avons imaginé implicitement la troisième dimension comme la prolongation des pores (tels qu'ils sont dessinés sur les représentations graphiques) par des fractures de longueur arbitraire L (Fig.4.12.b). Le volume d'un pore rapporté au volume total de milieu poreux est alors égal à la surface de la coupe plane de ce pore, effectivement représentée, rapportée à la surface totale de la section de poreux: porosités volumique et surfacique se confondent. De même le pourcentage de surface totale occupée par un élément solide est égal au pourcentage de volume dans le modèle tridimensionnel simple associé.

$$V\%(\text{objet})=S\%(\text{objet}) \text{ pour un objet géométrique quelconque de la construction} \quad (4.13)$$

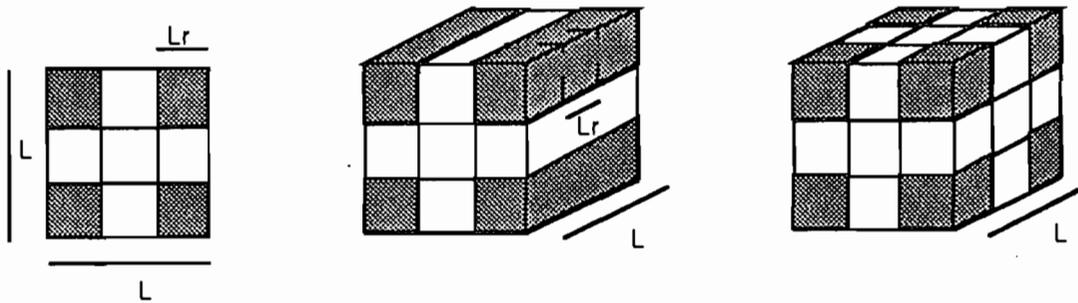
Nous faisons référence à cette option (où le modèle tridimensionnel associé au modèle plan est réduit à sa plus simple expression) sous le nom de "modèle purement bidimensionnel".

Remarque: pour une structure fractale simulée de dimension D_2 , la structure tridimensionnelle associée est alors fractale, de dimension D_3 telle que :

$$D_3 = D_2 + 1 \quad (4.14)$$

C'est un résultat classique de la géométrie fractale dans ce cas de figure que l'on peut retrouver de façon simple (cf. illustration fournie sur un niveau de fragmentation par la figure 4.12a et b) et en considérant que: lorsqu' à un carré de taille L on fait correspondre N sous-carrés de taille L_r dans la structure simulée plane ($D_2 = \frac{\text{Log}N}{\text{Log}(1/r)}$), on fait correspondre dans le modèle

tridimensionnel associé $N \cdot (L/L_r)$ soit N/r sous-cubes de côté L_r à un cube de taille L .
 $(D_3 = \frac{\text{Log} N/r}{\text{Log}(1/r)} = \frac{\text{Log} N + \text{Log}(1/r)}{\text{Log}(1/r)} = D_2 + 1)$.



(a) structure simulée
 $n=1, N=4, k=2/3$

(b) modèle purement bidimensionnel

(c) modèle bidimensionnel avec extrapolation au tridimensionnel

Figure 4.12. Deux façons d'imaginer la troisième dimension à partir d'une structure simulée plane

4.5.2. Modèle "bidimensionnel avec extrapolation au tridimensionnel"

Nous avons en général préféré une vision tridimensionnelle du modèle, plus proche de la réalité, en supposant le milieu isotrope. Dans ce cas, les fractures dont nous représentons une section sont recoupées dans la troisième direction par d'autres fractures (cf. Fig.4.12c). On associe alors un modèle tridimensionnel isotrope à la construction plane. Nous faisons référence à ce cas de figure sous le nom "modèle bidimensionnel avec extrapolation au tridimensionnel".

Les structures tridimensionnelles isotropes que nous associons aux constructions planes auraient pu être construites par une méthode analogue à celle qui vient d'être présentée, mais forcément plus lourde. Un lancer de N germes de fragmentation en 2 dimensions correspondrait au lancer de $N^{3/2}$ germes en trois dimensions. Les zones de fragmentation polygonales seraient remplacées par des zones polyédriques en 3 dimensions (polyèdres de Voronoï). Une homothétie de rapport k réduirait une zone de volume v en un agrégat polyédrique de volume $k^3 v$. Les pores seraient les espaces restants. Nous nous contentons ici d'imaginer cette véritable construction tridimensionnelle.

La construction plane n'est pas une section réelle de la structure tridimensionnelle, qui pourrait être effectuée aléatoirement, mais cela en est une section représentative à partir de laquelle nous calculons ce que nous aurions dû obtenir dans le cas réellement tridimensionnel. Dans les cas étudiés, sur un ou plusieurs niveaux de fragmentation et des rapports d'homothétie constants au sein d'un niveau de fragmentation donné i , égaux à k_i , nous passons de données surfaciques

mesurées sur la construction géométrique plane à des données volumiques en utilisant de simples coefficients correctifs.

Le volume de chaque agrégat de niveau i (ou de chaque particule primaire de niveau n) est calculé en multipliant sa surface par le coefficient $\mu(i)$, où

$$\mu(i) = \left(\prod_{m=0}^{m=i} k_m \right) \quad (4.15)$$

Le volume de chaque pore de niveau i est calculé en multipliant sa surface par le coefficient $v(i)$, où

$$v(i) = \frac{1 - k_i^3}{1 - k_i^2} \prod_{m=0}^{m=i-1} k_m \quad (4.16)$$

Justifications:

En tenant compte du coefficient k_0 , la formule 4.7 se réécrit:

$$SA\%(i) = \prod_{m=0}^{m=i} k_m^2.$$

Dans l'analogie tridimensionnel, et pour les mêmes raisons (homothéties successives), le volume des agrégats de niveau i serait, en pourcentage de volume total,

$$VA\%(i) = \left(\prod_{m=0}^{m=i} k_m^3 \right).$$

On remarque que $VA\%(i) = SA\%(i) \left(\prod_{m=0}^{m=i} k_m \right) = \mu(i) SA\%(i)$.

Les pores de niveau i sont ceux ménagés entre les agrégats de niveaux $i-1$ et i . D'où la comparaison suivante entre porosité surfacique $SP\%(i)$ et porosité volumique $VP\%(i)$ dues aux pores de niveau i .

$$SP\%(i) = SA\%(i-1) - SA\%(i) = \prod_{m=0}^{m=i-1} k_m^2 - \prod_{m=0}^{m=i} k_m^2 = (1 - k_i^2) \prod_{m=0}^{m=i-1} k_m^2$$

$$\text{et } VP\%(i) = VA\%(i-1) - VA\%(i) = \prod_{m=0}^{m=i-1} k_m^3 - \prod_{m=0}^{m=i} k_m^3 = (1 - k_i^3) \prod_{m=0}^{m=i-1} k_m^3$$

Et on a bien $VP\%(i) = v(i) SP\%(i)$.

Il découle de ces calculs globaux par niveau de fragmentation que les formules (4.15) et (4.16) appliquées à chaque pore ou agrégat de niveau i individuellement sont bien vérifiées de façon exacte dans le cas de zones de fragmentation carrées. Elle se sont révélées être pour le moins une très bonne approximation dans le cas de zones de fragmentation aléatoires.

Remarque 1: pour les calculs de déformation présentés au paragraphe 4.5, les formules obtenues sont alors transformées en remplaçant partout $(k_i(s))^2$ par $(k_i(s))^3$.

Remarque 2: dans le cas d'une structure fractale simulée de dimension D_2 , la dimension du modèle tridimensionnel isotrope associé est:

$$D_3 = \frac{3}{2} D_2 \quad (4.17)$$

En s'appuyant sur l'illustration fournie par la figure 4.12 sur un niveau de fragmentation, on peut expliquer ce résultat par la constatation simple suivante: lorsqu'à un agrégat carré de taille L correspondent N sous-agrégats carrés de taille L_r dans la structure plane ($D_2 = \frac{\text{Log}N}{\text{Log}(1/r)}$), on a, dans le modèle tridimensionnel associé, un agrégat cubique de taille L , auquel correspondent $N^{3/2}$ sous agrégats cubiques de taille L_r . $D_3 = \frac{\text{Log}N^{3/2}}{\text{Log}(1/r)} = \frac{3}{2} \frac{\text{Log}N}{\text{Log}(1/r)}$

Les distributions d'éléments solides et de pores sont ainsi modifiées par une extrapolation volumique. Les distributions de pores résultant des deux approches de la troisième dimension seront comparées à travers les courbes de rétention d'eau associées (cf. chapitre 5).

4.6. CONCLUSION

Nous avons mis au point une méthode de construction de structures de sol représentant à la fois les éléments solides et les pores du sol comme un ensemble d'objets interdépendants. Elle repose sur une partition exacte d'une zone du plan représentant un échantillon de sol en un ou plusieurs niveaux de sous-zones de fragmentation polygonales formant le squelette des structures simulées. Des structures poreuses sont générées en utilisant de simples transformations homothétiques des zones de fragmentation. Une fragmentation réitérée sur plusieurs niveaux successifs permet de définir des agrégats de particules primaires ou des agrégats d'agrégats suivant le niveau d'organisation. Différents états de gonflement d'un sol déformable peuvent être simulés, en modifiant l'ouverture des pores et la taille des agrégats au moyen de rapports d'homothéties fonctions de l'état de gonflement.

En utilisant toutes les variantes de la méthode de construction, on peut obtenir un grand nombre de représentations géométriques de différents types de structures de sol. Bien qu'ayant cherché à aborder la notion de structure de sol sous l'angle le plus général possible, nous n'avons considéré que certains cas particuliers. Le modèle de structures fractales en agrégats emboîtés que nous avons présenté sera particulièrement étudié dans les chapitres suivants. A cette occasion, on verra des extensions de la méthode de construction aux structures

anisotropes (chapitre 7, §.3.2). Au chapitre 8, on verra qu'un choix particulier des paramètres de construction permet de simuler un deuxième modèle fractal de structure, et de comparer plusieurs approches théoriques.

Sur ces différentes réalisations informatiques de structures de sol, nous allons maintenant explorer les processus d'invasion par l'eau et chercher à relier les caractéristiques hydriques à l'organisation géométrique de la structure du sol. Nous nous intéressons principalement aux deux caractéristiques hydriques majeures du sol non saturé, les relations pression capillaire/teneur en eau (chapitre 5) et conductivité teneur en eau (chapitre 7). La détermination des caractéristiques hydriques est faite sur le réseau de pores (fractures) qui résulte du modèle d'organisation structurale et donne lieu au développement d'algorithmes qui pourraient être utilisés sur une structure quelconque construite à partir de la méthode qui vient d'être présentée.

La simulation de structures de sol sur deux ou plusieurs niveaux d'organisation est aussi utilisée comme une aide à la réflexion sur la déformation des sols (chapitre 6), et sur les conséquences de celle-ci sur la détermination de la relation pression/teneur en eau en fonction d'une distribution de pores dont les tailles varient avec la teneur en eau.

TROISIÈME PARTIE

SIMULATIONS ET CARACTÉRISTIQUES HYDRIQUES

5.1. CALCUL DE LA RELATION PRESSION/TENEUR EN EAU À PARTIR D'UNE DISTRIBUTION DE TAILLE DE PORES NON SPATIALISÉE

5.1.1. Principe

En nous basant sur la loi de Laplace, appliquée sur un modèle de pores parallélépipédiques d'ouverture l , nous pouvons considérer en première approche (cf. annexe A, et chapitres 2 et 3) que à toute teneur en eau θ correspond une pression capillaire h unique, ou, réciproquement: pour une pression capillaire h donnée, il existe un seuil de taille de pores $l_c(h) = \frac{\alpha}{h}$ tel que tous les pores de taille inférieure à $l_c(h)$ sont remplis d'eau et les autres pleins d'air.

Une fonction $\theta(h)$ se déduit alors d'une distribution de pores (ou vice-versa) par un simple calcul. Pour chaque valeur de pression h , on calcule le volume* V des pores de taille l inférieure ou égale à $l_c(h)$, $[V \leq l_c(h)]$, qui n'est autre que la teneur en eau.

$$\theta(h) = [V \leq \frac{\alpha}{h}] \quad \alpha = \text{constante} \quad (5.1)$$

Nous allons ainsi calculer la relation pression/teneur en eau sur nos structures simulées, et donner son expression graphique appelée courbe de rétention d'eau**. Notons qu'une telle courbe de rétention est équivalente à une distribution cumulée de taille des pores.

Nous ne supposons pas d'échelle particulière, seule la relation de proportionnalité inverse entre pression capillaire et taille des pores est prise en compte et les valeurs de h sont adimensionnelles (cf. Echelle des simulations, § 5.1.3).

* Tous les volumes poraux dont il est question dans ce chapitre sont exprimés en pourcentage du volume total de l'échantillon de sol réel ou simulé. Les teneurs en eau sont des teneurs en eau volumiques et correspondent au volume occupé par l'eau, rapporté lui aussi au volume total de sol. Ces volumes sont calculés à partir des surfaces porales simulées, en utilisant soit un modèle "purement bidimensionnel", soit un modèle "bidimensionnel avec extrapolation au tridimensionnel, voir Chap.4, §4.5.

** Les représentations graphiques de la relation pression/teneur en eau sont présentées sous la forme $h(\theta)$, comme c'est couramment le cas en science du sol, avec h en ordonnée et θ en abscisse mais nous avons préféré donner des expressions analytiques sous la forme $\theta(h)$

5.1.2. Courbes de rétention sur des structures simulées

On peut observer sur la figure 5.1 les courbes $h(\theta)$ obtenues pour quelques structures présentées dans le chapitre précédent. La distribution des tailles de pores dans les structures à germes aléatoires sur un seul niveau de fragmentation est peu étendue: on obtient une courbe $h(\theta)$ où la teneur en eau passe de la saturation à zéro pour un domaine réduit de valeurs de pression (5.1.a). La variabilité due au tirage aléatoire des germes de fragmentation apparaît négligeable au-delà de quelques dizaines de germes (Fig.5.1.b).

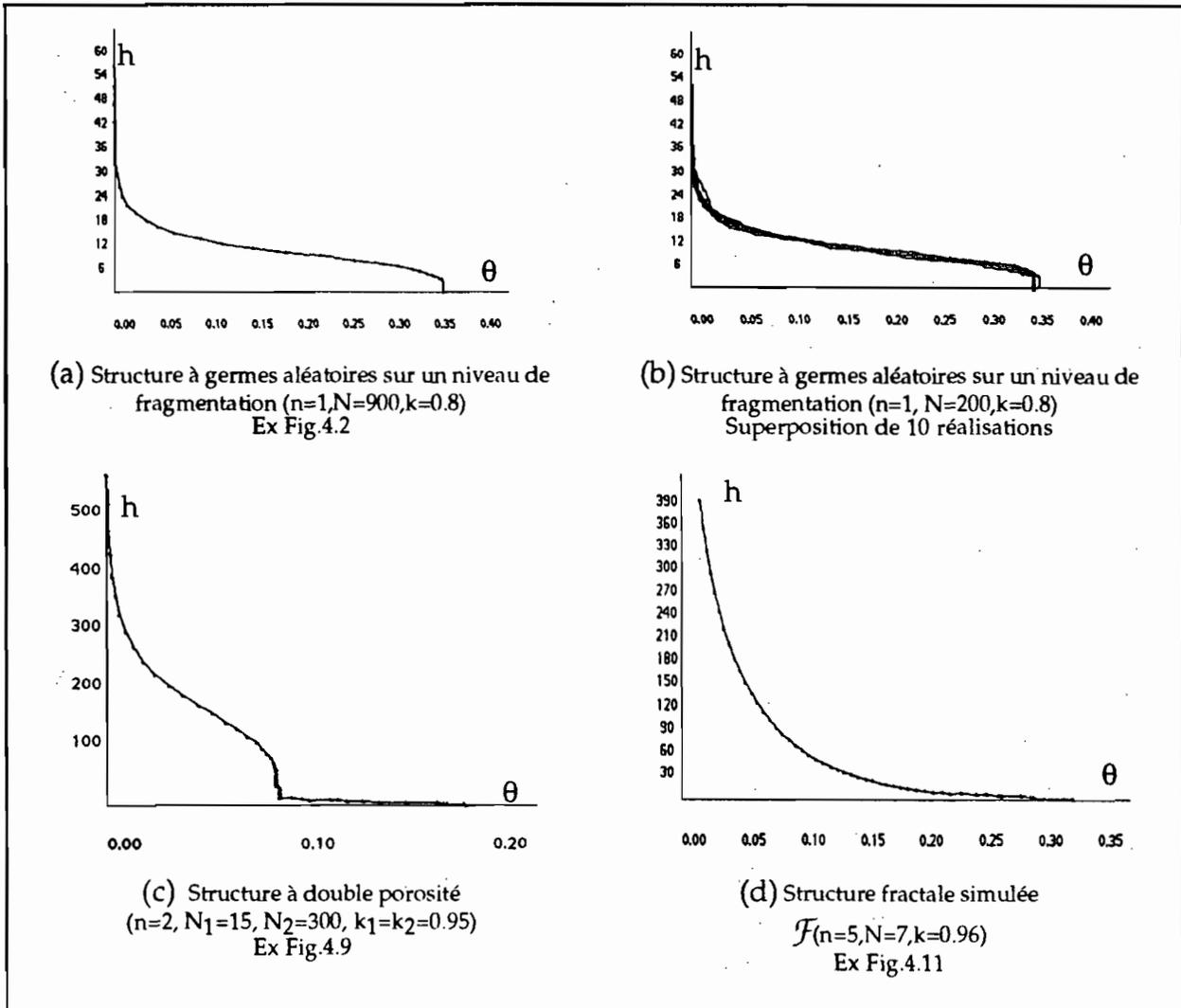


Figure 5.1. Allure de quelques courbes rétentions simulées.

Sur deux niveaux de fragmentation et pour une bimodalité marquée de la distribution de taille des pores, on observe un changement de concavité de la courbe (Fig.5.1.c) pour les valeurs de pressions capillaires correspondant aux tailles de pores intermédiaires, faiblement présentes dans la distribution.

Sur plusieurs niveaux de fragmentations, et une grande étendue de tailles de pores, la pression capillaire s'élève fortement pour les faibles teneurs en eau retenues dans les pores les plus fins, et de façon très régulière pour une structure fractale (Fig.5.1.d).

On peut ainsi associer à toute structure simulée une courbe de rétention.

Inversement, on peut caler la construction de structure sur une courbe de rétention donnée. En effet, sur un modèle à plusieurs niveaux de fragmentation, on peut faire correspondre à chaque niveau une classe de taille de pores: on peut faire en sorte que le premier niveau génère une porosité correspondant au volume d'une première classe de pores de taille maximum (en choisissant un rapport d'homothétie et un nombre d'agrégats à ce niveau de façon à obtenir un volume donné pour une taille moyenne de pores), et continuer de la même façon sur les niveaux et classes de taille suivants. On peut ainsi en théorie reproduire une distribution de tailles de pores donnée, avec en pratique d'autant plus de précision que la distribution est faiblement étendue.

5.1.3. Structures fractales et expression analytique de $\theta(h)$

L'étude de modèles fractals théoriques (chapitre 2) fournit des expressions analytiques modélisant la fonction $\theta(h)$. Nous avons cherché à savoir si les structures fractales simulées $\mathcal{F}(n,N,k)$ vérifiaient bien ces expressions théoriques.

Première expression analytique de $\theta(h)$ dans un sol fractal

Dans le cas de structures parfaitement autosimilaires, et se basant sur la formule (5.1), Rieu et Sposito (1991b) ont établi, partir de considérations théoriques, l'expression analytique de la relation $\theta(h)$ dans un sol fractal de dimension D (cf. Chap. 2).

$$\theta(h)+1-\theta_{\max} = \left(\frac{h_{\min}}{h}\right)^{3-D} \quad (5.2)$$

θ_{\max} étant la teneur en eau à saturation et h_{\min} la pression d'entrée d'air dans la porosité.

Cette relation est utilisée pour vérifier indirectement la nature fractale d'un sol donné et pour calculer la dimension fractale D d'un sol non déstructuré.

Des structures fractales simulées ont été générées suivant ce modèle. Dans le cas de zones de fragmentation carrées, retrouver l'expression (5.2) n'est qu'une façon indirecte de vérifier l'absence d'erreurs de programmation. Lorsque la fragmentation est aléatoire, la variabilité des tailles des sous-agrégats polygonaux à l'intérieur d'un niveau de fragmentation donné produit des images plus réalistes (Ex. Fig 4.10). On peut se demander à quel point une telle construction est encore fractale.

Nous avons alors testé la formule (5.2) sur les valeurs numériques (θ, h) obtenues sur les structures simulées. Rappelons que, pour une valeur quelconque de pression capillaire h , nous calculons θ à partir de la formule (5.1), comme la somme des volumes individuels de chaque pore de taille suffisamment petite pour retenir l'eau. On a vu au chapitre 4 (§4.5) deux façons de calculer ces volumes à partir des mesures de surfaces sur la construction géométrique plane. Il s'ensuit deux courbes de rétention différentes.

i) le modèle est "purement bidimensionnel".

- Le volume de chaque pore rempli d'eau est alors choisi égal à la mesure de la surface du polygone représentant ce pore (cf.formule (4.13)).
- L'expression (5.2) s'avère être un excellent modèle pour les données simulées: la régression linéaire de $\text{Log}(h/h_{\min})$ par rapport à $\text{Log}(\theta+1-\theta_{\max})$ est jugée très satisfaisante (Fig.5.2.a) et l'estimation D_{est} de D est telle que:

$$D_{\text{est}} \cong 2 \frac{\text{Log}N}{\text{Log}N-2\text{Log}k} + 1$$

ii) le modèle est "bidimensionnel avec extrapolation au tridimensionnel" (cf. chapitre 4,§4.5.2).

- Le volume de chaque pore est alors calculé à partir de la mesure de la surface de sa section en utilisant le coefficient correctif donné par la formule 4.16.
- L'ajustement Log/Log est toujours très bon (Fig.5.2.b) et l'estimation de D est

$$D_{\text{est}} \cong 3 \frac{\text{Log}N}{\text{Log}N-2\text{Log}k}$$

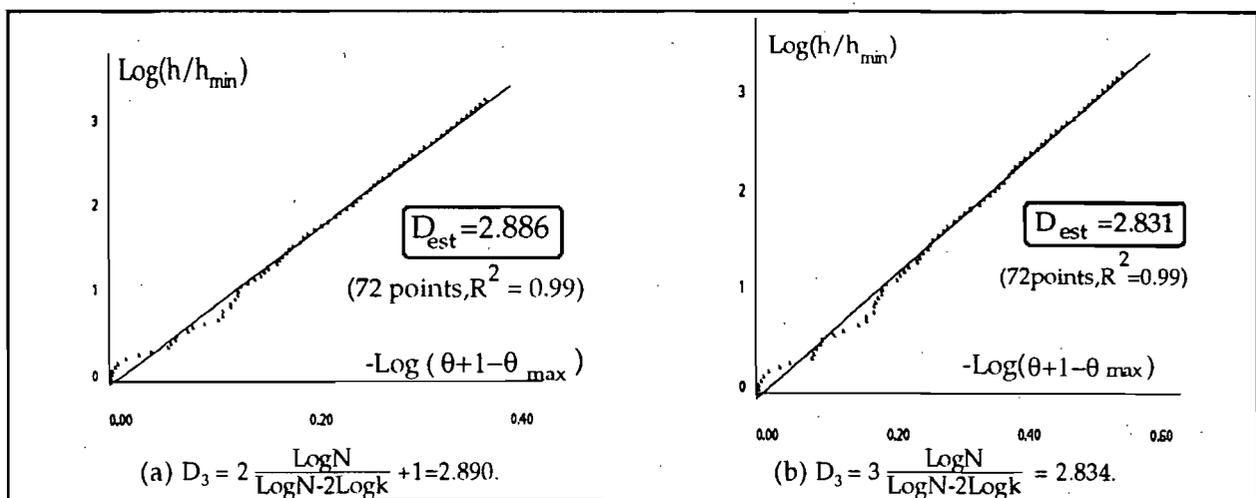


Figure 5.2. Ajustement de l'expression(5.2) sur une réalisation de structure fractale à zones de fragmentation aléatoires $\mathcal{F}(n=3,N=12,k=0.93)$.

On a vu (chapitre 4, formules 4.5, 4.14 et 4.17) que, dans le cas de zones de fragmentation carrées, la dimension fractale de la réalisation plane est $D_2 = 2 \frac{\text{Log}N}{\text{Log}N - 2\text{Log}k}$ et celle de la structure tridimensionnelle associée est $D_3 = D_2 + 1$ (dans le cas i) ou $D_3 = \frac{3}{2} D_2$ (dans le cas ii).

Nous considérons donc que, avec des zones de fragmentation aléatoires, nous avons construit une extension statistique du modèle régulier, que nous qualifions aussi de fractale, et dont la dimension fractale est égale à celle du modèle théorique parfaitement autosimilaire.

Les modèles fractals théoriques donnent lieu à des représentations aussi schématiques que l'éponge de Menger ou des cubes emboîtés pour lesquelles il faut faire un grand effort d'abstraction pour imaginer un sol. Ces modèles prétendent retenir les paramètres essentiels de la distribution de pores d'un sol réel qui est bien sûr bien plus complexe. Une représentation un peu plus réaliste telle que la construction que nous avons proposée confirme qu'effectivement la loi d'échelle exprimée par l'expression analytique de $\theta(h)$ sur un fractal parfait est conservée, malgré la variabilité des tailles de pores et les détails géométriques introduits à l'intérieur d'un même niveau de fragmentation par un lancer de germes de fragmentation aléatoires.

Remarque: Si l'on recherche seulement un modèle (abstrait) d'une distribution de pores fractale, les deux approches i) et ii) sont équivalentes, mais notre recherche de réalisme nous amène plutôt à imaginer des fractures dans toutes les directions de l'espace.

Précisions sur les ajustements jugés "très bons"

L'ajustement de la formule (5.2) est bon à condition de tronquer la courbe $h(\theta)$ vers les faibles valeurs de θ . Ceci s'explique: du fait du caractère aléatoire de la fragmentation, on peut générer au dernier niveau n quelques pores de tailles beaucoup plus petites que la taille moyenne des pores de ce niveau. Si l'on veut simuler une vidange complète, l'existence d'un seul de ces pores nécessite une pression très élevée et biaise la dernière partie de la courbe. On vérifie par simulation qu'il suffit de poursuivre la fragmentation pour que ces petits pores soient comptabilisés avec les pores de niveaux suivants. La troncature est faite de façon systématique en supprimant les points où θ est inférieur au quart de la porosité du $n^{\text{ième}}$ niveau de fragmentation, et ne concerne donc que des teneurs en eau très faibles, d'autant plus faibles que n est élevé.

Plus de 300 simulations ont été lancées pour des valeurs variées de D et de N , et une dimension fractale $D_3 = 3 \frac{\text{Log}N}{\text{Log}N - 2\text{Log}k}$ comprise entre 2 et 3. Sur 50 points (θ, h) simulés, le coefficient de régression linéaire R^2 se situe régulièrement autour de 0.99, et l'écart moyen $|D_{\text{est}} - D_3|$ est d'autant plus faible que n et N sont élevés. Pour un nombre de zones de fragmentation N^n de

l'ordre de 1000, l'écart est de l'ordre de 0.005 pour une réalisation donnée. Dans le cas "purement bidimensionnel", les résultats sont du même ordre de grandeur.

Influence du nombre de niveaux de fragmentation n

Soit un sol de porosité totale Φ donnée, supposé fractal, de dimension fractale D , que l'on cherche à représenter par une structure simulée $\mathcal{F}(n,N,k)$.

Dans notre modèle, D s'exprime en fonction des deux paramètres N et k et ne dépend aucunement de n .

Φ dépend des deux paramètres k et n : $\Phi=1-k^{2n}$ (cf. formule (4.8)).

D et Φ étant donnés, le choix de (n,N,k) comporte une indétermination. Le choix de n , par exemple, fixe la valeur de k et de N . On a donc en théorie une infinité de structures simulées possibles (un certain nombre seulement de possibilités si on veut que N et n soient effectivement des nombres entiers).

Dans le modèle cubique théorique, on a autant de points (θ,h) (i.e. valeurs distinctes de θ) que de niveaux de fragmentation. Il faut beaucoup de niveaux de fragmentations pour pouvoir reproduire une courbe de rétention réelle avec suffisamment de précision. Sur les structures simulées, on a différentes tailles des pores à l'intérieur d'un même niveau de fragmentation, et on peut calculer autant de points (θ,h) que de tailles de pores représentées. C'est ce qui nous a permis de travailler sur un petit nombre de niveaux de fragmentation. Une courbe $h(\theta)$ simulée avec une centaine de points sur seulement trois niveaux (exemple Fig.5.1.d) correspondrait à une fonction en escalier à trois marches sur le modèle théorique régulier et il est curieux de constater que la variabilité intra-niveaux ne trouble pas la linéarité de l'ajustement Log/Log.

Deuxième expression analytique de $\theta(h)$ dans un sol fractal

On trouve chez plusieurs auteurs (cf. Chap.2) un deuxième type d'expression analytique pour $h(\theta)$ caractérisant un sol fractal:

$$\theta(h)/\theta_{\max} = \left(\frac{h_{\min}}{h}\right)^{3-D} \tag{5.3}$$

Un ajustement Log/Log de cette expression sur les mêmes données simulées que précédemment a été testé. Bien que le coefficient de régression linéaire soit encore bon, le graphique montre une tendance non linéaire évidente (Fig.5.3). L'estimation de la dimension fractale à partir de (5.3) est nettement inférieure à la dimension théorique $3 \frac{\text{Log}N}{\text{Log}N-2\text{Log}k}$ de nos constructions (resp. $2 \frac{\text{Log}N}{\text{Log}N-2\text{Log}k} + 1$ pour un modèle purement bidimensionnel).

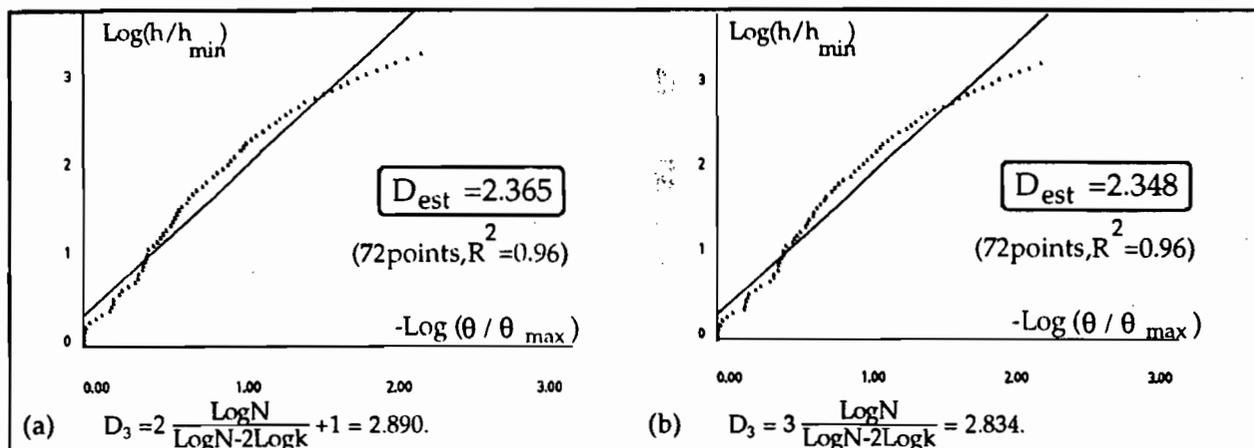


Figure 5.3. Ajustement de l'expression (5.3) sur la même réalisation de structure et les mêmes données (θ, h) que sur la figure 5.2.

On conclut que, malgré leur similitude, les formules (5.2) et (5.3) ne sont pas équivalentes. L'estimation de la dimension fractale est différente suivant la formule utilisée et la formule (5.3) n'est pas adaptée pour le modèle de structure fractale étudié. Cette différence entre les deux formules analytiques théoriques caractérisant un sol fractal et utilisées pour estimer sa dimension dans les études expérimentales fera l'objet d'une discussion au chapitre 8.

5.1.4. Valeurs numériques, échelle des simulations

Dans le programme, la dimension linéaire du carré représentatif d'une structure de sol simulée est arbitrairement supposée égale à 10000 unités et la pression prend des valeurs entre 0 et 10000 unités; longueurs et pressions sont notées l_{prog} et h_{prog} .

Le programme prévoit le choix d'une échelle de longueur particulière. On utilise alors des coefficients multiplicatifs λ_l, λ_h tels que

$$l_{\text{simul}} = \lambda_l l_{\text{prog}}$$

$$h_{\text{simul}} = \lambda_h h_{\text{prog}}$$

où l_{simul} et h_{simul} représentent les valeurs simulées exprimées respectivement en micromètres et millibars.

On introduit alors la valeur de α de la Loi de Laplace: $\alpha = 2\sigma \cos\phi$ La tension superficielle eau-air σ est choisie égale à 0.076 N/m à 20°, l'angle de contact eau-solide ϕ nul, d'où $\cos\phi = 1$ et $\alpha = 0.152$ (N/m).

On doit avoir

$$l_{\text{simul}}(h) = \frac{\alpha}{h_{\text{simul}}} \quad \text{avec } \alpha = 1520 \text{ mbar} \cdot \mu\text{m}.$$

Les calculs sont faits sur les unités arbitraires du programme, où

$$l_{\text{prog}}(h) = \frac{\alpha_{\text{prog}}}{h_{\text{prog}}} \quad \text{avec } \alpha_{\text{prog}} = \frac{\alpha}{\lambda_l \lambda_h}$$

L'échelle de longueur est donnée par λ_l . Les valeurs affichées sont alors les valeurs simulées ($\theta_{\text{simul}}, h_{\text{simul}}$).

Application: Reproduction d'une distribution de pores expérimentale.

Lorsqu'une courbe $h(\theta)$ expérimentale est bien modélisée par une expression analytique que l'on peut simuler, on peut construire une structure de sol qui permette de la reproduire.

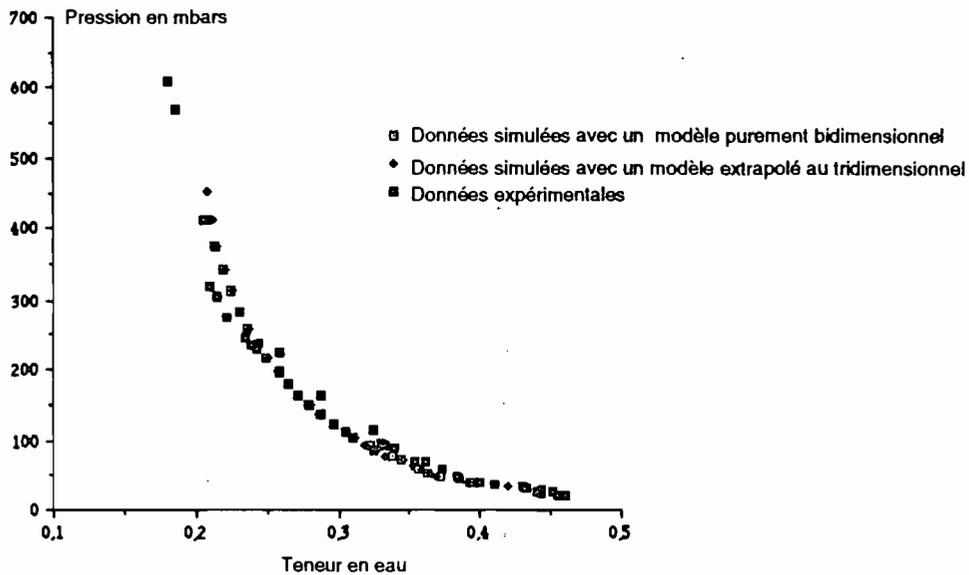


Figure 5.4. Un essai de simulation de la structure du sol Ariana (Rieu et Sposito 1991c) par une structure fractale aléatoire. Comparaison des données expérimentales et simulées pour $h(\theta)$

Par exemple, la courbe de rétention du sol "Ariana" (Rieu et Sposito 1991c) est bien modélisée par l'expression (5.2) avec une dimension fractale de 2.90. La teneur en eau à saturation est 0.46 et la pression d'entrée d'air expérimentale $(h_{\min})_{\text{exp}}$ est 0.22 mbars. On choisit alors N et k de façon à ce que la structure simulée ait une dimension de 2.90 (Ex $N=8$ et $n=3$ niveaux pour cet exemple; puis, sur le même squelette, $k=0.9467$ et $D_2=2.90$ pour un modèle purement bidimensionnel, ou bien $k=0.9648$ et $D_3=2.90$ pour un modèle avec extrapolation au tridimensionnel). On effectue les simulations avec une échelle arbitraire ($\lambda_l = \lambda_h = 1$, $\alpha_{\text{prog}} = \alpha$). On détermine ensuite l'échelle de longueur λ_l telle que les pressions d'entrée d'air expérimentale et simulée coïncident: en posant $\lambda_h = (h_{\min})_{\text{exp}} / (h_{\min})_{\text{prog}}$ (ce qui entraîne $(h_{\min})_{\text{simul}} = \lambda_h (h_{\min})_{\text{prog}} = (h_{\min})_{\text{exp}}$) et $\lambda_l = 1 / \lambda_h$, la valeur de $\alpha_{\text{prog}} = \frac{\alpha}{\lambda_l \cdot \lambda_h}$ est inchangée, les calculs de $(\theta_{\text{prog}}, h_{\text{prog}})$ sont identiques, mais λ_l fournit l'échelle de la simulation.

La teneur en eau maximale $(\theta_{\max})_{\text{simul}}$ correspondant aux trois niveaux de fragmentation simulés est égale à $1 - (0.9467)^6 \approx 0.280$ pour un modèle purement bidimensionnel (cf. formule

4.8) ou bien à $1-(0.9648)^9 \approx 0.276$ pour un modèle avec extrapolation au tridimensionnel. Pour obtenir une teneur en eau à saturation correspondant à la valeur expérimentale, il suffirait en théorie d'ajuster le nombre de niveaux de fragmentation n . On ne peut pas représenter tous les niveaux de fragmentation, mais on suppose qu'il existe à l'intérieur des agrégats de dernier niveau des pores plus fins, non représentés, dont la porosité fournit le complément de $(\theta_{\max})_{\text{simul}}$ à 0.46. Avec trois niveaux de fragmentation, la portion de distribution de tailles de pores effectivement simulée correspond à la plage de données expérimentales disponibles. Données réelles et données simulées sont alors voisines (Fig.5.4) et le côté du carré formé par la structure simulée représente environ $800 \mu\text{m}$.

5.2. PRISE EN COMPTE DE LA RÉPARTITION SPATIALE D'UNE DISTRIBUTION DE PORES ET SIMULATION DE LA RELATION PRESSION-TENEUR EN EAU

5.2.1. Principe: percolation d'invasion

La courbe de rétention (courbe de référence) calculée au paragraphe précédent est directement associée à une distribution de pores par l'intermédiaire de la loi de Laplace appliquée à chaque pore individuellement.

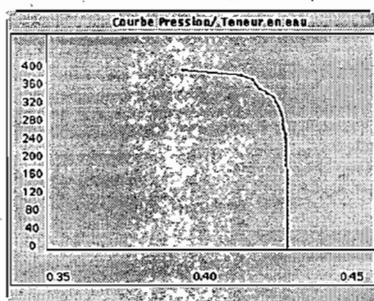
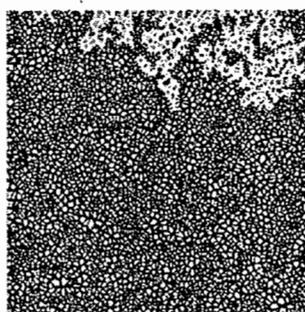
Dans la réalité, la modification de la teneur en eau dans un échantillon de sol est due à l'invasion d'eau ou d'air dans le milieu, en provenance de l'extérieur de l'échantillon, en suivant des chemins et une dynamique d'invasion qui dépendent des conditions expérimentales. Nous avons imaginé cet apport extérieur comme l'injection d'un fluide avec une pression imposée supérieure à celle qui règne dans ce même fluide au sein de l'échantillon, c'est-à-dire comme une variation imposée de la pression capillaire h et une progression de type "percolation d'invasion" (cf. Chap.3) pour un fluide entrant dans un réseau de pores. La modification de l'état d'un pore donné (rempli d'eau ou rempli d'air dans notre modèle) est alors possible d'une part si la pression du fluide entrant est suffisante pour vaincre les forces capillaires locales et déplacer le fluide en place, et d'autre part si le fluide injecté a pu arriver jusqu'à ce pore.

La simulation de l'avancement des processus d'humectation-dessiccation est effectuée en considérant une succession d'états d'équilibre pour des pressions capillaires variables, et en négligeant les forces gravitaires.

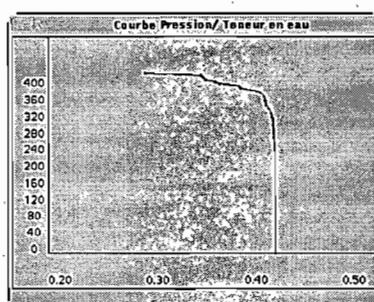
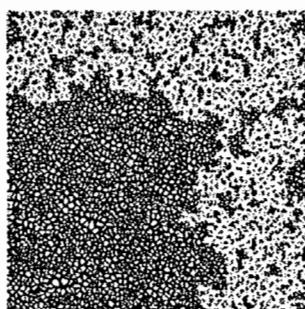
5.2.2. Simulations

Sur une réalisation de structure de sol, on se donne:

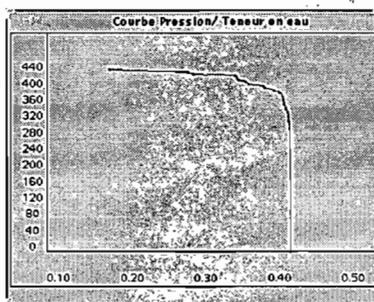
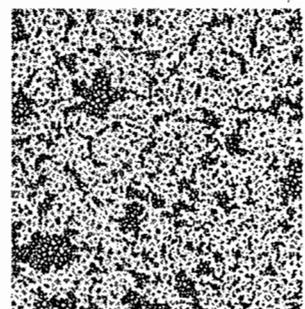
- un état initial de répartition air-eau et la pression capillaire associée.
- une alimentation pour le fluide entrant. On a choisi la face supérieure (Fig.5.5.a), de façon symétrique pour l'air ou l'eau.



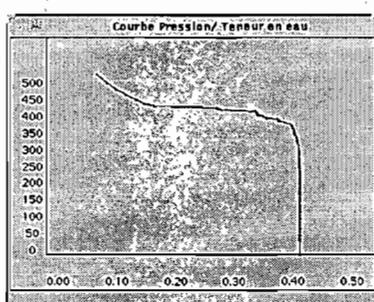
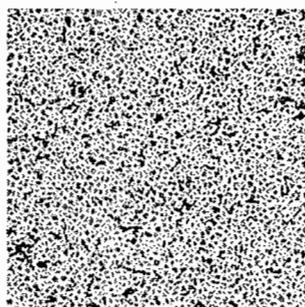
(a)
Milieu initialement saturé en eau (couleur noire). Invasion de l'air (couleur blanche) à partir de la face supérieure
L'air pénètre dans les plus gros pores connectés à la face d'alimentation



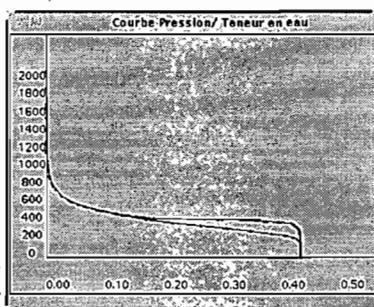
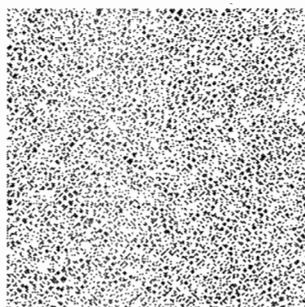
(b)
Augmentation de la pression capillaire et progression du front d'invasion d'air qui percole sur la face opposée.



(c)
Augmentation de la pression capillaire
De nombreux pores deviennent accessibles et la teneur en eau diminue fortement pour une faible variation de pression capillaire.

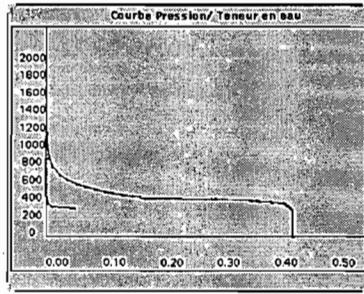
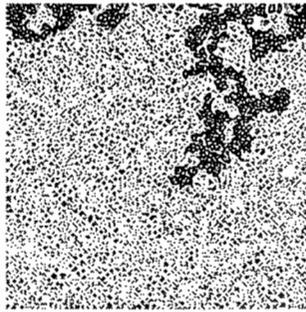


(d)
Les pores les plus fins sont tous accessibles. Leur vidange correspond à des pressions capillaires élevées.

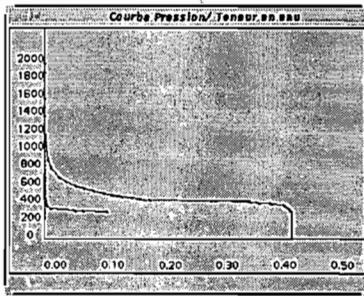
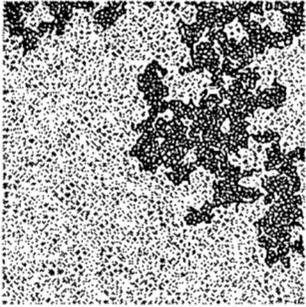


(e)
Fin de la phase de drainage.
La courbe de rétention de référence a été superposée; elle est située en tout point en dessous de la courbe de drainage simulée.

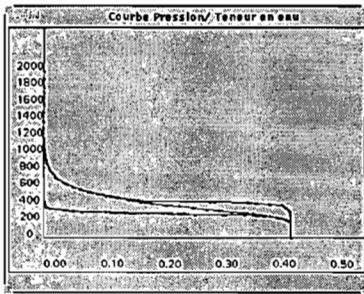
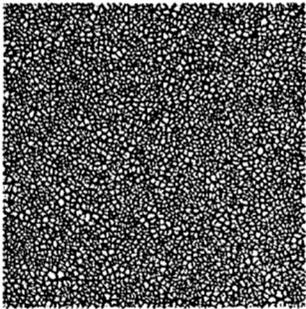
Figure 5.5. (Première partie) Courbes de rétention simulées sur une structure aléatoire sur un niveau de fragmentation. A chaque étape, les échelles du graphique changent en fonction des valeurs (pression, teneur en eau) obtenues depuis le début de la simulation.



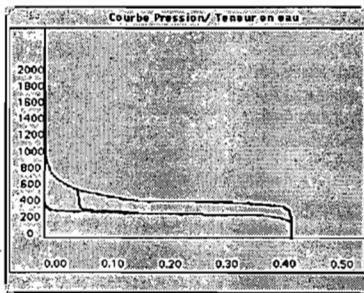
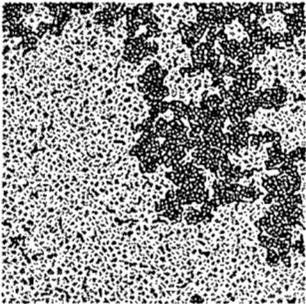
(f)
Le sol est maintenant réhumecté.
Invasion de l'eau à partir de la face supérieure.
Diminution de la pression capillaire et remplissage des pores assez fins et connectés



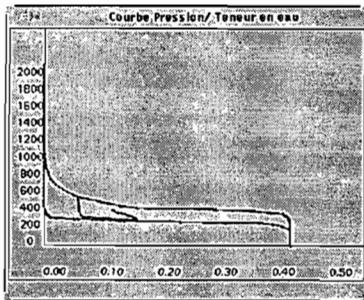
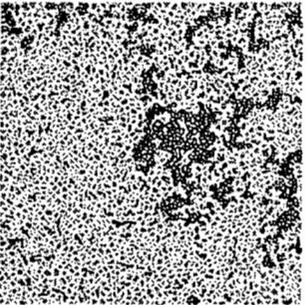
(g)
Diminution de la pression capillaire et progression du front d'invasion d'eau.
Début du tracé de la courbe d'imbibition, en dessous de la courbe de drainage.



(h)
Retour à l'état initial (a)
Boucle principale d'hystérésis simulée et superposition de la courbe de référence



(i)
Après avoir simulé à partir de l'état (h) précédent de nouveau un drainage, mais interrompu (pour une pression capillaire voisine de 500), l'invasion de l'eau est ici simulée sur un sol partiellement saturé



(j)
A partir de l'état (i) précédent, de nouveau une invasion d'air et inversion du sens de variation de la pression capillaire

Figure 5.5. (Deuxième partie). Courbes de rétention simulées sur une structure aléatoire sur un niveau de fragmentation.

On simule une succession d'états d'équilibres pour différentes valeurs de pression capillaire: à chaque nouvelle valeur de la pression capillaire h , le fluide entrant envahit un pore si et seulement si

- i) sa taille est convenable (Loi de Laplace)
- ii) il existe un chemin continu de pores déjà envahis par ce fluide le reliant à la face d'alimentation.

5.2.2.1. Branches principales d'hystérésis

Dans le cas où l'on part d'un état initial où le milieu est saturé par l'un des deux fluides et où l'on conduit la simulation jusqu'à une désaturation complète, un algorithme très simple basé sur les relations de voisinage* d'un pore donné suffit à rendre compte de l'existence de chemins continus en fluide entrant depuis la face d'alimentation jusqu'au front d'invasion.

Exemple (Illustrations sur la figure 5.5):

Soit un sol initialement saturé d'eau, la pression capillaire est nulle, et simulons l'invasion de l'air.

On augmente la pression capillaire. Lorsqu'elle est suffisante pour que l'air pénètre dans les plus gros pores, seuls ceux qui sont connectés à la face d'alimentation sont envahis par l'air (Fig.5.5.a).

On augmente encore la pression. Dans l'ensemble de pores de taille suffisante pour être envahis, seuls ceux dont un voisin au moins est déjà envahi changent d'état (Fig.5.5.b).

On augmente pas à pas la pression (Fig.5.5, de a à e). A chaque étape, dans l'ensemble des pores de taille supérieure ou égale à α/h qui auraient été remplis d'air en négligeant la condition d'accessibilité (cf. § 5.1), seuls certains (un sous-ensemble) sont effectivement envahis par l'air.

Le volume d'air est donc inférieur ou égal, et la teneur en eau supérieure, aux valeurs que l'on calculait pour la courbe de référence.

$$\theta_{\text{drainage}}(h) \geq \theta_{\text{référence}}(h)$$

La courbe de rétention en drainage est située en tout point au-dessus de la courbe de référence (Fig.5.5e et figures 5.6, 5.7, 5.8).

On utilise le même principe de simulation pour l'entrée d'eau sur un sol initialement sec (Fig.5.5f, g et h). Sur l'ensemble des pores de taille suffisamment petite, inférieure à α/h , pour être envahis par l'eau, seuls ceux qui sont connectés aux pores déjà remplis d'eau sont effectivement envahis. On a forcément:

$$\theta_{\text{imbibition}}(h) \leq \theta_{\text{référence}}(h)$$

* La recherche de voisins sur un réseau irrégulier a été faite lors de la construction des structures.

On simule ainsi de façon très simple deux branches principales d'hystérésis en imbibition et drainage, en tenant compte de la connectivité du réseau poral (Fig.5.5.h et figures 5.6, 5.7, 5.8). Quelle que soit l'expression de la condition de connectivité (ici un chemin continu pour le fluide entrant), le même raisonnement s'applique: dès que certains pores prévus par la loi de Laplace ne sont pas accessibles, les courbes simulées s'écartent de la courbe de référence comme on vient de l'indiquer.

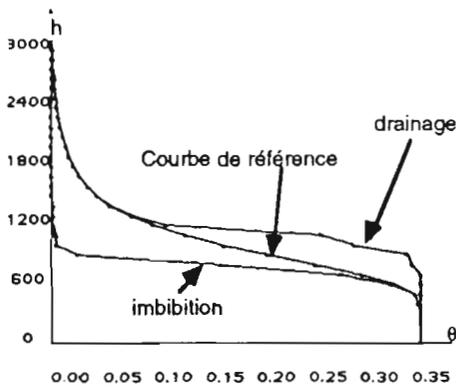


Figure 5.6. Structure aléatoire sur un niveau de fragmentation

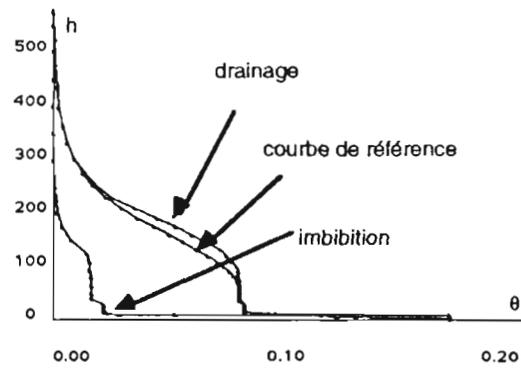


Figure 5.7. Structure à double porosité.

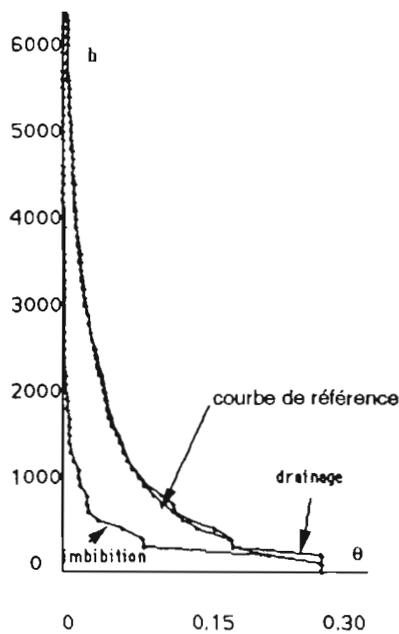


Figure 5.8. Structure fractale

La forme de l'hystérésis ainsi simulée peut varier. Dans le cas de structures aléatoires sur un seul niveau de fragmentation, les branches principales sont plus ou moins symétriques (Figure 5.6) par rapport à la courbe de référence. Sur une structure à double porosité ou fractale, l'hystérésis simulée est principalement due à la phase d'imbibition (Figures 5.7 et 5.8); cela traduit la dissymétrie de la qualité des connections entre gros pores (bonne) et entre les pores

fins (très mauvaise). La forme de l'hystérésis dépend de la répartition spatiale des pores, ou encore de la connectivité des sous-réseaux formés par les pores d'une classe de taille donnée.

5.2.2.2. Simulation des branches secondaires de la boucle d'hystérésis

Nous avons ensuite cherché à simuler des drainages ou des imbibitions sur un sol initialement non saturé. Interrompant la simulation de l'entrée du fluide A dans le milieu avant une invasion totale, on obtient un état partiellement saturé. Inversant le processus, on simule alors une alimentation par le deuxième fluide B (Fig.5.5i). L'invasion d'un pore donné est toujours soumise à la même règle, à savoir l'existence d'un chemin continu de pores envahis par B jusqu'à la face d'alimentation. Mais le premier algorithme qui consistait, pour chaque pore susceptible de changer d'état, à examiner l'état de ses voisins immédiats, s'avère insuffisant (en effet, certains pores peuvent maintenant être remplis par B, parce qu'ils n'avaient pas pu être envahis par A à l'étape précédente, mais sans être reliés par un chemin continu de fluide B à la face d'alimentation).

La simulation d'un chemin continu d'alimentation en fluide entrant est alors généralisée. Au fur et à mesure que des pores sont envahis, ces pores "envoient" le fluide vers leurs pores voisins. Le front d'invasion se propage de proche en proche*, et l'amas de fluide connecté à la face d'alimentation s'étend soit parce que de nouveaux pores se remplissent, soit parce que des pores déjà envahis sont de nouveaux connectés.

Les boucles secondaires d'hystérésis sont alors simulées (Fig.5.5.i, 5.5j, et 5.9).

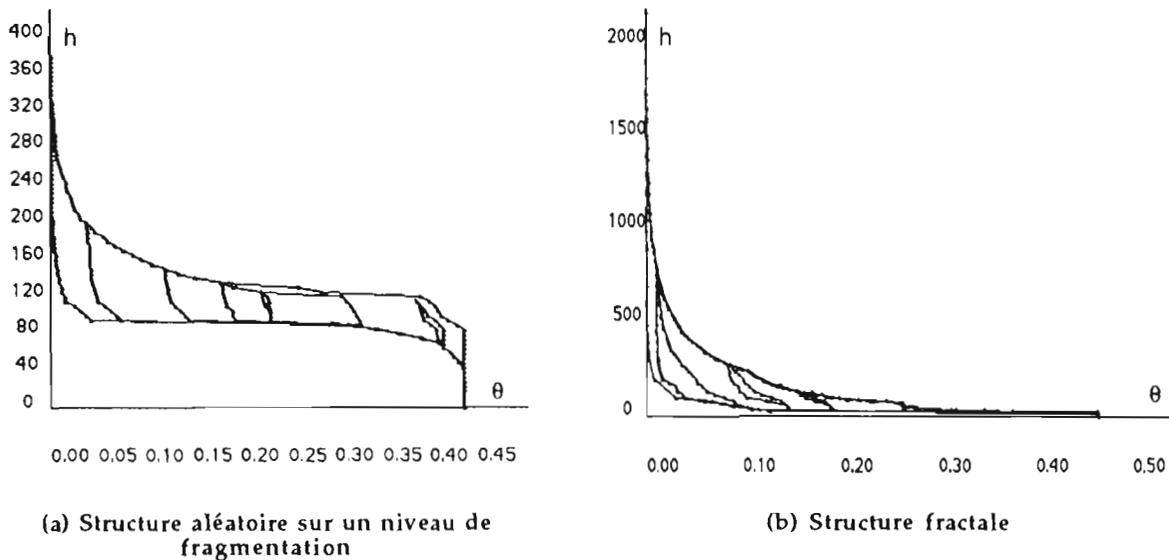


Figure 5.9. Branches secondaires d'hystérésis.

* Sur le plan informatique, on gère une liste de nœuds, points de rencontre entre plusieurs pores, dans laquelle on insère au fur et à mesure des variations de pression les nouveaux points atteints par la progression du fluide, pour garder l'historique de la progression et éviter les boucles infinies car aucune direction de propagation n'est privilégiée (voir Annexe C)

Le raccordement parfait aux branches principales s'explique très bien a posteriori. Prenons par exemple le cas de l'eau. Lorsque l'eau pénètre dans un milieu déjà partiellement saturé, on parcourt les mêmes chemins d'alimentation que pour un état initial totalement sec, à la seule différence que l'on peut rencontrer au passage des pores déjà pleins. Au bout d'un certain temps, plus ou moins long, on ne rencontre plus de tels pores et on récupère un état et une dynamique de remplissage identiques à ceux que l'on aurait obtenus avec un état initial sec.

5.2.3. Discussion

La simulation de l'invasion de l'air ou de l'eau sur des structures aléatoires à un niveau de fragmentation fait apparaître un "palier de percolation" similaire à celui obtenu sur d'autres réseaux de pores. Sur les structures fractales, ce palier n'existe pas mais il s'agit de structures spatiales ordonnées, à laquelle ne s'applique pas les résultats de la théorie de la percolation: en effet, et en particulier en drainage, les pores sont toujours accessibles et la courbe de rétention simulée se confond avec la courbe de référence caractérisant seulement la distribution de taille des pores.

Dans le cas du modèle de structure fractale présenté, on vérifie que les estimations de la dimension fractale à partir de la courbe de drainage sont bien sûr très voisines de celles calculées au paragraphe 5.1. sur la courbe de référence. Si tel est le cas dans la réalité, on peut penser que les estimations de dimensions fractales effectuées sur des données expérimentales soit de distributions de pores mesurées au porosimètre à mercure soit de courbes de rétention obtenues en drainage, traduisent effectivement le caractère fractal de la distribution de taille "réelle" de pores dans les sols considérés.

Nous entendons par "distribution de pore réelle" celle que l'on peut estimer par exemple en analyse d'images, ou encore celle que nous schématisons dans une structure simulée, et à laquelle nous associons une courbe de rétention de référence, par opposition à la distribution de pores que l'on peut estimer à partir d'une courbe de drainage (air ou mercure) ou d'imbibition.

La conséquence de l'hypothèse faite sur l'existence d'un chemin continu d'alimentation pour le fluide entrant est très clairement mise en évidence par simulation. Un raisonnement simple montre a posteriori que de la prise en compte d'une quelconque condition de connectivité en supplément de la loi de Laplace résulte une explication de l'hystérésis de la relation $\theta(h)$. Nous retrouvons ainsi des résultats déjà connus (cf. Chap.2) pour des simulations de réseaux de pores divers. La représentation graphique des différents cycles d'imbibition et de drainage fournit une illustration didactique d'un raisonnement théorique tel que celui de Golden (1980)

qui prévoit sans les simuler des boucles principales et secondaires d'hystérésis sur un réseau de percolation, ou des résultats de Billotte (1986) obtenus par calculs probabilistes.

Les hypothèses que nous avons faites sont les mêmes que celles de Golden (1980) ou Thirriot (1981,1982); ce sont aussi celles de Billotte (1986) à ceci près que nous avons négligé les phénomènes de piégeage comme la majorité des auteurs dans le domaine. L'introduction d'une condition supplémentaire de chemin continu pour l'évacuation du fluide sortant est aisée mais génèrerait dans notre modèle plan des phénomènes de piégeage beaucoup trop importants. L'absence de piégeage dans nos simulations se traduit par des boucles d'hystérésis fermées et une saturation variant de 0 à 100%.

Nous avons, comme les auteurs précédents, attribué un rôle symétrique aux fluides mouillant et non mouillant, en imposant un chemin continu d'alimentation aussi bien pour l'entrée de l'air que pour l'entrée de l'eau. Cette hypothèse est largement discutée par Lenormand (1983ab). Dans beaucoup de travaux sur les réseaux de pores, il n'y aucune condition d'accessibilité en imbibition lorsque celle-ci est simulée. Cela reviendrait ici et à remplacer la courbe d'imbibition par la courbe de référence: l'hystérésis serait conservée, mais notablement réduite. Les bases physiques de nos simulations peuvent donc être a posteriori discutées.

5.3. CONCLUSION

La courbe de rétention que l'on peut calculer à partir de la loi de Laplace appliquée individuellement à chaque pore d'un milieu poreux est équivalente à une distribution cumulée de tailles de pores. Nous l'appelons "courbe de référence".

Nous avons vérifié que la courbe de référence calculée sur les structures fractales simulées présentées au chapitre précédent est très bien modélisée par l'expression analytique (5.2); et que malgré l'irrégularité des zones de fragmentation successives, l'ajustement de cette expression permet de retrouver la dimension fractale déterminée par les paramètres de construction de la structure. Nous considérons que ceci confirme que les structures simulées constituent une extension statistique du modèle cubique théorique, qui permet à la fois de retrouver la forme prévue pour $\theta(h)$ et de penser que cette forme peut être conservée pour des géométries plus complexes et plus réalistes. Nous sommes en mesure de construire des modèles de structure calés sur une courbe de rétention expérimentale. Un modèle purement bidimensionnel est pour l'instant suffisant pour représenter l'organisation en agrégats et une distribution de pores fractale, dans la mesure où la validité du calcul simple utilisé pour extrapoler à un modèle tridimensionnel s'avère confirmée.

La simulation de l'invasion de l'air ou de l'eau suivant une approche de type "percolation d'invasion" tient compte de la connectivité du réseau poral et de la non-accessibilité de certains

pores par le fluide entrant dans le milieu poreux. Les courbes de drainage et d'imbibition s'écartent alors de la courbe de référence et reproduisent l'allure de l'hystérésis constatée expérimentalement pour la relation (h,θ) . La simulation fournit une illustration très simple des conséquences d'une plus ou moins bonne connectivité des pores d'une classe de taille donnée sur la différence entre une distribution de tailles de pores et une courbe de rétention, même si les conditions réelles de connectivité peuvent être discutées. Nous retrouvons ainsi des résultats connus dans le domaine des simulations de réseaux de pores. A notre connaissance, la simulation effective des boucles secondaires d'hystérésis sur un réseau est originale. Notre construction de structure de sol permet donc de simuler de façon plutôt réaliste la relation pression/teneur en eau.

6.1. INTRODUCTION

6.1.1. Déformation et courbes de retrait

La mesure expérimentale de la diminution de volume d'un échantillon de sol non remanié et préalablement saturé, lors de son dessèchement, produit une courbe de retrait (cf. Chap.1, §1.1.3) qui exprime le volume global de l'échantillon en fonction de sa teneur en eau.

Comment l'information apportée par cette courbe sur la déformation de la structure du sol peut-elle être prise en compte dans la déformation de nos structures simulées? Quelles sont les conséquences de la déformation sur la détermination des caractéristiques hydriques?

Nous considérons la question à l'échelle microscopique d'un réseau de pores. S'il y a variation de volume avec la teneur en eau, c'est que la distribution de taille des pores varie. Jusqu'ici, une courbe de rétention est déduite d'une distribution de pores donnée. Nous allons simuler différents scénarios de déformations de l'espace poral sous contrainte hydrique et observer les modifications de la courbe de rétention.

Le modèle de Braudeau (1988 a et b) permet une certaine interprétation de la courbe de retrait en termes de structure, en distinguant deux types d'espace poral par leur fonctionnement au cours du retrait: l'espace microporal au sein d'agrégats argileux, éléments moteurs de la déformation, et l'espace macroporal complémentaire. Nous chercherons aussi à représenter ce modèle de structure de sol.

6.1.2. Principe de simulation

Dans tous les cas le principe est le même. On fait varier la teneur en eau dans une structure simulée. Pour cela on représente une succession d'états d'équilibre caractérisés par une pression capillaire h . A chaque variation de pression, on considère alternativement deux étapes.

i) une étape d'invasion de l'air ou de l'eau dans l'espace poral entre une pression h et une pression h' (Loi de Laplace +connectivité)

ii) une étape de déformation de structure entre deux états de gonflement (s) à la pression h et (s') à la pression h' .

Pendant l'étape de déformation, chaque pore conserve son état de remplissage, vide ou plein d'eau. La déformation elle-même induit donc une modification de la teneur en eau. Par exemple un pore plein d'eau qui se contracte relâche de l'eau, dont on considère qu'elle s'évapore, et qui est donc directement comptabilisée comme une diminution de la teneur en eau globale.

A l'étape i) de l'itération suivante, le remplissage ou la vidange du pore s'effectue à nouveau en fonction de la loi de Laplace.

Après chaque déformation, l'image représentant le nouvel état de la structure est redessinée sur l'écran de l'ordinateur, et on a l'impression de voir réellement une structure se déformer tout en se vidant ou se remplissant d'eau.

6.2. TRAITEMENT DE LA DÉFORMATION À DIFFÉRENTS NIVEAUX D'ORGANISATION STRUCTURALE

La méthode de construction de nos modèles de structures a été conçue de façon à pouvoir gérer des porosités variables (cf. Chap.4,§4.4). Nous avons défini un état de gonflement (s) d'une structure simulée sur plusieurs niveaux i de fragmentation par un squelette invariant et un ensemble $\{k_i(s)\}_{i=0\dots n}$ de rapports d'homothéties variables. Chaque rapport d'homothétie $k_i(s)$ caractérise l'état d'ouverture d'un niveau de fragmentation donné et définit le comportement spécifique de ce niveau d'organisation structurale vis-à-vis du retrait.

Une variation du volume global est représentée par une variation de $k_0(s)$, c'est-à-dire une variation de la surface de l'agrégat A_0 , racine de la construction hiérarchique de la structure. Rappelons la formule (4.9), dans laquelle la surface de l'agrégat de niveau 0 est exprimée en pourcentage de la surface constante de la zone de fragmentation initiale.

$$SA(0,s) = k_0(s)^2 \quad (6.1)$$

La courbe de retrait volumique est établie en suivant les variations de la hauteur d'un échantillon à la verticale d'un point de mesure (cf. chap.1,§1.1.3). Les variations de volume sont calculées à partir de ces variations linéaires en supposant l'isotropie du retrait. On peut donc de la même façon calculer un retrait surfacique et travailler sur un modèle bidimensionnel. Sur la structure plane simulée, les variations de volume sont représentées par des variations de surface et peuvent être calculées en extrapolant à la troisième dimension (Chap4,§4.5) Pour conserver la donnée d'une courbe de retrait sous sa forme volumique, nous préférons une extension du modèle à une structure tridimensionnelle isotrope. La formule (6.1) se réécrit alors

$$V(0,s) = k_0(s)^3$$

On sait que le volume* total de l'échantillon varie avec la teneur en eau**. Les agrégats aux différents niveaux d'organisation i changent aussi de volume. Le volume de l'ensemble des agrégats de niveau i peut se calculer. La formule 4.10 devient,

$$V(i,s) = \prod_{j=0}^{j=i} (k_j(s))^3$$

Nous définissons une déformation entre deux états de gonflement (s) et (s') par une liste de variations de volume ($\Delta V_0, \dots, \Delta V_i, \dots, \Delta V_n$) aux différents niveaux d'organisation de la structure. L'état de gonflement (s) de la structure avant la déformation est caractérisé par un vecteur ($k_0(s), \dots, k_i(s), \dots, k_n(s)$) et le nouveau vecteur d'état après déformation ($k_0(s'), \dots, k_i(s'), \dots, k_n(s')$) peut se calculer en fonction de ($\Delta V_0, \dots, \Delta V_i, \dots, \Delta V_n$).

Nous avons:

$$\Delta V_i = \left(\prod_{j=0}^{j=i} (k_j(s'))^3 \right) - \left(\prod_{j=0}^{j=i} (k_j(s))^3 \right)$$

Le calcul se fait par récurrence, en commençant par le niveau $i=0$.

$\Delta V_0 = ((k_0(s'))^3) - (k_0(s))^3$ et $k_0(s')$ est calculé à partir de $k_0(s)$ et ΔV_0 .

Puis, à chaque niveau i , $k_i(s')$ est calculé à partir de $k_i(s)$, de ΔV_i , et des valeurs des rapports d'homothéties aux niveaux inférieurs à i :

$$k_i(s') = \left(\frac{\Delta V_i + \prod_{j=0}^{j=i} (k_j(s))^3}{\prod_{j=0}^{j=i-1} (k_j(s'))^3} \right)^{1/3}$$

Pour représenter une déformation, il suffit donc de connaître ($\Delta V_0, \dots, \Delta V_i, \dots, \Delta V_n$).

ΔV_0 correspond à la variation de volume global.

Si n représente l'échelle des particules élémentaires, le volume de la phase solide $V_n(s)$ doit être indépendant de (s), i.e. $\Delta V_n = 0$.

Mais les variations de volume internes ΔV_i sont mal connues. Les différents choix pour les valeurs de ΔV_i correspondent à différentes hypothèses sur les réorganisations internes des agrégats lorsqu'une déformation globale est observée.

* Tous les volumes calculés dans ce chapitre (volumes de pores, d'agrégats ou de particules) sont rapportés à une référence constante. Pour les valeurs expérimentales, il s'agit de volumes massiques rapportés à la masse de sol séché à l'étuve à 105°C. Pour les valeurs simulées, les surfaces sont rapportées à la surface totale de la zone $S(Z_0)$ racine du squelette invariant de sol, et les volumes correspondants rapportés à $S(Z_0)^{3/2}$ pour un modèle avec extrapolation au tridimensionnel.

** La teneur en eau est elle aussi exprimée comme un volume rapporté à la même référence constante que tous les autres volumes.

6.3. DIFFÉRENTS SCÉNARIOS DE DÉFORMATION POUR UNE MÊME COURBE DE RETRAIT GLOBAL. MODIFICATION DE LA COURBE PRESSION/TENEUR EN EAU

Soit une déformation globale de structure décrite par une courbe de retrait quelconque donnée. Nous avons choisi ici une courbe de retrait classique $V(\theta)$ construite suivant le modèle de Braudeau(1988a), c'est-à-dire une succession de fonctions linéaires ou composées d'exponentielles (Fig.6.1) entre des points caractéristiques de la courbe (cf. § 6.4).

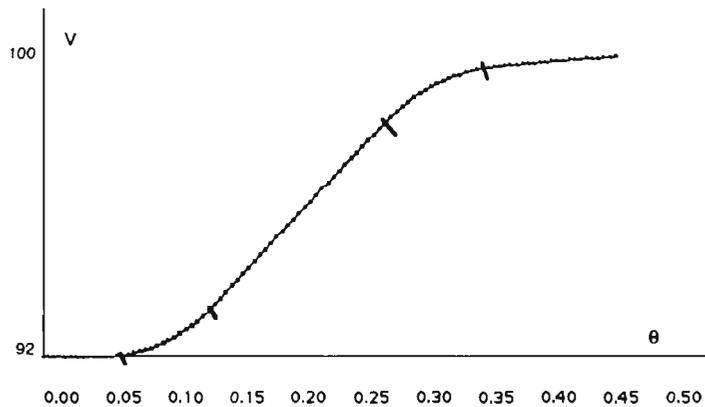


Figure 6.1. Courbe de retrait imposée.

La variation de ΔV_0 entre deux valeurs successives de pression capillaire est calculée:

$$\Delta V_0 = V(\theta(h)) - V(\theta(h')).$$

6.3.1. Différents scénarios

Plusieurs scénarios sont envisagés pour simuler divers réarrangements possibles des agrégats internes (à l'échelle microscopique) donnant une même modification du volume global (macroscopique).

Scénario 1

Une première hypothèse, en l'absence de toute information supplémentaire, peut être:

$$\Delta V_i = (1-i/n)\Delta V_0.$$

($\Delta V_i = \Delta V_0$ pour $i=0$ et $\Delta V_i = 0$ pour $i=n$).

Le volume poral P_i de niveau i est celui de l'espace ménagé entre les agrégats de niveau i , à l'intérieur des agrégats de niveau $(i-1)$.

$$\Delta P_i = \Delta V_{i-1} - \Delta V_i = (1/n)\Delta V_0$$

L'hypothèse faite revient à dire que la variation de volume total, ou encore la diminution de la porosité totale, est attribuée à des diminutions identiques de chacun des n volumes poraux

partiels P_i correspondant aux pores de niveau i . Dans nos structures simulées, les pores sont en général de plus en plus fins lorsque le niveau i de fragmentation augmente, et le volume poral de niveau i généralement de plus en plus petit; il s'ensuit dans ce cas que la variation de volume relatif d'un pore donné est d'autant plus élevée que ce pore est fin.

Scénarios 2

D'autres hypothèses peuvent être faites. Il est possible par exemple que la déformation macroscopique observée ne soit que le reflet atténué de variations de volume internes plus importantes*.

On suppose alors qu'il existe un niveau charnière k pour lequel les variations de volume internes sont maximales: la variation de volume au niveau k , ΔV_k , c'est-à-dire la somme des variations de volume des agrégats de niveau k , est plus élevée que les variations de volume ΔV_i aux autres niveaux d'organisations $i \neq k$ et en particulier plus élevée que les variations connues du volume total ΔV_0 .

$$\Delta V_k = \lambda \Delta V_0 \quad \text{avec } \lambda > 1.$$

Pour un niveau i quelconque, nous devons avoir:

$\Delta V_i = \Delta V_0$ si $i=0$, $\Delta V_i = 0$ si $i=n$, et $\Delta V_i = \Delta V_k$ si $i=k$. Nous avons choisi, pour respecter ces trois contraintes, des fonctions monotones simples et arbitraires, exprimant les variations de volume au niveau i par rapport à la variation de volume total ΔV_0 .

$$\begin{aligned} \Delta V_i &= (\lambda)^{i/k} \Delta V_0 \quad \text{pour } i \leq k \\ \Delta V_i &= \left(\frac{n-i}{n-k}\right) \Delta V_k = \left(\frac{n-i}{n-k}\right) \lambda \Delta V_0 \quad \text{pour } i \geq k \end{aligned}$$

Pour ce même scénario, on a différentes possibilités pour le choix du niveau k et donc de la taille moyenne des pores autour de laquelle la déformation est de nature différente.

6.3.2. Simulations

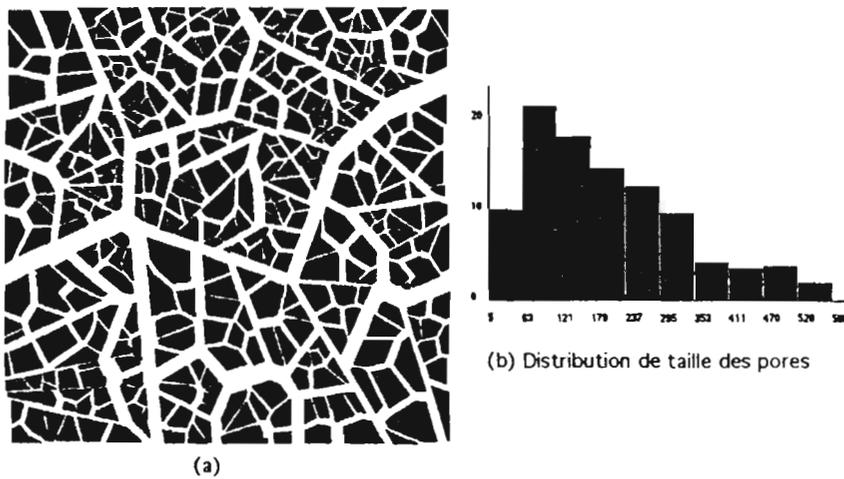
Premier exemple: une structure donnée à l'état saturé et différents scénarios de déformation.

Sur la structure en agrégats emboîtés représentée sur la figure 6.2. à l'état saturé, nous avons simulé un drainage (invasion de l'air) accompagné de déformation.

* Cette hypothèse peut être déduite par exemple du modèle de Braudeau(1988a) lorsque la pente maximum de la courbe de retrait est plus faible que 1.

Différents scénarios de déformation peuvent être comparés. Pour cet exemple, nous avons choisi trois scénarios: le scénario 1, et deux scénarios 2, un scénario 2' où $k=1$, et un scénario 2'' où $k=2$, avec dans les deux cas une valeur de λ choisie égale à 1.7.

A la fin du drainage, suivant le scénario de déformation choisi, les distributions de pores à l'état sec sont différentes (Fig.6.3). Les distributions sont exprimées en pourcentage du volume total de pores. Ce volume total est le même puisque le retrait global est le même. Les distributions de particules, elles, restent exactement les mêmes quel que soit l'état de gonflement. Pour le scénario 1, les pores sont tous un peu réduits, et la forme de la distribution n'est pas très modifiée. Pour les scénarios 2, la modification est plus importante, car les pores de niveau supérieur à k se contractent tandis que les plus gros pores s'élargissent.



$$n=3. N_1=N_2=N_3=8. k_1= 0.95, k_2= 0.90, k_3= 0.85$$

Figure 6.2. Structure de sol (a) et distribution des pores à l'état saturé (b).

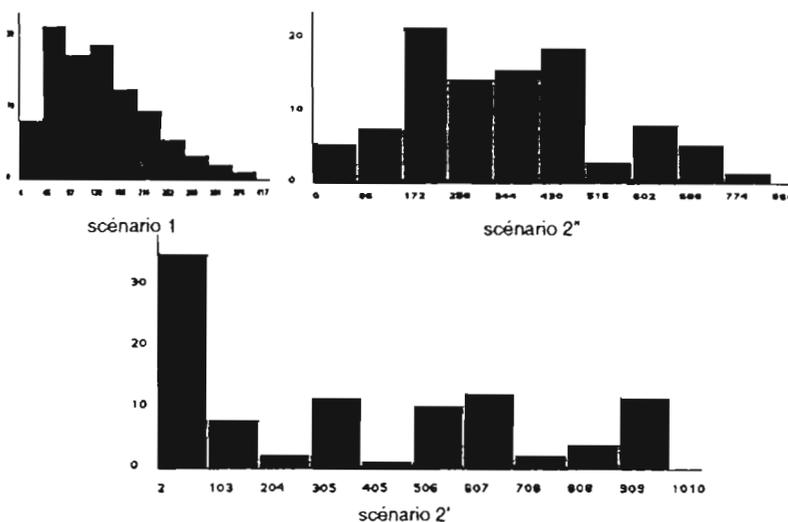


Figure 6.3. Distribution des pores à l'état sec suivant différents scénarios de retrait (pourcentage du volume poral total occupé par une classe de taille donnée) .

Dans tous les cas, la courbe de rétention simulée avec les différents scénarios est différente de celle que l'on aurait obtenue en négligeant le retrait (voir figure 6.4). Tant que le retrait est faible, ces courbes sont voisines. Lorsque l'influence du retrait se fait sentir, à des pressions capillaires encore faibles, si la déformation est due à des pores de niveaux d'organisation élevés (scénario 2''), ces pores sont encore pleins d'eau, et leur contraction libère une eau supplémentaire. La courbe de rétention est alors située en dessous de la courbe simulée sans tenir compte du retrait. Les pores contractés deviennent de plus en plus petits au fur et à mesure que le retrait augmente et leur vidange s'effectue à une pression capillaire élevée (pas atteinte sur la figure 6.4 pour la gamme de pressions simulées).

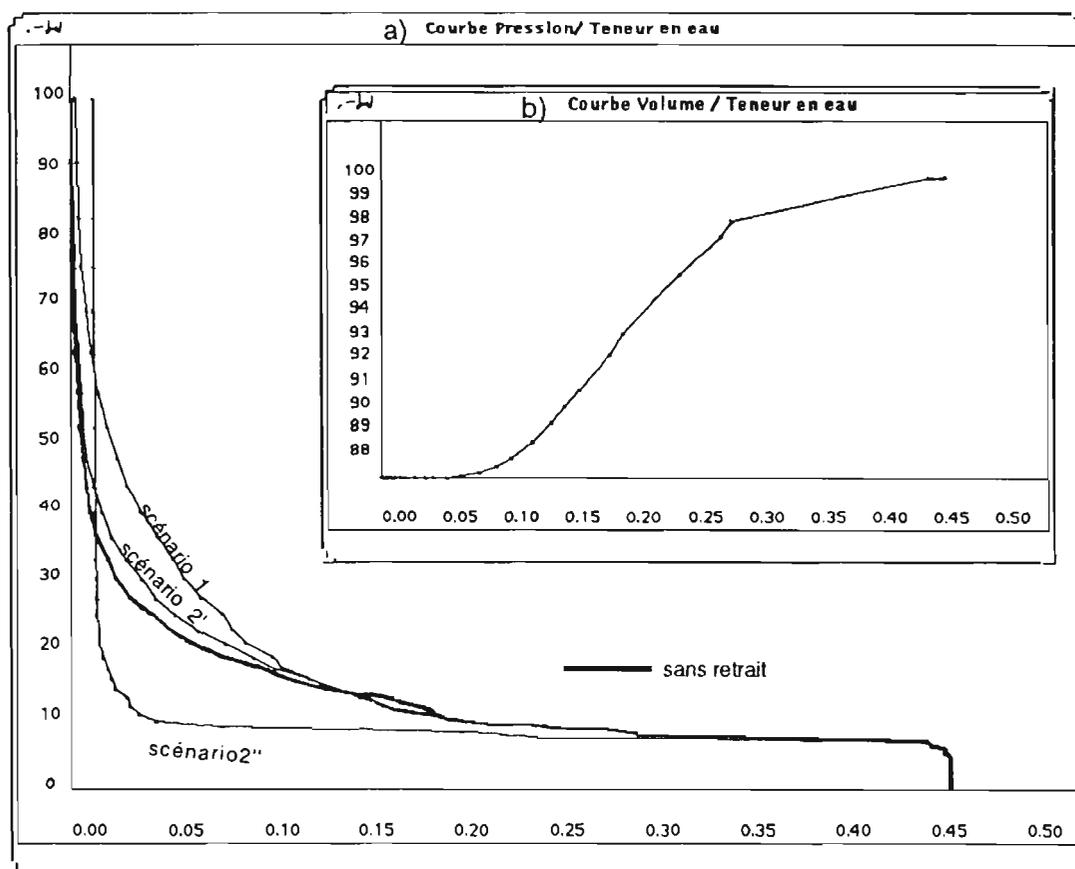


Figure 6.4. a) valeurs de $V(\theta)$ calculées à chaque pas de pression suivant la courbe de retrait de la figure 6.1. b) Courbes de rétentions simulées en drainage avec ou sans retrait.

Deuxième exemple: une structure donnée à l'état sec et différents scénarios de déformation.

Supposons connue une structure de sol à l'état sec, supposée fractale comme illustré sur la figure 6.5.a. La courbe de rétention associée à la distribution des pores à l'état sec (courbe de

référence) peut être calculée (Fig. 6.5.c). Supposons aussi connue la courbe de retrait de cette structure. On a choisi dans cet exemple une courbe type (analogue à celle de la figure 6.1) et une variation totale de volume de 10%.

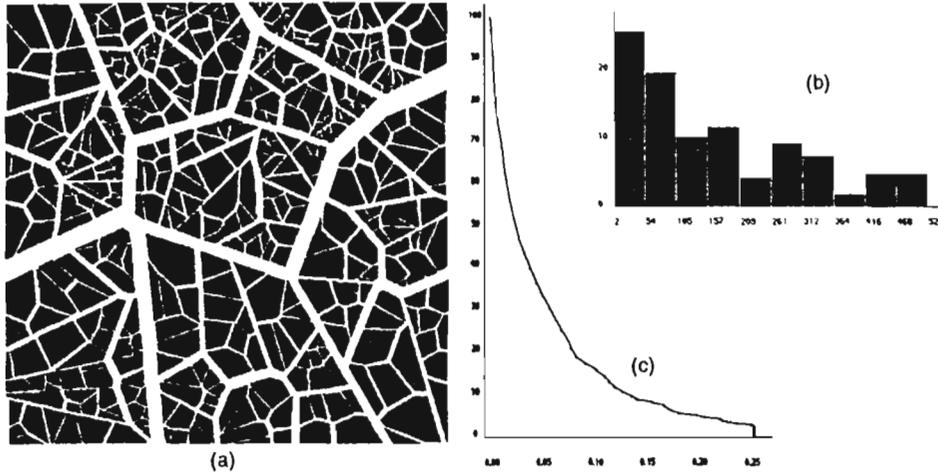
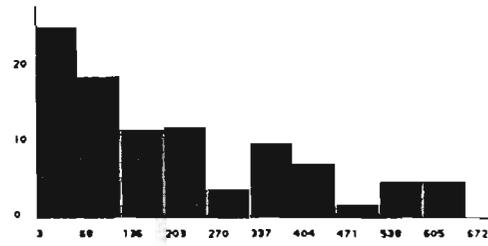


Figure 6.5. a) Structure à l'état sec ($N=8, n=3, k_1=k_2=k_3=0.95$)
b) Distribution de pores et c) courbe de rétention associée

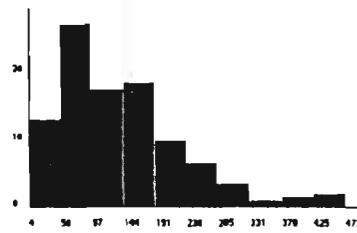
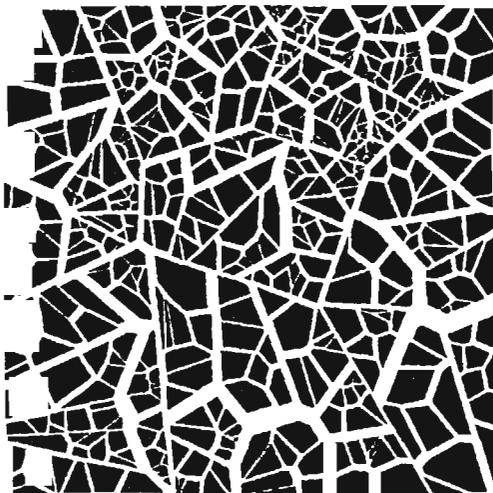
Nous ne savons pas quel est l'état de gonflement de la structure à saturation. Nous simulons alors une adsorption d'eau accompagnée d'un gonflement suivant les différents scénarios précités. Si l'on suppose la réversibilité de la déformation, ou encore si l'on néglige l'évolution de la structure au cours de plusieurs cycles d'humectation-dessiccation, l'état de gonflement à saturation ne dépend que de la variation totale de volume macroscopique, et du scénario, en fonction duquel la déformation globale est répartie sur les différents niveaux d'organisation. (Les états de gonflements intermédiaires, eux, dépendent de la forme choisie pour la courbe volume/teneur en eau que nous avons choisie en gonflement identique à la courbe de retrait, négligeant une hystérésis vraisemblable de cette relation, mais nous nous intéressons ici seulement à l'état saturé).

A saturation l'état de gonflement est donc différent suivant le scénario choisi. Pour l'exemple de structure simulée de la figure 6.5 et les trois scénarios 1, 2', et 2'', on obtient ainsi trois états de gonflement possibles de la structure saturée, qui sont visualisés sur la figure 6.6. Le volume total, la porosité totale et les particules élémentaires sont identiques dans les trois cas. Seules les distributions de tailles de pores diffèrent.

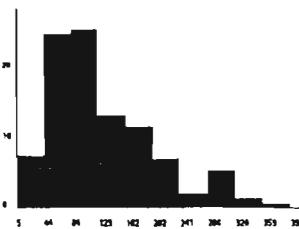
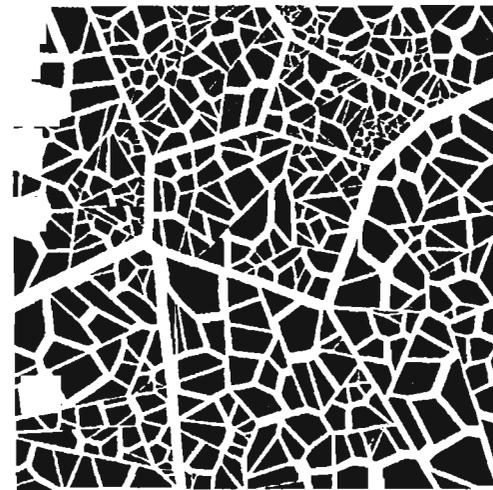
Puis, à partir de chacun de ces trois états saturés (Fig 6.6), on simule une désorption d'eau accompagnée de retrait comme dans l'exemple précédent. Quel que soit le scénario, on retrouve le même état sec initial (Fig.6.5), mais par différents chemins, et la courbe de rétention simulée diffère plus ou moins de celle que l'on aurait prévue uniquement à partir d'une distribution de pores mesurée à l'état sec (Figure 6.7).



(a) Etat saturé scénario 1



b) Etat saturé scénario 2'



c) Etat saturé scénario 2''

Figure 6.6 Structure simulée de la figure 6.5 imaginée à l'état saturé en fonction des différents scénarios et distributions de tailles de pores associées (pourcentage du volume poral total occupé par chaque classe de taille, le volume poral total étant identique pour chaque scénario).

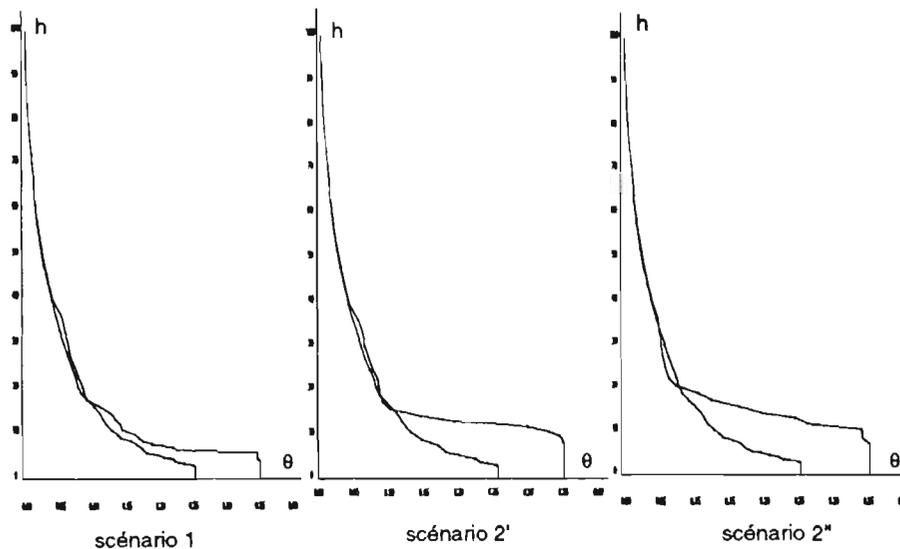


Figure 6.7. Courbes de rétention simulées avec différents scénarios de déformation (cf. Fig. 6.6.)
 Comparaison avec la courbe calculée à partir de la distribution des pores à l'état sec, sans tenir compte de la déformation (i.e. la courbe commune aux trois graphiques présentés, ou encore celle de la figure 6.5.c)

6.3.3. Exploitation d'une courbe de retrait pour caractériser une distribution de pores à géométrie variable

- Il arrive souvent en pratique que l'on estime une distribution de tailles de pores sur un échantillon à partir d'une courbe de rétention et de la loi de Laplace (ce qui suppose en particulier de négliger l'hystérésis). Dans le cas de sol déformable, on obtient une distribution de tailles intermédiaires entre les tailles à l'état sec et celles à l'état saturé. Si, pour une raison quelconque, on désire estimer la distribution de pores à l'état sec, on peut alors corriger l'estimation en fonction du retrait. Si l'on suppose la réversibilité de la déformation, il suffit dans ce cas de connaître la variation de volume total et comment se répartit le retrait sur chaque classe de taille de pores. Un problème non résolu est le choix de la correction en fonction d'hypothèses plus ou moins explicites. (Pour effectuer cette correction, Berezin, 1988, part du principe que le retrait entre deux valeurs de pression capillaire h a lieu sur la classe de taille de pores qui se vide entre ces deux valeurs de h . Bruand, 1986, signale la "l'absence de données suffisantes" pour estimer la contribution de chaque classe de pores au retrait et décrire la géométrie de l'espace poral à partir des seules courbes de retrait et de rétention d'eau).

- Il arrive aussi que l'on estime une courbe de rétention à partir d'une distribution de pores à sec mesurée au porosimètre à mercure. Il faudrait faire là aussi une correction pour les sols déformables. Supposant toujours que la déformation est réversible, on pourrait envisager une étude telle qu'illustrée par le deuxième exemple de simulation. L'état de gonflement à saturation ne dépendrait que de la variation totale de volume donnée par la courbe de retrait, et du

scénario choisi. Pour déterminer la courbe de rétention réelle, il faudrait alors connaître le détail de la courbe de retrait. En effet, on a besoin de connaître l'ouverture du pore au moment de sa vidange et ce n'est ni son ouverture à l'état sec, ni celle à l'état saturé.

La comparaison de ces courbes de rétention simulées avec une courbe de rétention réelle pourrait permettre de discriminer entre les différents scénarios possibles et contribuer à l'interprétation de la courbe de retrait. Cela nécessiterait une mesure précise de la courbe de pression-teneur en eau sur une large gamme de pression, tout au long du retrait de l'échantillon. Un scénario étant choisi, l'exploitation des courbes de retrait associées à des mesures de distributions de pores à l'état sec pourrait permettre de prédire la courbe de rétention d'un sol.

6.4. INTERPRÉTATION DU PROCESSUS DE DÉFORMATION

Dans le paragraphe précédent, on considère une courbe de retrait et on cherche, avec une démarche descendante et à l'aveuglette, à voir ce qu'elle implique au niveau microscopique des réarrangements internes d'agrégats. On va se demander maintenant, avec une démarche ascendante, quel est le fonctionnement microscopique qui pourrait expliquer l'apparition de ces courbes au niveau macroscopique des variations globales de volume.

6.4.1. Un modèle théorique interprétant les courbes de retrait: le modèle MRS

L'interprétation des courbes de retrait proposée par Braudeau (1988a) se traduit par un modèle de fonctionnement et de structure appelé MRS (Modèle de Retrait Structural du sol) dont nous donnons ici les principes de base.

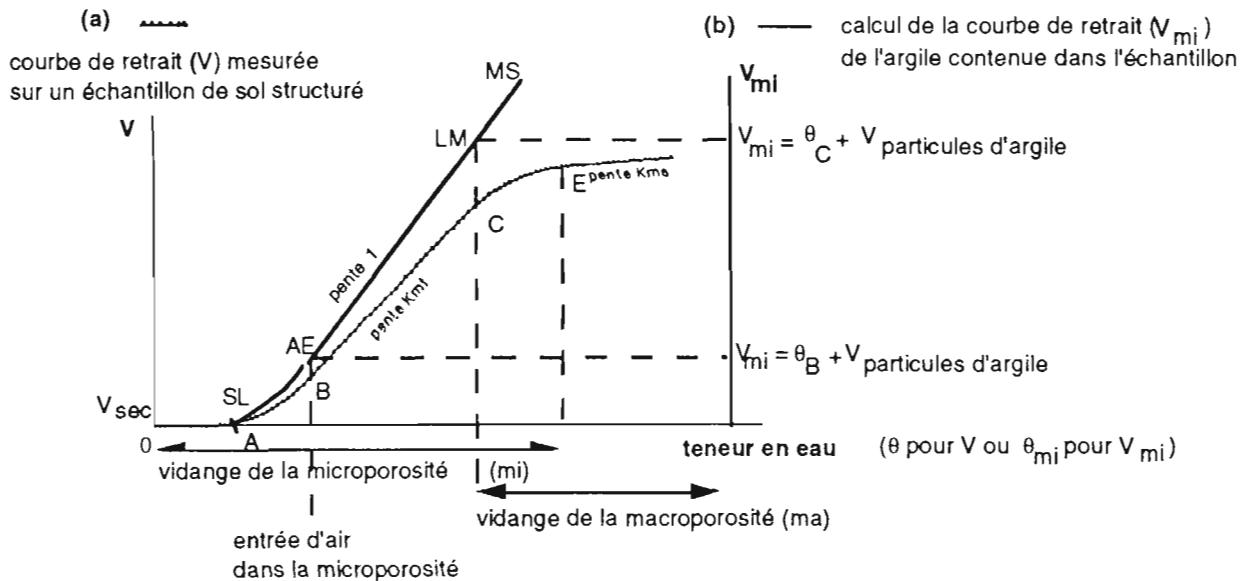


Figure 6.8 Interprétation de la courbe de retrait selon Braudeau (1988a) et Braudeau et Bruand (1993).

L'espace poral du sol est représenté par deux principaux niveaux d'organisation "fonctionnels", un espace macroporal (les variables s'y référant sont indicées ici par "ma") et un espace microporal (les variables s'y référant sont indicées ici par "mi"), définis par la courbe de retrait. La teneur en eau totale θ est la somme des teneurs en eau micro θ_{mi} et macroporales θ_{ma} . Lors du séchage d'un échantillon, et parcourant la courbe de retrait dans le sens des teneurs en eau décroissantes (Fig.6.8.a, de la droite vers la gauche), différentes phases sont identifiées et interprétées.

La macroporosité se vide d'abord de son eau (de la saturation jusqu'au point C), et cette désaturation partielle s'accompagne d'un retrait linéaire, de pente K_{ma} généralement faible, qualifié de structural ($dV=K_{ma} d\theta_{ma}$). A partir du point C la macroporosité est vide (De C à A, $\theta=\theta_{mi}$).

D'autre part, entre le point E et la désaturation complète, de l'eau est extraite de la microporosité qui se contracte en restant saturée jusqu'au point B. Jusqu'en B, la "vidange" de la microporosité s'accompagne d'un retrait linéaire important, de pente K_{mi} , et ce retrait est qualifié de normal ($dV=K_{mi} d\theta_{mi}$). Au delà du point B, l'air pénètre dans la microporosité, et le retrait est dit résiduel.

Entre E et C, le retrait est dû aux effets conjoints des vidanges des deux systèmes poraux, et la superposition du retrait structural et normal produit la forme arrondie de la partie [E,C] de la courbe de retrait.

La microporosité ainsi définie est assimilée à celle de l'argile du sol, de volume V_{mi} (V_{mi} représente ici le volume des particules d'argiles plus le volume de la microporosité). Les propriétés spécifiques de gonflement et retrait de l'argile pure ont été particulièrement étudiées (Tessier, 1980 1984, Towner 1986). En particulier la courbe de retrait de l'argile est connue (Fig.6.9). Elle est de pente 1 aux fortes teneurs en eau ($dV_{mi}=d\theta_{mi}$), car l'argile se rétracte d'abord tout en restant saturée, puis la variation de volume devient inférieure à la perte en eau, à partir d'un seuil d'entrée d'air (lorsque $\theta_{mi}<\theta_e$, Fig.6.9).

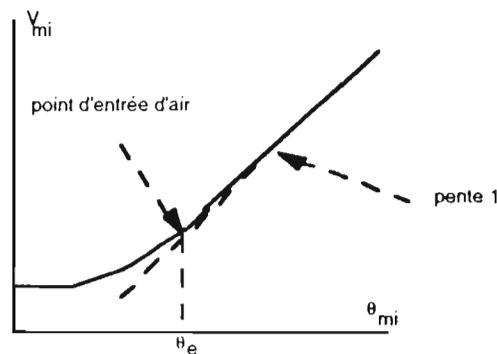


Figure 6.9. Courbe de retrait de l'argile.

Le modèle MRS suppose que l'argile au sein d'une structure de sol en place suit cette courbe de retrait élémentaire et donc que $\theta_e = \theta_B$. Entre C et B, la variation de volume total est supposée telle que $dV = K_{mi} d\theta_{mi}$, d'où $dV = K_{mi} dV_{mi}$. Ceci signifie que la variation de volume total dV est proportionnelle à la variation de volume de l'argile (elle est en général plus faible, si $K_{mi} < 1$). On suppose alors que le rapport de proportionnalité est constant pour l'ensemble de la courbe de retrait.

L'hypothèse dite fondamentale du modèle MRS est que la variation de retrait global dV (pour une variation de teneur en eau globale $d\theta$) est une combinaison linéaire des deux sortes de retrait (retrait dû à l'argile et retrait dit structural).

$$dV/d\theta = K_{mi} dV_{mi}/d\theta + K_{ma} d\theta_{ma}/d\theta$$

Cette formule contient toutes les hypothèses faites pour peu qu'elle soit commentée entre les différents points caractéristiques de la courbe (Avant E, $dV_{mi} = 0$ et $d\theta = d\theta_{ma}$, donc $dV/d\theta = K_{ma}$, entre C et B, $d\theta_{ma} = 0$, $\theta = \theta_{mi}$, $dV_{mi}/d\theta = dV_{mi}/d\theta_{mi} = 1$, donc $dV/d\theta = K_{mi}$, au delà de B, $dV/d\theta = K_{mi} dV_{mi}/d\theta$).

A ce modèle conceptuel, se rajoute la détermination empirique d'expressions analytiques pour exprimer la forme de $dV_{mi}/d\theta$ dans les deux parties arrondies [E,C] et [B,A] de la courbe. Si l'on rajoute les parties linéaires, l'ensemble de la courbe $V(\theta)$ est décrite par une succession d'expressions analytiques à partir de huit paramètres nommés "paramètres pédo-hydriques" qui peuvent être par exemple (K_{mi} , K_{ma} , θ_A , θ_B , θ_C , θ_E , V_{max} et θ_{max}). Pour les sols ferrallitiques en particulier, on constate un excellent ajustement des données expérimentales (V, θ) sur les expressions analytiques proposées.

On en déduit par calcul la répartition à chaque instant des volumes d'eau θ_{mi} et θ_{ma} . On peut aussi calculer la courbe de retrait de l'argile (cf. Fig 6.8.b) sans avoir besoin de l'extraire (Braudeau et Bruand 1993) : en effet $dV_{mi}/d\theta_{mi} = (1/K_{mi}) dV/d\theta$ entre A et AE, ensuite $V_{mi}/d\theta_{mi} = 1$, jusqu'au point MS pour lequel la teneur en eau et le volume de la microporosité sont maximum et égaux à $(\theta_{mi})_E$.

A cette division de l'espace poral est associé un modèle de structure où sont définis des agrégats dits fonctionnels, argileux et très déformables. La microporosité est l'espace poral intra-agrégats et la macroporosité est l'espace poral inter-agrégats. On observe l'existence de tels agrégats d'argile pratiquement pure dans certains sols seulement; pour d'autres sols, il s'agit d'un concept de modélisateur.

6.4.2. Représentation de ce modèle: des agrégats argileux déformables, "boîtes noires" pour la simulation

Nous avons représenté le modèle MRS. Une structure simulée de façon classique sur plusieurs niveaux de fragmentation représente la macroporosité et la macrostructure du sol. Les éléments de dernier niveau n ne représentent plus les particules élémentaires du sol mais des agrégats argileux et déformables. Ces agrégats sont considérés comme des "boîtes noires" microporeuses dont la microporosité n'est pas représentée.

La teneur en eau dans la macroporosité, θ_{ma} , est obtenue par simulation en fonction de la pression capillaire. La teneur en eau dans la microporosité, θ_{mi} , est supposée suivre une loi caractéristique de l'argile du sol.

- Nous nous donnons une fonction $\theta_{mi}=f(h)$ que nous choisissons arbitrairement de la forme:

$$\theta_{mi}=(\theta_{max})_{mi} \left(\frac{(h_{min})_{mi}}{h} \right)^m \quad \text{pour } h > (h_{min})_{mi}$$

et $\theta_{mi}=(\theta_{max})_{mi}$ pour $h < (h_{min})_{mi}$

La variation de volume des agrégats de niveau n est supposée être aussi une caractéristique de l'argile du sol (ΔV_n n'est plus nul, c'est ici une donnée d'entrée des simulations).

- Nous nous donnons une fonction de retrait élémentaire des agrégats argileux:

$$V_n=V_{mi}=g(\theta_{mi})$$

(Dans le programme, nous avons choisi l'expression analytique établie par Sposito et Giraldez, 1976, pour modéliser la courbe de la figure 6.9, et les coefficients donnés par Giraldez et al, 1983, que ces auteurs estiment de portée universelle. Pour $\theta > \theta_e$ $g(\theta)=(\text{volume de solide}^*) + 0.7429 \theta_e + 0.2302^2 / \theta_e + 0.0267 \theta^3 / \theta_e^2$, où θ_e est la valeur de teneur en eau à l'entrée d'air)

Selon le modèle MRS, le retrait global ΔV_0 s'exprime par:

$$\Delta V_0=K_{mi} \Delta V_n + K_{ma} \Delta \theta_{ma}$$

Entre les conditions aux limites sur les niveaux 0 et n , on répartit à nouveau la déformation sur les niveaux intermédiaires de façon arbitraire, et, en l'absence d'informations, de façon aussi régulière que possible:

$$\Delta V_i=(K_{mi})^{(n-i)/n} \Delta V_n + (1-i/n) K_{ma} \Delta \theta_{ma}, i \leq n$$

- Nous nous donnons aussi des valeurs pour les coefficients K_{mi} et K_{ma} .

* rapporté à la même référence constante que la teneur en eau

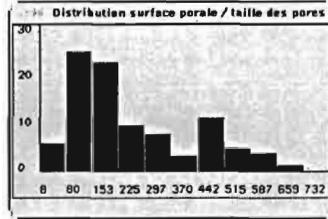
On peut alors simuler, en augmentant la pression capillaire à partir de la valeur nulle associée à un état initial saturé: d'abord une vidange classique de la microporosité en fonction de la loi de Laplace, accompagné d'un léger retrait (nul si l'on néglige K_{ma}), puis à partir de $(h_{min})_{mi}$, la superposition d'une vidange de la microporosité des boîtes noires. Lorsque la macroporosité est vide (pour une pression supérieure à une valeur $(h_{max})_{ma}$ correspondant à la taille inférieure des macropores simulés), on simule seulement le retrait des agrégats argileux, et la transmission de ce retrait à l'ensemble de sa structure avec un facteur d'abattement égal à K_{mi} .

Le résultat est une illustration graphique et animée du modèle sous-tendant l'analyse des courbes de retrait (Figure 6.10).

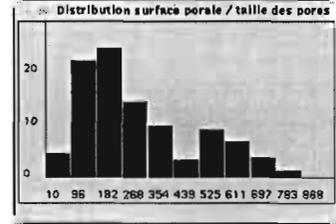
On peut ainsi construire une structure simulée calée sur des données expérimentales et le modèle MRS. Nous pouvons nous donner en entrée tous les paramètres donnés par l'application du modèle à une courbe de retrait expérimentale: K_{mi} et K_{ma} sont alors connus et la fonction $V_n=g(\theta_{mi})$ est alors celle que l'on peut extraire des courbes de retrait. A condition de mesurer parallèlement la pression et de disposer de la courbe $\theta(h)$, on peut aussi déduire de l'analyse des courbes de retraits les fonctions $\theta_{mi}=f(h)$ et $\theta_{ma}=f(h)$ (Boivin, 1990, et travaux en cours)*. A ce moment là on se donne presque tout. Reste à déterminer, par simulation, la géométrie macroporale. On peut alors construire une macrostructure simulée correspondant à $\theta_{ma}=f(h)$ en effectuant, pour déterminer l'état de la structure à saturation, une légère correction basée sur l'hypothèse de répartition uniforme du retrait structural que nous avons choisie ici. (On a vu au chapitre 5 comment le faire pour une macrostructure fractale dont la courbe de rétention est bien modélisée par l'expression analytique 5.2, et il se trouve que cette expression a été ajustée avec succès sur les données expérimentales de courbes de rétention mesurées pendant le retrait d'un échantillon, Mapangui, 1993, Rieu 1991c).

Cette représentation reste totalement subordonnée aux hypothèses faites dans le modèle MRS.

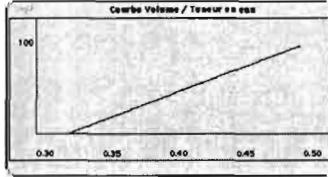
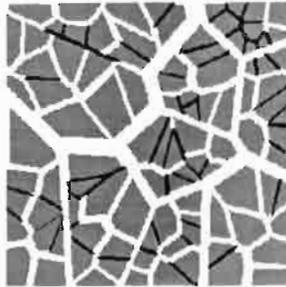
* Pour l'instant et pour des raisons techniques, la pression n'est mesurée au laboratoire que de la saturation jusqu'au point C.



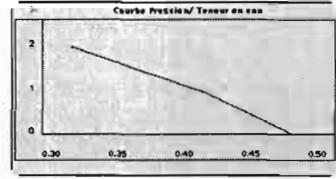
Etat saturé (macropores)



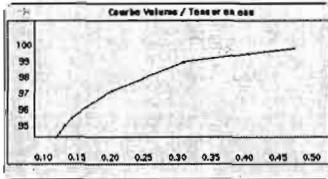
Etat sec (macropores)



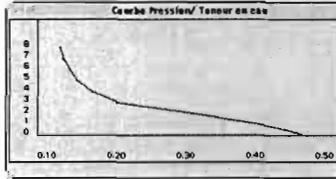
POINT E. retrait linéaire de la macroporosité



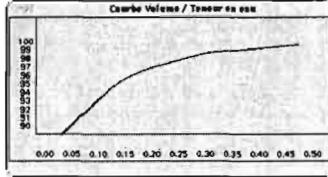
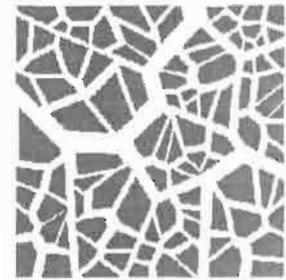
les agrégats argileux vont commencer à se retracter ($(h_{\min})_{mi}=2$)



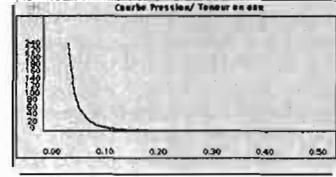
POINT C. fin de la vidange de la macroporosité



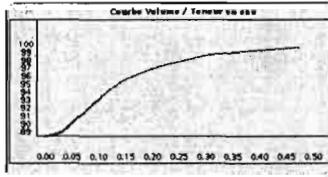
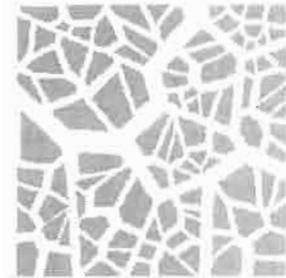
entre E et C superposition des vidanges macro(simulée) et micro (boîtes noires)



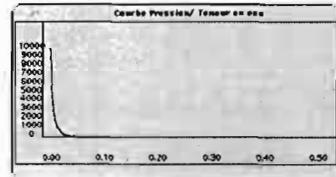
POINT B. fin de la phase de retrait normal



A partir de C, $\theta=\theta_{mi}$ et $h(\theta)=h(\theta_{mi})$



POINT A. fin de la phase de retrait résiduel



($\theta \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow \infty$)

Structure simulée: $n=2, N_1=N_2=10, k_1=93, k_2=90. (\theta_{\max})_{mi}=0.2$

$K_{mi}=0.6, K_{ma}=0.05 \theta_e=0.25(\theta_{\max})_{mi}$

$(h_{\min})_{mi}=2 m=0.3$

■ agrégats argileux saturés

□ agrégats argileux désaturés

■ eau dans la macroporosité

□ air dans la macroporosité

Figure 6.10. Illustration par simulation du modèle MRS interprétant les courbes de retrait. A chaque étape du drainage, la courbe de rétention est dessinée depuis la saturation jusqu'à la teneur en eau obtenue (colonne de droite); le sol se déforme et la courbe de retrait (colonne du centre) est elle aussi représentée avec des échelles qui évoluent avec la progression de la simulation

6.4.3. Quelques éléments de réflexion sur un modèle de retrait basé sur le fonctionnement spécifique de l'argile du sol

Agrégats argileux inclus dans une macrostructure.

Nous pouvons nous donner en entrée seulement des fonctions caractéristiques de l'argile pure et nous demander à quelle condition les courbes simulées en fonction des hypothèses du modèle MRS ont bien une forme connue. Supposons que les fonctions $\theta_{mi}=f(h)$ et $V_{mi}=g(\theta_{mi})$ ont la forme que nous leur avons donnée dans le programme et caractérisent une argile de type donné dont le fonctionnement hydrique propre reste invariable quel que soit le type de structure de sol en place (macrostructure) dans lequel elle est incluse. Cette macrostructure est ici représentée par une structure simulée (et en particulier un réseau macroporal) à laquelle on attribue des coefficients de déformation, K_{ma} , ou de transmission de la déformation de l'argile, K_{mi} . On s'aperçoit que suivant le type de structure, on peut obtenir différentes courbes de retrait macroscopiques.

Exemple: Nous avons supposé que $(h_{min})_{mi}$ est la pression à partir de laquelle la microporosité commence à se contracter. Si les macropores sont très fins et sont encore remplis d'eau à cette pression, le retrait de l'argile se fait sentir avant que ne commence la vidange de la macroporosité. C'est ce qui a été simulé sur la figure 6.11 qui ne diffère de la figure 6.10 que par la taille des macropores. On peut alors obtenir des courbes de retrait qui n'ont plus l'allure classique obtenue par exemple sur des sols ferrallitiques, et ressembleraient plus à celles que l'on obtient sur des sols limoneux. Dans cette simulation, une grande partie du retrait dit structural est due à la déformation de la microporosité.

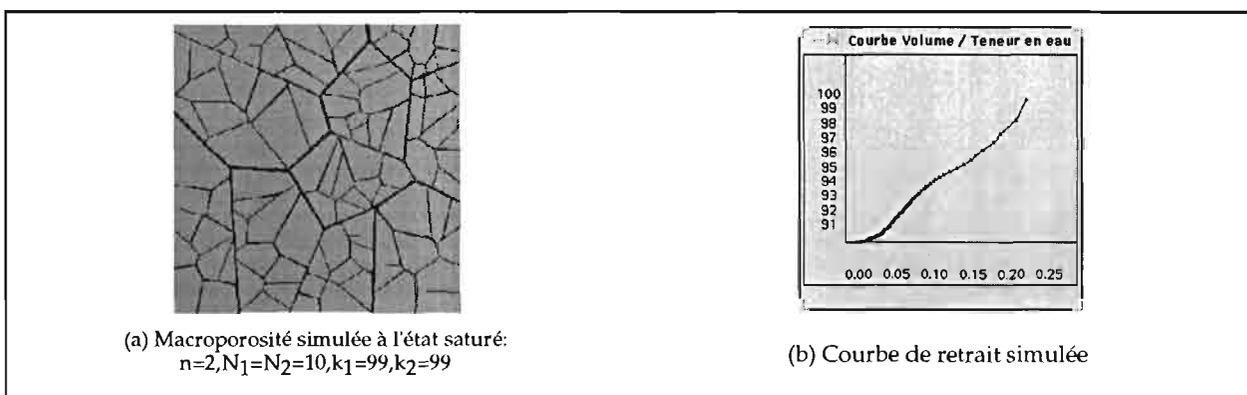


Figure 6.11. Caractéristiques de la microporosité identiques à celle de la figure 6.10 mais modification de la taille des macropores

Dans le même ordre d'idée, on peut signaler qu'il n'est pas évident d'obtenir un bel arrondi pour la partie [E,C] de la courbe de retrait, qui traduit une transition progressive entre une baisse de teneur en eau uniquement dans la macroporosité simulée et une baisse de teneur en eau due uniquement à vidange de la microporosité et déterminée par la fonction f . Nous nous sommes contentés d'essais empiriques, changeant soit la valeur du coefficient m de la fonction f (qui détermine l'amplitude de la baisse de teneur en eau microporale), soit la distribution des tailles des macropores les plus fins (ceux qui se vident entre E et C), pour aboutir à des courbes de retrait telles que celle de la figure 6.10. Bien sûr, toute considération sur la distribution de ces macropores devrait être modulée par le type de fonction caractéristique f , mais en tout état de cause dépend de f . De façon générale, l'observation expérimentale de cet arrondi pourrait traduire l'existence d'une gamme de pores de transition, des macropores liés au système microporal.

Quelques pistes de recherche envisagées.

Vers plus de réalisme.

Jusqu'ici nous avons représenté un massif d'agrégats, éventuellement structuré sur plusieurs niveaux d'organisation, où tous les agrégats de dernier niveau sont supposés argileux. Pour être plus réaliste, il faudrait considérer une certaine teneur en argile dans le sol, soit une certaine proportion d'agrégats argileux et déformables, coexistant avec des éléments grossiers rigides, des grains de sable par exemple. C'est ce qui a été simulé sur la figure 6.12.

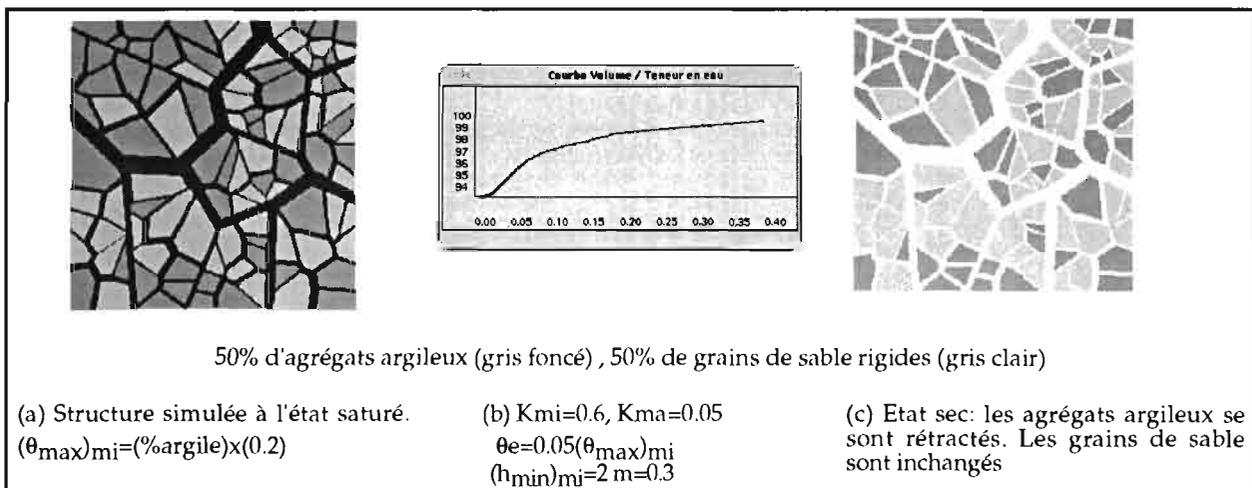


Figure 6.12. Macrostructure et caractéristiques de l'argile identiques à ceux de la figure 6.10 mais seuls 50% des agrégats de dernier niveau sont argileux et déformables.

Des contraintes géométriques apparaissent alors pour la transmission du retrait interne de l'argile vers les macroagrégats. K_{mi} ne peut plus prendre une valeur quelconque si l'on veut

éviter les recouvrements des grains de sable, et ne peut pas être aussi important que pour un massif d'agrégats argileux, pour lequel rien ne semble s'opposer d'un point de vue géométrique à une valeur égale voire supérieure à 1. La gestion de ces contraintes géométriques n'a pas encore été abordée.

Vers la suppression des boîtes noires.

Dans notre modèle à boîtes noires, on ne peut parler de simulation que pour la macroporosité. Du point de vue modélisation hydrodynamique, ce modèle considère la microporosité comme un compartiment à part régi par des lois propres et abandonne le modèle capillaire à partir d'un certain niveau d'organisation.

Pourtant il n'y a aucune raison pour que la loi de Laplace ne soit plus applicable. Mais lorsque la microporosité se contracte en restant saturée, des pores relâchent de l'eau vers le milieu extérieur sans entrée d'air. Il se superpose donc un autre phénomène. Si l'on pouvait exprimer le volume V_{mi} de la microporosité et donc sa variation comme une fonction de la pression capillaire (les points caractéristiques de la courbe de retrait sont corrélés à la pression capillaire, dans la gamme de pressions mesurées), on pourrait représenter l'ensemble de la distribution des pores et véritablement simuler le processus de déformation.

Pour illustrer ceci, nous avons représenté sur la figure 6.13.a un espace microporal hypothétique à l'intérieur des agrégats argileux de la figure 6.10.

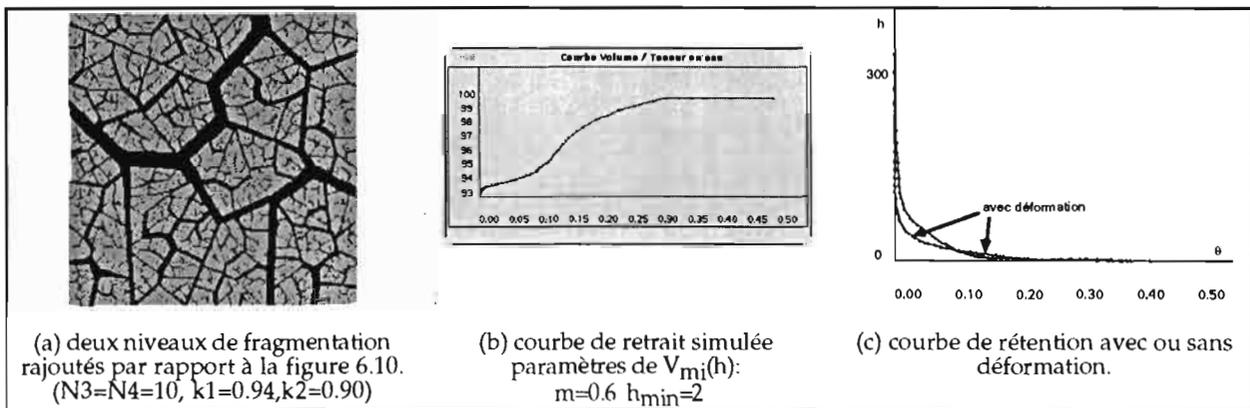


Figure 6.13. Représentation de la microporosité par les derniers niveaux d'une structure simulée et superposition de la loi de Laplace et d'une loi de déformation $V_{mi}(h)$

Lorsque la microporosité est saturée, on a:

$$V_{mi}(h) = V_s + \theta_{mi}(h) = V_s + f(h)$$

où f est la fonction précédemment utilisée pour décrire $\theta_{mi}(h)$.

Nous avons choisi de prolonger cette expression pour représenter le volume de la microporosité quelle que soit sa teneur en eau.

A chaque variation de pression capillaire, on simule deux processus simultanés: la vidange de tous les pores accessibles et de taille convenable selon la loi de Laplace, et la déformation des micropores selon $V_{mi}(h)$.

On peut ainsi reproduire une courbe de retrait globale telle que celle représentée sur la figure 6.13.b. Dans le sens des teneurs en eau décroissantes, les macropores se vident d'abord, puis, comme aux paragraphes précédents, la courbe décrit un premier arrondi lorsque la vidange de la microporosité par contraction commence à se superposer. Lorsque la macroporosité est vide, et la pression capillaire pas assez élevée pour que les micropores se vident, la diminution de teneur en eau n'est due qu'à la contraction des micropores. Le retrait est alors linéaire. Puis, la diminution de $V_{mi}(h)$ résultant en une diminution de taille des micropores, on atteint une pression capillaire telle que l'entrée d'air dans les micropores contractés devient possible. La diminution de teneur en eau dans la microporosité est alors plus forte que la diminution de volume et la courbe de retrait présente une deuxième phase non linéaire, mais de concavité inversée

Suivant les valeurs relatives des paramètres de structure et de la fonction $f(h)$, on peut obtenir des courbes de retrait très différentes et nous n'avons pas fait pour l'instant une véritable étude de sensibilité, qui promet d'être longue en temps de calcul à cause de la simulation de distributions de pores étendues réparties sur beaucoup de niveaux d'organisations.

Notre conclusion actuelle est que la donnée de $V_{mi}(h)$, sur des bases expérimentales* ou théoriques, en tant que caractéristique de la déformation de l'argile, pourrait permettre de véritablement simuler le comportement hydrique d'une structure de sol déformable.

6.4.4. Discussion

Nous nous sommes attachés à représenter l'interprétation du modèle MRS. Le retrait généralement faible aux fortes teneurs en eau est interprété comme une certaine rigidité de la structure pour les pressions capillaires correspondantes. Par contre lors des phases de retrait "normal" et "résiduel", les modifications internes de structure seraient très importantes, les micropores se contractant fortement et les macropores s'élargissant au fur et à mesure du dessèchement. Dans une approche de type réseau de pores capillaires, il s'agit principalement de bien déterminer l'organisation de la structure et les tailles des pores participant au transport d'eau. On peut considérer que la taille des macropores équivalents déduits d'une courbe de rétention d'eau est une approximation plus satisfaisante que la taille de ces mêmes pores

* La variation de volume $V(h)$ de matériaux argileux en fonction de la pression capillaire h a été étudiée par exemple par Sala et Tessier (1994). La fonction fictive $V(h)$ choisie dans nos simulations présente une certaine analogie avec leurs résultats. Par ailleurs, ces auteurs constatent expérimentalement des similitudes de forme entre $V(h)$ et la courbe $V(p)$ obtenue pour des déformations sous contrainte mécanique p .

déterminée à sec par porosimétrie au mercure: en effet, à sec, ces macropores ont pu être considérablement agrandis du fait du retrait de la microporosité. Par contre la taille des micropores à un état de saturation donné est difficilement interprétable à partir des courbes de rétention et du modèle capillaire si la variation de teneur en eau ne peut être interprétée par la seule loi de Laplace. Une approximation pourrait être obtenue par majoration des mesures de tailles obtenues à l'état sec en fonction de la courbe de retrait.

D'autres interprétations d'une courbe de retrait sont possibles. Hallaire (1987), qui observe la fissuration d'un échantillon par analyse d'images prises lors du retrait, considère que la transmission du retrait des agrégats argileux est variable dans le temps. Le retrait isotrope des agrégats argileux serait effectif depuis le début du dessèchement. Mais dans un premier temps, K_{mi} serait très faible, car le retrait de l'argile se traduirait principalement par une fissuration interne et l'agrandissement des macropores (dans toutes les directions de l'espace mais essentiellement des macropores horizontaux), ce qui produirait à l'échelle de l'échantillon un retrait macroscopique faible, (et surtout latéral), correspondant à la phase dite structurale. Suivrait ensuite une étape d'affaissement ou de "prise en masse" où la macroporosité se referme en produisant un important retrait macroscopique, (surtout vertical), ce qui correspondrait à la phase de retrait dit normal. Nous pourrions aussi simuler ce type de scénario* .

Nous ne sommes pas en mesure actuellement de valider une interprétation plutôt qu'une autre par simulation. Néanmoins l'idée émise au paragraphe 6.3.3 concernant la comparaison de plusieurs scénarios de déformation par comparaison de distributions de pores mesurées à l'état sec et de courbes de rétention simulées suivant les différents scénarios garde toute sa portée.

Nous n'avons pas tracé les courbes de retrait des agrégats aux différents niveaux d'organisation de la structure. Mais si les déformations internes se transmettent avec un facteur d'abattement à travers les différents niveaux d'organisation, la déformation est différente à chaque échelle d'observation). La détermination expérimentale des courbes de retrait à différentes échelles** pourrait donner des renseignements sur les processus de transmission du retrait et la modification des macropores*** .

* L'anisotropie du retrait à l'échelle d'un échantillon de sol est aussi constatée par un protocole modifié des mesures de rétractométrie au laboratoire d'hydrophysique de Bondy. D'un point de vue technique, nous pouvons aussi simuler des retraits anisotropes en utilisant une extension de la méthode de construction de structures simulées, présentée au chapitre 7.

** Les échantillons de sol sur lesquels sont déterminés les courbes de retrait pour le modèle MRS sont de l'ordre du dm^3 , ceux utilisés par Hallaire sont d'un ordre de grandeur voisin (la taille des agrégats argileux pouvant varier entre le mm^3 et le millième de mm^3).

*** Bruand, 1986 a effectué des expériences en ce sens qui semblent indiquer une décroissance de K_{mi} pour des échantillons de taille croissante

6.3. CONCLUSION

Nous avons mis au point un simulateur de déformations de structures de sol. La principale information que nous avons utilisée sur le processus de déformation est une courbe de retrait mesurée au laboratoire sur des échantillons de sol soumis à une dessiccation.

Une courbe de retrait est une mesure globale de la variation du volume total d'un échantillon qui ne peut renseigner à elle seule sur les modifications microscopiques du réseau poral. Entre l'échelle des particules qui restent invariantes et l'échelle de l'échantillon, on peut imaginer plusieurs scénarios sur la nature de la déformation et la façon dont elle se répartit sur les différents niveaux d'organisation ou les différentes classes de taille de pores. Nous en avons testé quelques-uns par simulation. Différents scénarios conduisent à différentes modifications de la courbe de rétention par rapport au cas rigide. En considérant la courbe de rétention que l'on peut estimer à partir d'une distribution de pores mesurée à l'état sec et la courbe de retrait du sol, on pourrait donner une estimation de la courbe de rétention réelle, à condition de connaître le scénario réel. La simulation suggère que l'étude simultanée des courbes de rétention d'eau, des courbes de retrait, et des distributions de pores mesurées à sec, pourrait permettre de discriminer entre plusieurs scénarios possibles.

Le modèle MRS propose une interprétation très précise de la courbe de retrait. La majeure partie de la déformation est attribuée aux modifications de volume de l'argile contenue dans un sol et des micropores qu'elle renferme. Nous avons représenté le type de structure de sol associé à ce modèle en introduisant au dernier niveau de fragmentation d'une structure simulée des agrégats "boîtes noires" affectés de propriétés hydriques spécifiques. La simulation fournit une illustration didactique d'un modèle qui tend à être utilisé par de nombreux chercheurs en science du sol, mais la simulation proprement dite du fonctionnement hydrique se borne à la partie macroporale effectivement représentée.

Quelques pistes de réflexion sont ébauchées à propos du modèle MRS en tant que tel. D'une part sur l'influence de la proportion d'argile dans le sol, ainsi que des caractéristiques relatives de l'argile et de la macrostructure, sur la répercussion de la déformation de l'argile lorsque celle-ci est incluse dans une structure de sol en place. D'autre part sur l'introduction d'une loi de déformation qui permettrait l'ouverture des boîtes noires et la simulation effective de l'ensemble de la structure d'un sol déformable. De façon générale, pour pouvoir intégrer la déformation dans un modèle capillaire, il serait préférable de relier les variations de volumes aux variations de pression capillaire et non à celles de la teneur en eau.

Selon le modèle MRS, la déformation pourrait être négligée dans la gamme de pressions capillaires relativement faibles qui correspondent à l'essentiel des transferts hydriques dans des macropores. Dans la simulation de la conductivité hydraulique (chapitre suivant) nous n'avons pas tenu compte de la déformation.

7.1. PRINCIPE

7.1.1. Milieu saturé

Si une différence de potentiel de pression* ΔP est imposée entre deux faces A et B du carré formé par l'ensemble des pores saturés d'eau, on obtient un flux d'eau global entre A et B, c'est-à-dire dans une direction donnée. La conductivité hydraulique ou perméabilité à l'eau du réseau de fractures est calculée de façon classique (cf.chap.3) par analogie électrique.

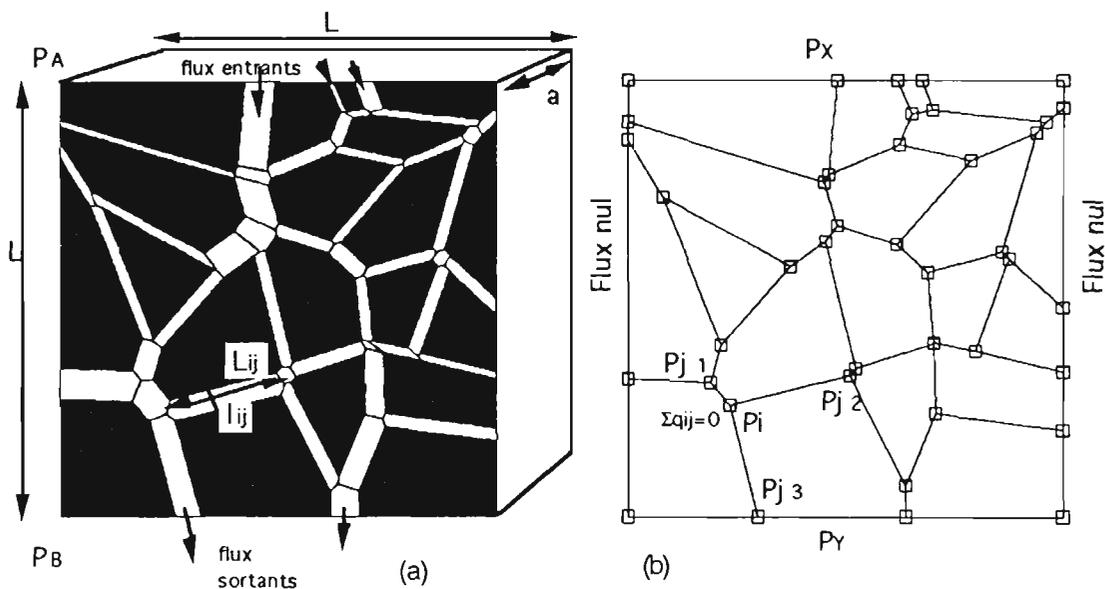


Figure 7.1. Conductance équivalente d'un réseau de pores interconnectés.

Chaque fracture élémentaire d'extrémités i et j est traversée par un flux q_{ij} fonction des pressions P_i et P_j aux deux extrémités, donné par la loi de Poiseuille (Annexe A): $q_{ij} = K_{ij} (P_i - P_j)$, où la conductance K_{ij} de chaque fracture est connue, $K_{ij} \sim \frac{l_{ij}^3}{L_{ij}}$. L'ouverture l_{ij} et la longueur L_{ij} d'une fracture sont mesurées sur la structure simulée (Fig.7.1a). On connaît seulement les

* en négligeant ici l'action de toute force extérieure, y compris la gravité, ce qui ne modifie pas la détermination de la conductivité hydraulique comme coefficient de proportionnalité entre flux et différence de potentiel.

pressions sur les faces A et B et on impose une condition de flux nul sur les deux autres faces. En chaque noeud interne, les pressions sont des inconnues (autant d'inconnues que de noeuds internes) que l'on peut déterminer en écrivant, comme le dicte la loi de Kirchoff en électricité, que la somme des flux entrants ou sortants au point de rencontre entre plusieurs fractures (un noeud) doit être nulle (Fig.7.1.b).

Pour tout noeud i donné,
$$\sum_j q_{ij} = 0, j \text{ voisin de } i.$$

Dans notre réseau, chaque noeud i a trois voisins j .
$$\sum_{j=1}^{j=3} K_{ij} (P_i - P_j) = 0.$$
 Si j est situé sur une des faces A ou B, P_j est connu, et passe au deuxième membre de l'équation qui devient non nul. Si j est situé sur une des faces latérales, $K_{ij} = 0$.

On obtient ainsi une équation linéaire par rapport aux inconnues P_i, P_j en chaque noeud (autant d'équations que de noeuds) et donc un système linéaire de (n_{noeuds}) équations à (n_{noeuds}) inconnues P_i , que l'on peut écrire sous une forme matricielle $\mathcal{A}P = \mathcal{B}$. Le système est résolu par la méthode de Gauss, optimisée en tenant compte du fait que la matrice \mathcal{A} est symétrique et très creuse.

On pourrait alors calculer tous les flux locaux q_{ij} . C'est le flux total qui nous intéresse ici; il est égal à la somme des flux entrant par chaque pore connecté à la face A, ou encore à la somme des flux sortants par la face B.

$$Q = \sum q_{\text{sortant}} = \sum q_{\text{entrant}}$$

Sur un tel réseau, ΔP étant donné entre les faces A et B, Q est alors mesuré sur le réseau de pores. Ce flux macroscopique est proportionnel à ΔP comme les flux élémentaires sont proportionnels à ΔP_{ij} et comme le constate Darcy pour un milieu poreux quelconque. La constante de proportionnalité (indépendante de la valeur de ΔP choisie pour la résolution numérique) est la conductance équivalente de l'ensemble des pores; c'est, à un coefficient constant près (cf. §7.1.3), la conductivité hydraulique K du milieu saturé d'eau.

7.1.2. Milieu non saturé

En milieu non saturé, pour une certaine teneur en eau θ , le sol est modélisé comme un ensemble de fractures soit pleines d'eau soit vides. Seules les fractures remplies d'eau sont potentiellement conductrices. Parmi celles-ci seules celles qui sont reliées par un chemin continu aux faces A et B sont effectivement conductrices. Nous avons traité le problème de suppression des fractures vides, ou pleines mais isolées, ainsi que des bras morts ne participant pas

réellement au transport de façon analogue à celui de l'extraction des fractures conductrices dans un milieu saturé mais mal connecté (Billaux, 1990). La conductivité hydraulique $K(\theta)$ est en fait calculée comme la conductivité équivalente du sous-réseau de fractures conductrices.

Remarque: une différence de pression réelle aux bornes du réseau modifierait l'équilibre entre l'air et l'eau ainsi que la pression capillaire, et on pourrait ainsi simuler la dynamique de l'invasion par l'air ou l'eau. L'hydrodynamique n'est abordée ici dans ce travail qu'à travers les caractéristiques $\theta(h)$ et $K(\theta)$ pour une teneur en eau à un état d'équilibre instantané. La différence de pression introduite pour le calcul de K est supposée être infiniment petite et ne modifiant pas cet état d'équilibre.

7.1.3. Valeurs numériques pour une échelle donnée

L'étude de la conductivité hydraulique est faite essentiellement qualitativement, sans imposer d'échelle particulière. Néanmoins, on peut se placer à une échelle donnée (cf. chap. 5, §5.1.4).

Pour une fracture élémentaire parfaitement lisse et à bords parallèles, de profondeur arbitraire a (Fig.7.1) et un modèle bi-dimensionnel, $K_{ij} = \alpha \frac{l_{ij}^3}{L_{ij}} = \frac{a l_{ij}^3}{12\mu L_{ij}}$, où μ est la viscosité dynamique de l'eau, et q_{ij} est le flux d'eau traversant la face al_{ij} .

Dans le programme, α est égal à 1, nous calculons une valeur Q_{prog} pour le flux total, et nous en déduisons une conductivité hydraulique adimensionnelle K_{prog} telle que:

$$K_{prog} = \frac{Q_{prog}}{\Delta P}$$

Si l'on se fixe une échelle de longueur λ_l ($l_{simul} = \lambda_l l_{prog}$, l_{simul} en μm , cf. Chap.5 §5.1.4), la valeur simulée Q_{simul} est, en m^3/s ,

$$Q_{simul} = Q_{prog} \frac{a(10^{-6}\lambda_l)^2}{12\mu}$$

La conductivité hydraulique "réelle" K_{simul} est définie par:

$$Q_{simul} = K_{simul} A \frac{\Delta H}{L}$$

où A est la surface traversée par le flux, ici $A = a \cdot L$

et ΔH est le gradient de charge hydraulique, qui vaut, à une cote donnée, $\Delta H = \frac{\Delta P}{\rho g}$.

$$K_{simul} = \frac{Q_{simul} L}{A \Delta H} = \frac{Q_{simul} \rho g}{a \Delta P} = \frac{Q_{prog} a(10^{-6}\lambda_l)^2 \rho g}{a 12\mu \Delta P}$$

$$K_{simul} = \frac{Q_{prog}}{\Delta P} \frac{(10^{-6}\lambda_l)^2 \rho g}{12\mu} \text{ en m/s}$$

avec $\mu = 10^{-3} Pa \cdot s$ à 20° , $\rho = 998 \text{ kg/m}^3$ à 20° . $g = 9.81 \text{ m/s}^2$.

$$K_{simul} = K_{prog} \frac{(10^{-6}\lambda_l)^2 \rho g}{12\mu} = 8.16 \cdot 10^{-7} \lambda_l^2 K_{prog} \text{ en m/s}$$

Lorsque le modèle bidimensionnel est extrapolé à la troisième dimension, nous avons tout simplement multiplié la valeur de conductivité par 2, considérant que pour un modèle isotrope,

on avait dans la troisième direction autant de fractures orientées dans la direction du flux que dans le plan représenté. Les valeurs de conductivité sont un peu supérieures à celles obtenues dans le cas purement bidimensionnel, et les courbes légèrement modifiées (cf.Fig.7.20) car l'extrapolation n'est pas linéaire pour les teneurs en eau (cf.Chap.4,§4.5). Mais nous avons vérifié dans chaque cas que les différences induites sur les raisonnements qualitatifs qui suivent sont parfaitement négligeables. Lorsque rien n'est précisé, les simulations sont effectuées dans le cas bidimensionnel pur.

7.2. PREMIERS RÉSULTATS

En milieu saturé d'eau, les pores étant très bien connectés les uns aux autres dans notre structure simulée, chacun d'eux participe au transport d'eau. En non saturé, lorsque les plus gros pores sont vides et en dessous d'un certain seuil de teneur en eau, que nous appellerons le seuil de percolation, il n'existe pas de chemin continu de pores pleins d'eau d'une face à l'autre de l'échantillon et la conductivité est nulle. Ce seuil de percolation n'est pas le même en drainage et en imbibition. Les références à ce seuil seront toujours de nature qualitative, et sauf indication contraire, il s'agira d'une valeur intermédiaire .

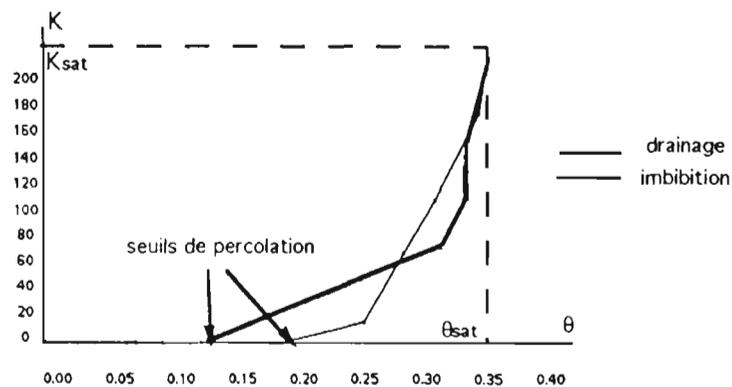


Figure 7.2. Conductivité hydraulique simulée.
Structure aléatoire sur un niveau de fragmentation ($n=1$, $N=400$, $k=0.8$).

Sur un modèle à double porosité, dès que la porosité grossière inter-agrégats est vide, les pores intra-agrégats se trouvent isolés et ne conduisent plus. Sur un modèle fractal où plusieurs niveaux de porosité sont imbriqués les uns dans les autres, seule la conductivité à saturation K_{sat} est non nulle !

7.3. EXTENSIONS DU MODÈLE FRACTAL

Le modèle fractal auquel nous nous intéressons particulièrement pose donc des problèmes pour le calcul de la conductivité hydraulique en milieu non saturé. Nous avons alors cherché si des modifications du modèle de base permettraient, tout en conservant une distribution fractale de tailles de pores, de déterminer une relation $K(\theta)$ plausible. Le premier objectif est de faire

baisser le seuil de percolation, ou encore d'obtenir une conductivité non nulle même aux faibles teneurs en eau. Jusqu'ici, en drainage, bien avant que l'air ne pénètre dans les agrégats du premier niveau de fragmentation, la conductivité s'annule. En imbibition, l'eau n'atteint la face de sortie que pour des valeurs de θ voisines de la saturation.

7.3.1. Structures fractales désordonnées

Introduction de nouvelles sources de variabilité

Lorsqu'un sol réel est qualifié de fractal parce que certaines propriétés globales suivent des lois de puissance en fonction de l'échelle de longueur, sa structure géométrique locale n'a pas la forme régulière d'une figure géométrique parfaitement autosimilaire. Nos structures fractales simulées ont introduit un peu de variabilité à l'intérieur de chaque niveau de fragmentation par rapport au modèle théorique cubique et la courbe de rétention simulée est encore très bien modélisée par l'expression analytique (5.2). Ces structures simulées ont encore une géométrie très régulière. Nous avons cherché à y introduire un peu plus de variabilité, et donc de réalisme, dans les limites de notre procédé de construction. Pour générer du désordre localement, il suffit de faire varier les centres et rapports d'homothéties définissant chaque agrégat.

Méthode de construction: des homothéties "aléatoires"

Une structure de sol simulée est alors construite de la façon suivante: On conserve un nombre de sous-agrégats constant à chaque niveau de fragmentation, mais le rapport d'homothétie fluctue maintenant aléatoirement autour d'une valeur constante k . Chaque agrégat A_{ij} , à chaque niveau de fragmentation i , est affecté d'un rapport d'homothétie k_{ij} tiré aléatoirement dans une loi uniforme sur $[k-e, k+e]$. On doit avoir $0 < k_{ij} < 1$, donc $e < k$ et $e < 1-k$. Après plusieurs essais, nous avons choisi le désordre maximum et $e = \inf(1-k, k)$. (Fig.7.3.a). Certains agrégats sont donc affectés d'un rapport d'homothétie proche de 1, ce qui a pour effet de n'ouvrir que faiblement les pores les entourant; si un de leurs voisins a subi le même sort, le pore les séparant est très fin et peut donc être conducteur même aux fortes pressions capillaires. Un pore fin assurant ainsi un contact entre deux agrégats est appelé un "pore de contact".

D'autre part on joue sur le centre d'homothétie. Plus l'on crée de pores de contact localement, plus la probabilité d'occurrence de chemins d'eau d'une face à l'autre de l'échantillon (pour une teneur en eau globale donnée) est importante. Le centre d'homothétie est alors choisi près d'un des sommets des zones de fragmentation (un sommet S est choisi par tirage au sort équiprobable, et le centre d'homothétie est égal au barycentre du centre de gravité de la zone et de S pondéré par les coefficients respectifs 0.01 et 0.99). Par rapport à la position qu'il aurait

eue avec un centre d'homothétie choisi comme précédemment au centre de gravité de la zone de fragmentation, l'agrégat est translaté vers un coin de la zone qu'il touche quasiment par deux de ses faces et optimise ses chances de se rapprocher d'un de ses voisins.

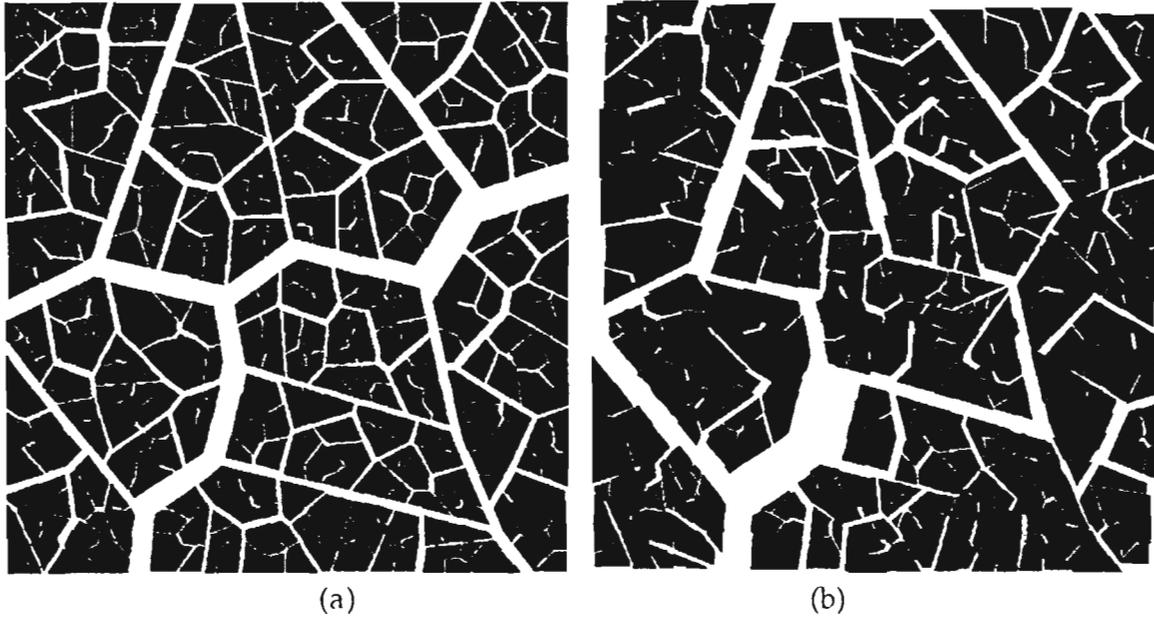


Figure 7.3. Sur le même squelette ($n=3, N=10$)
 a) une structure fractale avec un rapport d'homothétie constant $k=0.94$
 b) une structure modifiée en attachant à chaque zone de fragmentation une homothétie aléatoire de centre proche d'un sommet et de rapport compris entre 0.88 et 1.

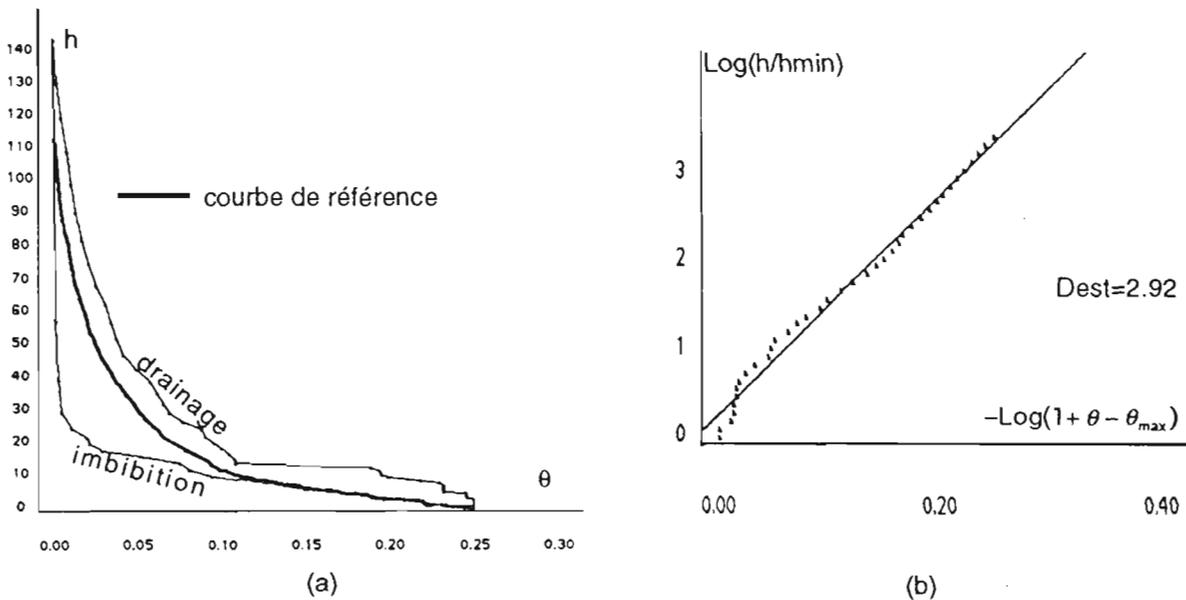


Figure 7.4 . Relation pression/teneur en eau simulée sur la structure 7.3.b. $D_{calc}=2.90$.

Résultats

Relation pression/ teneur en eau.

La relation $h(\theta)$ présente toujours une hystérésis marquée. Elle est maintenant également répartie sur les deux phases, drainage et imbibition (Fig.7.4.a).

Sur les données de la courbe intermédiaire de référence, l'ajustement de la formule analytique (5.2) caractérisant une structure fractale reste très bon (Fig.7.4.b) (le coefficient de régression linéaire au carré R^2 est toujours supérieur à 0.98, pour environ 50 points simulés). Avec une homothétie de rapport k constant, on construisait une structure fractale de dimension D_{calc} fonction de N et de k . Lorsque les rapports d'homothétie varient autour d'une valeur moyenne k , la dimension fractale estimée D_{est} reste du même ordre de grandeur mais fluctue autour de D_{calc} . La différence $|D_{est}-D_{calc}|$ est d'autant plus faible que le nombre de zones N^n est important et que k est proche de 1 (car alors $e=1-k$ est faible); pour environ 1000 zones et pour une réalisation donnée, cette différence est de l'ordre de 0.05, c'est-à-dire plus élevée que dans le cas classique.

Relation conductivité/teneur en eau.

Le seuil de percolation de l'eau est d'autant plus abaissé que les pores de contacts sont fins et nombreux, ce qui explique les choix précédents. Il est variable d'une réalisation à l'autre. Sur l'exemple de la figure 7.3.b, on peut rechercher le chemin continu de pores les plus fins possibles reliant les faces supérieures et inférieures. Il en existe un qui explique une conductivité non nulle au-dessus de 20% de teneur en eau mais ce chemin passe par un pore de contact très fin qui ne permet qu'une infime conduction (Figs 7.5.a et b).

Sur plusieurs réalisations (dix en général), nous avons effectué la moyenne des teneurs en eau et des conductivités correspondant à une même valeur de pression capillaire. Les courbes de conductivité moyenne obtenues semblent plus satisfaisantes (Fig.7.5.c et d) car dès qu'un chemin conducteur est possible dans une seule réalisation, la conductivité moyenne est non nulle.

Mais l'augmentation du nombre de niveaux de fragmentation minimise la probabilité d'apparition de chemins conducteurs continus et le désordre géométrique que nous avons introduit n'est pas suffisant pour justifier de transferts d'eau à travers toute une hiérarchie de fragmentation. Il faudrait peut-être augmenter le désordre. Mais l'effet prévisible est la perte de pores réguliers et de l'application simple de la loi de Laplace dans des fractures; ceci imposerait de revoir le type de modélisation hydrodynamique.

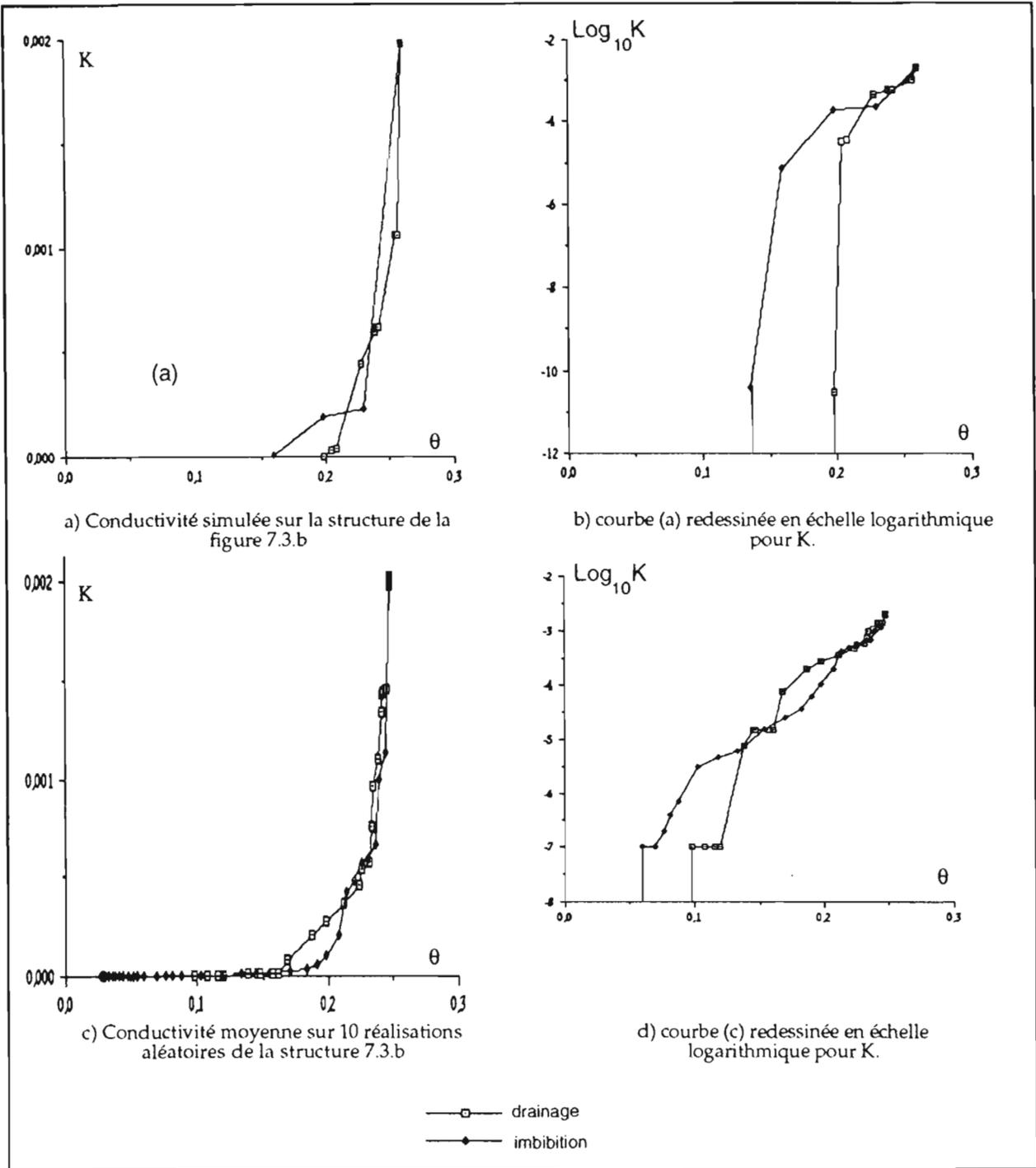


Figure 7.5 . Conductivité hydraulique sur des structures "fractales désordonnées"

7.3.2. Structures anisotropes

Hypothèse

Une deuxième hypothèse se base sur l'observation d'un sol vertique en cours de dessèchement. A la surface apparaissent des zones de fissuration polygonales emboîtées alors qu'une coupe verticale révèle des fissures essentiellement verticales.

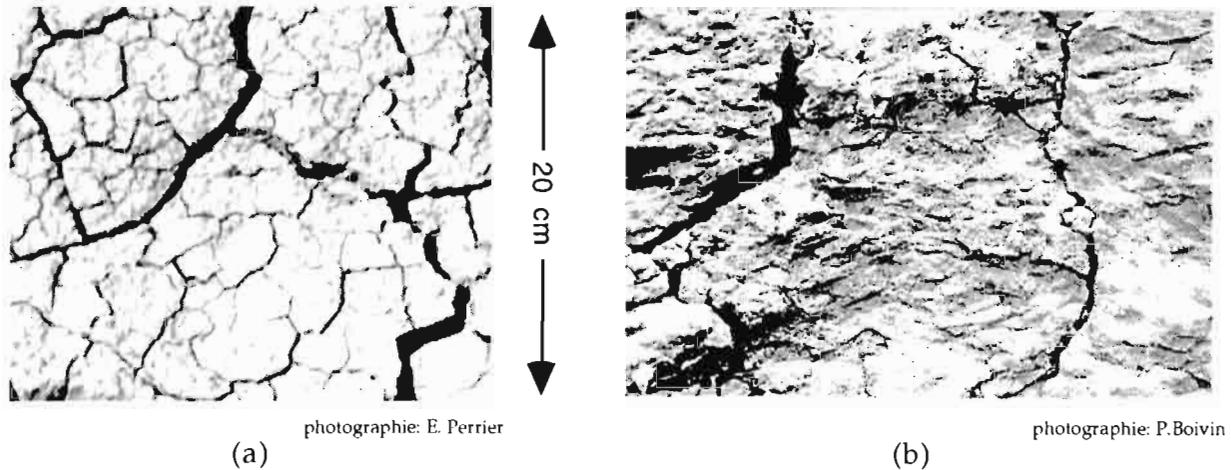


Figure 7.6. Surface (a) et coupe verticale (b) d'un sol vertique

Bien que les photographies de la figure 7.6 soient prises à une échelle supérieure à celle où les distributions de pores et courbes de rétention sont mesurées, nous avons imaginé que les transferts d'eau verticaux aux faibles teneurs en eau pourraient bénéficier de tassements de l'espace poral sur la verticale. Les pores de contact inter-agrégats auraient donc une orientation horizontale privilégiée. C'est ce que réalise la construction informatique de la figure 7.10. Cette interprétation peut être contestée et de toute façon, elle n'est certainement pas valable pour tous les sols. On peut alors imaginer que la structure que nous construisons, qui n'a jamais été la représentation d'une coupe réelle de sol mais un modèle plan d'une structure tridimensionnelle, représente maintenant une surface tridimensionnelle passant par les points de contacts inter-agrégats.

Méthode de construction

La méthode de construction de structures simulée est généralisée. La transformation homothétique $\mathcal{H}(G, k_i)$ qui génère un agrégat et une portion d'espace poral à partir d'une zone de fragmentation du squelette est remplacée par une transformation affine qui est la composée de deux affinités orthogonales (Fig.7.7.a), $\mathcal{A}(G_y, k_{xi})$ et $\mathcal{A}(G_x, k_{yi})$, où G_x (resp. G_y) est la droite passant par G et de direction x (resp. y), x représentant la direction horizontale sur notre figure ($0 < k_{xi} < 1$ et $0 < k_{yi} < 1$, et G situé au centre de gravité de chaque zone de fragmentation).

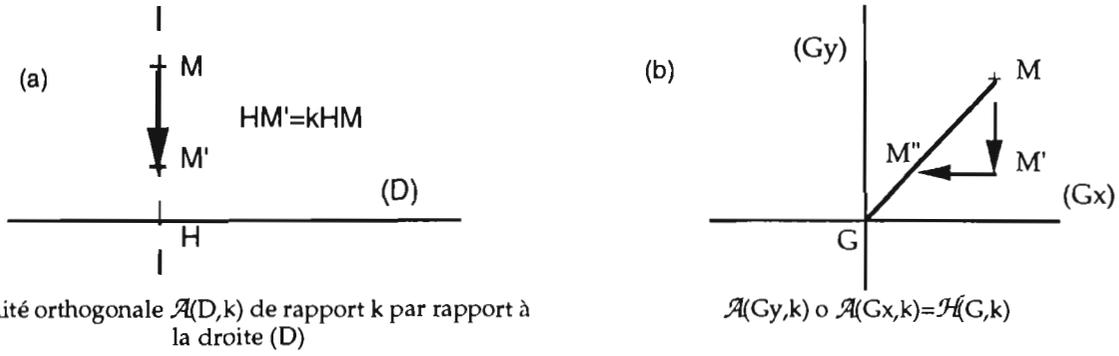


Figure 7.7. Affinités \mathcal{A} et homothéties \mathcal{H}

Si les rapports d'affinités sont égaux, la composée de deux affinités de même centre est une homothétie (Fig.7.7b) et l'on retrouve comme cas particulier les constructions fractales étudiées jusqu'ici (Si $k_{yi} = k_{xi} (=k_i)$, $\mathcal{A}(Gy, k_{xi}) \circ \mathcal{A}(Gx, k_{yi}) = \mathcal{H}(G, k_i)$).

Dans le cas de rapports inégaux, les agrégats et les pores résultent des réductions anisotropes des zones de fragmentation au moyen de composées d'affinités successives. A l'issue de cette construction, afin de conserver l'isotropie des particules primaires lorsqu'elles sont représentées par le dernier niveau de fragmentation, une affinité globale est appliquée, qui ne modifie pas les rapports successifs de taille des pores et agrégats dans chacune des directions. On peut associer ainsi au même squelette une même distribution de grains mais un espace poral isotrope ou pas (Fig.7.8).

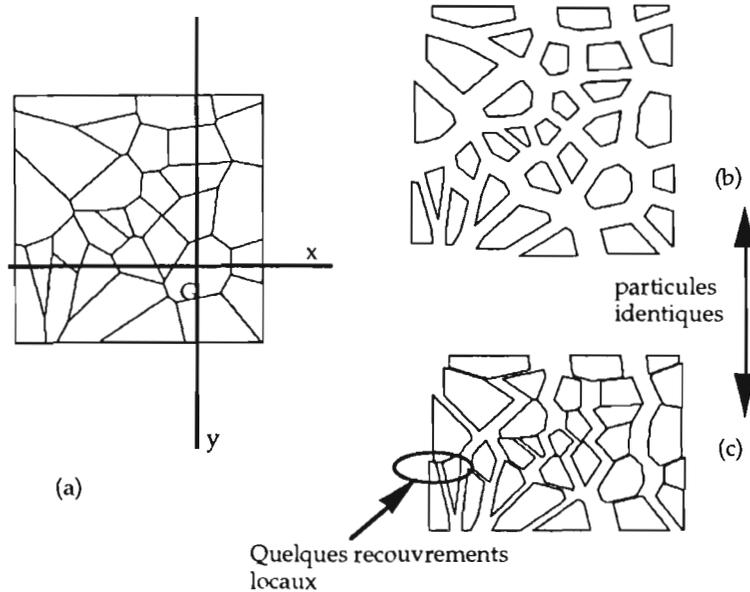


Figure 7.8. Pour un squelette de structure donné sur un niveau de fragmentation (a) isotrope (b) ou anisotropie maximum (c) de l'espace poral ($\alpha \rightarrow \infty$).

Un coefficient d'anisotropie α peut être défini par:

$$\alpha = \frac{1 - k_{xi}}{1 - k_{yi}}$$

Si $\alpha=1$, $k_{yi}=k_{xi}$ et la structure est isotrope.

Si $\alpha>1$, $k_{yi}>k_{xi}$ et les pores sont d'autant plus fins qu'ils sont horizontaux.

Plus α est grand, plus l'anisotropie est importante. Mais pour des valeurs trop importantes de α , on constate des recouvrements de particules. Ces recouvrements* sont très partiels et locaux sur un seul niveau de fragmentation (Fig.7.8.c), même lorsque α tend vers l'infini (i.e. $k_{yi}=1$). Sur plusieurs niveaux, le phénomène s'accroît; bien que passant souvent presque inaperçu visuellement, on peut le vérifier numériquement car la partition exacte en particules et pores n'est plus respectée.

La définition informatique de l'objet pore a dû être revue et généralisée (le découpage géométrique interne d'un pore n'est plus un ensemble de trapèzes résultant des différentes homothéties) mais un pore reste délimité par deux bords d'agrégats parallèles et représente encore une fracture d'ouverture constante. On peut comme précédemment déterminer les relations $\theta(h)$ et $K(\theta)$ sur ce réseau de fractures.

Structures fractales affines

Lorsque que le nombre de sous-agrégats et les rapports d'affinités k_{xi} et k_{yi} sont identiques à chaque niveau de fragmentation i , la courbe de référence s'ajuste très bien à l'expression analytique (5.2).

Nous avons cherché à relier la dimension fractale D_{est} estimée à partir de cet ajustement aux paramètres de définition de la structure (N, k_x, k_y). On remarque alors que le modèle utilisé est une structure fractale affine, si l'on se réfère à une branche de la théorie fractale qui traite d'objets géométriques auto-affines et non auto-similaires (cf annexe B) pour tenir compte de dimensions fractales différentes dans chacune des directions de l'espace. En effet, en trois dimensions, le résultat de transformations affines de rapports k_x , k_y et k_z appliquées sur des zones régulières cubiques est équivalent au produit cartésien de trois ensembles de Cantor de dimensions fractales \mathcal{D}_x et \mathcal{D}_y et \mathcal{D}_z , et la dimension de ce produit est égale à $\mathcal{D}_x + \mathcal{D}_y + \mathcal{D}_z$.

$$D_{aff} = \mathcal{D}_x + \mathcal{D}_y + \mathcal{D}_z =$$

$$\frac{\log N}{(\log N - 2 \log k_x)} + \frac{\log N}{(\log N - 2 \log k_y)} + \frac{\log N}{(\log N - 2 \log k_z)} \quad (7.1)$$

* Le point G qui permet de définir les axes d'affinités G_x et G_y pour une zone de fragmentation donnée peut être un point quelconque à l'intérieur de cette zone. Le recouvrement de deux particules adjacentes peut s'expliquer géométriquement par les positions relatives des points G définis dans les deux zones associées aux particules. Nous avons essayé différents choix aléatoires ou raisonnés pour positionner ces points, pour lesquels les recouvrements diffèrent en localisation et en intensité, et le choix du centre de gravité de la zone semble être le moins mauvais. N'ayant pour l'instant pas réussi à trouver une méthode de calcul déterministe de G sur l'ensemble des zones, on pourrait tenter de choisir localement, pour chaque zone individuellement, la position de G qui évite les recouvrements avec les zones voisines. Mais cette méthode risque d'être coûteuse en temps....

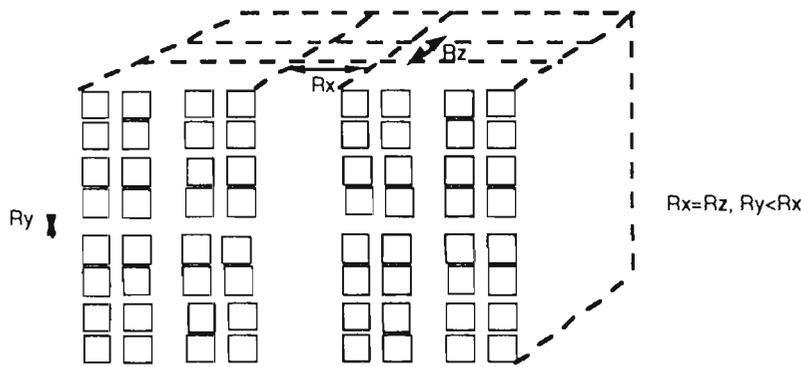


Figure 7.9. Structure fractale affine.
Structure plane ($N=4, k_x=0.8, \alpha=3$) et structure tridimensionnelle associée

Pour un modèle purement bidimensionnel, $k_z=1$, donc $\mathcal{D}_z=1$ et $D_{aff2}=\mathcal{D}_x+\mathcal{D}_y+1$. Dans le cas d'une extrapolation au tridimensionnel, on imagine la troisième dimension comme indiqué sur la figure 7.9, avec un rapport d'affinité k_z égal à k_x et $D_{aff3}=2\mathcal{D}_x+\mathcal{D}_y$. Dans le cas isotrope, $\mathcal{D}_x=\mathcal{D}_y=\mathcal{D}_z$ et l'on retrouve les formules $D_2=2\text{Log}N/(\text{Log}N-2\text{Log}k)+1$ et $D_3=3\text{Log}N/(\text{Log}N-2\text{Log}k)$.

On vérifie par simulation sur les structures anisotropes que D_{est} est très proche de D_{aff} (D_{aff2} ou D_{aff3} suivant le modèle utilisé): sur 100 simulations aléatoires pour $2<D_{aff}<3$, et environ 50 points simulés (θ, h) dans chaque cas, le coefficient de corrélation moyen est $R^2=0.98$, et les écarts d'estimation $|D_{est}-D_{aff}|$ sont, pour une réalisation donnée, de l'ordre de 0.05. L'expression (5.2) se généralise donc aux structures fractales affines.

Quant à l'allure de la courbe de conductivité hydraulique, elle s'améliore. Le seuil de percolation est d'autant plus faible que le coefficient d'anisotropie α est élevé. Mais dès que les pores de contact d'un niveau de fragmentation donnés sont vides d'eau, les agrégats qu'ils entourent se trouvent isolés et l'eau "ne passe plus". Pour que les transferts d'eau soient toujours possibles, il faudrait aller jusqu'à quasiment fermer ces pores de contact en imposant un coefficient d'anisotropie α très important. Mais on a vu qu'il n'était pas possible sur notre construction géométrique d'augmenter α indéfiniment, pour des problèmes de recouvrement de particules.

Anisotropie décroissante avec le niveau de fragmentation

Nous avons alors pensé que l'anisotropie pourrait être décroissante avec le niveau de fragmentation, et choisi un coefficient d'anisotropie différent à chaque niveau i , sous la forme arbitraire suivante: $\alpha_i=\beta^{n-i}$. L'objectif premier étant de fermer le plus possible tous les pores de contact et en particulier les plus gros, ceux des premiers niveaux de fragmentation. D'ailleurs il n'est pas impossible qu'il en soit ainsi dans la réalité et que la porosité la plus fine subisse

moins l'effet de contraintes directionnelles macroscopiques. On obtient alors des structures telles que celles représentées sur la figure 7.10.

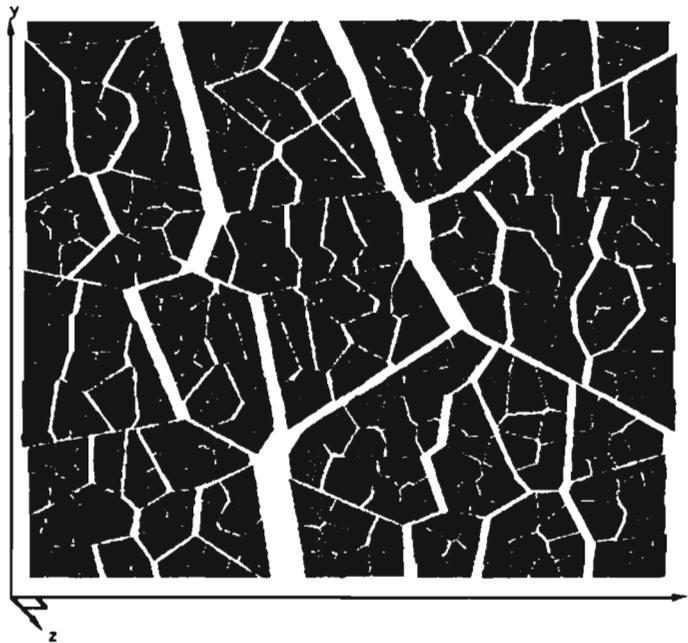


Figure 7.10. Structure anisotrope. $N=12$. $n=3$. $kx_1=kx_2=kx_3=0.92$. $\alpha=10^{n-i}$ (donc $ky_1=0.999, ky_2=0.99, ky_3=0.92$)

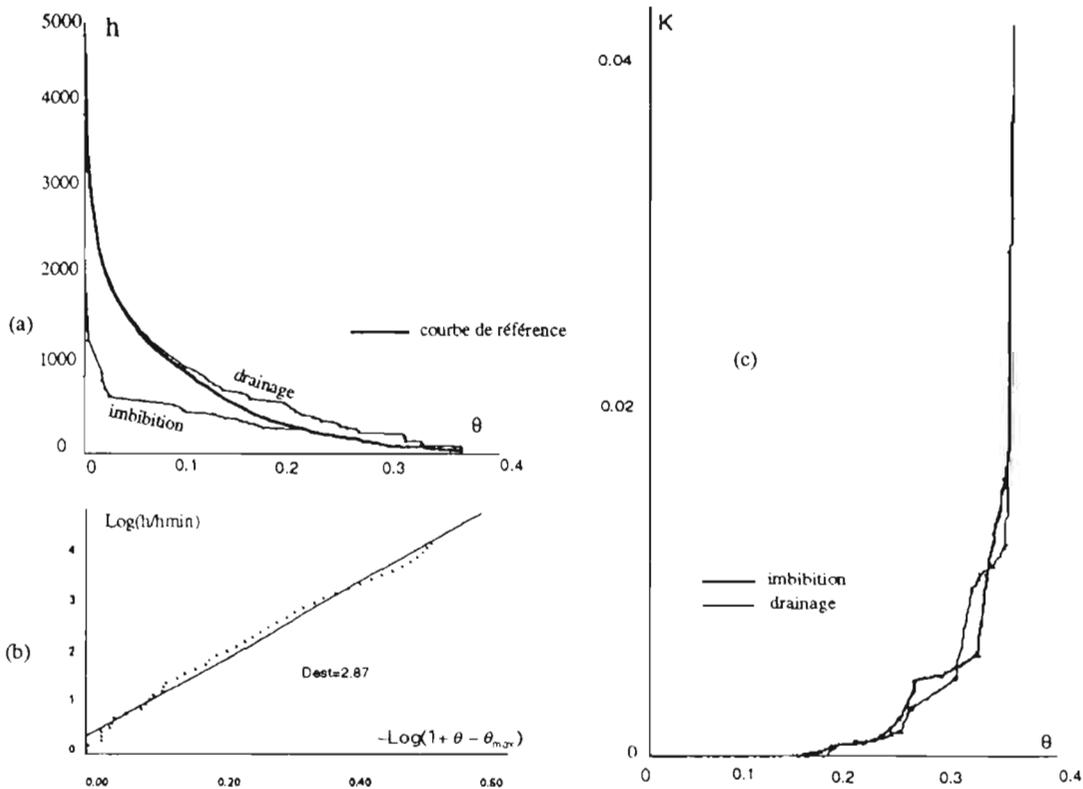


Figure 7.11. a) Courbes pression/teneur en eau simulées sur la figure 7.10. (modèle avec extrapolation au tridimensionnel)
 b) Ajustement caractérisant une distribution fractale de pores
 c) Courbes de conductivité hydraulique simulées sur la même structure

La structure n'est plus strictement fractale, car le rapport d'homothétie varie avec l'échelle de longueur. Cependant la courbe de référence s'ajuste encore très bien à l'expression analytique (5.2). Se référant à la formule (7.1), on constate que la dimension estimée D_{est} est toujours supérieure à la valeur $2\mathcal{D}_x(+\mathcal{D}_z)$ correspondant au cas isotrope et tend à se rapprocher de la valeur $\mathcal{D}_x+1(+\mathcal{D}_z)$ correspondant à une anisotropie maximum ($\mathcal{D}_y=1, k_y=1$). C'est le cas de l'exemple de la figure 7.11.b calculé pour un modèle avec extension au tridimensionnel où k_y est proche de 1 et $\mathcal{D}_x+1+\mathcal{D}_z \cong 2.874$.

En ce qui concerne les courbes de conductivité, le seuil de percolation est encore abaissé (Fig.7.11.c). Il n'est cependant toujours pas nul.

Notre construction a montré des limites de représentation géométrique. En effet, les problèmes de recouvrement n'existent pas pour des cubes pour lesquels on peut gérer une anisotropie quelconque; dans ce cas, pour une anisotropie extrême ($\alpha \rightarrow \infty$), le modèle fractal devient monodimensionnel et les fractures sont toutes parallèles (verticales). On sait alors que la conductivité est surestimée. Dans le cas d'une fragmentation irrégulière, on introduit des pores de contacts obliques et fins, qui réduisent la conductivité des chemins conducteurs verticaux lorsque ces chemins sont possibles; mais dans le cas de beaucoup de niveaux de fragmentation et d'une anisotropie de plus en plus faible pour les niveaux élevés, ces pores de contact ne sont pas assez fins pour rester pleins d'eau et assurer les transferts hydriques aux fortes pressions capillaires.

7.3.3. Discussion

Nous avons effectué plusieurs tentatives d'extensions du modèle de structure afin de représenter concrètement et géométriquement des chemins conducteurs d'eau à toute teneur en eau dans un milieu non saturé. En ce qui concerne les structures fractales, on a pu constater que des constructions géométriques de plus en plus différentes du modèle de base présentaient les mêmes lois d'échelle pour la distribution de tailles des pores. Le problème de mauvaise conductivité aux faibles teneurs en eau n'est pas lié à la forme précise de la distribution mais à sa répartition spatiale, plus précisément ici à la notion d'agrégats individualisés et plus encore à leur emboîtement hiérarchisé, notion qui paraît pourtant conforme à l'observation sur de nombreux sols.

D'après nos hypothèses de modélisation, pour que la conductivité soit non nulle pour une valeur donnée de θ et une pression capillaire associée h , il faut et il suffit qu'il existe un chemin continu de pores d'ouverture inférieure au rayon $r(h)$ donné par la loi de Laplace (ou de pores plus gros mais isolés par de tels pores fins). L'existence d'un seul chemin continu de pores très fins suffit à assurer une conductivité minimale. Mais nous voulons aussi conserver la possibilité

de certains chemins continus de pores plus larges afin que la valeur de la conductivité ne soit pas limitée par un passage obligé à travers des pores très fins.

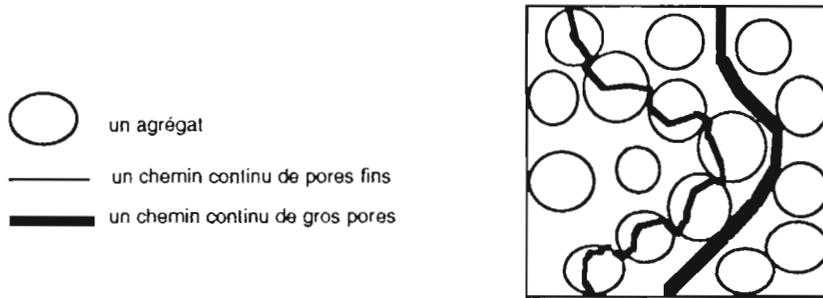


Figure 7.12. Une direction privilégiée en deux dimensions pour la coexistence d'au moins deux "tailles" de chemins continus de pores conducteurs d'eau

En deux dimensions, cette bicontinuité n'est possible sur une réalisation de structure donnée qu'en privilégiant une direction de l'espace. C'est le cas pour les structures anisotropes construites à partir d'affinités; nous avons alors calculé une conductivité directionnelle. Mais c'est aussi le cas pour les constructions à base d'homothéties aléatoires: pour certaines réalisations des chemins existent dans la direction du flux, pour d'autres pas; nous avons alors calculé une moyenne sur plusieurs réalisations planes qui s'interprète en faisant implicitement appel au tridimensionnel: plusieurs réalisations représentent plusieurs possibilités en trois dimensions. Dans ces conditions et bien que nous n'ayons pas trouvé de solution entièrement satisfaisante, il existe sans doute, même en deux dimensions, d'autres représentations spatiales des mêmes distributions de pores et d'agrégats dont certaines permettraient de modéliser les transferts d'eau. Mais il est clair que la bidimensionnalité est limitante. Cependant une extension effective de notre modèle au tridimensionnel, qui générerait des agrégats polyédriques entourés par un espace poral uniforme, poserait le même problème de conductivité (plus des problèmes d'algorithme et de taille mémoire), à moins de rechercher là aussi des extensions de la construction géométrique, par exemple une certaine proportion de zones de fragmentation "non ouvertes" (homothétie de rapport 1) à chaque niveau. Une autre façon de procéder est d'abandonner cette recherche de représentation plutôt concrète au moyen de "pores de contact" et de modéliser la complexité des contacts inter-agrégats par des "pores virtuels de passage" d'un agrégat à l'autre.

7.4. APPROCHE PLURI-RÉALISATIONS

Pour tenir compte de la connectivité d'une structure réelle tridimensionnelle tout en continuant à travailler sur des modèles plans, nous avons imaginé de représenter les transferts entre différents niveaux de fragmentation en modifiant de façon délibérée les conditions de connectivité des structures simulées.

7.4.1. Méthode

Plusieurs réalisations planes indépendantes

Nous générons simultanément plusieurs réalisations planes indépendantes d'une structure donnée. Les paramètres de construction sont identiques pour chacune des réalisations, dont la différence est seulement due au tirage au sort des germes de fragmentation. Dans le cas fractal, nous revenons ici à une structure $\mathcal{F}(N,k,n)$ "simple", définie par les paramètres n (nombre de niveaux), N (nombre de sous-agrégats par agrégats), et un rapport d'homothétie constant k^* . Les caractéristiques de structure, distributions d'éléments solides ou de pores, sont mesurées en effectuant la moyenne sur ces réalisations multiples. Les résultats obtenus jusqu'ici sont donc lissés par moyennage des fluctuations aléatoires.

Connexions entre ces réalisations

Nous imaginons ensuite des connexions entre les différentes réalisations planes: le nombre de plans possible est noté n_{plans} ($n_{\text{plans}}=2$ sur la figure 7.13). Pour un même nombre d'agréats N^n de dernier niveau, le nombre de noeuds est le même dans chaque plan. A tout noeud M d'un plan donné, on associe un noeud M' du plan voisin. Entre ces deux noeuds, nous imaginons un pore ou plutôt une condition de passage de l'eau ou de l'air. Des chemins "transversaux" non représentés peuvent ainsi s'établir. L'organisation spatiale à l'intérieur d'une réalisation donnée reste inchangée.

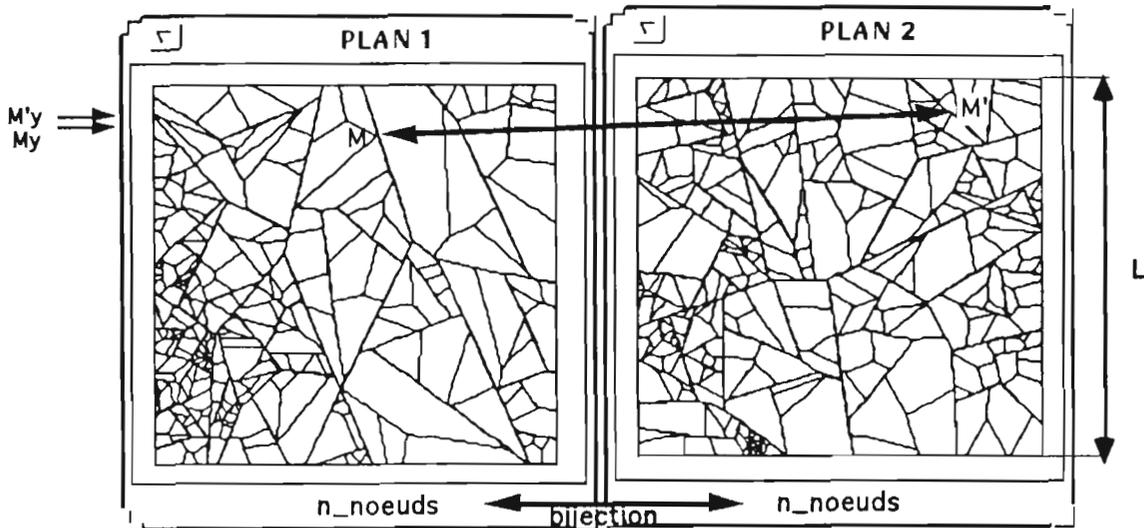


Figure 7.13. Connexion entre deux réalisations planes

* Nous pouvons aussi générer des structures non fractales ou fractales étendues, définies dans chaque plan par les mêmes paramètres et les mêmes algorithmes de construction.

Pour que les chemins transversaux respectent globalement cette organisation, la bijection de noeud à noeud entre deux plans adjacents est réalisée en respectant une contrainte de proximité: on associe deux noeuds M et M' de façon à ce que la différence entre les cotes de M et M' soit minimale suivant la direction du flux que l'on veut calculer (sur notre représentation graphique, il s'agit de la verticale et la condition est $M_y - M'_y$ minimum, voir Fig.7.13).

Pour la condition de passage, plusieurs choix ont été testés.

- condition Sup: un pore fictif d'ouverture égale à l'ouverture maximale des trois pores se rencontrant en M et de longueur constante MM'.

- condition Inf: un pore fictif d'ouverture égale à l'ouverture minimale des trois pores se rencontrant en M et de longueur constante MM'.

- condition Virt: un pore virtuel et un passage sans résistance.

- condition Sans: aucun passage

La condition Sans consiste simplement à travailler simultanément sur plusieurs réalisations indépendantes, sans les connecter, et à obtenir une moyenne sur l'ensemble, pour tester l'influence des connexions précédentes.

La conductivité hydraulique est calculée comme précédemment, en imposant la même différence de pression entre les deux faces horizontales de chaque plan. La conductance de chaque pore est calculée en fonction de ses dimensions, fictives ou pas. En chaque noeud interne, la condition de flux nul est écrite sur l'ensemble des voisins.

$$\sum_{j=1}^{j=n_voisins} q_{ij} = 0$$

Notre réseau de pores était jusqu'ici de coordinance 3 au sens où trois pores se rejoignent en chaque noeud. Le nombre de voisins $n_voisins$ est donc encore égal à 3 pour la condition Sans, il devient égal à $3(n_plans)$ pour la condition Virt, et pour les conditions Inf et Sup, 4 si deux plans seulement sont associés ou 5 pour plusieurs plans (Fig.7.14).

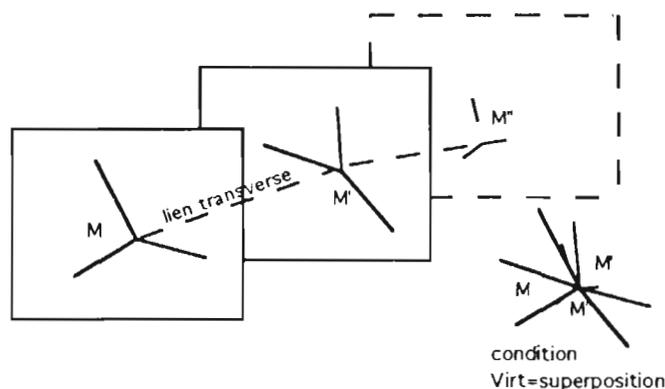


Figure 7.14. Condition de passage entre noeuds associés et coordinance du réseau.

Quant au nombre maximum de pressions inconnues à déterminer, il se compte en nombre de noeuds. Pour la condition Virt, ce nombre est le même que pour un seul plan, puisque les noeuds associés sont "confondus". Dans les autres cas, il est multiplié par le nombre de plans, il peut donc devenir très important, et la taille du système à résoudre augmente notablement!

Le flux macroscopique est calculé. Pour comparer les résultats avec l'approche unidimensionnelle, il est divisé par n_{plans} .

Ce rajout de chemins conducteurs est pris aussi en compte pour la simulation d'un état d'équilibre avec une pression capillaire donnée. Le chemin continu de fluide envahissant l'espace poral peut passer maintenant par les pores fictifs.

7.4.2. Résultats

Disparition totale ou partielle de l'hystérésis

Une conséquence immédiate de cette approche multi-plans est la disparition totale ou partielle de l'hystérésis de la relation pression/teneur en eau. Le rajout de connexion s entre noeuds de différents plans augmente la coordinance (Fig.7.14). On construit ainsi des réseaux de pores multi-plans de coordinance variable, qui ont une topologie assez curieuse. Plus la coordinance est élevée, plus vite chacune des branches principales d'hystérésis rejoint la courbe de référence (Fig. 7.15).

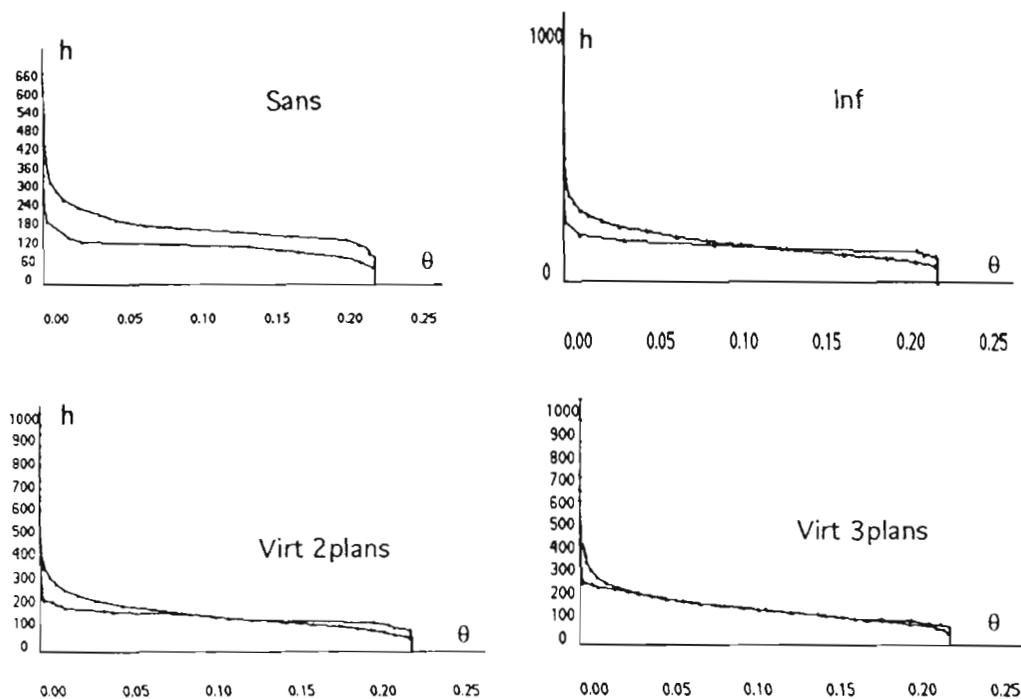


Figure 7.15. Disparition de l'hystérésis sur deux réalisations de structures aléatoires ($n=1, N=200, K=0.88$) connectées entre elles.

On peut facilement expliquer pourquoi: en effet, si l'eau par exemple pénètre dans un sol sec, lorsque le front d'invasion atteint un embranchement donné, plus le nombre de chemins potentiels est élevé, plus l'eau a de chance de trouver un pore de taille adéquate pour être envahi, et, par un effet "boule de neige", de plus en plus de pores deviennent accessibles. La différence de la courbe d'imbibition avec la courbe de référence était due à des pores envahissables mais non accessibles. La probabilité de telles occurrences diminue jusqu'à s'annuler. A ce moment-là,

- d'une part la courbe d'imbibition rejoint la courbe de référence.

- d'autre part les pores envahissables les plus éloignés de la face d'alimentation sont atteints, en particulier ceux situés sur la face opposée: le seuil de percolation est atteint et la conductivité devient non nulle.

On peut se demander dans quelle mesure un tel résultat ne se retrouverait pas sur un réseau classique si les pores étaient distribués seulement sur les liens du réseau.

Dans le cas fractal, l'hystérésis, qui était due essentiellement à une seule phase, celle d'imbibition, disparaît quasi totalement. On peut donc penser qu'en rajoutant ainsi des connexions entre pores à tous les niveaux d'organisation, on établit une très bonne connectivité, voire une trop bonne connectivité à l'intérieur d'une classe de taille de pores donnée. En ce qui concerne l'ajustement de la courbe $h(\theta)$ à l'expression analytique (5.2), il est encore plus précis, pour des raisons évidentes.

Une allure plausible pour $K(\theta)$

Dans tous les cas de figure testés, le seuil de percolation est nettement abaissé (en comparant avec la condition Sans) et la conductivité hydraulique prend une allure jugée satisfaisante (Fig.7.16.a, 7.17.a). D'autre part l'hystérésis de la courbe $K(\theta)$ est très faible, ce qui est conforme aux observations expérimentales (les courbes présentées sont calculées en drainage).

Pour les conditions Inf et Sup, l'ouverture du pore de connexion est variable. Pour une pression capillaire donnée, la connexion n'est assurée que si le pore est assez fin pour contenir de l'eau, et donc le pore de connexion est actif ou non. Pour la condition Inf, les pores de connexion actifs sont plus nombreux, pour la condition Sup, les pores de connexion sont plus gros et conduisent mieux. Nous expliquons ainsi les résultats très voisins obtenus pour ces deux conditions, avec seulement une valeur un peu plus forte à saturation pour la condition Sup et un seuil de percolation légèrement abaissé pour la condition Inf. Les valeurs de conductivité sont plus fortes pour la condition Virt que pour les conditions Inf et Sup. En effet, les chemins sont moins tortueux et surtout plus nombreux puisqu'il n'existe pas dans ce cas de pores de passage non actifs.

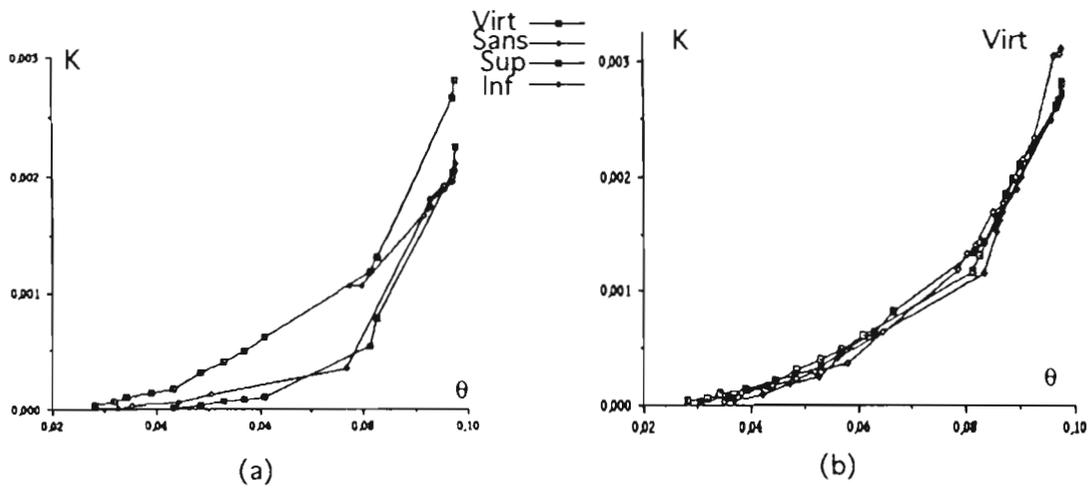


Figure 7.16. Une structure aléatoire donnée. 2 plans ($n=1, N=120, K=0.95$)
 a) plusieurs types de connexion s.
 b) Variabilité pour différentes réalisations de couples de plans.

Dans le cas d'une structure fractale, l'allure des courbes (K, θ) est donnée par l'exemple de la figure 7.17 (a et b). Les différences entre les différents scénarios restent du même ordre. La conductivité pour la condition Virt est toujours un peu plus élevée que pour les autres conditions. On peut noter que les valeurs de conductivité à saturation, y compris celle obtenue en l'absence de connexion s inter-plans, sont voisines.

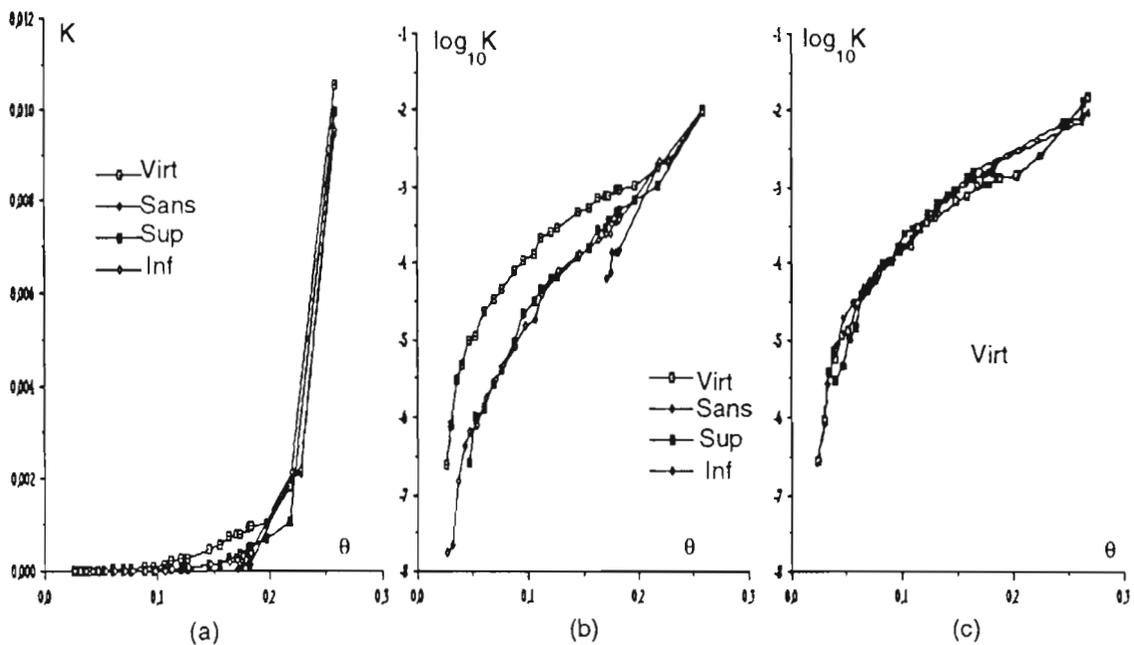


Figure 7.17. Une structure fractale donnée ($n=3, N=6, K=0.95$). a) Comparaison des différents types de connexion. b) courbes (a) redessinées en échelle logarithmique pour K. c) variabilité pour la condition Virt et différentes réalisations de couples de plans

Ayant un ordre d'idée en ce qui concerne la différence entre les différentes conditions, nous avons surtout étudié la condition Virt: c'est la condition la plus simple et les calculs sont

possibles pour un plus grand nombre de structures (nous sommes limités par la taille de la matrice de calcul à stocker en mémoire et/ou les temps de calcul). L'influence d'un nombre de plans connectés supérieur à 2 consiste en une très légère augmentation de la conductivité. Les considérations exposées dans les paragraphes suivants s'appliquent uniquement à la condition Virt et à la connexion de deux plans.

On peut remarquer que dans ce cas, et pour une structure donnée, la variabilité due à différents tirages au sort de différents couples de plans n'est pas très importante, que ce soit sur un ou plusieurs niveaux de fragmentation (Figs. 7.16.b et 7.17.c).

Comparaisons de plusieurs courbes $K(\theta)$ sur des structures fractales

Quel critère de comparaison pour différentes structures fractales?

Supposons que nous ayons obtenu une bonne simulation de la conductivité sur une structure fractale de sol. On peut se demander quelle information la dimension fractale pourrait donner sur la conductivité. La dimension fractale ne peut renseigner sur la conductivité à saturation, qui dépend de la taille réelle des pores et non pas de la forme de la distribution des tailles. Mais peut-elle renseigner sur la pente de $K(\theta)$?

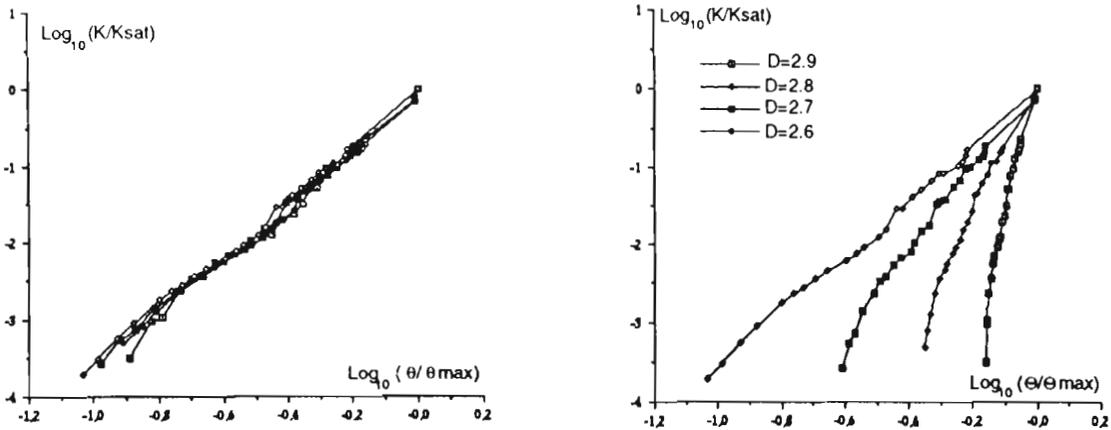
Sur les simulations multiplans, nous avons tenté une comparaison de K/K_{sat} et $\theta/\theta_{\text{max}}$ en nous basant sur les approches théoriques du chapitre 2 où certains auteurs prévoient que $(K/K_{\text{sat}}) = (\theta/\theta_{\text{max}})^{f(D)}$.

Nous avons fait varier la dimension fractale de structures associées à un même squelette en modifiant le rapport d'homothétie k . Sur les exemples étudiés, les courbes de $\log(K/K_{\text{sat}})$ en fonction de $\log(\theta/\theta_{\text{max}})$ sont quasi confondues et donc indépendantes de D (exemple Fig.7.19a).

Mais la porosité dépend de k et varie beaucoup d'une structure à l'autre. En particulier, pour une valeur de k élevée, la porosité est très faible et on peut penser que la structure simulée ne représente que les premiers niveaux de fragmentation d'une structure de sol dont la porosité est plus importante. Si l'on ramène les résultats simulés à une même porosité totale, c'est-à-dire si l'on ajoute aux valeurs de θ simulées la teneur en eau de pores plus fins non représentés de façon à obtenir une teneur en eau Θ_{max} identique pour chaque structure, on obtient une nouvelle teneur en eau Θ . On obtient alors des différences nettes sur les graphiques de $(\text{Log}(K/K_{\text{sat}}), \text{Log}(\Theta/\Theta_{\text{max}}))$ que l'on peut observer sur l'exemple de la figure 7.19b.

On retrouverait ainsi de façon très qualitative la tendance observée dans les études théoriques (Rieu et Sposito 1991c, et toutes les expressions de $f(D)$ vues au chapitre 2, §2.3.3.2 où $f(D)$ est une fonction croissante de D). Pour une même porosité totale, plus la dimension fractale est

élevée, plus le nombre de niveaux de fragmentation et l'étendue de la distribution de taille des pores sont importants et plus la conductivité diminue rapidement avec la teneur en eau .



a) Valeurs (K,θ) simulées

b) courbes rapportées à la même porosité totale Θ_{max} et représentées sur leur domaines de simulation respectifs

$$\Theta = \theta + (\Theta_{max} - \theta_{max})$$

Figure 7.19. Courbes obtenues sur des structures fractales simulées associées au même squelette ($n=3, N=6$) mais avec différents rapports d'homothéties ($k=0.95$ et $D \approx 2.9$, $k=0.90$ et $D \approx 2.8$, $k=0.85$ et $D \approx 2.7$, $k=0.80$ et $D \approx 2.6$)

Quel critère de validation?

Que prévoirait le modèle qui vient d'être présenté sur une distribution de pores réelle? On a vu au chapitre 5 que l'on pouvait imposer une échelle à la construction en se "calant" sur une courbe $h(\theta)$ expérimentale.

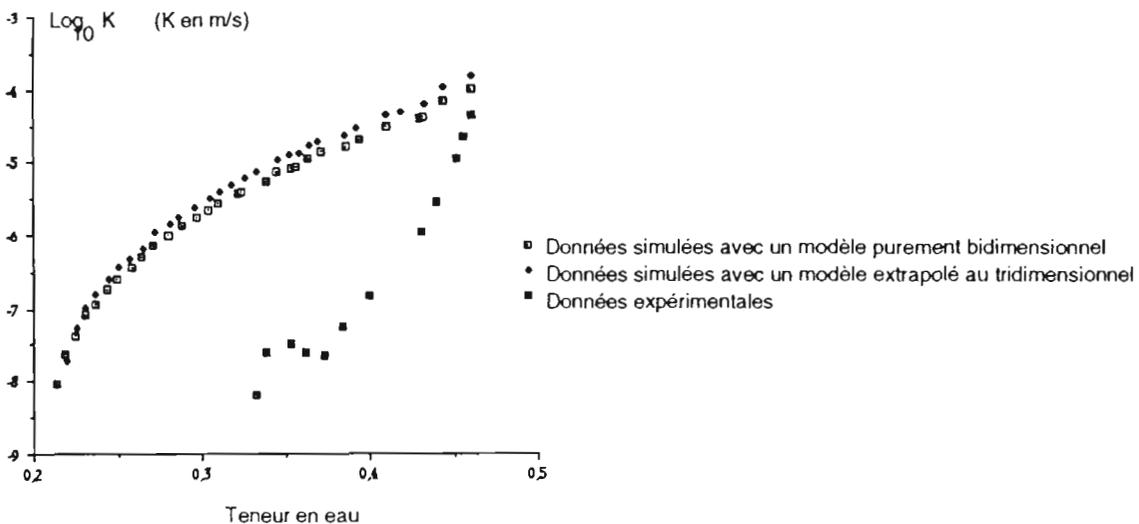


Figure 7.20. Simulation de $K(\theta)$ (deux réalisations planes connectées par la condition Virt) Comparaison entre les données observées sur le sol "Ariana" et les données simulées sur la structure utilisée au chapitre 5, §5.1.4.

Sur l'exemple du sol Ariana (cf.chapitre 5, §5.1.4), on obtient un bon ordre de grandeur de la conductivité à saturation qui est fixé en fait par la taille des plus gros pores que l'on a calé sur la taille réelle. Mais on constate une surestimation de la conductivité en dessous de la saturation, ce qui semble en accord avec ce qui était pressenti, puisque nous pensons avoir rétabli une trop bonne connectivité entre les pores les plus fins (pour deux réalisations planes connectées par la condition Virt).

Limitations de la méthode de connexion multiplans

Un limitation importante est due à la simulation d'un nombre réduit de niveaux de fragmentation. Si l'on suppose que d'autres niveaux de fragmentation existent au delà de ceux que l'on a représentés, il s'agit d'évaluer leur contribution à la conductivité de l'ensemble et donc la perte d'information que constitue leur omission. On constate d'abord sur des simulations avec rajout de niveaux supplémentaires (Fig.7.21a) que la prise en compte de plus de niveaux de fragmentations et donc de plus de pores conducteurs d'eau augmente K_{sat} , qui reste du même ordre de grandeur, ce qui signifie que la conductivité à saturation est dominée par le premier niveau de fragmentation et serait assez bien estimée sur un nombre réduit de niveaux simulés. Mais un biais est introduit par le rajout de connexion s noeuds à noeuds: plus le nombre de noeuds est important, plus le nombre de chemins possibles est élevé et plus forte est la conductivité de l'ensemble; en particulier la chute de la conductivité aux faibles teneurs en eau n'a pas lieu de façon aussi brutale si la fragmentation est poursuivie (Fig.7.21b).

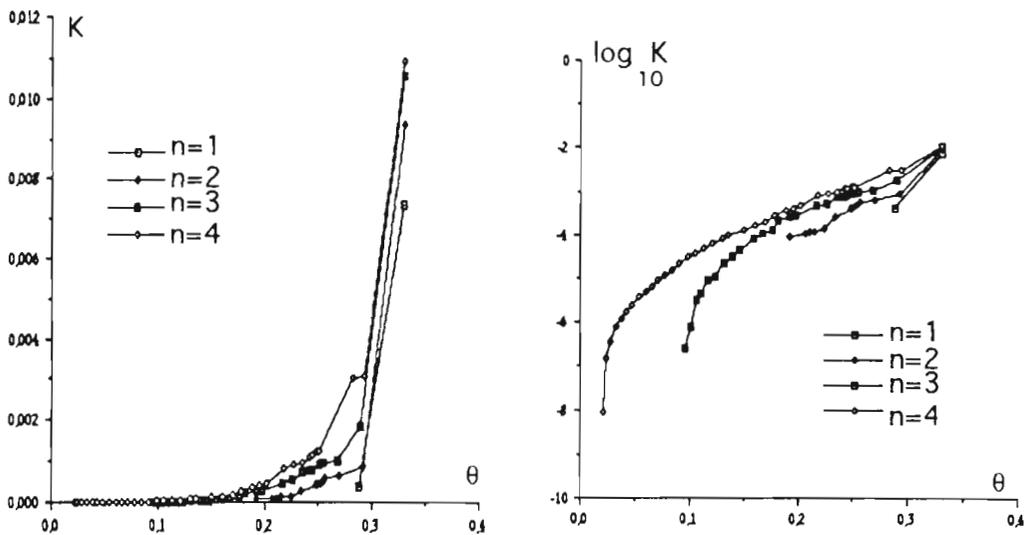


Figure 7.21. Représentation de plus en plus de niveaux de fragmentation.

Améliorations possibles

Ayant plusieurs raisons de penser que le type de connexion s qui vient d'être présenté rétablit une trop bonne connectivité entre les pores les plus fins, nous envisageons de poursuivre

l'exploration dans la voie suivante: L'association entre deux réalisations planes a été faite en associant des noeuds sans tenir compte du niveau des agrégats ainsi reliés. En associant les noeuds deux à deux à chaque niveau de fragmentation (au moment où ils sont générés) on associerait ainsi des pores d'une même classe de taille. Ceci aurait peut-être pour effet de réduire la sensibilité au nombre de niveaux effectivement simulés car le rajout d'un niveau supplémentaire ne modifierait pas les connexions entre les pores des niveaux précédents. Il est vraisemblable que la conductivité sera encore trop forte pour les faibles teneurs en eau. Il serait alors possible, soit d'introduire le concept de tortuosité, en augmentant, pour les conditions Inf et Sup, la longueur des liens transversaux aux niveaux les plus profonds (entre les pores les plus fins), soit d'introduire une probabilité de connexion et d'associer les pores d'une proportion d'agrégats seulement à chaque niveau. Les agrégats déconnectés de leurs voisins (et les sous-agrégats déconnectés de ce fait) devraient être aussi générateurs d'hystérésis.

Une autre voie de recherche est d'étudier d'autres hypothèses de fonctionnement hydrodynamique et de réfléchir à l'importance que peut revêtir la conduction d'eau par film le long des parois.

7.5. CONCLUSION

A chaque étape de l'invasion d'un fluide modifiant la teneur en eau dans une structure simulée, la conductivité hydraulique du réseau de pores totalement ou partiellement saturé a été calculée, par analogie électrique, à partir des conductances élémentaires de chaque pore plein d'eau. Pour une organisation structurale caractérisée par une hiérarchie d'agrégats sur plusieurs niveaux de fragmentation, et en raison de notre construction d'agrégats nettement individualisés et isolés les uns des autres, la simulation résulte en une sous-estimation de la conductivité en milieu non saturé au point de l'annuler lorsque les gros pores inter-agrégats sont vides. Nous avons cherché à étendre le modèle de structure afin de rétablir des possibilités de transferts hydriques aux faibles teneurs en eau, en représentant des chemins conducteurs de pores fins reliant de façon continue deux faces opposées dans la direction du flux.

Les extensions proposées ont été essentiellement appliquées au modèle de structure fractale en agrégats emboîtés; ceci a permis au passage de constater la robustesse de la caractérisation d'une distribution fractale de tailles des pores: en effet l'expression analytique de $h(\theta)$ caractérisant une distribution fractale de pores (dans un modèle cubique parfaitement fractal) a permis de bien modéliser les données simulées sur des structures plus complexes, aussi bien dans le cas d'un désordre local généré par des homothéties aléatoires que dans le cas d'une

extension du modèle fractal conduisant de l'autosimilarité à l'autoaffinité (structures anisotropes).

Mais les représentations spatiales étudiées, visant à établir des chemins continus de "pores de contact" entre des agrégats des différents niveaux ne se sont pas avérées entièrement satisfaisantes. Ce sont essentiellement des problèmes de nature géométrique qui n'ont pas permis d'aller jusqu'à la réalisation d'un désordre suffisant pour représenter aléatoirement des chemins privilégiés d'écoulements d'eau en milieu faiblement saturé, ou pour réaliser parfaitement un modèle anisotrope présentant une direction privilégiée d'écoulement.

La simulation d'une conductivité hydraulique isotrope sur une structure plane impose de faire appel explicitement ou non à une représentation des connexions tridimensionnelles entre pores. Nous avons alors modélisé une structure de sol en associant plusieurs réalisations planes, connectées entre elles par des pores fictifs ou virtuels qui modifient les conditions de connectivité du réseau poral. Une allure plausible de la conductivité a été rétablie mais au prix de la disparition de l'hystérésis, et les valeurs obtenues en milieu non saturé semblent surestimées.

Les méthodes développées n'ont pas été entièrement exploitées; elles permettent d'explorer d'autres hypothèses afin d'améliorer les possibilités de représentation de structures et la modélisation de la relation $K(\theta)$ dans les sols agrégés.

Après avoir particulièrement étudié un modèle de structure fractale dans les chapitres précédents, et l'avoir constamment caractérisé par l'expression de la courbe de rétention d'eau associée à sa distribution de tailles de pores ("courbe de référence", cf. Chap.5), nous l'avons comparé à d'autres approches de la fractalité des sols. Le paragraphe (8.1) résume les interrogations posées par de multiples définitions de la fractalité d'un sol, et par différentes estimations d'une dimension fractale à partir de courbes de rétention. Au paragraphe (8.2), une expression générale de la courbe de rétention dans un espace poral fractal est proposée. Elle devrait permettre en théorie d'estimer la dimension fractale de l'espace poral. Ceci est vérifié par simulation dans le cas d'un nouveau modèle de structure fractale au paragraphe (8.3), où il est aussi discuté de liaisons possibles entre la dimension fractale de l'espace poral et une dimension fractale de la distribution des éléments solides du sol. Enfin au paragraphe (8.4) est abordée l'étude de quelques courbes expérimentales...

8.1. PROBLÈME POSÉ

8.1.1. Plusieurs dimensions fractales

On a vu au chapitre 2 que la caractérisation d'un sol fractal pouvait relever de points de vue très différents, ce qui soulève de nombreuses questions. Certains mesurent par exemple la dimension fractale d'un ensemble de particules primaires, d'autres celle d'un ensemble d'agrégats, ou celle d'un volume poral, ou encore celle de l'interface solide-vide. Y a-t-il unicité de la dimension fractale? D'après Katz et Thompson (1985), la dimension fractale de l'interface serait égale à celle du volume poral. D'après Rieu et Sposito (1991b), la dimension fractale du volume poral serait égale à celle de la distribution en nombre d'agrégats (aux différences d'estimation près dues aux conditions expérimentales). Le fait de dire qu'un sol est fractal signifie-t-il la même chose pour les différents auteurs?

Beaucoup de mesures de dimensions fractales sont effectuées indépendamment des propriétés hydriques. Le premier objectif est d'obtenir une caractérisation de la structure des sols, et un

certain nombre de résultats sont analysés en ce sens. Un deuxième objectif est de prédire à terme les caractéristiques hydriques des sols fractals.

Par exemple, Wu et al (1993), présentent un tableau récapitulatif de dimensions fractales publiées, dont nous remarquons qu'elles proviennent de théories très diverses, et soulignent simplement la nécessité d'améliorer la qualité des mesures afin d'estimer précisément "la" dimension fractale d'un sol. Eux-mêmes mesurent la distribution du nombre de particules par rapport à leur taille et en déduisent une dimension fractale des sols étudiés. Comme application potentielle, ils envisagent de modéliser la courbe $\theta(h)$ en utilisant indifféremment les expressions analytiques établies par Tyler et Wheatcraft (1989) ou par Rieu et Sposito (1991b): mais s'il est vrai que l'expression établie par les premiers auteurs introduit une dimension fractale de particules, l'expression des deuxièmes auteurs se réfère à une dimension fractale d'agrégats, et rien ne permet d'affirmer que les deux approches sont équivalentes.

Dans le même ordre d'idées, citons les travaux de Tyler et Wheatcraft: ces auteurs ont abandonné leur calcul de $\theta(h)$ de 1989 à partir d'une dimension fractale de particules; la dimension fractale qu'ils continuent à mesurer sur une distribution de particules (1992) est-elle la même que celle utilisée dans leur modèle de distribution des pores sur laquelle porte leur calcul théorique de la courbe de rétention de 1990, et pour lequel la phase solide n'est pas représentée?

Dans le cadre de ces interrogations, se posent particulièrement les questions suivantes: quelles sont les hypothèses faites pour la formulation de l'expression de $\theta(h)$ dans un sol dit fractal? et inversement quelle est la signification de la dimension fractale que l'on peut indirectement estimer à partir de mesures de courbes de rétention?

8.1.2. Estimation d'une dimension fractale à partir d'une courbe de rétention

Même en se restreignant à l'étude d'un espace poral fractal, il existe plusieurs modèles géométriques dont sont déduites des expressions analytiques de la relation pression/teneur en eau $\theta(h)$. Si l'on réécrit les différentes expressions de façon homogène, il en résulte au moins deux formes différentes.

$$\theta(h)+1 - \theta_{\max} = (h_{\min}/h)^{3-D} \quad (8.1)$$

(8.1 établie par Rieu et Sposito, 1991a)

$$\theta(h) = \theta_{\max}(h_{\min}/h)^{3-D} \quad (8.2)$$

(8.2 déduite de l'expression établie par de Gennes, 1985, et établie indépendamment par Tyler et Wheatcraft, 1990).

θ_{\max} étant la teneur en eau à saturation et h_{\min} la pression d'entrée d'air dans le milieu poreux.

Plusieurs auteurs utilisent un ajustement Log/Log de ces expressions pour détecter si un sol donné est fractal, et, le cas échéant, calculer sa dimension fractale (expression (8.1) utilisée par Rieu et Sposito, 1991a et 1991c, Mapangui, 1992; expression (8.2) utilisée par Davis, 1989, Toledo et al, 1990, Brakensiek et Rawls, 1992. Par ailleurs, Ahl et Niemeyer, 1989a et 1989b, estiment aussi la dimension fractale d'un sol à partir de courbes de rétention. Leur méthode n'est pas explicitée sous forme d'une expression analytique $\theta(h)$, mais semble être équivalente à l'utilisation d'une troisième expression qui serait: $\theta_{\max} - \theta(h) \sim \left(\frac{1}{h}\right)^{D-3}$

L'expression (8.1) a constamment été utilisée au cours des chapitres précédents (elle était alors référencée 5.2) pour caractériser une structure fractale de sol. Son utilisation sur les données (θ, h) simulées permet de retrouver la dimension fractale donnée par construction aux modèles de structure présentés jusqu'ici. L'expression (8.2) s'ajuste mal aux données simulées: au chapitre 5, on a vu que le coefficient de la régression linéaire Log/Log était très bon, mais qu'un écart net à la linéarité apparaissait sur le graphique. Et surtout la dimension fractale estimée à partir d'un tel ajustement est très différente de celle définie sur la construction fractale.

Nous avons testé les deux expressions (8.1) et (8.2) sur les données expérimentales utilisées pour estimer une dimension fractale D , lorsque ces données étaient publiées. Le résultat est une estimation très différente de D (Exemples tableau 1). Pour ces sols réels, on ne sait pas, contrairement au cas de données simulées sur des modèles construits suivant un algorithme donné, quelle dimension fractale on devrait obtenir...

Données	Référence	Type de sol	Npoints	D(8.1)	R ²	D(8.2)	R ²
Ariana	Rieu and Sposito 1991c	silt clay loam	27	2.90	0.99	2.71	0.98
Berea	Davis 1989	(grès)	9	2.99*	0.98	2.55	0.99
Yolo	Rieu and Sposito 1991a	limono-argileux	9	2.95	0.999	2.87	0.997
Panoche	Rieu and Sposito 1991a	Arg-lim-sable	9	2.97	0.95	2.92	0.95
D2F1ac2	Toledo et al 1990	sables	4	2.97	0.98	2.59	0.99

Tableau 8.1. Ajustement des expressions analytiques (8.1) et (8.2) sur des données expérimentales de courbes de rétention: différentes estimations de la dimension fractale D . (* données sous forme de % de la saturation totale, (8.1) utilisée avec $\theta_{\max} \approx 0.2$)

L'écart entre les résultats des deux méthodes est aussi important que l'écart entre les différentes dimensions fractales sur lequel on peut se baser pour discriminer différents types de sol. Les estimations de D à partir de (8.2) sont plus faibles que celles obtenues à partir de (8.1). Notons que Young et Crawford (1991) relèvent une sous-estimation de D à partir de courbes de rétention, par comparaison avec d'autres mesures de la dimension fractale, et qu'ils se réfèrent à des résultats provenant de l'ajustement de (8.2) uniquement.

L'expression de $\theta(h)$ dépend-elle du modèle de structure fractale? de Gennes (1985) étudie deux modèles de structure de l'espace poral présentant une interface solide-vide fractale, très différents d'un point de vue géométrique, et trouve une expression unique écrite ici sous la forme (8.2). Il en déduit qu'on peut conjecturer l'existence d'une expression unique de $\theta(h)$ dans un milieu poreux fractal. Nous avons donc cherché à comprendre d'où provenait la différence entre les modèles théoriques conduisant aux deux expressions analytiques.

8.2. RÉFLEXION THÉORIQUE SUR L'EXPRESSION DE $\Theta(H)$ DANS UN ESPACE PORAL FRACTAL

8.2.1. Recherche d'un consensus sur la définition d'un espace poral fractal

Définition choisie

Quelle est la définition d'un espace poral fractal? Si l'on se réfère à des ouvrages généraux sur les fractals, on trouve à la fois chez Jullien et Botet (1986) et Vicsek (1989), la caractérisation de base suivante.

Un espace poral est fractal, de dimension D , $0 < D < 3$, lorsque le volume $[V > r]$ de pores de taille supérieure ou égale à r suit la relation (8.3), c'est-à-dire lorsque sa dérivée par rapport à r suit une loi en puissance de la taille r des pores.

$$\frac{d[V > r]}{dr} \sim -r^{2-D} \quad (8.3)$$

L'expression (8.3) est établie sous cette forme par Pfeifer et Avnir (1983) et Friesen et Mikula (1987), elle est prise comme définition par Bartoli et al (1991) et Ahl et Niemeyer (1989a et b). Elle est aussi vérifiée par tous les modèles fractals représentant l'espace poral dont nous avons eu connaissance (cube fractal de Rieu et Sposito, 1991b, éponge de Menger utilisée par Pfeifer et Avnir, 1983, tapis de Serpinski utilisé par Tyler et Wheatcraft, 1990, modèles d'espace poral associés à une interface fractale chez de Gennes, 1985), qui expriment $[V > r]$ sous une forme intégrée.

Degré de généralité de la définition choisie

L'expression (8.3) est vérifiée par différents modèles dans lesquels elle n'est pas directement établie en tant que telle.

i) Rieu et Sposito (1991b).

A partir de considérations générales sur un milieu poreux fractal, Rieu et Sposito établissent sur une distribution discrète de pores de taille r_i autosimilaires, pour des itérations i

successives, $0 < i < m$, la valeur de la porosité partielle $\phi[r > r_i]$ due aux pores de taille plus grande que r_i .

$$\phi[r > r_i] = \frac{[V > r_i]}{V_T} = 1 - (r_i/r_0)^{3-D}$$

où $V_T = L^3$ est le volume total représentatif du milieu poreux considéré (taille linéaire L).

L'expression de $[V > r_i]$ sous forme d'une fonction continue $[V > r]$ s'écrit:

$$[V > r] = L^3(1 - (r/r_{\max})^{3-D}) \quad (8.4)$$

et la dérivée par rapport à r suit bien la relation de proportionnalité (8.3).

ii) Eponge de Menger.

Pfeifer et Avnir (1983) calculent $[V \geq r_i]$ sur l'éponge de Menger, r_i étant la taille des pores générés à la $i^{\text{ème}}$ itération. Notant L la taille linéaire de l'éponge, et reprenant leur calcul pour $[V > r_i]$, on obtient:

$$\frac{[V > r_i]}{L^3} = \sum_{j=1}^{j=i} 7(20^j-1)(3^{-j})^3 = 7/27 \sum_{j=1}^{j=i} (7/27)^{j-1}$$

On reconnaît la somme des termes d'une progression géométrique de raison $7/27$ et, sachant que $D = \text{Log}20/\text{Log}3$, on obtient:

$$\frac{[V > r_i]}{L^3} = 1 - (20/27)^i = 1 - ((1/3)^i)^{3-D} \quad \text{soit} \quad \frac{[V > r_i]}{L^3} = 1 - (r_i/r_0)^{3-D}$$

La forme continue équivalente est, comme pour le cube fractal précédent, l'équation (8.4):

$$[V > r] = L^3(1 - (r/r_{\max})^{3-D})$$

et sa dérivée par rapport à r suit donc aussi la relation de proportionnalité (8.3).

Pour le tapis de Sierpinski, en deux dimensions, on obtient $[V > r] = L^2(1 - (r/r_{\max})^{2-D})$, ce qui est équivalent à (8.4) pour l'analogie tridimensionnel. Ces formules se généralisent à des extensions du tapis de Sierpinski, ou de l'éponge de Menger (voir § 8.3.2 pour des exemples de telles extensions), et donc pour des dimensions fractales quelconques autres que celles de ces deux exemples célèbres.

iii) de Gennes (1985).

Les modèles proposés par de Gennes ne comprennent pas la notion de pores individuels, mais seulement celle de volume poral $[V \leq r]$ situé à une distance inférieure ou égale à r de l'interface solide-pores (r représente alors le rayon de courbure des ménisques délimitant des zones de taille inférieure à r remplies d'un fluide mouillant la surface du solide; on peut

considérer qu'il s'agit d'une taille de pores élémentaires équivalents). La caractérisation de ce volume lorsqu'il est délimité par une surface fractale est:

$$[V \leq r] \sim r^{3-D} l_{\max}^D \text{ (dans un volume } l_{\max}^3 \text{ de référence)} \quad (8.5)$$

$$[V > r] = \phi - [V \leq r] \text{ et } \frac{d[V > r]}{dr} \sim - \frac{d[V \leq r]}{dr} \sim - r^{2-D}$$

Que l'espace poral soit défini à partir d'une surface fractale des pores (Pfeifer, 1983, de Gennes, 1985, $2 < D < 3$) ou non (Tyler et Wheatcraft, 1990, et Rieu et Sposito, 1991b, ne définissent pas un espace poral à partir de l'interface solide-vide), la formule (8.3) est donc vérifiée. Friesen and Mikula (1987) discutent de la signification de D dans (8.3) comme dimension fractale de surface ou de volume poral suivant la valeur de D , comprise ou non entre 2 et 3, mais utilisent dans tous les cas cette expression comme définition de la fractalité pour caractériser des distributions de taille de pores obtenues en porosimétrie au mercure.

Justification de la définition choisie

Une façon d'établir l'expression (8.3) à partir d'une définition plus classique d'un ensemble fractal de pores (cf. annexe B) est proposée par Jullien et Botet (1986, page 51). Dans le même esprit, Sposito (communication personnelle) propose le calcul rapide suivant.

Un ensemble de pores est fractal si le nombre $[N \geq r]$ de pores de taille supérieure ou égale à r varie en loi de puissance avec la taille r des pores.

$$[N \geq r] \sim r^{-D}$$

Le volume $v(r)$ d'un pore de taille r est proportionnel à r^3 , si l'on suppose un facteur de forme géométrique constant.

$$v(r) \sim r^3$$

L'accroissement de volume $\frac{d[V \geq r]}{dr}$ entre r et $r+dr$ est égal à l'accroissement $\frac{d[N \geq r]}{dr}$ du nombre de pores entre r et $r+dr$, multiplié par le volume de chacun de ces pores, approximativement égal à $v(r)$.

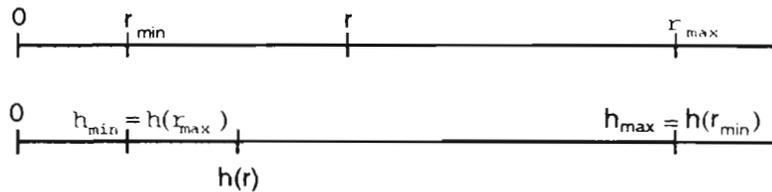
$$\frac{d[V \geq r]}{dr} = \frac{d[N \geq r]}{dr} v(r) \sim - r^{-D-1} r^3 \sim - r^{2-D}$$

Nous considérons donc l'expression (8.3) comme une définition générale d'un espace poral fractal sur laquelle tous les auteurs s'accordent, en faisant référence à D comme à la dimension fractale de l'espace poral.

8.2.2. Expression de $\theta(h)$ dans un espace poral fractal

Le calcul de $\theta(h)$ à partir d'une distribution de taille de pores est fait chez tous les auteurs précédemment cités en utilisant la loi de Laplace sans considérations de connectivité (cf. Chap.5). Nous allons le refaire de cette façon à partir de l'expression (8.3).

Tout d'abord remarquons que les milieux poreux réels sont limités par des échelles de taille minimum et maximum, un fait unanimement souligné par ces mêmes auteurs. Notons r_{\min} et r_{\max} les bornes respectivement inférieures et supérieures du domaine fractal dans un sol, h_{\max} and h_{\min} les valeurs de pressions capillaires associées par la loi de Laplace, inversement proportionnelles à ces tailles de pores. Nous considérons que r_{\min} and r_{\max} sont aussi les valeurs extrêmes de la distribution réelle de pores, c'est-à-dire que le sol est fractal à toutes les échelles de longueur rencontrées.



L'expression du volume cumulé de taille de pores $[V>r]$ résulte de l'intégration de (8.3), que nous redonnons ici en introduisant la constante de proportionnalité positive notée λ .

$$\frac{d[V>r]}{dr} = -\lambda r^{2-D} \quad r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$$

L'intégration introduit une constante d'intégration β (cette constante est omise dans un calcul identique présenté par Ahl and Niemeyer, 1989a), et une constante α égale à $\frac{\lambda}{3-D}$.

$$[V>r] = -\alpha r^{3-D} + \beta$$

r_{\max} étant la borne supérieure de la distribution de pores,

$$[V>r_{\max}] = 0 \Rightarrow \beta = \alpha r_{\max}^{3-D}$$

On en déduit:

$$[V>r] = -\alpha r^{3-D} + \alpha r_{\max}^{3-D} = \alpha r_{\max}^{3-D} \left(1 - \left(\frac{r}{r_{\max}}\right)^{3-D}\right)$$

En posant $B = \alpha r_{\max}^{3-D}$, on obtient:

$$[V>r] = B \left(1 - \left(\frac{r}{r_{\max}}\right)^{3-D}\right) \quad B > 0, r_{\min} < r \leq r_{\max} \quad (8.6)$$

Pour une pression capillaire h , le volume des pores remplis d'eau est égal au volume des pores de taille inférieure ou égale à r ($r \sim 1/h$):

$$[V \leq r] = [V > r_{\min}] - [V > r] = [V > r_{\min}] - B \left(1 - \left(\frac{r}{r_{\max}}\right)^{3-D}\right)$$

Si V_T est le volume total de milieu poreux,

$$\frac{[V \leq r]}{V_T} = \frac{[V > r_{\min}]}{V_T} - \frac{B}{V_T} \left(1 - \left(\frac{r}{r_{\max}}\right)^{3-D}\right)$$

On reconnaît $\theta(h) = \frac{[V \leq r]}{V_T}$ et $\theta_{\max} = \frac{[V > r_{\min}]}{V_T}$.

Notant de plus $A = \frac{B}{V_T}$, on obtient:

$$\theta(h) = \theta_{\max} - A \left(1 - \left(\frac{r}{r_{\max}} \right)^{3-D} \right)$$

Considérant la relation de proportionnalité inverse entre la pression capillaire et la taille des pores, on a:

$$\theta(h) = \theta_{\max} - A \left(1 - \left(\frac{h_{\min}}{h} \right)^{3-D} \right) \quad \text{ou encore}$$

$$\theta(h) + A - \theta_{\max} = A \left(\frac{h_{\min}}{h} \right)^{3-D} \quad A (= \frac{B}{V_T}) > 0, h_{\min} \leq h < h_{\max} \quad (8.7)$$

Cette expression (8.7) est une forme générale pour $\theta(h)$ dans un milieu fractal, dont deux cas particuliers sont les expressions (8.1) et (8.2). En effet,

pour $A=1$, (8.7) est identique à (8.1).

pour $A=\theta_{\max}$, (8.7) est identique à (8.2).

8.2.3. Interprétation des différentes approches d'un espace poral fractal

Comment s'explique la simplification de (8.7) soit en (8.1) soit en (8.2)?

Nous avons d'abord recherché une première source d'explication dans la nature des modèles géométriques utilisés pour représenter l'espace poral du sol. Mais ces modèles sont équivalents dans la mesure où ils peuvent représenter exactement la même distribution de pores, de dimension fractale donnée. Par exemple, on peut choisir un cube fractal de dimension égale à celle de l'éponge de Menger pour représenter une distribution de pores identique (Figures 8.1a et 8.1.b). Ces deux modèles vérifient l'équation (8.4) qui peut être identifiée avec l'équation (8.6) en prenant $B=L^3$. Dans l'expression (8.7) de $\theta(h)$ on a alors $A = \frac{B}{V_T} = \frac{L^3}{V_T}$. Il n'y a donc pas de différence entre ces deux modèles géométriques (pour ce qui est de la distribution de tailles de pores).

En revanche la différence réside dans la manière d'utiliser ces modèles géométriques pour représenter un sol réel et son espace poral.

Modèle de type 1

Dans l'approche de Rieu et Sposito (modèle de type 1, Fig. 8.1) le modèle géométrique représente la totalité du milieu poreux V_T (particules+pores) : $L^3 = V_T$

Il ressort des identifications précédentes que $A = \frac{L^3}{V_T} = 1$ et l'expression (8.7) devient donc (8.1).

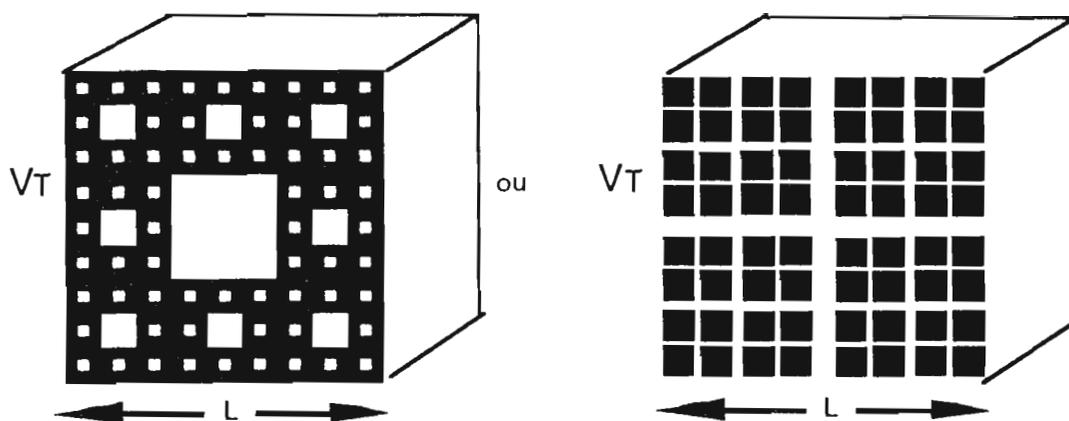


Figure 8.1. modèle 1.

Un nombre fini d'itérations pour représenter à la fois la phase solide (en noir) et la phase vide (en blanc) d'un milieu poreux fractal sur un domaine limité d'échelles de longueur.

a) Eponge de Menger ($D=2.72$)

b) Cube fractal de Rieu et Sposito, 1991b. ($N^{3/2}=8, k=0.898, D=2.72$)

Dans ce type de modélisation, la valeur de r_{\min} est forcément non nulle. En effet $\theta_{\max} = \frac{[V > r_{\min}]}{V_T} = 1 - \left(\frac{r_{\min}}{r_{\max}}\right)^{3-D}$, et si r_{\min} était nul, θ_{\max} serait égal à 1, c'est-à-dire une teneur en eau à saturation égale à 100%! Ceci signifie que le modèle fractal (cube, éponge ou autre) n'est développé que sur un nombre fini d'itérations.

Modèle de type 2

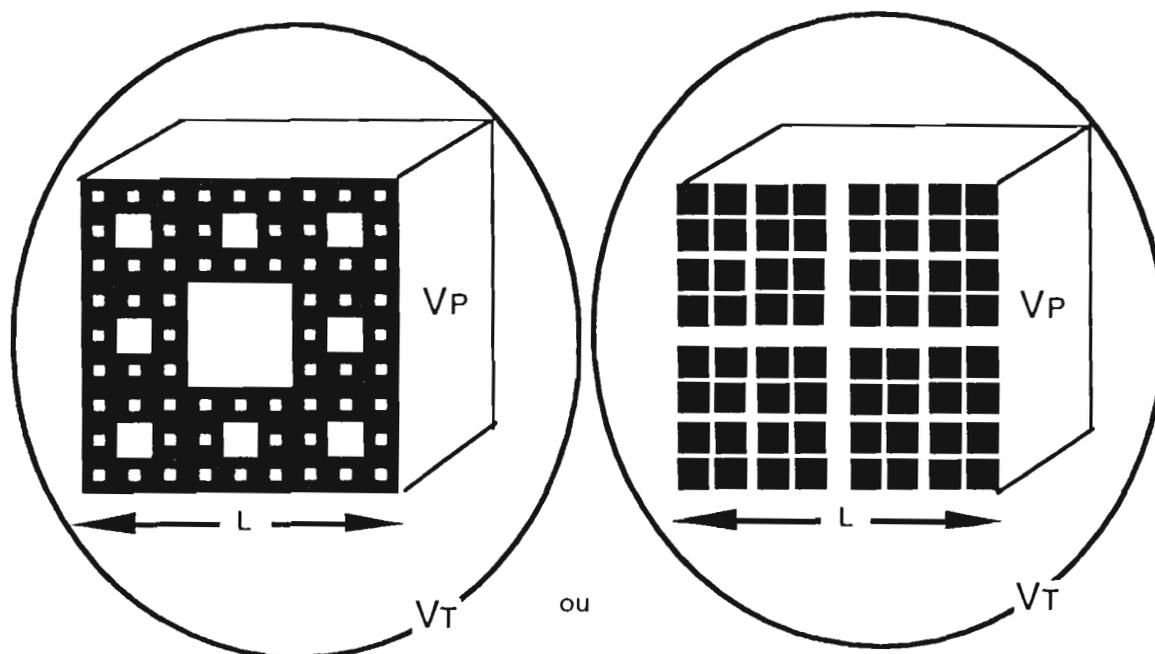


Figure 8.2. modèle 2.

Les premières itérations d'un modèle fractal (infini) qui ne représente que l'espace poral. Les parties noires des représentations graphiques ne servent qu'à imaginer les parois des pores ou encore l'interface solide-vide: elles s'amenuisent avec le nombre d'itérations pour disparaître à l'infini, et le modèle ne représente plus qu'un ensemble de "trous" (pores).

Un second type d'approche (modèle de type 2, Fig.8.2), correspond à l'analyse de Tyler et Wheatcraft (1990). Le modèle fractal ne représente plus la totalité du milieu poreux, mais seulement l'espace poral. Le modèle fractal est développé à l'infini et, si l'on prend l'exemple de l'éponge de Menger, on obtient seulement un ensemble de "trous" dont le volume L^3 est égal au volume poral total V_p .

Les valeurs A et B des expressions (8.6) et (8.7) se calculent alors comme suit.

$$B = L^3 \Rightarrow B = V_p \quad \text{and} \quad A = \frac{V_p}{V_T}$$

où V_T représente le volume total de poreux associé à V_p .

On a donc $A = \theta_{\max}$ et on a vu que dans ce cas l'expression (8.7) devient identique à (8.2).

Dans cette approche, r_{\min} est nul (On peut le constater directement à partir de l'expression (8.2); en effet, pour cette expression, $\theta(h) = 0 \Leftrightarrow h \rightarrow \infty \Leftrightarrow r \rightarrow 0$). Le domaine fractal s'étend à l'infini du côté des petites échelles de longueur.

Comparaison entre les modèles de type 1 et 2

La différence entre les approches précédentes ne réside pas dans les particularités des différents modèles géométriques, mais dans un type de modélisation conceptuellement différent. Le premier type de modélisation représente l'ensemble du milieu poreux par un modèle fractal incomplètement développé. La deuxième approche ne modélise que l'espace poral, l'espace solide n'est pas représenté: il ne s'agit plus de représenter la géométrie du milieu poreux, mais seulement de représenter par un modèle géométrique la distribution de taille des pores dans ce milieu.

Dans les modèles étudiés par de Gennes, la phase solide est présente, sous forme d'une paroi limitant l'espace poral. Il s'agit d'une modélisation très théorique, qui exprime la forme de $\theta(h)$ dans un milieu délimité par une surface fractale parfaite (i.e. infiniment développée). La valeur de r_{\min} tend aussi vers 0, mais il s'agit alors de la taille minimum des aspérités de la paroi du solide. La valeur de $[V \leq r]$, volume des zones occupées par le fluide mouillant (ici l'eau) à la pression capillaire $h \sim 1/r$, est proportionnel à r^{3-D} (cf. formule 8.5): $[V \leq r] \sim r^{3-D}$ ou encore $\theta(h) \sim h^{D-3}$. A cet égard, les travaux précédemment cités (Rieu et Sposito, 1991b, Tyler et Wheatcraft, 1990) sur des modèles géométriques plus simples que ceux utilisés par de Gennes car les pores sont des fractures lisses et régulières, retrouvent bien l'expression générale $\theta(h) \sim h^{D-3}$ lorsque le modèle fractal est développé à l'infini. Mais les modèles géométriques utilisés par de Gennes sont locaux, et s'appliquent à une zone représentative d'une interface solide-vide fractale, quel que soit l'objet fractal étudié; il ne s'agit pas de modèles complets et concrets de structures poreuses à proprement parler.

Modèle de type 3

On peut se demander s'il existe une construction géométrique de l'ensemble du milieu poreux, comme le réalise le modèle de type 1, dont l'espace poral exhibe la distribution fractale infinie de pores telle qu'elle est décrite par le modèle de type 2. Nous avons alors imaginé un modèle de type 3. Ce modèle représente les solides et les pores sous forme d'une éponge de Menger modifiée, de taille linéaire L , où $L^3 = V_T$ comme dans le modèle de type 1, mais qui peut être développée à l'infini comme dans le modèle de type 2. Dans l'éponge de Menger modifiée (Fig.8.3), un "trou" ne représente plus un pore mais une particule* entourée par un pore. Chaque "trou" cubique de l'éponge classique, de taille linéaire r et de volume v est transformé en une particule par une homothétie de rapport k ($0 < k < 1$) (et de centre situé au milieu du trou cubique); l'espace restant est un pore d'épaisseur $(1-k)r/2$ et de volume $(1-k^3)v$.

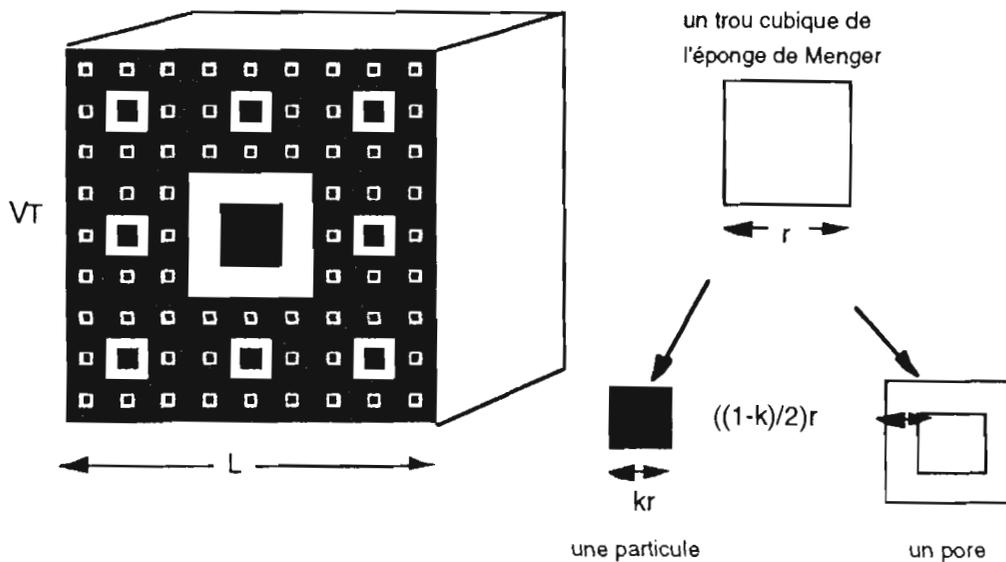


Figure 8.3. modèle 3. Une éponge de Menger modifiée

La distribution du volume des pores en fonction de leur taille est directement proportionnelle à celle des pores classiques de l'éponge de Menger; elle suit donc l'expression (8.4), à condition d'effectuer un changement de variable de r à $(1-k)r/2$.

$$[V > r] = (1-k^3) L^3 \left(1 - \left(\frac{r}{r_{\max}}\right)^{3-D}\right) \quad (8.8)$$

Il s'ensuit, après identification avec l'équation (8.6), que

$$B = (1-k^3) L^3 \Rightarrow B = (1-k^3) V_T \Rightarrow A = 1-k^3$$

ce qui fournit la valeur de A dans l'expression (8.7) que nous redonnons ici:

$$\theta(h) + A - \theta_{\max} = A \left(\frac{h_{\min}}{h}\right)^{3-D}$$

* On entend ici par particule un élément solide non fragmentable, dont la taille peut être extrêmement variable (cf. chap.1, Fig.1.1)

Si l'on développe l'éponge (modifiée) jusqu'à l'infini, lorsque $r \rightarrow 0$, le volume total des pores est $[V > 0] = (1 - k^3) L^3 = (1 - k^3) V_T$ d'après (8.8). D'où $\theta_{\max} = \frac{[V > 0]}{V_T} = 1 - k^3 = A$. Dans ce cas, on retrouve le résultat du deuxième type de modélisation, à savoir que (8.7) se simplifie en (8.2), car θ_{\max} est égal à A .

Si l'on considère que la distribution de taille des pores possède une borne inférieure r_{\min} strictement positive, on arrête le procédé de génération de pores au bout d'un nombre fini d'itérations. La porosité totale obtenue ou encore θ_{\max} est alors inférieure à la valeur $A = 1 - k^3$ que l'on aurait obtenue en poursuivant à l'infini ($\theta_{\max} < A < 1$) et l'expression (8.7) reste sous sa forme générale.

8.2.4. Discussion

Espace poral fractal

Nous avons établi que les expressions analytiques (8.1) et (8.2) de $\theta(h)$ utilisées pour caractériser un espace poral fractal étaient deux cas particuliers de l'expression générale (8.7):

$$\theta(h) + A - \theta_{\max} = A \left(\frac{h_{\min}}{h} \right)^{3-D}$$

où D est la dimension fractale de l'espace poral et A est la valeur de la porosité totale que l'on obtiendrait si l'on développait le modèle fractal à l'infini vers les petites échelles de longueur* ($A \leq 1$).

S'il existe dans la réalité une borne inférieure de taille à la distribution de pores ($r_{\min} \neq 0$), la porosité effectivement développée est inférieure à A , $\theta_{\max} < A$, et la formule (8.7) ne se simplifie pas. A condition d'imaginer l'existence de pores infiniment fins (i.e. $r_{\min} = 0$), θ_{\max} est égal à A , et la formule générale (8.7) devient identique à (8.2). La différence entre les deux cas particuliers d'expressions de $\theta(h)$ provient donc en partie de la notion de borne inférieure pour la distribution des tailles de pores. Si une telle limite existe dans la nature, et pour un espace poral parfaitement fractal, l'expression (8.7) garde une forme générale a priori non simplifiable. L'estimation de la dimension fractale de l'espace poral à partir de données de rétention (θ, h) réelles doit alors se faire par ajustement de l'expression (8.7) et introduit un nouveau paramètre, A (Voir § 8.4).

Une deuxième source de différence entre (8.1) et (8.2) provient d'une utilisation très différente de modèles fractals équivalents d'un point de vue mathématique pour représenter soit l'ensemble de la structure poreuse (c'est le cas du modèle de type 1 où A est forcément égal à 1),

* Le raisonnement du paragraphe précédent s'applique au cas général: si r tend vers 0, $B = [V > 0]$ dans la formule (8.6) et lorsque h tend vers l'infini, θ tend vers 0 et A vers θ_{\max} dans la formule (8.7)

soit seulement l'espace poral (c'est le cas du modèle de type 2 où la valeur de A n'est pas imposée par une contrainte géométrique).

Le modèle de type 3 permet de représenter à la fois les phases solide et vide, comme le modèle de type 1. Il permet d'imaginer une distribution de tailles de pores infinie, comme dans le modèle de type 2, tout en conservant dans ce cas la représentation de la phase solide, contrairement au modèle de type 1). Il permet aussi d'imaginer une distribution de tailles de pores bornée (dans ce cas, $\theta_{\max} < A < 1$).

Dans le paragraphe suivant (§8.3), nous construisons des structures simulées suivant ce modèle de type 3 (il s'agit d'un deuxième type de structures fractales simulées), et nous vérifions ses propriétés par simulation. Nous établissons aussi une liaison entre la dimension fractale exprimée par la courbe de rétention et les dimensions fractales calculées sur les distributions d'éléments solides d'un sol.

Espace poral fractal sur un domaine limité d'échelles de longueur

Jusqu'à maintenant, nous avons supposé que l'ensemble de la distribution de pores était fractal: r_{\min} and r_{\max} étaient à la fois les bornes du domaine fractal et de la distribution des pores. Or plusieurs études (cf. Chap. 2) semblent montrer que le domaine fractal ne couvrirait qu'une portion limitée $[(r_{\min})_f, (r_{\max})_f]$ de la distribution des pores.

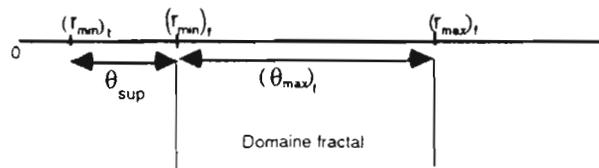


Figure 8.4. Extension limitée du domaine fractal.

Supposons alors qu'il existe en dessous de $(r_{\min})_f$ des pores non fractals, correspondant à une porosité remplie d'eau pour $h > (h_{\max})_f$ soit une teneur en eau supplémentaire θ_{sup} (Fig. 8.4). La teneur en eau totale Θ est alors égale à la somme de θ_f et de θ_{sup} .

$$\Theta(h) = \theta_f(h) + \theta_{\text{sup}} \quad \text{et} \quad \Theta_{\max} = (\theta_{\max})_f + \theta_{\text{sup}}$$

Puisque $\theta_f(h) + A - (\theta_{\max})_f = A \left(\frac{h_{\min}}{h}\right)^{3-D}$, et en remplaçant $\theta_f(h)$ par $\Theta(h) - \theta_{\text{sup}}$, on obtient

$$\Theta(h) + A - \Theta_{\max} = A \left(\frac{h_{\min}}{h}\right)^{3-D}$$

L'expression (8.7) reste alors valide pour Θ mais ne s'applique bien sûr que pour $h \in [h_{\min}, (h_{\max})_f]$.

S'il existe aussi des pores non fractals au-dessus de r_{\max} , l'expression de $\Theta(h)$ est modifiée en dessous de $(h_{\min})_f$, mais reste toujours valable sur le domaine limité $[(h_{\min})_f, (h_{\max})_f]$.

Dans le cas où $(\theta_{\max})_f = A$, on a alors $\Theta_{\max} > A$ et la valeur de A ne peut plus être directement comparée à la valeur de teneur en eau à saturation.

8.3. SIMULATION D'UN DEUXIÈME TYPE DE STRUCTURES DE SOL FRACTALES

Nous avons utilisé la méthode de construction de structures simulées décrite au chapitre 4 pour générer des structures suivant le modèle fractal de type 3 (éponge de Menger modifiée).

8.3.1. Construction d'un ensemble fractal de zones de fragmentation

Turcotte (1986) propose un modèle de fragmentation incomplète d'un matériau, (cf. Chap.2), en trois dimensions, où, à toutes les échelles, chaque fragment se divise en n parties avec une probabilité p . Lorsque cette probabilité est bien constante, Turcotte montre que la distribution du nombre de fragments en fonction de leur taille est fractale, de dimension D . Il étudie un exemple où $n=8$ mais son calcul de D se généralise pour n quelconque en $D = \text{Log}(np) / \text{Log}(n^{1/3})$ ($1/n \leq p \leq 1$, $0 \leq D \leq 3$).

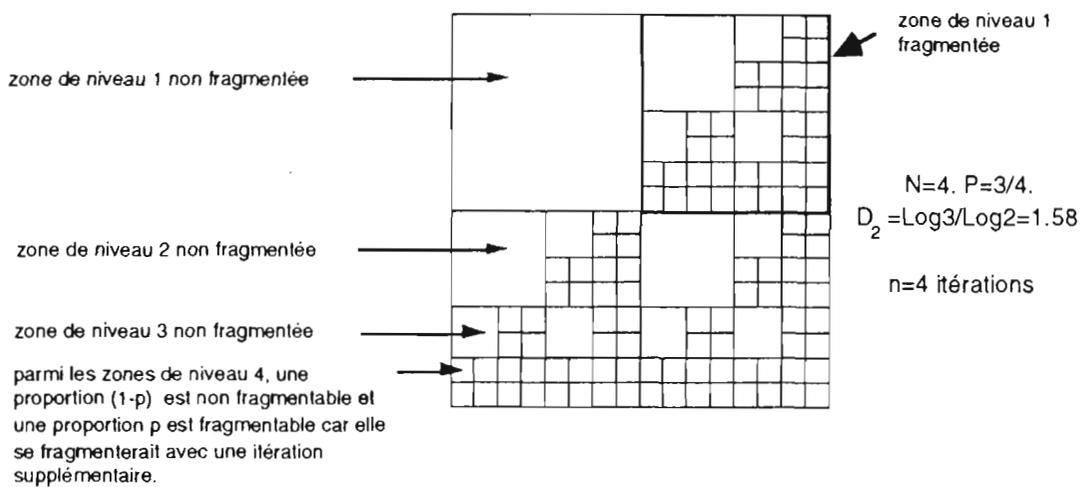


Figure 8.5. Ensemble fractal de zones de fragmentation.

Une construction bidimensionnelle qui s'inspire de ce modèle est la suivante: nous fragmentons, comme pour toutes nos structures simulées, une zone initiale en N sous-zones de fragmentation de niveau 1. Puis, à l'itération suivante, seulement une proportion p de ces zones ($1/N \leq p \leq 1$) se divisent en N sous-zones et les $(1-p)N$ zones restantes ne se fragmentent pas. A chaque niveau de fragmentation, le même procédé est réitéré. Les zones de niveau i qui ne se fragmentent pas au niveau $i+1$ ne se fragmentent pas non plus aux niveaux ultérieurs. On parle de zones de

niveau i non fragmentées. Parmi les zones du dernier niveau de simulation n , certaines zones sont fragmentables car elles se seraient fragmentées avec une itération supplémentaire, d'autres sont non fragmentables (Fig.8.5).

La distribution des tailles de zones ainsi obtenues à l'issue d'un nombre infini d'itérations est fractale, de dimension D_2 , au sens où, $N(l)$ étant le nombre de zones de taille linéaire l ,

$$N(l) \sim l^{-D_2} \quad \text{avec} \quad D_2 = \frac{\text{Log}(N_p)}{\text{Log}(N^{1/2})} \quad 0 \leq D_2 \leq 2 \quad (8.9)$$

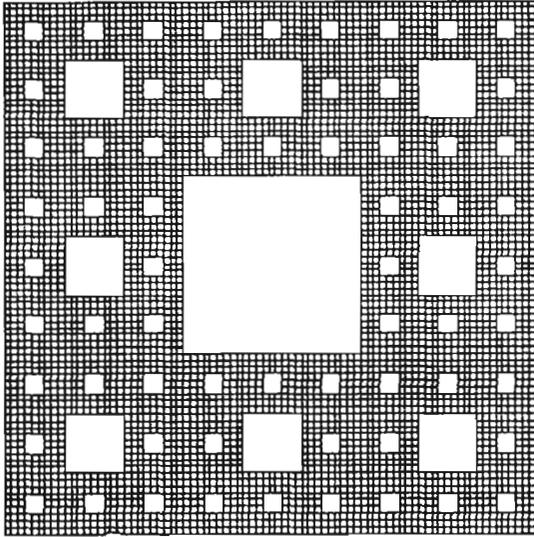
Pour des zones carrées régulières (Figures 8.5, 8.7a) et un processus infini de fragmentation, la relation de proportionnalité (8.9) est exacte (on peut constater que pour ce fractal parfaitement autosimilaire, chaque carré de côté x donne naissance à N_p zones similaires de côté $xN^{1/2}$, cf. annexe B)

Nous resterons ici dans le cas purement bidimensionnel où $D_3 = D_2 + 1$ (Chap4,§4.5) et la dimension calculée pour ce modèle est:

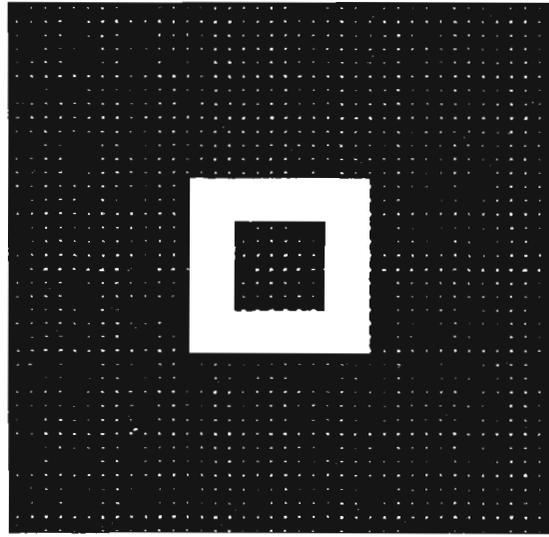
$$D_{\text{calc}} = 2 \frac{\text{Log} N_p}{\text{Log} N} + 1 \quad (8.10)$$

Remarquons que, dans le cas particulier de $N=9$ zones carrées, $p=8/9$, et en imposant une répartition spatiale précise où la zone non fragmentable est la zone centrale, on reconstruit les premières itérations du tapis de Sierpinski, pour lequel $D_2=1.89$ (Fig.8.7.a).

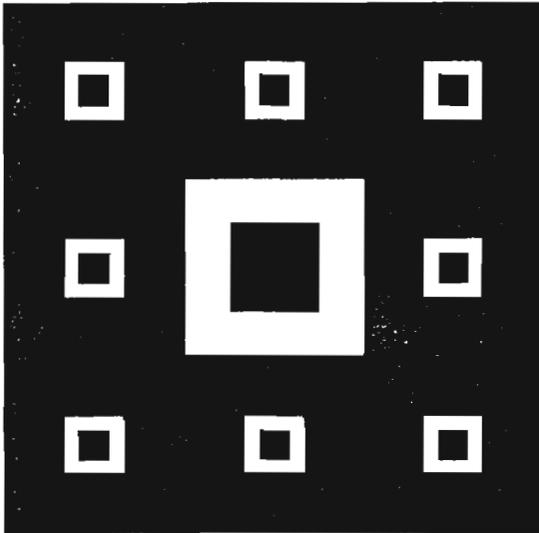
Dans le cas de zones de fragmentation aléatoires (Fig. 8.6.a, tirage au sort poissonnien des germes de fragmentation, cf.Chap.4) on vérifie aussi approximativement par simulation la relation (8.9). Sur notre construction informatique, le processus de fragmentation ne peut pas être poursuivi à l'infini pour des raisons évidentes. On peut constater que la relation (8.9) est assez bien vérifiée sur l'ensemble des zones non fragmentées de niveau inférieur au dernier niveau simulé n et des zones non fragmentables de niveau n , c'est-à-dire à condition de faire abstraction des zones de niveau n fragmentables. Pour cela nous avons effectué un ajustement linéaire de $\text{Log} N(i)$ par rapport à $\text{Log} l(i)$, où $N(i)$ est le nombre de zones non fragmentées ou non fragmentables de niveau i et $l(i)$ la taille linéaire moyenne de ces zones (Fig 8.5.c). Plus le nombre de niveaux de fragmentation n est élevé, meilleur est l'ajustement. Par contre, si l'on inclut les zones de niveau n fragmentables pour travailler sur une partition complète du plan en zones de fragmentation, l'estimation de D est notablement modifiée (2.21 au lieu de 1.76 pour l'exemple cité), et ce d'autant plus que n est faible. Nous accorderons une attention particulière dans tout ce qui suit à la présence de cette "queue de distribution" de zones non fractale, due à la troncature au dernier niveau de simulation d'un processus itératif théoriquement infini.



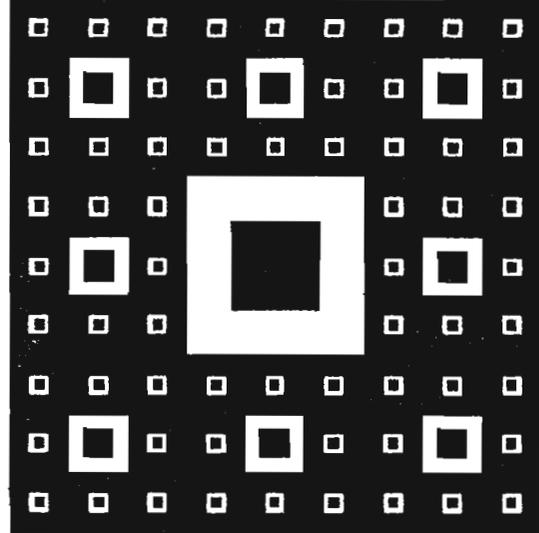
(a) $n=4$



(b) $i=1$



(c) $i=2$



(d) $i=3$

Figure 8.7. Un cas particulier du modèle de fragmentation partielle suivant une probabilité de fragmentation p constante. $N=9$, $p=8/9$. A chaque itération, une sous-zone sur 9, la zone centrale, est non fragmentable. $D=\text{Log}8/\text{Log}3=1.89$.

a) Les premières itérations d'une distribution de zones fractale analogue au Tapis de Sierpinski. $n=4$. Les zones non fragmentées de niveau 1, 2, et 3 apparaissent nettement (carrés blancs). Les zones de niveau 4, fragmentables ou non, forment le quadrillage du fond.

b)c)d) Espace poral fractal (en blanc) de niveau i créé en effectuant une transformation homothétique de rapport $k=0.5$ sur chaque zone non fragmentée ou non fragmentable de niveau inférieur ou égal à i

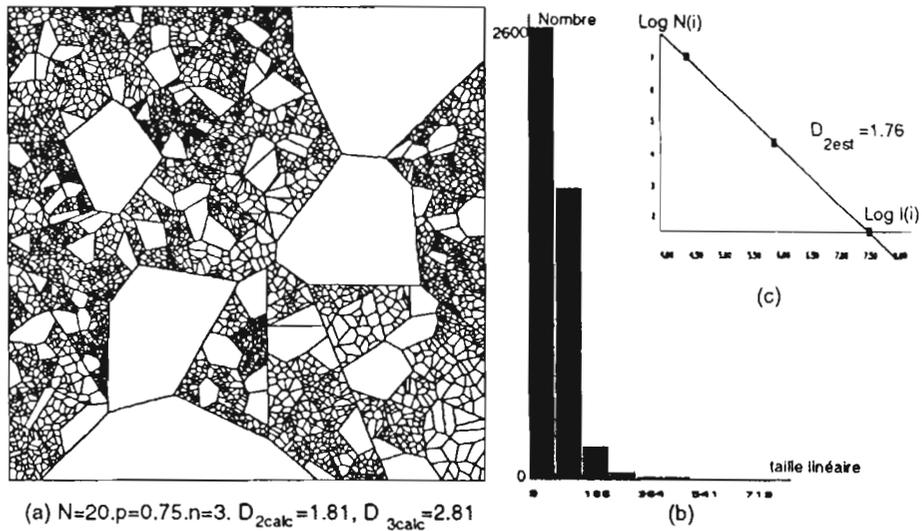


Figure 8.6. a) Zones de fragmentation aléatoires ($n=3$ niveaux).
 b) Distribution en nombre de l'ensemble des zones non fragmentées de niveau 1 et 2 et de toutes les zones de niveau 3
 c) Ajustement Log/Log du nombre de zones non fragmentées ou non fragmentables de niveau i en fonction de leur taille moyenne.

A condition d'imaginer des itérations à l'infini, le procédé de fragmentation partielle suivant une probabilité p de fragmentation fournit donc un procédé général de construction d'un ensemble fractal de dimension quelconque. Il s'agit ici pour l'instant de distributions de zones de fragmentation qui peuvent représenter des fragments de roches après une explosion (Turcotte, 1986), ou les agrégats du sol (Perfect et Kay, 1991). Ce modèle peut aussi représenter les particules du sol (Tyler et Wheatcraft, 1989, 1992), ou bien encore les pores du sol (Tyler et Wheatcraft, 1990); nous lui avons associé une structure poreuse qui représente à la fois les éléments solides et les pores.

8.3.2. Structures fractales de particules et de pores

La création d'éléments solides et de pores à partir d'un ensemble hiérarchique de zones de fragmentation (ou squelette, cf. Chap.4) et de transformations homothétiques successives peut se faire de multiples façons. Notons que dans tout ce chapitre, le centre des homothéties est choisi au centre de gravité de chaque zone de fragmentation.

a) Sur le squelette présenté sur la figure 8.6, nous avons appliqué, de façon classique, des homothéties de rapport constant à chaque niveau de fragmentation (au niveau 1 on applique à toutes les zones, fragmentables ou non, une homothétie de rapport $k_1 \neq 1$; au niveau 2 on applique à toutes les zones de niveau 2 ainsi qu'aux zones de niveau 1 non fragmentées une deuxième homothétie de rapport $k_2 = k_1 \dots$ et ainsi de suite à chaque itération). La structure

poreuse obtenue est celle de la figure 8.8: on y voit, au dernier niveau simulé n , un ensemble de particules de différentes tailles (allant des particules les plus fines aux éléments grossiers); ces particules sont associées aux zones non fragmentées de niveau inférieur à i ($1 \leq i \leq n$) et à l'ensemble des zones de niveau n ; on y identifie des regroupements de particules en agrégats, associés aux zones fragmentées de niveau inférieur à n .

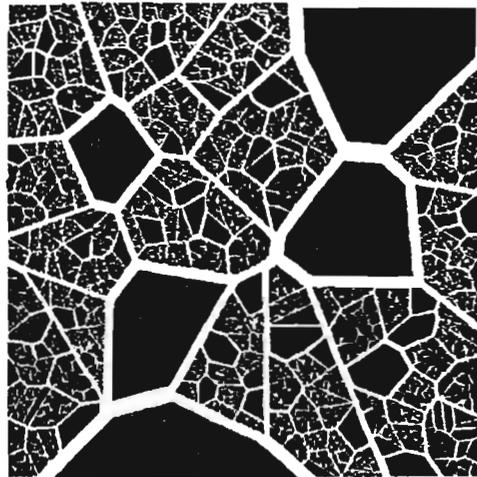
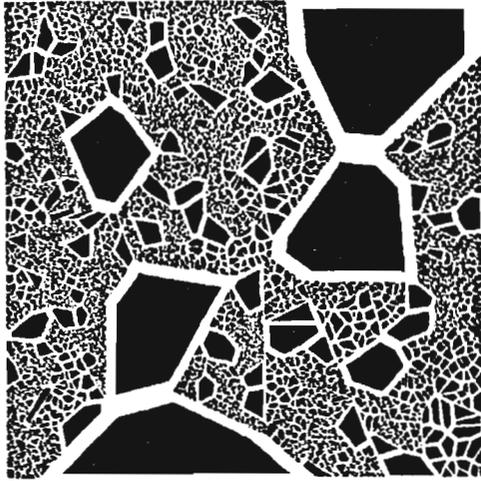


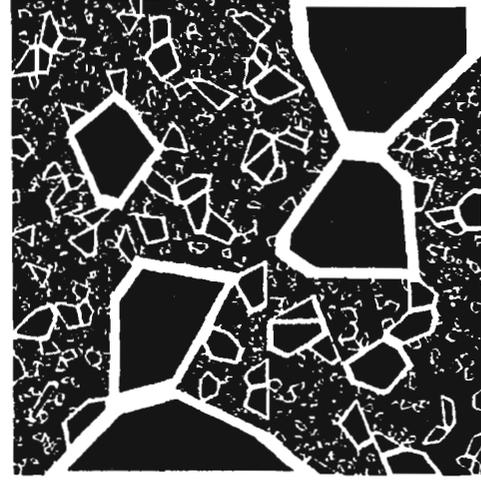
Figure 8.8. Une structure poreuse que l'on peut associer au squelette de la figure 8.6.a en effectuant à chaque niveau des homothéties successives de rapport $k_1=k_2=k_3=0.94$

b) Un deuxième type de structure est construit en choisissant tous les rapports d'homothéties k_i égaux à 1 à tous les niveaux de fragmentation sauf au dernier où $k_n=k$: ceci revient à appliquer une homothétie de rapport k seulement aux zones non fragmentées de niveau inférieur à n et à toutes les zones de niveau n , fragmentables ou non. Il en résulte que les agrégats de particules, bien que restant présents par construction, ne sont pas visibles; on peut le constater sur la figure 8.9.a, où la structure présentée est associée au même squelette (cf. Fig.8.6) que la structure de la figure 8.8 et présente les mêmes particules mais une distribution de pores différente. Nous parlerons de structures particulières. Ces structures poreuses sont équivalentes à celles que l'on aurait pu générer sur un seul niveau de fragmentation avec une distribution particulière des germes de fragmentation et une homothétie de rapport k sur chaque zone: leur porosité totale est égale à $1-k^2$ (cf. formules (4.2) ou (4.7)).

Il sera fait référence à ce type de structure sous le nom de "structure particulière semi-fractale" parce qu'elle exhibe une distribution de particules et une distribution de pores fractales sur un domaine limité d'échelles de longueur.



(a) Structure particulaire semi-fractale: une homothétie de rapport $k=0.83$ appliquée sur chacune des zones non fragmentées de niveau 1 et 2 et sur chaque zone de niveau $n=3$



(b) Espace poral fractal de niveau 3: une homothétie de rapport $k=0.83$ appliquée sur chacune des zones de niveau 1 et 2 non fragmentées et sur chaque zone non fragmentable de niveau $n=3$

Figure 8.9. Structure particulaire semi-fractale (a) espace poral semi-fractal généré à partir du squelette de la figure 8.5 .(b) sous espace poral fractal associé.

- Distribution des particules.

Le nombre de particules est égal au nombre de zones de fragmentation auxquelles elles sont associées et la taille d'une particule est directement proportionnelle à la taille de la zone dont elle dépend (cf.Fig.8.3). La distribution des particules est donc l'homothétique de celle des zones: elle est fractale sur un domaine réduit qui exclut la "queue de distribution", correspondant aux zones qui auraient dû se refragmenter si les itérations avaient été poursuivies (on vérifie de la même façon que pour les zones l'ajustement de la relation (8.9)).

- Distribution des pores.

L'espace poral d'une telle structure (Fig.8.9.a) est la réunion de deux domaines:

- un domaine fractal ou "espace poral fractal de niveau n ": c'est l'ensemble des pores créés à partir de zones non fragmentées de niveau inférieur à n et des zones non fragmentables de niveau n . Ce domaine poral est simulé en choisissant un rapport d'homothétie égal à k pour les zones non fragmentées ou non fragmentables et à 1 pour les autres. Il est représenté sur figure 8.9.b. On peut de la même façon définir un espace poral fractal de niveau i à chaque itération i (cf.Fig. 8.7 b,c et d). Nous montrerons plus loin qu'il s'agit d'un espace poral fractal de même dimension que la distribution des particules.

- un domaine complémentaire: c'est l'ensemble des pores créés à partir des zones de fragmentation correspondant à la "queue de distribution" non fractale (ce sont les pores représentés sur la figure 8.9.a et absents sur la figure 8.9.b)

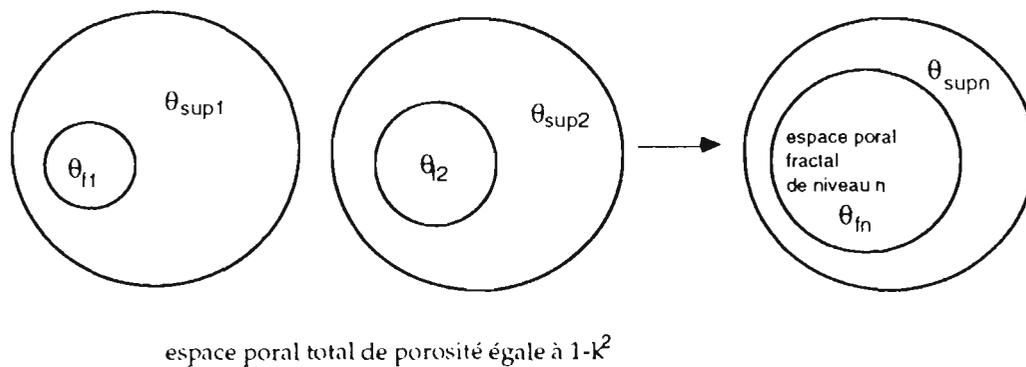


Figure 8.10. Extension du domaine fractal dans une structure particulière semi-fractale suivant le nombre de niveaux de fragmentation n

La figure 8.10 représente la part grandissante de l'espace poral fractal dans l'espace poral total lorsque le nombre de niveaux de fragmentation n augmente. Nous allons vérifier par simulation le caractère fractal annoncé (La distribution des pores de cet espace est fractale parce que c'est approximativement l'homothétique de la distribution fractale des zones de fragmentation; approximativement seulement parce que la transformation homothétique d'une zone de fragmentation génère une "ceinture porale" (Fig.8.3) dont la taille est proportionnelle à la celle de la zone; mais un pore défini par notre construction n'est pas cette ceinture porale, c'est l'espace ménagé entre deux particules adjacentes (Chap.4, Fig.4.5)).

8.3.3. Espace poral fractal et expression analytique de $\theta(h)$

Soit n le dernier niveau de fragmentation de notre construction. Nous étudierons d'abord seulement le domaine fractal. Puis, suivant les cas,

- i) nous considérerons que l'espace poral total se réduit à cet espace poral fractal de niveau n incomplètement développé (Ex Fig.8.9.b)
- ii) nous imaginerons que cet espace ne représente que les premiers niveaux d'une "structure fractale infinie" de particules et de pores (Ex Fig.8.9.b extrapolée).
- iii) nous étudierons les structures particulières semi-fractales dont l'espace poral total est la réunion de l'espace poral fractal de niveau n et des pores supplémentaires associés aux zones de niveau n fragmentables (Ex Fig.8.9.a).

i) Nous considérons que l'espace poral fractal de niveau n représente à lui seul la totalité d'une distribution de pores réelle.

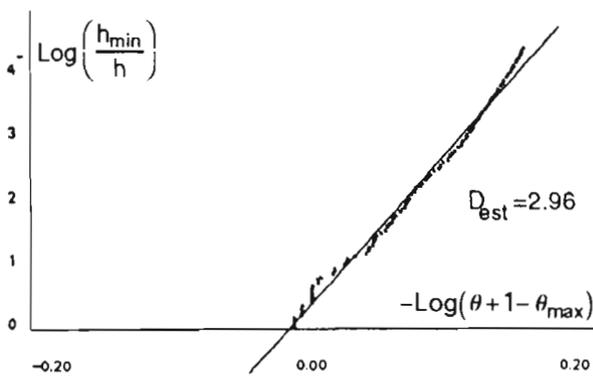
On peut calculer comme indiqué au chapitre 5 la teneur en eau θ_n des pores remplis d'eau à la pression capillaire h , en négligeant toute condition d'accessibilité des pores, puis tester les expressions analytiques (8.1) et (8.2) sur les valeurs (θ_n, h) obtenues (Fig.8.11 a et b). Malgré les

bons coefficients R^2 de régression, aucune n'est satisfaisante et ne permet de retrouver la dimension fractale attendue, c'est-à-dire la dimension fractale calculable dans le cas de zones de fragmentation régulières et donnée par la formule (8.10): $D_{calc} = \text{Log}(N_p) / \text{Log}(N^{1/2}) + 1$.

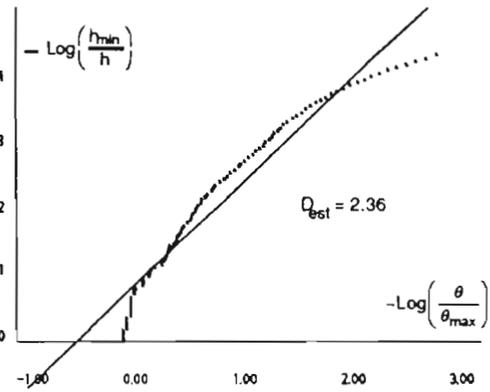
Par contre l'expression (8.7) s'ajuste très bien (Fig. 8.11 c) * :

$$\theta_n(h) + A - (\theta_{max})_n = A(h_{min}/h)^{3-D}$$

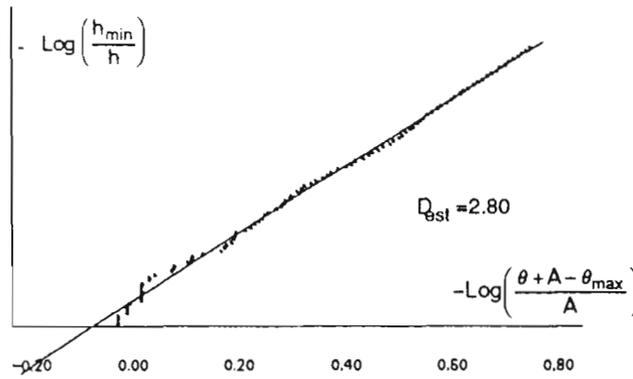
et la dimension fractale estimée D_{est} est très proche de D_{calc} . Nous connaissons ici la valeur de A qui est égale à la porosité totale que nous aurions obtenue pour un modèle fractal développé à l'infini (cf. calculs théoriques du paragraphe 8.2), soit $1-k^2$ (cf. Fig. 8.10).



(a) expression (8.1) (97 points, $R^2=0.98$, $D_{est}=2.96$)



(b) expression (8.2) (97 points, $R^2=0.93$, $D_{est}=2.36$)



(c) expression (8.7) (97 points, $R^2=0.99$, $D_{est}=2.80$)

Figure 8. 11. Ajustement des expressions (8.1), (8.2) et (8.7) sur les données simulées sur l'espace poral de la figure 8.9.b. $D_{calc}=2.81$

* Précisions sur les "bons ajustements":

Pour des zones de fragmentation générées aléatoirement et donc de tailles variables, il est préférable que le nombre $N(1-p)$ de sous-zones non fragmentables à l'intérieur d'une zone donnée ne soit pas trop faible. Dans ces conditions, ayant choisi différents jeux de valeurs (N,p) telles que $N(1-p) > 3$, et tels que la dimension calculée D_{calc} est comprise entre 2 et 3, nous avons effectué 100 simulations pour des réalisations quelconques de structure. Pour une réalisation donnée et environ 100 points (θ,h) simulés, le coefficient de corrélation R^2 se situe autour de 0.98, et l'écart moyen $|D_{est} - D_{calc}|$ est d'autant plus faible que le nombre total de zones est important. Il est de l'ordre de 0.03 pour un nombre de zones de l'ordre de 1000, ce qui est plus élevé que dans le cas des structures fractales en agrégats emboîtés (cf. chap.5.§1).

(ii) Si l'on imagine maintenant une structure fractale infiniment développée en faisant tendre n vers l'infini, il faut rajouter aux valeurs de teneurs en eau simulées sur l'espace poral fractal de niveau n la teneur en eau θ_{SUP} d'une porosité supplémentaire non représentée égale à $(1-k^2) - (\theta_{max})_n^*$, porosité plus fine et remplie d'eau aux pressions h simulées

Aux valeurs simulées $\theta_n(h)$, on ajoute alors θ_{SUP} :

$$\theta_{\infty}(h) = \theta_n(h) + \theta_{SUP} \text{ et } (\theta_{max})_{\infty} = 1 - k^2$$

La relation (8.7) étant vérifiée par simulation pour $\theta_n(h)$, elle est vérifiée de la même façon, sur le domaine simulé de pressions capillaires, pour $\theta_n(h) + \theta_{SUP}$ c'est-à-dire $\theta_{\infty}(h)$:

$$\theta_{\infty}(h) + A - (\theta_{max})_{\infty} = A(h_{min}/h)^{3-D}$$

Mais puisque $(\theta_{max})_{\infty} = 1 - k^2 = A$, (8.7) se simplifie ici en (8.2).

Sur le domaine non simulé de pressions capillaires, il est logique de penser que l'expression (8.7) (i.e.8.2), qui est vérifiée pour toutes les valeurs de n testées, se généralise par passage à la limite.

iii) Cas des "structures particulières semi-fractales"

Si le processus de fragmentation est interrompu au niveau n mais complété par la porosité du domaine non fractal des structures semi-fractales (Fig.8.9.a), il se rajoute aux valeurs $\theta_n(h)$ calculées sur l'espace poral fractal de niveau n une teneur en eau supplémentaire θ_{SUP} qui fournit encore le complément de $(\theta_{max})_n$ à $(1-k^2)$ (Fig.8.10).

Tant que la porosité non fractale correspondant aux pores les plus fins de la structure simulée est remplie d'eau, on peut appliquer un changement de variable identique à celui présenté en ii): en posant $\Theta(h) = \theta_n(h) + \theta_{SUP}$, on constate que si la relation (8.7) est vérifiée pour $\theta_n(h)$, elle l'est aussi pour $\Theta(h)$, et l'on obtient

$$\Theta(h) + A - \Theta_{max} = \Theta_{max}(h_{min}/h)^{3-D}$$

L'expression (8.7) est conservée et se simplifie encore en (8.2). En effet $\Theta_{max} = A$ comme précédemment, car la porosité totale Θ_{max} est égale à celle qu'un modèle parfaitement fractal aurait développée.

Par opposition au cas précédent, la porosité à laquelle correspond θ_{SUP} est représentée et mesurable, et l'on peut effectuer directement l'ajustement sur les données (Θ, h) calculées sur la structure simulée. L'expression (8.7) ou (8.2) n'est alors vérifiée que pour les plus fortes valeurs de pression capillaire correspondant au domaine fractal: à condition de tronquer la courbe (Θ, h) pour les faibles valeurs de Θ associées au domaine non fractal, l'expression analytique (8.2) s'ajuste très bien (Fig. 8.12).

* Si l'on faisait tendre n vers l'infini, l'algorithme de partition itérative de l'espace générerait des zones de fragmentation, des pores et des particules de plus en plus petits, mais il s'agirait toujours d'une partition de l'espace et une homothétie de rapport k créerait une porosité totale $(\theta_{max})_{\infty}$ finie toujours égale à $(1-k^2)$.

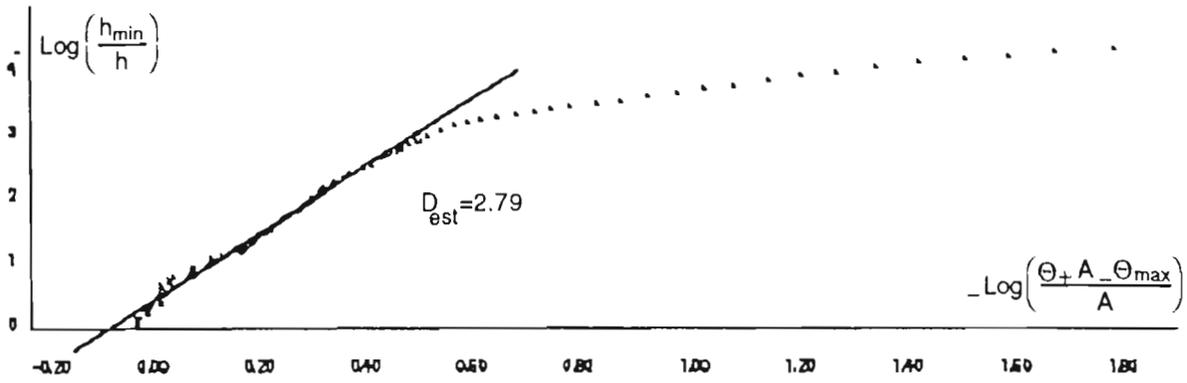
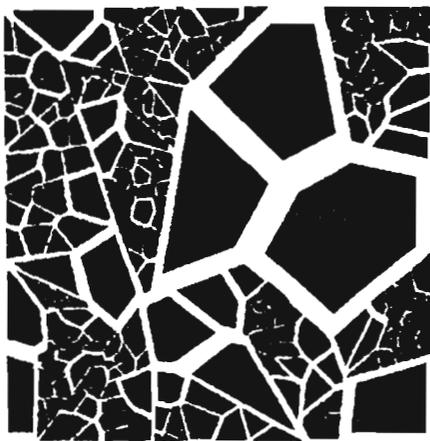


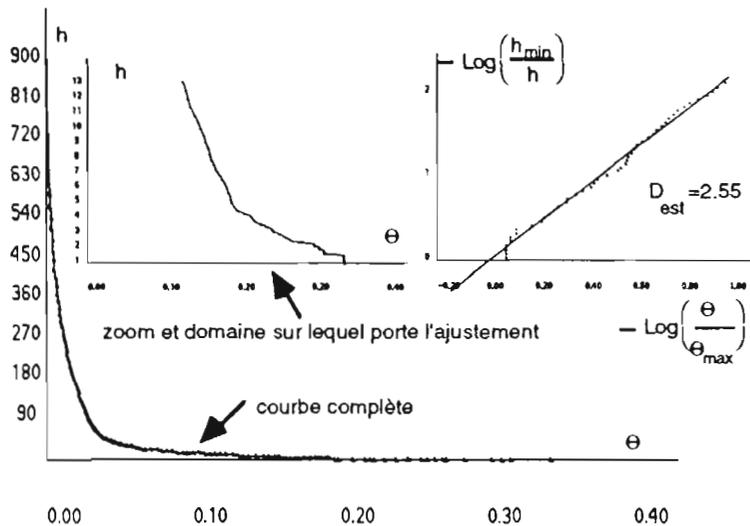
Figure 8.12. Ajustement de l'expression (8.7) (équivalente à (8.2) car $A = \Theta_{\max}$) sur les données simulées sur la structure de la figure 8.8.a (à comparer avec Fig.8.11c). $D_{\text{calc}} = 2.81$

La troncature effectuée dans l'exemple choisi (Fig.8.9.a) est très importante: le domaine fractal correspond aux valeurs de teneurs en eau supérieures à 0.20, pour une teneur en eau maximale de 0.31. Sur la structure semi-fractale simulée de la figure (8.13), avec 5 niveaux de fragmentation, le domaine fractal est plus important.



$N=10, p=0.6, n=5, D_{\text{calc}}=2.56, k=0.82$

(a) Structure semi-fractale simulée



(b) Ajustement de l'expression (8.2) sur le domaine fractal

Figure 8.13. Ajustement de l'expression (8.2) sur la courbe de rétention d'une structure semi-fractale

Discussion.

La distinction entre un espace poral fractal de niveau n incomplètement développé et une structure fractale infinie a essentiellement servi d'illustration au raisonnement du paragraphe 8.2. Sur un espace poral fractal parfait borné par deux échelles de tailles, seule l'expression analytique (8.7) permet de retrouver la dimension fractale donnée par construction au modèle de structure. Pour que l'expression (8.7) se simplifie en (8.2), il faut imaginer une structure

infiniment développée, et des pores infiniment petits, ce qui peut être jugé une condition irréaliste.

Cependant la simulation montre que, dans le cas des structures semi-fractales simulées, l'expression (8.2) est aussi valide, sur un domaine limité de pressions capillaires, sans qu'il soit nécessaire d'aller jusqu'à des tailles de pores infiniment petites. Plus le nombre de niveau de fragmentation est élevé, plus le domaine non fractal s'amenuise (Fig.8.10), et plus grand est le domaine de validité de l'expression (8.2). Avec un ordinateur plus puissant, et sans aller jusqu'à l'infiniment petit, il serait possible de simuler des structures pour lesquelles l'expression (8.2) est "presque partout vérifiée".

Nous considérons donc que le nouveau modèle de structure fractale présenté dans ce chapitre illustre bien une configuration géométrique possible pour laquelle la relation pression/teneur en eau est correctement modélisée par l'expression analytique (8.2), par opposition au premier modèle de structure étudié dans les chapitres précédents. Le premier modèle était une structure fractale en agrégats emboîtés dont la distribution de taille d'agrégats et la distribution de tailles de pores sont fractales et de même dimension. Le deuxième modèle est une construction originale, basée sur le modèle de fragmentation de Turcotte (1986), dont la distribution de pores est l'analogue de celle modélisée dans la littérature par un tapis de Serpinski (Tyler et Wheatcraft, 1990) ou une éponge de Menger (Toledo et al, 1990) représentant uniquement l'espace poral. Ici les particules sont aussi représentées, leur distribution est fractale, et la distribution des pores est aussi fractale, de même dimension. Notons que cette dimension commune est indépendante de la porosité totale. Ce deuxième modèle représente un milieu non agrégé à structure particulière.

Ces deux types de structures se différencient nettement par les fonctions $\theta(h)$ calculées sur leurs distributions de tailles de pores respectives, ou encore par la valeur de A dans la forme générale de $\theta(h)$ exprimée par l'expression (8.7). On peut donc penser que l'étude précise de courbes de rétention réelles permettraient, suivant la valeur du paramètre A , de déterminer si l'un des deux modèles est plus approprié que l'autre pour un type de sol donné, de distinguer des sols fractals agrégés ($A=1$) de sols fractals à structure particulière ($A=\theta_{\max}$), et d'estimer à travers l'étude de l'espace poral la dimension fractale de distributions de taille d'agrégats ou de distributions de tailles de particules primaires.

8.4. DONNÉES EXPÉRIMENTALES DE COURBES DE RÉTENTION

8.4.1. Ajustement de l'expression analytique (8.7) sur les données $\theta(h)$ de sols estimés fractals

Nous avons étudié une quinzaine de jeux de données réelles de courbes de rétention, cités dans la littérature traitant de sols fractals. Ces jeux de données sont ceux du tableau 8.1 auxquels s'ajoutent des répétitions pour le même type de sol à différentes profondeurs. On a vu au paragraphe (8.1) que les deux expressions (8.1) et (8.2) s'ajustent bien sur les données étudiées, mais ne fournissent pas la même estimation pour la dimension fractale. Nous avons pensé que l'expression (8.7) qui s'ajuste mieux aux données simulées en choisissant une valeur de A conforme au modèle de structure pourrait, dans le cas de données réelles, permettre soit de discriminer entre les deux modèles fractals étudiés en fournissant une estimation du paramètre A plus proche de 1, ou de θ_{\max} , soit d'estimer d'autres valeurs de A indiquant une extension partielle du domaine fractal (cf. §8.2.4). Nous avons tenté d'ajuster cette expression par une méthode d'optimisation non linéaire (logiciel SAS, algorithmes de Newton ou de Marquardt) pour déterminer les deux paramètres D et A de cette expression minimisant l'écart entre données calculées et observées suivant le critère des moindres carrés. Mais, sur les jeux de données testés, l'ajustement s'est révélé instable, les estimations de A et de D dépendantes, et n'a pas permis de conclure.

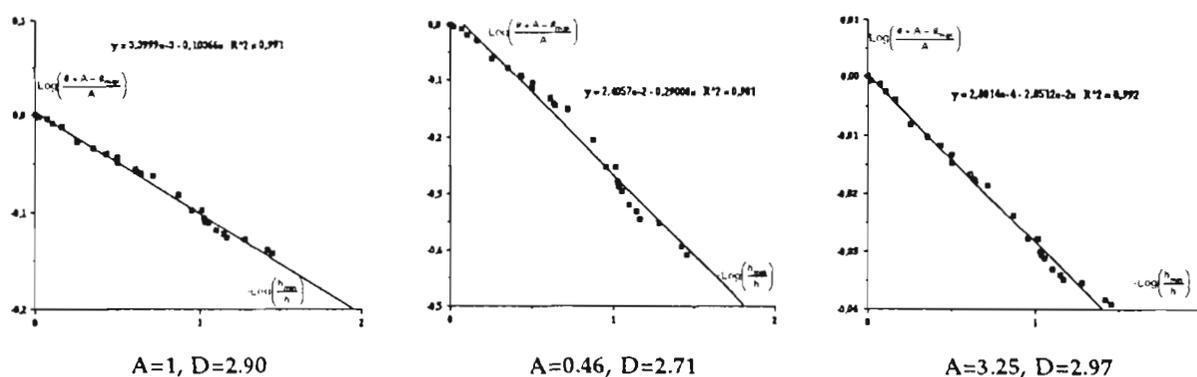


Figure 8.14. Ajustement de l'expression (8.7) sur les données du sol Ariana (Rieu et Sposito, 1991c) pour divers couples de paramètres (A,D)

Par exemple, sur les données du sol Ariana (cf. tableau 8.1), et avec différentes valeurs de départ pour A et D , la convergence est atteinte en imposant une contrainte ($A \leq 1$) et donne trois optimums variables ($A=0.57, D=2.80$) ou ($A=0.65, D=2.84$) ou ($A=1, D=2.90$) mais jamais les valeurs ($A=0.46=\theta_{\max}, D=2.71$) qui correspondraient à l'ajustement de (8.2). Sans contrainte sur A , on converge toujours vers ($A=3.25, D=2.97$) et donc une valeur de A irréaliste. Dans

tous les cas, le critère des moindres carrés est du même ordre et l'ajustement très bon. Les ajustements correspondant à cet exemple et à ces paramètres sont présentés sur la figure 8.14.

Il faudrait donc connaître la valeur de A, et donc le modèle complet de structure, pour déterminer D, ou au contraire connaître D à partir d'autres mesures pour déterminer la valeur de A.

Nous avons alors essayé de nous placer au niveau de la dérivée. En effet l'expression dérivée de (8.7) est $\frac{d\theta}{dh} \sim h^{D-4}$ et elle permettrait en théorie d'estimer directement D sans présupposer une valeur pour A (C'est l'expression utilisée par Friesen et Mikula, 1987, sur des données de porosimétrie, cf.Chap.2, formule 2.6) et permettrait aussi de visualiser les limites éventuelles d'un domaine fractal. Mais là aussi, les résultats sont décevants, car l'ajustement n'est pas très bon et donne des intervalles de confiance trop importants pour l'estimation de D.

Les deux méthodes précédentes permettraient peut-être de conclure sur des données plus précises ou plus nombreuses.

8.4.2. Comparaison avec l'expression analytique de Brooks et Corey.

Sur une base empirique, une expression analytique très connue modélisant la courbe de rétention d'eau dans les sols est l'expression (8.11) proposée par Brooks and Corey (1964).

$$\frac{\theta(h) - \theta_r}{\theta_{\max} - \theta_r} = \left(\frac{h_{\min}}{h}\right)^\lambda \quad (8.11)$$

où θ_r est une teneur en eau résiduelle, h_{\min} une "bubbling pressure", et λ un "pore-size distribution index", θ_r , h_{\min} et λ étant obtenus par ajustement sur les données expérimentales.

Bien que d'autres expressions, comportant plus de paramètres d'ajustements, soient aussi employées (cf.Chap.1,§1.2), l'expression (8.11) est très fréquemment utilisée et est considérée comme un très bon modèle pour de nombreux types de sols.

Si θ_r est supposé nul, il est clair que l'expression (8.2) peut être vue comme une interprétation fractale de (8.11). Ainsi la dimension fractale D pourrait expliquer l'exposant empirique λ ($\lambda=3-D$). Le fait que le modèle de Brooks et Corey se soit souvent montré satisfaisant indiquerait que le modèle fractal doit s'appliquer à de nombreux sols (Tyler et Wheatcraft, 1990, Toledo et al, 1990). Réciproquement, les ajustements déjà effectués du modèle de Brooks et Corey fourniraient une dimension fractale des sols. C'est ainsi que Brakensiek and Rawls (1992), sur une base de données d'environ 5000 courbes de rétention, calculent la dimension fractale de sols de texture variée (pour un modèle tridimensionnel, D varierait de façon croissante avec une texture de plus en plus fine de 2,41 pour les sables à 2,87 pour les argiles, il

s'agit de valeurs moyennes et il n'est pas dit si certains sols échappent à la règle générale). Il serait intéressant de faire la comparaison entre (8.1) et (8.2) sur ces données.

Une valeur θ_r non nulle correspond à une porosité résiduelle saturée d'eau et qui ne peut se vider quelle que soit la valeur de la pression capillaire (Lorsque h tend vers l'infini dans l'équation 8.11, θ tend vers θ_r). C'est un point de vue différent de celui adopté dans nos modèles, où toute la porosité est supposée accessible (y compris la porosité supplémentaire non fractale du paragraphe 8.2.4). Si nous intégrons ce concept dans notre raisonnement du paragraphe (8.2), les calculs sont inchangés. En rajoutant à la porosité fractale représentée par nos modèles, de teneur en eau $\theta_f(h)$, une porosité résiduelle (non représentée) toujours saturée et de teneur en eau θ_r , la teneur en eau totale est égale à $\theta(h)=\theta_f(h) + \theta_r$; un changement de variable dans l'expression (8.7), $\theta_f(h)+A-(\theta_{max})_f=A(\frac{h_{min}}{h})^{3-D}$ conduit encore à $\theta(h)+A-\theta_{max}=A(\frac{h_{min}}{h})^{3-D}$. La condition $A=(\theta_{max})_f$ est alors équivalente à $A=\theta_{max}-\theta_r$ (On peut aussi établir directement l'équivalence entre (8.11) et (8.7) en posant $A=\theta_{max}-\theta_r$).

Nous avons repris les données publiées par Brooks et Corey (1964). Leur ajustement, qui tient compte de deux paramètres d'ajustements θ_r et h_{min} , est effectué par essais successifs de différentes valeurs possibles pour θ_r . Nous avons employé la même méthode en essayant successivement plusieurs valeurs de A . Un exemple est présenté sur la figure (8.15): le cas (8.15.a) correspond aux valeurs $A= \theta_{max}-\theta_r$ et h_{min} choisies par Brooks et Corey; c'est effectivement le meilleur ajustement (sur un domaine réduit d'échelles de longueur caractérisé par h_{min}), mais la dimension fractale estimée serait très faible. De l'utilisation d'une expression simplifiée avec θ_r nul (Fig.8.15.b), on aurait pu déduire une estimation de D très différente (Fig.8.15.b).

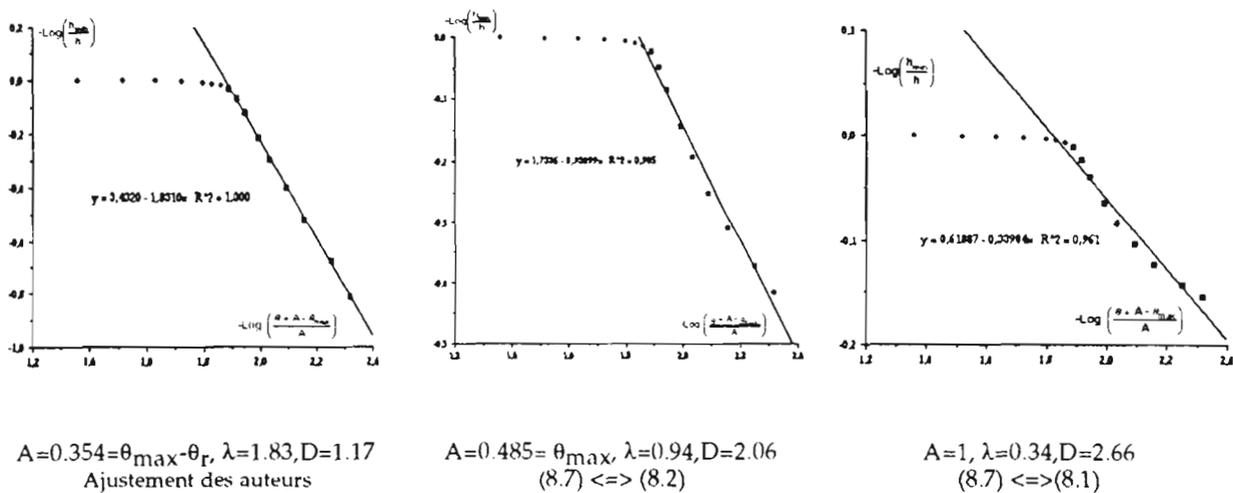


Figure 8.15. Ajustements de l'expression (8.7) sur des données de Brooks et Corey, 1964 (Touchet Silt Loam)

Notons de plus que les exposants λ estimés à partir de (8.11) par Brooks et Corey sont souvent plus grands que 3, ce qui donnerait des dimensions fractales négatives, et rappelle une condition sur l'équivalence entre (8.2) et (8.11) à savoir $0 < D < 3 \iff 0 < \lambda < 3$.

8.4.3. Discussion

Les différentes expressions utilisées, y compris l'expression non simplifiée (8.11) de Brooks et Corey peuvent toutes se ramener à l'expression (8.7), et correspondent à différentes valeurs de A ou encore à différentes translations de la fonction modèle $\theta(h)$ suivant l'axe des teneurs en eau.

Il serait nécessaire d'étudier des données expérimentales plus nombreuses. Néanmoins, à la lumière des premiers résultats obtenus, nous pensons pouvoir affirmer que:

- un simple ajustement numérique de courbes de rétention permettrait peut-être d'estimer D à condition de disposer de données extrêmement précises, pour pouvoir par exemple travailler au niveau des courbes dérivées. Dans ces conditions seulement on pourrait envisager une discrimination entre différents modèles de structure suivant la valeur de A .
- un ajustement raisonné par un modèle de structure et par le choix d'une valeur de A permet de tester le modèle fractal choisi et d'estimer une dimension fractale. Mais le modèle de structure utilisé doit être alors validé par des observations indépendantes.

8.5. CONCLUSION

Sur la base d'une caractérisation communément acceptée d'un espace poral fractal ((8.3)), nous avons montré que deux expressions analytiques différentes (8.1) et (8.2) utilisées pour caractériser un sol fractal et modéliser sa courbe de rétention peuvent être regroupées sous le formalisme unificateur de l'expression (8.7). La fonction $\theta(h)$, qui est associée à une distribution de tailles de pores fractale de dimension D , varie en loi de puissance ($D-3$) de la pression capillaire. L'expression (8.7) introduit un paramètre A a priori non mesurable qui représente la proportion du volume total de sol qui serait occupé par la porosité fractale si le domaine fractal n'était pas limité par une échelle de longueur minimale.

Si la dimension fractale d'un espace poral fractal détermine la forme de la courbe de rétention d'eau, l'estimation de cette dimension D à partir d'une courbe de rétention reste un point délicat. En effet, l'introduction de A comme deuxième paramètre d'ajustement de l'expression (8.7) n'a pas permis sur les quelques jeux de données expérimentales étudiés de déterminer un couple (A,D) optimal dans l'espace des paramètres possibles.

Pour des modèles particuliers de structures fractales, on peut déterminer A . Nous avons étudié deux de ces modèles: un premier dans les chapitres précédents, pour lequel $A=1$ et l'expression

(8.7) se simplifie en (8.1), et un deuxième dans ce chapitre pour lequel A est égal à la teneur en eau maximale θ_{\max} et l'expression (8.7) se simplifie en (8.2). Ces structures simulées correspondent à deux types d'organisation des éléments solides du sol. Le premier modèle de structure représente assez bien un certain sol structuré en agrégats emboîtés dont la distribution de taille des agrégats est aussi fractale de même dimension que l'espace poral. Le deuxième représente assez bien une structure particulière dont la distribution de taille des particules et la distribution de taille des pores sont fractales de même dimension. Il serait donc possible que la valeur de A soit un indicateur du modèle de structure de l'ensemble du milieu poreux. Sur les données simulées, l'ajustement de l'expression (8.7) est meilleur pour le premier modèle avec $A=1$ qu'avec $A=\theta_{\max}$, et vice-versa pour le deuxième modèle (indépendamment du fait que l'on a d'autres moyens de comparaison lorsque l'on connaît la dimension fractale attendue). On peut donc espérer que sur des données expérimentales très précises, la courbe de rétention puisse être malgré tout utilisée pour révéler le caractère fractal et déterminer la dimension de certains sols. En dehors de toute simulation, l'étude comparée de données expérimentales de courbes de rétention et d'autres méthodes de détermination de dimensions fractales serait souhaitable.

Les deux modèles présentés sont cohérents d'un point de vue géométrique au sens où la partition de l'espace en solides et vides est plausible. Dans la réalité, il est probable que certains sols sont assez bien représentés par le premier modèle, d'autres par le second, d'autres par des modèles intermédiaires plus élaborés (d'autres encore par aucun modèle fractal...). Le même outil de construction de structures permet de simuler des modèles très différents, il pourrait permettre d'étudier d'autres hypothèses théoriques sur l'organisation structurale des sols, et d'utiliser sans modification aucune les algorithmes développés pour comparer leur comportement hydrique.

CONCLUSIONS

EN RÉSUMÉ...

Nous avons réalisé un générateur de structures de sol. Afin de représenter de façon naturaliste des assemblages géométriques de particules caractérisés dans de nombreux sols par leur déformabilité et la présence de plusieurs niveaux d'organisation en agrégats, nous avons conçu une méthode de simulation originale. Son principe repose sur un découpage de l'espace plan en zones de fragmentation, définies par des germes aléatoires ou non (tesselation de Voronoï), dont l'ensemble forme le "squelette" du sol. Des transformations géométriques (des homothéties dans le cas général) permettent d'associer à ce squelette des structures poreuses qui constituent une partition de l'espace plan en éléments solides et vides; une structure peut évoluer suivant l'état de gonflement du sol, alors que le squelette reste la référence invariante de l'organisation structurale. Plusieurs niveaux d'organisation sont représentés par des fragmentations emboîtées de façon itérative: les éléments nommés solides à une échelle donnée sont alors des agrégats qui se décomposent en sous-agrégats ou en particules primaires à un niveau plus fin d'observation.

Nous avons cherché à déterminer les caractéristiques hydriques du sol en fonction du modèle de structure. Le comportement hydrique du sol dépend de la géométrie de l'espace poral qui elle-même est déterminée par la géométrie de l'assemblage des solides. Afin de simplifier l'étude et d'utiliser l'analogie capillaire, notre construction schématique déduit de l'organisation structurale des solides un ensemble de pores quasi-rectangulaires (assimilés à des parallépipèdes dans un modèle tridimensionnel associé à la construction plane). Nous avons travaillé alternativement sur trois niveaux de complexité croissante:

- avec un modèle capillaire simple où les pores sont supposés indépendants et indéformables. La loi de Laplace établit alors l'équivalence entre la distribution de taille des pores simulée et une courbe de rétention $h(\theta)$ nommée ici courbe de référence.
- en tenant compte de la variation de taille des pores avec la teneur en eau, dans le cas de sols gonflants.
- en considérant la distribution spatiale des pores et leur interconnexion en réseau, ce qui introduit plus de réalisme mais aussi plus de contraintes géométriques.

Le procédé de construction de structures a d'abord permis de simuler des modèles théoriques de structures utilisés en science du sol.

Modèles fractals, distributions de taille de pores et courbes de rétention

Le modèle de structure fractale cubique en agrégats emboîtés élaboré par Rieu et Sposito (1991b) a été successivement étendu à des modèles polygonaux irréguliers (Chap.4), désordonnés ou anisotropes (Chap.7). D'une part nous avons retrouvé la loi d'échelle exprimée par la courbe de rétention, une fonction de la dimension fractale des distributions de taille des pores et des agrégats; d'autre part nous avons montré que cette loi est indépendante des particularités géométriques locales au sein des différents niveaux d'organisation (Chap.5.2, Chap 7.3).

Nous avons étudié un deuxième modèle théorique de structure fractale établi initialement pour caractériser seulement l'espace poral des sols (Tyler et Wheatcraft, 1990) et montré que ce modèle, analogue mathématiquement au précédent, ne pouvait pas représenter le même type de structure en agrégats emboîtés, mais pouvait s'appliquer à des structures particulières dont les distributions de taille des particules et des pores sont fractales de même dimension (Chap.8).

L'expression analytique de la courbe de rétention de référence est toujours une loi de puissance de la dimension fractale. Mais la prise en compte de l'extension du domaine fractal dans les sols différencie les deux approches et nos premiers résultats invitent à la plus grande prudence pour l'estimation d'une dimension fractale à partir de courbes de rétention, telle qu'elle est préconisée par plusieurs auteurs.

De façon générale, notre méthode de construction permet de simuler des structures dont la distribution de pores correspond, pour un modèle capillaire simple, à une courbe de rétention donnée.

Modèle de structure déformable et distribution variable de taille de pores

La variation de volume V des sols gonflants sous contrainte hydrique est caractérisée par une courbe de retrait $V(\theta)$ que l'on peut mesurer sur un échantillon quelconque. Nous avons pu générer des déformations de structures d'un échantillon simulé, suivant une courbe $V(\theta)$ imposée. Mais la modification de la géométrie de l'espace poral interne à l'échantillon peut s'effectuer de multiples façons.

Nous avons représenté (Chap.6.4) les hypothèses du modèle MRS élaboré par Braudeau (1988); ce modèle suppose l'existence de deux principaux niveaux d'organisation: des agrégats élémentaires argileux renfermant une microporosité très déformable et une macroporosité complémentaire ménagée par l'assemblage de ces agrégats. La diminution de teneur en eau dans

l'échantillon est alors due à deux mécanismes qui peuvent agir simultanément: l'entrée d'air dans les pores en fonction de la pression capillaire, et la contraction de la microporosité remplie d'eau. Pour pouvoir simuler réellement la superposition de ces deux processus, il faudrait pouvoir les exprimer par rapport à une même variable et par exemple déterminer théoriquement ou expérimentalement les variations de volume des micropores en fonction de la pression capillaire. D'autre part le modèle MRS reste un modèle global à deux compartiments volumiques et ne peut à lui seul déterminer l'organisation structurale fine du sol ni comment se font exactement les redistributions de taille de pores.

Par ailleurs, imposant à une structure simulée une courbe de retrait global telle qu'elle peut être mesurée expérimentalement, et ne privilégiant aucune hypothèse sur la nature interne des déformations, nous avons inventé plusieurs scénarios possibles concernant les modifications des différentes classes de taille de pores au cours du retrait. La simulation (Chap.6.3) montre que la connaissance d'un état structural à l'état sec, de la courbe de variation de volume global permet, pour un scénario donné, de calculer la courbe $h(\theta)$. La simulation suggère que la détermination du scénario le plus probable pourrait être faite en résolvant le problème inverse, c'est-à-dire en utilisant des mesures simultanées de la courbe de rétention et de la courbe de retrait, au cours du drainage d'un échantillon, et d'une mesure de l'état sec donnée par une courbe d'injection de mercure.

La simulation de structures ne permet pas seulement de déduire un ensemble de pores de l'organisation des solides, c'est un outil privilégié pour tenir compte des relations spatiales entre les différents objets.

Réseau de pores interconnectés, hystérésis de la relation pression/teneur en eau et calcul de la conductivité hydraulique

Si l'on tient compte de l'interconnexion des pores et de leur accessibilité lors de l'entrée d'air ou d'eau dans le sol, on peut, au moins en partie, expliquer l'hystérésis de la relation $h(\theta)$. La simulation d'un mécanisme de "percolation d'invasion" pour le fluide entrant sur le réseau de pores (Chap.5.2) a permis de retrouver des résultats connus pour des réseaux aléatoires et de simuler les boucles intermédiaires d'hystérésis pour divers historiques de drainage/imbibition.

Le calcul de la conductivité hydraulique (Chap.7) a été effectué par analogie électrique sur le réseau plan formé par les conductances élémentaires de chaque pore plein d'eau (loi de Poiseuille). Nous avons essentiellement étudié les structures fractales en agrégats emboîtés. La présence de gros pores isolant, dès qu'ils sont vides, les agrégats de leurs voisins, conduit à une

conductivité simulée nulle si ce n'est au voisinage de la saturation complète. Nous avons alors cherché à rétablir des contacts inter-agrégats. Pour des variantes désordonnées ou anisotropes du modèle de structure (Chap.7.3), les résultats qualitatifs ont pu être améliorés sans toutefois obtenir une conductivité non nulle aux faibles teneurs en eau. Une courbe de conductivité simulée plausible a pu être obtenue en superposant et en reliant plusieurs réalisations planes d'une structure donnée; mais la conductivité est vraisemblablement surestimée comme l'indique par exemple la comparaison avec un jeu de données expérimentales.

Ces premiers travaux mettent l'accent sur l'influence déterminante sur les caractéristiques hydrodynamiques, non seulement de la topologie du réseau de pores, mais aussi de sa structuration dans l'espace. Il semble bien d'ores et déjà qu'une distribution aléatoire des pores sur un réseau soit en contradiction avec l'observation de la structure des sols. Dans le cas des sols agrégés que nous avons simulés, la diminution brutale de la conductivité en dessous de la saturation a parfois été constatée ("In aggregated soils, the large interaggregate spaces which confer high conductivity at saturation become, when emptied, barriers to liquid flow from one aggregate to its neighbors", Hillel, 1982). Notre modèle initial accentue trop le "steep drop" dont parle Hillel, mais le scénario multi-plans, dans l'état actuel, a l'effet inverse. Restant convaincus qu'une simulation "réaliste" de la distribution spatiale des pores et de la connectivité du réseau conducteur devrait permettre de déterminer la conductivité du milieu sans introduire de paramètres d'ajustement, un certain nombre de pistes de recherches sont envisagées.

PERSPECTIVES

Etude de différents modèles de structures

Le même procédé de construction peut permettre d'étudier toutes sortes de structures: par exemple des modèles en agrégats emboîtés non fractals (nombre variable de sous-agrégats et/ou rapports d'homothéties variables à chaque niveau de fragmentation), ou des modèles très différents, en générant des germes de fragmentation suivant des lois de distribution statistiques structurées dans l'espace, ou bien en modifiant la partition de l'espace de base (divisions ou réunions des zones de fragmentation polygonales) de façon à générer des réseaux de coordinance variable... etc, sans (ou avec peu) d'ajouts dans les programmes.

Des voies de recherche sont envisagées pour l'étude des déformations (Chap.4.6.3) ou pour améliorer le calcul de la conductivité; certaines nécessiteraient de gérer localement les contraintes géométriques (lors des déformations de structure incluant des éléments rigides ou pour la création de structures anisotropes).

Il reste nécessaire d'explorer d'autres choix de liaisons entre plusieurs réalisations afin de rendre les structures planes mieux représentatives des structures réelles tridimensionnelles

(Chap.7.4.2), et il serait tentant de passer un jour au tridimensionnel, malgré les difficultés prévisibles.

D'autres choix de modélisation hydrodynamique

Dans l'état actuel du modèle, nous avons cherché à modifier le modèle de structure ou les conditions de connectivité de réseau poral pour simuler différentes courbes de conductivité hydraulique. Il est possible aussi de repenser le modèle hydrodynamique et d'envisager par exemple comme plusieurs auteurs (Chap.2) la continuité absolue de la phase mouillante grâce à des films d'eau conducteurs le long des aspérités des parois solides, ce qui ne pose pas de problème de programmation.

Plus de données expérimentales

Par ailleurs, nous avons montré qu'il était possible d'effectuer des comparaisons avec des données expérimentales (courbe de rétention et de conductivité). De façon générale, il faudrait choisir un sol pour lequel on dispose du maximum de données expérimentales qualitatives et quantitatives et évaluer l'aptitude de notre générateur à s'adapter à la description de la structure et du fonctionnement d'un cas particulier.

Plus d'expériences qualitatives

Nous avons souvent effectué des expériences couplées (calcul simultané des courbes de rétention et des courbes de conductivité, ou bien des courbes de rétention en drainage et des courbes de retrait). Sans modification des programmes, nous pourrions aussi étudier l'influence du retrait sur les courbes de conductivité, ou encore simuler les trois courbes rétention, retrait et conductivité simultanément, ou encore étudier la sensibilité de l'hystérésis de $h(\theta)$ aux phénomènes de retrait/ gonflement, des déformations anisotropes...etc.

DISCUSSION

Réflexions sur la relation "Structure-Fonctionnement" et sur des objectifs de prévisions à long terme

Notre objectif était au départ de déterminer les caractéristiques hydriques d'un sol en fonction de ses caractéristiques structurales.

Sous réserve de vérifications expérimentales, et pour certaines structures de sols, on peut penser que la dimension fractale mesurée à partir une granulométrie d'agrégats (ou pour d'autres sols sur une granulométrie de particules) à laquelle on adjoindrait la mesure d'un point (h_{\min}, θ_{\max}) ou de deux points (h, θ) quelconques permettrait assez bien de modéliser la courbe pression/teneur en eau grâce à l'expression analytique de $h(\theta)$ dans un sol fractal (Chap.8) ...

Dans le même ordre d'idée, et sous réserve en particulier de connaître le scénario de déformation (Chap.6,§1), on pourrait à partir de mesures de la distribution de tailles de pores à sec et d'une courbe de retrait prévoir la courbe $h(\theta)$ en drainage...

Mais il ne semble pas possible d'envisager la prévision de $K(\theta)$ ou même de l'hystérésis de la relation (h,θ) sans avoir des informations précises sur l'organisation spatiale du milieu (nous ne savons pas comment évaluer l'importance des contacts inter-agrégats ni estimer la coordinance moyenne du réseau poral, nous ne savons pas non plus dans quel cas ce réseau est anisotrope ou non, ou encore nous ne connaissons pas le nombre de niveaux d'organisation que l'on peut distinguer dans un sol agrégé).

En l'absence d'informations suffisantes sur la structure à l'échelle des pores, nous avons souvent eu une démarche inverse: nous avons imaginé des modèles de structure afin de mieux retrouver, du moins qualitativement, un fonctionnement réaliste.

Un modèle capillaire permet, en utilisant une courbe de rétention d'eau ou une courbe d'intrusion du mercure (malgré des différences dues en partie à la déformation) d'obtenir des indications très utiles sur la distribution de taille des pores dans le sol. Avec une démarche comparable, le "calage" d'un modèle de structure sur une courbe de conductivité hydraulique pourrait contribuer à la connaissance de l'organisation des sols, et à des mesures indirectes de structure.

Le modèle de structure pourrait aussi être "calé" seulement sur la relation (h,θ) mesurée pour différents cycles d'imbibition et de drainage: en effet ce sont les mêmes conditions de connectivité auxquelles sont sensibles l'hystérésis de (h,θ) et les valeurs de la conductivité (selon les hypothèses de fonctionnement que nous avons faites). On pourrait alors à nouveau parler de la simulation de la courbe $K(\theta)$ en termes de prévisions .

Le travail de recherche présenté ici a été sous-tendu par l'idée qu'un modèle de structure qualitativement acceptable par un pédologue et contraint, toujours qualitativement, par les trois courbes $h(\theta)$, $V(\theta)$ et $K(\theta)$ serait un modèle "valide" de structure de sol; et c'est pourquoi nous avons mené de front la mise au point des algorithmes permettant de simuler à la fois ces trois courbes sur une même réalisation de structure simulée. Mais si les trois courbes s'avèrent nécessaires pour construire des structures simulées jugées réalistes, ce n'est plus à la détermination des caractéristiques hydriques du sol que notre modèle pourrait servir. Une structure de sol simulée pourrait alors être utilisée pour simuler l'hydrodynamique du milieu suivant différentes conditions aux limites, pour introduire des solutés ou d'autres objets (comme des racines et des vers de terre) dans les simulations, afin d'étudier d'autres phénomènes... et à rencontrer d'autres défis dans la représentation du monde réel.

Mais il reste encore de grands pas à franchir. Pour l'instant, notre travail est avant tout un outil d'exploration, sur la possibilité technique et conceptuelle de construire des modèles de structures de sol aussi complets que possible, un outil de réflexion sur la pertinence des hypothèses simplificatrices que toute tentative de modélisation impose.

Réflexions sur la simulation: outil d'exploration, d'aide à la compréhension de mécanismes, de discussion sur des modèles existants

Le logiciel de simulation développé a été conçu dès le départ comme un outil de création et de représentation d'un échantillon de sol simulé. Chaque objet simulé représente concrètement un objet réel. L'interface (Annexe C) permet à tout utilisateur de choisir interactivement un type de structure et de calculer ses principales caractéristiques, un scénario de simulation et d'évaluer ses conséquences sur telle ou telle courbe de fonctionnement. La représentation graphique de toutes les simulations au fur et à mesure de leur déroulement rend apparentes les hypothèses émises, hypothèses qui, lorsqu'elles sont mises en images, sont d'autant plus claires et soulèvent d'autant plus aisément la discussion. De tels choix de simulation traduisent avant tout une volonté de représentation des connaissances, de la création d'un moyen de communication et de réflexion qui s'adresse aussi bien aux spécialistes qu'aux chercheurs extérieurs aux domaines étudiés.

Etant donné que notre simulation privilégie l'objet d'étude en tant que tel (ici le sol), avant même d'aborder l'étude d'une de ses propriétés, il est ensuite naturel de vouloir projeter sur cet objet de multiples points de vue. La simulation devient un outil de contrôle de cohérence entre différentes approches:

- Il peut s'agir de la cohérence géométrique entre la répartition des vides et des solides, et donc entre les modèles s'intéressant à l'une ou l'autre de ces deux phases; il peut s'agir de cohérence entre les définitions des différents objets élémentaires du modèle.
- Lorsque l'on s'intéresse à différentes propriétés simultanément sur un même échantillon de sol simulé, les choix de simulation doivent être les mêmes pour chacune d'elles: c'est ainsi que les modifications de connectivité introduites pour le calcul de la conductivité sont immédiatement sensibles sur l'hystérésis de $h(\theta)$. La simulation de la déformation ou bien la prise en compte de la connectivité des pores sur des structures fractales fait immédiatement apparaître la difficulté de caractérisation d'une distribution de pores à partir d'une seule courbe de rétention.

- Le sol étant parfois saturé d'eau parfois incomplètement saturé, le même modèle de structure prétend s'appliquer aux deux situations. Il en résulte des difficultés évidentes mais incontournables.

En ce qui concerne nos principaux résultats, ils sont le fruit de la simulation:

Les réflexions du chapitre 8 sur l'expression analytique de la fonction $h(\theta)$ dans un sol fractal sont indépendantes de la simulation. Cependant, elles ne sont que la conséquence de l'observation des résultats sur les structures simulées et des problèmes rencontrés pour la simulation d'une structure fractale infiniment développée.

Pour l'explication de l'hystérésis de la relation $h(\theta)$ comme la résultante de conditions d'accessibilité aux pores sur un réseau, un simple raisonnement suffit. Mais la simulation qui nous l'a fait redécouvrir. D'autre part, seule la simulation permet effectivement d'évaluer la forme et l'importance de ce phénomène.

La simulation permet essentiellement de prendre en compte la distribution spatiale des différents objets constituant le sol. Or c'est de cette organisation spatiale, bien plus que de la taille ou la forme des objets individuels, que dépend le comportement de l'ensemble. Dans le domaine de la simulation d'univers artificiels biologiques ou humains (par exemple Ferber, 1992), c'est de l'interaction entre un grand nombre d'objets élémentaires qu'émerge la complexité du système dans son ensemble. Dans le sol, c'est de l'interdépendance géométrique entre les différents objets que résulte le comportement de l'ensemble à l'échelle supérieure.

Toutefois la simulation a des limites. La principale étant les possibilités informatiques en taille mémoire, particulièrement sensible pour le calcul de la conductivité. C'est la raison pour laquelle l'influence de la taille de l'échantillon simulé n'a pas été approfondie. De même la représentation de milieux hétérogènes non fractals pose un problème d'espace mémoire et de temps de simulation, même si l'on considère que certains algorithmes peuvent être optimisés.

Des simulations exploratoires constituent une force et un danger. Il est possible que l'invention et la comparaison systématique de nombreux modèles de structure aboutissent à certaines configurations jugées satisfaisantes. Il est possible aussi de se laisser emporter par le jeu, et de mener des recherches infinies et irraisonnées. "Bien sûr, l'homme a souvent besoin d'objets pour comprendre un sujet, mais gare à ceux-là s'ils créent une sujétion qui cache l'objectif". (Thirriot, 1982). Il faut s'imposer des "garde-fous" en revenant le plus possible à l'observation du sol, et à la recherche de moyens de comparaison quantitatifs et qualitatifs avec les données expérimentales.

CONCLUSION

Nous avons développé un outil informatique, un simulateur pour explorer le comportement hydrodynamique d'un sol en fonction d'hypothèses théoriques simples et schématiques sur sa structure et sur les mécanismes physiques mis en jeu.

Notre approche ouvre une voie de recherche, en montrant que la structure des sols peut être intégrée dans des modèles de réseaux de pores utilisés en physique des milieux poreux, et réciproquement que l'appropriation des connaissances sur les mécanismes physiques mis en jeu à l'échelle des pores en milieu non saturé peut contribuer à une meilleure connaissance de la structure des sols. Dans ce cadre, nous apportons une méthode originale à notre connaissance pour prendre en compte à la fois les éléments solides et les vides, un assemblage hiérarchique des solides en agrégats et pour simuler des déformations, c'est-à-dire des traits essentiels de la structure des sols.

Ce simulateur a permis de générer des structures fractales de sol et, en comparant différentes utilisations de la géométrie fractale, d'apporter une contribution dans ce domaine; il peut aussi être utilisé pour explorer des géométries totalement différentes. Notre travail se distingue d'approches plus classiques par une vision géométrique et non analytique du monde réel, une vision du sol plus proche de la perception humaine première, plus réaliste dans un certain sens, mais qui doit malgré tout s'élever à un certain niveau d'abstraction, nécessaire à toute modélisation. A ce titre, notre approche rentre dans le cadre de ce que Gouyet (1992) décrit comme "une tendance essentielle de la physique contemporaine, la géométrisation du réel".

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Adler, P.M., 1992.** The formation factor of reconstructed porous media. *Water Resour Res.*, 28(6), 1571-1576.
- Ahl, C., et J. Niemeyer, 1989a.** The fractal dimension of the pore volume inside soils. *Z. Pflanzenernähr. Bodenk.* 152:457-458.
- Ahl, C., et J. Niemeyer, 1989b.** Fractal geometric objects in the soil. *Mitteilung. Deutsch. Bodenk.* 59(1):93-98.
- Allègre, C.J., J.L. Le Mouel, et A. Provost, 1982.** Scaling rules in rock fracture and possible implications for earthquake prediction. *Nature*, 297, 47-49.
- Angulo R., J.P. Gaudet, J.L. Thony et M. Vauclin, 1990a.** Conductivité hydraulique d'un milieu poreux partiellement saturé déformable. I Principes de détermination. *C.R. Acad. Sci. Paris Série II*, 161-164.
- Angulo, R., J.P. Gaudet, J.L. Thony et M. Vauclin, 1990b.** Conductivité hydraulique d'un milieu poreux partiellement saturé déformable. II Résultats expérimentaux. *C. R. Acad. Sci. Paris Série II*, 341-345.
- Anguy, Y. et D. Bernard, 1992.** Numerical computation of the permability tensor evolution versus microscopic geometry changes, in *Mathematical modeling in water resources*, Russel et al Ed, *Comp.Mech.Pub., Southampton*, 385-392.
- Arya, L.M, et J.F. Paris, 1981.** A physicoempirical model to predict the soil moisture characteristic from particle-size distribution and bulk density data, *Soil Sci. Soc. Am. J.* 45, 1 023-1030.
- Bailly B., J.F. Challine, H.C. Ferri, P.Y. Gloess, B. Marchesin, 1989.** Les langages orientés-objets. *Ed. Cépaduès*
- Bartoli, F., R. Philippy, M. Doirisse, S. Niquet et M. Dubuit, 1991.** Silty and sandy soil structure and self-similarity: the fractal approach. *J. Soil Sci.* 42, 1 67-185.
- Berezin, P.N. et Y.V. Shein, 1988.** Investigating the pore space of swelling soils. Translated from *Pochvovedeniye*, 1 1, 63-67.
- Billaux, D., 1990.** Hydrogéologie des milieux fracturés. Géométrie, connectivité et comportement hydraulique. Thèse école des Mines de Paris. Document du BRGM no 186.
- Billotte, J., 1986.** Modélisation de milieux poreux pour la détermination des paramètres nécessaires au calcul d'écoulements alternés. Thèse Ecole des Mines Paris.

- Boivin , P., 1990.** Caractérisation physique des sols sulfatés acides de la vallée de Katoure (Basse Casamance) Thèse Pédologie Paris 6.
- Brakensiek, D.L., et W.J. Rawls, 1992.** Comment on "Fractal processes in soil water retention" by S.W. Tyler and S.W. Wheatcraft. *Water Resour. Res.* 28,601-602.
- Braudeau, E., 1988a.** Equation généralisée des courbes de retrait d'échantillons de sols structurés, *C.R.Acad.Sci. Paris*, t.307, Série II, 1731-1734.
- Braudeau, E., 1988b.** Essai de caractérisation quantitative de l'état structural d'un sol basé sur l'étude de la courbe de retrait, *C.R.Acad.Sci.Paris*, t.307, Série II, 1933-1936.
- Braudeau E., 1988c.** Méthode de caractérisation pédo-hydrrique des sols basée sur l'analyse de la courbe de retrait. *Cah. Orstom, sér. Pédol.*,3, 1 79-189.
- Braudeau, E., et A. Bruand, 1993.** Détermination de la courbe de retrait de la phase argileuse à partir de la courbe de retrait établie sur des échantillons de sol non remanié; Application à une séquence de sols de Côte d'Ivoire, *C.R.Acad.Sci.Paris*, t.316, Série II, 685-692.
- Brewer, R., 1964.** Fabric and mineral analysis of soils. *Ed. John Willey and Sons.* New-York.
- Brooks, R.H., et A.T. Corey, 1964.** Hydraulic properties of porous media. *Hydrol. Pap.* 3. *Colorado State Univ., Fort Collins.*
- Bronswijk, J.J.B., 1991.** Relation between vertical soil movements and water content changes in swelling clays. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 55, 1 220-1226.
- Bruand, A., 1986.** Contribution à l'étude de la dynamique de l'espace poral. Utilisation des courbes de retrait et des courbes de rétention d'eau. *Science du sol*, 24,4,351-362.
- Burdine, N.T., 1952.** Relative permeability calculations from pore-size distribution data. *Trans. AIME*
- Budd T., 1991 ,** Introduction à la programmation par objets. *Ed Addison-Wesley.*
- Cacas, M.C., E. Ledoux, G. de Marsily, A. Barbreau, E. Durand, B. Feuga, et P. Peaucederf, 1990a.** Modelling fracture flow with discrete fracture network: calibration and validation. 1. The flow model , *Water Resour. Res.*, 28 (1), 479-489.
- Cacas, M.C., E. Ledoux, G. de Marsily, A. Barbreau, P. Calmels, B.Gaillard, et R. Margrita, 1990 b.** Modelling fracture flow with discrete fracture network: calibration and validation. 2. The transport model , *Water Resour. Res.*, 28 (1), 491-500.
- Chang, R.K. et B.P. Warkentin, 1968.** Volume change of compacted clay soil aggregates. *Soil Science*, 1 05(2), 1 06-112
- Charlaix, E. , E. Guyon, et S.Roux 1987.** Permeability of a random array of fractures of widely varying apertures. *Transport in porous media* 2 , 31-43.
- Chatzis, I., et F. Dullien, 1977.** Modelling pore structure by 2-D and 3-D networks with application to sandstones, *The journal of Canadian Petroleum.*
- Chatzis, I., et F. Dullien, 1982.** Mise en oeuvre de la théorie de la percolation pour modéliser le drainage des milieux poreux et la perméabilité relative au liquide non mouillant injecté, *Revue de l'institut français du pétrole*, 37(2)2, 183-205.

- Chretien, J., 1986.** Rôle du squelette dans l'organisation des sols. *Thèse université de Dijon.*
- Coleuille, H., 1993.** Approches physique et morphologique de la dynamique structurale des sols. Application à l'étude de deux séquences pédologiques tropicales. *Thèse Paris 6.*
- Coquet, Y., 1994.** Etude des phénomènes de retrait-gonflement dans les sols peu gonflants. Etude expérimentale in situ. *Thèse université Orléans (à paraître)*
- Costet, J. et G. Sanglerat, 1981.** Cours pratique de mécanique des sols. *Ed. Bordas, Paris.*
- Daian, J.F, et J. Saliba, 1991.** Détermination d'un réseau aléatoire de pores pour modéliser la sorption et la migration d'humidité dans un mortier de ciment, *Int. J. Heat Mass Transfer.* 34(8), 2081-2096.
- Danis, M. et M. Quintard, 1984.** Modélisation d'un écoulement diphasique dans une succession de pores. *Revue de l'institut français du pétrole.* 39(1),37-46.
- Davis, H.T., 1989.** On the fractal character of the porosity of natural sandstone. *Europhys. Lett.* 8(7):629-632.
- Delannay, R., J.F.Thovert, et P.M. Adler, 1989.** Fractals et milieux poreux. *Revue internationale de systémique,* 3 (4), 485-514.
- Diaz, C.E., I.Chatzis, et F.A.L.Dullien, 1987.** Simulation of capillary pressure curves using bond correlated site percolation on a simple cubic network. *Transport in porous media* 2, 215-240.
- Dullien F.A.L., 1991.** Characterization of porous media - pore level. *Transport in porous media* 6,581-606.
- Everett, D.H. 1955.** A general approach to hysteresis. *Trans.Faraday Soc* 51, 1551-1557.
- Falconer, K, 1990.** Fractal geometry, *Ed. John Wiley&Sons*
- Fatt, I., 1956.** The network model of porous media. I,II,III, *Transactions AIME,* 207, 1 44-177.
- Feder, J., 1988.** Fractals. *Ed.Plenum Press. New York*
- Ferber, J., 1990.** Conception et programmation par objets. *Ed.Hermès.Paris*
- Ferber, J., 1992.** Using reactive multiagent systems in simulation and problem solving in *Distributed Artificial Intelligence. Theory and practice.*Ed. Kluwer Acad.
- Fiès,J.C. et P. Stengel, 1984.** Relations entre la constitution granulométrique et minéralogique et les caractéristiques de l'espace poral des sols. *Livre jubilaire du cinquantenaire de l'AFES. (Ass.Fran.Etu.sols),*235-240
- Fiès, J.C., 1992.** Analysis os soil textural porosity relative to skeleton particle size, using mercury porosimetry. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 56, 1 062-1067.
- Friesen, W.I., et R.J. Mikula, 1987.** Fractal dimensions of coal particles. *J. Colloid Interface Sci.* 120(1): 263-271.
- Frisch, U., D.d'Humières, B.Hasslacher, P.Lallemand, Y.Pomeau et J.P.Rivet, 1987.** Lattice gas hydrodynamics in two and three dimensions. *Complex systems* 1, 649-707.

- Fuentes, C., 1992.** Approche fractale des transferts hydriques dans les sols non saturés. *Thèse Université grenoble.*
- Ganoulis, J.G., 1989.** Multiphase flow in porous media: description at the pore and macroscopic scale. *Unsaturated Flow in Hydrologic Modeling, Nato Asi series* 27-52.
- Gennes, P.G. de, 1976,** La percolation: un concept unificateur. *La recherche* 72,919-927.
- Gennes, P.G. de, 1985.** Partial filling of a fractal structure by a wetting fluid. in *Physics of disordered materials, Adler and al, Ed. Plenum New York,* 227-241.
- Giraldez, J., G.Sposito et C.Delgado, 1983.** A general soil volume change equation. I. The two-parameter model. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 47,419-422.
- Golden, J.M, 1980.** Percolation theory and models of unsaturated porous media. *Water Resour. Res.,* 16, 201-209.
- Gouyet, J.F., 1992.** Physique et structures fractales, *Ed.Masson*
- Green P.J., et R.Sibson, 1977.** Computing dirichlet tessellations in the plane, *The computer Journal,* 21(2):168-173.
- Grimaldi, M. 1986a,** Modifications structurales d'un matériau limoneux soumis à un compactage dynamique. *Science du sol,*24,269-284
- Grimaldi, M. et D. Tessier, 1986b,** Changements des propriétés de retrait, de gonflement et de rétention d'eau d'un matériau limoneux soumis à un compactage dynamique. *Science du sol,* 24,319-336.
- Grimaldi, M. et R. Boulet, 1990,** Relation entre l'espace poral et le fonctionnement hydrodynamique d'une couverture pédologique sur socle de guyane française. *Cah.Orstom,série.Pédol.,XXV,3:263-275.*
- Guyon, E., C.D. Mitescu, J .P Hulin ,and S. Roux, 1989.** Fractals and percolation in porous media and flows, *PACS,* 1-10.
- Haines, W.B., 1923.** The volume-changes associated with variations of water content in soil. *Soil J.Agric.Sci.,* 1 3,296-310.
- Hallaire, V., 1987a,** Le retrait des matériaux argileux. Application agronomiques. *Colloque AFES "C.E.C et fertilisation des sols agricoles.* Caen, 19 -20 Nov 1987.pp 97-107.
- Hallaire, V., 1987b,** Retrait vertical d'un sol argileux au cours du dessèchement. Mesures de l'affaissement et conséquences structurales. *Agronomie* 7(8), 631-637.
- Hallaire, V., 19 88a.** La fissuration d'un sol argileux au cours du dessèchement. I Description in situ. *Agronomie,* 8,2, 1 39-145.
- Hallaire, V., 1988b.** La fissuration d'un sol argileux au cours du dessèchement. II Modélisation morphologique. *Agronomie,* 8,3, 273-280.
- Haverkamp, R., and J.Y.Parlange 1986,.** Predicting the water retention curve from particle-size distribution: sandy soils without organic matter.,*Soil Sci.* 142,325-339.
- Hénin, S. 1976.** Cours de physique du sol. *Ed. Doc. techniques Orstom.* No28.

- Hillel, D., 1982. Introduction to soils physics. Ed. Academic Press.
- Hillel, D., 1988, L'eau et le sol, principes et processus physiques. Ed. Académia. Louvain-la-neuve. Belgique.
- Jeulin D., 1990. Flow and diffusion in random porous media from lattice gas simulations. Document Ecole des Mines Fontainebleau.
- Jullien, R., et R. Botet, 1986. Aggregation and fractal aggregates. Ed. World scientific, Singapore.
- Jury W.A. et Z.J. Kabala, 1992. Stochastic modeling of flow and transport in unsaturated soil. Models of soil porous systems for unsaturated flow. Actes du colloque "Porous or fractured unsaturated media: transports and behaviour. EPFL. Lausanne. Suisse.
- Kantzas, A. et I. Chatzis, 1988. Network simulation of relative permeability curves using a bond-correlated-site percolation model of pore structure. Chem. Eng. Comm., 69, 191-194.
- Katz, A.J., et A.H. Thompson, 1985. Fractal sandstones pores: implication for conductivity and pore formation. Phys. Rev. Lett. 54(12):1325-1328.
- Kornblyum, E.A., 1975. Principaux niveaux de l'organisation morphologique de la masse du sol. Pochvovedeniye, 9, 36-48.
- Kutilek M., R. Rosslerova et H. Othmer, 1992. Models of soil porous systems for unsaturated flow. Actes du colloque "Porous or fractured unsaturated media: transports and behaviour. EPFL. Lausanne. Suisse.
- Le Méhauté, A., 1990. Les géométries fractales. Ed. Hermès, Paris.
- Lenormand, R. et S. Boriès, 1980. Description d'un mécanisme de connexion de liaisons destiné à l'étude du drainage avec piégeage en milieu poreux. C.R. Acad. Sci. Paris, 291, 393-396.
- Lenormand, R., 1981. Déplacements polyphasiques en milieu poreux sous l'influence des forces capillaires. Etude expérimentale et modélisation de type percolation. Thèse Institut national polytechnique de Toulouse.
- Lenormand, R., 1983. Description des mécanismes d'imbibition dans un réseau de capillaires. C.R. Acad. Sci. Paris. 297, 393-396
- Lenormand, R., 1983. Simulation de l'imbibition en utilisant un réseau dual. C.R. Acad. Sci. Paris 297, 437-440
- Lenormand, R., et C. Zarcone, 1985. Invasion percolation in an etched network: measurement of a fractal dimension, Phys. Rev. Lett., 54, 2226, .
- Lenormand, R., E. Touboul, et C. Zarcone, 1988. Numerical models and experiments on immiscible displacements in porous media, J. Fluid Mech., 189, 165-187.
- Levine, S., J. Lowndes et P. Reed, 1980. Two-phase fluid flow and hysteresis in a periodic capillary tube. Journal of colloid and interface face science 77(1), 253-263.
- Low, A.J., 1954. The study of soil structure in the field and in the laboratory. Journal of soil science, 5(1), 58-74.

- Low, P.F., 1987.** Structural component of the swelling pressure of clays. *Am.Chem.Soc. Langmir* 3, 18-25.
- Lozet et Mathieu, 1990.** Dictionnaire de science du sol. *Ed.Tech.et Doc. Lavoisier*, Paris.
- McGarry D. et K.W.J. Malafant, 1987.** The analysis of volume change in unconfined units of soil. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 51, 290-297.
- McKeague J.A., C.Wang et G.C.Topp, 1982.** Estimating saturated hydraulic conductivity from soil morphology, *Soil Sci.Soc.Am.J.*,46, 1 239-1244.
- Mandelbrot, B.B., 1983.** The fractal geometry of nature. *Ed. W.H. Freeman, San Francisco.*
- Mapangui A., 1993.** Etude de l'organisation et du comportement de sols ferrallitiques argileux de la vallée du Niari (Congo). *Thèse Paris 6.*
- Marshall, T.J., 1958.** A relation between permeability and size distribution of pores. *Journal of soil science*, 9(1), 1 -8
- Marsily, G. de, 1986.** Quantitative hydrogeology: Groundwater hydrology for engineers, *Academic Press, Orlando, FL.* (De Marsily. 1981. Hydrogéologie quantitative. *Collection Sciences de la terre, Ed.Masson*)
- Marsily, G. de, 1992.** Soil and rock flow properties, stochastic description. *in Encyclopedia of physical science and technology, Vol.15, Academic Press.*
- Masini, G., A. Napoli, D.Colnet, D. Leonard, K. Tombre, 1989.** Les langages à objets. *Interéditions, Paris*
- Matheron, G. , 1967.** Eléments pour une théorie des milieux poreux. *Ed.Masson, Paris.*
- Mitchell, A.R. et N.Th van Genuchten, 1992.** Shrinkage of bare and cultivated soil. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 56, 1 036-1042.
- Monnier, G., P.Stengel, et J.C.Fiès, 1973.** Une méthode de mesure de la densité apparente de petits agglomérats terreux. Application à l'analyse des systèmes de porosité des sols. *Ann.Agr.*24,533-545
- Moore, C.A. et M.Krepfl, 1991.** Using fractals to model soil fabric. *Géotechnique* 41, 1 , 1 23-134.
- Morel-Seytoux H.J., et J.A. Billica, 1985.** A two-phase numerical model for prediction of infiltration: case of an impervious bottom. *Water Resour.Res.*21:1389-1396.
- Mualem, Y., 1973.** Modified approach to capillary hysteresis based on a similarity hypothesis. *Water Resour. Res.* 9(5), 1324-1331.
- Mualem, Y., 1974.** A conceptual model of hysteresis, *Water Resour. Res.*, 10 (3),514-520.
- Mualem Y. et G.Dagan, 1975.** A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media, *Water Resour. Res.* 12(3),514-520.
- Mualem, Y., 1976.** Hysteretical models for prediction of the hydraulic conductivity of unsaturated porous media, *Water Resour. Res.*, 12 (6), 1248-1254.

- Newmann, A.C.D. et A.J. Thomasson, 1979.** Rothansted studies of soil structure III. Pore size distribution and shrinkage processes. *Journal of soil science*, 30,415-439.
- Nikiforoff, C.C., 1941.** Morphological classification of soil structure. *Soil Science*,52, 19 3-211.
- Oades J.M. et A.G. Warters, 1991.** Aggregate hierarchy in soils .*Aust.J.Soil Res.*,29,815-828.
- Peitgen H.O. et P.H.Richter, 1986.** The beauty of fractals. *Ed. Springer-Verlag.*
- Perfect, E., et B.D. Kay, 1991.** Fractal theory applied to soil aggregation. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 55:1552-1558.
- Perfect, E., B.D. Kay et V. Rasiah, 1993.** Multifractal model for soil aggregate fragmentation. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 57, 896-900.
- Perrier, E., 1989.** ECOUL: Simulation numérique et graphique des transferts hydriques dans un sol non saturé, *document interne Orstom.*
- Perrier, E., 1990.** Modélisation du fonctionnement hydrique des sols. Passage de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique (Revue bibliographique). *Actes du colloque Séminfor IV "Le transfert d'échelle" Ed.Orstom* 113-132.
- Perrier, E., C. Mullon, M. Rieu et G. de Marsily, 1992.** An "object-oriented" computer construction of deforming fractal soil structures. Determination of their water properties. *Actes du colloque "Porous or fractured unsaturated media: transports and behaviour. EPFL.Lausanne. Suisse.*
- Pfeifer, P., et D. Avnir, 1983.** Chemistry in noninteger dimensions between two and three. I. Fractal theory of heterogeneous surfaces. *J. Chem. Phys.* 79(7):3558-3564.
- Pietro (di), L.B., A. Melayah, and S. Zaleski, 1994.** Modelling water flow in unsaturated porous media by interacting lattice gas- cellular automata. II. Infiltration. *Water Resour. Res.* (à paraître)
- Poss, R., 1991.** Transferts de l'eau et des éléments minéraux dans les terres de barre du Togo. Conséquences agronomiques. *Thèse Université Paris 6.*
- Poulovassilis, A., 1969.** The effect of hysteresis of pore water on the hydraulic conductivity. *Soil Sci.* 20, 52-56.
- Poulovassilis, A., 1970.** The hysteresis of pore water in granular porous bodies.*Soil Sci.*109,5-12.
- Preparata, F., et M. Shamos , 1988.** Computational geometry, *Ed. Springer-Verlag.*
- Rasiah, V., B.D. Kay et E. Perfect, 1993.** New mass-based model for estimating fractal dimensions of soil aggregates. *Soil Sci.Soc. Am. J.* 57, 891-895.
- Rawls, W.J et D.L. Brakensiek, 1989.** Estimation of soil water retention and hydraulic properties. *in Unsaturated flow in hydrologic modeling, Nato Asi series, Kluwer Academic Publishers*,275-300.
- Rieu, M., 1990.** Représentation fractale du sol et de son fonctionnement hydrique *Actes du colloque Séminfor IV "Le transfert d'échelle" Ed.Orstom.*

- Rieu, M., et G. Sposito, 1991a.** Relation pression capillaire-teneur en eau dans les milieux poreux fragmentés et identification du caractère fractal de la structure des sols. *C.R. Acad. Sci. Paris*. 312 Série II:1483-1489.
- Rieu, M., et G. Sposito, 1991b.** Fractal fragmentation, soil porosity, and soil water properties: I Theory. *Soil Sci. Soc.Am. J.* 55, 1 231-1238.
- Rieu, M., et G. Sposito, 1991c.** Fractal fragmentation, soil porosity, and soil water properties: II Applications. *Soil Sci. Soc.Am. J.* 55, 1 239-1244.
- Ringrose-Voase A.J. et Bullock, 1984.** The automatic recognition and measurement of soil pore types by image analysis and computer programs. *Journal of soil science*, 35, 673-684.
- Robain, H. et P.Curmi, 1986.** Rôle de la structure pédologique sur le comportement hydrique du sol aux faibles pF. *C.R.Acad.Sci.Paris,t.303,Série II,6,509-514.*
- Rothman, H., 1989.** Macroscopic laws for immiscible two-phase flow in porous media:results from numerical experiments in MIT porous flow project. *Rapport Department of earth, Atmospheric, and Planetary Sciences. MIT USA.*
- Russel, E.W., 1971.** Soil structure: its maintenance and improvement, *Journal of soil science*, 22 (2), 137-150.
- Sala, G.H. et D. Tessier, 1994.** Rétention de l'eau par les matériaux argileux: signification et prévision. *C.R.Acad.Sci. Paris, Série II, t. 318 (à paraître).*
- Saliba, J. 1990.** Propriétés de transfert hydrique du mortier de ciment: modélisation à l'échelle microscopique;étude à l'échelle macroscopique des effets dynamiques des hétérogénéités. *Thèse Université Grenoble.*
- Scott, G.J.T., R. Webster et S. Nortcliff, 1986.** An analysis of crack pattern in clay soil: its density and orientation. *Journal of soil science*,37,653-668.
- Scott, G.J.T., R. Webster et S. Nortcliff, 1988a.** The Topology of pore structure in cracking clay soil. I.The estimation of numerical density. *Journal of soil science*,39,303-314.
- Scott, G.J.T., R. Webster et S. Nortcliff, 1988b.** The Topology of pore structure in cracking clay soil. II.Connectivity density and its estimation. *Journal of soil science*,39,315-326.
- Serra, J., 1982.** Image analysis and mathematical morphology. *Ed.Academic Press.*
- Shepard, J.C., 1993.** Using a fractal model to compute the hydraulic conductivity function. *Soil Sci.Soc.Am.J.*, 57, 300-306.
- Shroeder, M. 1991.** Fractal, chaos, power laws. *Ed. Freeman&Co. U.S.A.*
- Skjeltorp, A.T. et P.Meakin, 1988.** Fracture in microsphere monolayers studied by experiment and computer simulation. *Nature* 335, 424-426.
- Sposito, G. et Giraldez J.V., 1976.** Thermodynamic stability and the law of corresponding states in swelling soils. *Soil.Sci.Soc.Am.J.*,40 : 352-358.
- Stauffer, 1985.** Introduction to percolation theory. *Ed. Taylor&Francis.*

- Tessier, D., G. Pedro, et L. Camara, 1980a.** Sur le comportement hydrique et l'évolution de l'organisation des argiles (kaolinites et smectites) au cours de la dessiccation et de la réhumectation. *C.R.Acad.Sci. Paris* t.290 (17). Série D.1169-1172
- Tessier, D., 1980b.** Sur la signification de la limite de retrait dans les argiles. *C.R.Acad.Sci. Paris* t.291 (4). Série D.377-380.
- Tessier, D., et G. Pedro, 1984.** Recherches sur le rôle des minéraux argileux dans l'organisation et le comportement des sols. *Livre jubilaire du cinquantenaire de l'AFES. (Ass.Fran.Etu.sols)*,223-234.
- Tessier, D., 1984.** Etude expérimentale de l'organisation des matériaux argileux. Hydratation, gonflement et structuration au cours de la dessiccation et de la réhumectation. *Thèse d'état université Paris 7.*
- Thirriot, C., 1981.** Déplacement capillaire de fluides non miscibles dans un réseau de forme hexagonale. *C.R.Acad.Sci.Paris* t.293:873-876.
- Thirriot C., 1982.** Rusticité ou sophistication des modèles capillaires pour l'explication de l'hystérésis en milieu poreux. *Bull. GFHN. no 11: 57-81.*
- Thomasson, A.J., 1978.** Towards an objective classification of soil structure, *Journal of soil science*, 1978,29,38-46.
- Thompson, A.H., A.J.Katz et C.E. Krohn, 1987.** The microgeometry and transport properties of sedimentary rock. *Advances in physics.* 36:625-694.
- Toledo, P.G, R.A Novy, H.T. Davis, et L.E. Scriven, 1990.** Hydraulic conductivity of porous media at low water content. *Soil Sci. Soc.Am. J.* ,54:,673-679.
- Touma, J., 1984.** Etude critique de la caractérisation hydrodynamique des sols non saturée. Rôle de l'air. *Thèse Institut National Polytechnique de Grenoble.*
- Touma, J., 1987.** TEST: Modèle pour tester la représentativité des caractéristiques hydrodynamiques d'un sol non saturé déterminées in situ. *Document Orstom Dakar* 25 pages.
- Towner G.D., 1986.** Anisotropic shrinkage of clay cores, and the interpretation of field observations of vertical soil movement. *J.of soil Science*, 37: 363-371.
- Turcotte, D.L. 1986.** Fractals and fragmentation. *J. Geophys. Res.* 91(B2):1921-1926.
- Tyler, S.W., et S.W. Wheatcraft, 1989.** Application of fractal mathematics to soil water retention estimation. *Soil Sci. Soc.Am. J.* 53: 987-996.
- Tyler, S.W., et S.W. Wheatcraft, 1990.** Fractal processes in soil water retention. *Water Resour. Res.* 26: 1045-1054.
- Tyler, S.W., et S.W. Wheatcraft, 1992.** Fractal scaling of soil particle-size distributions: analysis and limitations. *Soil Sci. Soc.Am. J.* 56: 362-369.
- Vachier P., P. Cambier et R. Prost, 1979.** Structure d'un milieu poreux: la craie. *Ann.agro.*, 30,3,247-263.
- Van Damme, 1986.** Monolayer adsorption on fractal surfaces: a simple two dimensional simulation. *J.Chem. Phys.*, 85, 616-628.

- Van Genuchten, M.T.** 1980. A closed form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Sci. Soc.Am. J.* 44, 892-898.
- Vauclin, M.**, 1987. Hydrodynamique dans les sols partiellement saturés, déformables. *Rapport Ed. INRA.*
- Vauclin, M.**, 1989. Flow of water and air in soils: theoretical and experimental aspects. in *Unsaturated flow in hydrologic modeling, Nato Asi series, Kluwer Academic Publishers*, 53-91.
- Vicsek, T.**, 1989. Fractal growth phenomena. *Ed. World Scientific.*
- Voltz, M. et Y.M.Cabidoche**, 1987. Sur le retrait macroscopique d'un sol argileux gonflant. Modèle de relation entre le retrait vertical et les variations de teneur en eau. *C.R.Acad.Sci.Paris* t305, SérieII, 511-516.
- Waldrop, M.** , 1993. Computing in science. *Science* 261. 849-850..
- Whitaker, S.**, 1986. Flow in Porous media I: a theoretical derivation of Darcy's Law. II, The governing equations for immiscible, two-phase flow. III, Deformable media *Transport in porous media* 1, I (3-25) II(105-125), III(127-154).
- Wise, W.R.**, 1992. A new insight on pore structure and permeability, *Water Resour. Res.*, 28 (1), 189-198.
- Wu Q., M.Borkovec, et H.Sticher**, 1993. On particle-size distributions in soils. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 57,883-890.
- Young, I.M., et J.W. Crawford**, 1991. The fractal structure of soil aggregates: its measurement and interpretation. *J. Soil Sci.* 42, 187-192.

ANNEXES

ANNEXE A. LOIS ÉLÉMENTAIRES EN PHYSIQUE DES FLUIDES DANS UN TUBE OU UNE FRACTURE: LOI DE LAPLACE ET LOI DE POISEUILLE

A.1. LOI DE LAPLACE ET RÉPARTITION DE L'EAU ET DE L'AIR EN MILIEU NON SATURÉ

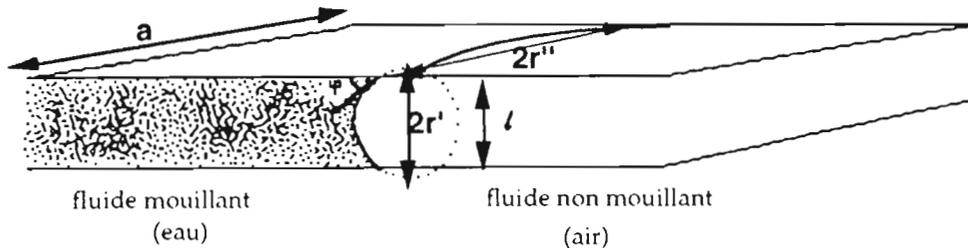
Lorsque deux fluides non miscibles sont en présence l'un de l'autre, leur interface est caractérisée par l'existence d'une tension interfaciale σ , une constante pour deux fluides donnée et une température donnée, qui induit une différence de pression h entre les deux phases.

La loi de Laplace donne la valeur de h en fonction du rayon de courbure moyen r de l'interface.

$$h = \frac{2\sigma}{r} \quad \text{où } \frac{2}{r} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} \text{ , } r' \text{ et } r'' \text{ rayons de courbures principaux.}$$

Par exemple, la différence de pression entre l'air et l'eau est ainsi nulle à la surface d'un plan d'eau de courbure infinie ...

A proximité d'une paroi solide, d'autres tensions interfaciales interviennent. L'interface se raccorde à la paroi en faisant un angle φ qui dépend des tensions fluide-fluide et fluides-paroi. Un des fluides a plus tendance que l'autre à longer la paroi, il est dit "mouillant" ($\varphi < 90^\circ$, $\cos\varphi > 0$, ici l'eau) et le deuxième "non mouillant" (ici l'air). A l'intérieur d'un pore de forme géométrique simple, on peut calculer r .



Différence de pression à l'interface: $h = \sigma(1/r' + 1/r'')$

Figure A.1. Loi de Laplace dans une fracture parallélépipédique d'épaisseur l et de profondeur a

Dans un tube cylindrique de rayon R , $r = R/\cos\varphi$ et $h_{cap} = \frac{2\sigma\cos\varphi}{R}$

Dans une fracture (Fig.A.1) d'ouverture l et de profondeur a , $r' = (l/2)/\cos\varphi$ $r'' = (a/2)/\cos\varphi$. Si $a \gg l$, on peut négliger le terme $\frac{1}{r''}$, d'où la forme simplifiée :

$$h_{cap} = \frac{2\sigma\cos\varphi}{l}$$

Cette différence de pression h_{cap} entre deux fluides en contact à l'intérieur d'un conduit est appelée pression capillaire.

En particulier, la loi de Laplace permet de calculer la hauteur d'eau z ascendante dans un conduit plongé dans une surface d'eau libre (remontée capillaire, Fig.A.2b), où les forces capillaires s'équilibrent avec les forces de pesanteur sur l'eau de masse volumique ρ , $h_{cap} = \rho g z$. (On parle aussi loi de Jurin dans ce cas, et pour des conduits cylindriques).

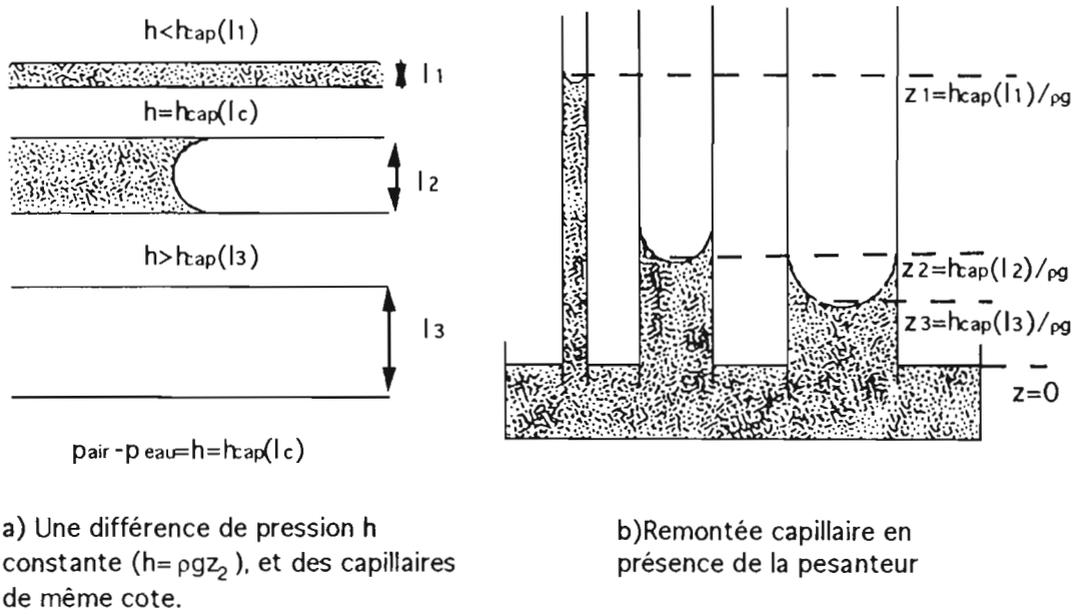


Figure A.2. Répartition de l'eau et de l'air dans des pores d'ouvertures variables en l'absence (a) ou présence (b) de forces gravitaires

Dans la zone non saturée du sol où air et eau coexistent, $h = \text{pression}(\text{air}) - \text{pression}(\text{eau})$ est une différence de pression positive. Si l'on suppose l'air à la pression atmosphérique, choisie comme référence nulle, la pression de l'eau proprement dite est négative, et l'on parle souvent de suction.

Pour une teneur en eau θ donnée dans un volume de sol de cote donnée, où l'on peut faire abstraction de la pesanteur, on suppose des phases eau et air continues, les pressions dans chaque phase s'égalisent, et on obtient un état d'équilibre caractérisé par une pression capillaire h unique. L'interface air-eau doit alors avoir un rayon de courbure unique correspondant à h . Dans un modèle de pores capillaires, i.e. une collection de pores d'ouverture l (rayon d'un tube cylindrique ou épaisseur d'une fracture), l'interface se situe au niveau de pores d'ouverture $l_c(h) = \frac{2\sigma \cos \varphi}{h}$ (Fig.A.2a). A chaque pore correspond une pression capillaire potentielle $h_{cap}(l) = \frac{2\sigma \cos \varphi}{l}$ d'autant plus élevée que le pore est fin. Pour un pore d'ouverture l plus grande que $l_c(h)$, $h = \text{pression}(\text{air}) - \text{pression}(\text{eau}) > h_{cap}(l)$, la pression de l'air est assez importante pour avoir déplacé l'interface dans ce pore qui est envahissable par l'air (de façon générale, par le

fluide non mouillant). Un pore d'ouverture plus petite que $\zeta(h)$ est envahissable au contraire par l'eau (fluide mouillant).

A.2. LOI DE POISEUILLE : ÉCOULEMENT DANS UN CONDUIT SATURÉ D'EAU

Dans un conduit de forme géométrique simple et à bords parfaitement lisses, saturé d'un fluide incompressible de viscosité connue μ , on sait calculer le débit q du flux d'eau engendré par une différence de pression P_1-P_2 aux extrémités du conduit (cf. de Marsily 1986, intégration des équations de mouvement de fluides). En l'absence de forces extérieures telles que la gravité,

- la formule de Poiseuille, pour un tube cylindrique de rayon r et de longueur L donne:

$$q = \frac{\pi r^4}{8\mu} \frac{P_1 - P_2}{L}$$

- son analogue pour une fracture d'épaisseur l , de longueur L , et de largeur a est:

$$q = a l \frac{l^2}{12\mu} \frac{P_1 - P_2}{L}$$

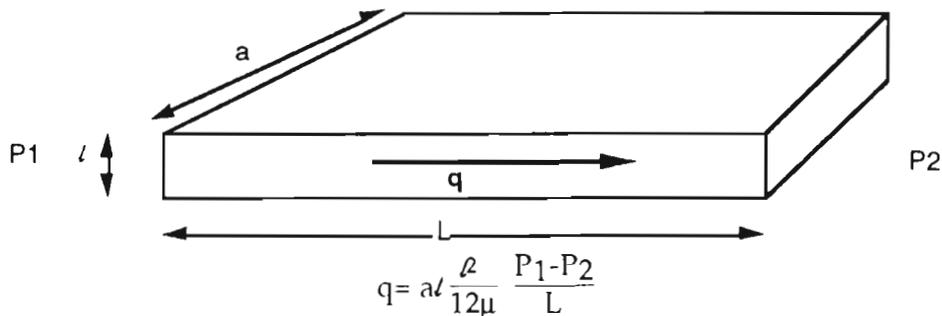


Figure A.3. Loi de Poiseuille dans une fracture. Expression du débit d'eau q traversant les faces (a,l)

La loi de Poiseuille est l'analogue en hydraulique de la loi d'Ohm en électricité. Le flux d'eau est proportionnel à la différence de potentiel de pression ΔP aux extrémités de la fracture comme l'intensité de courant i dans un élément conducteur d'électricité est proportionnelle à la différence de potentiel électrique ΔU ; le coefficient de proportionnalité étant dans le premier cas la conductance hydraulique K de la fracture ($q=K\Delta P$), dans le deuxième cas l'inverse de la résistance électrique R du conducteur ($i=\Delta U/R$). Se basant sur cette analogie, la conductivité hydraulique équivalente d'un réseau de pores tubulaires ou parallélépipédiques saturés d'eau est couramment calculée (Chap.3 et 7) comme l'inverse de la résistance équivalente entre les bornes d'un réseau de résistances électriques (réseau de Kirchoff).

ANNEXE B. GÉOMÉTRIE FRACTALE: GÉNÉRALITÉS ET LISTE DES PRINCIPALES DÉFINITIONS UTILISÉES EN SCIENCE DU SOL

INTRODUCTION

Il n'existe pas à ce jour une définition unique et acceptée par tous d'un objet fractal et de sa dimension fractale. Nous allons parcourir les principales définitions utilisées, sur des exemples très simples choisis parmi les figures de référence de la théorie fractale, pour lesquels elles sont équivalentes: on dispose en effet d'objets mathématiques étranges (ensemble de Cantor, courbe ou île de von Koch, tapis de Serpinski, courbe de Peano, éponge de Menger ...etc.), qui jouent en géométrie fractale le même rôle que les figures classiques (carrés, cercles, ellipses, sphères...) en géométrie euclidienne.

Citons l'île de von Koch (Fig.B.1) avec sa frontière de longueur infinie entourant une surface finie, qui sert de modèle pour les côtes d'une île, de plus en plus découpées avec le degré de résolution.

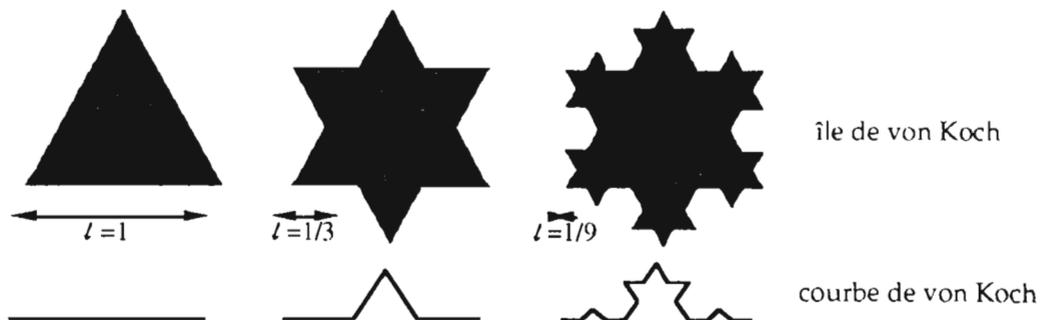


Figure B.1: Île et courbe de von Koch au bout de 3 itérations.

Citons également de l'éponge de Menger (Fig.B.2) qui sert de référence à plusieurs modèles de structure de sol. Elle est construite de la façon suivante: Un cube de longueur 1 est divisé en 27 petits cubes. 7 petits cubes de taille 1/3 sont enlevés au centre de chaque face et au centre du cube; une décomposition identique est appliquée aux 20 cubes restant, enlevant 20*7 petits cubes de taille 1/9 et laissant 20*20 cubes de taille 1/9 sur lesquels le procédé est réitéré; et ainsi de suite à l'infini pour obtenir une éponge infiniment "trouée". L'ensemble de ces trous représente chez de nombreux auteurs l'espace poral d'un sol fractal.

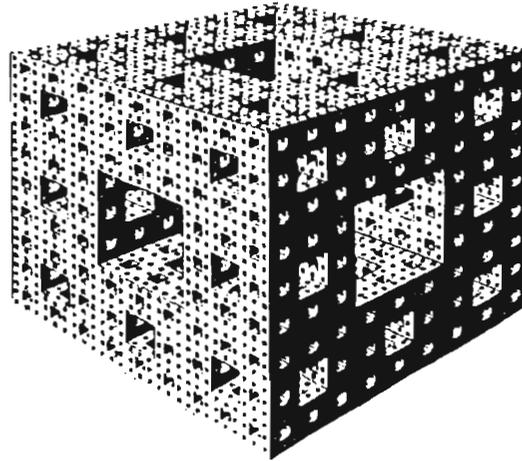


Figure B.2: Éponge de Menger.

Un modèle simple, couramment utilisé lui aussi en science du sol est celui du tapis de Sierpinski (Fig.B.3), qui n'est autre qu'une face de l'éponge de Menger; nous examinerons plus en détail ce dernier exemple.

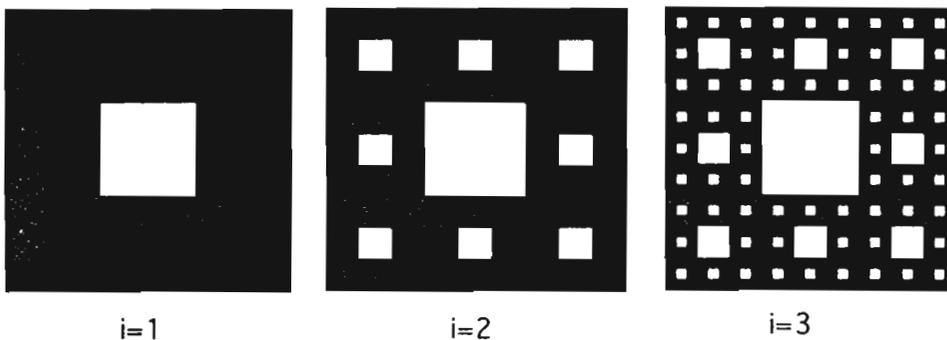


Figure B.3. Construction du tapis de Sierpinski (3 itérations représentées).

D'un point de vue quantitatif, ces figures très simples illustrent bien les problèmes de mesure que l'on rencontre dans la réalité lorsque de nouveaux détails apparaissent à chaque niveau de résolution.

MESURE D'UN OBJET À DES ÉCHELLES DE RÉOLUTION DE PLUS EN PLUS GRANDES

Comment se conçoit de façon intuitive la notion de mesure? Mesurer la longueur d'un chemin entre deux points peut se faire en l'arpentant et en comptant le nombre de pas. Mesurer un objet (un ensemble de points borné) consiste à choisir un étalon de mesure (unité de mesure) et à "recouvrir" l'objet de façon à compter le nombre d'unités de mesure nécessaires. S'il s'agit d'un segment de droite, on peut mesurer sa longueur L en le recouvrant par N segments unitaires de longueur l , $L=Nl$ (et le nombre de segments nécessaires est inversement proportionnel à l'unité de mesure $N \sim l^{-1}$); si l'on mesure l'aire A d'un carré avec N pavés de côté l , $A=Nl^2$ ($N \sim l^{-2}$), le volume V d'un cube avec N sous-cubes d'arête l , $V=Nl^3$ ($N \sim l^{-3}$).

On peut aussi mesurer des objets moins réguliers. C'est ainsi que la longueur d'une courbe entre deux points ou d'une boucle fermée (cercle, ellipse) se fait par des approximations polygonales de plus en plus fines (Fig.B.4). Si ces approximations polygonales sont constituées de N côtés de longueur l , le périmètre du polygone est égal à Nl et la longueur L de la courbe est égale à la limite de Nl lorsque $l \rightarrow 0$. Pour des courbes ordinaires, rectifiables, cette limite est finie : $Nl \rightarrow L$ lorsque $l \rightarrow 0$. La dimension euclidienne de telles courbes est $d=1$. On peut mesurer de la même façon l'aire d'un objet de dimension $d=2$ en le "pavant" avec N carrés de côté l , ou le volume d'un objet de dimension 3 en le recouvrant par N cubes d'arête l . La mesure obtenue, Nl^d , est une approximation de la véritable mesure M obtenue par intégration, c'est-à-dire par passage à la limite lorsque $l \rightarrow 0$. Un objet est de dimension euclidienne d si cette limite est finie $Nl^d \rightarrow M$, ou encore si, asymptotiquement, $N \sim l^{-d}$.

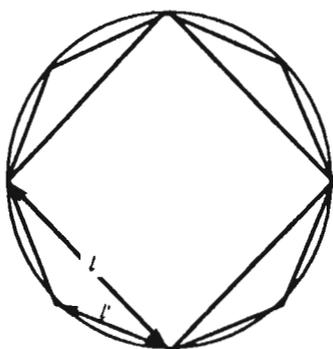


Figure B.4. Mesure de la longueur d'une courbe par approximations polygonales.

La même méthode de mesure appliquée aux objets fractals donne des résultats curieux. L'exemple le plus simple est le calcul de la longueur d'une courbe telle que celle qui sert de frontière à l'île de von Koch. Il s'agit d'une courbe non rectifiable, un polygone dont le périmètre augmente indéfiniment lorsque l'unité de mesure l diminue! Sur la figure B.1, on voit que: si $l=1$ le polygone a $N=3$ côtés; si $l=1/3$, $N=3 \times 4$; si $l=1/9$, $N=3 \times 4 \times 4$ et $N=3 \times 4^i$ pour $l=(1/3)^i$. $Nl = 3(4/3)^i$. Lorsque l tend vers 0, i tend vers l'infini, et le périmètre Nl tend vers l'infini. On peut remarquer que $N \sim l^{-D}$ avec $D = \text{Log}4 / \text{Log}3$ (en vérifiant que $4 = (1/3)^{-D}$ et $N = 3 \times 4^i = 3(1/3)^{-iD} = 3l^{-D}$).

Pour un objet quelconque plongé dans un espace euclidien de dimension d , on peut définir une mesure à partir de recouvrements par des "d-boules" de taille linéaire l , unités élémentaires de mesure de portions de l'espace. Par exemple, si $d=2$, une d-boule peut être, suivant la distance choisie, un disque de diamètre l ou un carré de côté l . Toujours sur un exemple, on peut recouvrir le pourtour de l'île de von Koch, plongé dans un plan de dimension $d=2$ en remplaçant chacun des segments de taille l comptés précédemment par un disque de diamètre l .

Par analogie avec la dimension euclidienne, un objet plongé dans un espace de dimension d peut être défini comme fractal, de dimension fractale D , lorsque, $N(\ell)$ étant le nombre minimal de "d-boules" de taille linéaire ℓ permettant de le recouvrir,

$$N(\ell) \sim \ell^{-D} \tag{B.1}$$

où D est un nombre (inférieur à d , et en général non entier) supérieur à la dimension topologique* de l'objet.

En toute rigueur, la proportionnalité entre $N(\ell)$ et ℓ^{-D} est une propriété asymptotique de la fractale, lorsque ℓ tend vers 0: $\text{Log } N(\ell)$ varie comme $-D \text{Log } \ell$ et D est défini par passage à la limite:

$$D = \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{\text{Log } N(\ell)}{-\text{Log } \ell} \tag{B.2}$$

Suivant ce que l'on mesure sur de tels objets, longueurs, aires ou volumes seront respectivement proportionnels à $N(\ell)\ell^1 = \ell^{1-D}$, $N(\ell)\ell^2 = \ell^{2-D}$, $N(\ell)\ell^3 = \ell^{3-D}$. Lorsque $\ell \rightarrow 0$, suivant la valeur de D , ces mesures tendent vers 0 (c'est le cas de l'aire du tapis pour lequel on va vérifier que $D < 2$) ou vers l'infini (c'est le cas du périmètre de l'île où $D > 1$).

Exemple: Le tapis de Sierpinski est l'objet représenté en noir (partie "pleine") sur la figure B.5, ou plutôt celui que l'on obtiendrait après une infinité d'itérations.

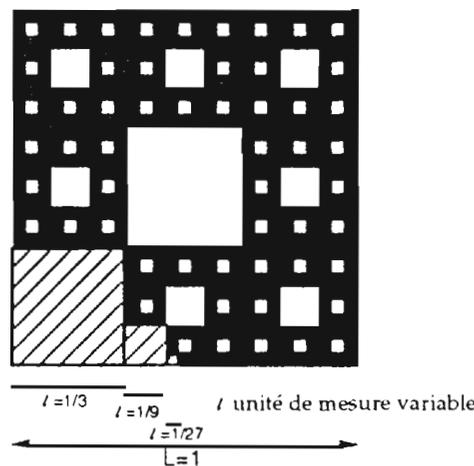


Figure B.5. Mesure de l'aire du tapis de Sierpinski avec des carrés de tailles décroissantes.

Pour recouvrir totalement cet objet, il faut 8 pavés de côté $1/3$ ou bien 64 pavés de côté $1/9$ et donc: $N(\ell) = 8^i$ pour $\ell = (1/3)^i$. L'ensemble des "pleins" est une surface fractale avec $N(\ell) \sim \ell^{-D}$, formule aisément vérifiable pour $D = \text{Log } 8 / \text{Log } 3 \approx 1.89$; son aire est égale à $N(\ell)\ell^2 = \ell^{2-D}$ et tend vers 0 avec ℓ . Par contre l'ensemble des "trous" n'est pas un fractal: si l'on cherche à effectuer au

* La dimension topologique d'un objet est 0 pour un ensemble discontinu de points, 1 si l'on peut établir un homéomorphisme (correspondance bijective et bicontinue) entre l'objet et une droite, 2 si l'objet est homéomorphe à un plan, etc...). Le pourtour de l'île de Koch est de dimension topologique 1.

moyen des mêmes pavés que précédemment un recouvrement de l'ensemble dessiné en blanc, cela nécessite 9 pavés de côté $1/3$, 81 pavés de côté $1/9$ et donc autant de petits cubes de taille l que le recouvrement du carré initial tout entier ($D=2$); son aire tend vers 1.

On emploie différentes pratiques de recouvrement, dont on démontre qu'elles aboutissent à des résultats équivalents: la forme des d-boules dépend de la métrique choisie; le recouvrement peut être fait avec des boules disjointes ou non...etc. ..

La méthode de détermination appelée "méthode des boîtes", couramment utilisée en analyse d'images, utilise un quadrillage du plan à maille de plus en plus fine (Fig.B.6).

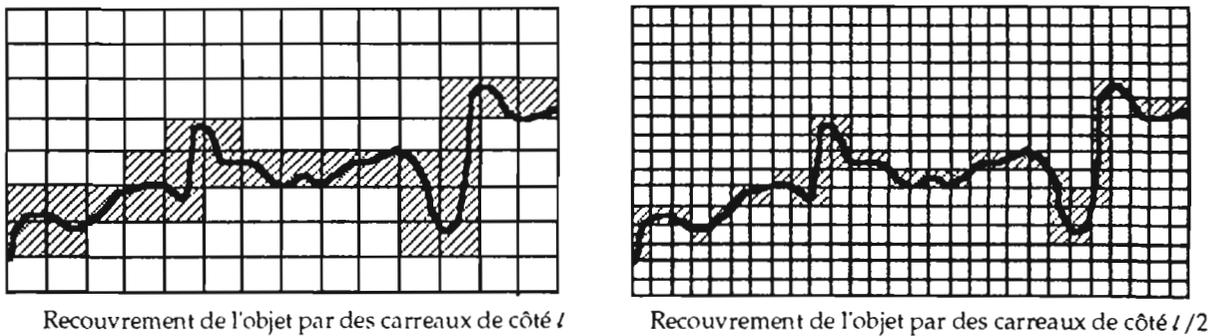


Figure B.6. Méthode des boîtes ("box counting")

DÉFINITION DE MINKOWSKI-BOULIGAND

Un autre type de recouvrement consiste en la réunion de toutes les d-boules de taille l centrées sur un point de l'objet (Fig.B.7).

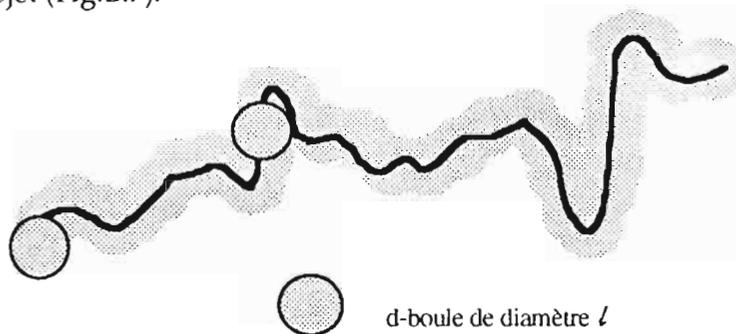


Figure B.7. Saucisse de Minkowski (Recouvrement continu obtenu par la réunion de toutes les boules centrées sur un point de l'objet)

L'ensemble formé par cette infinité de boules non disjointes a un volume euclidien $V_d(l)$ (longueur, aire ou volume usuel suivant la valeur de d), mesurable pour chaque valeur décroissante de l . Pour un objet fractal, on vérifie que :

$$V_d(l) \sim l^{d-D} \tag{B.3}$$

où $V_d(l)$ est le volume de l'enveloppe de l'objet "épaissi" de façon continue par une d-boule de dimension linéaire l le parcourant.

La définition (B.3) est à rapprocher de la définition (B.1) car on pourrait associer à $V_d(l)$ un nombre équivalent $N(l)$ de boules de volume l^d tel que $V_d(l) = N(l) l^d$ et donc tel que $N(l) \sim l^{-D}$. L'équivalent de l'expression (B.2) est alors :

$$D = \lim_{l \rightarrow 0} \left(d - \frac{\text{Log } V_d(l)}{\text{Log } l} \right) \quad (\text{B.4})$$

L'expression (B.4) est la définition de la dimension fractale dite de Minkowski-Bouligand.

DÉFINITION DE HAUSDORFF-BESICOVITCH

Une définition mieux formalisée de la dimension fractale est celle de Hausdorff-Besicovitch qui généralise la notion de mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^n . On effectue un recouvrement de l'objet à mesurer par des d -boules de taille linéaire l_i inférieure ou égale à l auxquelles on affecte une mesure l_i^α , α étant a priori inconnu. Une approximation de la mesure totale M_α de l'objet est alors la valeur minimale $\inf(\sum l_i^\alpha)$ obtenue sur l'ensemble des recouvrements possibles. $M_\alpha = \lim_{l \rightarrow 0} (\inf(\sum l_i^\alpha))$. On démontre qu'il existe une valeur α_0 telle que $M_\alpha = 0$ si $\alpha > \alpha_0$, $M_\alpha = \infty$ si $\alpha < \alpha_0$ (et M_{α_0} quelconque). Cette valeur de α pour laquelle la mesure ainsi définie fait un saut de 0 à l'infini est la dimension, entière ou pas, de l'objet mesuré.

Cette définition sert de référence pour les développements mathématiques (Falconer, 1990). Elle est rarement utilisée telle que en pratique. La dimension de Hausdorff-Besicovitch est inférieure ou égale à la dimension de Minkowski-Bouligand. Dans la majorité des cas connus, ces deux dimensions coïncident.

ZOOM INVERSE

Par ailleurs, cette façon d'appréhender la multiplicité des échelles de longueur en partant d'un objet donné que l'on mesure à des degrés de résolution de plus en plus fins n'est pas la seule utilisée. Nous avons étudié un objet fractal tel le tapis de Sierpinski borné par une échelle supérieure de taille. On peut au contraire concevoir des figures fractales croissant à l'infini.

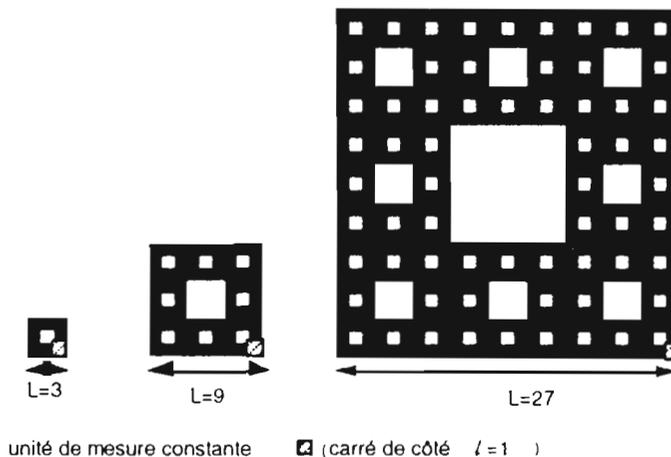


Figure B.7. Mesure de l'aire du tapis de Sierpinski à des échelles variables.

Considérons le tapis de Sierpinski de façon ascendante, en supposant une borne inférieure l à l'objet fractal, et mesurons le avec une unité de mesure constante $l=1$ comme indiqué sur la figure B.7. Si l'on mesure l'aire $A(L)$ d'un tapis de taille $L=3$ en le recouvrant par des pavés de taille 1, cela nécessite 8 pavés; il faut 64 petits pavés de taille 1 pour recouvrir un tapis de taille $L=9$ et par récurrence $A(L)=8^i$ pour $L=3^i$. On peut vérifier que $A(L)=L^D$ avec $D=\text{Log}8/\text{Log}3$.

Cette approche consiste à exprimer la variation d'une mesure M non pas en fonction de l'unité de mesure l mais en fonction de la taille linéaire L de cet objet. De même que la mesure d'un objet de dimension euclidienne d varie en L^d (volume d'une sphère $\sim L^3$, surface d'une sphère $\sim L^2$, surface d'un disque $\sim L^2$, circonférence d'un cercle $\sim L$), une propriété vérifiée par un grand nombre d'ensembles fractals est:

$$M(L) \sim L^D \tag{B.5}$$

où $M(L)$ est une mesure effectuée sur une d -boule de taille L centrée sur l'objet.

Dans l'exemple précédent, M était le nombre de boules de taille l servant à recouvrir le tapis, c'est-à-dire une aire; M peut être une mesure quelconque, mais il s'agit souvent d'une masse dans les applications physiques et l'on nomme l'exposant D défini par l'expression (B.5) une dimension fractale de masse. Comme pour (B.1), il s'agit d'une proportionnalité asymptotique, et D est obtenue lorsque L tend vers l'infini:

$$D = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\text{Log } M(L)}{-\text{Log } L} \tag{B.6}$$

Remarquons alors que la densité $\rho(L)$ de la grandeur $M(L)$ sera calculée par rapport au volume euclidien L^d contenant l'objet fractal : $\rho(L)=M(L)/L^d$ et donc $\rho(L) \sim L^{D-d}$, où $d-D$ est appelé la codimension de l'objet fractal. La densité du tapis diminue ainsi en L^{D-2} lorsque L augmente, où encore sa porosité augmente avec l'échelle.

Cette formulation de la fractalité d'un objet donne lieu à une méthode de détermination de D basée sur la fonction de corrélation d'un ensemble de points. La densité d'une sphère de rayon L centrée sur un des points est proportionnelle à la probabilité $C(L)$ de trouver un autre point à la distance L . $C(L)$ est par définition la fonction de corrélation entre deux positions des points de l'ensemble. On peut ainsi déterminer D tel que $C(L) \sim L^{D-d}$.

COLLECTION FRACTALE D'OBJETS

Citons enfin une autre définition - "un ensemble d'objets est fractal quand une loi de puissance relie le nombre et la taille des objets", Mandelbrot, 1982 - qui fait référence à des collections d'objets fractales indépendamment de leur position relative dans l'espace.

$$\text{Nombre}(\text{objets de taille}=l) \sim l^{-D} \tag{B.7}$$

Cette définition d'un fractal en nombre reste très voisine de la définition (B.1).

Exemple: Tapis de Sierpinski.

Les trous du tapis suivent cette définition: on a 1 trou de taille $1/3$, 8 trous de taille $1/9$, $(8)^{i-1}$ trous de taille $(1/3)^i$; $N \sim l^{-D}$ et on peut dire que cet ensemble de trous est fractal, au sens d'une collection d'objets, avec la même valeur de D que le tapis lui-même.

On peut aussi calculer le nombre cumulé N_c d'objets de taille supérieure ou égale à l ; c'est la somme d'une progression géométrique qui varie comme N proportionnellement à l^{-D} , dès que le nombre de termes de la somme est suffisamment important.

$$N_c(\text{objets de taille} \geq l) \sim l^{-D} . \quad (\text{B.8})$$

C'est sous cette forme que plusieurs auteurs caractérisent une distribution fractale de particules dans un milieu poreux, l'ensemble de particules pouvant être représenté par le négatif du tapis de Sierpinski.

UNE EXPRESSION GÉNÉRALE DE LA FRACTALITÉ?

Lorsqu'il s'agit de mesurer la dimension fractale d'un objet naturel et d'un sol par exemple, d'une part en fonction du modèle fractal choisi et des grandeurs que l'on privilégie, et d'autre part en fonction des mesures disponibles, l'une ou l'autre des définitions précédentes est utilisée.

De façon générale, lorsqu'une grandeur scalaire Y quelconque (longueur, surface, volume, masse, nombre d'éléments, densité) attachée à un objet suit une loi de puissance avec l'échelle d'observation, on dira que l'objet est fractal. Les différentes "définitions" précédentes (B.1, B.3, B.5, B.7) peuvent être regroupées sous la forme:

$$Y \sim \left(\frac{L}{l}\right)^\lambda \quad (\text{B.9})$$

où la variable est soit une échelle de longueur maximale L , $Y(L) \sim L^\lambda$, soit une échelle minimale l , $Y(l) \sim (1/l)^\lambda$. Suivant les cas, λ est égal à la dimension fractale D (ou $-D$), ou à la codimension $d-D$ (ou $D-d$) de l'objet.

Ces relations de proportionnalités ne sont en toute rigueur qu'asymptotiques, et peuvent n'être vérifiées que par passage à la limite ($L \rightarrow \infty$ ou $l \rightarrow 0$) sur certains exemples mathématiques. Pour déceler le caractère fractal d'objets physiques, on recherche malgré tout de telles relations, pour les échelles de longueur dont on dispose.

DÉTERMINATION PRATIQUE DE LA DIMENSION FRACTALE

Dans le cas d'objets fractals construits de façon déterministe par reproduction d'un motif donné (générateur), où à chaque itération, n sous-motifs sont ajoutés dans un rapport de réduction r des échelles de tailles, la proportionnalité (B.1) est exacte et le passage du premier au deuxième niveau suffit pour calculer D :

$$D = \frac{\text{Log } n}{\text{Log } \frac{1}{r}} \quad (\text{B.10})$$

Exemples:

Tapis de Serpinski (Fig.B.3): 8 sous-tapis de taille 3 fois plus petite sont rajoutés à la deuxième itération; $n=8$, $r=1/3$, $D=\text{Log}(8)/\text{Log}(3)\cong 1,89$.

Ile de von Koch (Fig.B.1): on remplace un segment de longueur 1 par 4 sous segments de longueur $1/3$; $n=4$, $r=1/3$, $D=\text{Log}(4)/\text{Log}(3)\cong 1,26$.

Eponge de Menger (Fig.B.2): une éponge de niveau i donne naissance à l'itération $(i+1)$ à 20 sous-éponges de côté divisé par 3, $D=\text{Log}(20)/\text{Log}(3)\cong 2.72$.

Citons au passage un autre exemple de base de la géométrie fractale, l'ensemble de Cantor, défini comme suit: un segment est divisé en trois parties égales et la partie centrale est enlevée. Le processus est réitéré sur chacun des deux segments restant et ainsi de suite (Fig.B.8.a). Sa dimension est $\text{Log}2/\text{Log}3$. Il existe de nombreuses variantes de l'ensemble de Cantor; en restant ici dans le cadre déterministe, on peut par exemple utiliser un générateur où, après division en n sous-segments égaux, p d'entre eux sont enlevés (Fig.B.8.b), obtenant des dimensions fractales $\text{Log } p/\text{Log } n$ comprises entre 0 et 1.

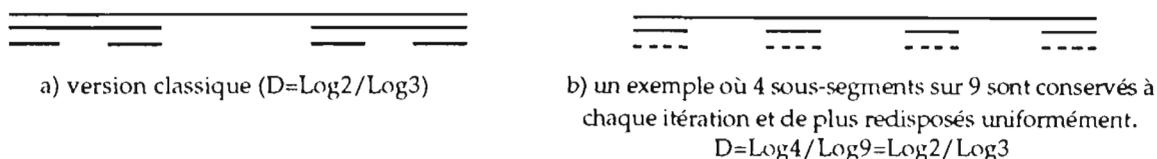


Figure B.8. Exemples d'ensembles de Cantor

Sur un objet donné dont on veut savoir s'il peut être qualifié de fractal, on cherche à vérifier une relation de type (B.9) et le calcul de D est principalement effectué par ajustement Log/Log . En effet si Y varie en loi de puissance $f(D)$ de X , $Y=AX^{f(D)}$. $\text{Log}Y=f(D) \text{Log}X+\text{Log}A$ et la dimension fractale est estimée à partir d'une régression linéaire de $\text{Log}Y$ sur $\text{Log}X$. Par exemple, D est couramment déterminé à partir de l'expression (B.1) comme la pente de la droite de régression linéaire de l'ensemble des points $(\text{Log } N(l), \text{Log } l)$ obtenus pour des valeurs variables de l . La fiabilité d'un tel ajustement a pu être remise en cause en particulier parce qu'il atténue les courbures (Falconer,1990), il n'en reste pas moins vrai que cette méthode est quasiment la seule à être utilisée en pratique.

EXTENSIONS DE LA GÉOMÉTRIE FRACTALE

Il se trouve que les structures fractales présentées dans la littérature montrent toutes une certaine forme d'auto-similarité (que la dimension fractale permet en partie de quantifier) au sens d'une ressemblance entre un objet et une partie quelconque de l'objet à toute échelle d'observation. L'auto-similarité est stricte, d'un point de vue géométrique, lorsque la partie est une copie exacte du tout, copie réduite obtenue une similitude contractante de rapport r qui à tout couple de points (M,N) de l'ensemble associe deux points M' et N' de la copie tels que $d(M',N')=r d(M,N)$ avec $r<1$. L'utilisation de telles transformations géométriques pour diviser à

l'infini un motif de base en sous-motifs identiques est une technique qui permet de produire des figures fractales parfaitement auto-similaires dont on peut aisément calculer la dimension (formule B.10). Parmi les multiples façons de générer des fractales à partir d'algorithmes itératifs variés, une procédure privilégiée consiste à utiliser des transformations géométriques étendant la notion d'auto-similarité pour construire des objets qui répondent encore à une des définitions présentées tout en se rapprochant de la diversité des formes naturelles.

Ensembles fractals non uniformes

Une première extension, qui reste dans le cadre déterministe et parfaitement auto-similaire, permet de construire des fractales non uniformes en divisant un motif de base en n sous-motifs similaires, mais en utilisant des similitudes de rapports variables r_i ($1 \leq i \leq n$) pour chacun des sous-motifs.

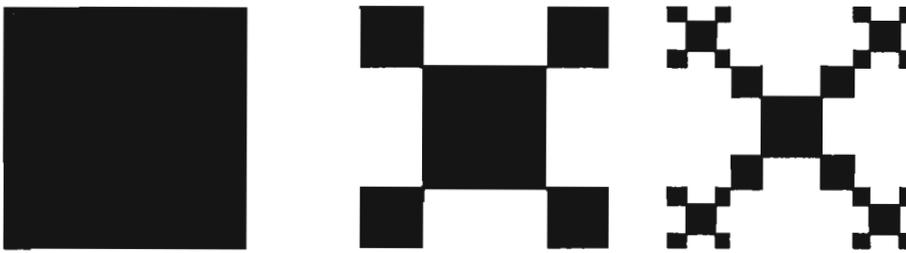


Figure B.9. Premières itérations d'une fractale non uniforme avec deux échelles de dilatation imbriquées (d'après Gouyet, 1992). $4(1/4)^D + (1/2)^D = 1$ d'où $D = \frac{\text{Log}(1+\sqrt{17})}{\text{Log}2} - 1$.

On montre que les différentes définitions coïncident sur de tels ensembles et que la dimension fractale D est calculable en résolvant l'équation implicite B.11.

$$\sum_{i=1}^{i=n} r_i^D = 1 \tag{B.11}$$

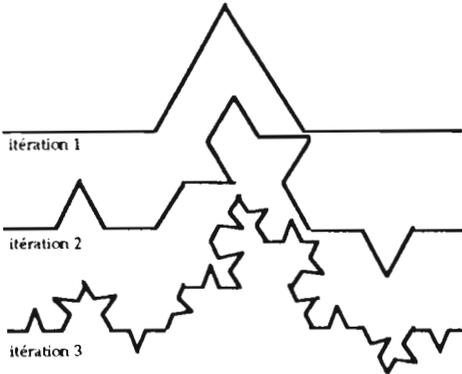
Lorsque les similitudes sont de rapports identiques r , (B.11) équivaut à $nr^D=1$ et donc à (B.10). Lorsque les rapports sont différents, on obtient des fractales non uniformes telle que celle dessinée sur la figure B.9.

Ensembles fractals aléatoires

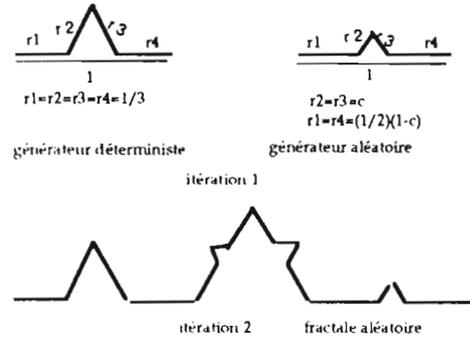
Des fractales irrégulières peuvent être construites par simulation en introduisant des composantes aléatoires dans une procédure de construction élaborée au départ pour générer une fractale parfaitement auto-similaire. Falconer (1990) donne deux exemples de variantes aléatoires de courbes de von Koch dont les principes de modification aléatoire sont illustrés sur la figure B.10, à comparer avec la figure B.1. Toutes sortes de variantes peuvent être générées, certaines conservant la même dimension fractale que la fractale auto-similaire à laquelle elles

sont associées(cf.Fig.B.10.a) d'autres pas (cf.Fig.B.10.b). Lorsque les paramètres aléatoires introduits sont tirés au sort dans des distributions identiques à chaque itération, on obtient des figures dites "statistiquement auto-similaires" et pour lesquelles on peut calculer dans certains cas à l'avance la dimension fractale à partir des caractéristiques des lois de distribution utilisées. En particulier si la loi de distribution des rapports de similitude r_i est connue, on a:

$$E\left(\sum_{i=1}^{i=n} r_i^D\right) = 1$$



a) tirage au sort de la position du générateur d'un côté ou de l'autre du segment qu'il remplace $D = \text{Log}4 / \text{Log}3$



b) tirage au sort de la taille c du segment médian que l'on remplace par deux segments de taille c . c tiré au sort dans une loi uniforme sur $[0, 1/3]$
 $D \approx 1,144$ (solution de $E(2c^D + 2((1/2)(1-c))^D) = 1$)

Figure B.10. Deux fractales aléatoires dérivées de la courbe de Von Koch.

"Les fractales statistiques sont à quelques exceptions remarquables près les seules rencontrées dans la nature; leurs propriétés fractales portent sur des moyennes statistiques" (Gouyet, 1992). L'auto-similarité statistique est définie par Falconer (1990) par: "enlargements of small parts are not identical to the whole but have the same statistical distribution of the whole set". Nous avons construit de telles fractales tout au long du travail présenté dans cette thèse.

Ensembles fractals auto-affines

Les fractales auto-affines constituent une généralisation des fractales auto-similaires. Les similitudes sont remplacées par des fonctions affines quelconques. Il en résulte des rapports de contractions différents suivant la direction de l'espace et des figures géométriques présentant encore une sorte d'auto-similarité, mais anisotrope. L'étude de séries temporelles fournit beaucoup d'exemples de représentations graphiques de fonctions $f(t)$ auto-affines pour lesquelles des méthodes spécifiques d'étude et d'estimation de dimensions fractales ont été développées (Le Méhauté, 1990).

Falconer (1990) continue à mesurer les dimensions de tels objets par des recouvrements classiques mais signale qu'il n'existe pas de méthode pour calculer leur dimension fractale directement à partir des paramètres des fonctions affines qui ont pu permettre de les construire ("obtaining a dimension formula for general self-affine sets is an intractable problem").

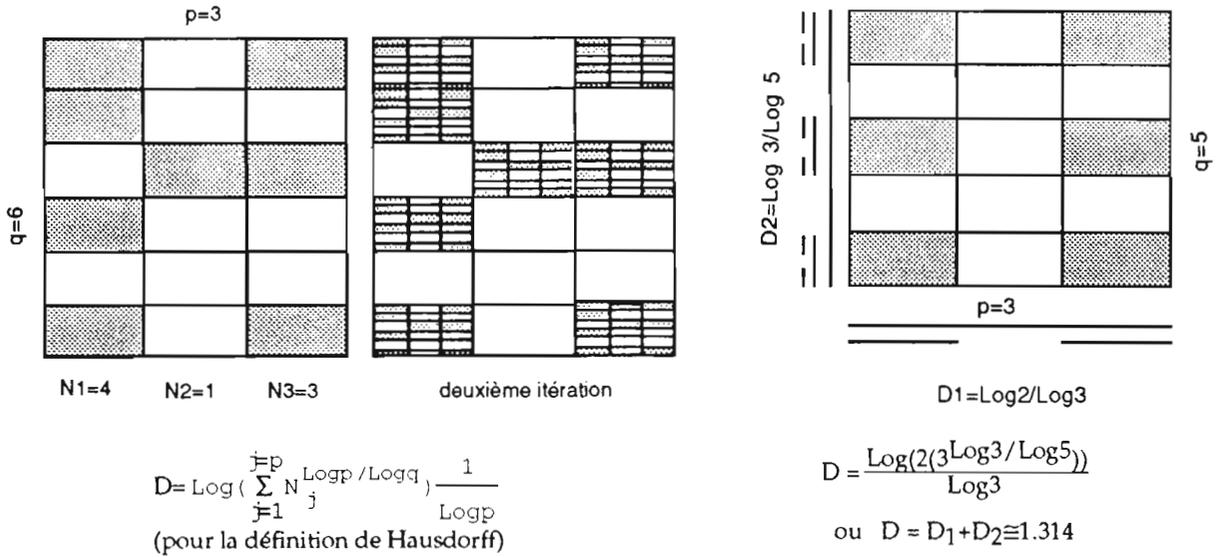


Figure B.11. Exemples d'ensembles fractals auto-affines

Cependant, dans un cas particulier de décompositions de rectangles en sous rectangles (Fig.B.11.a), il démontre que la méthode des boîtes et la définition de Hausdorff conduisent à des dimensions calculables et légèrement différentes. On peut voir dès la deuxième itération sur cet exemple qu'un sous-rectangle est une "copie" du tout effectuée par réduction anisotrope. Par ailleurs, dans un chapitre consacré à l'étude du produit cartésien de deux ensembles fractals, il montre que le produit de deux ensembles de Cantor de dimension D_1 et D_2 est une fractale de dimension $D=D_1+D_2$ (dans ce cas méthode de Hausdorff et méthode des boîtes coïncident). Lorsque ces deux ensembles sont de dimensions distinctes, on obtient une fractale affine (Fig.B.11.b) qui peut être considérée comme un sous cas particulier des décompositions en rectangles précédentes. Nous avons utilisé ce résultat dans notre travail (chapitre 7) et dans ce cas particulier nous avons pu exprimer la dimension fractale de l'ensemble auto-affine en fonction des coefficients des transformations géométriques (composées d'affinités orthogonales) qui permettent de le générer .

Mesures et objets multifractals

Les multifractales constituent une extension de la géométrie fractale actuellement très étudiée. Il ne s'agit plus de caractériser la structure géométrique globale d'un objet au moyen d'une dimension unique, mais d'aller vers une caractérisation géométrique d'une mesure hétérogène,

définie sur cet objet, par un "spectre" de dimensions fractales. Cette mesure est généralement celle d'un phénomène physique attaché un support fractal.

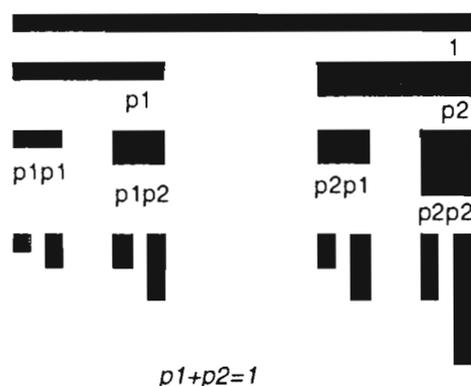


Figure B.12. Représentation d'une mesure binomiale multifractale dont le support est un ensemble de Cantor

Un cas d'école est l'ensemble de Cantor auquel on affecte une mesure totale égale à 1 et répartie de façon non uniforme sur l'ensemble (Fig.B.12). A chaque itération, un segment de taille x est remplacé par deux sous-segments de taille $x/3$ sur lesquels la mesure est répartie en proportions respectives p_1 et p_2 . On définit ainsi récursivement une mesure binomiale "fractale" qui présente de plus en plus de singularités locales lorsque le degré de résolution augmente. Cette mesure est dite multifractale au sens où les sous-ensembles formés par des points au voisinage desquels la mesure varie "de la même façon", en puissance α de l'échelle de mesure, sont fractals de dimension $f(\alpha)$ inférieure ou égale à celle du support. Ceci donne lieu à un formalisme plutôt complexe. En pratique, des caractérisations indirectes et équivalentes ont lieu en étudiant les variations des moments d'ordre q de la distribution de la mesure en fonction de l'échelle de résolution à laquelle les mesures sont effectuées.

Une distribution multifractale peut être définie de la même façon sur un support géométrique non fractal (on peut remplacer le support de l'exemple précédent par un segment de longueur x se partageant en deux parties de longueur $x/2$ pondérées respectivement par p_1 et p_2 et ainsi de suite à l'infini). On voit que la multifractalité est plus une propriété d'une mesure que celle d'un objet proprement dit.

Cependant on peut aussi définir des objets géométriques multifractals. C'est ainsi que l'on peut qualifier les fractales non uniformes (cf. Fig.B.9) de multifractales en choisissant comme mesure celle de la densité de l'objet mesurée par des recouvrements de plus en plus fins.

"As with fractals, an exact definition of multifractal measures tends to be avoided" (Falconer, 1990). Citons cependant Stanley et Meakin (1988): "the neologism 'multifractal phenomena' describes the concept that different regions of an object have different fractal properties". On conçoit qu'une approche multifractale permette d'imaginer des modèles plus proches de la réalité pour des phénomènes naturels complexes dont l'hétérogénéité spatiale est reconnue, mais

d'une façon beaucoup moins simple que celle qui consiste à caractériser une structure par une dimension fractale unique.

CONCLUSION

Nous avons cherché à donner un aperçu des principes de la géométrie fractale en cherchant avant tout à faire un inventaire des principales définitions couramment utilisées. Si ces différentes "définitions" conduisent souvent au même résultat (comme on l'a vu dans le cas idéal du tapis de Serpinski), elles ne sont pas équivalentes, et leur usage devient en particulier plus délicat dès que l'on dépasse le cadre de la stricte auto-similarité, que ce soit pour l'étude de structures naturelles ou celle de milieux fractals complexes. Des développements théoriques sont toujours en cours pour formaliser de mieux en mieux la géométrie fractale, dans un domaine où l'erreur de raisonnement est, plus encore qu'ailleurs, un risque encouru par chacun.

Les objets fractals mathématiques ont un comportement qui a parfois été qualifié de "pathologique" en termes de mesure lorsqu'ils sont développés jusqu'à l'infini (infiniment petit ou infiniment grand). Dans la réalité, les objets physiques ont des bornes supérieures et inférieures de taille, soit conceptuelles, soit liées aux instruments de mesure. Par exemple si l'on s'intéresse à un agrégat de particules, la taille de la particule (quoique souvent elle-même décomposable à un niveau plus fin) donne l'échelle inférieure et l'agrégat lui-même fournit l'échelle supérieure. Les passages à la limite pour une échelle de longueur tendant vers 0 ou ∞ restent une abstraction formelle. C'est pourquoi ce sont d'abord des lois de puissance caractérisant l'invariance d'échelle sur un domaine borné qui sont mises en évidence dans de nombreux milieux naturels. Des modèles fractals sont alors utilisés pour représenter géométriquement les structures qui peuvent expliquer l'apparition de ces lois de puissance.

On peut ainsi caractériser géométriquement, dans l'espace "géographique" des objets réels statiques (structures des sols, réseaux hydrographiques, nuages) ou des phénomènes dynamiques (structure du front d'invasion d'un fluide envahissant un milieu poreux en théorie de la percolation), mais les figures fractales peuvent être aussi des représentations graphiques de phénomènes dynamiques (processus temporels, attracteurs étranges dans l'espace des phases de processus chaotiques) dans un espace où l'échelle de "longueur" doit être interprétée en fonction de la distance et de la signification des coordonnées dans l'espace représenté. Et la difficulté à appréhender la géométrie fractale provient souvent du degré d'abstraction du modèle lui-même.

L'ensemble des programmes a été développé sur station de travail Sun. L'interface du simulateur et les graphismes sont créés dans un environnement de développement Xwindows (graphisme X et bibliothèque Xview d'outils d'interfaçage) en utilisant le langage C. Le programme de simulation proprement dit est écrit en langage C++ (sur-couche orientée-objet du langage C). L'acquisition de ces outils de programmation a été une part importante du travail de thèse.

C.1. CRÉATION D'UNE INTERFACE ET MISE AU POINT D'OUTILS GRAPHIQUES

L'interface permet à l'utilisateur d'envoyer des événements (clic de souris, frappe au clavier...) au programme et de déclencher les différents modules des programmes de simulation. Elle se présente sous forme d'une fenêtre principale constituée d'une zone graphique réservée aux représentations des structures simulées et de deux zones de contrôles, et inclut des fenêtres secondaires superposables.

La zone de contrôle horizontale contient différents boutons qui permettent essentiellement d'actionner différentes étapes des simulations ou de reprendre avec d'autres hypothèses (options) l'une de ces étapes. De gauche à droite, en "cliquant" sur

-*redémarrer*: on choisit une zone polygonale initiale (et toutes les variables sont réinitialisées, les objets des simulations précédentes détruits).

-*frag.niv.suivant*: on génère une première fragmentation, puis l'opération peut être répétée sur autant de niveaux que souhaité (ou que possible); on obtient un squelette de structure (Fig.C.1).

- *repérage noeuds*: on détermine les relations de voisinage entre noeuds sur le réseau irrégulier formé par le squelette et éventuellement l'association entre noeuds dans plusieurs plans associés (Fig.C.2).

- *création struct.*: on associe au squelette une structure poreuse. Cette étape peut être renouvelée pour différents paramètres et/ou options (Fig.C.3).

- *vider et remplir* (Fig.C.4): A partir d'un état initial saturé par l'eau ou par l'air (*tout remplir* ou *tout vider*), la simulation de l'invasion de l'air (*vider*) ou de l'eau (*remplir*) est effectuée à partir de la face supérieure de la structure. Elle peut se faire pas à pas pour différentes valeurs de pression capillaire h (*manuellement*) et en alternant différentes phases de drainage et d'imbibition, ou de façon automatique pour simuler le passage d'un état initial saturé par un fluide à un état final totalement désaturé.

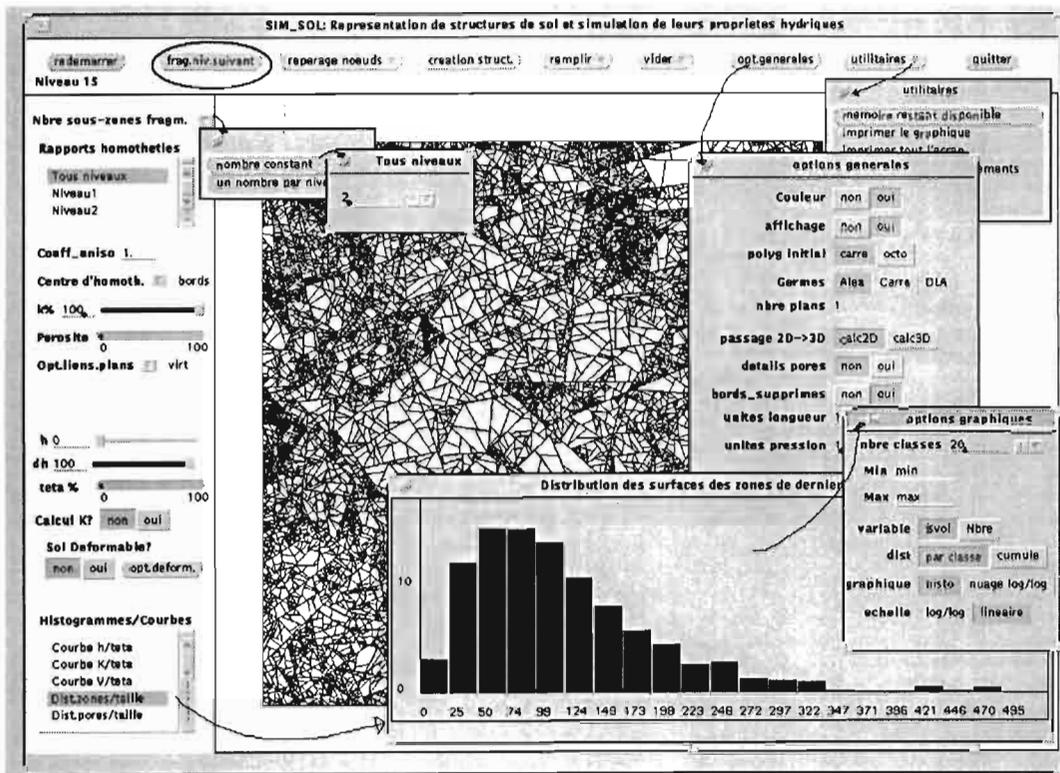


Figure C.1. Création d'un squelette de structure et un premier indicateur sur la distribution de des zones du dernier niveau de fragmentation

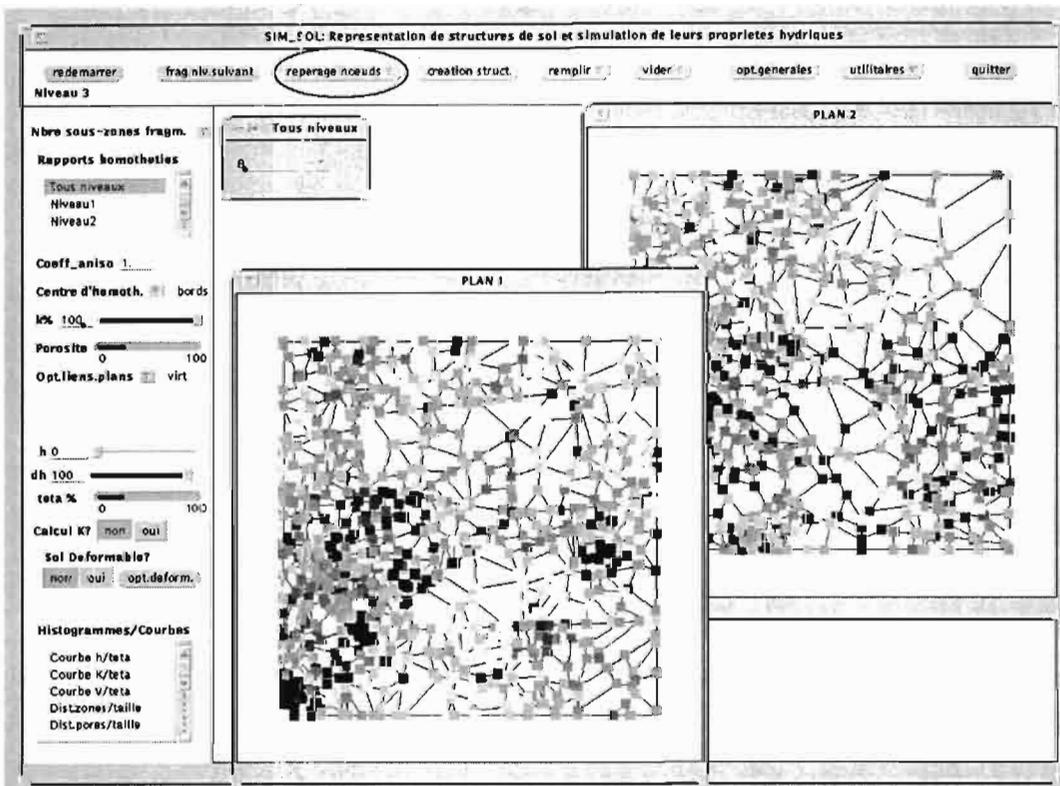


Figure C.2. Sur un autre squelette de structure et deux réalisations planes, recherche des relations de voisinage entre noeuds intra et inter-plans (les liaisons inter-plans sont visualisées par des carrés de couleur identique représentant deux noeuds associés).

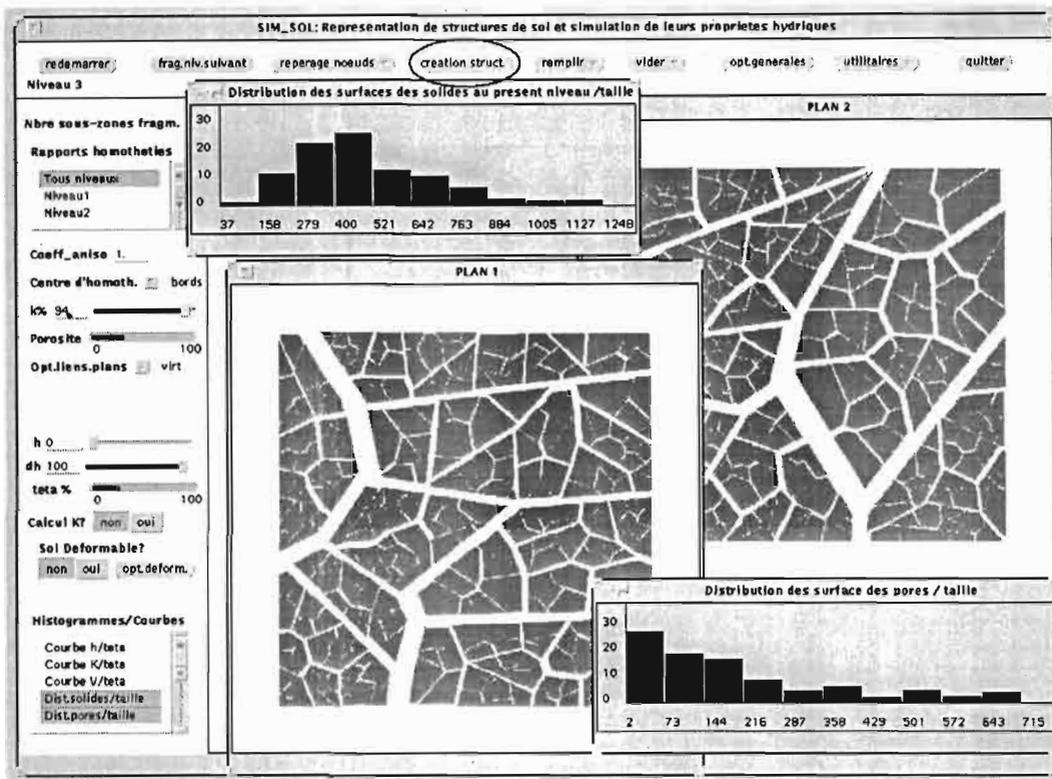


Figure C.3. Création d'une structure poreuse sur le squelette de la Fig.C.2

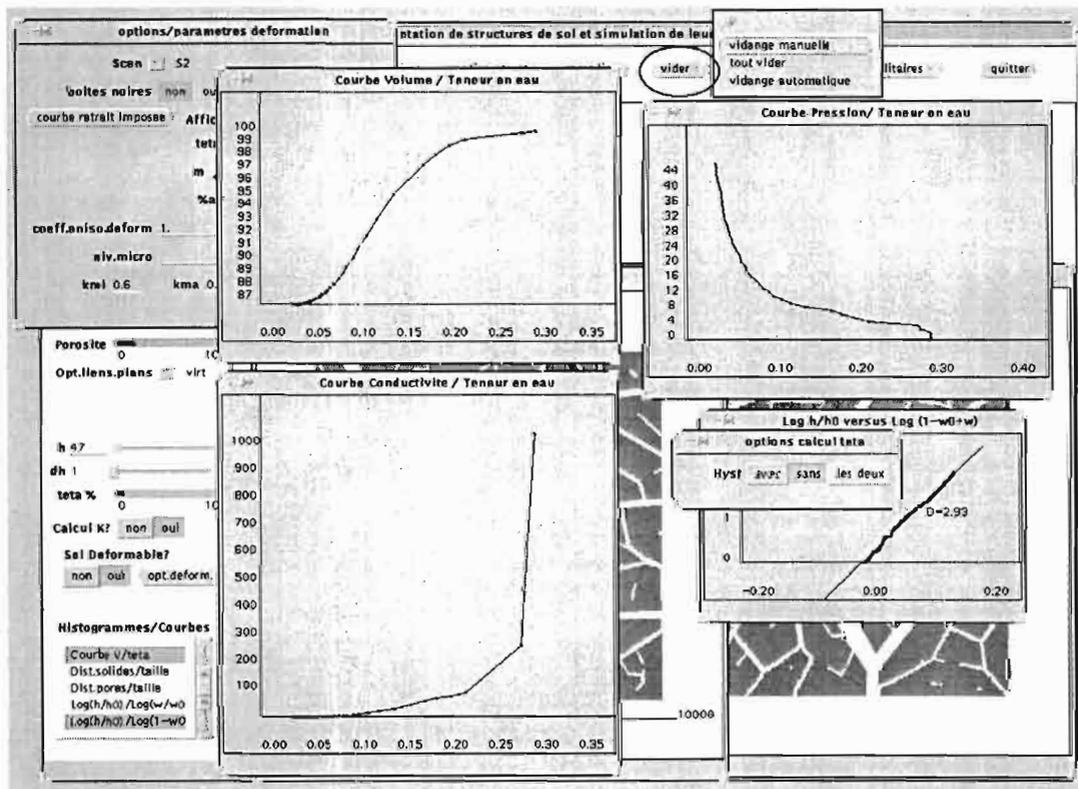


Figure C.4. Sur une structure simulée dont l'état à saturation est représenté sur la figure C.3, simulation pas à pas d'un drainage accompagné d'un retrait.

A chaque étape des simulations, les principales options sont accessibles sur la zone de contrôle verticale, en choisissant dans des menus ou sous-menus, en déplaçant des curseurs sur des échelles numériques, et éventuellement en entrant une valeur numérique particulière dans une zone réservée. Il peut s'agir: du nombre de sous-zones par zones de fragmentation; des valeurs des rapports d'homothéties (ou des affinités pour un coefficient d'anisotropie différent de 1) ou de la position des centres d'homothéties; du type de liaison inter-plans, du pas de variation de pression dh , du calcul de la conductivité ou non (*Calcul K?*), de la prise en compte ou non de déformations (*Sol déformable?*)... Certaines options moins usitées sont rajoutées dans une liste *options-générales* (Fig.C.1). D'autres options plus spécifiques sont associées à différents objets de l'interface sous forme de menus ou de fenêtres de contrôle secondaires (par exemple pour les différents scénarios de déformation (Fig.C.4))

A tout moment au cours d'une simulation, on peut visualiser courbes (Fig.C.4) ou calculs statistiques élémentaires (histogrammes Figs.C.1,C.3, régression linéaire Fig.C.4) en superposant momentanément des sous-fenêtres sur la fenêtre principale, chacune d'elles comportant son propre choix d'options.

Les utilitaires graphiques ou statistiques ont été développés en langage C sous forme d'une bibliothèque de procédures indépendantes. Les programmes d'interfaçage sont eux aussi indépendants des programmes de simulation, auxquels ils transmettent les paramètres nécessaires, en modifiant les valeurs données par défaut.

Le programme est donc conçu de façon à être utilisé interactivement, en explorant successivement diverses hypothèses et en comparant visuellement et grâce aux outils disponibles les résultats des simulations. Mais il peut être aussi lancé à partir de la ligne de commande et en donnant la valeur des principaux paramètres; plusieurs protocoles expérimentaux enchaînant les différentes étapes d'une simulation (ou plusieurs simulations successives) sont disponibles; les résultats sont alors donnés sous forme de fichiers numériques et/ou d'impressions automatiques des images.

C.2. PROGRAMMATION ORIENTÉE OBJET

Langages de programmation.

Si l'ancêtre des langages orientés objets (langage Simula, 1967) a été développé pour permettre de mieux représenter les objets physiques manipulés dans des logiciels de simulation, c'est dans tous les domaines de la programmation informatique qu'est de plus en plus utilisée une approche orientée objet. Cette approche peut être vue comme une méthode de conception en génie logiciel et ses mérites sont souvent vantés pour la conception et la maintenance de programmes lourds par une équipe nombreuse de programmeurs.

De nombreux langages orientés objets ont été développés (cf. ouvrages de Masini, 1989 ou Bailly, 1989). Certains d'entre eux nécessitent un pur style de programmation "tout objet" comme par exemple Smalltalk (1972). D'autres sont des refontes ou des sur-couches de langages classiques comme par exemple le langage C++ (1983) que nous avons utilisé et qui offre l'avantage et l'inconvénient de donner aussi accès au langage C classique: un avantage parce qu'il conserve la vitesse d'exécution de ce langage compilé; un inconvénient parce qu'il n'incite pas toujours le programmeur à faire l'effort de repenser sa façon de programmer pour profiter pleinement des bénéfices de la programmation objet.

En effet, indépendamment du langage utilisé, la conception par objets se présente avant tout comme une nouvelle philosophie de la programmation et la plupart des auteurs soulignent la nécessité du changement d'état d'esprit, plus que d'un changement de langage informatique.

Principes généraux et objets manipulés par nos programmes

Modélisation et création d'objets

On parle d'une "programmation dirigée par les données" (Masini, 1989): il faut se poser la question "De quoi parle-t-on?" avant "Que veut-on faire?" (Ferber, 1990). La première étape d'analyse consiste à identifier les objets de son domaine d'intérêt (il peut s'agir d'objets mathématiques, d'objets de l'univers purement informatique, comme les objets d'interface fournie par la bibliothèque que nous avons utilisée pour construire notre interface, ou bien d'objets naturels animés ou inanimés que l'on veut représenter dans un programme de simulation, ou encore d'objets très conceptuels comme des événements par exemple) puis à les modéliser. C'est une chose aisée lorsque ces objets possèdent déjà une représentation formelle (par exemple un segment est défini comme un ensemble de deux points, et un point dans le plan

comme un couple de deux nombres réels) mais la représentation informatique d'objets plus complexes sous forme d'un ensemble de données numériques ou numérisables constitue à elle seule des choix importants de modélisation.

En programmation objet, la traditionnelle séparation entre les procédures et les données n'a plus cours: un objet est à la fois l'ensemble de données (ou champs, ou attributs) qui le définissent et l'ensemble des procédures (ou méthodes) qui permettent de les manipuler (Fig.C.8).

Les objets d'un même type sont regroupés en classes, définies comme des structures de données et de procédures. Une classe est un type abstrait pour lequel on peut redéfinir des opérations classiques (allocation d'espace mémoire, affectation, comparaison) et des méthodes plus spécifiques.

Par exemple, le fait d'avoir défini une classe POINT permet d'écrire simplement des expressions du style $A=B$ pour affecter les valeurs de B à A ou de tester une égalité de points sous la forme $si (A==B)$ ou de noter $A*B$ la distance entre A et B, ce qui simplifie l'écriture du programme et améliore sa lisibilité. Cela permet aussi de définir d'autres méthodes de la classe POINT et d'écrire pour un point A donné: *A.cherche_le_plus_proche(ensemble_de_points)*.

```

class POLYGONE{
    int nbre_faces;
    FACE* face;
public:
    POLYGONE () {nbre_faces=0;face=new FACE} //constructeur par défaut
    POLYGONE (int n) //un deuxième type de constructeur allouant n faces
    POLYGONE (LISTE_POINTS lp) //un deuxième type de constructeur à partir d'une liste de sommets
    ~POLYGONE (){delete[nbre_faces] FACE} // le destructeur désallouant automatiquement l'objet
    //exemple: POLYGONE P= POLYGONE
    POLYGONE & operator = (const POLYGONE & P); //exemple: POLYGONE P= POLYGONE
    (liste_points)
    FACE renvoie_face(int no)
    affecte_face (int no, face f);
    affecte_face (int no, POINT A, POINT B,int voisin); // "surcharge" de la méthode affecte_face qui
    affecte_face (int no, SEGMENT s,int voisin); // peut prendre divers objets en paramètres
    void liste_attributs();
    void trace (Display*dpy, XID xid,GC gc, double échelle, int col);
    void colorie (Display*dpy, XID xid,GC gc, double échelle, int col);
    POINT barycentre (int choix);
    //exemple:G=P.barycentre(choix_gravite)
    int contient(POINT M); //exemple if (P.contient(M)) then ....
    double calc_surface();
    int ordonne(); //exemple: P.ordonne()
    void generer_germes(int* nbre_pts, POINT * germes, randint& ir, int type);
    void algo_voronoi(ENS_POLYGONES *ens_polygone);
    POLYGONE & homothetique(POINT C, double rapport);
    POLYGONE & affinite(POINT C, VECT vect)
    POLYGONE & translate(VECT vect);
    ....
};

```

Figure C.5. Un exemple de classe: la classe POLYGONE

Par exemple encore, ayant choisi de représenter des agrégats et des particules par des zones polygonales dans un plan, nous avons défini des objets polygones. Afin de pouvoir aisément fournir une méthode de fragmentation en sous-polygones (cf.§C.3.a), un polygone est défini comme un ensemble de faces de taille variable, chaque face regroupant un segment et un entier qui permet de repérer un éventuel polygone adjacent. Les principales méthodes sont listées à la suite des champs définissant un polygone sur la figure C.5.

Une classe est "un moule à partir duquel on fabrique autant d'exemplaires que l'on veut" (Bailly,1989). Ces exemplaires ou instances sont allouées et désallouées par des méthodes propres à la classe (constructeurs et destructeur en C++). "L'instanciation prend sa pleine signification dans des applications où le nombre d'objets du même type peut varier dynamiquement (...) la simulation nécessite ce mécanisme; on y redimensionne les scénarii à volonté" (Bailly, 1989). Ce mécanisme nous a particulièrement été utile puisque plusieurs niveaux d'allocations dynamiques se superposent dans notre programme (polygones au nombre de faces variables, ensembles de polygones au nombre variable de polygones).

Héritage et réutilisabilité

Une caractéristique importante des langages de programmation objets est la possibilité de définir, à partir de classes d'objets de base, des sous-classes ou classes dérivées héritant des champs et des méthodes de leur sur-classes plus génériques. C'est ainsi que dans notre programme, la classe des agrégats hérite de la classe polygone, celle des pores hérite des segments, celles des noeuds hérite des points.

Le programme concernant les objets géométriques est un programme séparé qui peut servir à d'autres applications comme une bibliothèque d'objets prédéfinis.

Dans l'exemple donné sur la figure C.6, par héritage, on définit un agrégat qui peut utiliser toutes les méthodes précédemment définies pour le polygone qu'il demeure. On peut bien entendu en définir de plus spécifiques comme par exemple *renvoie_etat_reduct* ou encore redéfinir certaines méthodes comme *calc_surface* ou *colorie*. Ainsi un objet agrégat est défini dans notre programme comme étant égal à une zone de fragmentation (fixe) mais possédant un rapport de réduction et une hiérarchie d'agrégat pères avec chacun leur propre rapport de réduction (ce rapport est un vecteur représentant les rapports d'affinités orthogonales qui peuvent être appliquées à une zone de fragmentation; ce n'est que lorsque ces deux composantes sont égales qu'il s'agit véritablement d'homothéties).

un agrégat est un polygone, plus... des champs et des méthodes supplémentaires

```

class AGREGAT :public POLYGONE{           //syntaxe pour une classe dérivée
int niv;                                 //niveau de fragmentation
int no_plan;                             //numéro de plan
AGREGAT *pere;                           //adresse de l'agrégat père du niveau précédent
VECT rap_reduct;                          //rapport d'homothétie ou double rapport si affinités
int sommet_alea;
int argileux;
public:
AGREGAT();                               //constructeur
~AGREGAT();                               //destructeur
AGREGAT & operator = (const AGREGAT & agr);
AGREGAT *renvoie_pere ();
void affecte_pere (AGREGAT *agr);
void affecte_etat_reduct (VECT k);
VECT renvoie_etat_reduct ();
int niveau_derniere_fragmentation();
double calc_surface();
void colorie (Display*dpy, XID xid,GC gc, double échelle, int col);
.....
};

```

Figure C.6. La classe AGREGAT est une sous-classe dérivée de la classe POLYGONE (Fig.C.5)

L'agrégat dont il est question dans les chapitres précédent est en fait l'image de cette zone pour un état d'ouverture ou de gonflement donné, celle que l'on peut représenter à l'écran grâce à la méthode *colorie* qui se redéfinit comme indiqué dans l'encadré de la figure C.7. La syntaxe du langage permet ici une écriture concise de transformations géométriques successives en réutilisant abondamment les méthodes précédemment écrites.

```

void AGREGAT :: colorie (Display*dpy, XID xid,GC gc, double échelle, int col)

{AGREGAT pere[nivmax];                    // tableau provisoire de la hiérarchie des agrégats
pères
  pere[niveau]=(*this)                    // le père de même niveau est l'agrégat lui-même
for (int i=niveau-1;i>0;i--) pere[i]=*(pere[i+1].renvoie_pere()); // détermination récursive des pères
for (i=0;i<=niveau;i++) for (int k=i;k<=niveau;k++)
  pere[k]=pere[k].homothetique(pere[i].barycentre(choix_gravite), pere[i].rapport_reduction)
// "homothéties" successives en utilisant des méthodes homothétique et
// barycentre de la classe polygone ainsi que l'opérateur = redéfini pour la classe dérivée
AGREGAT
if (argileux)
  (POLYGONE)pere[niveau].colorie(display,fenêtre[no_plan],cont_graphique,echelle,coul_argile)
// méthode colorie de la classe polygone
else
  (POLYGONE)pere[niveau].colorie(display,fenêtre[no_plan],cont_graphique,echelle,coul_sable);
//tableau provisoire désalloué automatiquement
}

```

Figure C.7. Une méthode de la classe AGREGAT sur définissant une méthode de la classe POLYGONE

De même nous avons utilisé des classes *LISTES_POINTS* et *LISTES_NOEUDS* comme des classes dérivées d'une classe *LISTE_QUELCONQUE* (listes de pointeurs sur un type générique indéfini nommé *void*), définie dans un programme séparé.

La programmation objet a facilité dans notre travail une écriture de programme plus ordonnée, plus modulaire et donc plus lisible.

Relations entre les différents objets et messages

L'encapsulation est une notion clé en programmation objets: on cache les détails d'implémentation qui n'intéressent a priori que le programmeur qui a conçu une classe, pour ne révéler aux utilisateurs que les informations strictement nécessaires pour manipuler les objets. Pour la classe *POLYgone* par exemple (Fig.C.5), on n'a pas besoin de savoir si un polygone est défini comme un ensemble de sommets ou de faces pour utiliser la méthode *homothétique* ou *gravite*; de même pour construire un polygone, on peut utiliser indifféremment les méthodes *affecte_face* ou un constructeur à partir d'une liste de points.

En général les champs sont "privés" et les méthodes "publiques" (le mot réservé *public*: délimite la fin du domaine privé dans les exemples C++ des figures C.5 et C.6). Modifier un des champs (privé) ne peut alors se faire directement mais seulement par appel à une des méthodes appartenant à l'interface de l'objet (Fig.C.7).

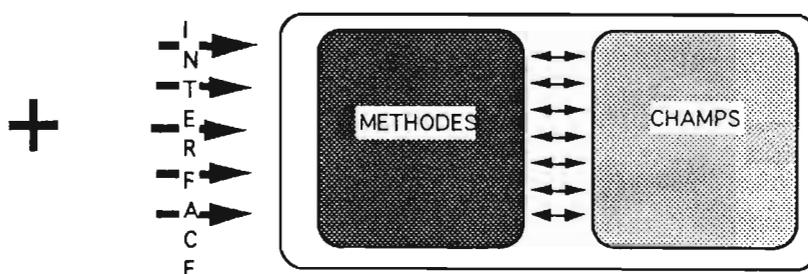
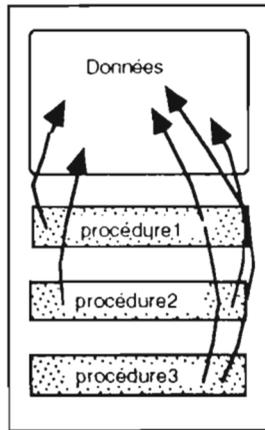


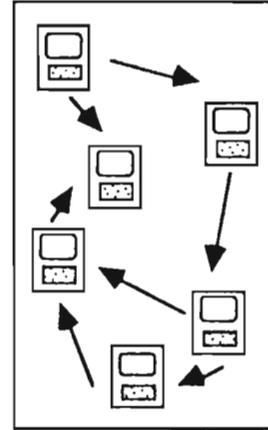
Figure C.8. "interface" d'un objet: on n'accède aux champs (privés) qu'au travers de méthodes (publiques) (Masini,1989)

Il en résulte la possibilité de changer assez facilement les structures de données et l'implémentation des objets a posteriori, car seules les méthodes publiques de la classe ont accès aux données privées et les modifications ne concernent donc qu'une portion de code réduite et localisable, un avantage dont nous avons tiré parti à maintes reprises. Mais ceci nous contraint à définir des méthodes qui permettent seulement d'affecter une valeur à un champ ou au contraire de "demander à l'objet" quelle la valeur d'un de ses champs, lorsque l'on veut malgré tout accéder aux données cachées*. Nous avons aussi maintes fois utilisé de tel procédés (exemple: méthodes *affecte_pere* et *renvoie_pere*, Fig.C.6), car nos principaux objets, agrégats, pores et noeuds sont très dépendants les uns des autres.

* Il existe aussi en C++ la possibilité de déclarer d'autres classes ou des fonctions *amicales* pour supprimer dans certains cas l'interdiction d'accès au domaine privé.



(a) programmation classique



(b) programmation par objets

Figure C.9. Envoi de messages d'objets à objets (Ferber 1990)

Ceci confère à l'objet un "aspect boîte" noire séduisant pour l'utilisateur: nous n'avons pas besoin de connaître la structure de l'objet fenêtre que nous avons utilisé dans nos programmes d'interfaçage (et elle est très complexe) pour l'utiliser, affecter une valeur au champ titre ou au champ position...etc. On parle d'autonomie des objets ou de "délégation des responsabilités" (Budd, 1991). L'objet est vu comme un être animé auquel les autres objets envoient des messages, et qui règle de façon interne sa façon d'exécuter ou de refuser la requête. "Un message correspond à l'activation d'une méthode" (Bailly,1989). Il en résulte théoriquement une libération de l'algorithme principal qui se réduit à une distribution des tâches, voire seulement à une impulsion initiale pour un processus qui se propage d'objets en objets.

La simulation de la progression d'un front d'invasion sur notre réseau de pores irrégulier bénéficie de ce type d'approche. Le front est représenté par un objet de la classe *LISTE_NOEUDS*. Son état initial est donné par le choix de certains noeuds ou points d'alimentation. Généralement il s'agit des noeuds de la face supérieure et l'on écrit *front.init(face_supérieure,etat)*. La progression du front correspond à un changement de pression capillaire et à une modification de la taille critique des pores envahissables. L'instruction *front.progresse_drainage()* est un simple parcours de liste. Chaque noeud à son tour "avertit" ses pores voisins. Ceux-ci calculent leur épaisseur en fonction de l'état d'ouverture des agrégats qu'ils touchent, et si leur taille est convenable (*pore.calcule_epaisseur() < rayon(pression)*) changent d'état (*pore.modifie_etat(fluide_entrant)*), se retracent avec une nouvelle couleur (*pore.trace(...)*), calculent leur surface ou volume et modifient la teneur en eau globale en conséquence (*teta=+/- pore.calc_surface()*). Si un pore a changé d'état, le noeud voisin suivant la direction donnée par le pore est averti à son tour et s'insère à la fin de la liste front, s'il n'en fait pas déjà partie. Ce noeud, s'il est effectivement nouvellement atteint sera rencontré automatiquement puisque la liste continue à être parcourue. La fin du parcours

de liste correspond à l'invasion maximum pour le pas de pression capillaire imposé et donne le nouvel état du front pour l'itération suivante.

Remarque: dans le cas de plusieurs réalisations planes, la progression du front et l'ajout de nouveaux voisins est soumis à une condition de passage par des pores virtuels qui n'ont qu'une épaisseur et ni contenu ni représentation graphique. Ceci est traité sous forme de conditions supplémentaires au sein de la méthode *progresser*. Une solution plus élégante et plus "objet" consisterait à définir une classe *PORE* générale et des classes dérivées *PORE_VIRTUEL* et *PORE_REEL* dont les méthodes porteraient le même nom et seraient appelées de façon homogène par un noeud: les différences de traitement seraient encapsulées dans les implémentations internes de ces méthodes dans les sous_classes de pores.

Le mot autonomie cher aux programmeurs objets est souvent associé au mot localité. En effet un objet ne peut utiliser de méthodes propres et se soustraire en partie au contrôle d'un programme principal centralisateur et complexe qu'à la condition de disposer parmi ses propres données d'informations sur son environnement et sur les objets avec lesquels il doit communiquer. Dans nos programmes, les relations entre les différents objets sont des relations de hiérarchie et de voisinage. Nous avons déjà vu que la hiérarchie de fragmentation était gérée localement* en introduisant dans l'objet agrégat un champ *pere*. Les relations de voisinage sont essentiellement gérées aux niveaux des pores et des noeuds.

<pre>class NOEUD:public POINT{ NOEUD();~NOEUD(); NOEUD* noeud_voisin[3]; NOEUD* noeud_plan_voisin[2]; PORE* pore[3]; public: void operator = (NOEUD n); void affiche (int col); int calc_niveau(); int calc_no_plan(); PORE & renvoie_pore(int direction); NOEUD* voisin_plan(int no_plan); NOEUD* voisin(int direction); void supprime(int direction); AGREGAT agregat_opp(int direction); };</pre> <p style="text-align: center;">(a)</p>	<pre>class PORE: public SEGMENT{ int ELT_PORE[2*nivmax] int type_fluide; double epaisseur; int no_plan; public: PORE();~PORE(); int renvoie_type_fluide(); void modif_type_fluide(); int direction(); double calc_epaisseur() void affecte_epaisseur(double ep); double renvoie_epaisseur(); int calc_niveau(); double_calc_surface(); void colorie(...); };</pre> <p style="text-align: center;">(b)</p>
--	--

FigureC.10. Classes NOEUD et PORE et relations de voisinage

Un pore est un segment (Fig.10b) situé entre deux noeuds consécutifs, qui connaît donc sa propre position mais aussi son numéro de plan (utile pour des réalisations multi-plans) et

* Nous avons aussi par ailleurs géré cette hiérarchie en construisant des classes *NIVEAU_AGREGATS*, *PLAN_AGREGATS*, *ESPACE_AGREGATS* qui ne sont autres que des tableaux dynamiques d'objets. C'est ainsi que nous avons géré la déformation non pas agrégat par agrégat mais niveau par niveau et de façon très "contrôlée" et non autonome.

surtout les agrégats qu'il borde (utilisant un tableau `ELT_PORE` permettant d'accéder à tous les agrégats de tous les niveaux dont un bord jouxte le pore). Il peut ainsi, à tout état d'ouverture de la structure, calculer son image, son épaisseur ou sa surface en utilisant les homothéties successives définies sur les éléments solides dont il dépend.

Un noeud est un point qui intègre la connaissance de ses noeuds voisins inter et intra-plans ainsi que celle des 3 pores qu'il relie dans un même plan (Fig.C.10.a)

Nous avons pu ainsi définir l'interdépendance entre les différents objets de nos structures simulées en distribuant l'information au sein de chaque objet. C'est ce qui nous a permis en particulier de travailler sur des réseaux irréguliers dont l'organisation est difficilement représentable par de simples tableaux ou matrices.

L'approche objet a donc facilité la représentation de la complexité de l'organisation spatiale de notre modèle. Les programmes auraient pu être écrits en langage C, en utilisant seulement des structures, des pointeurs, et des listes, mais l'implémentation sous forme de classes en C++ est formellement plus agréable et plus lisible.

C.3 PRINCIPAUX ALGORITHMES

a) Création de structure

Tesselation de Voronoi

A partir d'un ensemble de points (germes) donnés dans le plan ou dans un espace de dimension quelconque, la tesselation de Voronoi (ou de Dirichlet, ou de Thiessen) permet de déterminer les régions formées par l'ensemble des points les plus proches d'un germe donné (Fig.C.11a). C'est un principe très connu de fragmentation mathématique de l'espace (Serra, 1982, Preparata et Shamos, 1988). Plusieurs algorithmes de simulation ont été développés (pour une revue, voir Green et Sibson, 1978), le plus souvent dans le plan.

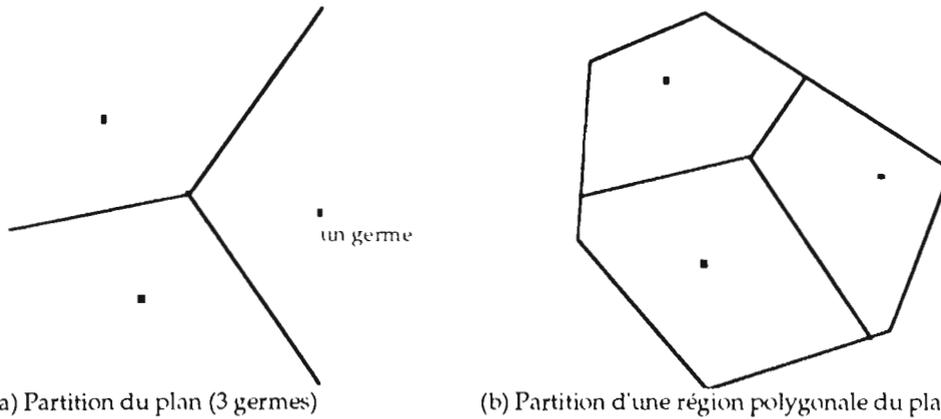
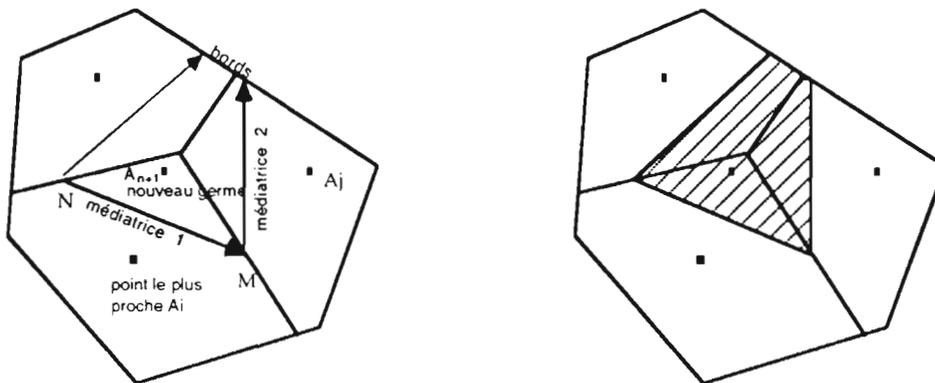


Figure C.11. Partition du plan ou d'une région polygonale autour de germes de fragmentation.

Nous avons travaillé sur une zone limitée du plan, cherchant à fragmenter une zone polygonale initiale convexe en sous-zones polygonales (convexes) fermées elle-mêmes refragmentables (Fig.C.11b).

Nous avons défini un objet polygone comme un ensemble de faces. Chaque face contient le numéro du polygone adjacent, -1 s'il n'y en a pas (faces extérieures).

L'algorithme fonctionne de façon itérative par ajouts successifs de germes. Pour un seul germe, la partition se réduit à une seule zone, la zone initiale (faces affectées du numéro -1). Pour un deuxième germe, il suffit de tracer la médiatrice entre les deux germes pour créer une partition en deux sous-zones au lieu d'une. Et ainsi de suite...; le problème se ramène à des déterminations de médiatrices successives.



(a) Ajout d'un nouveau germe et tracé de médiatrices

(b) Allocation d'un nouveau polygone et modification des anciens

Figure C.13. Modification d'une partition existante avec l'ajout d'un nouveau germe de fragmentation

Par récurrence, soient n germes A_i déjà pris en compte et n polygones $P(A_i)$ déjà créés; puis rajoutons un $(n+1)^{ème}$ germe A_{n+1} . La détermination du nouveau polygone $P(A_{n+1})$ consiste d'abord à rechercher parmi les n premiers germes et par simple tri, le point dont il est le plus

proche, soit A_i (Fig.C.13.a). Puis, on progresse dans la construction de $P(A_{n+1})$ en utilisant les relations de voisinage entre polygones dans cette région du plan:

- on trace une première médiatrice entre A_{n+1} et A_i qui intercepte le polygone $P(A_i)$ en deux points N et M formant les extrémités d'une face du nouveau polygone à créer $P(A_{n+1})$.
- L'un de ces points (le point M sur la Fig.C.13.a) est choisi au hasard; il est situé sur une face de $P(A_i)$; or cette face contient le numéro d'un polygone adjacent de $P(A_i)$ (noté $P(A_j)$ sur la Fig.C.13.a). Il faut alors tracer une deuxième médiatrice, celle de A_{n+1} et A_j , qui permet de calculer un deuxième côté du nouveau polygone $P(A_{n+1})$, et de progresser vers le polygone voisin suivant.
- Un bord peut interrompre la progression et demande un traitement particulier.
- Pour obtenir la fermeture du polygone $P(A_{n+1})$, il peut s'avérer nécessaire de revenir au point laissé de côté au départ (N) et d'inverser la sens de la progression autour de A_{n+1} .
- Le nouveau polygone $P(A_{n+1})$ est alloué dynamiquement au moment de sa création, et ses polygones voisins, qu'il a modifiés, sont réalloués et remis à jour.

Un certain nombre de configurations particuliers posent problème.

Par exemple, dans le cas où certains germes sont exactement cocirculaires, nous avons dû imposer un petit déplacement aléatoire des germes autour de leur position initiale pour éviter les problèmes d'indétermination dans le calcul de médiatrices.

Les problèmes dus aux faces théoriquement adjacentes mais disjointes en pratique (à cause des imprécisions numériques sur les calculs d'intersection de médiatrices et de polygones) ont été résolus en ordonnant et "recollant" les faces d'un polygone donné, juste après sa création.

Il reste encore des configurations particulières de germes (par exemple des germes confondus dans les limites de la précision de l'ordinateur) qui empêcheraient la réalisation de la tessellation. Etant donné que ces cas particuliers arrivent en moyenne pour un point sur 10000, nous avons résolu le problème en effectuant un nouveau tirage au sort du germe gênant.

La méthode employée s'avère comparable a posteriori à celle décrite par Green et Sibson(1978). Ces auteurs notent que la définition d'objets (au sens où chaque polygone possède sa liste de voisins) leur a été très utile pour mettre au point un algorithme efficace, mais qu'ils ont pu le programmer en un langage classique, le Fortran .

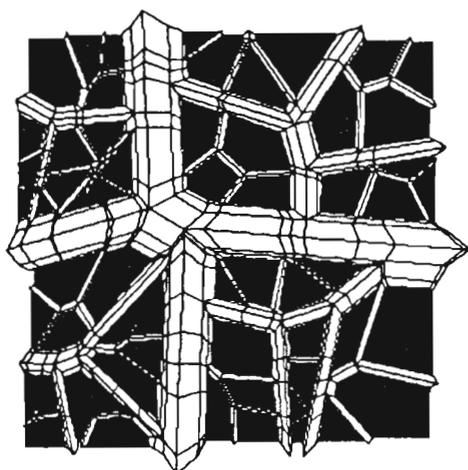
Notre temps de calcul sur une station Sun Sparc 10 (64 Mega de mémoire vive) est de 1s pour 100 germes, 20s pour 1000 germes, et de plusieurs heures pour un nombre de points maximum de 180000 points .

Recherche des relations de voisinage entre objets

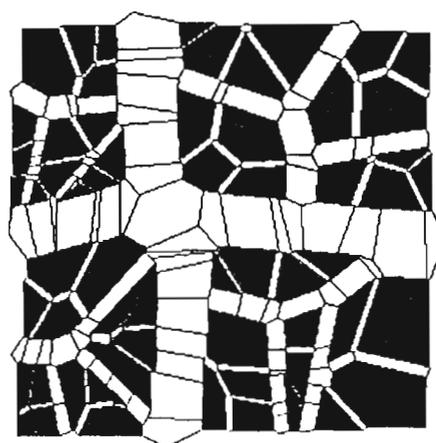
A l'intérieur d'une tessellation donnée, les relations de voisinages entre polygones sont connues en raison du procédé de construction. Mais dans le cas où plusieurs niveaux de tessellation s'emboîtent dans nos constructions, nous avons dû refaire une recherche de voisins a posteriori. Nous avons déterminé ces relations de voisinage dans l'ensemble des noeuds, et les relations entre polygones ou entre pores en découlent. Nous avons pour cela d'abord identifié les noeuds comme des sommets de polygones, puis recherché pour chaque noeud toutes les faces de polygones passant par ce noeud, en classant ces faces suivant leur direction dans le plan. Cette méthode est lourde (Le temps de calcul est de 3s pour 100 germes, de 4mn pour 1000 germes et augmente en $O(n^2)$) ; une optimisation est envisagée.

Création de structure ou déformation

La création de structures poreuses ou la gestion de la déformation se fait en affectant à chaque zone polygonale un rapport d'homothétie (ou un rapport distinct pour chaque affinité orthogonale de direction donnée). L'image d'une structure simulée pour un état d'ouverture ou de gonflement donné est donnée sur la figure C.14.



(a) Homothéties de rapport $k=0.8$



(b) Affinités (rapport $k_x=0.8$ et coefficient d'anisotropie égal à 0.0001)

Figure C.14. Géométrie des pores. Le procédé de découpage de l'espace poral est différent, mais pour des paramètres de structure quasi-identiques, les résultats (a et b) sont sensiblement équivalents

Un pore est un segment entre deux noeuds que l'on peut dédoubler en deux segments identiques bord1 et bord2.

Dans le cas de transformations homothétiques, on applique à bord1 successivement les homothéties qui ont affecté les agrégats de différents niveaux sur un côté donné (bord1), et on

obtient un demi-pore formé d'un ensemble de trapèzes, puis une opération similaire a lieu pour deuxième moitié du pore en se tournant vers les agrégats adjacents sur le deuxième côté (homothéties sur bord2). Il en résulte une partition de l'espace immédiate (Fig.C.14a) que l'on peut vérifier numériquement.

Dans le cas d'une affinité orthogonale, nous avons dû changer de méthode car l'image d'une droite n'est plus une droite parallèle et les trapèzes intermédiaires peuvent devenir des polygones croisés inutilisables: en particulier ils se chevauchent et leur surfaces ne s'ajoutent plus. Nous avons alors directement travaillé sur les segments (bord1)' et (bord2)' résultant de la dernière étape des compositions d'affinités successives. En tant qu'images de segments parallèles, il restent parallèles entre eux (pour des affinités orthogonales de même rapport). La partition aux alentours du noeud est alors un peu plus complexe. Il s'agit de trouver un point de concours des pores que nous avons choisi comme le barycentre des trois sommets d'agrégats entourant la région du noeud, pondéré par l'inverse des largeurs de pores voisins (de façon à obtenir un découpage visuellement satisfaisant).

La méthode de partition de l'espace poral est aussi applicable au cas particulier des homothéties et les différences sont négligeables (comparer Fig C.14 a et b).

b) Simulation des propriétés hydriques

Invasion d'un fluide

Nous avons déjà vu (§C.2) le principe de simulation de l'invasion d'un fluide en utilisant une liste de noeuds pour représenter les chemins continus de fluide entrant. La liste de noeuds nommée *front* est initialisée avec les noeuds situés sur la face supérieure de la structure simulée (lorsqu'un fluide pénètre dans un milieu totalement saturé par le deuxième fluide). Puis, à chaque variation monotone de pression capillaire, le front continue sa progression à partir de l'état obtenu à l'itération précédente. Par contre lorsqu'il y a inversion du sens de variation de la pression, la liste *front* est préalablement réinitialisée, sans modifier cependant l'état des pores, vides ou plein d'eau.

Recherche des chemins conducteurs d'eau et calcul de la conductivité

Pour le calcul de la conductivité hydraulique à un état de saturation quelconque, il faut d'abord connaître les chemins continus d'eau. Ils sont déterminés par une méthode analogue à la précédente, sous forme d'une liste de noeuds, ou encore d'un front d'invasion fictif qui relie deux faces opposées. Ceci permet de travailler en non saturé sans indétermination de système.

Puis nous avons éliminé les bras morts pour déterminer le sous-réseau de pores conducteurs et améliorer les temps de calcul.

Enfin nous avons construit un tableau de noeuds "actifs" à partir des éléments de la liste épurée afin d'écrire classiquement le système d'équation associé au réseau de Kirchoff (cf.Chap.7§1) sous forme matricielle.

Dans le cas des réalisations multi-plans, la taille du tableau est différente suivant le type de liaisons inter-plans. (Dans le cas de la liaison de type Virt, où les noeuds associés dans deux plans voisins sont confondus du point de vue de l'écriture du système, la gestion des conditions aux limites a due être adaptée: l'ensemble de noeuds auxquels s'appliquent une condition limite sont ceux situés sur une face, auxquels s'ajoutent leurs voisins immédiats dans les plans voisins) .

La résolution du système d'équations utilise pour l'instant la méthode classique du pivot de Gauss.

Nous avons pu optimiser les temps de calcul (les divisant par 25) et la taille mémoire utilisée pour le stockage de la matrice:

- d'une part en tenant compte de la symétrie

- et d'autre part en travaillant avec une matrice de pointeurs, qui ne sont alloués que si nécessaire, pour les éléments non nuls de cette matrice très creuse, qu'ils soient non nuls à l'initialisation de la matrice ou le deviennent en cours de calcul.

Dans l'état actuel, sur une station Sun Sparc 10 équipée de 64 Mega de mémoire vive, et compte tenu de la place occupée par les autres objets de l'application, le nombre maximum d'équations que nous avons pu stocker et résoudre est de 5000; le temps de calcul de 1s pour 171 équations (100 germes de fragmentation) , et de 32s pour 1891 équations (1000 germes).

L'utilisation d'algorithmes plus performants de résolution de systèmes d'équations devra permettre de nouvelles optimisations.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction.....	3
Plan	4
Chapitre 1. Cadre de la recherche: caractérisation structurale et caractérisation hydrodynamique en pédologie.....	7
1.1. Caractérisation de la structure des sols.....	7
1.1.1. Notion de structure en science du sol	7
1.1.2. Mesures structurales disponibles.....	10
1.1.3. Déformabilité de la structure.....	12
1.2. Caractérisation hydrique des sols.....	15
1.2.1. Modélisation classique des transferts hydriques dans la zone non saturée du sol	15
1.2.2. Détermination des caractéristiques hydriques d'un sol.....	18
1.3. Structure et écoulements de l'eau dans le sol.....	19
1.4. Conclusion et simulation de structures de sols.....	20
Chapitre 2. Modélisation fractale de la structure des sols	23
2.1. Introduction.....	23
2.2. Modèles fractals de structures de sol ou de matériaux voisins.....	24
2.2.1. Modèles fractals de distributions des éléments solides	25
2.2.1.1 Distributions fractales de taille des particules primaires du sol.....	27
2.2.1.2 Distributions de taille d'agrégats.....	28
2.2.1.3 Comparaisons entre ces différentes approches	31
2.2.2. Modèles fractals de l'espace poral.....	32
2.2.2.1 Caractérisations fractales de l'espace poral	32
2.2.2.2 Modèles géométriques d'un espace poral fractal	34
2.2.3. Expression des caractéristiques hydriques d'un sol fractal.....	35
2.2.3.1 Relation entre la teneur en eau θ et la pression capillaire h ... 35	
2.2.3.2 Conductivité hydraulique.....	38
2.3. Volume élémentaire représentatif d'une structure de sol.....	39
2.4. Conclusion.....	41
Chapitre 3. Représentation d'une structure poreuse et modélisation hydrodynamique à l'échelle des pores.....	43
3.1. Modélisation hydrodynamique dans un milieu poreux. Plusieurs échelles d'étude.....	43
3.1.1 L'échelle macroscopique de Darcy.....	43
3.1.2 Echelle des équations de mouvement d'un fluide	43
3.1.3 Echelle des pores.....	47
3.1.4 Représentation de la structure poreuse du sol et choix d'une échelle	49
3.2. Extensions du modèle capillaire	49
3.2.1 Modèles basés sur une distribution de tailles de pores.....	50
Premières extensions du faisceau de tubes capillaires	50
Réseaux de pores.....	53

3.2.2 Modèles basés sur une distribution des éléments solides.....	59
3.3. Conclusion: simulation de structures de sol et type de modélisation hydrodynamique	61
Chapitre 4. Construction de modèles de sol structurés sur plusieurs niveaux d'organisation et déformables.....	65
4.1. Conception d'une structure de sol comme un ensemble organisé d'objets élémentaires (particules, agrégats, pores).....	65
4.2. Construction d'une structure de sol par fragmentation.....	67
4.2.1. Partition du plan.....	67
4.2.2. Création simultanée d'éléments solides et de pores	72
4.2.3. Mesures sur les structures simulées.....	73
4.2.4. Discussion	74
4.3. Plusieurs niveaux de fragmentation en agrégats emboîtés	75
4.3.1. Méthode générale de construction.....	75
4.3.2. Structures simulées.....	78
4.3.3. Mesures sur les structures simulées.....	84
4.4. Traitement de la déformation: structures à géométrie variable.....	85
4.5. Extrapolation à la troisième dimension.....	88
4.5.1. Modèle "purement bidimensionnel".....	88
4.5.2. Modèle "bidimensionnel avec extrapolation au tridimensionnel".....	89
4.6. Conclusion.....	91
Chapitre 5. Simulation de la relation pression capillaire/teneur en eau	95
5.1. Calcul de la relation pression/teneur en eau à partir d'une distribution de taille de pores non spatialisée.....	95
5.1.1. Principe.....	95
5.1.2. Courbes de rétention sur des structures simulées.....	96
5.1.3. Structures fractales et expression analytique de $\theta(h)$	97
5.1.4. Valeurs numériques, échelle des simulations	101
5.2. Prise en compte de la répartition spatiale d'une distribution de pores et simulation de la relation pression-teneur en eau	103
5.2.1. Principe: percolation d'invasion.....	103
5.2.2. Simulations.....	103
5.2.2.1. Branches principales d'hystérésis.....	107
5.2.2.2. Simulation des branches secondaires de la boucle d'hystérésis	109
5.2.3. Discussion	110
5.3. Conclusion.....	111
Chapitre 6. Déformation et Relation Volume/Teneur en eau	112
6.1. Introduction.....	112
6.1.1. Déformation et courbes de retrait.....	112
6.1.2. Principe de simulation.....	112
6.2. Traitement de la déformation à différents niveaux d'organisation structurale.....	113
6.3. Différents scénarios de déformation pour une même courbe de retrait global. Modification de la courbe pression/teneur en eau	115
6.3.1. Différents scénarios.....	115
6.3.2. Simulations.....	116
6.3.3. Exploitation d'une courbe de retrait pour caractériser une distribution de pores à géométrie variable.....	121
6.4. Interprétation du processus de déformation	122

6.4.1. Un modèle théorique interprétant les courbes de retrait: le modèle MRS	122
6.4.2. Représentation de ce modèle: des agrégats argileux déformables, "boîtes noires" pour la simulation.....	125
6.4.3. Quelques éléments de réflexion sur un modèle de retrait basé sur le fonctionnement spécifique de l'argile du sol.....	128
6.4.4. Discussion	131
6.3. Conclusion.....	133
Chapitre 7. Relation conductivité / teneur en eau	135
7.1. Principe.....	135
7.2. Premiers résultats.....	138
7.3. Extensions du modèle fractal.....	138
7.3.1. Structures fractales désordonnées	139
Introduction de nouvelles sources de variabilité.....	139
Méthode de construction: des homothéties "aléatoires"	139
Résultats	140
7.3.2. Structures anisotropes.....	142
Hypothèse.....	143
Méthode de construction.....	143
Structures fractales affines.....	145
Anisotropie décroissante avec le niveau de fragmentation	146
7.3.3. Discussion	148
7.4. Approche pluri-réalisations.....	149
7.4.1. Méthode.....	150
Plusieurs réalisations planes indépendantes	150
Connexions entre ces réalisations.....	150
7.4.2. Résultats.....	152
Disparition totale ou partielle de l'hystérésis	152
Une allure plausible pour $K(\theta)$	153
Comparaisons de plusieurs courbes $K(\theta)$ sur des structures fractales	155
7.5. Conclusion.....	158
Chapitre 8. Réflexions sur l'estimation d'une dimension fractale à partir de courbes de rétention d'eau et étude d'un deuxième modèle de structure fractale.....	160
8.1. Problème posé	160
8.1.1. Plusieurs dimensions fractales.....	160
8.1.2. Estimation d'une dimension fractale à partir d'une courbe de rétention.....	161
8.2. Réflexion théorique sur l'expression de $\theta(h)$ dans un espace poral fractal.....	163
8.2.1. Recherche d'un consensus sur la définition d'un espace poral fractal	163
Définition choisie.....	163
Degré de généralité de la définition choisie.....	163
Justification de la définition choisie	165
8.2.2. Expression de $\theta(h)$ dans un espace poral fractal.....	166
8.2.3. Interprétation des différentes approches d'un espace poral fractal	167
Modèle de type 1.....	167
Modèle de type 2.....	168
Comparaison entre les modèles de type 1 et 2	169
Modèle de type 3.....	170
8.2.4. Discussion	171
Espace poral fractal	171

Espace poral fractal sur un domaine limité d'échelles de longueur.....	172
8.3. Simulation d'un deuxième type de structures de sol fractales	173
8.3.1. Construction d'un ensemble fractal de zones de fragmentation.....	173
8.3.2. Structures fractales de particules et de pores.....	176
8.3.3. Espace poral fractal et expression analytique de $\theta(h)$	179
8.4. Données expérimentales de courbes de rétention.....	184
8.4.1. Ajustement de l'expression analytique (8.7) sur les données $\theta(h)$ de sols estimés fractals	184
8.4.2. Comparaison avec l'expression analytique de Brooks et Corey.....	185
8.4.3. Discussion	187
8.5. Conclusion.....	187
Conclusions.....	191
Références Bibliographiques.....	203
Annexe A. Lois élémentaires en physique des fluides dans un tube ou une fracture: loi de Laplace et loi de Poiseuille	215
Annexe B. Géométrie fractale: généralités et liste des principales définitions utilisées en science du sol.....	218
Annexe C. Programmation, méthode et principaux algorithmes.....	232
C.1. Création d'une interface et mise au point d'outils graphiques.....	232
C.2. Programmation orientée objet.....	236
C.3 Principaux algorithmes.....	243