

# MÉMOIRE

présenté

à l'Université de Toulouse 3

en vue de l'obtention de

l'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Discipline : Physique

Spécialité : Sciences de l'Univers, de l'Environnement et de l'Espace

par

Sylvain MANGIAROTTI

## MODÉLISATION GLOBALE ET CARACTÉRISATION TOPOLOGIQUE DE DYNAMIQUES ENVIRONNEMENTALES : *de l'analyse des enveloppes fluides et du couvert de surface de la Terre à la caractérisation topodynamique du chaos*

soutenue le 8 Juillet 2014  
au Centre d'Études Spatiales de la Biosphère, Toulouse, France



Membres du jury

*Président*

– **René Lozi**, Professeur de classe Exceptionnelle de l'Université de Nice, Lab. J.A. Dieudonné

*Rapporteurs*

– **Marc Lefranc**, Professeur de l'Université des sciences et Techniques de Lille, PhLAM

– **Olivier Talagrand**, Dir. de Recherche Émérite au CNRS, ENS/LMD Paris

– **Bernard Cazelles**, Professeur UPMC, UMR7625/ENS Paris

*Examineurs*

– **Jean-Marc Malasoma**, Enseignant-chercheur à l'ENTPE de Lyon, LGM/DGCB

– **Michel Rabinowicz**, Professeur de l'Université Toulouse 3, GET

*Parrain*

– **Christophe Letellier**, Professeur de l'Université de Rouen, CORIA



## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier chaleureusement Marc Lefranc (Physique des Lasers, Atomes et Molécules), Olivier Talagrand (Laboratoire de Météorologie Dynamique), Bernard Cazelles (UMR7625), René Lozi (Laboratoire J.A. Dieudonné), Jean-Marc Malasoma (Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat), Michel Rabinowicz (Géosciences Environnement Toulouse) et Christophe Letellier (Complexe de Recherche Interdisciplinaire en Aérothermochimie) pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à mon travail, pour le temps qu'ils ont consacré à la lecture parfois très détaillée du manuscrit et pour leurs réactions et critiques à la fois aguerries et cordiales. Je suis très honoré qu'ils aient accepté de faire partie de ce jury.

Parmi eux, je tiens à remercier spécialement Christophe Letellier pour son attention et ses suggestions toujours franches et avisées. Sa rencontre, il y a quelques années (après un premier rendez-vous manqué un jour d'Avril, où j'étais arrivé à Rouen avec – exactement – une semaine d'avance) m'a beaucoup apporté dans mon parcours de chaoticien. En ce qui concerne le présent manuscrit, ses conseils pour reformuler l'un des passages du dernier chapitre m'ont été très profitables (notamment le paragraphe intitulé « Liens dimensionnels entre flot et application de Poincaré » qui était rédigé initialement de façon beaucoup moins formelle). Je le remercie tout particulièrement d'avoir parrainé cette habilitation.

Je remercie Yann Kerr, directeur du Centre d'Etudes Spatiales de la Biosphère (CESBIO), de la confiance qu'il a bien voulu m'accorder en m'accueillant au sein de son laboratoire et de la liberté dont j'ai pu y jouir. Cette liberté m'a permis de mettre en œuvre le programme de recherche sur lequel j'avais été recruté en tant que Chargé de Recherche à l'Institut de Recherche pour le Développement (IRD), et d'en prolonger ensuite l'orientation.

Une habilitation est aussi le fruit d'un parcours. En ce qui me concerne, ce parcours s'est toujours fait en connexion avec l'Observatoire Midi-Pyrénées (OMP). Je tiens à remercier l'ensemble des équipes et laboratoires de l'OMP avec lesquelles j'ai eu la chance de travailler et en particulier le Laboratoire d'Etudes en Géophysique et Océanographie Spatiales, le Pôle d'Océanographie Côtière, l'équipe sahéenne avec Pierre Hiernaux et Eric Mougin, l'équipe amazonienne avec Marie-Paule Bonnet, la CEFIRSE et notamment Sekhar Muddu de l'Indian Institute of Science, le CESBIO dans son ensemble (les équipes administrative, informatique, et communication en particulier) ; mais aussi le Laboratoire Mixte International TREMA au sein duquel, plus spécialement Lionel Jarlan, Michel Le Page et le Pr. Abderrahman Lahrouni. Je tiens aussi à remercier spécialement Pierre Mazzega avec qui j'ai eu l'occasion de travailler sur plusieurs des thématiques abordées dans ce manuscrit, et auprès de qui j'ai beaucoup appris.

Je tiens à remercier Laurent Drapeau qui m'a apporté un soutien tout à fait essentiel dans le développement des outils de modélisation globale, plus particulièrement sur les aspects logiciels et interfaces. Ces outils ont joué un rôle important dans mes travaux de recherche et j'ai beaucoup bénéficié de cette collaboration, efficace et d'une grande simplicité.

Je tiens à remercier aussi très chaleureusement tous les étudiants avec qui j'ai eu la chance de travailler et tout spécialement Flavie Le Jean, Malika Chassan, Raphaël Coudret, Salwa Belaqiz, Yussuf Javeed et Pauline Nouallet, mais aussi Lucie Berthon, Léo Rogel, Mohamed Abourahya, Antony Rol, Meryem El Berkaoui, Houda Nassah, Mickaël Soulier et Mathieu Alos. Ces expériences ont été très différentes les unes des autres, de par le contexte et les personnalités de chacun. J'y ai beaucoup appris et y ai aussi pris le goût d'une forme particulière d'échange (de savoir et de conviction) et de partage (le côté inconnu de la recherche).

l'Institut de Recherche pour le Développement (IRD), le Centre National des Etudes Spatiales (CNES), l'Université Paul Sabatier (UPS) et le Centre National de Recherches Scientifiques (CNRS) ont joué un rôle très important pour le développement de ces

recherches. Le programme Les Enveloppes Fluides et l'Environnement (en particulier la section Mathématiques Numériques, présidée par Eric Blayo) a joué un rôle très important dans les travaux de modélisation globale en soutenant les projets AMoGlo et SpatioGloMo.

Je tiens à remercier enfin très amicalement Cécile Cabanes de m'avoir aidé à exhumer quelques anciens schémas en cours de stratification numérique ; ainsi que mes parents et mes sœurs pour leur soutien, et spécialement Bénédicte pour sa relecture enthousiaste de certains passages d'un manuscrit préliminaire.

La grande majorité de cette Habilitation a été préparée hors des heures de travail, le soir, les week-ends, pendant les vacances... En cela, les encouragements et le soutien de mon épouse Yàn m'ont été non seulement indispensables mais aussi particulièrement appréciables. Merci !

*J'irais bien lui foutre mon poing sur la figure, mais je ne sais pas si ça va servir à quelque chose.*

*Smoking / no smoking, Alain Resnais, 1993*



# Table des matières

0.1	Un diplôme . . . . .	11
0.2	Un parcours . . . . .	13
0.3	Une démarche . . . . .	14
<b>1</b>	<b>Dynamiques environnementales — quelques thématiques et approches</b>	<b>17</b>
1.1	Introduction . . . . .	17
1.2	Les mouvements de la croûte terrestre sous l'effet des charges de surface . . . . .	18
1.3	Les variations du niveau de la mer en Méditerranée . . . . .	18
1.3.1	Suivi des variations récentes du niveau de la mer . . . . .	18
1.3.2	Contribution stérique . . . . .	22
1.3.3	Les effets de pression et de friction de l'atmosphère . . . . .	23
1.4	Le transport de matière en suspension dans le bassin Amazonien . . . . .	25
1.5	Dynamique de la végétation en Afrique de l'Ouest . . . . .	27
1.5.1	Analyse nonlinéaire du cycle de la végétation . . . . .	28
1.5.2	Approches prédictives . . . . .	32
1.6	Modélisation du cycle de la végétation en région semi-aride . . . . .	36
1.7	Optimisation des tours d'eau dans un réseau d'irrigation gravitaire . . . . .	37
1.8	Dynamique des eaux souterraines en milieu karstique . . . . .	39
1.8.1	Analyse par décomposition en fonctions empiriques orthogonales . . . . .	41
1.8.2	Analyse des liens de causalité . . . . .	42
1.9	Extra-expériences . . . . .	43
1.10	Ouvertures . . . . .	43
<b>2</b>	<b>Modélisation globale — éléments de théorie et outils</b>	<b>45</b>
2.1	Introduction . . . . .	45
2.2	Concepts . . . . .	47
2.3	Principe de la modélisation globale . . . . .	51
2.3.1	Formulation analytique du problème . . . . .	52
2.3.2	Identification . . . . .	53
2.3.3	Reformulation méthodologique . . . . .	54
2.4	Approches de validation . . . . .	56
2.4.1	Invariants géométrique, dynamique & topologique . . . . .	56
2.4.2	Estimation du taux de signal déterministe expliqué . . . . .	58
2.4.3	Analyse de prévisibilité . . . . .	59
2.5	Synthèse . . . . .	62
<b>3</b>	<b>Modélisation globale à partir de données synthétiques</b>	<b>63</b>
3.1	Introduction . . . . .	63
3.2	Applications au système de Rössler . . . . .	63
3.2.1	Le modèle de Rössler . . . . .	63
3.2.2	Modélisation globale . . . . .	65
3.2.3	Validité des invariants nonlinéaires . . . . .	67
3.3	L'électrolyse du Cuivre dans l'acide phosphorique . . . . .	68
3.3.1	Données expérimentales . . . . .	68

3.3.2	Modélisation globale . . . . .	68
3.4	Dynamiques associées et agrégées . . . . .	70
3.4.1	Problématique . . . . .	70
3.4.2	Le système étudié . . . . .	71
3.4.3	génération de données synthétiques . . . . .	72
3.4.4	Reformulation analytique . . . . .	74
3.4.5	Modélisation globale . . . . .	76
3.4.6	Les variables de plus faible degré d'observabilité . . . . .	81
3.5	Les orbites périodiques instables . . . . .	82
3.6	Modélisation globale multivariées . . . . .	83
3.6.1	Le cas du système de Lorenz-84 . . . . .	83
3.6.2	Le cas de l'attracteur de Deng-94 . . . . .	85
3.7	Conclusion . . . . .	86
<b>4</b>	<b>Modèles globaux de dynamiques environnementales</b>	<b>89</b>
4.1	Introduction . . . . .	89
4.2	Applications à la dynamique céréalière en zone semi-aride . . . . .	90
4.2.1	La culture céréalière au Maroc . . . . .	90
4.2.2	Observation par télédétection spatiale . . . . .	91
4.2.3	Modélisation . . . . .	92
4.2.4	Discussion . . . . .	99
4.3	Analyse par association et agrégation de cas réels . . . . .	100
4.3.1	Aire d'étude . . . . .	100
4.3.2	Analyse simple . . . . .	103
4.3.3	Analyse associée . . . . .	104
4.3.4	Analyse agrégée . . . . .	105
4.4	Autres thématiques d'application . . . . .	107
4.4.1	La dynamique nivale . . . . .	107
4.4.2	Épidémiologie . . . . .	107
4.5	Conclusions . . . . .	109
<b>5</b>	<b>Topologie du chaos</b>	<b>111</b>
5.1	Introduction . . . . .	111
5.2	Éléments de théorie et approches . . . . .	112
5.2.1	Méthodologie . . . . .	113
5.2.2	Une approche basée sur la section de Poincaré . . . . .	114
5.3	Application au chaos faiblement dissipatif . . . . .	119
5.3.1	Le système de <i>Lorenz-84</i> . . . . .	119
5.3.2	La dynamique céréalière . . . . .	125
5.3.3	Comparatif <i>Lorenz-84</i> versus <i>cereal crops</i> . . . . .	131
5.4	Topologie du chaos en grande dimension ( $\geq 4$ ) . . . . .	132
5.5	Application aux systèmes discrets à deux variables . . . . .	137
5.5.1	le système de Hénon à suspension 4D connexe . . . . .	138
5.5.2	Le système super-Hénon à suspension 4D connexe . . . . .	140
5.6	Application à un système discret à trois variables . . . . .	142
5.6.1	L'application <i>walking stick 3D</i> à suspension 4D connexe . . . . .	142
5.7	Au-delà . . . . .	147
<b>6</b>	<b>Ouvertures</b>	<b>149</b>
<b>A</b>	<b>Packages R</b>	<b>153</b>
A.1	PoMoS & GloMo . . . . .	153
A.2	LyapLoc . . . . .	154
A.3	AMoGlo . . . . .	154
A.4	SpatioGloMo . . . . .	154

<b>B</b>	<b>Formulation analytique de modèles agrégés</b>	<b>157</b>
B.1	Le cas de la variable Rössler- $y$ . . . . .	157
B.1.1	Agrégation de deux variables synchronisées . . . . .	157
B.1.2	Agrégation de $N$ variables synchronisées . . . . .	158
B.1.3	Agrégation de $N$ variables non synchronisées . . . . .	159
B.2	Cas général . . . . .	160
B.2.1	Agrégation de deux variables $z$ synchronisées de Rössler-76 . . . . .	160
B.2.2	Agrégation de deux variables synchronisées, cas général . . . . .	160
<b>C</b>	<b>Topologie 4D – précisions complémentaires</b>	<b>161</b>
C.1	Rotation connexe . . . . .	161
C.2	Paradoxe de l’enroulement bidirectionnel . . . . .	162



# Avant-propos

## 0.1 Un diplôme

L'Habilitation à diriger des Recherches (HdR) vise à sanctionner la reconnaissance d'un haut niveau scientifique, le caractère original d'une démarche dans un domaine de la science, une aptitude à maîtriser une stratégie de recherche dans un domaine scientifique ou technologique suffisamment large, et une capacité à encadrer de jeunes chercheurs.

Un objet fondamental de l'activité de recherche est d'obtenir une conceptualisation cohérente et efficace du monde, une théorie suffisamment générale qui permette de comprendre sa dynamique, ses évolutions et ses changements. Par définition, le travail de recherche nécessite de se confronter à l'inconnu collectif. L'objectif fondamental du chercheur est de repousser les frontières de la connaissance, ce qui suppose de discerner ce que l'on sait de ce qui est probable. Cela nécessite une démarche de questionnement.

Cette démarche peut prendre place dans des contextes d'une grande complexité comme c'est naturellement le cas lorsqu'on s'intéresse à la dynamique de l'environnement où les milieux étudiés font souvent intervenir un grand nombre de facteurs liés les uns aux autres, et qu'il n'est pas toujours possible de dissocier, ni de distinguer. Face à une telle complexité, il est nécessaire d'identifier les limites de validité des concepts et des approches avant de les appliquer à l'analyse du monde réel. Pour de tels contextes, les cas d'étude théoriques peuvent jouer un rôle tout à fait primordial dans la mesure où leur complexité peut être contrôlée et modulée à dessein pour l'expérimentation analytique et surtout numérique. Cet intermédiaire théorique apparaît comme une étape essentielle pour passer du stade informel de l'idée – que celle-ci soit issue d'une démarche intuitive ou inductive – à celui de l'interprétation déductive, et à rendre ainsi possible l'application d'une théorie à des contextes réels, à partir de données observationnelles.

La frontière de la connaissance peut néanmoins présenter, dans certains cas, une grande résistance jusqu'à faire paraître de l'inconnu pour de l'inaccessible. C'est notamment le cas lorsqu'on ne dispose pas des concepts nécessaires à l'exploration d'une problématique (ou lorsque ces concepts sont mal identifiés). La difficulté ne tient plus alors « simplement » à être capable de vérifier des concepts ou à comparer des approches, mais à imaginer ou à créer les concepts manquants, jusqu'à aboutir à une nouvelle formulation de la problématique et de ses questionnements. Le questionnement n'est donc plus simplement une question de confrontation à l'inconnu collectif mais aussi de confrontation à ses propres croyances. Il s'agit alors, dans une démarche individuelle, de distinguer ce que l'on peut considérer comme vrai et probable, indépendamment de ce qui est généralement reconnu comme établi. Cette confrontation à ses propres croyances nécessite un travail d'introspection, très individuel. Quoi qu'il en soit, les croyances ne peuvent jouer qu'un rôle amont, toute conviction ou idée devant ensuite, dans une démarche scientifique de rigueur, être progressivement formalisée et démontrée, pour mieux l'adopter ou mieux la réfuter. Une telle démarche de questionnement individuel – et donc aussi de doute – n'exclue absolument pas, bien entendu, l'échange et la confrontation de ses idées et de ses résultats avec la communauté. Mais de fait, cette confrontation ne peut arriver qu'après.

Si le questionnement joue un rôle central dans l'activité de recherche, le travail du chercheur peut toutefois inclure d'autres facettes, périphériques, que chaque chercheur développe à sa manière et à des degrés divers au cours de sa carrière, en fonction de ses affinités personnelles et de son parcours. Quatre types d'activités périphériques peuvent être distingués [179] qui ne sont pas ex-

clusifs les unes des autres. La première facette concerne l'observation du monde, que ce soit par le biais d'expérimentations, d'instrumentations de comportements environnementaux ou d'enquêtes, dans l'objet de disposer d'un ensemble de données ou de faits. La seconde facette concerne les activités qui touchent à la communauté scientifique, que ce soit du point de vue de la publication ou des institutions, et qui implique une compétition au sein de cette communauté. Une troisième facette concerne les alliances, que ce soit avec l'état, l'industrie ou avec d'autres types d'intérêts, pour la finalisation d'applications, l'éducation, ou encore le rapprochement des communautés scientifiques du monde et leur développement, comme c'est le cas de l'Institut de Recherche pour le Développement dont nous faisons partie. Ce travail d'alliance permet, en particulier, d'obtenir les financements des travaux de recherche. La dernière facette concerne la communication des résultats vers le public, afin de justifier de son activité de chercheur envers la société, mais aussi d'en partager les résultats et éventuellement la démarche.

Le cœur du travail de recherche, son questionnement, sa démarche et son développement théorique, se trouvent au croisement de ces différentes facettes. Est-il possible de le communiquer à un jeune étudiant ? De fait, cela n'est pas toujours évident dans la mesure où il est d'abord nécessaire pour l'étudiant de parvenir à se reconnaître dans cette démarche ; Mais pas non plus impossible en raison de l'importante diversité du travail de recherche. De ce fait, la formation à la recherche doit offrir une assez grande latitude aux étudiants afin qu'ils puissent dans le meilleur des cas s'approprier un état d'esprit et l'ensemble des compétences nécessaires à la poursuite d'un parcours de chercheur. Cette formation doit tout du moins permettre à l'étudiant de découvrir le métier de chercheur et d'en tirer un bénéfice suffisant pour pouvoir poursuivre une autre orientation après cette expérience. Des solutions intermédiaires doivent donc pouvoir être trouvées pour les étudiants dont le profil et les projections ne correspondraient finalement pas à celui de chercheur, qu'il s'agisse de s'orienter ensuite vers l'ingénierie, l'enseignement, la communication ou autre.. Soyons clairs, il ne s'agit pas de former les étudiants à un métier que l'on ne connaîtrait pas soi-même, mais simplement, de ne pas restreindre leur expérience à un domaine exclusif, et sans renoncer à leur donner une véritable expérience de la recherche.

Nous avons eu l'occasion, au cours de notre parcours, de participer à l'encadrement d'un certain nombre d'étudiants en thèse et sommes actuellement impliqués dans le coencadrement de deux thèses. Nous avons également eu l'occasion d'encadrer de nombreux travaux de Master. Ces encadrements nous ont permis d'acquérir une importante expérience en la matière qui nous a conduit à adopter certains principes visant à offrir une importante liberté aux étudiants, tout en essayant de toujours conserver une « feuille de route » pour ajuster l'orientation des travaux au fur et à mesure de leur déroulement, en fonction des objectifs, de l'avancement des résultats, des aspirations des étudiants et des problèmes spécifiques ou collatéraux rencontrés. Il ne s'agit pas véritablement de faire un programme à la carte mais seulement de conserver une marge de manœuvre suffisamment large. En pratique, ces principes tiennent en fait simplement, à éviter les choix trop tranchés en ménageant à la fois une part consacrée à des systèmes théoriques et une autre dévolue à des jeux de données réelles fournissant le lien essentiel et direct avec une thématique environnementale ; mais également au fait de concilier une part d'ingénierie (développements méthodologiques et validations) et une part plus axée recherche (basée sur l'analyse et l'interprétation scientifique de résultats nouveaux). Ces différents recoupements ont pour objectif, d'une part, de permettre aux étudiants d'explorer des voies différentes, d'autre part, de mieux identifier leurs affinités parmi ces orientations afin de mieux se reconnaître eux-mêmes dans la démarche, en privilégiant éventuellement les aspects sur lesquels ils se trouvent les plus à l'aise, tout en bénéficiant de tous les points de vues afin de pouvoir tout de même s'y impliquer par la suite. De notre expérience, les étudiants avec lesquels nous avons pu appliquer ce principe de diversité (ce ne fût pas le cas pour tous nos étudiants) se sont souvent assez bien retrouvés dans ce mode de fonctionnement. Les plus matures sont parvenus à se sentir à l'aise sur plusieurs des orientations choisies ; d'autres ont clairement privilégié certaines de ces orientations tout en semblant conserver un intérêt pour l'ensemble de la démarche. Ce mélange permet aussi de concilier des questions très pratiques (les approches que nous développons permettent de partir de données observationnelles et d'effectuer des prévisions par exemple) avec des questions très fondamentales (détection du déterminisme, caractérisation des comportements dynamiques sur la base d'outils topologiques). Au départ, les étudiants ne

voient pas toujours – ou ne sont pas toujours intéressés – par les liens pouvant exister entre ces différents niveaux. Ce mélange permet de conserver un lien entre ces deux grandes tendances, tout en orientant chacun en fonction de ses compétences et affinités.

Cette diversité s'est avérée être une manière de fournir une véritable expérience de la recherche aux étudiants (plusieurs de nos étudiants ont choisi de se lancer dans un doctorat après leur master) désirant poursuivre dans cette voie, mais aussi une expérience suffisamment enrichissante pour valoriser d'autres choix d'orientation que celui de la recherche. D'autre part, nous avons eu l'occasion d'encadrer plusieurs étudiants dans des contextes de collaboration avec des pays du sud constituant une expérience importante en tant que chercheur à l'Institut de Recherche pour le Développement. Les outils que nous développons sont d'ailleurs libres et volontairement très génériques visant à s'assurer une meilleure mobilité thématique ou contextuelle qui nous paraissent être des éléments importants pour un contexte tel que celui de l'IRD.

## 0.2 Un parcours

C'est une succession d'expériences assez diversifiées, tant thématiquement et méthodologiquement, qui nous a progressivement permis de construire une problématique de recherche originale sur les plans méthodologique, théorique et appliqué, et qui constitue aujourd'hui le noyau de notre activité. Cette problématique concerne la modélisation globale, et la caractérisation topologique, géométrique et dynamique des comportements dynamiques environnementaux. Comme nous le verrons plus loin, la modélisation globale est une approche récente (qui s'est développée principalement dans les années 1990 [138, 197]) mais prenant appui sur des fondements théoriques très solides issus de la théorie des systèmes dynamiques nonlinéaires. Bien que l'approche ait pu être appliquée avec un certain succès à de nombreux systèmes théoriques et expérimentaux, les premières applications à des contextes environnementaux sont beaucoup plus récentes et ne concernent encore qu'un très petit nombre de cas [196, 213, 3]. Leur application au contexte environnemental en font donc – d'emblée – un sujet de recherche tout à fait original.

Après avoir découvert la théorie du chaos en licence de physique, à l'Université Paul Sabatier, nous avons eu l'opportunité d'entamer un Diplôme d'Etudes Approfondies (DEA) d'Astrophysique, Géophysique, Planétologie et Techniques Spatiales, dans la spécialité Géophysique. Notre stage de DEA s'est ouvert sur une thèse, puis sur une alternance de Post-Doctorats et de contrats courts entrecoupés de périodes creuses, mais tout de même très remplies, de double recherche. Ces expériences nous ont permis de visiter des champs thématiques divers, allant des variations du niveau de la mer en Méditerranée, à la prévisibilité du cycle de la végétation en zone semi-aride, en passant par l'étude du transfert des matières en suspension dans les grands fleuves ou celle de la dynamique des eaux souterraines en milieu semi-aride.

Ces thématiques, malgré leur diversité, présentent toutes un point commun important : ce lui de l'eau. D'autre part, l'outil de télédétection spatiale y a joué a souvent joué un rôle important que ce soit très en amont, pour le prétraitement de données satellitaires, ou très en aval, pour leur analyse dans le cadre d'applications. La diversité de ces expériences m'a aussi permis de découvrir une certaine diversité d'outils méthodologiques et d'orienter progressivement mon parcours, partant d'approches assez simples offrant une vision statique et linéaire des comportements observés, jusqu'à des approches mieux adaptées à l'analyse des comportements dynamiques fortement nonlinéaires. Ces expériences nous ont également permis de nous former à des approches de modélisation de différents niveaux de complexité et à des outils d'optimisation puissants. Elles nous ont permis de nous confronter à des approches aussi bien physiques (ou mécanistes) que statistiques et à définir finalement une orientation de recherche s'appuyant sur la théorie des systèmes dynamiques nonlinéaires. Cette mobilité thématique, qui m'a conduit à participer à la recherche scientifique dans plusieurs des laboratoires de l'Observatoire Midi-Pyrénées (OMP), s'est associée à une certaine mobilité géographique avec des expériences en Inde (LMI CEFIRSE de l'Indian Institute of Science) et au Brésil (ORE-Hybam, LMI OCE et l'Université de Brasilia). L'historique scientifique de cette succession d'expériences de la recherche fait l'objet du chapitre 1 ; y sont présentés les principaux résultats de ce début de parcours ainsi que les éléments essentiels ayant permis de construire un programme de recherche personnel développé dans les chapitres suivants.

Les travaux d'encadrement y sont mentionnés au fur et à mesure de la progression du texte.

### 0.3 Une démarche

Le parcours que nous venons d'évoquer nous a conduit à formuler notre problématique de recherche actuelle qui concerne l'étude des comportements dynamiques environnementaux, prenant appui sur la théorie des systèmes dynamiques nonlinéaires. Issue des travaux de Poincaré, cette théorie offre un arrière-plan à la fois très riche et très rigoureux pour l'étude et la compréhension des dynamiques nonlinéaires. Malgré une telle richesse, cette théorie n'a été que relativement peu transposée à des contextes appliqués, et cela pour plusieurs raisons. D'une part, il a fallu attendre la fin des années 1950 pour disposer de premiers exemples numériques suffisamment simples – les modèles de Rikitake<sup>1</sup> [252] et de Lorenz [205] – permettant d'illustrer l'une des problématiques sous-jacente à cette théorie, celle des comportements chaotiques. D'autre part, les éléments conceptuels de base qui ont permis de commencer à s'intéresser à l'analyse de séries temporelles n'ont été publiés qu'au début des années 1980 [246, 273] de même que les premiers outils de caractérisation de tels comportements dynamiques [142, 298, 80]. Enfin, les premiers algorithmes permettant d'entamer l'analyse de séries observationnelles n'ont été publiés qu'au cours des années 1990 [167, 61, 225].

La modélisation globale, qui constitue l'un des éléments centraux de nos travaux de recherche, s'appuie sur la théorie des systèmes dynamiques nonlinéaires et vise à obtenir un jeu d'équations différentielles permettant de reproduire la dynamique observationnelle. Les premiers concepts en ont été développés à la fin des années 1980 [102, 79] et les premiers outils suffisamment robustes ont été obtenus aux début des années 1990 [138, 60]. Malgré le potentiel théorique et l'efficacité pratique de la modélisation globale à reproduire les dynamiques de systèmes théoriques ou expérimentaux (cf. [197]), les premiers résultats n'ont pu être obtenus qu'assez récemment – et en nombre assez restreint – pour des dynamiques observées en conditions réelles [196, 213, 3, 1]. Ces éléments permettent de mettre en évidence l'effervescence de la thématique, mais aussi sa résistance, et sa rudesse.

C'est dans ce contexte que nous avons choisi de nous lancer sur la voie de la modélisation globale. L'objet de cette approche nous a fasciné dès sa découverte, en 2008, au point d'en faire un élément central de notre projet de recherche pour concourir à l'Institut de Recherche pour le Développement sur un poste de Chargé de Recherche, en 2009 où nous avons été recruté pour une affectation au Centre d'Études Spatiales de la Biosphère (CESBIO). Une telle orientation s'est avérée nécessiter un investissement multidirectionnel. D'abord méthodologique afin de mettre en place des outils suffisamment robustes et efficaces. Ensuite, un investissement sur des cas théoriques qui, étant bien identifiés et facilement contrôlables, permettait de valider les outils et d'en explorer les limites. Enfin un investissement dans les applications thématiques pour l'exploration de dynamiques environnementales. Ces trois directions de recherche sont rapidement devenues, en elles-mêmes, de véritables thématiques de recherche, tout en restant très complémentaires, nous conduisant à développer une stratégie de recherche suivant plusieurs axes.

Le premier de nos axes de recherche est donc un axe méthodologique, entamé lors des premiers développements destinés à mettre en place une plateforme d'analyse par approche globale. Ce premier travail a commencé lors de l'encadrement d'un travail de Master et a permis d'obtenir un logiciel formulé sous forme de "bibliothèques" sous licence CeCILL-2, en langage R, PoMoS & GloMo [45, 19, 3], nous permettant d'obtenir de premiers modèles à partir de séries temporelles théoriques ou environnementales. Les outils de recherche de modèles ont ensuite été largement reformulés et de nouveaux outils, plus efficaces et plus robustes ont progressivement pu être obtenus. Des nouveaux travaux méthodologiques ont alors été mis en œuvre pour valider les modèles obtenus ou pour prolonger leur analyse. Cet axe de recherche méthodologique fera l'objet du chapitre 2 où seront auparavant exposés les principaux concepts nécessaires à l'introduction de la problématique de la modélisation globale.

Le second axe de recherche concerne l'application de l'approche globale à des cas d'étude

---

1. précision apportée pour prendre en compte une remarque de René Lozi

théoriques. Il ne s'agit plus ici de développement mais de validation de l'approche et d'exploration de nouvelles situations théoriques. En effet, l'approche globale a d'abord été testée dans différents contextes théoriques de difficulté croissante. Les versions les plus récentes de l'approche ont permis de mettre en évidence une efficacité tout à fait remarquable des outils, permettant notamment d'obtenir des modèles très concis à partir de la variable  $z$  du système de Rössler-76 [254] sans utiliser de sélection de structure très contrainte *a priori*, ce qui était très inattendu. D'autre part, notre logiciel a pu être comparé à d'autres versions comme celle de Luis Aguirre, Pr. Univ. Belo Horizonte, qui constituent une référence en matière de modélisation globale. Sur les cas spécifiques considérés (les orbites périodiques instables du système de Rössler-76), les comparaisons ont permis d'obtenir des résultats tout à fait équivalents et même souvent meilleurs. Le chapitre 3 permettra ainsi de montrer l'efficacité des outils développés mais aussi de prolonger cette validation en illustrant leur potentiel pour l'exploration de dynamiques observées dans des conditions théoriques très diversifiées. En effet, l'approche a également pu être testée dans des contextes nouveaux auxquels peuvent correspondre des situations réelles : sur des séries multiples analysées en association, sur des observations agrégées et sur des cas multivariés. Les résultats – très encourageants – de ces différentes explorations seront également présentés. Les résultats de ces travaux successifs ont ainsi permis d'envisager des applications à de nouveaux contextes réels comme les dynamiques environnementales.

Le troisième axe de recherche concerne l'application de la modélisation globale aux dynamiques environnementales, notamment via des observations par télédétection spatiale. La thématique la plus explorée a été celle des cultures céréalières en zone semi-aride. Ces travaux ont permis d'obtenir de premiers modèles globaux pour la dynamique de la végétation. Ces modèles se sont avérés très intéressants pour leurs caractéristiques assez rares dans la théorie des systèmes dynamiques (comportements de type chaos toroïdal faiblement dissipatif) et par leurs structures d'une complexité qui n'avaient jamais été obtenues par modélisation globale. Testées sur plusieurs régions différentes du Maroc, les analyses ont permis de confirmer que ce type de dynamique ne représentait pas un cas singulier, mais qu'ils correspondaient plutôt à un cas assez général. Ces résultats ont permis de mettre en évidence à la fois la présence d'une composante déterministe prédominante dans la dynamique céréalière en zone semi-aride et un comportement chaotique. Ils permettent également de suggérer que le chaos toroïdal et le chaos faiblement dissipatif existent bien dans la nature. L'ensemble de ces travaux et résultats seront présentés au chapitre 4.

L'obtention de modèles chaotiques sur des cas théoriques nous avait déjà conduit vers la topologie du chaos pour valider les modèles obtenus avec nos outils. La topologie du chaos vise à caractériser les comportements dynamiques de manière non ambiguë, sur la base de nombres entiers [136] ; elle présente en ce sens un outil de validation très robuste, très fondamental, et sans équivalent. Cette approche, très puissante dans son principe, et qui a déjà pu illustrer son potentiel sur de très nombreux cas, présente toutefois encore d'importantes limitations théoriques. D'une part, la validité de l'approche n'a été démontrée qu'en dimension trois, ce qui limite sévèrement son champ d'action. D'autre part, même en dimension trois, l'approche achoppe sur certains cas plus difficiles et notamment sur les cas faiblement dissipatifs. L'obtention de modèles globaux chaotiques faiblement dissipatifs nous a naturellement conduit à nous interroger sur cette limite et à développer une approche plus générale qui soit également adaptée à l'analyse des dynamiques chaotiques faiblement dissipatives ; nous en avons testé l'efficacité sur le premier attracteur faiblement dissipatif publié par Lorenz en 1984 [206] ainsi qu'à notre premier modèle global obtenu pour la dynamique des cultures céréalières. Nous avons alors cherché à voir dans quelle mesure l'approche pourrait être étendue en dimension quatre et au delà. Etant donné leur spécificité, les développements méthodologiques et les analyses concernant la topologie du chaos ont été regroupés dans le chapitre 5 qui constitue le quatrième axe de notre stratégie de recherche.

Les perspectives de ces travaux sont multiples, que ce soit par l'exploration de nouveaux prolongements méthodologiques, par l'analyse de systèmes chaotiques peu explorés, par leur application à de nouvelles thématiques, environnementales notamment, ou encore à l'extension du domaine d'action de la topologie du chaos. Certains des résultats s'ouvrent à d'autres questions scientifiques plus générales. Un certain nombre de ces perspectives sera proposé au cours d'un dernier chapitre.



# Chapitre 1

## Dynamiques environnementales — quelques thématiques et approches

*”Quand une chose est vraie ! Si je ne veux pas qu’elle soit vraie, je prétends bien qu’elle ne soit pas vraie” Dr. Bartholo, Le barbier de Séville ou la Précaution inutile, Pierre-Augustin Caron de Beaumarchais, 1775.*

### 1.1 Introduction

Les défis scientifiques du XXI<sup>e</sup> siècle sont nombreux, divers et complexes. Les questions environnementales, le développement durable et les ressources en eau y occupent une place importante qui peuvent impliquer tout type d’échelle du plus local au plus global, et toucher à une grande diversité de thématiques (physiques, biologiques, sociétales, économiques, etc.) pouvant s’imbriquer les unes dans les autres. Comment aborder une telle diversité de problématiques et d’échelles ? Il n’existe pas d’approche idéale capable de prendre en compte à la fois tous les problèmes et encore moins de les résoudre, aussi sommes-nous – nécessairement – conduits à circonscrire nos problèmes en définissant les limites spatiales adaptées au système étudié, à réduire le nombre des facteurs à considérer, et à simplifier la formulation des liens entre variables étudiées. En pratique, ce cadrage dépend également des questions que l’on souhaite étudier, de notre connaissance théorique du système à l’étude et des observations dont on dispose pour les étudier. Ainsi, même si on dispose parfois d’une bonne connaissance théorique de la dynamique de certains milieux (par exemple la dynamique du couvert terrestre sol-végétation et de son interaction avec l’atmosphère et le sous-sol), on ne sera capable de le modéliser correctement que si l’on dispose d’une observation spatialisée suffisamment précise et serrée pour bien en contraindre la dynamique de façon pratique (paramétrage du modèle, validation de la dynamique, optimisation de la trajectoire). De manière générale, on constate que plus on cherche à représenter un comportement dynamique dans toute sa complexité (spatiale et dynamique), plus il nous faut disposer d’observations pour mieux contraindre le modèle.

Pour justifier les simplifications, on peut s’appuyer d’abord sur le principe de parcimonie (rasoir d’Occam) qui consiste à ne conserver que les hypothèses nécessaires et suffisantes pour valider un modèle. En pratique, on constate que la notion de validation varie beaucoup d’une communauté thématique à une autre et, en particulier, selon que l’on considère des modèles dynamiques ou des relations statiques, mais aussi, selon que l’on cherche à tenir compte ou non des nonlinéarités. Notre parcours nous a donné l’occasion de visiter différents types d’approche et nous a progressivement conduit vers l’étude de comportements dynamiques fortement nonlinéaires.

Dans le présent chapitre, nous avons cherché à retracer la logique de notre cheminement partant du début de notre parcours dans la recherche, c’est-à-dire avant de commencer à mettre en place un programme de recherche qui nous soit propre. Ces premiers travaux ont d’abord concerné l’étude

des mouvements crustaux saisonniers verticaux de la croûte terrestre observés par géodésie spatiale.

## 1.2 Les mouvements de la croûte terrestre sous l'effet des charges de surface

Les enveloppes fluides d'air et d'eau constituent une charge à la surface du globe qui, en se redistribuant, modifient le champ de gravité de la Terre, le mouvement du centre de forme de la Terre et en font varier sa rotation, et déforment la croûte terrestre. Les mouvements verticaux et les variations du champ de gravité en réponse à la redistribution de l'atmosphère ont fait l'objet de nombreuses études dans les années 1980 [271, 268, 249, 288] alors que les autres charges telles que la charge océanique ou la charge d'eau continentale n'ont été reconnues que plus récemment comme potentiellement importantes [289, 290, 291]. La détection de tels mouvements par géodésie spatiale est également récente. L'ordre de grandeur de ces mouvements n'excédant pas quelques dizaines de millimètres, ils se sont avérés difficiles à observer à l'échelle de temps saisonnière. Nos premiers travaux ont permis d'estimer que le cycle annuel des mouvements verticaux dues aux charges climatiques, pouvait avoir à l'échelle globale, des amplitudes millimétriques à centimétriques et que les amplitudes des cycles annuels observés par géodésie spatiale présentaient généralement le même ordre de grandeur [52, 15]. Malgré la simplicité des approches utilisées pour cette étude (les jeux de données d'entrée provenant d'approches statiques et linéaires ou d'autres travaux), ces travaux ont été pour nous véritablement enthousiasmants, de par leur ouverture à de nouveaux champs scientifiques, la prise en main de nouveaux concepts et outils, une échelle d'étude vertigineuse (le globe terrestre), et la complexité sous-jacente aux multiples problématiques impliquées qui ne pouvaient – très légitimement – pas être approfondies dans le contexte d'un stage de DEA. Cette première expérience de la recherche nous a véritablement donné envie de nous lancer dans une thèse.

## 1.3 Les variations du niveau de la mer en Méditerranée

Nos travaux de thèse se sont concentrés sur l'étude des variations du niveau de la Mer Méditerranée au cours de la deuxième moitié du XX<sup>e</sup> siècle par altimétrie spatiale et marégraphie [51] (travaux effectués au sein du Laboratoire d'Études en Géodésie et Océanographie Spatiales).

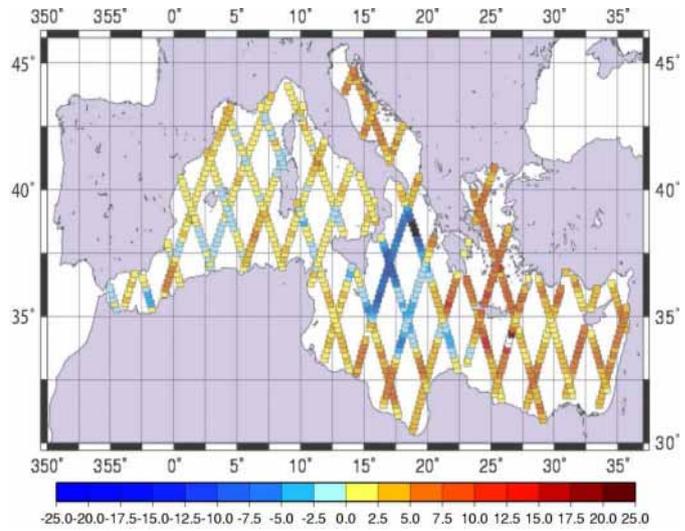
Notre contribution à cette thématique a consisté, d'une part, à étudier les tendances récentes du niveau de la mer sur la base d'une analyse de mesures marégraphiques et altimétriques sur l'ensemble de la Méditerranée. Ces travaux nous ont permis d'acquérir de solides connaissances en géodésie spatiale. Ces travaux nous ont également permis d'acquérir une bonne expérience méthodologique en traitement du signal, métrologie et approches statistiques de base. Une seconde partie a concerné l'estimation de la contribution thermostérique aux variations du niveau de la mer observées. Ces travaux nous ont permis de mettre en évidence les limites des approches statiques et linéaires pour l'étude des mers fermées et de commencer à orienter nos travaux vers des problèmes ayant trait à des questions de dynamique. Une troisième partie a ainsi porté sur les variations du niveau de la mer dues à la charge atmosphérique de surface, sous l'effet de la pression et de la friction du vent.

### 1.3.1 Suivi des variations récentes du niveau de la mer

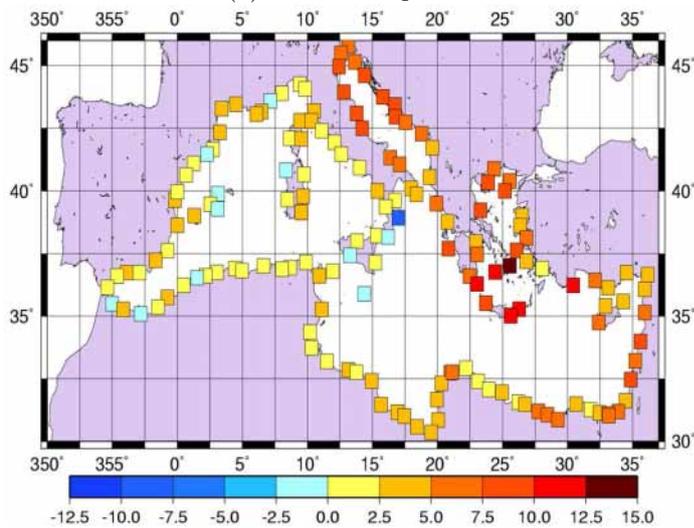
La couverture globale (plus de 70% de la surface planétaire) de l'océan lui confère un rôle dominant dans la dynamique climatique. Par son aspect intégrateur, l'élévation du niveau de la mer est une variable particulièrement intéressante qui peut constituer un bon indicateur des variations climatiques de grande échelle, mais qui peut aussi présenter une importante variabilité locale. De nombreux travaux ont en effet permis de montrer qu'à l'échelle globale, une contribution importante des variations du niveau de la mer provenait des variations de température surface de l'océan [86, 145, 92, 97].

D'importantes différences peuvent toutefois être attendues dans le contexte de mers semi-fermées comme la Méditerranée où les échanges aux détroits jouent un rôle important, et où l'influence des comportements locaux sont renforcés tout en conservant celles des dynamiques océanique et climatique à grande échelle. Deux types de mesure directe du niveau de la mer sont principalement disponibles : les mesures marégraphiques et les mesures effectuées par altimétrie spatiale. En Méditerranée, les données issues de mesures marégraphiques permettent de remonter jusqu'à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle car les mesures marégraphiques sont souvent effectuées en routine dans les ports depuis des décennies afin d'assurer le suivi des marées pour le trafic maritime. Les données marégraphiques présentent deux inconvénients spécifiques pour l'étude de la dynamique océanique : d'une part, les marégraphes sont le plus souvent placés en zone côtière et n'apportent donc qu'une information très partielle quant aux comportements spatialisés. D'autre part, les marégraphes sont ancrés dans le sol et fournissent une mesure relative à la croûte terrestre. Les mesures incluent en conséquence les mouvements de subsidence et de surrection du sol où ils sont ancrés. De tels mouvements peuvent résulter de comportements à plus ou moins grande échelle, que ce soit sous l'effet du rebond postglaciaire (réajustement isostatique de la croûte terrestre faisant suite à la fonte de la calotte polaire de la dernière période de déglaciation [239, 177]) ou sous l'effet de mouvements tectoniques régionaux [105]. Des comportements très locaux d'origine naturelle peuvent également avoir lieu sous l'effet des charges sédimentaires comme c'est le cas dans le delta du Nil [270], ou d'origine anthropogénique [73] sous l'effet du pompage de ressources souterraines.

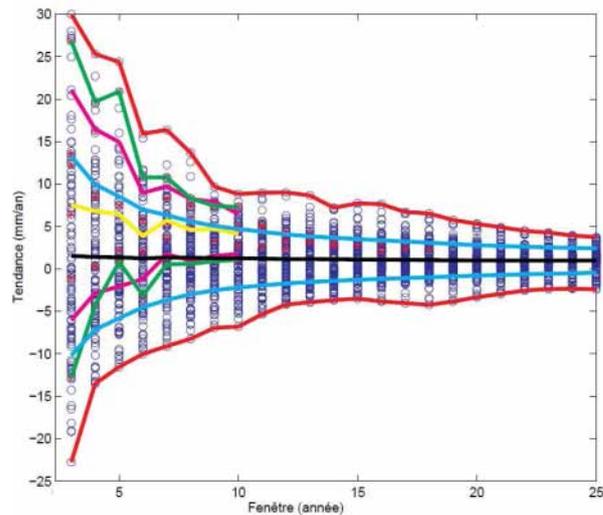
Les premières mesures du niveau de la mer par altimétrie spatiale ont été initiées dans les années 1970 dans le but de déterminer la topographie de la surface océanique. Les mesures ont progressivement permis de montrer leur potentiel pour l'observation précise de l'élévation du niveau de la mer et le suivi de son évolution au cours du temps. Cette approche nécessite de disposer d'une estimation précise de l'orbite du satellite, celle-ci étant obtenue par intégration des équations de la loi fondamentale de la dynamique tout en ajustant le calcul de la trajectoire, à partir de mesures de positionnement, effectuées par télémétrie laser (Satellite Laser Ranging) ou par mesures GPS (Global Positioning System), et de mesures de vitesse effectuées par effet doppler grâce au système DORIS, Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite [267, 101, 15]. L'altimétrie spatiale nécessite aussi de disposer d'une analyse précise de l'onde radar émise par le satellite en direction de la Terre et réfléchi à sa surface dont on connaît la forme théorique approchée [85, 157], mais qui doit être analysée de façon empirique afin de disposer d'une estimation optimale de la distance surface-satellite. La mesure doit aussi être corrigée de l'effet des vagues [130], des retards de transfert dans la troposphère, en distinguant les contributions sèche [93] et humide (cette dernière peut être effectuée grâce à des mesures radiométriques embarquées [272]), et du transfert dans l'ionosphère. Pour effectuer des comparaisons spatialisées des variations basses fréquences du niveau de la mer, des corrections géophysiques doivent également être appliquées au signal. La hauteur du géoïde, (c'est-à-dire l'équipotentielle de gravité de la Terre correspondant au niveau qu'aurait la mer au repos) doit être soustraite au signal (en Méditerranée, cette hauteur varie de 0 m dans le bassin Levantin à 50 m dans le Golfe de Valence) ; les corrections de marées terrestres et océaniques doivent être aussi appliquées [90, 112, 89]. Les biais et les dérives des capteurs doivent également être pris en compte [151, 229]. L'estimation de ces derniers nécessite de comparer les mesures satellitaires aux mesures marégraphiques, ce qui constitue une étape délicate de l'altimétrie radar, en raison de la non co-localisation des deux types de mesure, le niveau de la mer côtier étant sujet à des processus hautes fréquences pouvant affecter sensiblement le niveau de la mer dans cette région [210, 13, 12].



(a) altimétrie spatiale



(b) analyse conjointe



(c) récent *vs* ancien

FIGURE 1.1 – Tendances linéaires du niveau de la mer (mm/an) estimées par altimétrie spatiale [12] (a), par combinaison des mesures marégraphiques et altimétriques [13] (b). Comparaisons des tendances récentes (fenêtres de 3 à 10 ans estimées sur la période 1990-2000) aux tendances antérieures (fenêtres de 3 à 25 ans estimées sur la période 1900-2000) [51] (c).

Les missions altimétriques ERS-1 (de 1991 à 1996) et ERS-2 (depuis 1995), mais surtout Topex/Poseidon (lancée en 1992 et offrant une précision de mesure centimétrique), ont permis de mettre en évidence le potentiel de l'altimétrie spatiale pour l'étude spatialisée de la dynamique océanique, de l'échelle locale à l'échelle globale. Au contraire des marégraphes, l'altimétrie spatiale fournit des mesures relatives au centre de masse de la Terre et offre une couverture spatialisée globale. En raison de problèmes instrumentaux spécifiques, les mesures altimétriques sont souvent dégradées en zone côtière. En effet, les corrections radiométriques sont perturbées à proximité de la côte (la tache au sol est d'environ 43 km pour le canal 18 GHz), et l'altimètre peut également décrocher ou être perturbé en raison de cibles perturbatrices plus réfléchissantes, ou sous l'effet de changements rapides de la topographie entre mer et terres émergées [223]. Nos analyses ont permis d'estimer des valeurs locales des tendances du niveau de la mer entre -23.7 mm/an et +28.7 mm/an sur la période janvier 1993 – décembre 2002 avec une valeur moyenne sur l'ensemble du bassin de +4.28 mm/an [12] (cf. Fig. 1.1a).

Une analyse des variations du niveau de la mer combinant les observations par altimétrie spatiale et par marégraphie a été mise en œuvre (cf. Fig. 1.1b) en s'appuyant sur une approche par moindres carrés généralisés [275]. Les mesures mensuelles du Permanent Service for Mean Sea Level (PSMSL) [146] ont été utilisées pour ce travail. L'une des erreurs les plus importantes s'est avérée être l'erreur d'extrapolation : cette erreur résulte de la variabilité horizontale des tendances du niveau de la mer, caractérisée par d'importants gradients [13] (ex. Fig. 1.2). En se basant sur les mesures altimétriques, ces gradients ont été estimés entre 0,65 et  $5.10^{-2}$  mm.an<sup>-1</sup>.km<sup>-1</sup> selon les régions méditerranéennes considérées, pouvant ainsi donner lieu à des différences moyennes de tendances, variant en Méditerranée de  $\pm 0.2$  à  $\pm 1$  mm/an pour des distances de 20 km [13]. Une analyse comparative entre tendances observées au cours de la dernière décennie (1990-2000) et tendances observées au cours du XX<sup>e</sup> siècle a pu être effectuée en s'appuyant sur la série du marégraphe de Marseille. Cette analyse a permis de mettre en évidence des tendances récentes fortes mais non extrêmes (Fig. 1.1c, [51]).

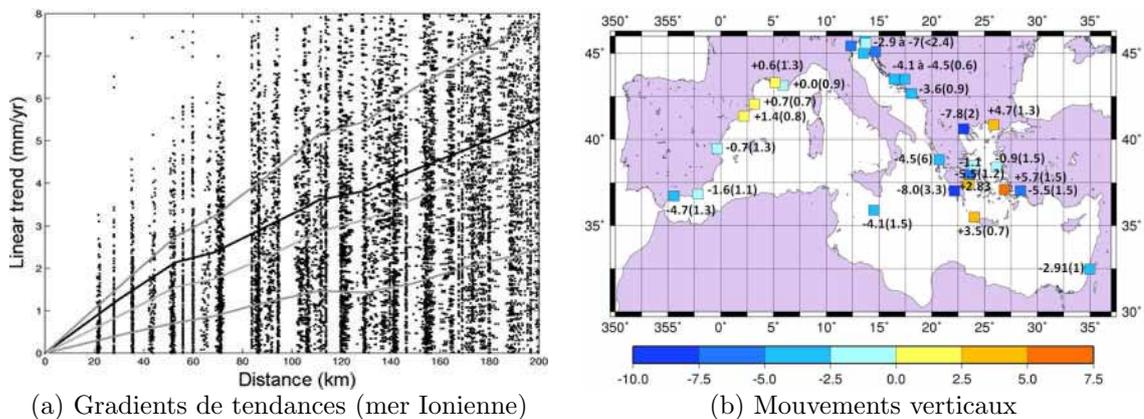


FIGURE 1.2 – (a) Différences des tendances linéaires du niveau de la mer (mm/an) en fonction de la distance entre points de mesures. (b) Mouvements verticaux de la croûte terrestre (et erreur associée) estimés par différences entre mesures altimétriques et marégraphiques (mm/an).

Une estimation des mouvements crustaux verticaux a également pu être tentée en soustrayant le signal issu des mesures altimétriques au signal mesuré en plusieurs stations marégraphiques. Seules les séries étant suffisamment longues et ne présentant pas de défaut manifeste ont été considérées ([51], cf. Fig. 1.2b). Des estimations significatives des tendances linéaires des mouvements verticaux ont pu être estimées en plusieurs sites marégraphiques. Toutefois, l'erreur résultant des gradients de tendances régionaux est souvent apparue trop forte pour disposer d'une estimation précise de ces tendances [51], les niveaux d'erreur étant souvent proches des niveaux d'amplitudes pouvant être attendus [234, 270, 264, 258]. En l'état, les résultats ont seulement permis de montrer la cohérence des estimations et de montrer la nécessité de tenir compte du gradient local de tendance du niveau

de la mer dans le calcul d'erreur.

### 1.3.2 Contribution stérique

Plusieurs processus peuvent affecter les variations du niveau de la mer aux échelles de temps interannuelles à décennales. Parmi ces causes, l'effet de la dilatation stérique est relatif aux variations de température et de salinité. Des variations de température et de salinité des eaux profondes avaient déjà été mises en évidence [78] en Méditerranée mais sans que cette contribution n'ait été estimée en terme de variation de hauteur d'eau. L'importance de la contribution thermostérique de surface a pu être suggérée par une comparaison entre tendances des températures de surface, estimées à partir de mesures satellitaires [250], et tendances du niveau de la mer, estimées par altimétrie spatiale [14]. La composante halostérique peut également avoir une contribution significative dans le bassin méditerranéen comme cela a été suggéré [78, 282].

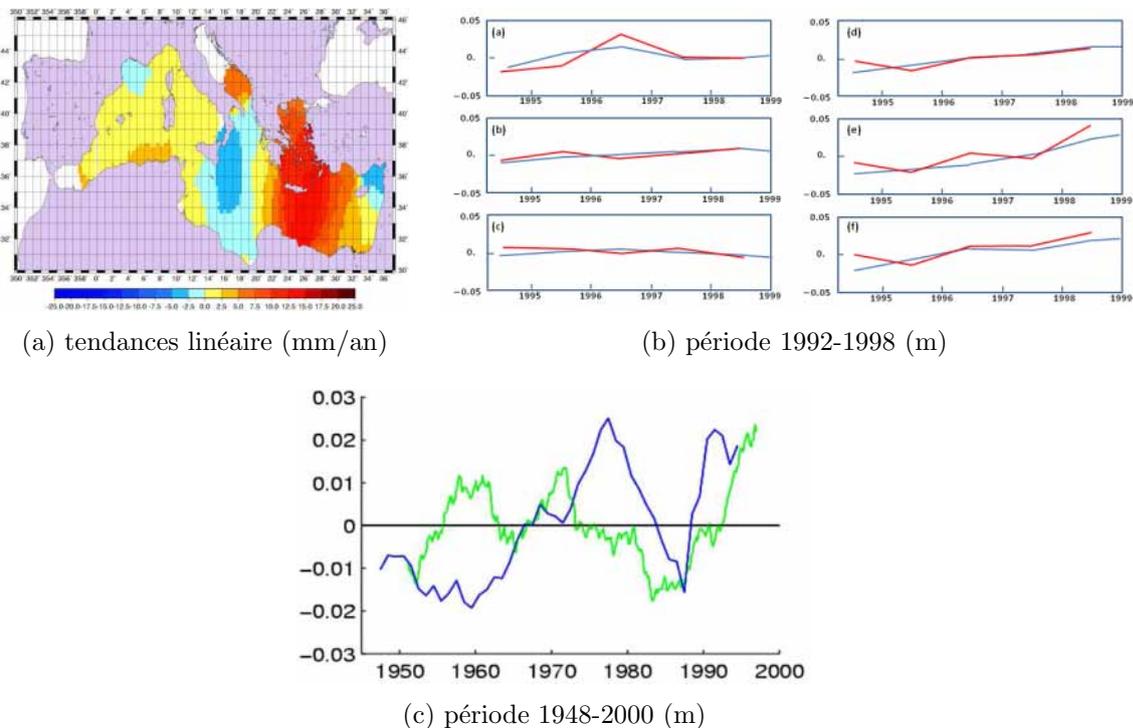


FIGURE 1.3 – Contribution thermostérique aux variations du niveau de la mer sur la période 1992-1998 en mer Méditerranée. Tendances linéaires en mm/an (a) ; séries temporelles de la contribution thermostérique et des variations observées dans six sous-régions (b) et dans le bassin occidental (c) méditerranéen.

Notre participation à cette thématique a consisté à estimer la contribution de l'expansion thermique aux variations de hauteur d'eau de façon spatialisée en s'appuyant sur les données de température de la base de données World Ocean Atlas 1998 [203] de l'Ocean Climate Laboratory. Une estimation simple (statique et locale) de l'expansion thermique a pu être calculée en intégrant les écarts de densités le long de la colonne d'eau (en s'appuyant sur l'équation d'état de l'eau de mer [132]). Cette estimation [51] a permis de mettre en évidence l'influence importante de la contribution thermostérique sur les variations observées par altimétrie spatiale sur la période 1992-1998 (période commune aux deux jeux de données utilisés, cf. Fig. 1.3b). Cette estimation a permis, en particulier, de mettre en évidence une zone de tendances linéaires négatives en mer Égée (Fig. 1.3a) qui avait déjà pu être identifiée dans les mesures altimétriques [14] et avait été confirmée à partir d'estimations locales non lissées, le long de la trace au sol (projection de la

trajectoire) du satellite (Fig. 1.1a, [12]). Une bonne cohérence a pu être observée entre variation du niveau de la mer et expansion thermique à l'échelle des sous-bassins méditerranéens sur la période 1992-1998 (Fig. 1.3b). Cette cohérence n'a toutefois pas pu être confirmée aux échelles de temps plus longues en se basant sur les données marégraphiques (Fig. 1.3c). L'une des conclusions a été que d'autres processus devaient être explorés pour pouvoir expliquer les variations observées, notamment ceux pouvant impliquer des variations lentes du niveau de la mer en Méditerranée. Notons que l'erreur associée au calcul d'expansion thermostérique est difficile à estimer en raison de la distribution inhomogène des jeux de données [51]. Par ailleurs, l'approche utilisée dans nos travaux pour estimer l'expansion thermique était basée sur une relation locale ne permettant pas de prendre en compte les aspects dynamiques qui peuvent pourtant jouer un rôle tout à fait essentiel dans la dynamique océanique. De telles simplifications ne manquent pas d'avantages pratiques : elles permettent notamment d'éviter tous les problèmes techniques de modélisation qui sont nombreux et complexes. Elles permettent surtout de pouvoir se confronter rapidement à des jeux de données de très grande taille et de s'intéresser à des comportements spatialisés de grande échelle. Très utilisée par ailleurs, cette approche statique linéaire d'estimation de la contribution stérique aux variations du niveau de la mer a d'ailleurs permis d'obtenir des résultats cohérents à l'échelle globale mais s'est montrée insuffisante ici pour expliquer les comportements dynamiques observés dans le cadre d'une mer fermée comme la Méditerranée.

Pour mieux comprendre les comportements observés par altimétrie spatiale, d'autres types d'investigation nous ont paru devoir être envisagés, afin de rendre compte des aspects dynamiques. Le seul modèle couvrant l'ensemble de la Méditerranée au sein du laboratoire était un modèle barotrope qui ne pouvait donc pas permettre de résoudre notre problème, puisqu'essentiellement barocline. Un tel modèle nous permettait toutefois de faire un premier pas dans le sens qui nous paraissait le bon, celui de la complexité dynamique, et nous permettait aussi de réfléchir à une autre problématique spécifique aux mers semi-fermées mais relative à des échelles de temps plus courtes, celui de l'action mécanique de l'atmosphère. Bien que les échelles de temps de cette action sur les variations du niveau de la mer concernent essentiellement les échelles de temps courtes, cette contribution peut biaiser le suivi des variations basses fréquences dans le contexte d'observations sous-échantillonnées, ce qui est typique des mesures satellitaires.

### 1.3.3 Les effets de pression et de friction de l'atmosphère

L'atmosphère a une action mécanique sur les variations du niveau de la mer de par la pression locale qu'elle exerce sur l'eau et de par la contrainte superficielle exercée par le vent. L'effet de la pression atmosphérique peut être corrigée efficacement en pleine mer en utilisant une correction locale dite de baromètre inverse (IB). Cette correction est d'environ 1 cm pour un changement de pression de 100 Pa. La correction de baromètre inverse fonctionne moins bien dans les régions semi-fermées comme la mer Méditerranée [131, 109, 281, 283]. En effet, le niveau de la mer ne peut répondre à la pression moyenne sur un bassin fermé que si un ajustement par le détroit est rendu possible. La réponse dépend donc des flux d'eau dans les détroits. Il s'agit donc d'un problème dynamique qui, pour être traité de façon rigoureuse, nécessite de prendre en compte le comportement dynamique. Le Modèle d'Onde de Gravité à 2 Dimensions (MOG2D), développé par F. Lyard (LEGOS) [89], est un modèle dynamique qui permet d'estimer la réponse barotrope de l'océan sous l'effet de l'attraction gravitationnelle de la lune et du soleil, mais également sous l'action des forces de surfaces de l'atmosphère : pression de surface et friction du vent.

Notre contribution, dans cette étude, a consisté à utiliser les sorties du modèle MOG2D pour estimer les corrections prenant en compte l'action dynamique de l'atmosphère. Ce travail a permis de contribuer à la validation du modèle MOG2D en Méditerranée et de mettre en évidence l'importance des corrections résultant de l'action nonlinéaire de la pression atmosphérique et du vent sur les variations hautes fréquences du niveau de la mer (cf. Fig. 1.4a). Notre travail a également permis d'estimer leur influence sur les tendances linéaires estimées par marégraphie et altimétrie spatiale.

Notre travail a permis de montrer, qu'en moyenne, sur l'ensemble du bassin, la correction locale de baromètre inverse permettait de réduire d'environ 40 % la variance du signal observé

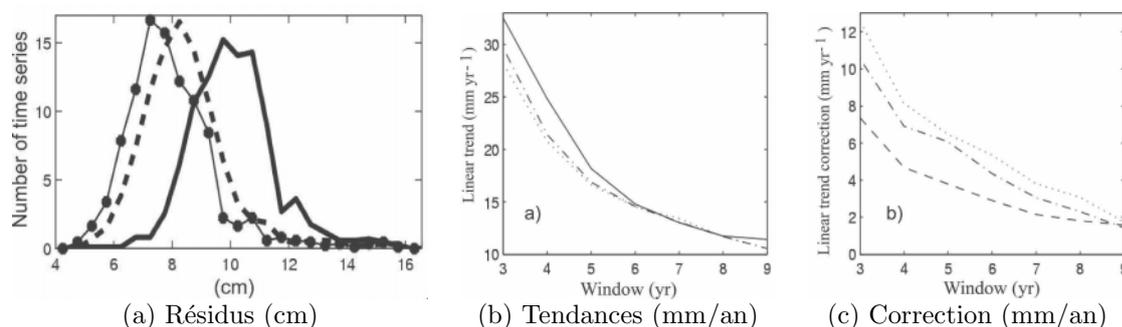


FIGURE 1.4 – (a) Variance (en cm) du signal marégraphique sans correction de charge atmosphérique (trait plein), après correction IB (tirets) et après correction du modèle barotrope MOG2D (points noirs); (b) Moyenne des tendances linéaires maximales (mm.yr<sup>an</sup>) du niveau de la Mer Méditerranée en fonction de la taille des fenêtres considérées sans correction de charge (trait plein), avec correction IB (tirets-pointillés), avec correction barotrope MOG2D (pointillés); (c) Correction de tendance linéaires (mm.yr<sup>an</sup>) résultant de la correction IB (tirets-pointillés), de la correction barotrope MOG2D (pointillés) et du passage de la correction IB à la correction MOG2D (tirets).

en Méditerranée, et que la prise en compte des effets barotropes (effets dynamiques non linéaires de la pression et du vent) permettait de réduire les résidus de 10 % supplémentaires. En prenant en compte l'effet stroboscopique des mesures du niveau de la mer (effet d'aliasing revenant à un repliement du spectre de Fourier sur les basses fréquences), nos analyses ont également mis en évidence l'importance qu'il y a à corriger les mesures altimétriques des effets non linéaires de l'atmosphère (pression et vent), que ce soit pour estimer des tendances linéaires du niveau de la mer ou pour comparer des séries temporelles non colocalisées (pour l'estimation des mouvements verticaux notamment) [51]. Plus les analyses sont effectuées sur des périodes courtes, plus l'effet sur l'estimation de la tendance peut être marqué (Fig. 1.4b et 1.4c). Pour un échantillonnage tous les 9.9156 jours comme celui de Topex-Poseidon, la correction de baromètre peut atteindre 7 mm/an sur une période de 5 ans (4 mm/an pour la correction due au vent). Les corrections restent significatives ( $\pm 2$  mm/an) pour des fenêtres de 8-9 ans. L'utilisation de produits interpolés (traces montantes et descendantes issues de mesures multi-satellites, [68]) permet de minimiser cet effet mais fait perdre en résolution spatiale en comparaisons de mesures effectuées le long des traces.

De nombreuses pistes auraient pu être choisies pour prolonger cette problématique de recherche notamment par l'analyse d'autres processus pouvant contribuer aux variations du niveau de la mer Méditerranée, tels les échanges de masse via les détroits [253] et l'atmosphère [78]; les modifications de la circulation océanique [241] pouvant inclure des déplacements de gyres ainsi que la formation de tourbillons associés à des instabilités de flux dont la durée de vie peut varier de quelques mois à plusieurs années. Nous avons d'ailleurs effectué un Contrat à Durée Déterminée au sein du Pôle d'Océanographie Côtière (POC) [103, 211] concernant la propagation des erreurs dans le modèle 3D *Symphonie* (modèle barocline aux équations primitives [117]). Cette étape s'est malheureusement avérée trop courte pour être productive et notre parcours nous a finalement conduit vers d'autres thématiques (hasard de la vie et des contrats professionnels).

Ces différentes expériences sur la Méditerranée nous ont sans aucun doute toujours poussé à nous intéresser de plus en plus aux aspects dynamiques, qui s'avèrent essentiels lorsqu'on s'intéresse à la complexité des comportements environnementaux.

## 1.4 Le transport de matière en suspension dans le bassin Amazonien

Parmi les expériences qui ont suivi, l'une d'elle a concerné les transports de matière en suspension dans le bassin Amazonien, lors d'un contrat très court au Laboratoire des Mécanismes et Transferts en Géologie (LMTG, devenu Géosciences Environnement Toulouse – GET). Ce contrat a permis de mener un travail très appliqué [4] s'appuyant sur des approches statistiques simples, permettant de propager le signal de matière en suspension le long du cours d'eau et d'obtenir une estimation des flux combinant mesures satellitaires et mesures *in situ*.

Les variables telles que le débit ou le flux de matière en suspension des grands fleuves du monde sont de bons indicateurs de la dynamique climatique à grande échelle, mais aussi de l'usage des terres dans les bassins versants dont ils dépendent. Les dynamiques impliquées sont toutefois complexes. Le débit des fleuves dépend non seulement de la distribution spatiale des pluies, mais aussi de nombreux autres processus tels le transfert de l'eau des bassins versants jusqu'au lit de la rivière qui dépend lui-même du couvert de surface, des propriétés des sols, de la morphologie du cours d'eau (pente, profondeur et rugosité entre autres), et des interactions entre cours d'eau et zones inondées [224].

La dynamique du flux de particules en suspension est également complexe. Les sédiments transportés par les fleuves dépendent des processus d'érosion et apportent pour cette raison aussi une information sur la quantité de CO<sub>2</sub> atmosphérique piégée par érosion. Elle est influencée par les processus internes de la rivière (érosion des berges, dépôt le long des méandres). Les échanges avec les plaines inondables jouent aussi un rôle très important, suivant un cycle complexe d'accumulation lors de la montée des crues, d'exportation de sédiments des zones inondées vers le cours d'eau principal pendant la décrue, et de dépôt dans les lacs et les canaux pendant les hautes eaux [221, 224, 218]. Le flux de sédiments en suspension dépend de la topographie et de la lithologie des surfaces drainées, de la taille et de la nature des particules érodées ou encore de l'hydrodynamique du cours d'eau [111, 218, 82]. En raison de cette complexité, le flux des particules en suspension est en partie décorrélé de l'évacuation de l'eau et il n'existe pas de relation simple entre ces deux variables [149]. Pour mieux suivre et comprendre la dynamique de l'eau et des flux de sédiments en suspension le long des rivières, un échantillonnage spatiotemporel adéquat des flux d'eau et de matière est nécessaire [88, 222].

Le bassin de l'Amazonie est le plus grand du monde avec une superficie d'environ 6,1 millions de km<sup>2</sup> [140]. Son suivi est particulièrement difficile, et d'immenses régions restent non instrumentées et mal comprises [123, 4]. Le bassin amazonien peut raisonnablement être considéré comme un bon indicateur du climat mondial dans la mesure où ses apports en eau douce représentent environ 15% de l'eau douce mondiale apportée à l'océan [231, 87] (voir aussi [251] pour une estimation précédente de 20%) avec un débit annuel de 209.000 m<sup>3</sup>.s<sup>-1</sup> [231], et joue un rôle important dans la régulation du climat mondial [235]. Son débit dépend directement des conditions climatiques régionales. Il dispose d'un régime mono-modal qui résulte des contributions intégrées des différents affluents drainant des régions climatiques contrastées [231]. Sa dynamique est également caractérisée par une grande variabilité, en amplitude et en phase, mais aussi d'une année à l'autre, qui résulte des variations interannuelles du climat [214]. On peut noter que le débit maximal jamais enregistré a récemment été dépassé lors de la crue de 2009 avec une valeur d'environ 258 900 m<sup>3</sup>.s<sup>-1</sup> [245] et que plusieurs événements de sécheresse ont été enregistrés au cours de la dernière décennie (en 2005 et 2010) avec un débit minimal de 60.000 m<sup>3</sup>.s<sup>-1</sup> ou inférieur. Pour des raisons pratiques, la surveillance directe du débit et de la concentration de sédiments en suspension (SSC) ne peut être réalisée que dans un nombre réduit de sites, généralement situés à la sortie de sous-bassins internes<sup>1</sup>. Malgré tout, la distribution des stations de mesure de l'ORE permet tout de même d'établir un bilan précis pour l'eau et les sédiments [217], mais elle nécessite d'être renforcée. Il est en effet nécessaire de quantifier plus précisément les processus responsables de la dynamique spatio-temporelle des flux afin de mieux comprendre le fonctionnement interne du bassin et sa réponse à la variabilité climatique et aux changements dans la couverture des sols, aussi bien aux échelles de temps décennales que séculaires.

1. voir le réseau sur le site de l'ORE Hybam <http://www.ore-hybam.org>

L'absence de mesures continues de niveau d'eau et de débit, dans les grandes plaines inondées connectées au cours principal du fleuve Amazone, constitue une importante limitation à l'estimation précise des flux d'eau et de sédiments s'écoulant au travers des plaines d'inondation. Les flux échangés entre le lit du fleuve et les plaines inondables sont toujours un sujet de débat et les chiffres varient selon les méthodes d'estimation, les échelles d'espace et de temps considérées, et les zones géographiques étudiées.

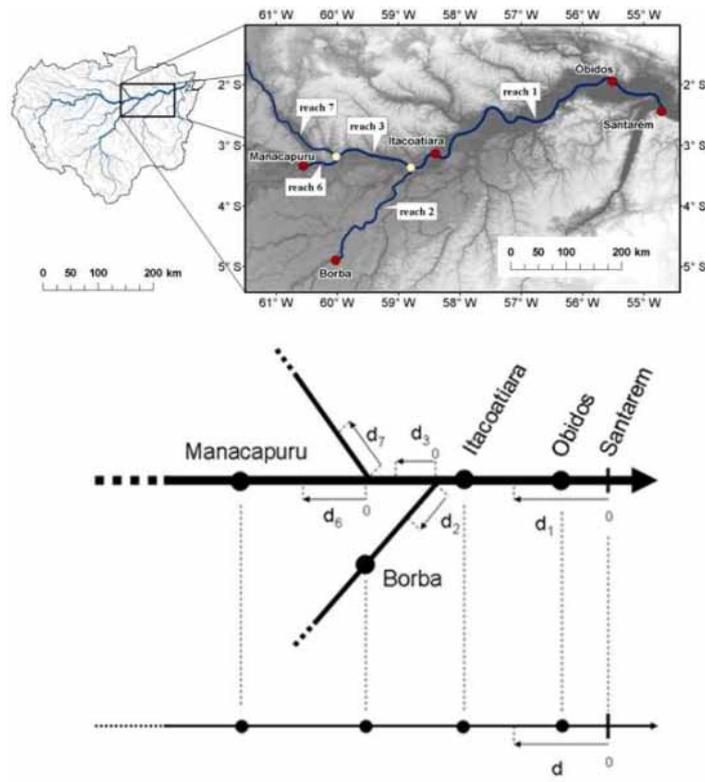


FIGURE 1.5 – Carte et représentation schématique du domaine considéré dans l'étude : entre Manacapuru et Óbidos le long du fleuve Amazone, de Borba à la jonction avec le fleuve Amazone, le long du fleuve Madeira, et à la jonction du Negro avec le fleuve Amazone. Les données sont disponibles à Manacapuru, Borba, Itacoatiara et Óbidos. Santarém est utilisé comme point de référence pour la distance le long d'une portée.

Les données satellitaires de couleur de l'eau telles que les données MODIS peuvent être utilisées pour estimer la densité de particules à la surface de l'eau [172, 115]. Combinées à des données *in situ*, les mesures satellitaires peuvent également être utilisées pour calculer la teneur en particules intégrées sur la profondeur [217], permettant une estimation du rejet des sédiments de rivière avec une bonne précision [217, 116].

Pour estimer les flux le long des principaux cours d'eau, une méthode statistique simple de type moindres carrés généralisés a été utilisée [275] (méthode que nous avons déjà eu l'occasion d'utiliser pour combiner mesures altimétriques et mesures marégraphiques [13]), en y introduisant un terme permettant de propager l'information le long du cours d'eau vers l'amont et l'aval. Ce travail a permis d'obtenir une combinaison optimale des données issues de sources différentes et prenant en compte le niveau d'incertitude de chacune. Cette méthode a été appliquée ici dans l'objectif d'estimer les débits et les flux de matière en suspension le long des principaux cours d'eau, dans une zone (cf. Fig. 1.5) incluant le fleuve Amazone et une partie de ses principaux affluents : le Madeira, le Negro et le Solimões.

Les analyses effectuées lors de cette étude ont montré que le signal observé à la station in-

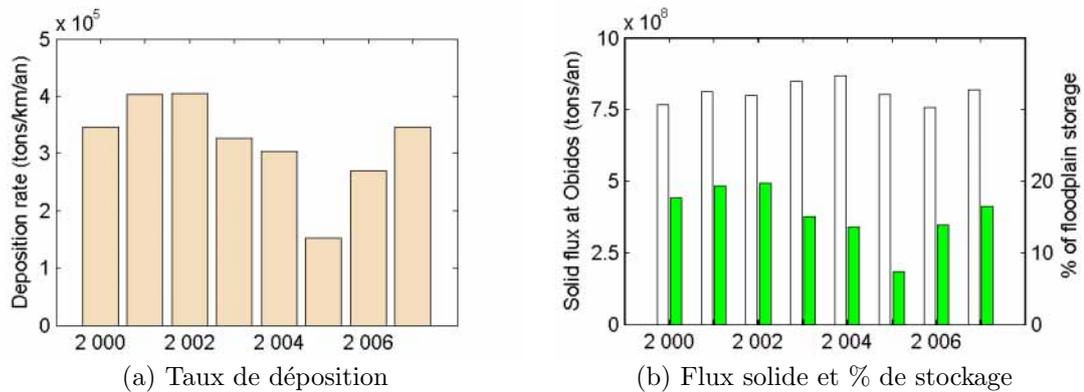


FIGURE 1.6 – Taux de dépôt (en  $t.km^{-2}.yr^{-1}$ ) estimé entre Itacoatiara et Óbidos (a) et flux de sédiments en suspension estimés à Óbidos (en  $t.yr^{-1}$ ) tracé en même temps que le % de stockage dans la plaine inondée relatif au flux de sédiment en suspension passant à la station d'Óbidos (b).

termédiaire d'Itacoatiara est perdu avant d'arriver à Óbidos, mettant en évidence l'importance du rôle des plaines inondées dans la dynamique des transports sédimentaires. Le taux de dépôt a été estimé entre 0,15 et 0,41  $Mt.km^{-2}.an^{-1}$  (Fig. 1.6(a)). Ce taux présente une importante variabilité interannuelle qui semble dépendre du débit à l'étiage. Ce comportement résulte vraisemblablement des processus de remise en suspension dans les plaines inondées qui est d'autant plus élevé que le débit minimal est plus faible. Cette observation, qui doit cependant être confirmée à partir de périodes d'observation plus étendues, est cohérente avec les événements de remise en suspension observés dans les plaines d'inondation au cours des années de sécheresse.

Notre contribution à cette thématique a permis de fournir une nouvelle estimation, plus précise, de la quantité de sédiments piégés par les plaines inondées qui a pu être comparée à d'autres estimations basées sur des approches très différentes permettant d'effectuer une synthèse comparative. Cette quantité a été estimée à environ 15% du flux annuel de sédiments en suspension passant à Óbidos, correspondant à un taux de dépôt de  $0,32 Mt.km^{-2}.an^{-1}$  (soit  $8,8 \cdot 10^3 t.km^{-2}.an^{-1}$  par rapport à la surface des plaines inondables, cf. Fig. 1.6(b)). Sur la base de la moyenne de la surface des plaines inondables et sur les caractéristiques des sédiments (densité et la porosité), le taux d'accumulation de sédiments est estimé à  $27 mm.an^{-1}$ .

La découverte de cette thématique nous a pleinement enthousiasmé de par la richesse de ses processus et ce, bien que nous n'ayons pas pu poursuivre certaines pistes de recherche pourtant entamées concernant la spatialisation d'un modèle dynamique de type Muskingum-Cunge pour le suivi et l'analyse des flux de matière en suspension.

## 1.5 Dynamique de la végétation en Afrique de l'Ouest

L'obtention d'un contrat de postdoctorat du Centre National d'Études Spatiales dans l'équipe d'Eric Mougin fût pour nous l'occasion de découvrir une thématique tout à fait nouvelle, celle du cycle de la végétation en Afrique de l'Ouest, de sa modélisation et de sa télédétection par satellite. Ce fût également l'occasion pour nous de revenir à la théorie des systèmes dynamiques nonlinéaires par une voie appliquée. Nous avons eu l'occasion de découvrir cette théorie au cours de nos études et avons été marqués – dès le premier cours – par l'une des propriétés les plus fondamentales émergeant de cette théorie, selon laquelle un comportement déterministe peut être imprévisible à long terme (cours et travaux dirigés de F. Charru et A. Barelli). Cette matière nous avait fasciné sans savoir – et c'est à Pierre Mazzega que l'on doit de nous l'avoir fait découvrir – qu'elle offrait un support méthodologique à l'analyse de séries temporelles.

Cette redécouverte de la théorie des systèmes dynamiques nonlinéaires sous un angle pratique a joué un rôle essentiel dans notre parcours dans la mesure où elle nous a ouvert une nouvelle voie

qui constitue aujourd’hui l’essentiel de notre programme de recherche. À ce stade, elle présentait surtout l’intérêt de nous permettre de porter notre attention sur les comportements dynamiques, sans nécessiter de disposer de modèle dynamique. Les principaux concepts utiles à cette théories seront présentés au chapitre 2. Pour une introduction plus spécifiques aux concepts utilisés dans la présente section 1.5, le lecteur est renvoyé aux références suivantes [56, 106, 299, 7].

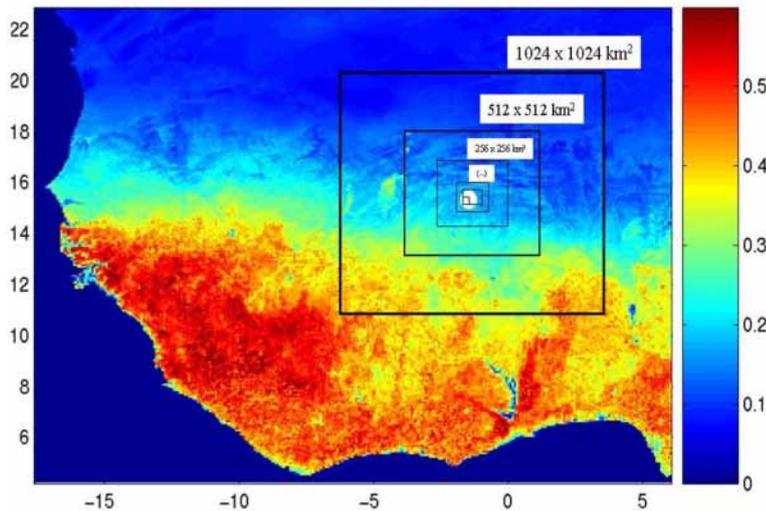


FIGURE 1.7 – Valeurs moyennes des séries temporelles normalisées NDVI AVHRR à  $8 \times 8 \text{ km}^2$  de résolution calculée sur la période 1982-2004 sur l’Afrique de l’Ouest. Les fenêtres avec des indices d’agrégation  $I_A = 8$  à  $I_A = 6$  centrées sur le site d’Agoufou dans le Sahel (région du Gourma, Mali) sont représentées. Le trait le plus saillant de cette carte est le gradient nord-sud du signal NDVI qui correspond à la distribution zonale des principaux types de végétation d’Afrique de l’Ouest.

### 1.5.1 Analyse nonlinéaire du cycle de la végétation

De manière générale, la structuration spatiale de la dynamique de la végétation en Afrique de l’Ouest se fait suivant un gradient bioclimatique latitudinal (Fig. 1.7). Malgré ce gradient marqué, d’importantes hétérogénéités sont rencontrées en fonction des zones géographiques et des échelles considérées. L’application d’outils d’analyses capables de mieux caractériser la dynamique de la végétation de ces milieux peut contribuer à mieux comprendre leur complexité et leur spécificité.

Nous nous sommes plus spécifiquement intéressés aux questions touchant au nombre de variables mises en jeu dans les comportements dynamiques observés, à leur prévisibilité, à la complexité de ces dynamiques et au niveau de bruit additif au sein des observations utilisées.

La dimension de plongement  $d_E$  est liée au nombre de variables dont il nous faut disposer pour modéliser le signal considéré tout en préservant le principe du déterminisme. La dimension de plongement  $d_E$  peut être estimée en utilisant l’algorithme des faux proches voisins [56]. Sur cette base, cet algorithme permet de garantir l’inégalité suivante :  $d \leq \hat{d}_E \leq 2D + 1$  où  $d$  et  $D$  correspondent respectivement au nombre de variables distinctes en jeu et à la dimension fractale de la dynamique considérée, et où  $\hat{d}_E$  est la dimension estimée (cf. chapitre 2, §2.2). Appliquée à la dynamique de la végétation sur l’ensemble de l’Afrique de l’Ouest, l’algorithme a permis de mettre en évidence des comportements de petites dimensions ( $\hat{d}_e = 3$  à 4) ainsi qu’un gradient croissant de complexité en allant du Nord vers le Sud (Fig. 1.8).

Les invariants nonlinéaires sont des indicateurs appropriés pour caractériser les dynamiques présentant une forte sensibilité aux conditions initiales, et plus précisément celles étant de nature chaotique. Le plus populaire des invariants nonlinéaires est certainement la dimension de corrélation  $D_c$ , introduite par Grassberger et Proccacia en 1983 [142]. La méthode permettant l’estimation de

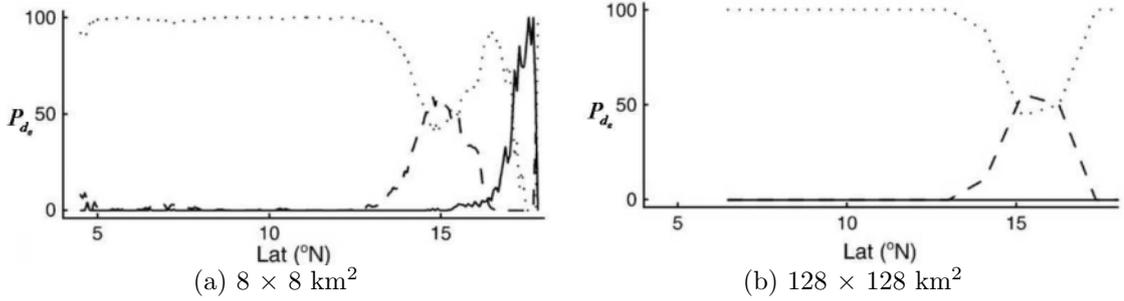


FIGURE 1.8 – Probabilité  $P_{d_e}$  (%) d’observer la dimension de plongement  $d_e$  en fonction de la latitude considérée pour  $d_e = 2$  (trait plein),  $d_e = 3$  (pointillés) et  $d_e = 4$  (tirets). A proximité des régions tropicales, la dimension est systématiquement égale à quatre aux résolutions spatiales (a) de  $8 \times 8 \text{ km}^2$ , et (b)  $128 \times 128 \text{ km}^2$ . Dans la fenêtre Sahélienne, une forte proportion de dimension intermédiaire apparaît en raison de la plus grande simplicité du couvert herbacé dominant. En continuant à remonter vers le Nord, la végétation se fait de plus en plus parcimonieuse, et son signal NDVI de plus en plus faible, accentuant les effets de quantisation et conduisant à faire croître la dimension de plongement.

cet invariant est basée sur la fonction de corrélation qui présente l’avantage d’être facile à mettre en œuvre. Cette méthode est néanmoins très sensible au bruit additif et nécessite de disposer de séries temporelles très longues, ce qui est rarement le cas lorsqu’on s’intéresse aux dynamiques environnementales. Des méthodes moins sensibles au bruit ont été développées visant à distinguer le signal qui nous intéresse du bruit additif (supposé Gaussien) qui s’y superpose. La fonction de corrélation d’un signal incluant une composante déterministe combiné à un bruit additif Gaussien peut être formulée de la façon suivante [106, 299]

$$T_m(h) = \phi \left( \frac{h^2}{h^2 + \sigma^2} \right)^{m/2} \exp^{-K\tau m} \left( \frac{h^2 + \sigma^2}{m} \right)^{D_c/2} \quad (1.1)$$

lorsque  $\sqrt{h^2 + \sigma^2} \rightarrow 0$  et  $m \rightarrow \infty$ , où  $h$  est le rayon de résolution,  $\phi$  la constante de normalisation,  $m$  la dimension de reconstruction prospective,  $\tau$  le temps de décalage utilisé pour la reconstruction,  $K$  l’entropie de corrélation,  $D_c$  la dimension de corrélation, et  $\sigma$  le taux de bruit Gaussien défini comme

$$\sigma = \frac{\sigma_n}{\sigma_s} = \frac{\sigma_n}{\sqrt{\sigma_c^2 + \sigma_n^2}} \quad (1.2)$$

où  $\sigma_s^2$  correspond à la variance du signal d’entrée,  $\sigma_c^2$  la variance du signal non bruité et  $\sigma_n^2$  la variance du bruit additif Gaussien. En pratique, la méthode consiste à calculer l’intégrale de corrélation sur la base de l’équation (1.1) en fonction du rayon de résolution  $h$  pour différentes valeurs de  $m$  jusqu’à ce que la pente de la fonction converge. Les valeurs de  $K$ ,  $D_c$  et  $\sigma$  sont alors obtenues par un ajustement non linéaire de la fonction  $T_m(h)$  (Eq. 1.1) à la fonction de corrélation estimée empiriquement à partir des données.

La dimension de corrélation  $D_c$  est une dimension fractale qui caractérise l’autosimilarité par changement d’échelle de la trajectoire plongée dans l’espace des phases. Elle nous informe sur la distribution plus ou moins dense du feuilletage des trajectoires dans l’espace des phases et sur le caractère plus ou moins dissipatif du système sous-jacent à la dynamique observée. Appliquée à la dynamique de la végétation, cette approche a permis de révéler des dimensions non entières de  $D_c$  sur l’ensemble de l’Ouest africain. L’erreur associée aux estimations de  $D_c$  est relativement faible ( $< \pm 0.1$ ) dans les régions de savanes où le couvert herbacé est largement parcemé de petits arbres (entre  $9^\circ\text{N}$  et  $13^\circ\text{N}$ ) et dans les régions Sahéliennes où le couvert herbacé n’est associé qu’à une distribution très clairsemée d’arbustes (entre  $13^\circ\text{N}$  et  $16^\circ\text{N}$ ). L’erreur devient néanmoins très importante dans les régions Sud où la couverture nuageuse et les brumes sont beaucoup plus

récurrentes, et dans les régions proches des régions arides où le signal de végétation est souvent très faible.

L'entropie de corrélation  $K$  peut être définie comme un taux exponentiel de croissance du nombre de trajectoires sur le long terme. Les valeurs de  $K$  obtenues pour la région Ouest-Africaine ont pu être estimées entre 0.8 et 2. Afin de rapporter ces valeurs à des grandeurs plus directement intelligibles, ces valeurs ont été transformées en horizon de prévisibilité  $H_P$  à partir de la relation suivante

$$H_P = \ln(2)/K. \quad (1.3)$$

L'horizon de prévisibilité  $H_P$  correspond alors au temps de doublement d'une différence initiale. Ces horizons ont été estimés entre 2 et 8 décades (Fig. 1.9). L'algorithme utilisé pour ce travail [299] permet également d'estimer le niveau de bruit Gaussien. L'analyse a permis de mettre en évidence un niveau de bruit très important pour la plupart des régions.

La principale limite de ce type d'approche résulte d'une forte sensibilité au bruit qui conduit à ne pas garantir une distinction robuste entre signal stochastique et signal déterministe. Ces résultats nous sont néanmoins apparus encourageants de par la cohérence spatiale des estimations, pour une zone très étendue de notre région d'étude. Il nous a paru raisonnable d'interpréter la dynamique des couverts herbacés comme des dynamiques de petite dimension pouvant présenter une importante sensibilité aux conditions initiales, conduisant à une faible prévisibilité. Ces analyses ont ainsi constitué une étape intermédiaire dans notre démarche vers notre programme de recherche actuel, et nous ont encouragé à poursuivre notre exploration de façon plus poussée sur la piste de l'analyse nonlinéaire et de la détection du chaos.

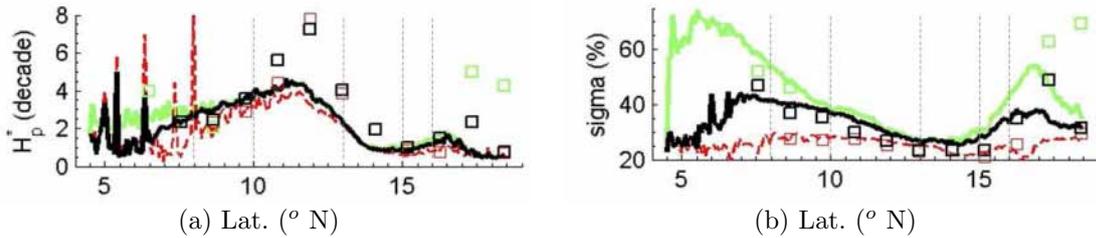


FIGURE 1.9 – Valeurs moyennes de l'horizon de prévisibilité  $H_P$ , et du pourcentage de bruit Gaussien  $\sigma$  en fonction de la latitude, pour une résolution de  $8 \times 8 \text{ km}^2$  (lignes pleines et pointillés) et pour une résolution de  $128 \times 128 \text{ km}^2$  (carrés). À noter que pour la résolution la plus basse de  $1024 \times 1024 \text{ km}^2$ , les valeurs  $H_P = 4.1$  décades et  $\sigma = 24\%$  sont obtenues. Le lecteur est renvoyé à la publication originale pour une interprétation détaillée des courbes [7].

Au cours de cette étude, nous nous sommes également intéressés à la question de la résolution spatiale. La distribution des pluies peut être très irrégulière dans l'espace et dans le temps, donnant lieu à des hétérogénéités marquées à très petite échelle. L'une des questions abordées en effectuant des analyses à des échelles de résolution variables portait sur la détection d'éventuelles discontinuités du comportement d'échelle afin d'en déduire une échelle optimale pour les prévisions. Cette analyse a été effectuée en considérant des échelles partant de l'échelle originale de  $8 \times 8 \text{ km}^2$  ( $I_A = 1$ ) du produit NDVI utilisé (indices de végétation du GIMMS [285]), jusqu'à  $1024 \times 1024 \text{ km}^2$  ( $I_A = 8$ ) (cf. [7] pour plus d'information sur les prétraitements appliqués). Cette analyse a principalement permis de mettre en évidence des comportements dynamiques de prévisibilité croissante avec l'augmentation de l'échelle de résolution. Cette analyse n'a pas révélé de discontinuité marquée. Comme nous aurons l'occasion de le voir au chapitre 4, une prévisibilité croissante par changement d'échelle n'a rien d'évident *a priori*. En effet, agréger les données ne revient pas simplement à réduire le niveau de bruit par effet de moyennage mais conduit aussi à mélanger des comportements dynamiques différents ou partiellement asynchrones en fonction des échelles et des lieux géographiques considérés.

Dans la bande soudanienne ( $11^\circ\text{N}$ - $13^\circ\text{N}$ ), nos analyses nous ont permis de constater une bonne cohérence spatiale de la dimension de corrélation  $D_c$  en même temps qu'une grande hétérogénéité

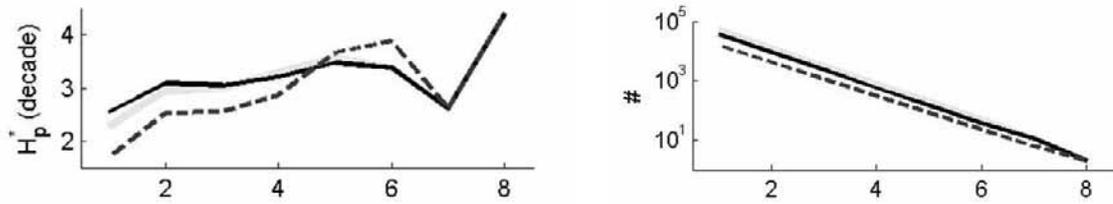


FIGURE 1.10 – Moyennes spatiales de l'horizon de prévisibilité  $H_P$ , et nombre de séries temporelles utilisées pour cette estimation, en fonction de l'indice d'agrégation spatiale  $I_A$  correspondant à  $2^{2I_A-2}$  fois la résolution initiale de  $8 \times 8 \text{ km}^2$ . Les estimations présentées ont été estimées pour trois valeurs différentes de la dimension de plongement :  $d_e = 3$ ,  $d_e = 4$  et  $d_e = 5$

spatiale de l'horizon de prévisibilité  $H_P$ . La répartition spatiale lisse de la dimension  $D_c$  de corrélation a pu être attribuée à l'homogénéité spatiale relativement élevée des scènes de végétation à moyenne échelle dans la région concernée. La répartition spatiale hétérogène de l'horizon de prévisibilité  $H_P$  dans cette région a pu être expliquée par la sensibilité élevée du cycle de la végétation dans les savanes (dominance des prairies C4) et la répartition très irrégulière des précipitations dont les petites fluctuations peuvent conduire à des changements significatifs de la croissance saisonnière. Le calendrier culturel peut également contribuer à cette répartition spatiale contrastée.

Le comportement observé dans la zone soudano-sahélienne et les ceintures du Sahel a pu être expliqué par la prévisibilité inférieure du régime des pluies qui contrôle en grande partie la production de la végétation. En effet, la répartition des précipitations peut varier considérablement sur de courtes distances, et d'une année à l'autre [63, 180, 276], en particulier à l'extrémité nord. Le comportement stochastique de la distribution spatio-temporelle des précipitations n'exclut pas une forte contribution des processus déterministes, en raison de la réponse douce de la végétation aux précipitations [11] et de la rétroaction positive entre la surface du sol et les précipitations (un événement de pluie a, en effet, tendance à persister et à se renforcer dans les modèles d'humidité du sol [277]). La variabilité de la composition annuelle des espèces (% de plante en C3 et C4, % de mono- et dicotylédones [9]) contribue également à réduire la prévisibilité du système. En effet, les contributions respectives des différents types fonctionnels de végétation ont une influence significative sur la dynamique moyenne de la végétation. À titre d'exemple, les dicotylédones, dominants au Sahel, sont caractérisés par une germination et une croissance rapide, alors que les graminées annuelles en C4 ont un taux de photosynthèse élevé [98]. Localement, il est intéressant de noter que des valeurs beaucoup plus élevées de l'horizon de prévisibilité de  $H_P$  sont obtenues dans les rizières de l'Office du Niger, dans la région de Massina et dans la région de Ségou (vallée de Bani) ce qui illustre la plus grande prévisibilité des surfaces cultivées. En effet, sur de tels sites, l'incertitude des précipitations est en partie compensée par l'organisation du calendrier agricole, les périodes d'inondation ou par l'irrigation.

Cette étude nous a également permis de rechercher une échelle représentant un bon compromis entre meilleure résolution et prévisibilité acceptable du cycle de la végétation (Fig. 1.10). La signification statistique des résultats ne peut être garantie que pour les échelles allant de  $8 \times 8 \text{ km}^2$  à  $256 \times 256 \text{ km}^2$  (trop peu de séries temporelles étant disponibles à plus grande échelle d'agrégation). Dans la plupart des régions de l'Afrique occidentale, la gamme d'échelle de  $64 \times 64 \text{ km}^2$  à  $256 \times 256 \text{ km}^2$  est le meilleur compromis pour l'agrégation spatiale. En effet, le rapport signal sur bruit est relativement élevé dans cette gamme, l'horizon de prévisibilité est significativement plus élevé (plusieurs décades sont nécessaires pour doubler l'erreur) et la résolution spatiale préserve la richesse de la dynamique de la végétation nonlinéaire.

### 1.5.2 Approches prédictives

Ce premier travail d'extraction d'invariants nonlinéaire s'appuyant sur des outils développés par d'autres équipes nous a permis d'initier nos propres développements méthodologiques, également basés sur la théorie des systèmes dynamiques nonlinéaires, pour effectuer des prévisions visant à caractériser la prévisibilité du cycle de la végétation de manière très empirique.

Pour les régions semi-arides comme le Sahel, la possibilité de disposer de prévisions saisonnières du cycle de la végétation serait utile pour soutenir la gestion des ressources naturelles et contribuer à la mise en place de systèmes d'alerte précoce. Le climat de la bande sahélienne est découpé en deux saisons. La saison des pluies est contrôlée par le régime de mousson africaine [9], dont les premiers événements pluvieux peuvent démarrer début Juin et s'étaler jusqu'à la fin du mois de Septembre ; la saison sèche est composée des mois restants. L'agriculture pluviale et les activités pastorales sont les principales activités économiques de la région, ce qui en fait une région faiblement anthropisée. La société est en conséquence très dépendante des conditions climatiques et de leurs aléas. Cette dépendance donne une importance pratique à l'étude de la prévisibilité du cycle de la végétation de cette région. Bien que présentant un intérêt potentiel, les horizons de prévisibilité déduits de l'entropie de corrélation (cf. §1.5.1) présentent toutefois une forte sensibilité au bruit et ne peuvent pas être pleinement conclusives.

Une autre approche proposée ici vise à estimer un horizon de prévisibilité effectif  $H_E$ , basé sur l'estimation des capacités prévisionnelles effectives, d'une série temporelle par elle-même, sans disposer de modèle dynamique *a priori*. L'approche s'appuie également sur la théorie des systèmes dynamiques (cf. chapitre 2, §2.2) et nécessite de disposer d'un plongement du signal observé (Figs. 1.11 & 1.12). Ce plongement, constitué d'un ensemble d'états successivement visités par le système, nous fournit – en principe – un portrait multidimensionnel non équivoque de la dynamique. Une approche prédictive peut être mise en œuvre en s'appuyant sur ce plongement. L'approche consiste à rechercher les états analogues, préalablement visités par le système observé, et à suivre l'évolution de ces états au cours du temps. L'approche prédictive présente l'avantage de ne nécessiter que trois paramètres : (1) le délai utilisé pour reconstruire le portrait de phase ; (2) la dimension de plongement  $d_E$  ; et (3)  $r$  le rayon d'influence correspondant à l'éloignement maximum des états analogues recherchés à l'état courant d'où est effectuée la prévision.

Ne nécessitant que peu de paramètres, et étant directement basée sur les données, l'approche peut être utilisée pour caractériser la prévisibilité de la dynamique observée, en se basant sur la croissance de l'erreur de prévision.

De manière pratique, la croissance de l'erreur de prévision peut être obtenue en séparant la série temporelle en deux parties. La première partie est une partie informative, utilisée pour mettre en place l'approche prédictive et effectuer la prévision ; la seconde partie est une fenêtre de validation, retirée et conservée pour estimer l'erreur de prévision. Afin de disposer d'une information statistique de la croissance d'erreur, cette opération peut être répétée en déplaçant la fenêtre de validation sur l'ensemble de la période observée. Une courbe de croissance d'erreur en fonction de la date courante  $t$  (ou de la date de prévision  $t + \delta t$ ) et de l'horizon de prévision  $h$  peut ainsi être obtenue. Et une analyse statistique de cette erreur peut être effectuée. La dimension de plongement  $d_E$  n'étant pas toujours facile à estimer de manière robuste (en particulier en contexte bruité), l'approche peut être appliquée pour différentes dimensions de reconstruction  $d_r$ . Cette statistique de la croissance d'erreur a pu être appliquée avec des dimensions de reconstruction  $d_r = 2$  à 8, et pour différentes échelles d'agrégation (cf. Fig 1.13). Ces travaux ont permis de montrer l'efficacité de cette méthode en comparaison de deux autres approches, l'une basée sur une simple climatologie, l'autre sur un modèle saisonnier.

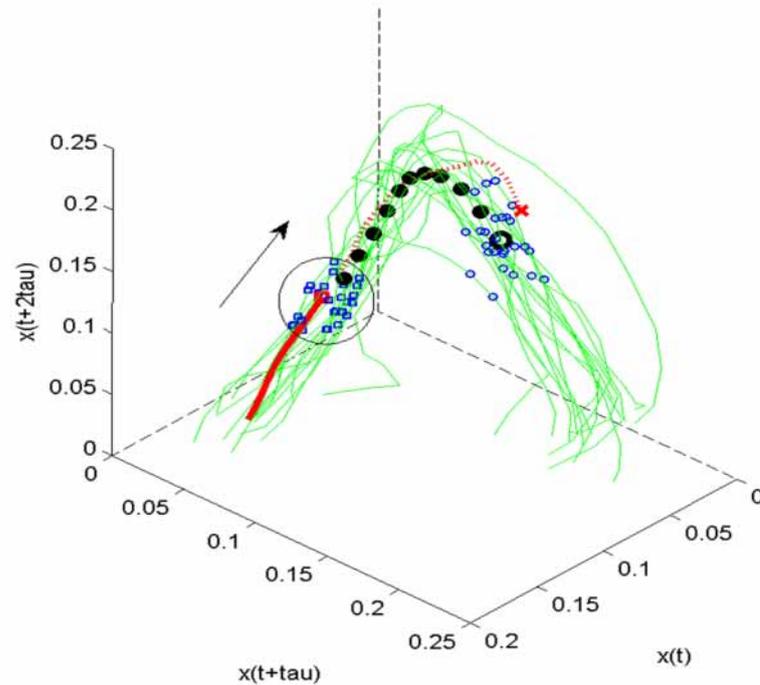


FIGURE 1.11 – La trajectoire géométrique de la série chronologique NDVI (voir Fig. 1.12) reconstruite dans un espace à 3 dimensions en utilisant les coordonnées retardées. La flèche noire indique la direction du flot (temps croissant). Les derniers états visités par le système sont représentés par une ligne rouge épaisse, le grand carré rouge correspond au dernier état visité par le système d'où sera lancée la prévision, et considéré comme l'état courant. La ligne en pointillés rouges représente la suite de la trajectoire dont on cherche à faire la prévision, mais que l'on a retirée ici pour analyser les capacités prévisionnelles de l'approche. Les états préalablement visités par le système dans le proche voisinage de l'état courant sont marqués par de petits carrés bleus. Le suivi de ces états voisins après un horizon  $h$  est représenté par de petits cercles bleus. La valeur réellement observée à l'horizon  $h$  et que l'on cherche à prévoir est indiquée par la croix épaisse rouge. La trajectoire de la prévision est délimitée par les grands points noirs. Les mêmes symboles correspondant à ces différents états sont utilisés dans la représentation temporelle (Fig. 1.12).

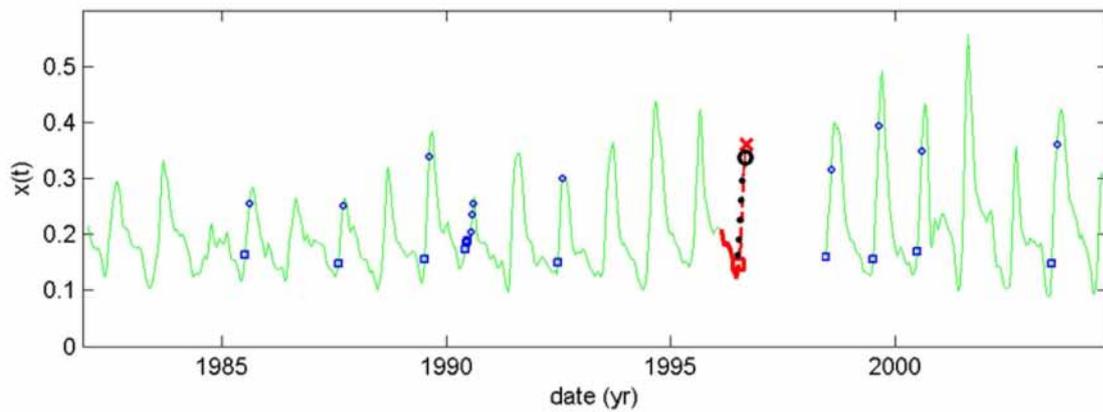


FIGURE 1.12 – La ligne verte représente le signal original informatif. Les derniers états visités par le signal sont représentés par la ligne épaisse rouge, jusqu'au dernier état d'où la prévision doit être lancée. Les petits cercles bleus correspondent aux états proches de l'état courant (voir Fig. 1.11). Les petits cercles bleus représentent l'évolution temporelle après un horizon  $h$ . Le cercle noir représente la prévision obtenue à partir des valeurs moyennes pondérées de l'évolution des états voisins (calculées dans l'espace des phases, voir Fig. 1.11). Cette prévision peut être comparée. L'observation est représentée par une croix rouge. Les points noirs représentent les prévisions intermédiaires, tandis que la ligne en pointillés rouge correspond aux états intermédiaires observés qui ont été temporairement retirés pour tester les capacités prévisionnelles de l'approche.

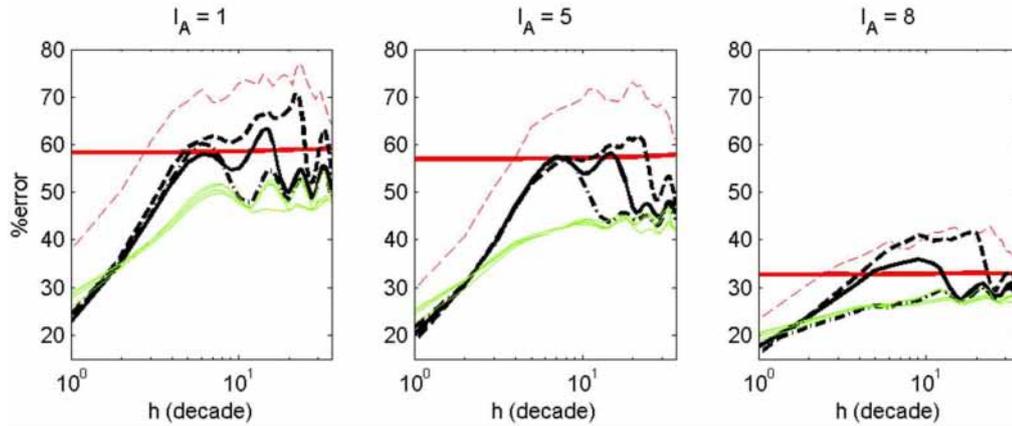


FIGURE 1.13 – Erreur de prévision (en %) présentée en fonction de l’horizon de prévision  $h$  : (a) pour les données non agrégées ( $I_A = 1$ ), puis (b) pour les données agrégées à  $I_A = 5$  et (c)  $I_A = 8$ . Une représentation logarithmique de l’horizon de prévision a été choisie pour rendre le développement initial de l’erreur plus visible tout en permettant de suivre les comportements observés à horizons longs. Le trait gras rouge est obtenu à partir d’une simple climatologie et la ligne en pointillés rouges à partir d’un modèle saisonnier. Les autres lignes sont obtenues grâce à l’approche prédictive présentée dans le présent paragraphe (§1.5.2) et correspondent à différentes dimensions de reconstruction :  $d_r = 2$  (lignes pointillées),  $d_r = 3$  (trait plein noir) et  $d_r = 4$  (tirets-pointillés),  $d_r = 5$  à  $8$  (autres lignes vertes).

Comme attendu, l’erreur obtenue avec l’approche climatologique est indépendante de l’horizon de prévision  $h$  (ligne rouge) car elle ne permet pas de prendre en compte l’aspect dynamique du signal observé. Les autres approches présentent toutes une claire dépendance à l’horizon de prévision  $h$ , avec des erreurs faibles aux horizons courts, une croissance rapide de l’erreur pour des horizons plus grands, jusqu’à atteindre une stabilisation se traduisant par de petites oscillations. L’approche saisonnière présente des scores médiocres, avec un niveau d’erreur raisonnable obtenu uniquement pour des horizons de moins de 3 à 4 décades. Les erreurs associées à l’approche basée sur la recherche des états analogues dans l’espace des phases présentent un comportement plus complexe. À horizon court ( $h = 1$  décade), les meilleurs résultats sont obtenus pour des dimensions  $d_r = 2$  à  $d_r = 4$ . Néanmoins, une croissance rapide de l’erreur y est associée, ce qui signifie que la dimension de reconstruction n’est pas optimale (nous reviendrons sur ce point aux paragraphes §2.4.2 et §2.4.3). Les modèles de dimensions supérieures présentent une croissance d’erreur beaucoup plus lente et, à plus long terme, se montrent plus efficaces. La convergence de l’erreur nous fournit une information sur la dimension de la dynamique sous-jacente au système observé [6].

L’analyse des comportements de prédictibilité à trois échelles distinctes s’est également montrée très informative. En changeant d’échelle de résolution de  $I_A = 1$  à  $I_A = 5$  (1.13), la croissance de l’erreur  $p(h)$  reste assez similaire. À l’échelle  $I_A = 5$ , le niveau d’erreur devient toutefois plus faible pour les dimensions les plus grandes ( $d_r = 5$  et au-delà, ceci est plus particulièrement visible aux horizons intermédiaires de  $h = 4$  à  $h = 8$ ). À cette échelle, le niveau de bruit est plus significativement réduit par le processus d’agrégation. Cette réduction autorise une meilleure détection du comportement déterministe sous-jacent à la dynamique observée et devient accessible en utilisant une dimension de reconstruction suffisamment grande.

À plus grande échelle d’agrégation ( $I_A = 8$ ), le niveau d’erreur relative devient beaucoup plus faible, quelle que soit l’approche utilisée. La prévisibilité devient beaucoup plus grande. En première approximation, la dynamique apparaît plus simple. En augmentant la dimension de reconstruction, la vitesse de croissance d’erreur converge dès  $d_r = 4$ .

En s’appuyant sur la croissance d’erreur, une estimation de la dimension de reconstruction optimale peut être effectuée, de même qu’une estimation de l’horizon de prévisibilité et du niveau de bruit additif. Cette dimension optimale de prévision  $d_r^*$  est estimée à  $d_r^* = 5$  pour la plupart

des échelles d'agrégation, et à  $d_r^* = 4$  à l'échelle  $I_A = 8$ . L'horizon de prévisibilité croît avec la résolution, passant progressivement de 2.0 à 3.3 décades. Le niveau de bruit additif décroît au contraire, passant de 14.5 % à 10.4 % du signal.

Ces analyses de la dynamique de la végétation en région semi-aride sahélienne ont permis de mettre en évidence des dynamiques de petites dimensions ( $d_r^* = 4$  à 5) en cohérence avec les estimations de dimension de plongement préalablement estimées en régions Sahéliennes par un algorithme de faux proches voisins ( $d_E = 3$  à 4 [7]). L'approche introduite ici présente l'intérêt de ne nécessiter que d'un très petit nombre de paramètres pour estimer une dimension de reconstruction optimale pour la prévision et permet également d'en déduire un niveau de bruit additif et un horizon de prévisibilité effectif  $H_E$ . L'algorithme utilisé étant un algorithme prévisionnel, il peut être envisagé comme un outil complémentaire aux modèles utilisés pour simuler la dynamique des interactions Sol-Végétation-Atmosphère. Un approfondissement de ces travaux pourrait consister à relier la problématique d'optimisation des modèles d'efficience (§1.6) à celle de la prévision (§1.5.2). En raison de sa relative neutralité, cette approche sera également utilisée comme moyen de validation des modèles dynamiques (cf. §2.4.3).

## 1.6 Modélisation du cycle de la végétation en région semi-aride

Ce postdoctorat a également été l'occasion pour nous de nous confronter à la problématique de la modélisation du cycle de la végétation et au problème de calibration et d'optimisation des conditions initiales. D'un point de vue méthodologique, ce travail nous a permis de nous intéresser aux algorithmes d'optimisation par approche évolutionnaire bien adaptés aux contextes fortement nonlinéaires. Cette expérience méthodologique s'est révélée très utile par la suite, que ce soit pour l'encadrement d'un travail d'optimisation d'un tour d'eau d'irrigation (cf. §1.7 suivant, et [2]), que pour l'exploration d'une méthode d'assimilation-inversion [28], ou pour le développement d'une approche destinée à la modélisation globale (cf. §2.3.2, [3]).

La région du Gourma (Mali) est située au sud de la grande boucle du fleuve Niger, en aval de Gao. Bien que le climat de la région soit caractérisé par une distribution strictement monomodale des événements pluvieux, la répartition des précipitations au cours de la saison des pluies n'en est pas moins très irrégulière, et sa répartition spatiale inégale [124, 181]. Il en résulte une production primaire très variable d'une année à l'autre avec une importante hétérogénéité spatiale à l'échelle locale qui s'estompe progressivement en considérant des comportements à plus grande résolution spatiale.

Disposer de modèles précis de la dynamique des surfaces peut constituer un élément clé pour la compréhension des processus d'interaction entre surface terrestre et atmosphère qui jouent un rôle très important dans le contexte des moussons ouest-africaines. L'obtention de tels modèles nous confronte à des difficultés pratiques. D'une part, la plupart des modèles de surfaces nécessitent de disposer de données de forçage, en particulier des données de précipitation pour lesquelles on ne dispose souvent que d'une information très locale. D'autre part, les modèles nécessitent souvent d'être calibrés localement afin de garantir leur adéquation au contexte étudié. Il peut également s'avérer nécessaire d'ajuster leur trajectoire au cours du temps.

L'utilisation des mesures de télédétection satellitaire constitue une source d'information importante pour l'étude et le suivi du cycle de la végétation des zones semi-arides. Cette information spatialisée étant obtenue à distance, l'information fournie ne correspond pas aux variables observables sur le terrain et ne peut donc souvent pas être utilisée directement pour contraindre les paramètres et la trajectoire des modèles. Ce n'est que récemment que les modèles de dynamique de la végétation ont commencé à être utilisés en combinaison avec des données satellitaires pour le suivi des variations temporelles de la canopée et pour estimer la production primaire. Les premiers exemples ont été obtenus en utilisant des modèles de croissance de culture couplés à des modèles de transfert radiatif et ont pu être utilisés pour effectuer l'estimation de rendement grâce à l'utilisation d'images satellitaires dans le domaine optique (voir par exemple [212, 233]). Les modèles dynamiques de la végétation naturelle ont été plus rarement utilisés de la sorte en raison de leur

manque de précision (voir par exemple, [91]). Pour des régions comme le Sahel, les données de terrain fiables qui pourraient aider à paramétrer les modèles de prévision font habituellement défaut (par exemple [261]). Dans un tel contexte, le suivi régulier de la dynamique de la végétation *in situ* de la région du Gourma (voir [159, 9] pour plus de détails), et plus spécifiquement le site d'Agoufou 1 km<sup>2</sup>, constitue une source d'information particulièrement riche permettant d'envisager ce type d'approche. Dans ce contexte, la mise en place d'outils numériques combinant le modèle de dynamique de la végétation STEP [232] forcé par les données de précipitation et de rayonnement *in situ* à des modèles de rétrodiffusion radar [169] et/ou des modèles de transfert radiatif [236] pour contraindre la dynamique du modèle à l'aide de données satellite (coefficients de rétrodiffusion issus de mesures ENVISAT-ASAR et d'indices de la végétation Normalized Difference Vegetation Index issus de SPOT-VEGETATION) ont permis de montrer la viabilité de l'approche [11, 10]. Pour cela, une heuristique de type stratégie d'évolution a été utilisée pour paramétrer les modèles de façon optimale. Les résultats ont permis de montrer, sur la base d'expériences jumelles, qu'il était possible d'améliorer significativement les prédictions de biomasse et d'indice foliaire (Fig. 1.14). Ces résultats ont en particulier permis de montrer qu'une prise en compte simultanée des informations des données radar et optiques par l'usage d'un front de Pareto permettait d'obtenir de meilleurs résultats qu'une information combinée basée sur des critères additifs.

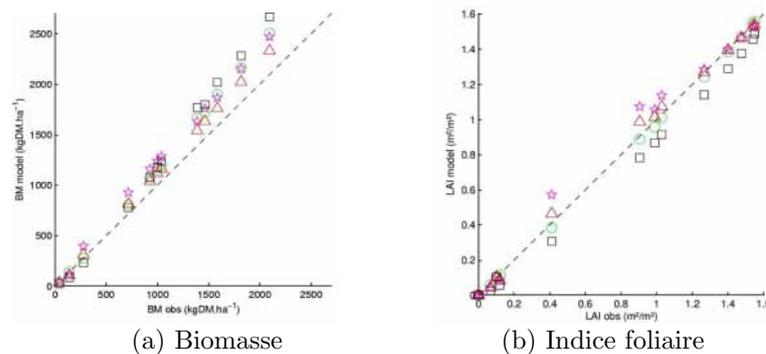


FIGURE 1.14 – Relation entre variables estimées, biomasse (a) et indice foliaire (b), en fonction de la valeur "observée" (générée artificiellement). Les symboles renvoient à différents modes d'inversion basés sur les données de rétrodiffusion (□), les indices NDVI (△), ou les deux combinés lors d'une optimisation mono- (☆) ou bi-objectif (○).

## 1.7 Optimisation des tours d'eau dans un réseau d'irrigation gravitaire

Ce travail résulte d'une sollicitation pour le suivi d'une étude dans le cadre de la thèse de S. Belaqqiz concernant l'ordonnancement d'un tour d'eau au sein d'un réseau d'irrigation de type gravitaire. Cette thèse a été réalisée au sein du LMI TREMA dans le cadre d'un coencadrement entre l'Université Cadi Ayyad de Marrakech (UCAM) et le CESBIO.

L'agriculture irriguée est une thématique de recherche importante pour les zones semi-arides. Le développement durable de ces régions nécessite d'utiliser et de gérer rationnellement les ressources en eau pour répondre aux besoins alimentaires de base des populations. L'agriculture irriguée est l'activité la plus consommatrice de la ressource en eau. Pour assurer l'efficacité de l'utilisation de l'eau pour l'agriculture, il est utile de disposer d'outils de gestion permettant d'adapter la consommation en fonction des besoins réels des cultures et de leurs conditions environnementales. Rationaliser la gestion de l'eau nécessite de disposer d'un point de vue à grande échelle et constitue, de ce fait, une problématique délicate qui requiert d'être capable d'estimer les besoins en eau des cultures de façon spatialisée, et de gérer la distribution de cette ressource en fonction des contraintes

spécifiques au milieu (quantité d'eau disponible, quantité d'eau alouée, mode d'irrigation) et des différents types de priorité. La télédétection spatiale peut jouer un rôle important dans cette problématique et le projet Sudmed a développé, depuis le début des années 1990, des outils pour estimer le besoin en eau des plantes en combinant données spatiales et outils de modélisation. Prenant appui sur le modèle FAO-56 [64], le logiciel SAMIR (SAteellite Monitoring of IRrigation, [265]) permet d'estimer le besoin en eau des cultures en s'appuyant sur des mesures satellitaires de type indice de la végétation.

Afin de disposer d'un critère de priorité, un indice *had hoc* (car spécifique à la zone d'analyse considérée) a été proposé visant à prendre en compte de façon concurrente le besoin en eau des cultures et le retard d'irrigation [76]. Sur cette base, un algorithme de planification des tâches a pu être envisagé dans l'objet de rationaliser la distribution de l'eau d'irrigation. L'un des sites d'étude privilégié du LMI TREMA est situé à une quarantaine de kilomètres de la ville de Marrakech (Maroc), dans la partie ouest de la plaine du Tensift. Le site présente une surface de 2800 ha et est principalement utilisé pour la culture céréalière (45% de la couverture pour l'année 2011-2012, le reste de la surface étant destiné à d'autres cultures annuelles ou à des cultures arboricoles). La région est caractérisée par des conditions climatiques semi-arides avec des températures élevées en été et douces en hiver (respectivement 38°C et 5°C de température moyenne en juillet et en février, [114]), un total de précipitations proche de 250 mm/an, et une demande évaporative d'environ 1500 mm/an [110].

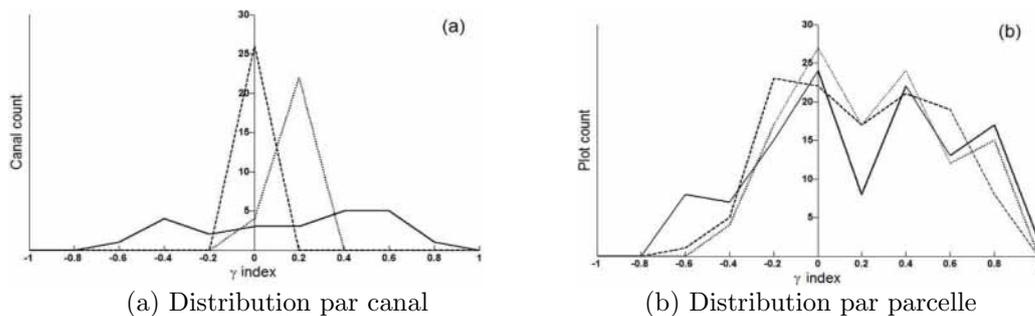


FIGURE 1.15 – Distribution de l'indice de priorité d'irrigation avant et après optimisation. Belaqqiz S., Mangiarotti S. *et al.* [2].

Notre contribution a consisté à l'encadrement d'une étude concernant l'optimisation des tours d'eau (thèse de S. Belaqqiz) d'un point de vue méthodologique : formalisation du problème de planification en s'appuyant sur les outils déjà développés (SAMIR et critères de priorité) et sur les données prétraitées, choix des outils d'optimisation, mise en œuvre de l'optimisation, analyse des résultats. La difficulté d'une telle planification tient au fait de devoir satisfaire de nombreuses contraintes : contraintes spécifiques au réseau d'irrigation gravitaire (consitué de canaux primaires, secondaires et tertiaires) ; contraintes d'organisation où les parcelles attenantes à un même canal d'alimentation doivent être alimentées consécutivement ; contraintes de temps de déplacement de l'aiguadier responsable de l'ouverture et de la fermeture des canaux au sein du réseau, contraintes d'horaires de travail ; et enfin contraintes sur les variations temporelles du débit total qui doit présenter le minimum de variabilité. Le problème ne pouvant être formulé simplement, l'option d'un algorithme stochastique a été privilégié, d'autant qu'un outil de ce type pourrait permettre de tester facilement par la suite d'autres hypothèses de travail, sans nécessiter de reformuler entièrement le problème de planification. Le choix de l'algorithme CMA-ES [153], que nous avons déjà eu l'occasion d'utiliser dans d'autres contextes [28], a été privilégié. Notons que l'analyse comparative d'algorithmes d'optimisation a permis d'établir que le CMA-ES est actuellement l'une des méta-heuristiques les plus efficaces pour faire face aux problèmes d'optimisation numériques difficiles [154].

Ce travail a permis de montrer l'efficacité de l'algorithme pour la résolution de ce type problème (cf. Fig. 1.15a). En raison des contraintes fortes imposées par le mode d'irrigation et notamment,

du fait d'irriguer de façon successive les parcelles attenantes à un même canal, aucune solution entièrement satisfaisante ne peut être obtenue (cf. Fig. 1.15b). Pour conserver l'objectif de rationaliser la distribution de l'eau, une modification du critère de priorité a été proposée consistant à décentrer le critère en vue de prendre en compte la disymétrie du problème. En effet, un retard d'irrigation peut avoir des conséquences plus graves sur le développement de la culture qu'une irrigation avancée aurait sur la ressource en eau. Ce travail permet de mettre en évidence l'utilité pratique d'une telle approche de planification optimisée. Ce travail montre également l'utilité de revoir le mode d'organisation de l'irrigation de parcelles alimentées par un même canal. Les résultats mettent aussi en évidence l'apport de l'outil SAMIR, qui, couplé à un outil d'optimisation des tours d'eau, pourrait permettre une réduction de la consommation en eau d'une proportion supérieure à 20%. En perspective, de nouveaux scénarii d'irrigation basés sur une réorganisation des tours d'eau pourraient être testés avec la même approche d'optimisation. Ce travail a permis de déboucher sur une publication de rang A [2].

## 1.8 Dynamique des eaux souterraines en milieu karstique

Une autre de nos expériences, initiée lors d'une mission de courte durée à l'Indian Institute of Science (IISc) de Bangalore (India) au sein de la Cellule Franco Indienne de Recherche en Science de l'Eau (CEFIRSE) nous a permis de démarrer une collaboration fructueuse avec M. Sekhar (Department of Civil Engineering, IISc) concernant la dynamique des eaux souterraines. Cette mission m'a donné l'occasion de faire connaissance avec la thématique des eaux souterraines en effectuant une étude statistique simple d'un jeu de mesures piezométriques et m'a également donné l'occasion de participer de façon significative au co-encadrement d'une étude dans le cadre du travail de thèse de Y. Javeed [165]. Cette collaboration a ensuite pu être prolongée par une étude effectuée dans le cadre du stage de Master de L. Berthon dont j'ai été l'encadrant principal [47]. Cette étude a finalement permis de donner lieu à un article de rang A [5].

Les tendances spatio-temporelles du niveau des eaux souterraines sont contrôlés, dans les bassins versants, par des processus complexes influencés par le climat, les caractéristiques physiques du bassin et les activités humaines [297]. L'une des difficultés spécifiques de leur étude tient à la difficulté d'en observer la dynamique de façon spatialisée, dans un contexte pouvant présenter d'importantes hétérogénéités tridimensionnelles (complexité des couches géologiques de surface, complexité du réseau des fractures), et d'une accessibilité difficile.

L'étude de l'impact de la variabilité du climat et des changements d'usage des sols sur l'hydrologie et les ressources en eau est devenue un important domaine de recherche en hydrologie [294]. La dynamique des réservoirs d'eau souterraine peut être influencée à des échelles de temps plus ou moins longues et, en particulier, par les variations décennales des précipitations et, à plus long terme, sous l'effet de changements climatiques. Des événements de sécheresse ou d'autres événements extrêmes peuvent également influencer significativement le niveau des nappes. Ces changements sont influencés, à différentes échelles spatiales en fonction de la taille et de la forme des bassins versants, par la répartition irrégulière des précipitations. Aux échelles plus grandes, le réservoir de stockage des eaux souterraines dépend principalement des précipitations inter-annuelles et saisonnières, de l'évaporation, de la couverture végétale, et éventuellement du pompage. À plus petite échelle, les contrôles géomorphologiques et les interactions entre les aquifères peuvent également jouer un rôle.

Plusieurs techniques d'analyse sont communément utilisées pour étudier la sensibilité du niveau d'eau de l'aquifère en réponse à la variabilité du climat permettant de mettre en évidence l'importance du climat sur la variation du niveau des eaux souterraines [94] en montrant que les précipitations annuelles permettaient d'expliquer de manière significative les variations du niveau des eaux souterraines observées. D'autres travaux ont pointé la disymétrie de la réponse du niveau de l'aquifère aux événements d'inondation et de sécheresse [113] montrant que la sécheresse pouvait laisser une signature beaucoup plus persistante que celle résultant de l'inondation. Les changements dans l'utilisation des terres peuvent induire des configurations spatiales spécifiques dans le bassin versant qui peuvent avoir un impact sur la dynamique des eaux souterraines. L'impact de l'utilisation des terres s'est d'ailleurs avéré être, dans certains endroits, beaucoup plus fort

que la variabilité du climat [294, 293].

Pour un développement durable des ressources en eaux souterraines, il est nécessaire de distinguer les tendances résultant du climat de celles résultant de l’usage des sols. Pour être capable de distinguer les impacts anthropiques, il faut être capable de dissocier la contribution des variations locales du climat de celles associées aux comportements de plus grande échelle [238, 8]. Une autre contribution, plus difficile à distinguer concerne les phénomènes d’advection. Les modèles de dynamique des eaux souterraines sont souvent utilisés en s’appuyant sur des taux de recharge moyens, pour évaluer les limites de la durabilité des ressources dans les aquifères développés. Ces modèles d’écoulement des eaux souterraines sont toutefois très sensibles aux taux de recharge, lesquels sont difficiles à quantifier [185], rendant souvent délicate la validation des résultats obtenus par des approches physiques. La compréhension de la variabilité temporelle des entrées et des sorties due à la variabilité climatique joue un rôle important et l’amélioration des simulations de systèmes d’eaux souterraines serait particulièrement utile pour les bassins versants présentant des conditions de surexploitation [104].

En effet, plusieurs régions de l’Inde connaissent un développement rapide ainsi qu’une augmentation croissante de la population. L’utilisation des eaux souterraines pour l’agriculture et les besoins domestiques a considérablement augmenté au cours de la dernière décennie, et un accroissement de l’approvisionnement en eau par les eaux souterraines est attendu. Qui plus est, au cours de ces dernières années, l’Inde a connu des événements météorologiques extrêmes de sécheresses, d’inondations et de cyclones fréquents.

C’est lors d’une mission d’une durée d’un mois et demi à l’Indian Institute of Science de Bangalore, au sein de la CELLule Franco-Indienne de Recherche en Sciences de l’Eau devenue Laboratoire Mixte International, que nous avons eu l’occasion de nous intéresser à un des sous-bassins de la Cauvery, situé dans le sud-ouest du Karnataka (Inde du sud). L’objectif était dans ce cadre de mettre en œuvre une analyse statistique spatialisée combinant mesures du niveau des eaux souterraines et des précipitations dans le but de compléter des études précédentes basées sur des modèles à base physique [262, 263]. Un second objectif était de communiquer les outils utilisés à un étudiant en cours de thèse [165] et à suivre les analyses et résultats découlant de cet outil. Une partie de ces résultats ont permis de contribuer de façon très significative à une publication [8]. Les résultats ont également permis de contribuer à un autre article [20]. Ce travail a permis d’ouvrir le champ à d’autres questions, plus difficiles. Certaines de ces questions concernent les liens de causalité entre variables observées. Ces questions ont pu être abordées lors d’un stage de Master dont j’étais le principal encadrant [47]. Ces travaux ont également permis d’aboutir à un article original de rang A [5].

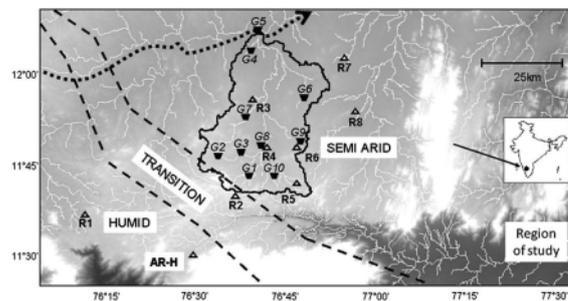


FIGURE 1.16 – Carte présentant l’emplacement géographique des stations pluviométriques (R1 à R9) et les postes de niveau des eaux souterraines (G1 à G10). AR-H et AR-SA sont les centres de la grille de données de pluie moyennes (voir texte) dans les zones climatiques humides et semi-arides, respectivement. La ligne noire indique la limite de la sous-bassin Gundal et les lignes blanches des différents cours d’eau et leurs affluents. L’échelle de gris est révélateur de la topographie (altitude en blanc).

### 1.8.1 Analyse par décomposition en fonctions empiriques orthogonales

Le sous-bassin du Gundal est situé sur les deux districts de Mysore et de ChamaraJanagar, au sein du bassin de la Kabini, lui-même sous-bassin de la Cauvery. Le sous-bassin du Gundal considéré dans notre étude présente une aire de 1270 km<sup>2</sup>. Son réseau hydrographique est constitué d'un cours d'eau principal (la rivière Gundal) rejoint par de nombreux petits affluents. La géologie de la région est surtout caractérisée par des gneiss granitiques et est traversée par plusieurs dykes orientés Est-Ouest allant de 0,5 à 1,5 km de longueur et de 5 à 15 m de largeur (voir [263, 262]). Au niveau régional, le climat est dominé par un régime de mousson qui génère un gradient de précipitations fort suivant l'axe Ouest/SudOuest de la zone étudiée. Le long de ce gradient, les précipitations varient d'une zone humide à une zone semi-aride. Les zones humides et semi-arides présentent toutes deux une distribution mono-modale des pluies à l'exception de la zone de transition située à la limite du bassin Gundal qui montre une distribution bi-modale.

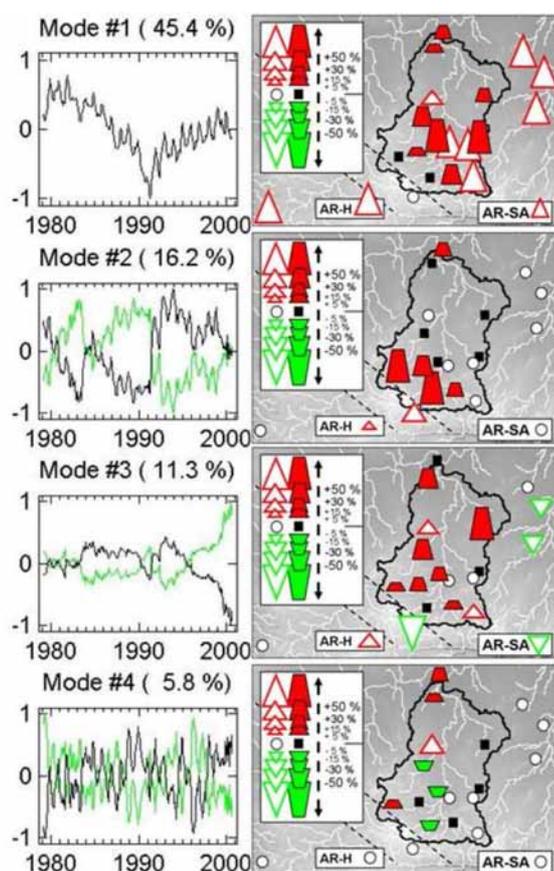


FIGURE 1.17 – Série chronologique normalisée (colonne de gauche) et répartition spatiale associée (colonne de droite) pour les quatre modes principaux de la décomposition en Fonction Empirique Orthogonale (classées de haut en bas par pourcentage décroissant de variance expliquée) résultant d'une analyse conjointe des données de pluies cumulées et de niveau des eaux souterraines. Le % de variance expliquée associé à chaque station est donnée sur la balance des panneaux de colonne de gauche, les triangles indiquent les stations de pluies et les trapèzes les stations de niveau d'eau souterraine.

Les premiers travaux que nous avons mis en œuvre pour étudier la dynamique des eaux souterraines du Gundal étaient basés sur des approches statistiques simples (décomposition en Fonctions Empiriques Orthogonales). Ces travaux ont permis de mettre en évidence des tendances très similaires entre apport des précipitations et niveau des eaux souterraines à l'échelle du sous-bassin

étudié. L'analyse a fait ressortir une distribution spatiale du forçage climatique séparée en deux modes et mis en évidence le transfert quasi direct de la signature des pluies en niveau d'eau, sans retard significatif à l'échelle annuelle. Elle a également permis de faire ressortir très distinctement les régions où le pompage de l'eau des nappes était intense.

Appliquée au bassin de la Kabini, l'approche a permis de mettre en évidence l'utilisation intensive des eaux souterraines dans le bassin de la rivière Kabini, tout particulièrement dans les zones d'agriculture irriguée des deux districts de l'État du Karnataka [8, 20]. L'importante utilisation de l'eau pour l'agriculture et l'évolution des stocks d'eau souterraine observée ont mis en évidence le besoin d'une gestion spatialisée des eaux souterraines dans le bassin.

### 1.8.2 Analyse des liens de causalité

La plupart des outils statistiques traditionnellement utilisés en sciences de la Terre consistent à trouver des corrélations entre les variables mesurées avec un niveau de confiance donné. Toutefois, une forte corrélation n'implique pas en soi l'existence d'un lien structurel entre variables et ne suppose aucun lien de causalité. En outre, même en supposant un lien de causalité existant entre deux variables, une forte corrélation ne donne aucune information sur la direction de cause à effet de ce lien. La notion de causalité implique un sens, et la cause ne peut pas venir après l'effet. Toutefois, une relation causale est plus facile à définir théoriquement qu'à détecter de façon pratique et ce, plus particulièrement, dans le cas de liens de causalité réciproques.

Un outil de détection pratique des liens de causalité a été proposé par Granger dans les années 1960, visant à clarifier le sens de la causalité entre deux variables et à permettre la détection éventuelle de rétroactions [141]. La méthode était basée sur une approche spectrale et consistait à déterminer si la variable  $X_1$  permet d'obtenir de meilleurs prévisions d'une autre variable  $X_2$  plutôt qu'en considérant les prévisions de  $X_2$  uniquement par elle-même. Un tel outil apparaît tout à fait intéressant dans le contexte des eaux souterraines, dans la mesure où l'approche peut nous permettre d'aller au-delà de la simple détection de corrélation et ce, plus particulièrement, dans des milieux peu accessibles où les interactions sont souvent hypothétiques.

Les modèles AutoRégressifs Vectoriels (VAR) constituent un autre outil très pratique pour aborder cette notion de causalité [209, 208, 173]. L'approche est d'autant plus intéressante qu'elle est restée largement inexplorée dans le domaine des sciences de la Terre (voir par exemple [257]).

Au contraire de la plupart des approches physiques qui fixent les processus de causalité à une échelle donnée pour analyser le lien entre entrées et sorties, l'approche utilisée ici ne formule pas d'hypothèse forte sur les variables qu'elle étudie afin d'étudier les liens existant entre elles. L'objectif n'est pas de remplacer les approches s'appuyant sur des bases physiques, mais d'apporter un regard complémentaire sur la dynamique des eaux souterraines.

Cette étude a d'abord permis de confirmer le rôle prédominant des précipitations dans la dynamique (qui se retrouve dans la structure des modèles). Cette contribution est toutefois inégale dans l'espace, avec une influence plus importante dans la partie nord-ouest du Gundal où les précipitations sont caractérisées par un régime climatique mono-modal. Elle a aussi permis de mettre en évidence un fort couplage de la partie aval du Gundal avec la dynamique à l'exutoire. L'étude a également permis de faire ressortir un comportement de forçage monodirectionnel de l'amont du Gundal vers l'aval. Contrairement à la partie en aval, la dynamique de la partie amont du Gundal, peut donc être analysée de manière relativement indépendante. Pour finir, un décalage de un à deux mois est apparue comme une échelle de temps adaptée pour la détection des liens de causalité au sein d'un réseau de niveau des eaux souterraines de la taille du Gundal. Ces temps caractéristiques peuvent être considérés comme des indicateurs fiables du temps de réponse hydraulique des eaux souterraines dans le bassin étudié et permettent d'avancer l'idée plus générale que les échelles de temps intra-annuelles y sont plus pertinentes pour analyser la dynamique des eaux souterraines. Cette première exploration des liens de causalité entre variables sera par la suite utile pour s'intéresser à de nouvelles approches sur lesquelles nous reviendrons au chapitre suivant et à leur application à d'autres contextes géographiques [40, 22].

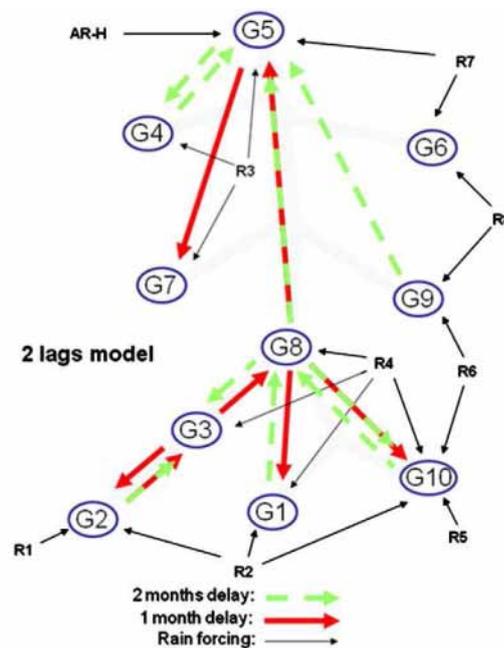


FIGURE 1.18 – Réseau des liens de causalité déduit des modèles « optimaux » obtenus après que certaines restrictions ont été identifiées. Les résultats sont présentés pour le modèle à double retard (flèches épaisses pleines pour les retards d’un mois et pointillées pour les retards de deux mois), les liens de forçage externes dues aux précipitations étant représentés par des flèches fines. Le lecteur est renvoyé à la publication originale pour une analyse détaillée de ce graphe [5].

## 1.9 Extra-expériences

Les expériences mentionnées dans ce chapitre intègrent la plupart des activités de recherche et formation d’étudiants que nous avons pu avoir depuis nos débuts dans la recherche. D’autres expériences, moins étendues, et ne touchant pas à la science dure n’y ont pas été intégrées afin d’éviter toute confusion de genre. Ces dernières peuvent toutefois être évoquées afin d’illustrer une certaine ouverture d’esprit vers des thématiques très éloignées de celles présentées dans ce manuscrit, et de montrer notre enthousiasme à explorer des champs très éloignés dans leur objectifs. Trois expériences peuvent être mentionnées, ayant trait, chacune à sa manière, aux outils d’expression. La première concerne la génération de sons par approche numérique, sujet que nous avons abordé lors de notre stage de Maîtrise [53] effectué à l’Association sur la Création et la Recherche sur les Outils d’Expression (ACROE). Ce travail a donné lieu à la publication d’un acte de colloque international [35]. Le second concerne l’analyse des propriétés élastiques d’une anche de saxophone, débouchant sur la conception d’un saxophone électroacoustique. Ce travail a été effectué en collaboration avec Jean-François Rouchon et Bertrand Nogarède du Groupe de Recherche en Électrodynamique lors de l’encadrement d’un stage d’ingénieur [48]. Le troisième a concerné le développement d’un langage musical (*la grille ouverte* [55]) destiné à orienter l’improvisation collective de l’intérieur même du discours musical, par le son (voir également [259] où un extrait de ce travail est publié). Un point commun avec notre démarche actuelle est assurément (au moins pour deux d’entre elles) de faire communiquer dans une même problématique concepts, outils et applications.

## 1.10 Ouvertures

Ces différentes expériences de science et de recherche nous ont permis de clarifier les orientations qui nous paraissent les plus prometteuses pour étudier les dynamiques environnementales, en

fonction de nos compétences, de nos motivations, de nos convictions, et d'élaborer un programme de recherche qui nous permette d'explorer des domaines suffisamment intrigants et riches, tout en présentant des potentiels applicatifs et conceptuel ou théorique. L'idée d'obtenir des modèles sur la base de séries temporelles sans connaissance *a priori* sur les systèmes observés m'intéressait depuis longtemps sans que j'ai eu la possibilité de m'y plonger complètement. Le développement d'une méthode prédictive basée sur des données, l'utilisation de métaheuristiques puissantes pour mettre en place une approche d'assimilation-inversion, ou encore la construction de modèles de type VAR pour détecter des liens de causalités entre variables constituaient assurément une façon d'explorer cette problématique, mais ces approches présentaient chacune des directions très différentes — et complémentaires —, pourtant difficiles à concilier, au moins en pratique. J'avais bien effectué des tentatives directes pour obtenir des modèles en combinant certaines de ces approches, mais sans avoir pu aboutir. La découverte d'une publication quelques mois avant d'entamer la rédaction de mon programme de recherche pour les concours de chercheur, qui concernait la "reconstruction des champs de vecteurs globaux" par Gérard Gouesbet et Christophe Letellier [138] m'avait fasciné. Cette approche semblait permettre ce que je n'étais pas parvenu à faire. L'approche avait pu être appliquée à un certain nombre de cas théoriques, mais à très peu de cas environnementaux, malgré sa robustesse au bruit. Cette quasi-absence aurait peut-être dû m'effrayer. L'attraction du vide et de l'inconnu ainsi que la fascination de l'approche m'avait au contraire absorbé, d'autant que pouvait se profiler derrière, une grande richesse : outils, théorie, concepts, chaos, .. et applications. Beaucoup de travail et du bonheur en espoir, un véritable programme de recherche.

## Chapitre 2

# Modélisation globale — éléments de théorie et outils

*"You can thank your lucky stars that you are not economists. Those poor souls don't even know their equations!" Sir John Mason, Director General Meteorological Office, to his 1977 graduate intake, cité dans [Palmer 2012].*

### 2.1 Introduction

Comme nous avons pu le voir au chapitre 1, les systèmes hydrologiques, et plus largement l'ensemble des dynamiques expérimentales ou environnementales, présentent des comportements d'une grande diversité et d'une grande complexité, que ce soit par l'importance du nombre des variables en jeu, la multiplicité des couplages qui peuvent y prendre place (interactions surface-atmosphère, sol-végétation, fleuve-plaines inondables, etc.), l'implication d'échelles multiples (comportement atmosphériques méso-échelle agissant sur des zones localement hétérogènes), la diversité des écosystèmes ou encore les hétérogénéités spatiales (topographie, pédologie, usage des sols) etc. La compréhension de tels milieux passe par l'observation (locale, régionale ou globale), l'analyse, et la modélisation. Comme illustré au chapitre 1, la télédétection peut jouer un rôle de première importance dans le suivi des dynamiques environnementales (océanographie, dynamique de la végétation, hydrologie des grands fleuves, etc.). De nombreuses méthodes d'analyses et de modélisation existent, plus ou moins usuelles. Nous avons eu l'occasion d'utiliser plusieurs de ces approches dans nos travaux de recherche, dont les exemples ont été donnés au chapitre 1 (moindres carrés généralisés, décomposition en fonctions orthogonales empiriques, causalités de Granger, etc.) et qui nous ont fourni les outils nécessaires à la construction d'un nouvel outil de modélisation globale dont ce chapitre fait l'objet.

Nous nous intéresserons donc plus particulièrement dans ce chapitre 2 à la modélisation. Deux grands types d'approche de modélisation peuvent être distingués. Les modèles mécanistes sont construits en s'appuyant sur la connaissance *a priori* des processus en jeu, ce sont généralement des modèles physiques semi-empiriques. On y suppose les processus bien identifiés et on les formule comme tels. La formulation théorique (et numérique) de ces modèles y est donc conceptuellement très cadrée (ce qui n'exclut pas l'utilisation complémentaire d'approches d'optimisation pour une meilleure identification des paramètres). La formulation des équations étant considérée comme une connaissance *a priori*, ces approches n'autorisent pas l'exploration d'autres formulations de la dynamique, qui pourraient être mieux adaptées. Elle ne permettent de ce fait qu'imparfaitement l'exploration et l'analyse de comportements dynamiques tels qu'ils sont (sans *a priori*), ni l'exploration de comportements émergents. Les approches statistiques sont, au contraire, beaucoup plus empiriques, visant à optimiser les estimations sans hypothèse forte quant à leur formulation. En revanche, ces approches sont souvent formulées comme des problèmes stochastiques et ne permettent généralement pas de s'intéresser à la composante déterministe de la dynamique

étudiée. Elles présentent néanmoins un intérêt potentiel pour effectuer des prévisions (du cycle de la végétation, de la production primaire ou des rendements agricoles). Les comportements dynamiques obtenus par de telles approches peuvent permettre de disposer de prévisions satisfaisantes en ce qui concerne les variables optimisées mais ne permettent généralement d'analyser la dynamique du milieu que de façon très partielle.

La modélisation globale s'appuie sur la théorie des systèmes dynamiques nonlinéaires qui, à la résolution analytique des équations différentielles, privilégie le recours à l'espace des phases pour représenter, analyser et comprendre l'évolution temporelle de comportements observés, qu'ils soient de nature physique, chimique, biologique, électronique, économique ou autre. La modélisation de telles dynamiques peut se faire sur la base d'équations différentielles, d'équations aux différences ou d'équations discrètes. Selon les cas, on parle alors de systèmes continus ou discrets.

La partie de la théorie des systèmes dynamiques nonlinéaires qui nous concerne le plus directement ici trouve sa source dans les travaux d'Henri Poincaré (1854-1912). La contribution de Poincaré a été essentielle à la théorie des systèmes dynamiques et a permis d'ouvrir la voie de la théorie du chaos (voir [195]). C'est en s'intéressant à la mécanique céleste et au problème des trois corps que Poincaré a initié cette voie. Ne pouvant parvenir à obtenir de solution analytique pour certaines équations à trois variables, il s'appuie sur l'espace des phases et développe de nouveaux concepts tels que l'*application de récurrence* (aujourd'hui *application de Poincaré*) à une *section de Poincaré*, le *cycle limite*, les *points fixes* qu'il a introduits dans sa thèse [243]. S'appuyant sur cet ensemble de concepts, il parvient à comprendre – qualitativement – qu'en contexte déterministe (contexte garanti par le théorème fondamental des équations aux dérivées ordinaires), de petites différences de conditions initiales peuvent conduire à une divergence rapide des trajectoires. Autrement-dit, qu'une dynamique peut être à la fois déterministe, c'est-à-dire entièrement déterminée par son état de départ, et imprévisible à long terme. Ce résultat constitue sans doute un résultat épistémologique majeur. En effet, une telle situation modifie profondément notre conception du monde et cela doit avoir des conséquences quant à notre manière d'appréhender celui-ci d'un point de vue scientifique, que ce soit du point de vue de ses concepts, des outils d'analyse ou des outils de modélisation, d'optimisation et de validation.

Malgré cette découverte essentielle, appelant à recourir à de nouveaux paradigmes et outils, et malgré la solidité théorique de ses fondements, les travaux et les idées de Poincaré n'ont d'abord connu qu'une diffusion relativement lente. La théorie des systèmes dynamiques a tout de même pu se propager et progresser sur plusieurs continents [57], mais ce n'est que dans les années 1960 que, grâce aux développements de l'électronique et aux premiers calculateurs numériques, de premiers exemples ont pu émerger et donner une consistance immédiate et prégnante à la situation paradoxale où imprévisibilité et déterminisme s'entremêlent.

La publication la plus emblématique arrive en 1963 et est due à Edward Lorenz qui vient de découvrir le premier système autonome tri-dimensionnel, à la fois déterministe et sensible aux conditions initiales<sup>1</sup>. Lorenz avait assurément une certaine connaissance des travaux de Poincaré pour avoir effectué sa thèse de master sous la direction de Georges D. Birkhoff avant la 2<sup>nde</sup> guerre mondiale [121], sur un sujet toutefois différent, puisque concernant la géométrie Riemannienne et dont le manuscrit semble indisponible. Alors que Lorenz était chercheur au *Massachusetts Institute of Technology* il publie son article sur les dynamiques aperiodiques [205]. Partant d'un système d'équations à 12 variables, Lorenz est parvenu à obtenir — involontairement — des simulations présentant une forte sensibilité aux conditions initiales [207]. Fort de ce premier résultat inattendu, il a alors cherché à simplifier son système d'équation et est parvenu à passer grâce à Barry Saltzman de 12 à 7, puis à 3 variables, il en a tiré les simulations chaotiques à avoir été publiées, en 1963 [205]. Le système s'appelle aujourd'hui le système de Lorenz dont voici la formulation originale

---

1. Un système équivalent à celui de Lorenz a été introduit par Tsuneji Rikitake (1921-2004) en 1958 pour modéliser les oscillations irrégulières du champ magnétique de la Terre [252].

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x - \sigma y \\ \dot{y} = -xz + rx - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (2.1)$$

et dont la paramétrisation avait été choisie telle que  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$  et  $r = 28$ .

Le système de Lorenz fournit donc le premier exemple d'une dynamique à la fois déterministe et extrêmement sensible aux conditions initiales, le rendant imprévisible à long terme. Dans son article, Lorenz cite explicitement Gibbs (1902) pour son développement en mécanique statistique, Poincaré (1881) pour ses approches de résolution des équations différentielles, et Birkhoff (1927) pour son traité sur les systèmes dynamiques dont il semble bien connaître les travaux. Étonnamment, il ne fait pas allusion aux remarques de Poincaré concernant les limites de prévisibilité de certains systèmes et notamment l'exemple concernant la prévisibilité météorologique des tornades, dont son modèle fournit le premier exemple tridimensionnel.

## 2.2 Concepts

La théorie des systèmes dynamiques nonlinéaires requiert un certain nombre de concepts. On se propose dans cette section d'introduire ceux auxquels nous aurons à nous référer dans ce manuscrit. Pour une introduction plus systématique à cette théorie, à ses outils, à son histoire et à ses développements plus récents, on se propose de renvoyer le lecteur vers des ouvrages de référence dédiés à une telle introduction [77, 56, 195, 136, 199].

### L'espace des phases

Le tout premier de ces concepts est l'*espace des phases*, qui est antérieur aux travaux de Poincaré. L'espace des phases est un espace abstrait qui permet de représenter l'ensemble des états possibles d'un système (on lui préfère parfois pour cette raison le nom d'*espace des états*). La notion d'espace des phases a été introduite par William R. Hamilton dans ses travaux de mécanique. La mécanique Hamiltonienne est une reformulation de la mécanique classique qui décrit l'état de chaque particule, supposée ponctuelle, par deux quantités : la position, et la quantité de mouvement. Dans le contexte Hamiltonien, l'espace des phases est par conséquent doté de  $2n$  dimensions où  $n$  est le degré de liberté du système. L'espace des phases utilisé dans la théorie des systèmes dynamiques résulte directement de cet usage et permet de représenter un comportement dynamique par une trajectoire géométrique en y représentant les états successivement visités par le système considéré. Son usage n'est toutefois pas exclusif à la mécanique du point et cet outil peut également être utilisé pour étudier d'autres types de dynamiques pouvant impliquer  $m$  variables pouvant être de toute autre nature. Associé à un jeu d'équations différentielles ordinaires (EDO), cet espace permet de représenter l'ensemble des trajectoires solutions de ce système.

### Déterminisme

L'un des objets les plus fondamentaux de la science est d'identifier les liens de cause à effet entre événements observés, que ce soit pour comprendre les comportements dynamiques observés, ou pour les prévoir. La notion de déterminisme est essentielle à la science car elle suppose à la fois la causalité — tout état résulte de façon causale de l'état qui le précède — et la nécessité — le passage d'un état au suivant est entièrement déterminé, c'est-à-dire de façon unique.

L'idée de déterminisme a beaucoup évolué au cours des âges. Le mot s'est construit sur la base du verbe déterminer, emprunté au latin *determinare* attesté depuis 1119 (dixit le dictionnaire Robert Historique), dont le sens figuré était "arrêter, régler, fixer" dans une nuance temporelle. D'un point de vue scientifique, Pierre Simon Laplace en donne une définition très précise en 1825 [178] :

*Nous devons donc envisager l'état présent de l'Univers comme l'effet de son état antérieur, et comme cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui pour un instant donné connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ses données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'Univers et ceux des plus légers atomes : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux.*

Une telle conception suppose donc une prévisibilité et de même une rétrovisibilité infinie du futur comme du passé, à partir des seules connaissances de l'état présent et des lois d'évolution.

Une grande sensibilité aux conditions initiales modifie considérablement une telle conception du déterminisme dans la mesure où, pour rester valide, elle requiert la connaissance de l'état présent avec une précision infinie. Cette compatibilité entre déterminisme et sensibilité aux conditions initiales a été parfaitement pressentie par Poincaré en analysant la dynamique :

*Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard. Si nous connaissions exactement les lois de la nature et la situation de l'Univers à un instant initial, nous pourrions prédire exactement la situation de ce même Univers à un instant ultérieur. Mais, lors même que les lois naturelles n'auraient plus de secret pour nous, nous ne pourrions connaître la situation initiale qu'approximativement. Si cela nous permet de prévoir la situation ultérieure avec la même approximation, c'est tout ce qu'il nous faut, nous disons que le phénomène a été prévu, qu'il est régi par des lois ; mais il n'en est pas toujours ainsi, il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux ; une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les derniers. La prédiction devient impossible et nous avons le phénomène fortuit.*

Mais comment concilier la notion de déterminisme représentée sans ambiguïté dans l'espace des phases et l'imprévisibilité à long terme ? Le système introduit par Lorenz en 1963 [205], avec ses deux boucles distinctes a permis d'illustrer visuellement la divergence des trajectoires, et de rendre ainsi évidente la compatibilité entre déterminisme – garantie par les équations – et la sensibilité aux conditions initiales par la divergence exponentielle de trajectoires initialement extrêmement proches.

La notion de déterminisme présente un caractère tout à fait essentiel dans le présent contexte dans la mesure où l'approche de modélisation globale que nous allons introduire dans ce chapitre s'appuie largement sur cette notion de déterminisme, et parce que l'obtention d'un modèle global permet d'apporter un élément de preuve très puissant quant à la présence d'une composante déterministe sous-jacente à la dynamique observée.

Les systèmes présentant une telle sensibilité aux conditions initiales nous conduisent à revoir notre conception du déterminisme non plus comme une propriété de prévisibilité infinie, mais comme une propriété garantissant l'unicité de la détermination causale entre la succession des états entre tout instant  $t$  et  $t + dt$ . Le déterminisme est une propriété difficile à explorer. Relativement peu de méthodes se sont aventurées sur ce terrain. S'appuyant sur cette dernière définition, la capacité à lier dynamiquement les états infinitésimaux successifs d'un système de manière unique et causale (grâce à un jeu d'EDO) nous fournit une preuve raisonnable de déterminisme. Différentes méthodes basées sur les prévisions à-un-pas-de-temps ont été proposées [278] : de telles techniques sont réputées pour présenter une grande robustesse au bruit, elle permettent toutefois plus de révéler les non linéarités sous-jacentes aux processus analysés, qu'à déterminer si une dynamique est déterministe ou non [137]. Une autre approche basée sur le titrage du bruit a été introduite [248] ; cette méthode a également montré une bonne capacité à estimer l'influence des non-linéarités dynamiques. Cependant, l'approche n'est pas toujours capable de distinguer un bruit coloré d'un chaos déterministe [126].

Une autre approche intéressante a été introduite au début des années 1990 [167] et qui, au lieu de chercher à détecter le déterminisme sur la base de prévisions, consiste à vérifier que la tangente de la trajectoire reconstruite dans l'espace des phases est fonction de la position dans

l'espace des phases. Par construction, une telle approche peut garantir le déterminisme local dans l'espace des phases, mais pas de manière globale car elle ne permet pas de vérifier la cohérence des comportements déterministes entre toutes les tangentes consécutives. La modélisation globale vise – dans le cadre des approches continues – à trouver un lien algébrique entre l'état en cours d'une variable, et ses dérivées [138, 3]. Toutefois, en nécessitant l'existence d'une correspondance continue entre les états du modèle et ses dérivées, la modélisation globale va plus loin, en garantissant la cohérence globale de ce déterminisme au sein du flot. La modélisation globale offre de ce fait une plus forte garantie de l'existence d'un lien entre états infinitésimaux et leur cohérence globale sur le domaine visité de l'espace des phases.

### L'approche globale

La plupart des approches de modélisation visent à reproduire les jeux d'observations. Un modèle est considéré comme validé s'il permet de simuler la même évolution temporelle que les observations. Ces techniques de modélisation et de validation sont dites locales dans la mesure où elles permettent de vérifier la validité de l'approche sur une fenêtre localisée dans le temps. L'approche globale ne vise pas à reproduire une évolution temporelle particulière mais à retrouver la dynamique sous-jacente à son évolution. Pour cela, elle s'appuie sur la reconstruction d'un champ de vecteurs et consiste à réaliser une approximation du champ de vecteurs original sur l'ensemble de l'espace des phases. L'approche est donc fondamentalement différente ; elle permet d'obtenir des modèles, même à partir de trajectoires particulières. Nous en donnerons une illustration saisissante au paragraphe 3.16.

L'approche globale a été appliquée avec succès à des jeux de données très différents incluant, des séries chronologiques synthétiques générées numériquement à partir d'attracteurs chaotiques [138, 197, 166], ainsi que des mesures réelles recueillies au cours d'expérimentations contrôlées [186, 189, 190, 193, 99]. Un petit nombre d'exemples a également pu être obtenus à partir de séries observationnelles issues du monde réel : un modèle global a été obtenu en astronomie pour des taches solaires cycles [196] ; un en écologie pour les cycles du lynx du Canada [213] ; et un autre en biomédecine pour la dynamique de la respiration humaine [200].

### Flot, section de Poincaré et application de premier retour

De nombreux systèmes dynamiques peuvent être convenablement décrits par un ensemble de  $n$  équations différentielles ordinaires autonomes du premier ordre :

$$\dot{X}(t) = F(X) \tag{2.2}$$

où  $X$  est un vecteur de l'espace des phases  $\mathbb{R}^n$  et où  $F$  désigne un champ de vecteurs de cet espace. L'ensemble des trajectoires d'un tel système est appelé un *flot*. Une *section de Poincaré* est une coupe transverse du flot. Une *application de premier retour* est une application qui décrit le lien entre deux passages successifs dans une section de Poincaré choisie. La forme de cette application est très importante dans la mesure où elle peut – dans certains cas – nous apporter une information très directe sur la structure du flot. Les sections de Poincaré et applications de premier retour présentent un intérêt très direct puisqu'elles peuvent également être étudiées à partir de données (grâce au théorème de Takens [273]) observées sans disposer d'une connaissance de l'ensemble des variables nécessaires à la description complète des états du système considéré.

### Portrait de phase

L'espace des phase fournissant une représentation non ambiguë de l'ensemble des états d'un système, la reconstruction d'une trajectoire au sein de ce système nous fournit en conséquence un portrait de la dynamique que l'on nomme portrait de phase. On distinguera deux types de portraits : le portrait différentiel basé sur les dérivées successives du signal original et le portrait retardé basé sur les coordonnées retardées, c'est-à-dire sur la série temporelle mesurée retardée par rapport à elle-même autant de fois qu'il est nécessaire pour disposer du nombre requis de

variables. De ces deux représentations, nous privilégions souvent dans le présent document celui constitué des dérivées successives qui ne nécessite aucun choix de paramètre. Pour être équivalents, deux portraits de phases n'ont pas besoin d'être strictement identiques (en raison de conditions initiales différentes, leurs trajectoires peuvent différer localement) mais doivent avoir en revanche la même structure (celle-ci étant insensible aux conditions initiales). Pour vérifier cette équivalence de manière rigoureuse, une analyse topologique doit être appliquée.

### Attracteur / attracteur chaotique / attracteur étrange

Lorsqu'on intègre les équations d'un système dynamique, la trajectoire va, après une période transitoire, venir s'accumuler sur un attracteur. Cet attracteur pourra être : soit un point fixe, soit un cycle limite (de période un, deux, etc.), soit présenter une structure plus complexe, non périodique, à laquelle on a donné le nom d'attracteur étrange ou chaotique selon les cas.

Les attracteurs dits étranges ont pour propriété de présenter une structure fractale (*i.e.* autosimilaire par changement d'échelle) qui peut être caractérisée par une dimension fractale [256]. Les attracteurs dits chaotiques présentent une propriété de divergence exponentielle de trajectoires initialement très proches, et sont caractérisés par au moins un exposant de Lyapunov positif. Si les attracteurs peuvent être à la fois étranges et chaotiques, certains peuvent toutefois avoir une structure fractale sans présenter de sensibilité aux conditions initiales [144].

### Chaos

Le chaos exige deux conditions essentielles : la première est le déterminisme (cf. ci-dessus), la seconde est la grande sensibilité aux conditions initiales. La plupart des approches utilisées pour détecter le chaos s'appuie sur l'extraction d'invariants nonlinéaires dynamiques et géométriques (voir ci-dessous) qui ne permettent pas de valider la condition de déterminisme. Cependant, aucun des deux ne peut garantir le déterminisme des processus, et pour être valides, un argument de déterminisme doit leur être adjoint. Les invariants topologiques sont un moyen plus puissant de caractériser le type de chaos, d'identifier et de comprendre les comportements correspondants. Si la détection d'invariants topologique suppose la présence d'un déterminisme sous-jacent, l'extraction des invariants nécessite toutefois souvent – en pratique – d'être d'abord parvenu à extraire la composante déterministe pour appliquer l'analyse topologique.

À l'heure actuelle, l'approche globale semble être la manière la plus robuste de sonder et de détecter la présence d'une composante déterministe sur la base d'observations expérimentales ou issues de conditions réelles. Par conséquent, associée à des considérations dynamiques, géométriques ou topologiques, la modélisation globale apparaît comme un outil puissant pour l'identification de chaos à partir d'observations réelles.

### Invariants nonlinéaires

La sensibilité aux conditions initiales des dynamiques chaotiques rend leur caractérisation délicate. En effet, caractériser un tel comportement nécessite de distinguer des propriétés qui soient insensibles aux conditions initiales, des invariants spécifiques qui puissent être estimés de manière quantitative. Trois types d'invariants nonlinéaires peuvent être distingués : les invariants dynamiques permettent de décrire la stabilité de la dynamique, parmi lesquels, les exposants de Lyapunov permettant de caractériser la divergence des trajectoires. Les invariants géométriques permettent de décrire l'autosimilarité des attracteurs par changement d'échelle au sein de l'espace des phases, cela peut être une dimension fractale. Les invariants topologiques, enfin, visent à décrire la structure de l'attracteur. Certains des invariants topologiques permettent une caractérisation non ambiguë des dynamiques, et donc une distinction et une classification rigoureuse des dynamiques.

### Dimensions

Un système dynamique se caractérise d'abord par le nombre des variables qui sont en jeu dans le système. Ce nombre de variable correspond à la dimension du système ou dimension

propre que nous noterons  $d$  pour les systèmes continus. En pratique, on ne connaît pas toujours la dimension d'un système réel et l'on doit recourir à des méthodes spécifiques pour les estimer. L'une des approches s'appuie sur l'impossibilité de croisement des trajectoires dans l'espace des phases qui garantit le déterminisme de la dynamique. Cette technique s'appelle la méthode des faux plus proches voisins [61] et consiste à reconstruire le flot d'une dynamique observée dans l'espace des phases d'abord en dimension  $d_r = 2$ , puis 3, etc. jusqu'à obtenir un plongement, c'est-à-dire qu'il n'y ait plus de recouplement d'une trajectoire avec elle-même (les voisins sont tous alors de vrais voisins). La plus petite des dimensions pour laquelle cette propriété est vérifiée est appelée dimension de plongement  $d_e$ . Cette dimension ne coïncide toutefois pas systématiquement avec la dimension propre du système  $d$ . En effet, partant d'une série observée, un plongement ne peut être garanti que pour une dimension de reconstruction  $d_r \geq 2d + 1$ . On notera toutefois que cette condition – suffisante – est loin d'être toujours nécessaire [187], et cela a pu être constaté pour de très nombreux cas par modélisation globale [138, 3].

Un attracteur peut également être caractérisé par une dimension fractale. Cette dimension est non entière pour les dynamiques chaotiques. Ces dimensions, pour lesquelles il existe de nombreuses approches de calcul, permettent notamment une bonne distinction entre caractères fortement ou faiblement dissipatifs de la dynamique. De façon pratique, ils ne constituent toutefois pas une carte d'identité univoque dans la mesure où leur estimation précise est souvent difficile, en raison d'une forte sensibilité au bruit, et où des dynamiques peuvent être parfois associées à d'importants intervalles de valeurs par variations des paramètres.

### Théorème de Takens

L'un des intérêts particulièrement marquant de la théorie des systèmes dynamiques non linéaires est de permettre de s'intéresser à des comportements dynamiques observés empiriquement à partir d'une unique série temporelle. En effet, pour une mesure satisfaisant l'hypothèse de généricité, les propriétés géométriques, dynamiques et topologiques sont conservées, qu'elles soient reconstruites à partir de toutes les variables du système original ou à partir d'une seule de ces variables. Cette propriété a été mise en évidence numériquement par N.H. Packard, J.P. Crutchfield, J.D. Farmer et R.S. Shaw en 1980 [246], et traduite ensuite sous la forme d'un théorème par F. Takens en 1981 [273], démontrant que cette propriété était garantie moyennant le recours à un espace de dimension  $2D_H + 1$  où  $D_H$  correspond la dimension fractale (idéalement la dimension de Hausdorff) de la solution du système dynamique original.

## 2.3 Principe de la modélisation globale

Basée sur la théorie des systèmes dynamiques non linéaires, la modélisation globale [197] vise à obtenir un jeu d'équations de la dynamique à partir de séries temporelles observées. Pour l'obtention d'une solution « globale », le problème doit être formulé mathématiquement comme une reconstruction d'un champ de vecteurs [138]. Comme déjà évoqué au chapitre 1 (cf. §1.8), l'une des difficultés pour l'étude des comportements dynamiques en contexte réel est d'identifier les variables actives du système étudié. De manière pratique, toutes ces variables ne peuvent pas toujours être observées, ni suivies en continue, et l'on doit souvent se contenter d'un jeu restreint de variables. Si une seule variable est disponible, le problème consiste à obtenir un modèle global de la dynamique à partir de cette variable unique. La correspondance entre dynamique reconstruite à partir d'une variable unique nous est — en principe — garantie par le théorème de Takens [273]. En pratique, la possibilité d'obtenir un modèle ne peut pas du tout être garantie et va dépendre de l'observabilité du système dynamique offerte par cette variable [194]. Il va également dépendre de la trajectoire disponible pour obtenir le modèle ou, plus précisément, de sa façon de visiter dans l'espace des phases les différentes parties de l'attracteur [17]. Lorsque plusieurs variables sont disponibles, le problème nécessite alors également d'identifier le réseau de liens d'interactions pouvant exister entre les variables enregistrées.

En nous appuyant sur le théorème de Stone-Weierstrass, qui est la généralisation<sup>2</sup> du théorème

2. précision apportée pour prendre en compte une remarque de Jean-Marc Malasoma

de Weierstrass (1815-1897) qui nous garantit – en principe – que toute fonction peut être approchée par une fonction polynômiale. Nous nous limiterons ici à des formulations polynômiales des équations.

### 2.3.1 Formulation analytique du problème

Etant données  $N$  séries temporelles correspondant aux  $N$  variables  $x_i$  du système original, la dynamique résultant de leur interaction peut être formulée de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = P_1(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ \vdots \\ \dot{x}_N = P_N(x_1, x_2, \dots, x_N). \end{cases} \quad (2.3)$$

Obtenir un modèle correspondant à la dynamique observée va donc nécessiter d'identifier les  $N$  polynômes  $P_i(x_1, x_2, \dots, x_N)$  de degré  $q$ . En pratique, les variables dynamiques ne sont pas toujours toutes identifiées, ni mesurées. Lorsqu'une variable unique est disponible, le problème peut être reformulé sous forme canonique, c'est-à-dire sous la forme

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = X_2 \\ \dot{X}_2 = X_3 \\ \vdots \\ \dot{X}_n = P(X_1, X_2, \dots, X_n). \end{cases} \quad (2.4)$$

Une formulation intermédiaire peut être utilisée si un ensemble incomplet de  $m < N$  variables est disponible, soit

$$\begin{cases} X_1^{(n_1+1)} = P_1(X_1, \dots, X_1^{(n_1)}, X_2, \dots, X_2^{(n_2)}, \dots, X_m, \dots, X_m^{(n_m)}) \\ X_2^{(n_2+1)} = P_2(X_1, \dots, X_1^{(n_1)}, X_2, \dots, X_2^{(n_2)}, \dots, X_m, \dots, X_m^{(n_m)}) \\ \vdots \\ X_m^{(n_m+1)} = P_m(X_1, \dots, X_1^{(n_1)}, X_2, \dots, X_2^{(n_2)}, \dots, X_m, \dots, X_m^{(n_m)}) \end{cases} \quad (2.5)$$

où  $X_i^{(n)}$  dénote la dérivée  $(n)^{\text{ème}}$  de la variable  $X_i$  et où les  $n_i$  correspondent au nombre maximum de dérivations utilisé pour chacune des variables  $X_i$ .

Que l'on dispose de variables uniques ou multiples, des difficultés méthodologiques communes sont rencontrées. Le premier problème consiste à identifier la dimension de la dynamique, c'est-à-dire le nombre de variables en jeu dans le système original. Cette dimension peut être estimée en utilisant la méthode de détection des plus proches faux voisins [61]. Un choix optimal de la dimension ne nous garantit pas pour autant qu'un modèle puisse être obtenu pour cette dimension et il s'avère souvent nécessaire en pratique d'effectuer une recherche de modèle sans se cantonner à la dimension estimée.

Il s'agit ensuite d'identifier la structure des polynômes. La difficulté de l'identification de la structure du polynôme résulte de deux points. D'une part, la présence de nonlinéarités rend les termes interdépendants, empêchant d'estimer la contribution respective de chaque terme de façon simple, indépendante et absolue. D'autre part, la taille considérable de l'ensemble des modèles à explorer rend toute exploration systématique inaccessible.

Une fois une structure polynômiale identifiée, il s'agit alors d'estimer le paramétrage précis du modèle. Nous appuyant sur des travaux antérieurs [138], nous avons pu vérifier que la décomposition sur une base polynômiale par la méthode de Gram-Schmidt était d'une très grande efficacité.

Une fois identifiés ces différents éléments, l'intégrabilité numérique, la non trivialité et enfin la validité des modèles obtenus doivent ensuite être vérifiées. Différentes approches ont été développées et testées afin d'optimiser l'approche, de la rendre plus efficace à détecter des modèles, et plus rapide.

### 2.3.2 Identification

Une combinaison inappropriée des termes polynômiaux utilisés pour la modélisation peut conduire à des effets parasites et à des solutions numériquement instables [60]. La structure polynômiale doit donc être définie avec soin. Plusieurs classes de sélections de structure ont été appliquées à ce contexte. La première catégorie consiste à enlever les termes de contribution plus faible, un à un [79]. La deuxième catégorie de techniques (initialement développée pour la modélisation NARMAX [58]) consiste à éliminer les amas de termes présentant des comportements compensateurs [59]. La dernière catégorie est celle des techniques basées sur des algorithmes d'apprentissage (heuristiques); l'une de ces techniques, basée sur un algorithme génétique a notamment été appliquée dans [176] à la recherche de modèles issus d'une bibliothèque de forme (Ansatz) [174, 175, 74]. Nous avons proposé lors de nos travaux une autre heuristique spécialement dédiée au contexte de la modélisation globale [45, 3].

#### Approche évolutionnaire

L'algorithme présenté ici a été développé lors du stage de Master de R. Coudret [45] que j'ai encadré en collaboration avec L. Drapeau (CESBIO). Ce travail a été particulièrement utile pour la suite en mettant en place une formulation numérique très générique de la problématique, autorisant ainsi les nombreux développements qui ont suivi. Ce travail a pu être validé par le dépôt d'un package R (PoMoS [19]) maintenant librement téléchargeable sur le site du CRAN [100].

Par rapport à l'approche précédemment publiée par [175] et basée sur un algorithme génétique, l'originalité de l'heuristique proposée ici est d'être exclusivement basée sur un paramétrage binaire de la structure, lié à la présence / absence de chaque monôme. L'algorithme permet ainsi de séparer l'identification de la structure du modèle de son paramétrage précis. D'autre part, l'algorithme permet de conserver toutes les solutions testées au cours de la recherche afin de permettre une analyse rétrospective des bons et des mauvais termes. Enfin, l'approche a été conçue avec la volonté de permettre des interactions dynamiques de l'utilisateur avec l'algorithme de recherche. Ce dernier aspect s'est avéré très utile pour affiner les recherches de structures, mais aussi pédagogiquement pour prendre en main les outils dont les concepts sont un peu ardue.

L'outil PoMoS est un algorithme visant à identifier les monômes de tout jeu d'équations différentielles ordinaires présentant une formulation polynômiale. Techniquement, il peut être appliqué à des séries chronologiques uniques ou multiples. Une description schématique de l'algorithme est présentée en Fig. 2.1. En pratique, l'algorithme nécessite trois paramètres d'entrée :  $N_0$  le nombre de modèles initialement générés ;  $N_1$  le nombre des modèles qui doivent être évalués à chaque boucle itérative et  $N_2$  le nombre de modèles voisins du meilleur modèle en cours à ajouter au panier 1 à la fin de chaque boucle itérative pour continuer l'analyse.

De manière générale, l'algorithme PoMoS ne peut garantir l'obtention d'une solution optimale. En pratique, on privilégie généralement d'abord la solution la plus simple consistant à enlever les termes de contribution plus faible préconisée par [79]. Si cette méthode ne donne pas de résultat, PoMoS peut ensuite être appliqué en aveugle, en testant éventuellement différents critères de sélection [62, 260].

#### Algorithme d'identification des paramètres

Le second algorithme, GloMo, a pour objet d'obtenir le paramétrage précis des polynômes  $P(X_1, X_2, \dots, X_n)$  (cf. Eq. (2.4), § 2.3.1). L'algorithme est basé sur une procédure de type Gram-

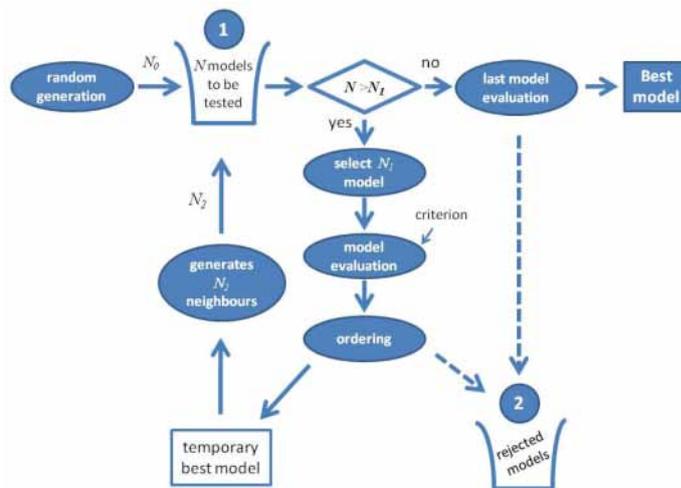


FIGURE 2.1 – Schéma de fonctionnement de l’algorithme PoMoS : (1) un ensemble de  $N_0$  modèles initiaux est généré aléatoirement et mis dans le panier 1, (2) si le nombre de modèle est assez grand ( $N > N_1$ ),  $N_1$  modèles sont testés sur la base d’un critère choisi de type Akaike  $C^{AIC}$  [62], (3) les meilleurs modèles sont sélectionnés, tandis que les mauvais sont rejetés dans le panier 2; (4) le meilleur modèle est utilisé pour générer  $N_2$  modèles voisins qui sont ajoutés dans le panier 1 (une distance intermodèle est définie à cet effet). (5) Les étapes (2) à (4) sont répétées jusqu’à ce que le nombre de modèles dans le panier 1 devienne trop faible ( $N \leq N_1$ ); (6) la recherche de modèles est alors stoppée.

Schmidt proposée et testée précédemment pour le présent contexte [138]. Techniquement, la formulation polynômiale de l’algorithme est totalement générique et autorise toute dimension du modèle et tout degré polynômial. En raison du nombre considérable de modèles à explorer dans une telle approche de modélisation, la recherche de structures de modèle peut avantageusement être développée avec PoMoS (ou avec un autre outil) en premier essai.

L’obtention d’une structure de modèle ne suffit pas à garantir la fiabilité du modèle. En effet, l’algorithme PoMoS visant à explorer le plus grand nombre de modèles possibles, l’algorithme a été développé avec un soucis de rapidité et non de précision, moins encore de robustesse. C’est pourquoi l’identification précise des paramètres est dévolue au second algorithme GloMo. Une fois effectuée l’identification précise des paramètres d’un modèle retenu, l’intégrabilité numérique du modèle peut être testée, ce qui constitue une étape supplémentaire. Le principe consiste à intégrer les équations sur un temps suffisamment long afin de vérifier la non divergence des solutions. Cette intégration doit également permettre de vérifier l’intérêt des modèles. On se désintéresse — en général — des solutions de type *point fixe* et *cycle limite de période 1*, dans la mesure où de telles solutions ne permettent pas de rendre compte de la complexité dynamique observée.

### 2.3.3 Reformulation méthodologique

Les plateformes interactives associées aux algorithmes PoMoS et GloMo permettent de suivre et de contrôler manuellement la recherche de modèles. Ces interfaces permettent d’ajouter ou de retirer librement les termes polynômiaux choisis. Cette interactivité a permis, dans certains cas, d’obtenir certains modèles que l’on ne parvenait pas à trouver de façon automatique. Cette interactivité s’est également avérée présenter un intérêt didactique évident, permettant petit à petit, par l’expérience, de mieux discerner les limites méthodologiques propres à l’approche. Cette pratique interactive nous a conduit à revoir notre protocole de recherche de modèle et à développer une nouvelle stratégie de sélection.

### Reformulation de la priorité des critères

Cinq critères étaient successivement considérés pour effectuer la recherche de modèles selon la stratégie présentée ci-dessus. Dans l'ordre, il s'agit de : (1) la parcimonie, (2) la qualité d'ajustement des paramètres, (3) la convergence du modèle lors de l'intégration des équations, (4) la non trivialité des solutions et (5) la fiabilité du modèle, soit :  $C^1 \succ C^2 \succ C^3 \succ C^4 \succ C^5$ . L'usage d'un critère d'optimisation prenant en compte la parcimonie des modèles nous permettait d'effectuer une présélection rapide de structures mais présente un inconvénient majeur : quel que soit le critère d'ajustement  $C^2$  choisi ( $C^{AIC}$  [62],  $C^{BIC}$  [260] ou autre [45]), ce classement favorisait le critère  $C^1$  de parcimonie sur les autres critères ( $C^2$  à  $C^5$ ). Or l'usage interactif des algorithmes PoMoS et GloMo nous montre que les structures présentant le plus d'intérêt (les structures donnant lieu à des dynamiques chaotiques) étaient le plus souvent entourées de structures conduisant à des dynamiques plus simples dans l'ordre suivant : dynamiques  $n$ -périodiques (avec  $n > 1$ ), puis dynamiques 1-périodiques, puis dynamiques divergentes (une observation similaire avait déjà été rapportée dans [60]). Les conséquences de cette observation sont les suivantes : (a) la solution finale d'une recherche par critère de parcimonie a toute les chances d'être pseudo-optimale. (b) Le critère de parcimonie ne doit pas être considéré comme une priorité première. (c) Un parcours transverse des structures doit être privilégié. Notons que l'application interactive des algorithmes a également fait ressortir que l'utilisation des critères de parcimonie ne permettait pas systématiquement la visite transverse des structures, au contraire d'autres stratégies basées sur l'exclusion successive des termes de contribution plus faible [79], ou sur l'exclusion successive des termes les moins récurrents [3].

On se propose par conséquent de revoir l'ordre des critères de priorité et de placer désormais le critère de parcimonie en dernière priorité (sans exclure son utilisation éventuelle pour effectuer une visite transverse des structures, mais d'une façon non péremptoire, ni même exclusive). On propose également de ne plus considérer l'ajustement aux données comme critère de sélection puisque ce dernier ne nous apporte que peu d'information quant à la qualité finale du modèle (et à son intégrabilité notamment). On va alors chercher à formuler une nouvelle approche en ne considérant plus que quatre des cinq critères, dans l'ordre suivant :  $C^3 \succ C^4 \succ C^5 \succ C^1$ . Autrement-dit, on va chercher à privilégier en premier les modèles non-divergents (ou à la divergence trop lente pour pouvoir être détectée de manière évidente) puis, parmi ceux-ci, successivement les non-triviaux, les plus fiables et enfin les plus parcimonieux. Cette nouvelle stratégie va avoir un coût : en effet, vérifier la non-divergence ne peut se faire que par l'intégration numérique des équations sur de très longues fenêtres de calcul ; elle est donc *a priori* extrêmement coûteuse en temps de calcul, ce qui est justement ce que l'on cherchait à éviter en développant l'heuristique PoMoS. Une nouvelle méthodologie a été ici introduite pour rendre possible ce réordonnement des critères de recherche.

### Algorithme d'exploration systématique par intégration numérique itérative

Deux étapes vont être appliquées afin, d'une part, de ne pas être trop limité par le problème du temps de calcul, et d'autre part, de pouvoir explorer un nombre suffisamment conséquent de structures de modèles.

- La première étape va consister à utiliser l'une des méthodes précédemment citées afin d'en tirer une/des visite(s) transverse(s) de l'espace des structures. Il pourra s'agir soit d'une méthode se basant sur les termes de faible contribution [79], soit l'ensemble des sorties de PoMoS (et non sur les solutions optimales), soit d'un ensemble de modèles reconstruits en s'appuyant sur la qualité de leurs termes (corrélation présence / qualité fournie par PoMoS), ou de toute autre approche. En pratique la première de ces approches s'est souvent montrée satisfaisante car à la fois rapide et efficace. Les autres approches ont parfois permis d'obtenir des modèles lorsque la première méthode achoppait. L'objectif de cette étape est d'obtenir une liste de modèles à tester dont la taille peut aller d'une demi-douzaine à une centaine, éventuellement plus en fonction des capacités du calculateur utilisé.

- La seconde étape – qui constitue le noyau principal de ce nouvel algorithme – consiste à tester l'intégrabilité des équations. Toutefois, l'intégration  $y$  est testée itérativement sur des durées de taille croissante et, plus précisément, de croissance exponentielle, en repartant à chaque itération des conditions finales du dernier calcul, afin d'éviter toute redondance. Toute solution identifiée comme étant divergente conduit à rejeter le modèle.

Cette approche – très simple – s'est montrée d'une très grande efficacité, permettant d'obtenir, notamment, des modèles très parcimonieux à partir de la variable  $z$  du système de Rössler [3], qui est une variable réputée difficile [176] en raison de sa faible observabilité [194]. L'approche s'est également montrée très puissante à partir de jeux de données très courts, comme nous avons pu le constater dans un travail récent visant à retrouver des modèles à partir d'orbites périodiques instables [17] (cf. § 3.16). Un important développement méthodologique a ensuite été mis en œuvre sur la base de ce nouvel algorithme lors du stage de F. Le Jean [41] que j'ai encadré. Une interface interactive a été développée permettant de rendre l'utilisation de cet algorithme plus opérationnelle, plus simple et plus agréable. Le travail effectué au cours de ce stage a également permis de mettre en œuvre tout un développement méthodologique visant à l'analyse de séries temporelles multiples en association ainsi que l'analyse de comportements dynamiques agrégés. L'approche a permis d'obtenir de nombreux modèles chaotiques dont certains seront présentés dans les chapitres 3 et 4. Comparée aux méthodes NARMAX (développées par Luis Aguirre [60, 58, 59]) qui constituent l'une des méthodes de référence en matière de modélisation globale à formulation discrète, la présente méthode s'est également avérée d'une remarquable efficacité, et même souvent meilleure sur les cas testés.

Qui plus est, cette nouvelle approche présente un autre avantage, particulièrement important dans le cadre multivariées ; en effet, en testant l'intégration des équations de façon pratique, l'approche permet de propager l'information entre variables et donc de tester le couplage dynamique des nonlinéarités. Cet élément s'est avéré indispensable pour l'exploration de formulations multivariées (de type Eq. 2.3 ou 2.5) pour lesquelles le lien entre variables n'est pas garanti comme il peut l'être par la présence de variables dérivées selon la formulation canonique (Eq. 2.4).

## 2.4 Approches de validation

Nous avons jusqu'ici décrit l'approche globale et présenté certains des outils permettant de la mettre en œuvre. Nous allons maintenant chercher à valider les outils en montrant la viabilité sur des cas concrets. La validation de l'approche ne peut se faire que par la validation des modèles obtenus dans différents contextes. Pour cela nous commencerons par rappeler l'utilité — en contexte chaotique — de faire appel aux invariants non linéaires pour valider un modèle. Les invariants non linéaires étant parfois difficiles à estimer de façon suffisamment précise, en raison du niveau de bruit des données (auxquels ces algorithmes sont souvent très sensibles) ou pour des raisons théoriques concernant les invariants topologiques. D'autres approches seront également présentées visant à disposer de méthodes de validation alternatives : l'une basée sur une analyse comparative de la prévisibilité, l'autre sur l'estimation du niveau de bruit multiplicatif.

### 2.4.1 Invariants géométrique, dynamique & topologique

La sensibilité aux conditions initiales des dynamiques chaotiques modifie notre conception du monde et nous oblige à revoir nos approches de modélisation. Elle nous oblige aussi à revoir notre mode de validation. La forte sensibilité aux conditions initiales signifie que deux trajectoires modélisées peuvent diverger quelle que soit leur proximité initiale (cette divergence est toutefois d'autant plus longue à devenir significative que la différence initiale est petite). Pour une dynamique réelle, une telle sensibilité signifie que la trajectoire observée aurait pu être très différente pour un état initial légèrement différent, mais aussi que toute perturbation de notre système va modifier, à plus ou moins long terme, la trajectoire de notre système. Dans ce contexte, il devient hautement improbable que trajectoires observées et modélisées puissent coïncider, puisque séries temporelles observées et modélisées sont amenées à diverger. De ce constat ressort qu'un critère de distance

entre modèle et données basé sur la proximité des séries temporelles (simulées et observées) est une vision idéaliste.

Pire encore, pris comme critère d'optimisation, la proximité de deux séries temporelles, l'une étant observée, l'autre simulée, peut conduire à une identification totalement erronée du modèle (paramétrage et structure inclus). En effet, la sensibilité aux conditions initiales reste présente à tout instant, quelles que soient les conditions initiales (les conditions initiales "originelles" perdent un peu de leur sens). Autrement dit, il s'agit aussi d'une sensibilité aux perturbations courantes, c'est-à-dire à toute perturbation, fût-elle du second, troisième ordre, ou au-delà. Contrairement aux perturbations additives, qui n'agissent que sur les mesures, ces perturbations courantes modifient l'état du système et vont donc se propager au cours du temps. En contexte chaotique, ces perturbations vont être amplifiées exponentiellement, pouvant conduire à modifier fortement la trajectoire temporelle observée, et donner lieu à des trajectoires inaccessibles au modèle — même idéalement connu. En conséquence, chercher à ajuster brutalement un modèle sur une série temporelle perturbée reviendra à ajuster le modèle sur un comportement qui n'est pas nécessairement représentatif du système déterministe sous-jacent...

D'un point de vue conceptuel, la modélisation globale permet d'éviter cet écueil en recourant à l'espace des phases pour identifier un modèle sur une dynamique équivalente à la dynamique sous-jacente (le modèle global n'est pas obtenu en ajustant la série simulée à la série observationnelle mais en ajustant un champ de vecteurs dans l'espace des phases). Comment valider alors un tel modèle? Malgré cette sensibilité aux conditions initiales, les dynamiques chaotiques n'en présentent pas moins des comportements très ordonnés qui peuvent être caractérisés par des invariants nonlinéaires, indépendants des conditions initiales. Ces invariants sont de trois types : (1) dynamiques [298], (2) géométriques [142, 168, 106] et (3) topologiques [135]. Un bon modèle doit préserver ces invariants. En conséquence, une bonne correspondance entre invariants estimés à partir de la dynamique observée et invariants estimés à partir du modèle nous fournit de bons éléments de validation.

Si, de manière théorique, les invariants nonlinéaires présentent un important potentiel pour caractériser et valider les modèles en contexte chaotique, ils peuvent aussi présenter certaines limites ou difficultés spécifiques. Les invariants dynamiques visent à caractériser la sensibilité aux conditions initiales. L'une des manières, de quantifier cette sensibilité consiste à estimer la valeur moyenne des exposants de Lyapunov, caractérisant les coefficients de divergence exponentielles entre trajectoires initialement voisines, sur l'attracteur. Les exposants caractéristiques de Lyapunov peuvent être définis comme

$$\lambda_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{N\Delta t} \log[S_i(M_N)] \quad (2.6)$$

avec

$$M_N = \prod_{k=0}^N \exp J(k\Delta t)\Delta t \quad (2.7)$$

où  $S_i$  représentent les valeurs singulières de la matrice  $M_N$ ,  $J$  la matrice Jacobiène, et  $\Delta t$  le pas de discrétisation du temps. Les exposants caractéristiques de Lyapunov peuvent être estimés, soit globalement, c'est-à-dire en moyenne sur l'attracteur [298], soit localement, le long de l'attracteur [147]. Ils peuvent également être estimés directement à partir d'un jeu de données (voir [127] pour une application géophysique). Si les estimations globales des exposants de Lyapunov semblent assez robustes, les estimations locales sont souvent plus délicates, notamment lorsque les portraits de phase présentent des entrelacs complexes et serrés ainsi que des courbures abruptes. Les estimations basées sur des jeux de données réelles sont plus difficiles encore à mettre en œuvre et sont très sensibles au niveau de bruit additif des données ainsi qu'à la longueur des séries observées qui doivent être d'autant plus longues que la dimension de la dynamique est grande. Dans le cadre de la modélisation globale qui nous intéresse plus spécifiquement ici, nous avons constaté que les amplitudes des exposants de Lyapunov (en valeur absolue) étaient souvent surestimées par les modèles globaux, mais que leurs signes étaient tout à fait robustes. Nous reviendrons sur ce point au chapitre 3 (§ 3.2.3).

Les invariants géométriques visent à caractériser la structure géométrique des attracteurs. Partant d'un système dynamique donné, l'attracteur est obtenu par intégration numérique des équations (après en avoir retiré les transitoires) et reconstruction du flot dans l'espace des phases. Une estimation des invariants géométriques peut être effectuée à partir d'une simple série temporelle. Une telle technique nécessite toutefois d'admettre que la dynamique sous-jacente à la série temporelle est déterministe et stationnaire. Les invariants géométriques visent à caractériser l'autosimilarité des trajectoires par changement d'échelle qui peut être quantifiée par une quantité appelée dimension fractale. La dimension fractale peut être estimée soit par un décompte des états dynamiques relatifs aux volumes dans l'espace des phases, soit par des approches basées sur le calcul des fonctions de corrélation [142]. Ces approches nécessitent généralement, pour être précises, de disposer de très longues séries temporelles, et présentent également une forte sensibilité au bruit. Certains algorithmes permettent d'estimer en même temps que la dimension de corrélation, l'entropie de corrélation et le niveau de bruit additif Gaussien [299] (voir [7] § 1.5 pour une application à la dynamique de la végétation en Afrique de l'Ouest). Une approche basée sur les exposants de Lyapunov a également été introduite [168]. En dimension trois, la dimension de Kaplan-Yorke  $D_{KY}$  est définie comme :

$$D_{KY} = 2 + \frac{\lambda_1}{|\lambda_3|} \quad (2.8)$$

où  $\lambda_1$  et  $\lambda_3$  correspondent respectivement aux premier et troisième exposants de Lyapunov.

Les invariants topologiques, quant à eux, permettent de fournir une description algébrique de la structure de l'attracteur, en particulier le genre du tore limitant l'attracteur qui se déduit des trous présents au sein de l'attracteur [280], et des entrelacs formés par les différentes orbites périodiques instables autour desquelles se développent les trajectoires chaotiques [135]. L'intérêt de l'approche topologique est d'être insensible aux faibles variations paramétriques et relativement robuste au bruit. Nous reviendrons plus en détail sur cette approche à laquelle sera dédié le chapitre 5. Notons seulement que l'approche a déjà pu être appliquée à de nombreux cas d'étude — théoriques et expérimentaux — mais présente, à ce jour, une limitation majeure : elle n'est applicable qu'en dimension trois. D'autre part, l'approche apparaît difficile à appliquer à certaines catégories d'attracteurs, notamment aux cas de chaos faiblement dissipatifs et de chaos toroïdaux. Nous reviendront sur ces points au chapitre 5.

## 2.4.2 Estimation du taux de signal déterministe expliqué

Peu de travaux visent à estimer le niveau de bruit multiplicatif dans le cadre de systèmes d'équations aux dérivées ordinaires perturbés par une composante stochastique. Dans le cadre du stage de Master de Malika Chassan [42], nous nous sommes intéressés à une approche nécessitant de disposer des équations de la dynamique [237]. Appliqué à un modèle global, l'utilisation d'une telle approche visait à disposer d'une information relative au taux de signal additif et multiplicatif ne pouvant être expliqué par le modèle. L'approche a d'abord été testée dans le cadre de systèmes chaotiques perturbés (le modèle de Lorenz-84 [206] a été utilisé à cette fin [42]), puis d'appliquer l'approche à un modèle global obtenu à partir d'observations réelles.

Soit  $F$  la dynamique originale d'un système de dimension  $n$  telle que :

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}) \quad (2.9)$$

où le vecteur  $\mathbf{x}$  représente les états successivement visités par le système ; et soit  $G$  le modèle de petite dimension  $m < n$  obtenu pour représenter la dynamique de ce même système sous la forme

$$\dot{\mathbf{s}} = G(\mathbf{s}) \quad (2.10)$$

où le vecteur  $\mathbf{s}$  représente les états successivement visités par le modèle  $G$ .

L'utilisation d'un modèle de petite dimension pour représenter une dynamique de plus grande dimension revient à faire l'hypothèse que la dynamique du système original peut être approchée par un système de petite dimension, perturbé par un signal indépendant. Cela revient à reformuler le problème de telle façon que

$$\dot{\mathbf{x}} = G(\mathbf{x}) + \epsilon(t) \quad (2.11)$$

où  $G$  est un modèle approché de la dynamique originale – supposée déterministe – et  $\epsilon(t)$  correspond aux perturbations multiplicatives, de la dynamique ainsi approchée. Meilleur sera le modèle  $G$ , plus petites seront les perturbations  $\epsilon(t)$ . En supposant que l'on dispose d'observations  $\mathbf{y}$  de notre système avec un échantillonnage régulier, on peut alors écrire que

$$\mathbf{y}(\mathbf{t}_j) = \mathbf{x}(\mathbf{t}_j) + \epsilon^o(t_j). \quad (2.12)$$

Après discrétisation des équations du système approché (Eq. 2.11), on obtient

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}_{j+1}) = \mathbf{x}(\mathbf{t}_j) + \delta t G(\mathbf{x}(\mathbf{t}_j)) + \delta t \epsilon^m(t_j). \quad (2.13)$$

Et effectuant des simulations avec le modèle en le réinitialisant à chaque pas de temps sur la série observationnelle, on a

$$\mathbf{s}_j(\mathbf{t}_{j+1}) = \mathbf{y}(\mathbf{t}_j) + \delta t G(\mathbf{y}(\mathbf{t}_j)). \quad (2.14)$$

En combinant les Eqs. (2.11), (2.13) et (2.16), on parvient à

$$\mathbf{s}_j(\mathbf{t}_{j+1}) - \mathbf{y}(\mathbf{t}_{j+1}) = -\delta t \epsilon^m(t_j) + \delta t J(\mathbf{x}(\mathbf{t}_j)) \epsilon^m(t_j) + \epsilon^a(t_j) - \epsilon^a(t_{j+1}) \quad (2.15)$$

où  $J$  est la matrice jacobienne du modèle  $G$ . Si l'on fait l'hypothèse que les perturbations additives  $\epsilon^o(t)$  et multiplicatives  $\epsilon^m(t)$  se comportent comme des bruits Gaussiens indépendants identiquement distribués, et sont respectivement de moyennes  $\langle \epsilon_y^a \rangle_t = 0$  et  $\langle \epsilon_y^m \rangle_t = 0$ , et de variances  $\langle \epsilon_y^a \rangle_t^2 = S_y$  et  $\langle \epsilon_y^m \rangle_t^2 = P_y$ ; si l'on approche, d'autre part, la croissance à un pas de temps de l'erreur additive par une relation linéaire, soit  $\langle J(\mathbf{x}(t_j)) \epsilon_y^a(t_j) \rangle_t^2 = \beta S_y$ ; alors, la dérive de l'erreur  $d_y(t_k)$  peut être formulée comme

$$d_y(t_k) = \sum_{j=0}^{K-1} [s_j(t_{j+1}) - y(t_{j+1})] = \sqrt{(P_y^2 + S_y^2 \beta^2) \delta t t_k + 2S_y^2}. \quad (2.16)$$

Il en résulte que, disposant d'une série temporelle et d'un modèle, les amplitudes des perturbations additives et multiplicatives peuvent être estimées. Nous avons pu tester l'efficacité de l'approche en prenant le modèle de Lorenz-84 comme cas d'école [42]. Notons que si la variance du signal déterministe peut être estimée en l'approchant par  $\nu_y \simeq \langle G(y) \rangle_t^2$ , le taux de signal déterministe peut alors également être estimé suivant  $\Gamma = \frac{\nu_y^2}{\nu_y^2 + P_y^2}$ .

### 2.4.3 Analyse de prévisibilité

Associés à une preuve de déterminisme, les invariants nonlinéaires constituent des outils théoriques bien adaptés à la validation d'un modèle en contexte chaotique. Le principe consiste simplement à montrer que les propriétés du modèle à valider sont identiques, ou du moins en cohérence avec celles de la dynamique observée. Il n'est malheureusement pas toujours possible d'estimer ces invariants pour les observations et pour le modèle, et d'autres approches doivent alors être envisagées pour la validation du modèle. L'approche ici proposée consiste à montrer que les capacités prédictives du modèle sont meilleures que des approches prévisionnelles basées sur la dynamique observées sans inclure d'équations dynamiques. Pour effectuer une telle validation, deux méthodes doivent être mises en œuvre : une première visant à estimer la prévisibilité effective des observations par elles-mêmes (sans modèle), une seconde visant à estimer la prévisibilité des observations par le modèle.

### Estimation des capacités prédictives du modèle global

En contexte chaotique, des outils spécifiques sont requis pour effectuer des prévisions. En effet, en raison de leur sensibilité aux conditions initiales, un réajustement de la trajectoire du modèle doit être appliqué avant chaque prévision afin de minimiser l'effet des perturbations propagées par le modèle, tout en prenant en compte les statistiques d'erreur afin de disposer d'une connaissance optimale des états récemment visités par le milieu étudié. L'objet des approches d'assimilation de données est justement de mettre en œuvre des méthodes visant à optimiser l'ajustement des trajectoires de systèmes dynamiques, que ce soit afin de disposer de prévisions ou d'effectuer des réanalyses optimales [274].

La divergence de trajectoires initialement très proches étant l'une des caractéristiques essentielles des dynamiques chaotiques, les modèles chaotiques ont constitué des cas privilégiés pour tester les nombreuses méthodes d'assimilation de données (ex. [227, 107, 228, 119, 240, 215, 108, 155, 156, 129, 67]). Très peu de modèles chaotiques ayant pu être directement obtenus d'observations réelles, de tels modèles ont surtout été utilisés pour tester la validité de schémas d'assimilation de données. Le modèle théorique de Lorenz-63 [205] a été très largement privilégié dans un tel contexte pour des raisons thématiques (les travaux de Lorenz étant directement destinés à la communauté des atmosphériciens). Pourtant, certaines propriétés de symétrie [138], et d'observabilité [194] en font un cas particulier plutôt mal adapté. Le modèle de Rössler-76 [254], ne présentant pas de symétrie et offrant des niveaux d'observabilité différents pour chacune de ses trois variables, constitue certainement un cas d'étude beaucoup mieux indiqué parmi les modèles chaotiques de très petite dimension. L'obtention de modèles chaotiques par approche globale, et notamment pour des domaines appliqués des sciences environnementales [213, 3, 1] (cf. chapitre 4) nous permettent de mettre en évidence le potentiel applicatif de ces résultats. En effet, les applications aux modèles chaotiques de petite dimension sont souvent considérés comme des situations purement théoriques, sans potentiel applicatif. Notre objectif ici est d'appliquer certaines de ces techniques d'assimilation de données à des modèles chaotiques directement issus de données observées, et ce aussi bien pour l'analyse de prévisibilité que pour la validation des modèles. De nombreux schémas d'assimilation ont été développés au cours des dernières décennies. Plusieurs approches ont été utilisées dans ce contexte, trois d'entre elles seront évoquées ici. Les deux premiers schémas sont dits séquentiels et consistent en l'alternance d'une phase d'intégration numérique du modèle, et d'une étape ponctuelle, dite d'analyse, visant à réajuster l'état du modèle. Le troisième schéma est dit variationnel puisqu'il ne sépare pas l'assimilation en étapes distinctes.

Le premier des quatre schémas d'assimilation de données (a) est un schéma de type filtre de Kalman étendu (ExKF) qui permet de prendre en compte les erreurs du modèle et des données, et de simuler leur propagation. L'approche fait toutefois l'hypothèse d'une distribution Gaussienne des erreurs, peu adaptée au contexte chaotique. Le second schéma (b) est de type filtre de Kalman d'Ensemble (EnKF; [118]) qui ne nécessite pas d'hypothèse forte sur la distribution des erreurs. Le troisième schéma (c) est basé sur une approche de synchronisation directe et rétrograde (BFN) [67] qui présente l'avantage de ne pas nécessiter non plus d'hypothèse forte sur la distribution des erreurs, et qui peut aussi permettre de mieux conserver le déterminisme des équations.

En effectuant un réajustement optimal de trajectoire, ces schémas d'assimilation permettent d'obtenir des prévisions optimisées et donc de pouvoir tester les capacités prédictives des modèles chaotiques tout en disposant d'estimations significatives de la croissance d'erreur en fonction de l'horizon de prévision visé. Pour étudier la croissance d'erreur de manière pratique, la méthode consiste à séparer les observations en deux séquences [6] : la première séquence de données est destinée à être assimilée par le modèle pour l'ajustement optimal de sa trajectoire; la seconde séquence n'est pas assimilée, mais conservée afin d'estimer les erreurs de prévision. En pratique, une fenêtre d'assimilation de données de durée  $T_1$  est utilisée ici, contre une fenêtre prévisionnelle de durée  $T_2$ . Cette fenêtre  $T_1 + T_2$  est déplacée le long du signal étudié disponible avec un pas de temps choisi afin de disposer de l'erreur de prévision au cours du temps et en fonction de l'horizon de prévision visé  $h$ , constituant ainsi un ensemble d'estimation significatif (cf. Fig. 2.2).

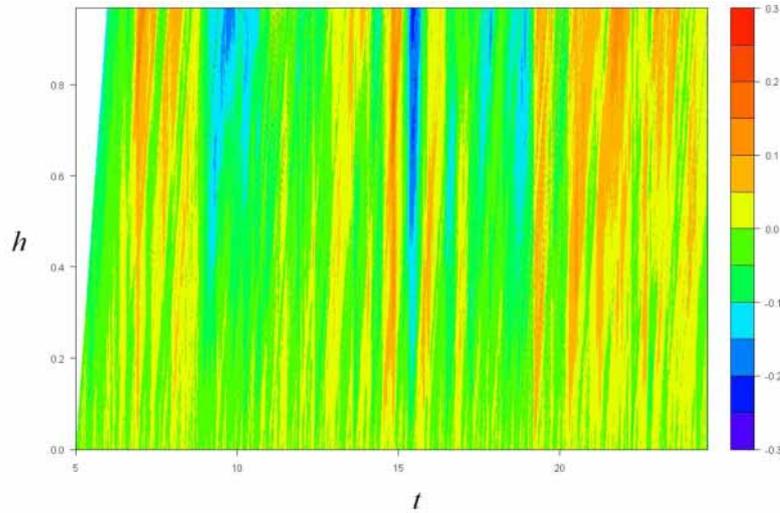


FIGURE 2.2 – Exemple de carte d’erreur de prévision  $e(t, h)$  en fonction du temps  $t$  et de l’horizon de prédiction  $h$  obtenue ici pour le système de Lorenz-84 en utilisant un schéma d’assimilation de données de type ExKF.

### Prévision par recherche d’états analogues dans l’espace des phases

Comme nous l’avons vu au paragraphe 2.2, l’intégration d’un système d’équation se traduit dans l’espace des phases par un flot. Si l’on ne dispose pas de modèle, mais seulement d’un jeu de séries temporelles (ou d’une série temporelle unique), on peut tout de même obtenir une reconstruction du flot [273] à partir duquel on se propose ici d’effectuer des prévisions. Cette approche initialement développée pour étudier la prévisibilité du cycle de la végétation en zone semi-aride ([6], cf. paragraphe § 1.5.2), est réutilisée ici.

Pour effectuer une prévision partant d’un état correspondant à un état préalablement visité par la série observationnelle, il suffit de suivre la trajectoire passant par l’état en question. En pratique, les trajectoires ne correspondent toutefois jamais avec exactitudes les unes aux autres, une prévision à long terme n’est donc pas envisageable lorsque la dynamique est chaotique. Qui plus est, les mesures sont souvent contaminées par un bruit de mesure. Plutôt que de choisir la trajectoire la plus proche pour effectuer des prévisions, il apparaît donc plus judicieux de choisir un ensemble de trajectoire proches de notre état de départ qui nous permettra d’en déduire une trajectoire moyenne. En séparant notre série temporelle en deux parties, comme pour l’analyse de croissance d’erreur du modèle (l’une destinée à effectuer les prévisions, l’autre conservée pour en estimer les erreurs), on pourra de la même manière disposer de statistiques de la croissance d’erreur de prévision. Une telle approche semble bien adaptée dans la mesure où elle ne nécessite que de très peu de paramètres pour pouvoir être mise en œuvre (la dimension de plongement  $d_E$ , le temps retard  $\tau$  et le nombre de points retenus autour d’un état de départ pour effectuer une prévision); et qu’elle autorise – en théorie – une bonne représentation de la dynamique originale. On choisira les valeurs de ces trois paramètres afin de disposer des meilleures prévisions possibles, de façon à ne pas biaiser la validation de notre modèle chaotiques lors de la comparaison des deux approches.

### Analyse comparative

Les deux approches prévisionnelles introduites permettent d’obtenir des courbes de croissance d’erreur de prévision vues par le modèle (avec assimilation de données) pour l’une, et par l’approche sans modèle basée sur la reconstruction du flot pour l’autre. De telles courbes sont caractérisées, notamment, par leur niveau d’erreur initial et par la vitesse de croissance de l’erreur. Le niveau

d'erreur initial correspond à un bruit additif pouvant provenir du bruit de mesure mais aussi du filtrage engendré par les schémas d'assimilation ou le lissage des données. La vitesse de croissance de l'erreur provient à la fois des instabilités dynamiques (divergence des trajectoires) et des perturbations multiplicatives dont les sources peuvent être multiples : les perturbations du système réel et/ou de l'approche prévisionnelle, les biais du modèles (mauvaise formulation / défauts de calibration). Pour valider un modèle, nous nous concentrerons sur la vitesse de croissance de l'erreur qui est la plus apte à illustrer la validité de notre modèle et chercherons à montrer que le modèle permet de réduire la vitesse de croissance des erreurs de prévision en comparaison de celle basée sur le flot.

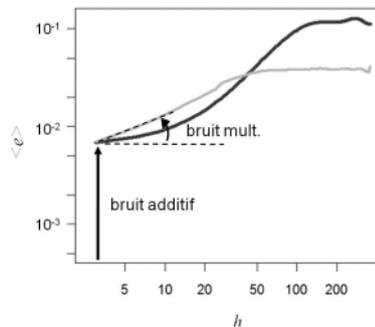


FIGURE 2.3 – Croissance de l'erreur RMS de prévision  $\langle e \rangle$  en fonction de l'horizon de prévision  $h$  : pour le modèle avec schéma d'assimilation (en noir), et pour l'approche par recherche d'états analogues dans l'espace des phases (en gris).

## 2.5 Synthèse

Dans ce chapitre 2, nous avons présenté, après avoir introduit les principaux concepts nécessaires à sa présentation, le premier de nos axes de recherche. Ce premier axe, essentiellement méthodologique, vise à développer ou à améliorer des outils destinés à la modélisation globale et à l'analyse de modèles chaotiques obtenus grâce à elle. Ces travaux, qui ont également été l'occasion de l'encadrement de plusieurs étudiants [45, 42, 41], ont permis d'obtenir un certains nombres d'outils [19] sous forme de bibliothèques pour le langage *R* dont l'un élément de base est librement disponible sur le site du CRAN. Ces outils incluent le module *PoMoS* destiné à la recherche de structures polynômiales pour des modèles d'équations aux dérivées ordinaires ; le module *GloMo* destiné à l'identification exacte de paramètres par une méthode de type Gram-Schmidt ; *PoicaStruc* un module d'extraction des sections et applications de Poincaré ; *LyapLoc* un module semi-formel destiné à estimer les exposants de Lyapunov et la dimension de Kaplan-Yorke des attracteurs obtenus par modélisation globale ; *AMoGlo*, un module destiné à l'assimilation de données dans des modèles en EDO polynômiaux pour effectuer des prévisions ou analyser la prévisibilité des dynamiques obtenues ; *SpatioGloMo* un module destiné à l'analyse collective de séries temporelles (analyse associée) et utilisant un nouveau noyau (*autoGloMoTest*) d'analyse particulièrement puissant ; ainsi que de nouveaux modules en cours de développement destinés à la modélisation multivariées *SpatioPoMo*, ou à l'extraction de structures multidimensionnelles pour l'analyse topologique.

Ces développements multiples ont nécessité le développement de méthodes de validation qui ont d'abord été appliquées à des systèmes théoriques bien connus et faciles à contrôler. Les résultats étant très encourageants, ils ont conduit à prolonger ce premier axe de développement en un second axe de recherche destiné à explorer d'autres contextes théoriques. Ces différentes composantes de validation et d'exploration feront l'objet du chapitre 3.

## Chapitre 3

# Modélisation globale à partir de données synthétiques

*”Pour le moment, j’en ai assez. Les harmoniques sont trop difficiles ; cela finit toujours par couiner.” John Coltrane, Entretien, 1962*

### 3.1 Introduction

Nous avons présenté dans le chapitre précédent un certain nombre d’outils mis en place pour identifier des couplages entre séries temporelles, obtenir des modèles globaux sous la forme d’équations aux dérivées ordinaires. Valider de tels outils de modélisation globale ne peut se faire qu’en montrant leur efficacité à obtenir des modèles de qualité et en comparant les résultats à ceux obtenus par d’autres approches. Ce chapitre 3 consistera essentiellement, partant de séries temporelles synthétiques, à montrer que les outils présentés au chapitre 2 permettent d’obtenir des modèles globaux dans des cas de difficulté diverses, puis de montrer dans quelle mesure ces modèles peuvent être validés. Différents types de validation peuvent être utilisés en fonction des contextes et des difficultés spécifiques rencontrées. Sans aller systématiquement jusqu’à une analyse topologique détaillée des attracteurs – que nous réserverons pour le chapitre 5 – nous nous appuyerons sur les applications de Poincaré pour vérifier que la structure des modèles globaux est équivalente à celle des données originales. Le recours aux invariants dynamiques et géométriques pouvant être, dans ce contexte, une approche de validation complémentaire, nous chercherons également à montrer dans quelle mesure l’approche globale permet de conserver ces invariants.

Différents contextes de validation seront considérés dans ce chapitre, qu’ils soient basés sur des systèmes théoriques ou expérimentaux ou qu’ils présentent des niveaux de difficultés de modélisation très différents. Une exploration de deux autres contextes, l’analyse par association de série et l’analyse de dynamiques spatialement agrégées, sera ensuite considérée. Des résultats de modélisation globale basés sur une analyse de jeu de séries temporelles multivariées seront également présentés.

### 3.2 Applications au système de Rössler

#### 3.2.1 Le modèle de Rössler

Le système de Rössler-76 [254] est un cas intéressant à étudier car il ne présente pas de symétrie, comme c’est le cas pour le système de Lorenz-63, mais aussi parce que ses trois variables présentent des niveaux très différents d’observabilité de la dynamique sous-jacente [194]. Il s’agit d’un système de petite dimension défini comme

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{cases} \quad (3.1)$$

Des séries chronologiques des variables  $x$ ,  $y$  et  $z$  de ce système, générées par intégration numérique des équations 3.1, en choisissant pour paramètres de commande,  $(a, b, c) = (0.520, 2, 4)$ , ce qui correspond à un régime chaotique avec non cohérence de phase, sont présentées Fig. 3.1. La reformulation de ce système sous une forme canonique, (c'est-à-dire sous la forme de type Eq. (2.4), peut être obtenue à partir du changement de coordonnées suivants

$$\phi_P = \begin{cases} X_1 &= x_i \\ X_2 &= f_i(x_1, x_2, x_3) \\ X_3 &= \frac{\partial f_i}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} f_2 + \frac{\partial f_i}{\partial x_3} f_3. \end{cases} \quad (3.2)$$

Quand  $\phi_P$  est inversible, la fonction exacte  $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$  de la formulation canonique (2.4) peut être obtenue analytiquement [175]. Pour le système de Rössler, ces solutions ont été données dans [138] pour les trois variables. Pour la variable  $y$ , la fonction  $F$  est le polynôme du second degré

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= F(X, Y, Z) \\ &= -b + (a - c)Z - cX + (ac - 1)Y - aX^2 - aY^2 - aXZ + YZ + (a^2 + 1)XY, \end{aligned} \quad (3.3)$$

alors que pour  $x$  et  $z$ , il s'agit d'une fonction rationnelle.

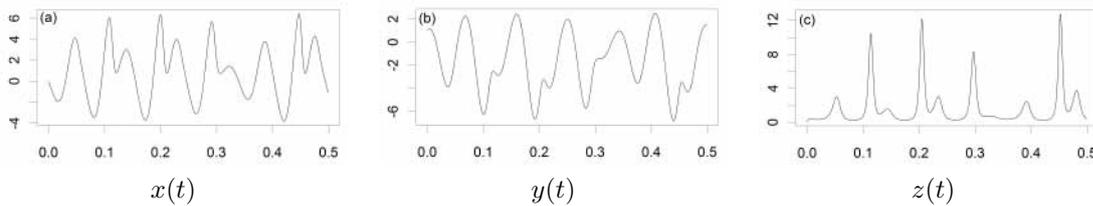


FIGURE 3.1 – Signal original du système Rössler-76 pour les variables  $x$ ,  $y$  et  $z$ .

Le niveau d'observabilité d'un système dynamique peut varier selon la variable mesurée. Fondamentalement, un système est complètement observable par une variable donnée si l'état complet du système peut être récupéré à partir de celle-ci. Cependant, dans la pratique, il a été montré que l'observabilité pouvait varier autrement qu'en tout ou rien et un coefficient d'observabilité a été introduit [194]. En pratique, l'observabilité peut être estimée à partir des dérivées de Lie qui dépendent fortement de l'inversibilité de  $\phi_P$ . Pour le système de Rössler, le classement montre qu'en terme d'observabilité, les variables peuvent être classées comme suit :  $y \triangleright x \triangleright z$ . Du point de vue de la modélisation, les coefficients d'observabilité apportent une information importante concernant la difficulté potentielle d'obtenir un modèle. Toutefois, ces coefficients ne peuvent être comparés au sein d'un même système, et ne peuvent pas être utilisés pour comparer l'observabilité de variables issues de plusieurs systèmes [194]. Par conséquent, ils ne peuvent pas être utilisés pour les modèles canoniques bâtis à partir d'une série chronologique unique. Le niveau d'observabilité va contribuer à rendre la modélisation facile, difficile ou impossible. La question de l'observabilité est donc un élément à garder à l'esprit dans un cadre de la modélisation par approche globale. Pour mieux illustrer les aptitudes des outils utilisés ici, la dynamique du système de Rössler a été volontairement choisie en régime de non-cohérence de phase pour effectuer les analyses de modélisation. Pour un tel régime, la dynamique qui en résulte est caractérisée par un attracteur à quatre branches (cf. Figures 3.3 à 3.4) qui implique deux échelles de temps dans la dynamique. Cela rend les conditions dynamiques beaucoup plus complexes et donc plus difficiles à aborder pour saisir la structure par modélisation globale ou pour reproduire la dynamique originale de façon satisfaisante.

### 3.2.2 Modélisation globale

L'objet de cette première application au système de Rössler-76 est de montrer l'efficacité des outils présentés au chapitre précédent, par l'examen successif de ces trois variables  $y$ ,  $x$  et  $z$  (cf. Eq. 3.1). La variable  $y$  est celle qui offre la meilleure observabilité, laquelle résulte de la relation linéaire existant entre  $\dot{y}$  et les variables  $(x, y, z)$  (voir [186]). Qui plus est, la variable  $y$  permet également la formulation polynomiale exacte de la fonction  $F$  des équations canoniques (2.4). Pour cette raison, cette première analyse peut être considérée comme un test rédhibitoire qui doit absolument être franchi avec succès. Le meilleur modèle obtenu (suivant le critère d'information d'Akaike) à partir de  $y$  est obtenu avec un polynôme de degré  $q = 2$  dont la structure correspond exactement à la structure polynomiale  $F_2(X_1, X_2, X_3)$  de la solution analytique (voir Eq. 3.5). En raison de la bonne observabilité de cette première variable, un modèle est facile à obtenir quelle que soit la technique de recherche de structure utilisée. Les portraits de phases  $(y, \dot{y}, \ddot{y})$  reconstruits à partir de la chronique originale sont présentés en Figure 3.2a conjointement avec les simulations obtenues avec l'un des modèles globaux (Fig. 3.2c) obtenus. On sait que la modélisation globale produit souvent des structures de modèles fiables mais avec une identification imparfaite du paramétrage [197]. Dans le premier cas, un modèle de neuf termes correspondant à la solution canonique (Eq. 3.5) a pu être obtenu.

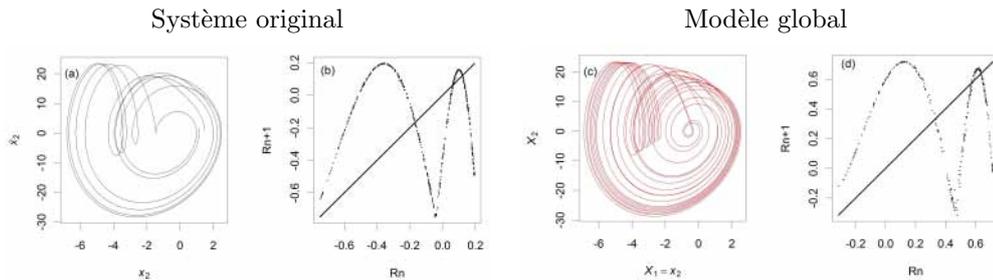


FIGURE 3.2 – Portraits de phase (colonne de gauche) et applications de premier retour (colonne de droite) issus de la série originale de la variable  $y$  du système Rössler (haut) du modèle global 9-termes (deuxième ligne) obtenu à partir de celle-ci.

Le comportement dynamique apparaît pleinement capturé comme en témoignent les applications de premier retour (Fig. 3.2c et 3.2d). Cette observation a pu être confirmée par l'analyse détaillée des matrices de transition (représentant les probabilités de transition entre branches [3]) et par l'analyse des populations d'orbites périodiques instables pour lesquelles les séquences symboliques (3 symboles consécutifs) sont entièrement capturées [3, 16]. Ce résultat pourrait peut-être être encore amélioré par un ajustement des paramètres.

Étonnamment, un modèle à sept termes, donc plus petit que la solution analytique, a également été obtenu, suggérant une contribution compensatrice des deux termes manquants. Notons qu'il n'a pas été possible d'ajuster manuellement la dynamique de ce modèle sur le comportement original par un réglage des paramètres. Bien que de qualité médiocre, ce petit modèle est intéressant car il montre que des modèles approximatifs peuvent conduire à des attracteurs viables bien qu'incomplètement développés. Ce modèle de plus petite taille (sept termes au lieu des neuf analytiques) est également intéressant car il montre aussi qu'en simplifiant trop le système canonique, certains comportements du système d'origine ne peuvent plus être récupérés. Cela illustre également que le principe de parcimonie est difficile à appliquer de manière automatisée, et justifie la dernière stratégie de réordonnancement des critères de recherche (cf. § 2.3.3).

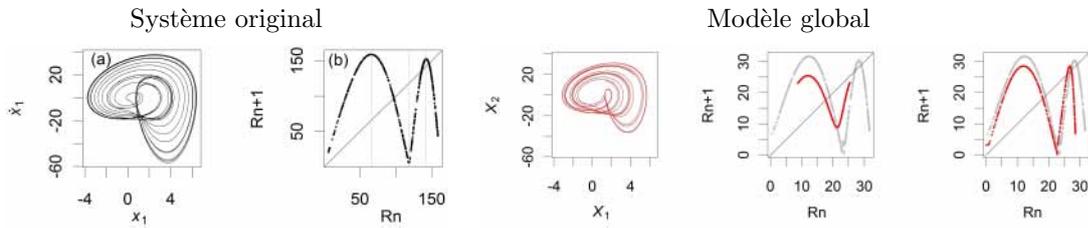


FIGURE 3.3 – Portraits de phase et applications de premier retour issus de la variable  $x$  du système Rössler (1<sup>re</sup> et 2<sup>e</sup> colonnes) puis issus du modèle global 10-termes (colonnes 3 à 5), la dernière applications de premier retour étant obtenue après l’ajustement manuel d’un paramètre.

La variable  $x$  du système de Rössler-76 fournit une observabilité intermédiaire du système. La formulation analytique existe également pour cette variable mais correspond à une fonction rationnelle (voir [138]). Seules les formulations polynômiales étant autorisées par les algorithmes utilisés ici, une formulation exacte du modèle global ne peut être envisagée. Malgré la présence de termes rationnels, des fonctions approchées polynômiales de petite taille de degré polynômial  $q = 3$  et  $4$  ont pu être obtenues.

Les portraits de phase du système original et du modèle global considéré ici sont présentés Figs. 3.3a et 3.3c. Aucun des modèles ne permettait initialement une reconstitution exacte des portraits de phase, comme en témoigne l’application de premier retour du modèle présenté ici (voir Fig. 3.3c). En réglant l’un des paramètres de chacun de ces trois modèles, il a été clairement constaté que le modèle à 10 termes fournissait la meilleure approximation (Fig. 3.3e). En outre, l’analyse de la succession de visite des quatre branches a montré que le modèle permettait de retrouver toutes les séquences longues de 2 symboles avec ce modèle, alors que seulement les séquences d’un symbole ont pu être retrouvées avec les autres modèles (voir [16]).

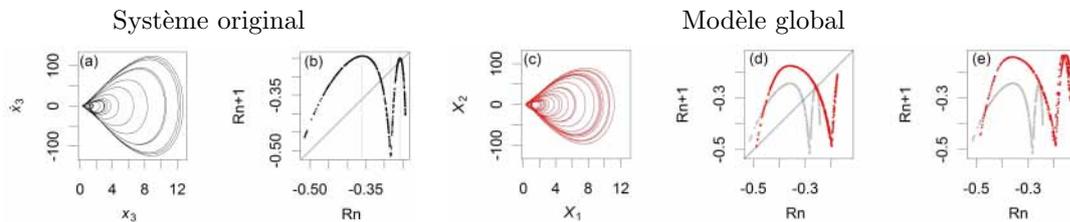


FIGURE 3.4 – Portraits de phase et applications de premier retour issus de la variable  $z$  du système Rössler (1<sup>re</sup> et 2<sup>e</sup> colonnes) puis issus du modèle global 30-termes (colonnes 3 à 5), la dernière applications de premier retour étant obtenue après l’ajustement manuel d’un paramètre.

La variable  $z$ , enfin, présente le plus faible niveau d’observabilité, de qui résulte de la relation non linéaire de  $\dot{z}$  aux autres variables  $(x, y, z)$ . La formulation analytique de  $F$ , qui existe également pour cette variable, est rationnelle [138], et inclut des termes de degré 2 au dénominateur. Le portrait de phase tiré de la variable  $z$  (Fig. 3.4a) présente une structure pointue sur l’un de ses côtés, qui contribue à rendre la modélisation globale particulièrement difficile [176]. Plusieurs modèles ont déjà pu être obtenus à partir de cette variable, soit en utilisant une formulation surdimensionnée (4D) [191] en contraignant les coordonnées d’un point fixe [202], soit en utilisant une sélection de la structure très contrainte basée sur une bibliothèque de formes Ansatz [174, 176, 74]. Mais, aucun modèle global 3D n’avait pu encore être directement obtenu jusqu’au modèle présenté ici. À noter que ce contexte difficile est encore compliqué ici par l’utilisation d’une dynamique en régime de non cohérence de phase.

De manière inattendue, et malgré sa faible observabilité et sa structure en pointe, un modèle polynomial de degré  $q = 5$  comportant 30 termes a pu être obtenu : le portrait de phase et l’application de premier retour correspondant sont présentés en figures 3.4c et 3.4d. Le comportement

chaotique du modèle global est confirmé par l'application de premier retour (Fig. 3.4d). Trois branches sont obtenues d'emblée, signifiant qu'un régime en non cohérence de phase est directement obtenu, sans toutefois que le développement complet de la dynamique originale n'ait pu être complètement capturé (la quatrième branche manque et la troisième est partiellement tronquée). Ces caractéristiques se retrouvent dans les matrices de transition (voir [16]). Le développement de la dynamique chaotique a pu être simplement obtenu par l'ajustement manuel d'un des paramètres (Fig. 3.4e). La matrice de transition a ainsi pu montrer un accord complet avec les séquences de symboles de longueur 2 [16]. Certaines imperfections restent : elles peuvent résulter du contexte particulièrement difficile. C'est donc un résultat très convaincant dans la mesure où il n'existait pas auparavant de modèle 3D obtenu à partir de cette variable particulièrement difficile.

### 3.2.3 Validité des invariants nonlinéaires

Nous venons de montrer que des modèles globaux peuvent être obtenus pour chacune des variables du système de Rössler et que ces modèles vérifient les propriétés topologiques du système original, autrement dit, que l'invariance topologique est conservée. La qualité des modèles a également pu être constatée en termes de séquences de symbole pouvant aller jusqu'à trois symboles pour  $y$ , deux pour  $x$  et  $z$ . Dans la présente section, nous allons chercher à vérifier si les invariants dynamiques et géométriques sont également conservés par le modèle global. Nous utiliserons à cet effet deux quantités : (1) les exposants de Lyapunov globaux  $\lambda_i$  [298] dont l'estimation est assez robuste lorsque l'on dispose des équations de la dynamique, et relativement faciles à estimer partant d'équations polynômiales ; et (2) la dimension de Kaplan-Yorke  $D_{KY}$  [168] qui se déduit directement des exposants de Lyapunov (permettant ainsi de garantir la cohérence méthodologique).

Les exposants de Lyapunov globaux sont des invariants dynamiques qui décrivent l'amplification de petites différences initiales dans les systèmes nonlinéaires (cf. 2.4.1). Leur estimation est souvent calculée pour caractériser les dynamiques chaotiques [298]. L'approche utilisée dans le présent travail [147] est basée sur une réorthonormalisation itérative de la matrice jacobienne, selon une procédure de Gram-Schmidt, mais en forçant l'une des directions à suivre la direction du flot. La dimension de Kaplan-Yorke est ensuite directement estimée à partir des exposants de Lyapunov en utilisant la formule (2.8) déjà présentée. Pour analyser la conservation de cette propriété, les exposants de Lyapunov  $\lambda_i$  et la dimension de Kaplan-Yorke, estimés (1) à partir du système original de Rössler, (2) à partir du système canonique induit par la variable  $y$ , et (3) à partir des trois meilleurs modèles obtenus par approche globale pour chacune des variables  $x$ ,  $y$  et  $z$ , ont été comparés (cf. Figs. 3.3, 3.2 et 3.4, la formulation analytique des modèles est donnée en [16]).

TABLE 3.1 – pseudo-période  $T_0$ , exposants de Lyapunov  $\lambda_i$  [147] et dimension de Kaplan-Yorke  $D_{KY}$  [168] estimés pour le système original de Rössler [254], le modèle canonique (3.5) induit par la variable  $y$ , et pour les trois modèles globaux respectivement obtenus des variables  $x$ ,  $y$  et  $z$  [16].

Sys	$T_0$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$d_{KY}$	err.
Rössler	6.34	+0.142	+0.000	-2.816	2.050	
cRös- $y$	"	+0.160	+0.001	-2.867	2.056	$6.10^{-3}$
GRös- $x$	"	+0.569	+0.008	-12.07	2.047	$3.10^{-3}$
GRös- $y$	"	+0.955	+0.006	-17.08	2.055	$5.10^{-3}$
GRös- $z$	"	+0.758	+0.067	-9.716	2.078	$3.10^{-2}$

Les modèles globaux utilisés pour la comparaison ayant été obtenus à partir d'un système original en régime de non-cohérence de phase, les analyses ont été effectuées suivant cette même paramétrisation ( $a=0.52$ ,  $b=2$ ,  $c=4$ ). Les résultats sont synthétisés en Table 3.1. Les exposants de Lyapunov ont également été estimés pour la forme canonique analytique induite par la variable  $y$  dont la formulation est donnée en Eq. (3.5). Les exposants de Lyapunov estimés pour le système original de Rössler et pour la forme canonique dérivée de la variable  $y$  sont très proches (erreur  $\leq$

$5.10^{-2}$ ). Les exposants de Lyapunov sont donc bien conservés par la transformation de coordonnées  $\phi : \mathbb{R}^3(x, y, z) \rightarrow \mathbb{R}^3(y, \dot{y}, \ddot{y})$ , résultant du difféomorphisme existant entre les deux formulations [191]. Pour voir l'influence du degré d'observabilité des variables [194], les meilleurs modèles globaux obtenus à partir des variables  $x$ ,  $y$  et  $z$  (GRös- $x$ , GRös- $y$  et GRös- $z$ , respectivement) ont tous les trois été analysés. Leur expression est fournie en [16]. Pour les modèles globaux, les exposants de Lyapunov diffèrent ostensiblement de ceux du système original (estimations fournies en Tableau 3.1). Seuls leurs signes sont conservés. La détection d'un premier exposant de Lyapunov pour un modèle global reste donc un argument fort de la présence de chaos mais les valeurs des exposants n'ont individuellement aucune signification.

Les dimensions de Kaplan-Yorke sont par contre très clairement conservées, dans tous les cas. Les résultats montrent en effet clairement la grande fiabilité de la dimension géométrique déduite des modèles globaux. En effet, la dimension est conservée avec une erreur inférieure à  $6.10^{-3}$  pour les modèles tirés de  $x$  et  $y$  et inférieure à  $3.10^{-2}$  pour le modèle tiré de  $z$ . La dimension de Kaplan-Yorke estimée à partir du modèle global capturé à partir d'une série temporelle unique fournit donc une estimation fiable de la dimension de l'attracteur original. Ce résultat surprenant apparaît d'autant plus robuste qu'il est également vérifié pour la variable  $z$ , caractérisée par un faible degré d'observabilité, contexte où la modélisation globale est reconnue particulièrement difficile [176, 194, 3]. Il apparaît donc que, même en contexte d'observabilité limitée, la dimension de Kaplan-Yorke reste un élément robuste pour caractériser la dynamique d'origine sous-jacente aux données.

### 3.3 L'électrolyse du Cuivre dans l'acide phosphorique

#### 3.3.1 Données expérimentales

De nombreux cas de comportements chaotiques ont été identifiés dans les réactions chimiques et les électrolyses. Le cas de l'électrolyse du cuivre Cu dans de l'acide phosphorique ( $\text{H}_3\text{PO}_4$ ) est particulièrement intéressant ici dans la mesure, où, des expériences soigneusement menées dans les années 1990 ont déjà permis d'obtenir un modèle global, dont la validité a pu être vérifiée par approche topologique [186]. Les séries temporelles utilisées ici proviennent de la même expérience. Cette expérience a été conçue et étudiée dans le groupe de John Hudson à l'Université de Virginie [71]. Le dispositif expérimental consiste en un cylindre de cuivre (de 8.26 mm de diamètre), inséré à l'intérieur d'un tube en téflon (de 20 mm de diamètre) et tournant à une vitesse modérée de 4400 tours par minute dans une solution d'acide phosphorique de 85,7% (en masse); un bain d'eau étant utilisé pour maintenir la température à  $20^\circ\text{C}$ . La valeur moyenne de la vitesse de rotation se justifie d'une part par la nécessité de faciliter le contact entre les réactifs tout en évitant les turbulences [125]. L'évolution temporelle du courant de dissolution  $I(t)$  est mesurée par rapport à une électrode de référence, séparée de la solution par un tube capillaire. L'enregistrement résultant est caractérisé par la large amplitude des oscillations de  $\pm 15$  mA (voir fig. 3.5) dont le portrait de phase est chaotique comme le montre l'application de premier retour correspondante Fig. 3.6b.

#### 3.3.2 Modélisation globale

Des modèles tridimensionnels avaient pu être obtenus de ce même jeu de données par approche globale [186, 75]. La fonction du modèle issu de [186] était de degré 5 et comportait 52 termes polynômiaux. L'objet de cette revisite est de vérifier les capacités de nos outils, dans un cas réel, à atteindre un modèle proche.

L'approche globale nous a permis d'obtenir un modèle de 21 termes de degré  $q = 4$  (non illustré ici, cf. [3]). Le portrait de phase de ce modèle était caractérisé par un trou central plus large pour le modèle et présentant un léger décalage, conduisant à un faible développement de la première branche de l'application de premier retour. Il s'est avéré impossible de développer de manière significative la dynamique en réglant manuellement le paramétrage.

Un autre modèle – constitué des mêmes 21 termes polynômiaux – a pu être obtenu en considérant une série temporelle décalée et de longueur plus grande (cf. Fig. 3.5a). Ce second modèle présente

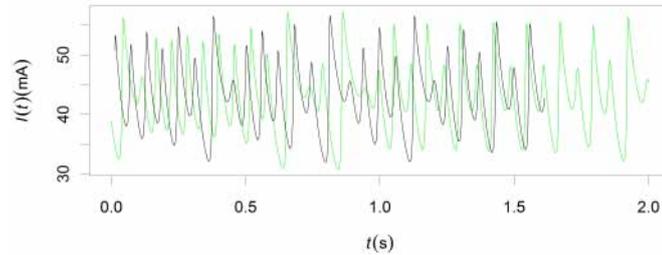


FIGURE 3.5 – Fenêtre sélectionnée d'un enregistrement d'intensité de courant  $I(t)$  mesuré lors d'une expérimentation d'électrolyse du cuivre dans de l'acide phosphorique obtenu par le groupe de John Hudson [71]. Ces données sont mises à disposition sur le site Web d'*atomosyd* (<http://www.atomosyd.net/>).

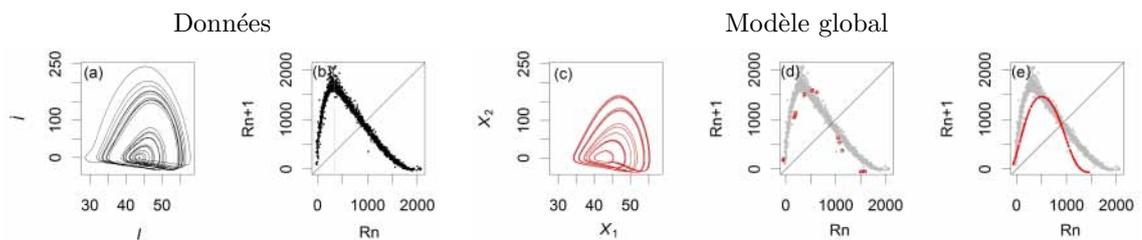


FIGURE 3.6 – Portraits de phase (colonne de gauche) et applications de premier retour (colonnes centrale et de droite) issus l'intensité de courant  $I(t)$  mesurée à partir de l'expérience présentée en paragraphe 3.3 et des deux modèles globaux de 21 termes obtenus de ce jeu de données en utilisant une deux fenêtres de tailles différentes (cf. Fig. 3.5) : le premier est issu d'une fenêtre courte (deuxième ligne), le second d'une fenêtre plus longue (troisième ligne). Les applications de premiers retour issus des modèles obtenus directement par l'algorithme GloMo sont tracées en colonne centrale. Un modèle supplémentaire obtenu après ajustement de paramètre est tracés en colonne de droite.

un cycle limite (3.6c), très proche d'un cycle de période 5 comme le montre l'application de premier retour (3.6d). Bien que moins chaotique dans son paramétrage initial, le paramétrage de ce second modèle a pu être ajusté efficacement jusqu'à conduire à un chaos bien développé proche de celui de la dynamique originale (Fig. 3.6e). L'analyse des séquences de symboles a montré un très bon accord avec les séquences d'origine jusqu'à des séquences de six symboles de longueur.

On notera que, contrairement aux cas Rössler- $x$  ou Rössler- $y$ , et comme pour Rössler- $z$ , le modèle s'est avéré clairement plus difficile à trouver pour ce cas d'application, et que seule une solution polynomiale de degré relativement élevé ( $q = 4$ ) a pu être obtenue. En outre, comme pour Rössler- $z$ , une sensibilité plus grande au choix de fenêtre de la série chronologique utilisée pour identifier le modèle a été constatée. Une telle sensibilité à la taille de la série chronologique est une caractéristique usuelle de la modélisation globale. Cette sensibilité résulte très vraisemblablement du processus d'identification qui constitue une tâche difficile en contexte chaotique. En effet, plus de nombre de données disponibles est grand pour l'identification du paramétrage, plus on pourrait s'attendre à un paramétrage précis. Malheureusement, davantage de données conduisent également à une formes plus complexes de la fonction objectif [220]. Dans le cas d'un comportement chaotique, la complexité de la forme de la fonction objectif va s'approcher d'une structure fractale, situation que les approches d'identification communes ne sont pas en mesure de résoudre. Malgré la difficulté à obtenir un modèle (qui rappelle le cas de la variable  $z$  de Rössler-76), une validation beaucoup

plus approfondie a pu être effectuée permettant d’aller jusqu’à des séquences d’une longueur de six symboles. Ce contraste s’explique par le vocabulaire limité ici à deux symboles (0 et 1) que pour le régime de non cohérence de phases (qui présentait quatre symboles : 0, 1, 2 et 3, cf. § 3.2). Le modèle est difficile à obtenir ici, mais une fois obtenu, le régime dynamique peut facilement être retrouvé par ajustement des paramètres.

## 3.4 Dynamiques associées et agrégées

### 3.4.1 Problématique

Les systèmes réels présentent toujours une extension spatiale dont il est souvent difficile de s’affranchir lorsqu’on cherche à comprendre un comportement dans sa globalité. Les observations par télédétection spatiale du couvert terrestre correspondent ainsi souvent à des zones spatialement étendues. Il s’agit d’une caractéristique tout à fait commune en ce qui concerne l’imagerie satellite pour le suivi de l’agriculture ou de la végétation naturelle. Dans de tels contextes, une dynamique moyenne relative à la résolution des observations peut être attendue [65, 6]. Les modèles utilisés pour représenter et comprendre la dynamique des surfaces observables depuis l’espace sont souvent basés sur une formulation semi-empirique, utilisant une connaissance *a priori* ou des hypothèses nécessairement incomplètes ou partiellement adaptées. Partant directement de séries temporelles observées et se basant sur une formulation très générique, l’objet de l’approche globale revient – à l’inverse – à ne pas faire d’hypothèse forte sur notre connaissance du milieu étudié et à la formulation des équations de sa dynamique, et à laisser les approximations découler du signal observé. Son objet est donc de se rapprocher autant que possible de la dynamique véritable du milieu étudié et à n’effectuer d’approximation que de manière empirique. Cet avantage de principe a un coût : d’une part, l’obtention pratique d’un modèle n’est jamais garantie d’avance. D’autre part, le modèle obtenu, bien que directement issu des données et s’y ajustant donc nécessairement pour une grande part, n’en reste pas moins une approximation, que ce soit en terme de dimension, de formulation et finalement en terme de dynamique résultante. Quoi qu’il en soit, l’obtention d’un modèle, fût-il imparfait, nous fournit certaines informations dont l’intérêt pourra aller de la simple détection d’une composante déterministe jusqu’à une validation complète (structure topologique / caractéristiques géométriques et dynamiques), en allant jusqu’à l’identification parfaite du diagramme de bifurcations.

L’observation du couvert végétal par télédétection spatiale nous fournit des exemples intéressants sur lesquels nous appuyer pour effectuer une telle étude. Plusieurs cas peuvent être distingués :

- Lorsque la couverture de la végétation est homogène, l’état dynamique est identique partout et à tout moment, quelle que soit l’échelle de résolution spatiale considérée, c’est-à-dire à la résolution utilisée, et en deçà. La dynamique agrégée est donc identique à toute échelle et les comportements peuvent être considérés comme étant en parfaite synchronisation. Ce cas nous ramène à un problème ponctuel et ne nécessite pas une étude spécifique ;
- Lorsque la dynamique est similaire partout (même type de comportement), et en synchronisation de phase mais sans être homogène. Ce type de cas peut se rencontrer dans les régions où la végétation naturelle (ou les cultures) présentent une forte saisonnalité, que celle-ci soit contrôlée par les conditions climatiques comme c’est le cas dans les régions Sahéliennes – où la saisonnalité résulte des moussons africaines [9, 162, 7] – ou pour les régions semi-arides comme le Maroc [3] où les pratiques agraires sont synchronisées sur la saisonnalité climatique. Ce dernier exemple est choisi pour illustrer cette synchronisation de phase à très grande échelle (Fig. 3.7a). Le signal agrégé révèle en effet une très faible dispersion du signal pendant l’été, lorsque le signal NDVI est minimum alors qu’une dispersion beaucoup plus forte est observée d’Octobre à Juin (ainsi qu’une importante variabilité interannuelle).
- Restent les comportements asynchrones. Ceux-ci sont plus particulièrement observés dans les régions où l’agriculture peut être librement contrôlée par irrigation, permettant une désynchronisation de la dynamique agraire sur la dynamique climatique.

Un exemple pris dans le Sud de la France est présenté Fig. 3.7b. La zone considérée dans cet exemple comprend deux parcelles sur lesquelles cultures d'été et d'hiver alternent de façon indépendante. Dans cet exemple, les deux parcelles ne présentent un comportement synchronisé qu'en 2007, comme illustré par la très faible dispersion du signal. Au contraire, une dispersion très élevée est observée en 2006, 2009 et 2010.

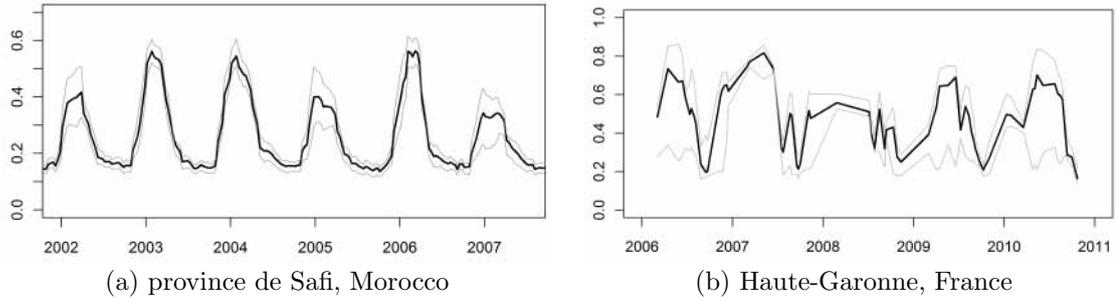


FIGURE 3.7 – Séries temporelles de l'indice de végétation NDVI observées depuis l'espace : (a) agrégées sur la province de Safi (Maroc) en faisant la moyenne spatialisée des mesures AVHRR (le produit développé par le GIMMS [285] a été utilisé à cette fin), et (b) agrégées à 320 m de résolution sur des parcelles situées à la latitude  $43^{\circ}31'55''$  de latitude et  $1^{\circ}10'4''$  en Haute-Garonne, dans le sud de la France (le produit d'origine à 8 m de résolution issue de FORMOSAT-2, une ortho-rectification et une correction des perturbations nuageuses ont été appliquées [150]).

D'un point de vue pratique, différentes conditions de travail peuvent être rencontrées pour observer de tels systèmes. Parfois un grand nombre de séries chronologiques spatialement distribuées (mais éventuellement très courtes). D'autres fois, au contraire, une série temporelle unique correspondant à une échelle donnée et agrégeant toutes les dynamiques de plus petites échelles. Comme nous le verrons au chapitre 4, il est effectivement possible d'obtenir des résultats partant de séries chronologiques agrégées à partir d'images multi-temporelles observées par satellite [3, 4]. L'un des objectifs de la présente étude théorique est de déterminer dans quelles conditions un modèle global fiable peut être obtenu à partir de séries agrégées et associées.

Pour expérimenter de telles situations, des cas simples ont été considérés présentant à la fois une composante déterministe forte et une prévisibilité limitée. Un ensemble d'oscillateurs chaotiques a donc été considéré, répartis dans l'espace et pouvant présenter de petites variations de paramétrage, avec une synchronisation de phase assurée en couplant les oscillateurs individuellement à un oscillateur externe. Les comportements indépendants sont obtenus en relaxant ce couplage.

### 3.4.2 Le système étudié

Le système tridimensionnel de Rössler [254] dépend de trois paramètres que nous choisissons ici tels que  $(a, b, c) = (0.432, 2, 4)$  afin d'obtenir une dynamique chaotique avec un régime en cohérence de phase. Ce système, ci-après noté  $S$ , sera considéré comme notre système de référence, et ne sera pas utilisé directement pour produire les données mais seulement comme système synchronisateur. D'autres systèmes de Rössler désigné par  $S_k$ , seront considérés dans cette étude. Ces systèmes pourront soit évoluer indépendamment, soit être synchronisés sur le système de référence  $S$ . Les systèmes de Rössler  $S_k$  sont définis comme

$$\begin{cases} \dot{x}_k = -y_k - z_k \\ \dot{y}_k = x_k + a_k y_k + \alpha_k (y_k - y) \\ \dot{z}_k = b + z_k (x_k - c) \end{cases} \quad (3.4)$$

où le paramètre  $a_k$  peut varier d'un système à l'autre, tandis que  $b$  et  $c$  restent identiques pour tous les systèmes.  $\alpha_k$  est le paramètre de couplage assurant un couplage unidirectionnel du système  $S$

vers le système  $S_k$ . Le paramètre  $\alpha_k$  peut être fixé à zéro afin de laisser le système évoluer librement : le système est alors totalement indépendant de  $S$  et noté par  $S_k$ . Lorsque  $\alpha_k = 0.1$ , il est possible d'obtenir une synchronisation de phase entre le système  $S_k$  et le système de référence  $S$ . Dans ce cas, le système en synchronisation de phase est noté  $S_k^*$ . Pris indépendamment, chaque système individuel peut être réécrit sous forme canonique. Partant de la variable  $y_k$ , la fonction  $F$  correspondant à la formulation canonique (Eq. 2.4) s'écrit :

$$\begin{aligned}\dot{Z}_k &= F(X_k, Y_k, Z_k) \\ &= -b + (a_k - c)Z_k - cX_k + (a_k c - 1)Y_k \\ &\quad - a_k X_k^2 - a_k Y_k^2 - a_k X_k Z_k + Y_k Z_k + (a_k^2 + 1)X_k Y_k\end{aligned}\quad (3.5)$$

avec  $X_k = y_k$ ,  $Y_k = \dot{y}_k$  et  $Z_k = \ddot{y}_k$ . Comme vu précédemment, la variable  $y$  du système de Rössler-76 est la seule des trois variables à induire une fonction  $F$  polynômiale, les autres variables induisant une fonction  $F$  rationnelle [138]. En conséquence, le plongement différentiel induit par  $y$  est le seul à pouvoir garantir une équivalence difféomorphique globale du portrait de phase avec le modèle original (Eq. 3.1) [194].

Comme déjà évoqué dans le contexte de séries non agrégées (§3.2), les plongements différentiels induits par les variables  $x$  et  $z$  ne présentent une équivalence difféomorphique que localement [194], ce qui se traduit par une baisse d'observabilité et augmente les difficultés à obtenir un modèle global à partir des variable  $x$  ou  $z$  [191]. Le choix de la variable  $y$  du système de Rössler permet donc de tester, dans un premier temps, seulement les effets d'agrégation et d'association, et non pas les effets de l'absence d'observabilité induite par la variable mesurée.

### 3.4.3 génération de données synthétiques

Deux jeux de données ont été produits, l'un composé d'oscillateurs indépendants, l'autre d'oscillateurs couplés à un même système de référence. Deux types d'analyse ont été considérés pour chacun de ces deux jeux de données, la première visant à considérer plusieurs séries temporelles simultanément (analyse associée), l'autre visant à considérer la dynamique agrégée. Le premier type d'analyse dit analyse-associée se fait en concaténant les séries temporelles les unes après les autres (en s'affranchissant – soigneusement – de tout effet de bord entre les séries). Le second type – dit analyse-agrégée – se fait à partir d'une série agrégée obtenue en moyennant spatialement les mesures.

Les analyses ont d'abord été effectuées en considérant les oscillateurs par groupe de deux avant de considérer des jeux de données plus conséquents. Le système de référence  $S$  est tel que la différence entre  $a$  et  $a_k$  peut être considérée comme très petite, soit

$$\delta a = \left| \frac{a_k - a}{a} \right| \ll 1. \quad (3.6)$$

Cela se justifie par le fait que des comportements dynamiques distribués spatialement (représentés par de petits oscillateurs) ne présentent en conditions réelles que de petites différences de régime (que l'on traduira ici par de petites variations du paramétrage).

Grosso modo, les paramètres  $a_i$  et  $a_j$  sont choisis dans la gamme  $]0, 126; 0, 43295[$  correspondant à un régime chaotique de cohérence de phase. Des exemples d'application de premier retour sont présentés en Figure 3.8. Des branches monotones caractéristiques d'une application unimodale lisse sont identifiées. Les systèmes indépendants produisent des applications unidimensionnelles alors que les systèmes couplés à un système externe  $S_k^*$  présentent des applications de premier retour très épaisses (fig. 3.8d à 3.8f). Cette caractéristique résulte du couplage avec le système  $S$  de référence ( $a = 0, 423$ ) et du paramètre de couplage  $\delta a$ . Néanmoins, les deux branches monotones restent tout à fait identifiables.

La modélisation globale est ensuite appliquée aux séries temporelles associées et agrégées, obtenues à partir des données issues de ces systèmes. Les portraits croisés présentent des caractéristiques très différentes selon que les systèmes étudiés soient indépendants ou synchronisés au système de référence (Figs. 3.9a, 3.9b). Les systèmes en synchronisation de phase sont caractérisés par des trajectoires dans le plan  $X_i^*-X_j^*$  développées au voisinage de la première bisectrice.

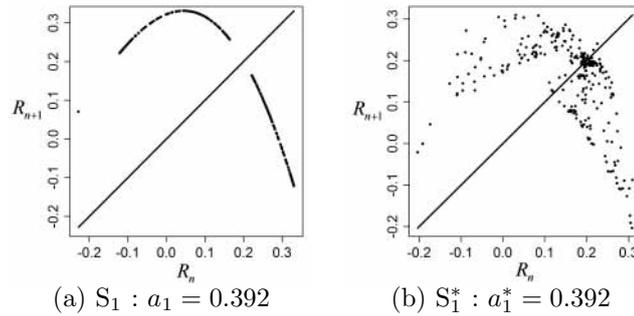


FIGURE 3.8 – Application de premier retour pour une section de Poincaré produites par un modèle indépendants  $S_k$  (a), et par les systèmes  $S_k^*$  en synchronisation de phase avec le système de Rössler de référence (b).

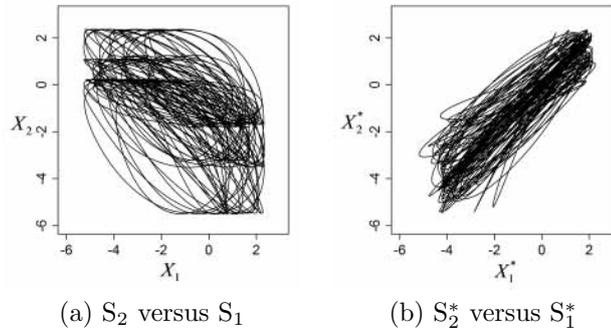


FIGURE 3.9 – Portraits croisés des variables  $y$  des systèmes  $S_i$  indépendents (a) ; et des systèmes  $S_j^*$  synchronisés (b).

Les série associées sont obtenues après sélection de fenêtres de même taille (afin de leur conférer ici le même poids dans la présente analyse, mais des séries de tailles différentes pourraient tout à fait être préférées dans d'autres contextes) issues de deux systèmes (ou plus), et dont les dérivées respectives sont calculées une à une numériquement [292]. Afin d'éviter tout effet de bord, les extrémités des série chronologique doivent être exclues et seuls les vecteurs  $\{X, Y, Z, \dots, \dot{W}\}$ , calculés en utilisant des points obtenus de la même série, doivent être conservés : une séries chronologiques de dimension  $(m + 1)$  est alors recomposée, avec  $\dot{W}$  la  $m^{eme}$  dérivée de  $X$ . Il peut être utile de préciser pourquoi il est possible d'effectuer l'analyse d'un ensemble de séries concaténées. En se plaçant dans l'espace des phases pour retrouver les comportements dynamiques, la modélisation globale se ramène à la reconstruction d'un champ de vecteurs. Ce champs de vecteurs ne doit pas nécessairement être constitué de vecteurs successivement collectés. Cette propriété est essentielle puisqu'elle va permettre à l'approche globale de modéliser des dynamiques pouvant présenter des trajectoires aux comportements très structurés dans l'espace des phases tout en restant très sensibles aux conditions initiales (divergence des trajectoires très visible d'un point de vue signal temporel). C'est également cette propriété qui permet de limiter la sensibilité de l'approche aux perturbations multiplicatives en ramenant l'effet dynamique à long terme à une perturbation locale (statique) dans l'espace des phases. Une autre conséquence de cette propriété est de rendre la modélisation globale insensible à la phase, ce qui va nous permettre d'analyser des séries temporelles pouvant présenter des lacunes dans les données. Cette insensibilité de phase nous permet de mettre des séries temporelles bout à bout pour les analyser en concaténation parce qu'elle rend les analyses associées insensibles aux comportements asynchrones (cas des oscillateurs indépendents). Bien que des vecteurs consécutifs ne soient pas nécessaires pour appliquer l'approche de modélisation glo-

bale, le calcul des dérivées de signaux à partir des données bruitées nécessite néanmoins de disposer de fenêtres temporelles suffisamment longues pour l'estimation des dérivées successives. L'analyse associée consiste donc à analyser un ensemble de séries temporelles issues de zones de mesures spatiales ou temporelles différentes, et présentant, *a priori*, des dynamiques similaires, leur phase étant sans importance. L'objet d'une telle analyse est d'obtenir un modèle de la dynamique commune à plusieurs séries temporelles. Les séries temporelles associées ainsi obtenues seront présentées et analysées au paragraphe 3.4.5.

Les séries agrégées peuvent être obtenues à partir de fenêtres temporelles de taille identique par le calcul d'une simple série moyenne à partir de plusieurs séries choisies, ce qui revient, dans le cadre de séries relatives à des points de mesures spatialement distribués, à effectuer des moyennes spatialisées à chaque pas de temps. Les dérivés successives sont ensuite calculées à partir du signal ainsi agrégé. Des séries agrégées de systèmes non synchronisés et synchronisés présentent des comportements tout à fait différents, le second préservant la présence d'une phase commune (Fig. 3.10). Bien que les deux types de signaux soient dominés par un cycle principal résultant du régime en cohérence de phase, la variabilité en terme d'amplitude du cas synchronisé est plus lente et régulière qu'elle ne l'est dans le cas non synchronisé. En effet, dans ce dernier cas, le manque de synchronisation induit des déphasages variables et temporaires qui sont responsables des grandes fluctuations d'amplitude. L'analyse des séries agrégées est présentée aux paragraphes 3.4.5 et 3.4.5.

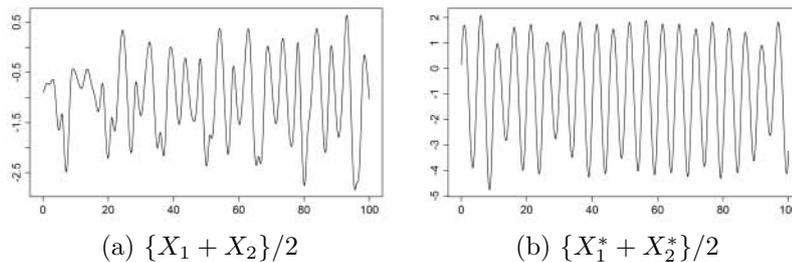


FIGURE 3.10 – Séries temporelles agrégées par deux dans le cas non synchronisé (à gauche) et synchronisé (à droite).

### 3.4.4 Reformulation analytique

Pour essayer de comprendre l'effet de l'agrégation d'un point de vue analytique, une reformulation est proposée ici en se basant sur le cas de deux, puis de  $N$  variables. Les cas synchronisés et non synchronisés doivent être distingués, comme le suggèrent les signaux correspondants à ces deux contextes d'agrégation (cf. Fig. 3.10).

#### Analyse agrégée de dynamiques synchronisées

Le contexte de synchronisation de phase correspond à une relation approximativement linéaire entre les variables de deux systèmes (ex. Fig. 3.9b). La variable d'un système de  $S_j^*$  peut être alors approchée en fonction de celle d'un autre système de  $S_i^*$  telle que

$$X_j^*(t) \simeq \beta(t) X_i^*(t) \quad (3.7)$$

avec  $\langle \beta \rangle_i = 1$  et  $\langle \beta \rangle \approx 0$ . Puisque  $\delta a \ll 1$ , on peut approcher  $a_k$  par  $a$ , et le système résultant de l'agrégation de  $S_i^*$  et  $S_j^*$  peut être réécrit comme

$$\begin{cases} \dot{X} = Y \\ \dot{Y} = Z \\ \dot{Z} = -2b - cX + (ac - 1)Y + (a - c)Z \\ \quad - (1 - \gamma)[aX^2 + aY^2 \\ \quad \quad - (a^2 + 1)XY + aXZ - YZ] \end{cases} \quad (3.8)$$

où  $X = X_i^* + X_j^* = y_i^* + y_j^*$  et

$$\gamma = \frac{2\beta}{(1 + \beta)^2} \quad (3.9)$$

(les détails du calcul sont fournis en Annexe B.1.1). La fonction  $F$  de ce modèle donc

$$\begin{aligned} F_{ij}^* = & \tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2 X + \tilde{\mu}_3 Y + \tilde{\mu}_4 Z + \tilde{\mu}_5 X^2 \\ & + \tilde{\mu}_6 XY + \tilde{\mu}_7 XZ + \tilde{\mu}_8 Y^2 + \tilde{\mu}_9 YZ ; \end{aligned} \quad (3.10)$$

elle présente donc la même structure polynômiale que le modèle canonique original (cf. Eq. 3.5). Seuls les coefficients  $\{\tilde{\mu}_i\}$  diffèrent de ceux du système de Rössler dans sa formulation canonique (Eq. 3.5). Le système ainsi agrégé (Eq. 3.8) peut être réécrit comme

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = 2b + z[(1 - \gamma)x - c], \end{cases} \quad (3.11)$$

ce qui montre que le système original de Rössler est une bonne approximation de l'agrégation de deux systèmes de Rössler agrégés, en ce qui concerne la variable  $y$ . Ce résultat est facilement généralisable à  $N$  variables (Eq. B.17) et la démonstration en est donnée en Annexe B.1.2. Le fait qu'une agrégation de systèmes de Rössler-76 synchronisés puisse être approchée par un système de Rössler-76 montre explicitement la possibilité d'une invariance d'échelle. L'agrégation conduit toutefois à un paramétrage différent. Pour cette raison, seule l'invariance des propriétés topologiques peut être attendue de façon robuste.

En s'appuyant sur un modèle global très concis, obtenu à partir de la variable  $z$  du système de Rössler, nous avons pu vérifier que l'agrégation de systèmes canoniques de type Rössler- $z$  pouvaient également être approchée par un système canonique Rössler- $z$  (cf. Annexe B.2). Analytiquement, une analyse détaillée montre que ce résultat est indépendant du degré du polynôme, du nombre de systèmes agrégés et de la dimension du système. Le comportement d'invariance (approchée) par changement d'échelle des systèmes chaotiques en synchronisation de phase ne se limite donc pas au système de Rössler mais est – au contraire – beaucoup plus générale.

### Analyse agrégée de dynamiques non-synchronisées

Dans le cas de systèmes indépendants, la variable agrégée  $X = y_i + y_j$  correspond à l'agrégation de dynamiques indépendantes qui ne peuvent donc pas être produites par un système à trois dimensions. Pour deux systèmes, cette situation peut être présentée comme suit.

Soit :

$$\begin{cases} \tilde{x} = x_1 + x_2 \\ \tilde{y} = y_1 + y_2 \\ \tilde{z} = z_1 + z_2 \end{cases} \quad (3.12)$$

les variables agrégées, et

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 \\ \dot{\tilde{y}} = \dot{y}_1 + \dot{y}_2 \\ \dot{\tilde{z}} = \dot{z}_1 + \dot{z}_2 \end{cases} \quad (3.13)$$

leurs dérivées correspondantes. Le système qui en résulte est donc

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = -y_1 - z_1 - y_2 - z_2 \\ \dot{\tilde{y}} = x_1 + a_1 y_1 + x_2 + a_2 y_2 \\ \dot{\tilde{z}} = b + z_1(x_1 - c) + b + z_2(x_2 - c); \end{cases} \quad (3.14)$$

il peut être simplifié en

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = -\tilde{y} - \tilde{z} \\ \dot{\tilde{y}} = \tilde{x} + a_1 \tilde{y} + (a_2 - a_1)y_2 \\ \dot{\tilde{z}} = 2b + \tilde{z}(\tilde{x} - c) - (x_2 z_1 + x_1 z_2). \end{cases} \quad (3.15)$$

Il n'est pas possible de réécrire le système agrégé en tant que système tridimensionnel car il est impossible d'exprimer les variables  $x_2$  et  $z_2$  en fonction de  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Le système qui en résulte est donc nécessairement de dimension six. On notera toutefois qu'un tel système étant composé de systèmes indépendants, il ne peut pas non plus être reformulé comme un système canonique (Eq. 2.4) de dimension six. On notera encore que, partant du système intermédiaire (B.21), la variable mesurée et ses deux dérivés successives sont données par

$$\begin{cases} \tilde{X}' = \tilde{y} \\ \tilde{Y}' = \dot{\tilde{y}} = \tilde{x} + a_1 \tilde{y} + (a_2 - a_1)y_2 \\ \tilde{Z}' = \ddot{\tilde{y}} = a_1 \tilde{x} + (a_1^2 - 1)\tilde{y} - \tilde{z} + a_1(a_2 - a_1)x_2 + (a_2^2 - a_1^2)y_2, \end{cases} \quad (3.16)$$

et qu'elles peuvent être vues comme les dérivés de  $y$  du système de Rössler de référence perturbé par des quantités proportionnelles au paramètre  $(a_2 - a_1)$  qui est de petite taille. Par conséquent, lorsque le système agrégé est étudiée uniquement dans un plongement différentiel en trois dimensions, la fonction estimée  $\tilde{F}$  doit potentiellement pouvoir s'approcher de la fonction  $F$ . Ce résultat peut être généralisé à  $N$  variables (cf. Annexe B.1.3).

### 3.4.5 Modélisation globale

Le fait de considérer deux types d'analyse (associée et agrégée) appliqués à des contextes synchronisés ou non à partir de jeux de données de taille variable (deux, trois, cinq ou dix séries temporelles) a conduit à un grand nombre d'analyse. Une synthèse des résultats les plus souvent rencontrés est présentée ici, les résultats qui en diffèrent significativement sont assez rares.

#### Analyse de séries associées

Malgré des différences assez marquées entre applications de premier retour obtenues pour les systèmes synchronisés et indépendants (Fig. 3.8), seules de légères différences entre les modèles globaux et les données originales sont trouvées, ce qui s'explique non seulement par l'insensibilité de l'approche aux changements de phase dans le cadre des analyses associées, mais aussi parce que les modèles 3D restent de très bonnes approximations des systèmes synchronisés. Les systèmes ne présentant que de petites différences paramétriques, les attracteurs correspondant à ces associations (Fig. 3.11, 2<sup>e</sup> colonne) sont tous assez similaires.

Les différences dans le paramétrage apparaissent plus clairement dans les applications de premier retour, marqués par de légers décalages (Fig. 3.11, 3<sup>e</sup> colonne). Les modèles obtenus à partir de séries temporelles indépendantes produisent toujours un comportement chaotique. La nature déterministe de la dynamique n'est donc pas troublée par l'analyse associée. De plus, les applications de premier retour sont assez similaires à la structure de l'application originale. Les applications produites par les modèles globaux présentent néanmoins une différence caractéristique notable : un maximum « en forme de M » – structure jamais observée à partir d'un système de Rössler. Cette forme « en M » résulte clairement du décalage observé entre les applications de premiers retour avant analyse.

Lorsque trois systèmes, ou plus, sont considérés dans l'analyse associée, la dynamique produite par le modèle global est généralement moins développée. Ceci est très visible à partir de l'application

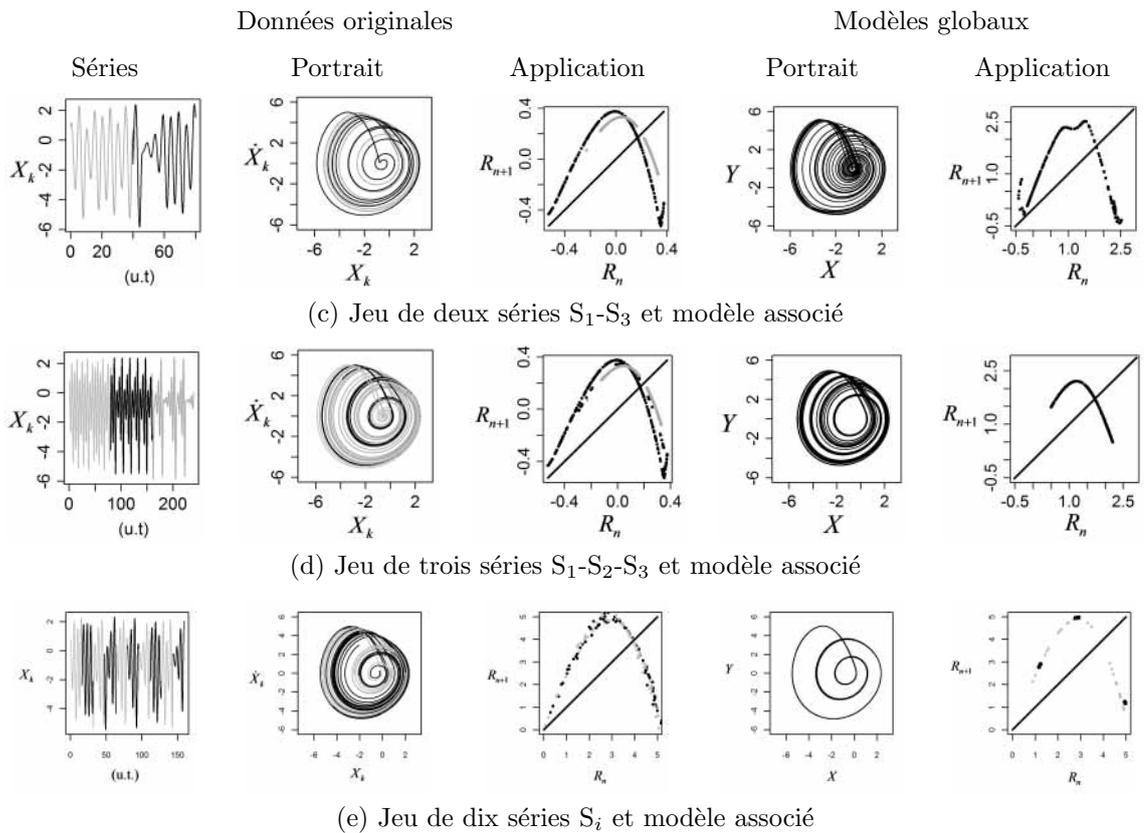


FIGURE 3.11 – Modèles globaux obtenus à partir de série temporelles analysées en association et produites par des ensembles de systèmes de Rössler indépendants. En première colonne sont présentées les séries temporelles concaténées (les différents niveaux de gris correspondent aux différents systèmes). Les portraits de phase et les applications de premier retour correspondants sont respectivement présentés dans les deuxième et troisième colonnes. Les portraits de phase et les application de premier retour produits par les modèles globaux sont tracés en quatrième et cinquième colonnes. Trois cas sont présentés relatifs à 2, 3 et 10 séries. Pour ce dernier cas, deux applications de premier retour sont présentées, le cas présentant un chaos plus développé a été obtenu en ajustant l'un des paramètres du modèle.

de premier retour Fig. 3.11b (trois systèmes) dont la taille des branches est fortement tronquée, et Fig. 3.11c (dix systèmes) où un ajustement de paramètre a du être effectué pour retrouver le comportement chaotique. Ce comportement résulte vraisemblablement d'un effet de moyenne lors de l'estimation des paramètres, et l'effet est similaire à celui d'un lissage appliqué aux données [197]. On peut donc s'attendre à ce que la dynamique produite par un modèle global obtenu à partir de nombreuses séries chronologiques associées soit généralement moins développé que celui obtenu d'une série individuelle. La capacité de l'approche globale à capturer l'invariance spatiale nécessite de disposer d'un échantillon suffisamment représentatif.

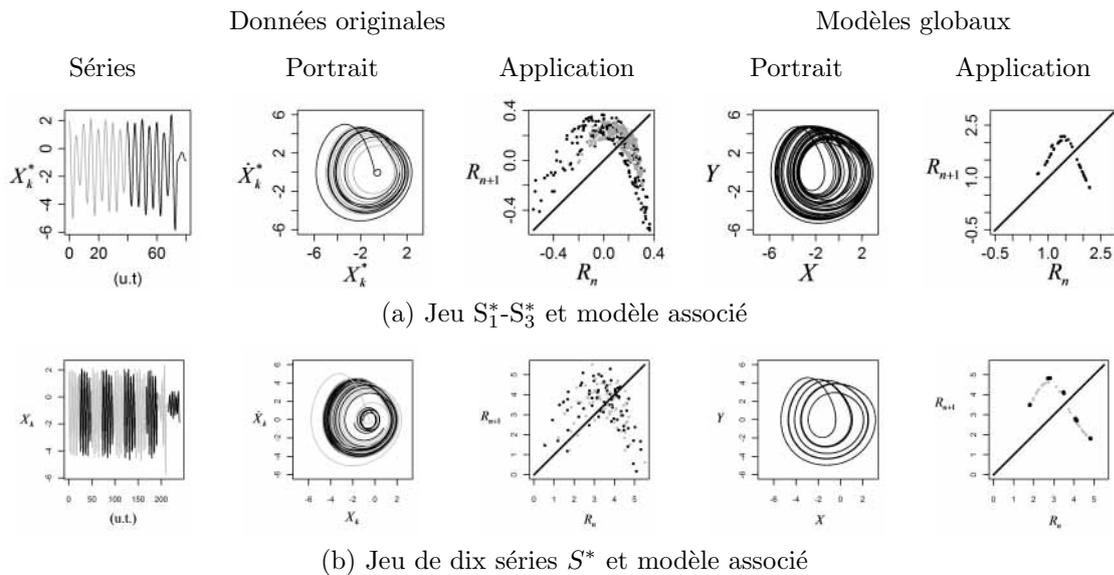


FIGURE 3.12 – Modèles globaux obtenus à partir de série temporelles analysées en association et produites par des ensembles de systèmes de Rössler en synchronisation de phase avec un système de référence. Les colonnes sont structurées comme pour la Fig. 3.11.

L'analyse associées de séries synchronisées met bien en évidence le contraste frappant entre le comportement bruité des applications originales et l'aspect lisse et unimodal de l'application du modèle global (Fig. 3.12). Les modèles obtenus dans ce cas sont également caractérisés par un moindre développement des branches. L'approche par association permet donc clairement de capturer une dynamique de type Rössler, malgré les effets de synchronisation. La forme « en M » n'est toutefois pas observée ici et tient au fait que la synchronisation tend à homogénéiser les dynamiques sur le système synchronisateur rendant même l'obtention de modèles globaux plus facile. Le potentiel de la modélisation globale à capturer l'invariance spatialisée des comportements apparaît ici clairement.

De manière plus générale, nous avons pu montrer ici que l'analyse par association n'empêchait pas nécessairement la mise en œuvre de la modélisation globale, et que son application pouvait s'avérer fructueuse dans les différents contextes considérés, avec certaines limitations spécifiques.

### Analyse de dynamiques synchronisées agrégées

L'analyse de séries agrégées a été testée sur des ensembles de deux à dix systèmes de Rössler en synchronisation de phase. Les portraits de phase et les applications de premier retour calculées à partir des résultats obtenus sont représentés en Figures 3.13. L'agrégation de signaux synchronisés tend à rapprocher le signal du cycle limite de période-1, où il est densifié (Fig. 3.13a, 3.13b et 3.13c), et ce, d'autant plus que le nombre de série agrégé est grand.

Dans tous cas, les applications de premier retour ressemblent à un nuage de points répartis le long de la ligne bissectrice. Pour autant, la nature déterministe et la variabilité cyclique de

la dynamique ne disparaissent pas véritablement puisque les modèles globaux obtenus à partir de quelques séries agrégées permettent de détecter des attracteurs chaotiques de structure très similaire à ceux produits par un système de Rössler pour les cas à 2 et 3 variables, comme le révèlent les applications de premier retour (Fig. 3.13, dernière colonne). Rappelons qu'il a été impossible d'obtenir des modèles globaux chaotiques à partir de cycle limites bruités de période 1 [197]. Des branches feuilletées sont souvent observées dans les applications de premiers retour des modèles globaux résultants (cf. Fig. 3.13a). Les applications de premier retour sont unimodales à peu près lisses, comme observé pour le système de Rössler. Plus le nombre de série augmente et plus il est difficile de détecter une dynamique déterministe. La structure n'est pas pour autant complètement perdue puisqu'on parvient souvent à extraire tout de même un cycle limite de période 2. Il n'est cependant pas toujours possible d'en tirer un régime chaotique par un réglage des paramètres.

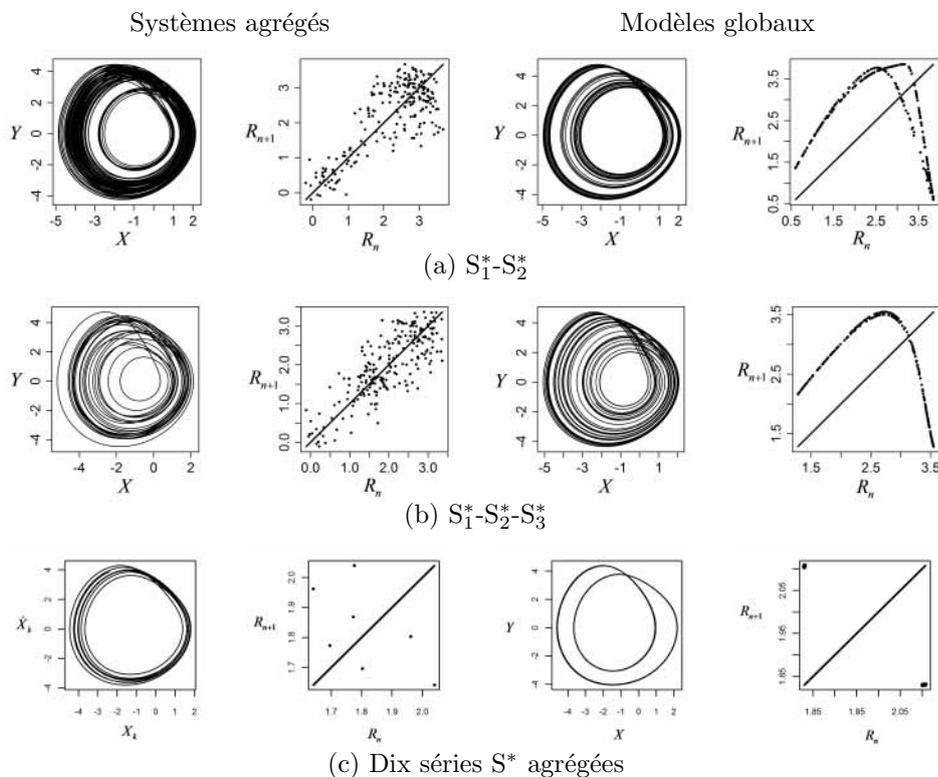


FIGURE 3.13 – Portraits de phase portraits et applications de premier retour issus des séries temporelles agrégées de systèmes en synchronisation de phase (colonne 1 et 2) et issus de modèles qui en ont été obtenus (colonnes 3 et 4).

#### Analyse de dynamiques non-synchronisées agrégées

L'analyse de séries agrégées a également été testée sur des ensembles de deux à dix séries indépendantes (Fig. 3.14). Les portraits de phase des dynamiques originales qui en résultent présentent des structures complexes (1<sup>ère</sup> colonne). Ce comportement résulte de l'incohérence de phases entre les séries temporelles agrégées, ce qui se traduit par des enroulements de trajectoires qui peuvent avoir lieu en différentes régions de l'espace des phases. Les applications de premier retour correspondantes (2<sup>nde</sup> colonne) sont toutes caractérisées par un nuage de points à partir desquelles aucune structure n'est identifiable. Il apparaît impossible de savoir par une simple inspection visuelle s'il existe un comportement déterministe sous-jacent ou non. Ceci n'est pas tellement surprenant dans la mesure où la dynamique sous-jacente est en fait de dimension  $3 \times N$  (cf. § 3.4.4), ce qui peut induire des dynamiques de complexité beaucoup plus grande. Peu

d'investigation ont été menées pour tenter d'obtenir des modèles de dimension supérieure à trois, mais l'obtention de telles solutions apparaît très peu probable dans la mesure où, dans le présent cas, la dynamique globale agrégée ne peut pas être formulée dans des dimensions supérieures à trois en raison de l'indépendance des contributions. Pour cette raison, l'obtention de modèles globaux apparaît peu probable quelle que soit la dimension considérée (cf. § 3.4.4).

Des modèles globaux ont pu être obtenus pour la plupart des séries agrégées à partir de petits ensembles de séries indépendantes (deux ou trois), confirmant ainsi la détection d'une composante déterministe sous-jacente dans les données agrégées. Les modèles obtenus sont souvent caractérisés par une application de premier retour unimodale lisse (cf. ex. 3.14a et 3.14c, 4e colonne). Les régimes chaotiques capturés sont donc vraisemblablement précédés par une cascade de doublements de période telle que celle observée dans le système de Rössler. Une configuration assez atypique a pu être observée dans l'un des cas pour lequel apparaissent une grande branche décroissante et une très petite branche croissante : les fluctuations de l'amplitude de cycle à cycle ne sont par conséquent pas très grandes (comme le révèle le portrait de phase du modèle, Fig. 3.14a, 3<sup>e</sup> colonne).

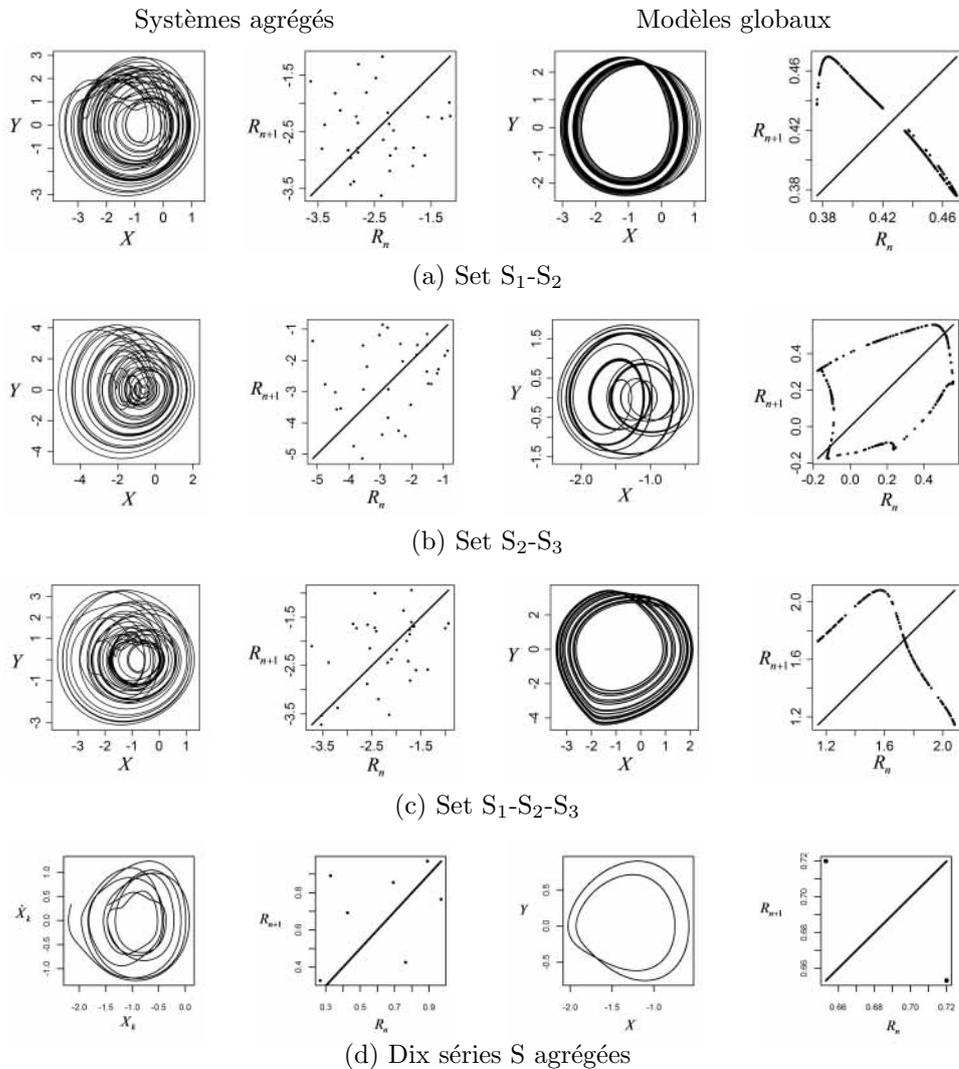


FIGURE 3.14 – Portraits de phase et applications de premier retour des séries temporelles agrégées à partir de systèmes de Rössler indépendants (colonnes 1 et 2) et produits par les modèles correspondants (colonnes 3 et 4).



Les cas des variables  $x$  et  $z$ , qui n'autorisent pas un degré d'observabilité aussi élevé (en particulier  $z$ ), ont également été testés, mais uniquement pour de grands ensembles de séries temporelles. Des résultats assez similaires ont pu être obtenus (parfois même meilleurs, probablement grâce à l'expérience précédemment accumulée avec ce type d'analyse). Les modèles globaux capturés sont généralement un peu plus perturbés que ceux obtenus à partir de la variable  $y$ . Pour  $x$ , les résultats sont présentés Figure 3.15. L'analyse associée de séries synchronisées (Fig. 3.15a) permet de retrouver des modèles présentant une application de premier retour unimodale, mais non lisse (rappelons qu'aucun modèle n'avait pu être obtenu dans ce contexte pour la variable  $y$ ). L'analyse associée de variables indépendantes a également permis d'obtenir des modèles chaotiques. Leur topologie montre qu'il n'est pas nécessairement possible d'en tirer une invariance d'échelle. En effet, l'application de premier retour peut présenter une structure plus complexe que celle des systèmes originaux comme l'indique l'apparition d'une branche supplémentaire qui évoque une zone de déchirement au sein de la structure de l'attracteur.

Ces analyses supplémentaires nous ont permis de classer — de manière tout à fait évidente, mais sans pouvoir être considérées comme systématiques — les différents niveaux de difficultés des quatre types d'analyse considérés. Ce classement, par ordre croissant de difficulté, est le suivant : (1) l'analyse de séries synchronisées par association (2) l'analyse de séries indépendantes par association (3) l'analyse de séries synchronisées par agrégation (4) l'analyse de séries indépendantes par agrégation. En ce qui concerne la possibilité de capturer une invariance topologique (spatiale pour les analyses associées, d'échelle pour les dynamiques agrégées), l'ordre de ce classement se modifie en : (3), (1), (2) et (4).

### 3.5 Les orbites périodiques instables

Les orbites périodiques instables jouent un rôle très important au sein d'un attracteur dans la mesure où les attracteurs sont structurés autour d'elles [244]. Cette observation est, pour cette raison, souvent utilisée comme propriété fondamentale pour explorer la structure des attracteurs tridimensionnels (cf. chapitre 5, [135, 286]). En pratique, les orbites périodiques instables peuvent être directement localisées à partir des trajectoires chaotiques [66]. Si la structuration des orbites périodiques instables permet de caractériser l'attracteur, on peut alors se demander s'il est possible de remonter à l'attracteur original à partir d'une orbite périodique instable unique. C'est à cette question — inversée — que nous avons essayé de répondre — sur une idée de Christophe Letellier — en prenant pour cas test les trois variables  $x$ ,  $y$  et  $z$  du système de Rössler, et en utilisant un jeu d'orbites périodiques uniques, de période un à sept [17]. Ce travail avait déjà été tenté précédemment [188] mais en se basant sur la variable  $y$  exclusivement, en raison de la difficulté d'obtenir des modèles pour les variables  $x$  et  $z$ , celles-ci présentant un trop faible degré d'observabilité. Notre contribution à cette exploration est importante ici dans la mesure où c'est en s'appuyant sur l'extraction pratique de modèles (et donc sur les outils présentés aux chapitres précédents) que nous avons cherché à répondre à cette question. C'est donc également l'occasion de tester l'aptitude de nos outils à capturer une dynamique à partir de séries parfois très courtes ne fournissant souvent qu'une information très réduite sur le champ de vecteurs du système original, et indirecte puisque les orbites périodiques instables ne sont jamais visitées par l'attracteur qui se structure autour d'elles sans jamais les parcourir exactement.

Les résultats pour la variables  $y$  — la plus facile à modéliser se sont avérés tous très bons, permettant de retrouver non seulement le modèle mais aussi des diagrammes de bifurcations caractéristiques du système de Rössler-76 original. Trois cas théoriquement difficiles à obtenir sont présentés en Fig. 3.16. Pour la variable  $y$  (en haut à gauche) : une orbite périodique instable unique (upo-1), cas déjà exploré dans [188], pour laquelle le résultat est frappant. À partir de cette orbite, un modèle global topologiquement équivalent au système original a pu être obtenu, dont le modèle est toutefois peu parcimonieux (20 termes au lieu des 9 termes théoriques). Comme attendu, le cas de la variable  $x$  s'est montré plus difficile en raison d'un degré d'observabilité limité. L'orbite périodique la plus courte pour laquelle un modèle topologiquement équivalent a pu être obtenu codée par la séquence (1001), présentée Fig. 3.16 (colonne centrale). Le cas de la variable  $z$  s'est montré le plus difficile en raison du degré d'observabilité réduit. Pour autant, certains modèles topo-

logiquement équivalent, et particulièrement concis ont pu être obtenus, notamment un modèle de neuf termes seulement dont les portraits de phase des données et du modèle global sont présentés Fig. 3.16 (colonne de droite). Il s'agit donc du plus petit modèle jamais obtenu à partir de la variable  $z$  du système de Rössler et sa qualité est tout à fait surprenante. Les cas précédents étaient moins concis [3], et souvent obtenus à partir d'une sélection très contraignante de la structure du système [176, 202]. L'obtention d'un modèle aussi concis est tout à fait inattendu et nous conjecturons qu'il n'en existe pas de formalisation polynômiale plus concise.

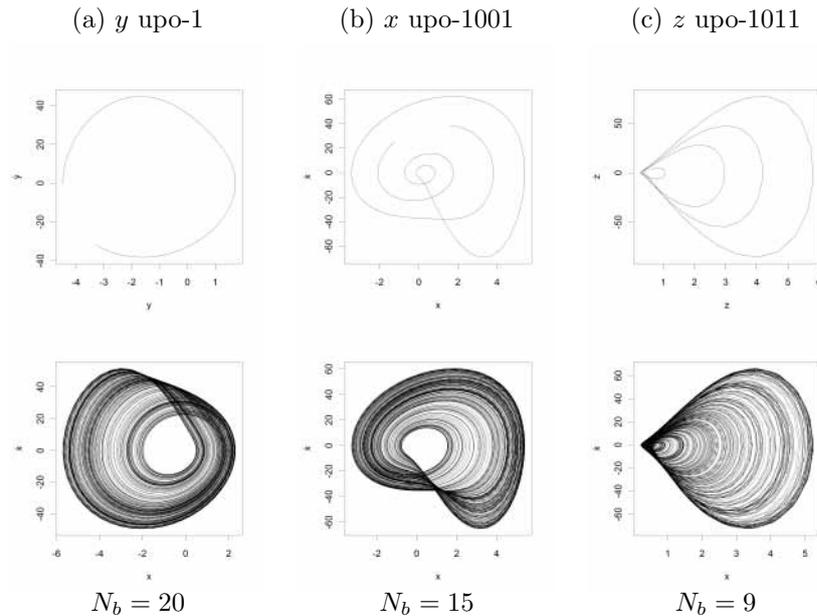


FIGURE 3.16 – Portraits de phase d'orbites périodiques instables utilisées comme série d'entrée (ligne du haut) et des modèles globaux correspondants obtenus pour chacune de ces séries (ligne du bas) issues de  $y$ ,  $x$  et  $z$ . Les résultats sont présentés par degré décroissant d'observabilité (de gauche à droite) : (a) à partir de la variable  $y$  orbite (1); (b) à partir de la variable  $x$  orbite (1001); et (c) à partir de la variable  $z$  orbite (1011).  $N_b$  correspond à la taille des modèles globaux obtenus (nombre de termes).

## 3.6 Modélisation globale multivariables

Comme expliqué au chapitre précédent, la nouvelle approche de recherche de modèle globaux basée sur une redéfinition des critères de priorité se prête *a priori* tout aussi bien à la recherche de modèles monovariés que multivariés (cf. §2.3.3). Deux systèmes chaotiques seront pris ici comme cas test : le système de Lorenz-84 [206], et le système de Deng-94 [81].

### 3.6.1 Le cas du système de Lorenz-84

Le système de Lorenz-84, tridimensionnel, présente une importante complexité de structure (Fig. 3.17, colonne 1). Une première analyse topologique n'a été proposée que très récemment par nos soins (cf. [21], et § 5.3.1) tout en présentant une formulation relativement parcimonieuse (11 paramètres) et simple puisque ne contenant pas de terme polynomial de degré supérieur à deux (cf. Eq. 5.9). Appliqué à ce système, l'approche globale multivariable a permis d'obtenir des modèles présentant une stabilité numérique suffisante pour pouvoir être intégrés sur des temps longs. Trois exemples en sont donnés Fig. 3.17. Le premier des trois modèles est constitué de 11 termes, soit

$$\begin{cases} \dot{x} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3y^2 + a_4z^2 \\ \dot{y} = b_0 + b_1xz \\ \dot{z} = c_1y + c_2z + c_3xy + c_4xz. \end{cases} \quad (3.17)$$

L'attracteur qui en résulte inclut à la fois une approximation de l'attracteur original dans la région des  $x > 0$  mais est relié à une partie dans les  $x < 0$ .

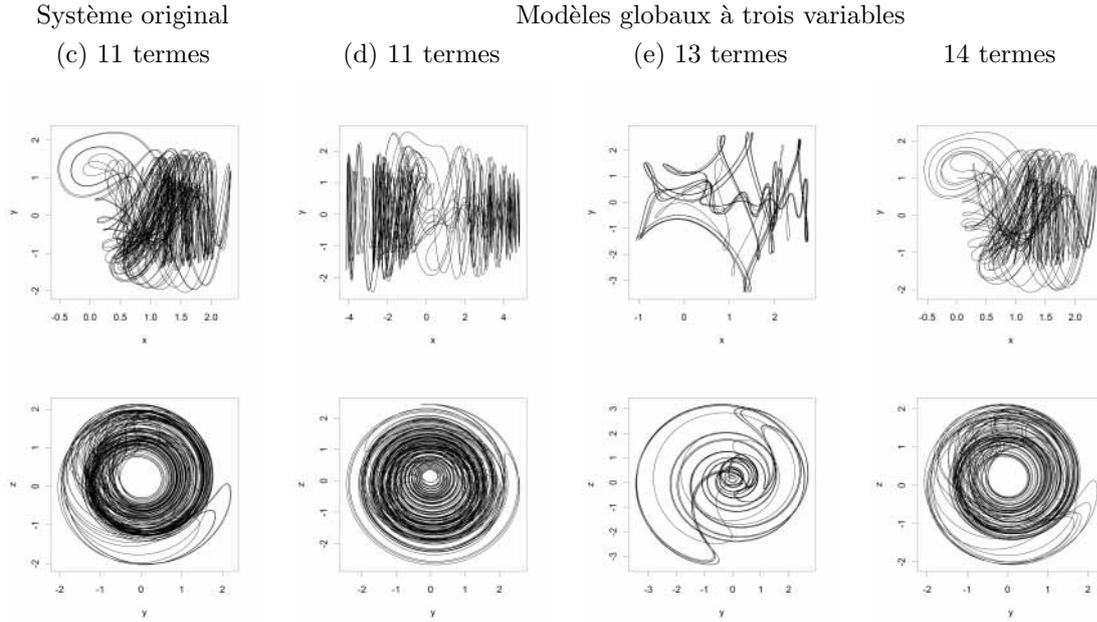


FIGURE 3.17 – Portraits de phase  $x$  vs  $y$  (ligne du haut) et  $y$  vs  $z$  (ligne du bas) de l'attracteur original du système de Lorenz-84 (Eq. 5.9) (gauche) et de trois modèles globaux de 11 (2<sup>e</sup> colonne), 13 (3<sup>e</sup> colonne) et 14 (4<sup>e</sup> colonne) termes obtenus à l'aide de l'algorithme multivarié (cf. §2.3.3).

Le second modèle

$$\begin{cases} \dot{x} = a_0 + a_1x + a_2y^2 + a_3z^2 \\ \dot{y} = b_0 + b_1y + b_2xy + b_3xz \\ \dot{z} = c_1x + c_2y + c_3z + c_4xy + c_5xz \end{cases} \quad (3.18)$$

est moins parcimonieux (13 termes,) mais il est bien calé sur l'attracteur original; toutefois il présente une structure beaucoup moins dense, et ne comportent pas de trou central vraiment distinct (Fig. 3.17c).

Le troisième modèle

$$\begin{cases} \dot{x} = a_0 + a_1z^2 \\ \dot{y} = b_0 + b_1xz \\ \dot{z} = c_0 + c_1x + c_2y + c_3z + c_4x^2 + c_5xy + c_6xz + c_7y^2 + c_8yz + c_9z^2, \end{cases} \quad (3.19)$$

un peu moins parcimonieux (14 paramètres), présente un portrait de phase extrêmement proche du portrait original.

Ces résultats sont intéressants dans la mesure où ils laissent envisager la possibilité d'étudier les dynamiques observationnelles sous un nouvel angle comme cela a déjà pu être effectué en s'appuyant sur des modèles de type NARMA multivariés pour étudier la dynamique de la respiration humaine [200].

Un comparatif des termes des modèles obtenus par l'approche globale multivariée (Eqs. (3.17), (3.18), (3.19) à ceux du système original (5.9) présenté en Table 3.2) suggère que l'approche globale

multivariée pourrait permettre de distinguer certains des termes du système original, c'est-à-dire, en d'autres termes de détecter les liens de causalité déterministes entre variables. La causalité au sens de Granger que nous avons eu l'occasion de présenter au chapitre 1 pour analyser la dynamique des eaux souterraines dans le bassin semi-aride du Gundal, en Inde du Sud (cf. § 1.8.2, [5]) est basée sur l'efficacité prédictive immédiate : un lien causal de  $X_1 \rightarrow X_2$  est présent dans la mesure où la connaissance de la variable  $X_1$  permet d'améliorer la prévision de la variable  $X_2$  au pas de temps suivant. L'approche de Granger présente deux limitations. D'une part, elle ne peut garantir le déterminisme qui constitue pourtant un élément essentiel de causalité. D'autre part, il s'agit d'une approche linéaire qui ne peut autoriser qu'une conception très partielle de la notion de causalité (les versions nonlinéaires de cette approche s'étant montrées difficiles à mettre en œuvre). Il en est tout autrement de la modélisation globale qui – s'appuyant sur l'espace des phases – permet de garantir le déterminisme sous-jacent et nécessite de prendre en compte les non linéarités. L'exploration de tels liens de causalité a pu être entamée dans le cadre d'un travail de master concernant l'analyse des dynamiques des eaux souterraines sur le bassin du Haouz. Les résultats restent toutefois encore préliminaires [40].

TABLE 3.2 – Comparatif des termes présents dans le système original et dans trois des modèles obtenus par approche globale.

modèle coef	$\dot{x}$				$\dot{y}$				$\dot{z}$			
	Lrz84	G1	G2	G3	Lrz84	G1	G2	G3	Lrz84	G1	G2	G3
000	x	x	x	x	x	x	x	x	-	-	-	x
100	x	x	x	-	-	-	-	-	-	-	x	x
010	-	-	-	-	x	-	x	-	-	x	x	x
001	-	-	-	-	-	-	-	-	x	x	x	x
200	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	x
110	-	-	-	-	x	-	x	-	x	x	x	x
101	-	-	-	-	x	x	x	x	x	x	x	x
020	x	x	x	-	-	-	-	-	-	-	-	x
011	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	x
002	x	x	x	x	-	-	-	-	-	-	-	x

### 3.6.2 Le cas de l'attracteur de Deng-94

En 1994, Bo Deng a publié un attracteur toroïdal tridimensionnel de structure très simple puisque ne comportant qu'un seul pli sur le tore [81]. Malgré la simplicité de structure de l'attracteur, la formulation analytique du système d'équations est assez complexe puisqu'il se ramène à 34 termes polynômiaux après développement des termes factorisés avec huit termes pour chacune des deux premières équations, et dix-huit termes pour la troisième, dont le degré polynomial s'élève à six. Dans sa forme factorisée, les équations se formulent comme [81]

$$\begin{cases} \dot{x} = z(\lambda x - \mu y) + (2 - z) \left[ \alpha x - \beta y - \alpha x \frac{x^2 + y^2}{R^2} \right] \\ \dot{y} = z(\mu x + \lambda y) + (2 - z) \left[ \beta x + \alpha y - \beta x \frac{x^2 + y^2}{R^2} \right] \\ \dot{z} = [z((2 - z)(a(z - 2)^2 + b) - dx)(z + m(x^2 + y^2) - h)] \times 1/\epsilon - c(z - 1) \end{cases} \quad (3.20)$$

Pour ( $a = 3, b = 0.8, c = 1, d = 0.1, m = 0.05, h = 3.312, R = 10, \epsilon = 0.1, \lambda = -2, \mu = 1, \alpha = 2.8, \beta = 5$ ), l'attracteur présente un comportement chaotique. La dynamique est plus développée

pour  $\epsilon = 0.0982$  (Fig. 3.18, ligne supérieure). L'un des objectifs en appliquant l'approche globale par modèle multivarié à ce système était de voir s'il était possible d'obtenir une formulation plus parcimonieuse, ce qui s'est avéré impossible. La difficulté apparaît numérique : les modèles obtenus ne sont pas numériquement robustes : il est difficile d'obtenir des modèles intégrables sur des durées vraiment longues. Appliqué au jeu de données issu du paramétrage chaotique, aucun modèle robuste n'a pu être obtenu. Une autre tentative a été appliquée à un jeu de données basé sur un paramétrage modifié ( $\epsilon = 0.09$ ) donnant lieu à un cycle limite de période 6.

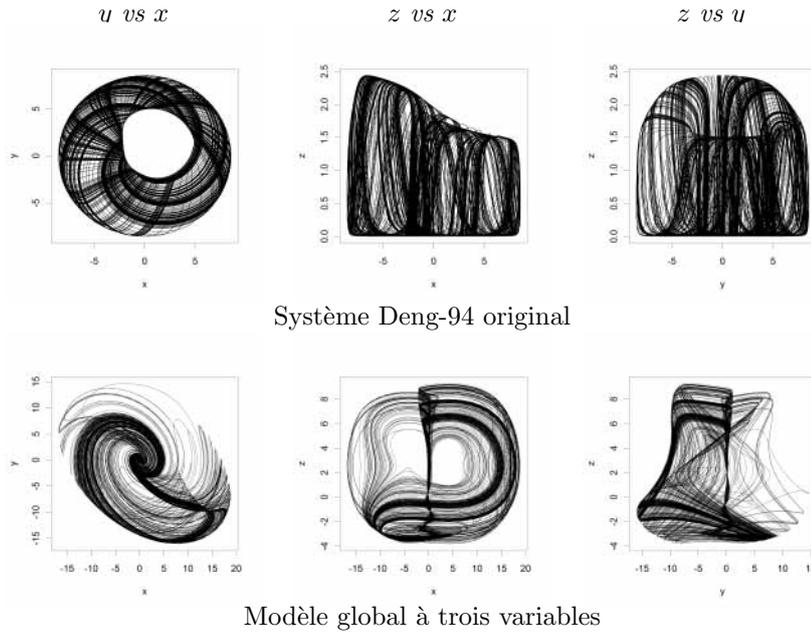


FIGURE 3.18 – Portraits de phase de l'attracteur original du système de Deng-94 (Eq. 3.20) (en haut) et d'un modèle à 9 paramètres obtenu à partir d'une solution périodique de Deng-94 (en bas).

En raison de la complexité analytique du système original, l'approche globale multivariée n'a pas permis de capturer l'attracteur original. Il a toutefois permis de vérifier le déterminisme et d'obtenir un modèle assez similaire au *cord* attractor [201], système introduit par modification du système de Lorenz-84 [206]. Le modèle obtenu ici semble toutefois présenter une structure plus complexe (pour laquelle il est difficile de construire une application de premier retour simple) mais plus concise (9 paramètres). Le modèle est de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = a_0 y + a_1 x z + a_2 y z \\ \dot{y} = b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4 y z \\ \dot{z} = c_0 + c_1 y + c_2 x^2 + c_3 y^2 + c_4 x z \end{cases} \quad (3.21)$$

avec  $(a_0, a_1, a_2) = (-1.94, 0.76, -0.36)$ ,  $(b_0, b_1, b_2, b_3, b_4) = (-0.27, 0.21, 0.53, -0.64, 1.90)$   
 et  $(c_0, c_1, c_2, c_3, c_4) = (-0.70, -3.00, -0.09, 0.08, -0.10, 0.09)$ .

### 3.7 Conclusion

Nous avons montré dans ce chapitre 3 que nous étions capables de capturer des modèles robustes et parcimonieux sur des cas présentant des types et des niveaux de difficulté très diversifiés. Les résultats permettent de valider les outils que nous avons présenté au chapitre 2 et de montrer qu'ils sont d'une efficacité n'ayant rien à envier à ce qui est publié par ailleurs en modélisation globale.

Nous avons également montré que l'approche pouvait être appliquée à de nouvelles situations d'analyse par association et agrégation de séries temporelles. Nous avons également mis en évidence que l'approche de modélisation globale pouvait fonctionner pour des séries temporelles multivariées et avons évoqué la possibilité d'utiliser l'approche pour explorer les liens causaux déterministes. Si cette approche s'avérait suffisamment robuste, elle pourrait constituer un nouvel outil permettant de prendre en compte les nonlinéarités, et de garantir la cohérence dynamique entre variables.

Reste maintenant à savoir dans quelle mesure ces outils peuvent être appliqués à des cas environnementaux réels, faisant ainsi le lien entre nos expériences précédentes (chapitre 1), la modélisation globale et ses applications potentielles (chapitres 2 et 3). L'exploration des dynamiques environnementales réelles à partir de la théorie des systèmes dynamiques nonlinéaires et des outils de la modélisation globale constitue une originalité tout à fait spécifique à notre travail de recherche. Le chapitre 4 sera consacré à la présentation de ce troisième axe de recherche : la modélisation globale appliquée aux dynamiques environnementales.



## Chapitre 4

# Modèles globaux de dynamiques environnementales

*"[...] il est facile de concevoir que l'organisation spéciale des corps vivants doive exiger, pour être analysée, des procédés d'une nature particulière et nous présenter des difficultés suis generis." Claude Bernard, Introduction à l'étude de la médecine expérimentale, 1865.*

*"C'est ce qui est très étonnant dans la biologie, c'est que ce sont des sciences historiques aussi [...]. C'est ça aussi qui les distingue, d'une certaine façon, des mathématiques ou de la physique. C'est-à-dire qu'il faut faire rentrer dans notre compréhension du vivant, cette dimension qui est une dimension où l'histoire se marque dans la structure biologique – au niveau de l'évolution des espèces comme au niveau de l'évolution d'un individu." Alain Prochiantz, Construire une théorie du vivant, 2010.*

### 4.1 Introduction

Si le développement d'outils et leur application à des cas théoriques peut présenter un intérêt scientifique de premier ordre, ainsi qu'un attrait parfois jubilatoire, c'est aussi pour leur finalité appliquée, en l'occurrence, pour l'étude d'observations réelles. Les approches de modélisation développées pour nos travaux nous permettent de partir des observations, sans privilégier d'hypothèse sous-jacente forte *a priori* sur les dynamiques étudiées. Cette démarche leur donne le potentiel d'être applicables de façon équivalente à des cas théoriques comme réels. La modélisation globale, qui s'appuie sur la notion du déterminisme (tout en restant robuste aux perturbations dynamiques), permet l'analyse de dynamiques déterministes dont l'histoire — les conditions initiales comme les perturbations courantes — a pu déterminer la trajectoire. L'approche globale a en effet le potentiel d'extraire une composante déterministe d'un signal issu d'une dynamique chaotique très sensible aux perturbations dynamiques multiplicatives.

L'objet de ce chapitre 4 est de présenter un troisième axe de recherche, de thématique différente, concernant l'application de l'approche globale à l'étude de dynamiques environnementales. Les dynamiques environnementales constituent un ensemble d'une grande diversité et d'une grande complexité. Nous avons pu présenter, au chapitre 1, certaines de ces thématiques environnementales pour lesquelles nous avons pu acquérir une certaine expérience lors de travaux antérieurs. Parmi celles-ci, le cycle de la végétation en zone semi-aride s'est avéré plus particulièrement intéressant ici, car correspondant à des dynamiques de petite dimension [7, 6].

Suite à notre affectation au Centre d'Études Spatiales de la BIOSphère, nos premières tentatives de modélisation globale se sont naturellement concentrées sur le cycle de la végétation au Maroc, s'appuyant plus spécifiquement sur les thématiques, les outils d'observation (la télédétection spatiale) et certaines des régions d'étude privilégiées du CESBIO. L'étude de la dynamique céréalière au Maroc par approche globale constitue pour cette raison une importante partie de nos préoccupations

thématiques et de ce chapitre 4 (cf. § 4.2 & 4.3). De nouvelles pistes d'analyses ont également pu être entamées, concernant la dynamique nivale (§ 4.4.1) et l'épidémiologie (§ 4.4.2) dont certains des résultats seront présentés en fin de chapitre. D'autres thématiques ont commencé à être explorées dans le cadre de stages de Master concernant le flux de sève de cultures arboricoles irriguées [38], la dynamique pluviale et les variations de niveau des eaux souterraines [40], ou encore le débits de sources.

## 4.2 Applications à la dynamique céréalière en zone semi-aride

### 4.2.1 La culture céréalière au Maroc

Si l'on trouve aujourd'hui d'importantes régions irriguées au Maroc (telles les régions du Gharb, du Loukkos, du Haouz, de la Talda et du Moulouya), l'agriculture au Maroc reste néanmoins très majoritairement pluviale. En ce contexte semi-aride, la dynamique des cultures céréalières est de ce fait fortement dépendantes des conditions climatiques et la production très corrélée au cycle des précipitations annuelles [70]. Les précipitations présentent une importante variabilité interannuelle qui se répercute sur les rendements. Une importante variabilité intra-annuelle peut également être constatée, celle-ci résultant de la dynamique océan-atmosphère à plus grande échelle dont la prévisibilité est plus limitée. Il en résulte une dynamique faiblement prévisible [70] des cultures annuelles telles que le blé (dur et tendre) et l'orge qui sont les cultures dominantes au Maroc [120]. Pour autant, certaines études suggèrent qu'un petit nombre de variables pourrait suffire à construire des modèles prédictifs pour la dynamiques des plantes annuelles (naturelles ou cultivées) en région semi-aride [247, 70, 7, 164].

Comme nous l'avons rappelé en introduction du chapitre 2, les systèmes déterministes de petite dimension peuvent conduire à une forte imprévisibilité à long terme lorsqu'ils présentent une forte sensibilité aux conditions initiales, comportements aujourd'hui appelés chaotiques. Différentes approches ont été proposées pour caractériser le chaos, sur la base de propriétés géométriques [142], dynamiques [298] ou topologiques [135]. Prouver l'existence de chaos nécessite toutefois – en amont – une autre condition nécessaire plus difficile à vérifier (cf. §2.2), celle du déterminisme, c'est-à-dire la détermination unique de l'état du système de l'instant  $t$  à  $t + dt$ . Si cette condition essentielle au chaos est automatiquement satisfaite pour les systèmes d'équation différentielles ordinaires, il n'en est pas de même lorsque l'on part de séries observationnelles. Or aucune de ces méthodes d'extraction des invariants nonlinéaires ne permet de garantir le déterminisme sous-jacent [133, 134].

L'approche apparaissant la plus robuste à ce jour pour mettre en évidence le déterminisme est la modélisation globale. En effet, l'obtention d'un modèle global (déterministe) à partir de données nous apporte une preuve solide de la présence d'un comportement déterministe sous-jacent [197]. Qui plus est, l'approche globale peut permettre de mettre en évidence une dynamique chaotique avec d'autant plus de force qu'elle permet de capturer – en un résultat unifié – les différentes conditions nécessaires et les propriétés du chaos : un système d'équations aux dérivées ordinaires garantissant le déterminisme, et le cas échéant la sensibilité aux conditions initiales, au moins un exposant de Lyapunov positif, des attracteurs de dimension fractale, des mécanismes d'étirement et de repliement, un diagramme de bifurcations caractéristique, etc.

De par leur efficacité, les outils mis en place dans nos travaux offrent donc un potentiel tout à fait considérable pour la détection de comportements chaotiques. Pourquoi porter notre intérêt sur ce type de comportement concernant la dynamique de la végétation ? Plusieurs éléments peuvent être évoqués, et en particulier l'irrégularité des cycles de la végétation naturelle ou agricole des régions semi-arides [70, 162, 10], leur faible prévisibilité [70, 247, 164, 7, 6], ou encore les estimations de dimensions de corrélation non entière pour le cycle de la végétation sur l'ensemble de l'Afrique de l'ouest [7]. Mettre en évidence ici une dynamique chaotique nous apporterait une explication pour ces propriétés de faible prévisibilité et nous permettrait de mieux justifier nos choix de modélisation et d'observation pour une meilleure prévision de ce cycle.

Les objectifs du présent travail étaient de reconsidérer la question du chaos pour la dynamique

de la végétation en zone semi-aride en se basant, comme pour les analyse précédentes, sur la télédétection spatiale du couvert végétal, mais à partir des outils de la modélisation globale. La première de ces analyses s'est focalisée sur une région centrée sur les provinces de Kenitra et de Larache, située dans le Nord Ouest du Maroc.

### 4.2.2 Observation par télédétection spatiale

L'un des intérêts essentiels des indices de végétation observés par satellite est de permettre un suivi spatialisé et répétitif du cycle de la végétation à l'échelle du globe terrestre. L'indice NDVI (Normalized Difference Végétation Index)

$$\nu = \frac{\rho^{IR} - \rho^{VIS}}{\rho^{IR} + \rho^{VIS}} \quad (4.1)$$

défini comme la différence normalisée des réflectances mesurées dans le rouge et l'infrarouge est un outil très efficace pour le suivi et l'analyse de la dynamique des couverts herbacés des régions semi-arides [284, 162, 7, 6]. L'indice a également pu être utilisé pour optimiser les modèles de dynamique de la végétation [11, 10], ou pour estimer la production primaire et les rendements agricoles, sur le Maroc notamment [70, 164].

L'indice NDVI est fonction de la fraction du rayonnement absorbé par la végétation par le mécanisme de photosynthèse, et de l'indice de surface foliaire (LAI) [230]. Plus la valeur de NDVI est élevée, plus la végétation est active et dense. Pour les zones de végétation, l'indice NDVI varie entre 0,1 et 0,9. En zone semi-aride, l'indice dépasse rarement 0.7.

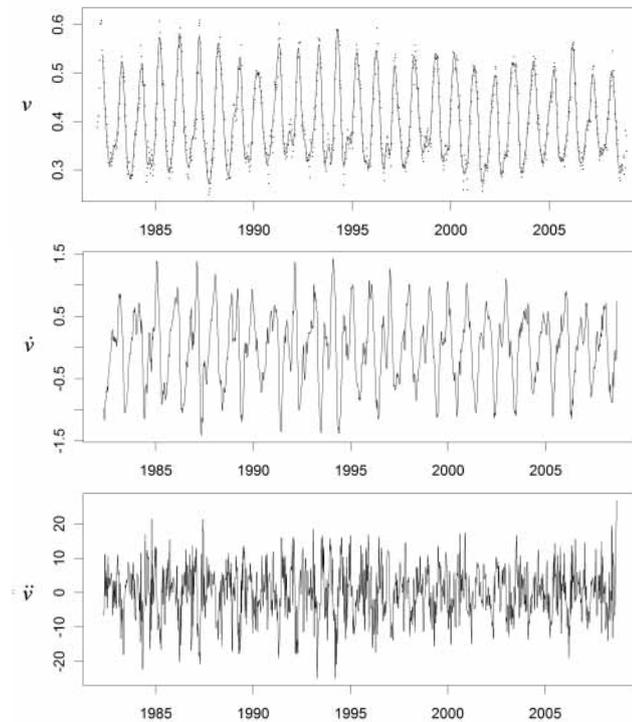


FIGURE 4.1 – Signal de l'indice NDVI de végétation moyenné  $\nu$  pour une zone d'étude située sur le Nord du Maroc. Le signal agrégé est présenté avant (points) et après lissage (trait plein). La première dérivée  $\dot{\nu}$  puis la seconde dérivées  $\ddot{\nu}$  sont données dans les panneaux suivants.

Le produit NDVI issu du *Global Inventory Modeling and Mapping Study* (GIMMS) du *Global Land Cover Facility* (GLCF) [285] a été utilisé pour une étude menée sur la période 1982-2008. Il est produit à partir des données des capteur *Advanced Very High Resolution Radiometer* embarqués

sur les plateformes de la *National Oceanic Atmospheric Administration*. Il s'agit d'un produit à  $8 \times 8 \text{ km}^2$  de résolution résultant du sous-échantillonnage de données de résolution  $1,2 \times 1,2 \text{ km}^2$ . Son échantillonnage à 10 jours résulte d'une procédure de sélection consistant à prendre la valeur NDVI maximale par période de 10 jours, sur la base de mesures quotidiennes. Cette sélection a pour but de réduire l'effet des perturbations atmosphériques et les effets d'angle d'acquisition du signal [160]. Ce jeu de données est corrigé des dérives de capteurs, de l'effet des aérosols atmosphériques résultants des éruptions d'El Chichon (en Avril 1982) et du mont Pinatubo (Juin 1991).

La première des zones étudiées dans ce chapitre est située dans la région nord du Maroc, côté Atlantique. Elle est définie par une fenêtre allant de  $6.2^\circ\text{W}$  à  $5.4^\circ\text{W}$  en longitude et de  $34.6^\circ\text{N}$  à  $35.4^\circ\text{N}$  en latitude. Elle comprend la partie nord de la province de Kenitra et une importante partie de la province de Larache. Bien que l'irrigation soit plus développée qu'ailleurs dans la province de Kenitra, les cultures pluviales restent dominantes dans la zone d'étude et sont principalement composées de cultures de blé (dur et tendre) et d'orge. Ces trois céréales sont de genre *Triticum*, de la famille des *graminés* et présentent un type de photosynthèse C3. Pour réduire l'effet du bruit, une sélection du type de couverture a été appliquée, basée sur la carte d'occupation des sols GLC2000 [219]. Le signal a été spatialement agrégé par simple moyenne spatiale sur le domaine d'étude. La méthode Savitzky-Golay [292] a été appliquée avec une fenêtre de 4.5 mois pour filtrer la série temporelle et calculer les dérivées successives. En appliquant ce filtrage, le signal et ses dérivées ont été ré-échantillonnés à 3 jours. La série agrégée est présentée en Fig. 4.1 avant et après filtrage.

### 4.2.3 Modélisation

Les portraits de phase reconstruits à partir du signal satellite agrégé sont représentés Fig. 4.2 (panneaux supérieurs). Ces portraits présentent une structure non-triviale construite autour d'un cycle annuel, d'un aspect perturbé, et semblant s'articuler autour d'un tore. Aucune structure claire ne peut toutefois être facilement identifiée à l'intérieur du tore à partir de ces portraits. Localement, les trajectoires présentent des zones de comportements complexes qui peuvent résulter de perturbations multiplicatives, du bruit de mesure, et potentiellement aussi du processus d'agrégation en raison des hétérogénéités spatiales. Si l'ensemble des structures est grossièrement symétrique, un aperçu détaillé du flot révèle des différences visibles dans les régions de l'espace des phases qui correspondent vraisemblablement aux différentes étapes de l'évolution des plantes : émergence, croissance et maturation pour les valeurs croissantes de  $X_1$  ( $X_2 > 0$ ) ; récolte, sénescence et transformation en litière pour les valeurs de  $X_1$  décroissantes ( $X_2 < 0$ ).

En utilisant l'approche de modélisation globale (voir chapitre 2.2), deux modèles tridimensionnels ont pu être obtenus. Bien que la dimension de plongement ait été estimée à  $d_E = 4$  pour le signal observé à partir d'un algorithme de type faux proches voisins [170], il s'est avéré impossible d'obtenir des modèles de dimension  $d_E = 4$  ou supérieure. Pour cette raison, une dimension de modèle  $m = 3$  a pu être considérée comme une bonne approximation pour la dynamique d'origine. Le modèle à 14 termes se formule comme

$$\begin{aligned} P_{14}(X_1, X_2, X_3) = & -1.225 \cdot 10^3 - 4.477 \cdot 10^3 X_2 + 8.818 \cdot 10^1 X_2 X_3 - 6.577 \cdot 10^{-1} X_2 X_3^2 \\ & - 2.518 \cdot 10^2 X_2^2 - 1.598 \cdot 10^2 X_2^3 + 8.577 \cdot 10^3 X_1 + 2.052 \cdot 10^4 X_1 X_2 - 1.910 \cdot 10^2 X_1 X_2 X_3 \\ & + 5.103 \cdot 10^2 X_1 X_2^2 - 1.907 \cdot 10^4 X_1^2 - 1.142 X_1^2 X_3 - 2.317 \cdot 10^4 X_1^2 X_2 + 1.356 \cdot 10^4 X_1^3, \end{aligned} \quad (4.2)$$

et le modèle à 15 termes comme

$$\begin{aligned} P_{15}(X_1, X_2, X_3) = & -1.309 \cdot 10^3 - 4.504 \cdot 10^3 X_2 + 8.897 \cdot 10^1 X_2 X_3 - 6.763 \cdot 10^{-1} X_2 X_3^2 \\ & - 2.391 \cdot 10^2 X_2^2 - 1.597 \cdot 10^2 X_2^3 + 9.416 \cdot 10^3 X_1 - 8.571 X_1 X_3 + 2.064 \cdot 10^4 X_1 X_2 \\ & - 1.926 \cdot 10^2 X_1 X_2 X_3 + 4.843 \cdot 10^2 X_1 X_2^2 - 2.163 \cdot 10^4 X_1^2 + 1.824 \cdot 10^1 X_1^2 X_3 \\ & - 2.331 \cdot 10^4 X_1^2 X_2 + 1.604 \cdot 10^4 X_1^3. \end{aligned} \quad (4.3)$$

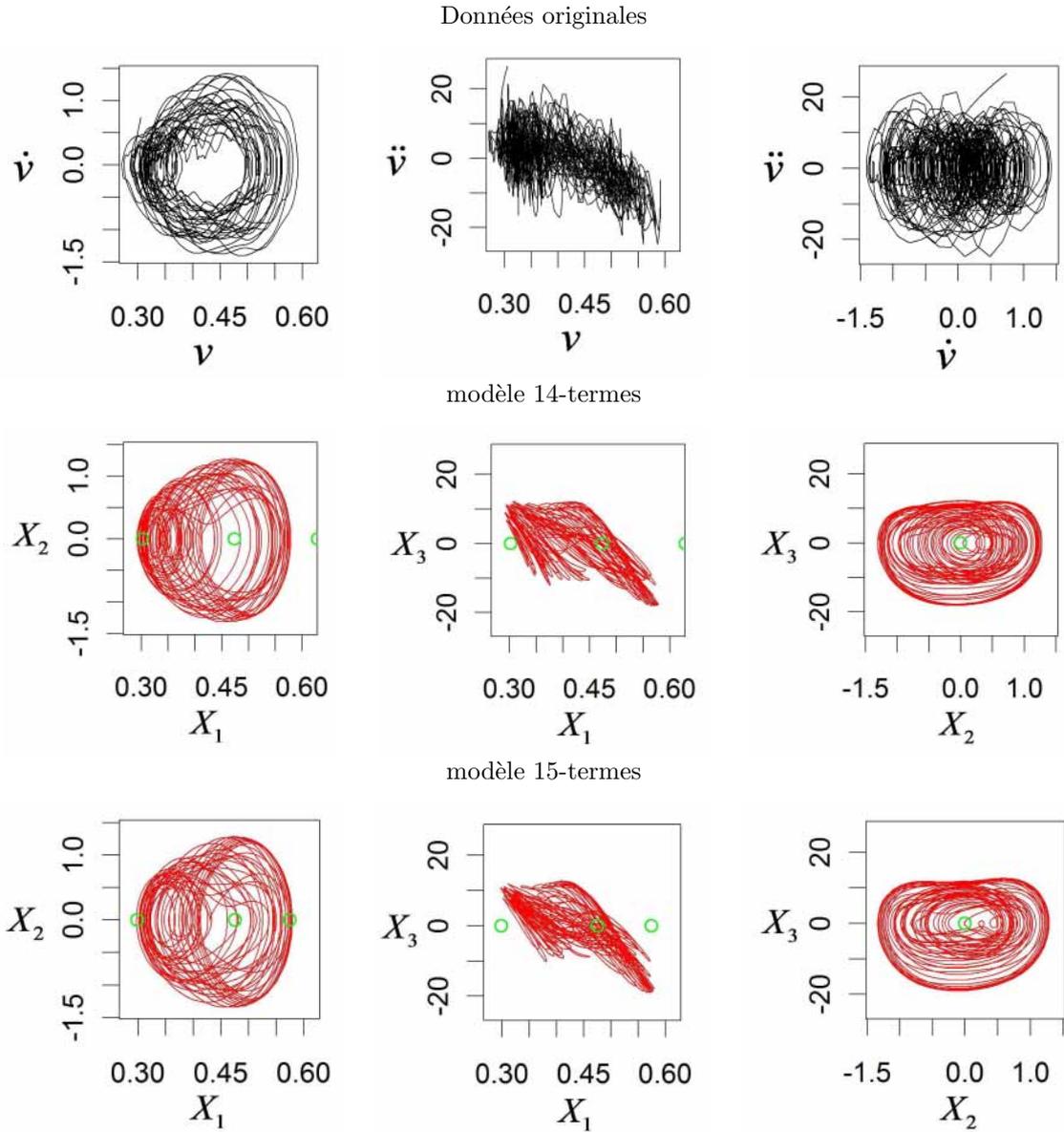


FIGURE 4.2 – Portraits de phase reconstruits à partir du signal d'indice de la végétation agrégé  $\nu(t)$  (en haut), le modèle à 14 termes (deuxième ligne) et le modèle à 15 termes (ligne inférieure). Plusieurs portraits sont présentées correspondants à la variable agrégée en fonction de sa dérivée première (colonne de gauche), par rapport à sa dérivée seconde (colonne centrale), et de la dérivée première en fonction de la dérivée seconde (colonne de droite). Les points fixes des deux modèles sont également représentés par des cercles.

La capture d'un modèle déterministe à partir d'un signal observationnel fournit un argument très fort sur la présence d'une composante déterministe sous-tendant la dynamique observée. La robustesse numérique des deux modèles a été vérifiée par l'intégration numérique des équations sur une très longue fenêtre (dix fois la série temporelle originale de 26 années). Cela a également permis de vérifier la non trivialité de l'attracteur car aucune convergence de la trajectoire vers un attracteur trivial (point fixe ou cycle périodique) n'a été constatée après cette période d'intégration qui est tout à fait significative, vues les échelles de temps considérées ici. Au contraire, des attracteurs denses de structure complexe ont été obtenus. Leurs portraits de phase sont présentés Fig. 4.2 (lignes deux et trois). Dans les deux portraits, bien que la partie centrale des attracteurs apparaisse moins dense que son pourtour, aucun trou central n'apparaît contrairement à ce qui est observé dans le portrait original. La présence de ce trou a pu être vérifiée par une visualisation 3D des zones vides à l'intérieur de l'attracteur (non représentée), révélant un trou central en colimaçon. Contrairement au portrait issu des données initiales, les trajectoires reconstruites à partir des modèles sont nettement plus lisses et ne présentent pas de boucles locales. La plupart des variations observées à courte échelle de temps, tout particulièrement visibles dans la troisième dérivée du signal observé, disparaissent dans les portraits des modèles. À l'exception de la dérivée troisième, les amplitudes des deux modèles se comparent assez bien avec le portrait de phase original. Les portraits obtenus avec les deux modèles sont très similaires dans l'ensemble, bien que le modèle à 15 termes apparaisse plus complexe, puisque présentant des comportements du flot correspondant à des échelles de temps plus courtes non détectées par le modèle à 14 termes dont le portrait apparaît plus lisse.

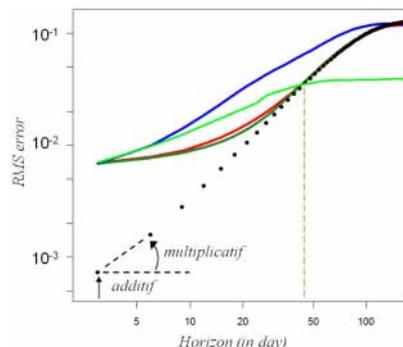


FIGURE 4.3 – Croissance de l'erreur de prédiction en fonction de l'horizon de prévision  $h$  pour le modèle associé à différents types de schéma d'assimilation de données : filtre de Kalman étendu (bleu), filtre de Kalman d'ensemble (rouge, [118]), synchronisation directe et rétrograde (vert foncé, [67]). Une méthode de simple réinitialisation a également été utilisée (pointillés). Ces résultats sont à comparer à la prévision basée sur le suivi de trajectoires analogues dans l'espace des phases qui ne nécessite pas de modèle dynamique (vert clair). Pour permettre la comparaison, le niveau de bruit additif associé aux prévisions avec schéma d'assimilation a été ajusté manuellement sur celui de la méthode sans modèle. Les modèles associés aux schémas d'assimilation de données les plus performants [67, 118] permettent de diminuer très significativement la vitesse de croissance du bruit.

Valider un modèle dans un contexte de dynamique chaotique nécessite de disposer d'approches spécifiques (cf. chapitre 2, § 2.4). En effet, en raison de la forte sensibilité aux conditions initiales, des trajectoires observées et modélisées ne peuvent coïncider rigoureusement mais la structure de leur portrait doit être la même. Idéalement, une validation appropriée peut être effectuée sur la base d'une caractérisation topologique afin de prouver que les données et les modèles ont bien les mêmes structures [286, 136] (voir [186] pour une application à une série observationnelle). Malheureusement, cette technique est difficile à appliquer dans notre cas en raison du niveau élevé des perturbations d'apparence stochastique dans le signal original, qui résultent vraisemblablement à la fois du bruit additif de mesure et de perturbations multiplicatives. Il en est *a fortiori* –

de même pour les invariants nonlinéaires géométriques et dynamiques. Une autre approche de validation consisterait à vérifier que les modèles et la dynamique observée présentent les mêmes diagrammes de bifurcations [60]. Cette technique ne s'applique pas ici puisqu'elle nécessiterait de connaître les équations du système, ce qui n'est pas le cas ici. Par conséquent, il a été choisi, pour valider les modèles obtenus ici, de se fonder sur leurs capacités prédictives. Pratiquement, l'erreur moyenne quadratique

$$e(h) = \sqrt{\langle [\hat{\nu}(t, h) - \nu^{obs}(t, h)]^2 \rangle_t}, \quad (4.4)$$

où  $t$  est la date à partir de laquelle une prévision est effectuée, est estimée comme une fonction de l'horizon de prévision  $h$ , en comparant les prévisions du modèle au signal observé. Sur la base de cette fonction, les capacités des modèles ont pu être quantifiées par l'estimation d'un horizon de prévisibilité effective  $h_E$  défini comme l'horizon pour lequel un niveau seuil d'erreur est atteint. Ce seuil a été choisi égal à la moitié de l'écart type du signal observé. Les horizons de prévisibilité  $h_E$  ont été estimés à 48,0 jours pour le modèle à 14 termes et à 48,25 jours pour le modèle à 15 termes. Ces grandeurs sont en cohérence avec l'horizon de 1 à 3 mois rapporté dans d'autres études [70], et permettent d'apporter un premier élément de validation de nos modèles, avec un léger avantage pour le modèle à 15 termes. Notons également que la définition d'horizon de prévisibilité peut varier d'une étude à une autre, ce qui les rend parfois difficiles à comparer. Notons encore que l'estimation présentée ici prend en considération l'ensemble du cycle des cultures céréalières. Il ne prend donc pas seulement en compte la période de croissance (qui intéresse *a priori* le plus les agriculteurs). Il inclut de ce fait toutes les saisonnalités du signal qu'elles présentent une très faible prévisibilité (les périodes avant semis notamment, mais aussi les départ de jachère, etc.) ou de plus forte prévisibilité (la phase de sénescence ou de transformation en litière).

D'autre part, les capacités prédictives des modèles ont été comparées aux capacités prédictives de la méthode de suivi de trajectoire analogues dans l'espace des phases présentée au chapitre 1 § 1.5.2 (voir aussi § 2.4.3). Pour un niveau de bruit additif équivalent, la croissance d'erreur du modèle a pu être estimée en adjoignant au modèle un module d'assimilation de données [42, 24]. Les méthodes de type filtre de Kalman d'Ensemble (EnKF [118]) et synchronisation directe et rétrograde (BFN [67]) ont permis de mettre en évidence une croissance de l'erreur beaucoup plus lente pour le modèle que pour l'approche s'appuyant sur les données, sans modèle dynamique (Fig. 4.3). L'approche basée sur un simple filtre de Kalman Étendu (ExKF) s'est montrée moins efficace. L'approche de réinitialisation directe est également rapportée pour comparaison, mais ne permet pas de comparaison dans la mesure où elle ne permet pas d'ajustement du niveau de bruit additif. Une estimation des niveaux de bruit multiplicatif a également été effectuée [42] en s'appuyant sur l'approche développée par Orrel [237] (cf. chapitre 3, § 2.4.2). Ce niveau a pu être estimé à 2.2 % pour le modèle à 15 termes [42].

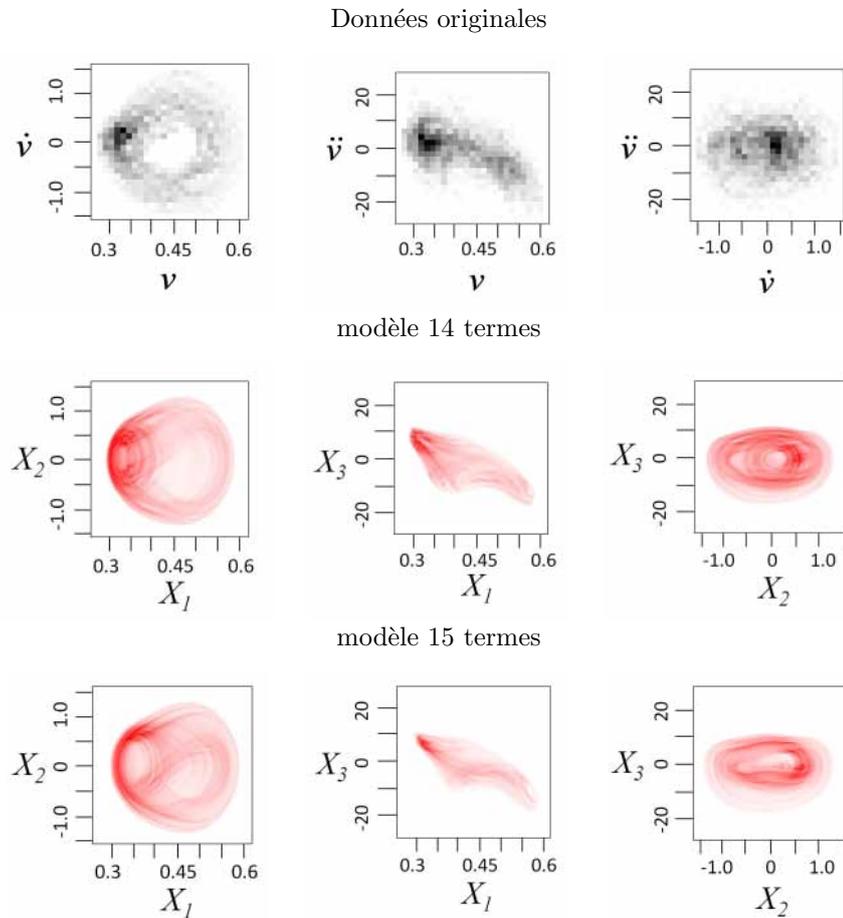


FIGURE 4.4 – Portraits de phase en densité (mêmes présentation que Fig. 4.2).

En raison de la complexité des flots rencontrés – et avant de se lancer dans une analyse topologique de leurs structures – les densités de portraits de phase peuvent nous apporter une information complémentaire sur la structure du flot (Fig. 4.4). Ces représentations ont été obtenues par un découpage de  $25 \times 25$  boîtes pour les portraits originaux (en raison du nombre réduit de trajectoire) et de  $100 \times 100$  pour les modèles. Deux zones de boucles, qui apparaissaient identiques dans les Figures de portraits de phases (Fig. 4.2), peuvent maintenant être distinguées (bien visibles dans le portrait  $x_3$  vs  $X_1$ ) ayant une origine commune dans une région centrée sur  $(X_1, X_2, X_3) = (0.32, 0., 8.)$  correspondant à l'état d'émergence de la plante. Les boucles verticales, de petites tailles, correspondent à des cycles très incomplets résultant d'un départ prématuré (culture céréalière ou jachère) aux premières pluies. Les boucles plus larges, légèrement obliques (voire presque horizontales), correspondent à des cycles complets de la culture céréalière jusqu'à maturité. La dissymétrie de la structure apparaît plus clairement dans ces portraits en densité. On note en particulier des densités plus élevées sur le portrait  $(x_3$  vs  $X_2)$  dans la région  $(X_2, X_3) = (0.5, 0.)$ , où de petites boucles étaient visibles dans les plongements différentiels (figure 4.2). Cette dissymétrie est également visible dans les premiers portraits de densité  $(X_1$  vs  $X_2)$  qui s'explique par des processus complètement différents de part et d'autre de l'attracteur, l'un correspondant à l'émergence, suivi par la croissance de la plante qui présente une importante sensibilité aux conditions initiales, aux conditions de stress en eau et aux divers perturbations; le second processus correspond à la sénescence, puis à la transformation en litière, phénomène beaucoup moins sensible aux perturbations. Les petites boucles observées au cours de la phase de croissance (particulièrement visibles sur le portrait du modèle à 15 termes, dans une moindre mesure pour le modèle à 14 termes) reflètent

la capacité des cultures céréalières à récupérer après avoir subi une période de stress.

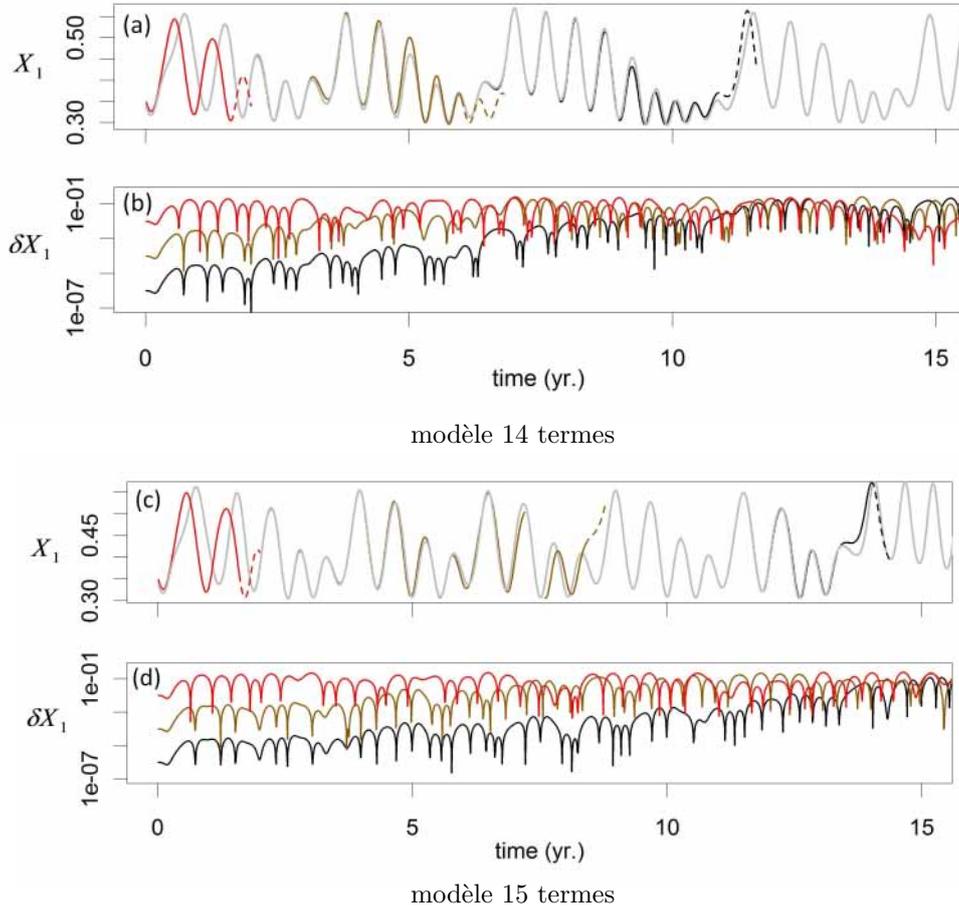


FIGURE 4.5 – Tests de sensibilité aux conditions initiales pour les modèles à 14 termes (a-b) et à 15 termes (c-d). Quatre simulations ont été effectuées pour chaque modèle. Les lignes grises dans (a) et (c) correspondent aux solutions de référence de  $X_1$  en fonction du temps  $t$  (en année). Les autres trajectoires (lignes colorées) ont été obtenues en appliquant une petite perturbation de  $10^{-2}$ ,  $10^{-4}$  et  $10^{-6}$  sur les conditions initiales (sur  $X_1$  uniquement). Les signaux de différence  $\delta X_1(t)$  à la trajectoire de référence sont présentés en (b) et (d).

Outre le caractère déterministe mis en évidence par l'obtention d'un modèle par l'approche globale, la sensibilité des modèles aux conditions initiales est une seconde caractéristique essentielle aux dynamiques chaotiques. Dans un premier temps, cette sensibilité a été simplement testée en comparant des trajectoires issues de conditions initiales légèrement différentes ( $X_1 = \nu + \delta\nu$ ,  $X_2, X_3$ ) avec  $\delta\nu$  de  $10^{-2}$ ,  $10^{-4}$ , et  $10^{-6}$ , par rapport à une trajectoire de référence d'état initial ( $X_1 = \nu$ ,  $X_2, X_3$ ) choisie ici à l'émergence de la plante. La divergence exponentielle des trajectoires est évidente pour les deux modèles (Fig. 4.5). Pour une différence initiale NDVI  $\delta\nu$  de  $10^{-2}$ , la divergence des trajectoires se montre presque immédiate. Cette divergence est plus rapide avec le modèle à 14 termes. Comme nous l'avons vu au § 3.2.3, les exposants de Lyapunov ne peuvent pas être utilisés pour caractériser de manière précise le régime dynamique, mais le signe des exposants peut être considéré comme robuste. Les premiers exposants de Lyapunov ont été estimés significativement positifs pour les deux modèles fournissant une autre justification de chaos (cf. [1]). Au contraire des exposants de Lyapunov, la dimension de Kaplan-Yorke  $d_{KY}$  peut être considérée comme fiable et être utilisée comme un indicateur de la dynamique sous-jacente aux observations. Deux algorithmes, basés sur les méthodes [298] et [147], ont été développés spécifiquement pour

fonctionner en synergie avec les autres modules de modélisation globale (cf. Annexe A). Leur validation a été effectuée en s'appuyant sur le modèle de Lorenz-63 (cf. [148]). Appliqués aux deux modèles globaux de culture céréalière (Eqs. 4.2 et 4.3), une estimation de la dimension de Kaplan-Yorke très proche a été obtenue pour les deux modèles :  $D_{KY} = 2,75$  pour le modèle à 14 termes et  $D_{KY} = 2,68$  pour le modèle à 15 termes. Contrairement aux attracteurs tridimensionnels fortement dissipatifs qui sont caractérisés par des dimensions fractales légèrement supérieures à deux (*i.e.*  $D_{KY} \gtrsim 2$ ) les valeurs obtenues ici sont très largement supérieures à deux ( $3 > D_{KY} \gg 2$ ), caractéristiques de dynamiques faiblement dissipatives, qui ne comptent, à l'heure actuelle, que peu d'exemples. Le modèle de Lorenz-84 [206] est le premier modèle à avoir présenté une telle propriété ( $D_{KY} = 2,37$ ). Deux autres modèles présentés plus récemment en 1999 et 2004 présentent des propriétés similaires [296, 95] avec des dimensions respectives de  $D_{KY} = 2,76$  et  $D_{KY} = 2,54$ . Les modèles présentés ici sont les premiers cas de dynamiques faiblement dissipatives directement tirés d'observations.

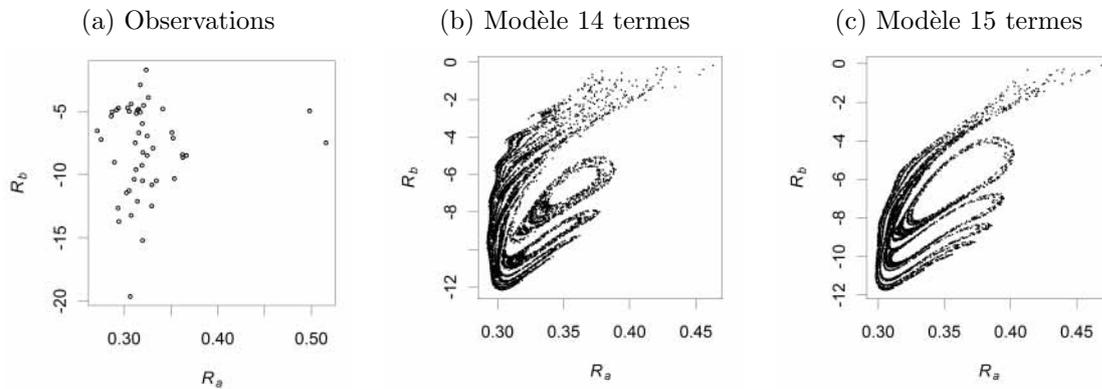


FIGURE 4.6 – Sections de Poincaré issues du jeu d'observation et des deux attracteurs obtenus à partir des modèles globaux à 14 et à 15 termes (Eqs. 4.2 et 4.3).

Une autre façon de caractériser un attracteur tridimensionnel peut se faire par l'analyse de sa topologie. Une telle analyse nécessite de choisir la section de Poincaré de façon appropriée. La section de Poincaré issue des données ne permet de distinguer aucune structure particulière (Fig. 4.6a). Les deux sections Poincaré issues des modèles sont présentées en Fig. 4.6b et 4.6c. Elles sont typiques des deux attracteurs, entièrement bidimensionnelles, et présentent une structure feuilletée anamorphique caractéristique des dynamiques toroïdales faiblement dissipatives. Les sections incluent un trou principal facilement identifiable, ainsi qu'une succession de trous déformés, de plus en plus minces, résultant d'une rotation différentielle du flot sur lui-même (nous reviendrons sur ce point au chapitre 5). Cette propriété de rotation différentielle est caractéristique du chaos toroïdal. Ce constat est important dans la mesure où les chaos toroïdaux tridimensionnels sont plutôt rares dans les cas théoriques (cf. [81, 204, 198]) tridimensionnels et jamais détectés dans la nature, *a fortiori* dans les dynamiques environnementales. Ce résultat est également très intéressant dans la mesure où aucune dynamique faiblement dissipative n'a pu être modélisée auparavant par approche globale. Le cas d'un modèle global présentant une application de premier retour épaisse qui peut être mentionné ici a été obtenu pour la dynamique des cycles du Lynx du Canada [213]. Pour ce modèle, l'épaisseur du flot résulte vraisemblablement de la dimension du modèle ( $m = 4$ ) et pas nécessairement du caractère faiblement dissipatif de la dynamique.

Une analyse topologique serait nécessaire pour confirmer le caractère toroïdal de ce chaos pour les deux modèles obtenus, mais nécessiterait de disposer d'une application de premier retour surjective. En effet, lorsque l'application est surjective, une partition du flot peut souvent être directement appliquée et certaines caractéristiques topologiques de l'attracteur facilement déduites. Aucune application surjective n'a pu être obtenue dans le cas présent, rendant difficile l'analyse topologique et la détection rigoureuse de chaos toroïdal. Les applications de premier retour les plus simples qui ont pu être obtenues pour les modèles à 14 et 15 termes sont présentées Figs. 4.7. Les

deux applications présentent des formes très similaires, mais ne permettent pas une description non ambiguë du flot. Les deux portraits sont composés de trois grandes branches : une branche fine (a) correspondant aux valeurs hautes de l'indice de végétation  $\nu$ , et deux branches plus épaisses (b) et (c), associées aux faibles valeurs. La correspondance entre l'application reconstruite à partir des données et celles issues des modèles est pauvre. Cette différence peut s'expliquer en partie par le comportement asynchrone du modèle (certaines oscillations pouvant alterner avec des oscillations plus longues), alors que la dynamique observée présente un cycle annuel systématique qui résulte à la fois de la dynamique saisonnière et de la synchronisation de l'agriculture sur ce cycle.

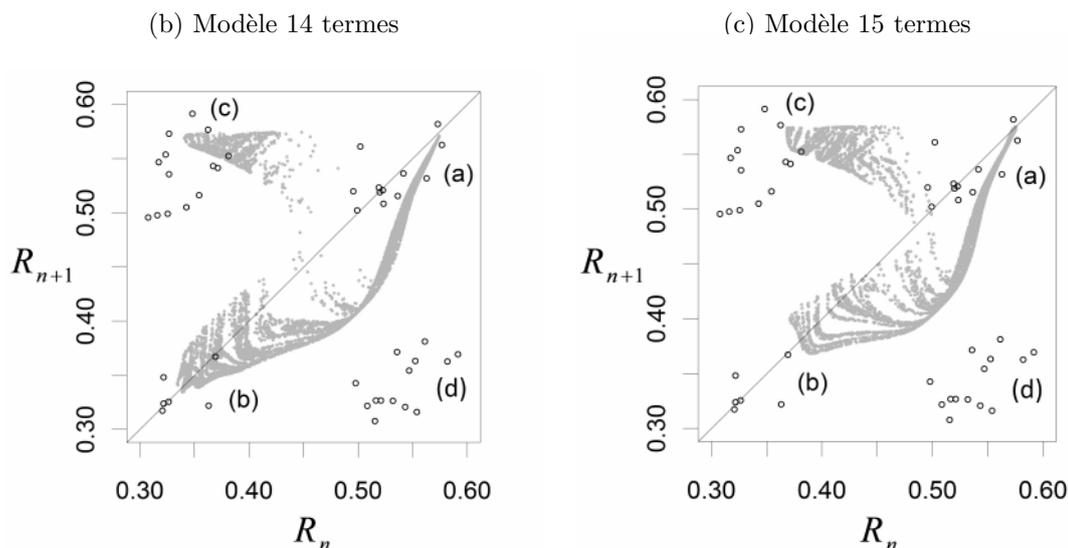


FIGURE 4.7 – Applications de premier retour des modèles 14 (à gauche) et 15-termes (à droite). L'application issue des données  $y$  est également superposée (petits ronds noirs).

#### 4.2.4 Discussion

L'obtention d'un modèle chaotique de petite dimension conduit à plusieurs questions. Comment une dynamique en milieu environnemental, et donc sujette à une complexité considérable, peut-elle conduire à des modèles de si petite dimension et autonomes ? Le développement des plantes annuelles est très lié à leur génotype qui détermine les stades successifs de développement de la germination jusqu'à la sénescence. L'expression du génotype ne peut toutefois pas être séparée du contexte environnemental car c'est uniquement en interaction avec l'environnement que le génotype peut s'exprimer, et c'est donc l'interaction génotype-environnement ( $G \times E$ ) qui va déterminer les propriétés observables des plantes – leur phénotype – et leur développement au cours du temps – leur phénologie. Des environnements différents vont conduire à altérer la phénologie ; de ce fait, seule l'expression contextualisée du génotype peut être observée. L'approche globale apparaît bien adaptée à un tel contexte dans la mesure où elle offre le potentiel d'obtenir des modèles équivalents au système original sur la base de trajectoires particulières. L'approche nous permet donc d'envisager d'obtenir un modèle équivalent à la dynamique des cultures céréalières en conditions semi-arides. Cette étude permet de suggérer que l'interaction  $G \times E$  est à l'origine du comportement chaotique observé, dont la dynamique peut être approchée par un modèle chaotique de dimension trois. La complexité du contexte environnemental est pourtant considérable. Pour exemple, l'Oscillation Nord Atlantique, dont l'influence est reconnue comme importante sur le climat marocain [163], est caractérisée par une dynamique de très grande dimension ( $d_E > 15$ ), offrant une bonne illustration de cette complexité [216]. L'obtention d'un modèle de petite dimension dans un contexte de telle complexité nous force à penser que le génotype joue le rôle principal dans la dynamique observée. La possibilité d'exprimer l'interaction  $G \times E$  par un comportement chaotique

n'en est pas moins satisfaisant puisqu'il permet de concilier l'idée d'une histoire individuelle, y compris pour des génotypes identiques, les petites perturbations initiales suffisant à différencier les trajectoires individuelles, (c'est-à-dire la phénologie).

La question s'est aussi posée de savoir si les modèles obtenus ici pour la dynamique céréalière ne constituaient pas une occurrence unique .. un hapax ! ou, au contraire, s'il ne s'agissait pas plutôt d'un exemple de ce qui pourrait s'avérer être, un cas général. La suite de ce chapitre 4 sera consacrée en grande partie à répondre à cette question.

### 4.3 Analyse par association et agrégation de cas réels

Quatre autres zones du Maroc ont été considérées, d'abord individuellement, puis en association et en agrégation, afin de tester la reproductibilité et la généralité du résultat présenté dans la section précédente (ces types d'analyses ont été présentés au chapitre 3).

L'analyse associée consiste à considérer plusieurs séries temporelles simultanément. Ce type d'analyse est insensible aux déphasages entre séries temporelles. Nous avons pu montrer que l'approche pouvait conduire à de très bons résultats à partir du système de Rössler, ce dernier étant un système chaotique de petite dimension présentant un chaos de forme simple. L'analyse agrégée vise à analyser un comportement d'ensemble à l'échelle d'agrégation considérée. Cette analyse s'est montrée difficile à mettre en œuvre pour des dynamiques trop hétérogènes, mais tout à fait accessible pour des comportements présentant une certaine homogénéité de phase des comportements.

#### 4.3.1 Aire d'étude

La présente analyse se concentre sur quatre provinces marocaines au climat semi-aride (cf. Fig. 4.8). Situées sur la côte Atlantique, les provinces de Safi et El Jadida sont principalement composées de plaines et présentent des précipitations annuelles variant entre 200 mm et 300 mm. Les provinces de Khourigba et Khenifra sont situées à l'intérieur des terres et caractérisées par un climat plus continental avec une variabilité saisonnière marquée en température et en pluies, avec des niveaux de précipitation annuelle de 500 mm en moyenne. Malgré leur similarité, Khourigba se différencie par un comportement plus homogène par rapport au plateau du Moyen Atlas, tandis que Khenifra regroupe différents reliefs allant du Moyen Atlas au Haut Atlas. Les surfaces cumulées sont respectivement de 6592, 6848, 4288 et 9408 km<sup>2</sup> pour Safi, El Jadida, Khourigba et Khenifra. Les scènes d'étude sont principalement dominées par des cultures céréalières, majoritairement constituées de blé dur, blé tendre et orge, lesquelles présentent des phénologies très similaires, et que l'on est pas encore capable de différencier à ce jour par télédétection [65].

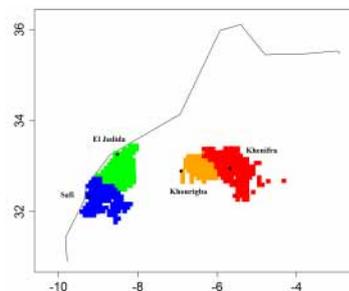


FIGURE 4.8 – Les quatre provinces ici étudiées.

Les séries chronologiques des quatre zones d'étude sont présentées Figure 4.9. Pour chaque province, le signal est dominé par un cycle annuel présentant une importante variabilité intra et inter-annuelle. Les premiers et troisièmes quartiles sont également tracés, ce qui apporte une information sur l'hétérogénéité de chacune des quatre zones. Une faible dispersion du signal est constatée pour les provinces de Safi, El Jadida et Khourigba, reflétant l'importante homogénéité

de ces trois zones d'étude. Une dispersion beaucoup plus marquée est observée à Khenifra (Fig. 4.9d) et résulte des influences contrastées du Moyen Atlas et de la partie inférieure du Haut Atlas. Les différences entre les quatre provinces peuvent être analysées sur la base de diagrammes croisés (Fig. 4.10). La relation croisée entre Safi et El Jadida (Fig. 4.10a), assez linéaire, reflète la remarquable cohérence de phase des comportements entre ces deux provinces. Bien que significativement corrélée, la relation entre Khourigba et El Jadida (Fig. 4.10b) présente un certain déphasage qui résulte des gradients climatiques entre zone côtière et plaine, laquelle est renforcée par la distance entre les deux provinces. La relation croisée entre Khourigba et Khenitra (Fig. 4.10c) présente un signal qui résulte principalement de l'hétérogénéité de la province de Khenitra. Les autres diagrammes (Figs. 4.10d à 4.10f) présentent de plus importants écarts qui résultent à la fois des gradients climatiques, de l'hétérogénéité intra-province et de la distance entre zones d'études. Comparés aux dynamiques synchronisées ou indépendantes étudiées de manière théorique à partir du système de Rössler au chapitre 3 (cf. Fig. 3.9), les comportements observés entre Safi et El Jadida s'apparentent clairement plus aux cas synchronisés avec très faible différence de paramétrage, et avec une différence plus marquée entre les autres provinces.

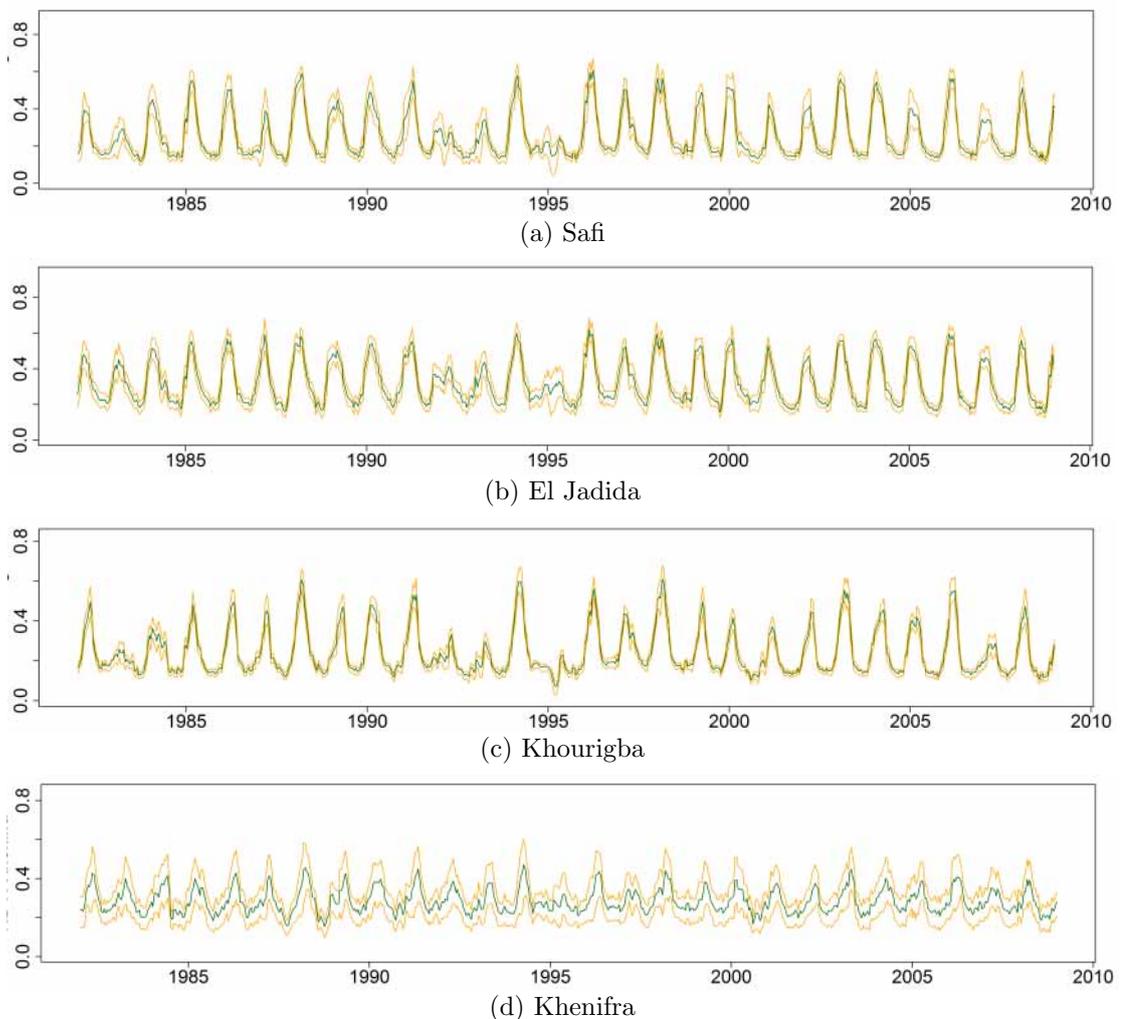


FIGURE 4.9 – Séries temporelles agrégées des quatre zones étudiées (Maroc) dont la localisation est présentée en Figure 4.8. Les premier et troisièmes quartiles sont également superposés.

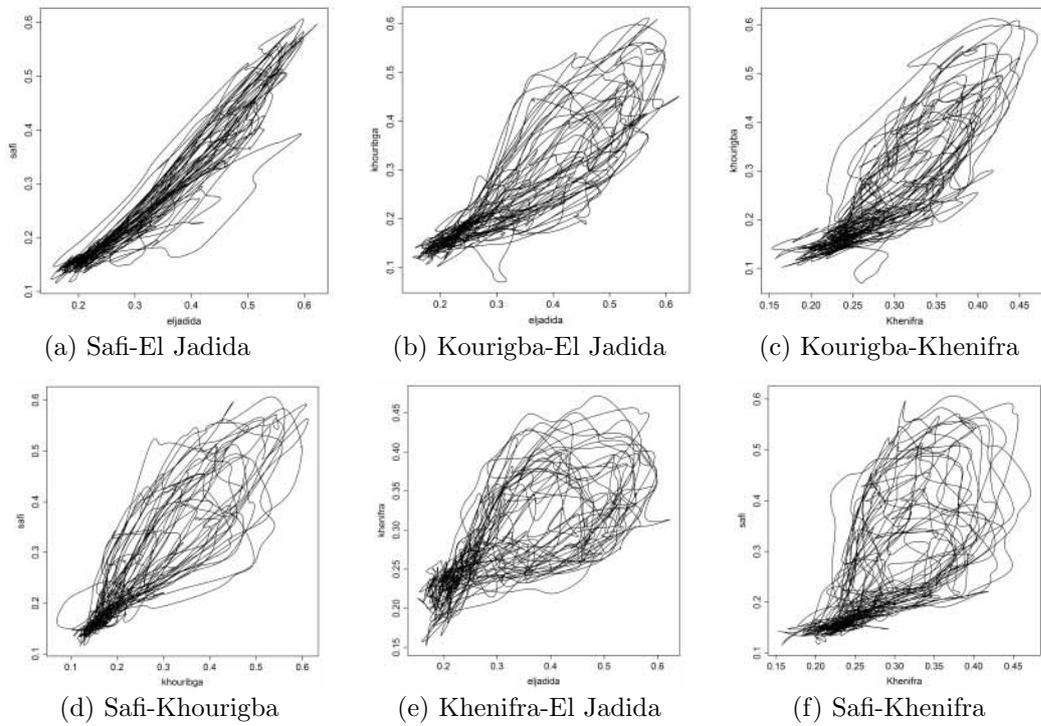


FIGURE 4.10 – Tracés croisés des signaux des quatre zones d'études considérées (cf. Fig. 4.8).

### 4.3.2 Analyse simple

Les provinces ont d'abord été analysées individuellement. Trois modèles ont pu être retenus. Ils ont été sélectionnés à la fois parce qu'ils présentaient une amplitude similaire à celle des données, et parce qu'ils étaient les plus parcimonieux dans leur formulation. Ces trois modèles sont présentés Fig. 4.11. Les portraits de phases des données présentent des comportements très complexes. Le comportement relatif aux petites valeurs d'indice de végétation est souvent très bruité. Les grandes boucles – qui correspondent aux cycles de croissance et de sénescence des plantes – sont beaucoup plus lisses mais présentent une forte variabilité d'amplitude d'une année à l'autre.

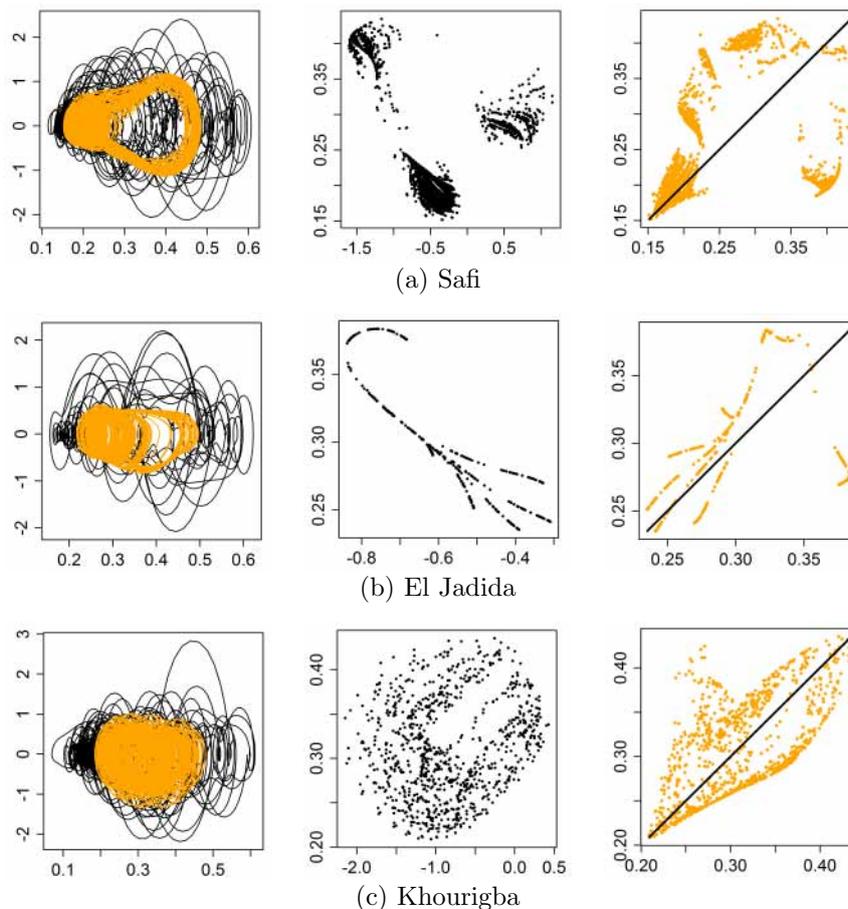


FIGURE 4.11 – Résultat de l'analyse individuelle des provinces. Portraits de phases des données (noir) des modèles (gris) dans la première colonne; sections de Poincaré des modèles (seconde colonne) et leurs applications de premier retour (troisième colonne). Aucun modèle satisfaisant n'a été obtenu pour Khenifra qui présente une plus grande hétérogénéité que les autres provinces.

Le modèle global obtenu pour la province de Safi (fig. 4.11a) présente de faibles amplitudes en comparaison des données. Le modèle est néanmoins intéressant dans la mesure où il permet de capturer certaines des propriétés du comportement original : (a) un comportement cyclique et dense des oscillations de petites amplitudes, (b) un cycle croissance-sénescence de grande amplitude, et (c) des modulations du cycle de grande amplitude. L'obtention d'un modèle global à partir d'une série temporelle nous fournit d'abord un puissant élément de preuve du déterminisme sous-jacent, tout particulièrement ici, où plus de 85 % de la série chronologique originale est utilisée pour obtenir le modèle. La section de Poincaré présente trois domaines distincts qui évoquent un peu l'attracteur de Lorenz-84 [206] mais qui sont toutefois séparés, contrairement à ce dernier (cf. § 5.3.1). Cependant, l'application de premier retour du modèle global est, d'une certaine façon, plus

simple ici, puisque présentant la forme d'un pont caractéristique d'un chaos faiblement dissipatif (bien qu'à la fois épais et discontinu).

Un modèle global a également pu être obtenu pour la province d'El Jadida (Fig. 4.11b). Ce modèle présente, lui aussi, une faible amplitude par rapport au portrait de phase issu des données. Les oscillations ont pu être capturées malgré la densité et la complexité du comportement de faible amplitude. Des cycles de plus grande amplitude ont également pu être capturés, ils correspondent à la dynamique des cultures céréalières qui nous intéressent plus particulièrement ici. Ce comportement est facile à distinguer de la dynamique d'entre-saison grâce au trou central qui se retrouve bien dans les portraits de phase des données et du modèle. L'hypothèse du déterminisme ne peut être validée ici que sur une petite fenêtre (40 % de la série a été utilisée pour obtenir ce modèle). L'impossibilité d'obtenir un modèle pour la série complète provient vraisemblablement des années faiblement arrosées (1992, 1993 et 1995) qui modifient la dynamique de façon marquée qui peuvent être vues comme de fortes non stationnarités, quoique temporaires. La section de Poincaré du modèle présente une structure atypique caractérisée par une branche principale associée à plusieurs petites branches. L'application de premier retour présente une forme « en pont » caractéristique d'une dynamique chaotique. On y retrouve également la forme « en M » déjà observée dans les analyses associées de dynamiques synchronisées qui résulte de petites différences de paramétrage [18] (cf. chapitre 3). Ce sont vraisemblablement ici les hétérogénéités spatiales de terrain (pédologie, occupation des sols) qui peuvent se traduire par une faible nonstationnarité spatiale, équivalant à de petits écarts du paramétrage de la dynamique tandis que le forçage externe commun est celui du climat.

Le modèle global capturé pour la province Khourigba apparaît très dense et ne présente aucun trou directement observable en son centre. La section de Poincaré est entièrement bidimensionnelle, bien que certains trous puissent y être identifiés en son centre. L'application de premier retour est caractérisée par une structure annulaire (densité plus élevée sur son contour qu'en son centre). Cette structure évoque clairement un chaos toroïdal faiblement dissipatif. Le modèle actuel a été obtenu à partir de la série chronologique complète et fournit ainsi une preuve solide de déterminisme sous-jacent et de chaos.

Aucun modèle chaotique n'a pu être capturé pour la province Khenitra. Cela résulte probablement de la plus grande hétérogénéité de cette province qui présente un mélange hybride de dynamique de plaine et de dynamique de montagne.

### 4.3.3 Analyse associée

L'objectif de l'analyse associée est ici d'obtenir un modèle global commun à plusieurs dynamiques spatialisées (Fig. 4.12). Appliquée à des systèmes similaires, cette approche s'est révélée un puissant outil (cf. chapitre 3).

Appliqué aux provinces côtières de Safi et El Jadida, un modèle global dont l'amplitude est très similaire à celle du portrait original a pu être obtenu (quoique les valeurs les plus faibles du signal original soient mal capturées). La section de Poincaré du modèle se caractérise par la superposition de deux formes similaires en forme de "ν". Il n'a pas été possible d'obtenir une application de premier retour plus simple que celle présentée ici.

Le modèle obtenu pour les provinces intérieures présentent également une grande cohérence d'amplitude avec le portrait d'origine, à l'exception des valeurs les plus basses. Toutefois, une section de Poincaré très différente est obtenue ici, dont la forme annulaire, associée à des comportements de repliement, est caractéristique d'un chaos toroïdal. Contrairement au chaos toroïdal obtenu pour la province Khourigba prise seule, la structure annulaire obtenue ici est relativement mince, et correspond donc à un chaos plus dissipatif. Le modèle présenté ici a été obtenu sur la base d'une fenêtre  $2 \times 25$  ans, ce qui constitue un argument très fort de déterminisme sous-jacent et ce qui souligne la similitude de comportement pour les deux provinces, suggérant ainsi un régime d'une forte stationnarité, à la fois temporelle et spatiale.

Un modèle global a également pu être obtenu pour les quatre provinces en association. Ce modèle a été obtenu en considérant des fenêtres plus courtes ( $4 \times 3.5$  ans), prises sur la même période pour les quatre provinces. Le modèle résultant est caractérisé par une structure bidimensionnelle

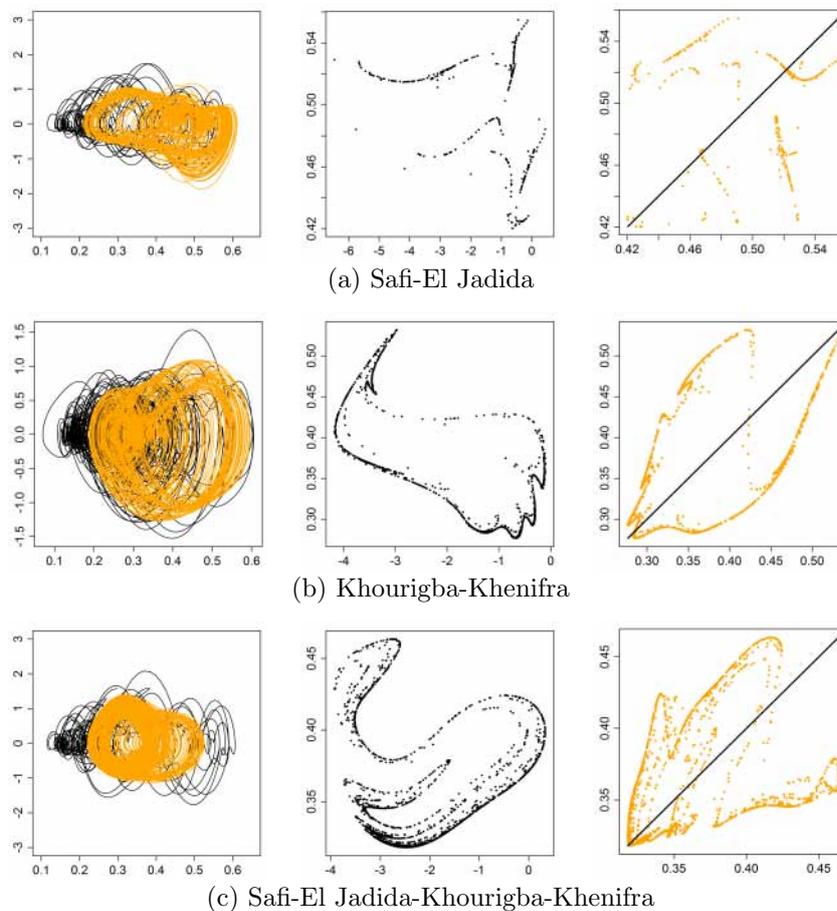


FIGURE 4.12 – Analyses associées. Portrait de phase des données (en noir) et du modèle (en gris) dans la première colonne; section de Poincaré du modèle (deuxième colonne) et application de premier retour (troisième colonne).

très feuilletée, caractéristique des systèmes faiblement dissipatifs, et incluant de nombreux repliements facilement observables dans la section de Poincaré. Aucune application de premier-retour simple n'a pu être trouvée. Ce résultat plaide pour l'existence d'une dynamique sous-jacente commune aux quatre provinces, que des non-stationnarités locales et temporaires peuvent toutefois venir perturber.

#### 4.3.4 Analyse agrégée

L'objectif de l'analyse agrégée n'est pas de capturer une dynamique commune aux dynamiques spatialisées, mais plutôt de saisir la dynamique d'ensemble, c'est-à-dire agrégée, du système. Lorsque les dynamiques agrégées sont en synchronisation de phase, la dynamique des sous-parties se retrouve souvent en partie dans la dynamique d'ensemble (cf. chapitre 3) dans la mesure où l'homogénéité entre oscillateurs reste suffisamment importante, ce qui est bien le cas dans lequel nous nous trouvons ici, soit le cas le plus favorable pour une analyse en agrégation.

Un modèle global caractérisé par des amplitudes faibles par rapport à la dynamique originale a été obtenu à partir du signal agrégé des provinces de Safi et El Jadida (Fig. 4.13a). Sa section de Poincaré est caractérisée par la superposition de deux couches feuilletées principales qui révèlent un système à dissipation modérée. Les applications de premier retour présentent clairement une structure en forme « de pont », caractéristique du chaos. Ces résultats ont été obtenus sur la base

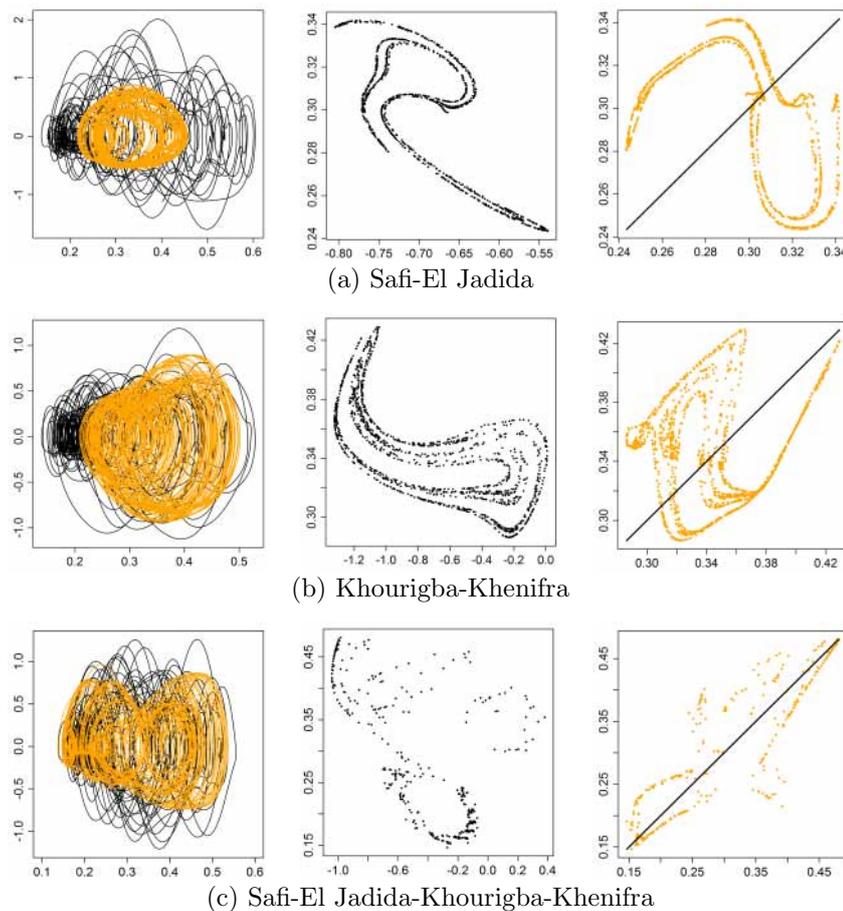


FIGURE 4.13 – Analyse agrégée. Portrait de phase des données (en noir) et du modèle (en gris) dans la première colonne; section de Poincaré du modèle (deuxième colonne) et application de premier retour (troisième colonne).

d'une longue période de 17 ans, ce qui constitue un fort argument de déterminisme sous-jacent et de chaos de petite dimension.

Un modèle global a également pu être capturé pour le signal agrégé de Khourigba et Khenifra (Fig. 4.13b). L'amplitude du modèle couvre largement celle du portrait de phase original à l'exception des régions de plus petites amplitudes. La section de Poincaré est caractérisée par un motif entièrement bidimensionnel et feuilleté, révélant un comportement dynamique faiblement dissipatif; elle présente également des trous qui résultent probablement d'une dynamique toroïdale sous-jacente. Bien que de toute évidence moins dissipative que le précédent, la forme de l'application de premier retour présente une ressemblance frappante avec celle obtenue avec l'analyse associée (Fig. 4.12b). L'attracteur est caractéristique d'un chaos toroïdal faiblement dissipatif, à la dynamique bien développée, comme précédemment observée sur le Nord-Ouest du Maroc [1]. Ces résultats sont très significatifs puisque obtenus à partir d'une fenêtre de 25 ans.

Pour finir, un attracteur chaotique a pu être obtenu pour l'agrégation des quatre provinces pour lesquelles les petites amplitudes du portrait de phase issu des données sont correctement représentées par le modèle (Fig. 4.13c). La section de Poincaré est encore ici caractéristique d'un chaos toroïdal faiblement dissipatif. Fait intéressant, l'application de premier retour présente une structure toroïdale pour des valeurs faibles (de l'ordre de 0,15 à 0,25). Cette région de l'attracteur correspond au début de croissance de la jachère, au moment des premières pluies, avant labourage et semis. Ce comportement n'a pas été capturé par les autres modèles.

## 4.4 Autres thématiques d'application

L'obtention de modèles globaux pour la dynamique environnementale compte uniquement quelques cas de dynamiques environnementales [213, 196], auxquels s'ajoutent ceux présentés pour la dynamique céréalière en zone semi-aride au Maroc. Ces résultats multiples, ainsi que l'efficacité des outils appliqués à des cas théoriques reconnus difficiles, permettent de confirmer la puissance de nos outils, et nous encouragent à l'investigation d'autres dynamiques. Plusieurs autres cas d'études sont présentés ici afin d'illustrer la diversité des domaines environnementaux pouvant être concernés par l'approche, celui de la dynamique nivale et celui de l'épidémiologie.

### 4.4.1 La dynamique nivale

Les réserves d'eau sous forme de neige et la dynamique de leur fonte jouent un rôle très important dans plusieurs bassins semi-arides Méditerranéens, notamment dans les Pyrénées, l'Atlas et le Mont Liban. Leur dynamique est très dépendante des aléas climatiques et présente une importante vulnérabilité aux changements climatiques. La variable susceptible de nous offrir l'information la plus adaptée pour le suivi de cette dynamique à grande échelle est assurément celle de la surface du couvert neigeux qui peut être observée depuis l'espace avec une bonne répétitivité et dont la couverture temporelle est assurée avec une précision suffisante depuis plus d'une dizaine d'années. Les données utilisées sont issues du produit MOD10A2 [152] à moyenne résolution (500 m) généré par la *National Aeronautics and Space Administration* à partir des capteurs MODIS (Moderate Resolution Imaging Spectroradiometer) situés à bord des satellites *Terra* qui offrent un échantillonnage suffisant pour disposer d'un produit adapté au suivi de la dynamique nivale sur les bassins versants semi-arides. Pour ce travail, effectué en collaboration avec Simon Gascoin, Laurent Drapeau et Lionel Jarlan, un prétraitement a été appliqué aux données utilisées afin de minimiser l'effet des nuages.

Les premières analyses par approche globale ont été effectuées en considérant les échelles intra et inter-annuelles. Ces analyses ont permis, dans les deux cas, de mettre en évidence un comportement déterministe sous-jacent pour chacun des massifs considérés, ainsi que des régimes potentiellement chaotiques. Si les modèles chaotiques obtenus apparaissent souvent assez simples, certains modèles parviennent à capturer une certaine complexité, visible dans le portrait de phase des données, qui s'identifient par des mécanismes de torsion/rotation de la structure de l'attracteur. Cette complexité se retrouve en général, soit à la saison d'accumulation, soit à la saison de fonte (cf. ex. Fig. 4.14), mais rarement dans les deux à la fois. Cette différence est interprétée par une alternance de régimes climatiques distincts. L'obtention de modèle pour la durée complète de leur couverture (2000-2012) suggère un comportement moyen plutôt stationnaire sur la période analysée, les variabilités intra- comme inter-annuelle provenant vraisemblablement plus des aléas climatiques que d'une variabilité décennale ou séculaire.

### 4.4.2 Épidémiologie

Les cas de détection du chaos dans le domaine de l'éco-épidémiologie sont assez rares [72] et basés sur des modèles théoriques [287, 72]. Dans un tel contexte, l'approche globale peut apporter un argument plus direct sur le déterminisme et le chaos sous-jacents. À notre connaissance, l'approche globale n'a été appliquée qu'à un seul cas d'éco-épidémiologie concernant l'épidémie de coqueluche [83] qui a débuté au cours des années 1960 en Angleterre et pour lequel un enregistrement du taux d'infection est disponible sur la période 1967-1990. L'approche utilisée dans cette étude, basée sur une approche en réseau de neurones, est toutefois beaucoup moins directe que l'approche utilisée dans nos travaux.

L'une des plus importantes pandémies de peste est partie d'Asie à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle. La peste bubonique est apparue à Bombay en août 1896 où elle est devenue endémique tout en se propageant à l'ensemble de l'Inde sur une période allant de 1898 à 1918, causant dix millions de morts. Un comité consultatif a été nommé en 1905 pour effectuer un suivi de la maladie et des facteurs pouvant contribuer au développement de l'épidémie, notamment dans la ville de Bombay. Les travaux de ce comité nous permettent aujourd'hui de disposer d'une documentation considérable

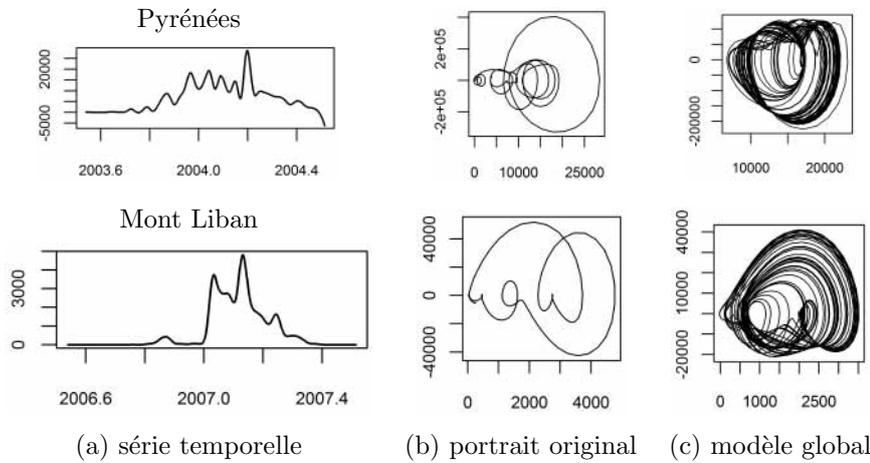


FIGURE 4.14 – Série temporelle d’une saison (à gauche), portrait de phase des données (au centre), puis du modèle (à droite). Les Pyrénées, année 2003-2004 (en haut), Le Mont Liban, année 2006-2007 (en bas).

sur cette épidémie [295]. De nombreuses expériences de laboratoire et de terrain ont été effectuées, en essayant de couvrir tous les aspects possibles de la maladie. Les données concernent en particulier la comptabilité des décès humains, mais également le comptage des rats infectés ou morts, un suivi des populations de puce, etc.

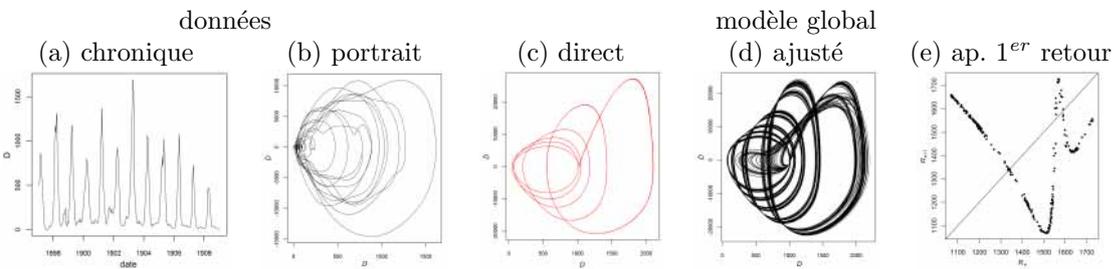


FIGURE 4.15 – Série temporelle du nombre de décès par semaine (a), portrait de phase des données (b), puis du modèle direct (c), puis du modèle ajusté (d). application de premier retour du modèle ajusté (e).

Les approches de modélisation les plus communes en épidémiologie sont basées sur des modèles de type SIR (Susceptible-Infected-Recovered) introduits par Kermack et McKendrick [171], lesquelles ont été par la suite raffinées/complexifiées, afin de prendre en compte, entre autres, l’immunisation des individus après guérison, des populations de certains vecteurs, etc. (ex. [69]). Pour l’étude présentée ici, nous nous sommes appuyés sur les données issues de ce comité. Seuls les résultats concernant la mortalités chez les être humains sont présentés ici en se focalisant sur la période 1897-1908 (cf. Fig. 4.15a). En 1908, les analyses n’avaient pas encore permis de comprendre le mode de passage de l’épidémie des rats à l’homme, et aucune intervention n’avait encore pu être entamée pour tenter de stopper l’épidémie. Sur cette période, la dynamique peut donc être raisonnablement supposée stationnaire. Le portrait de phase obtenu à partir du taux  $D$  de décès humains (4.15b) se caractérise par une forme ovale étirée dans la direction de  $D$  pour les pics les plus petits, et des pics plus arrondis, voire étirés dans la direction de  $\dot{D}$  pour les pics plus sévères de taux de mortalité. Appliquée à la période 1897-1908, l’approche globale a permis d’obtenir un modèle

global parcimonieux (14 termes)

$$\begin{aligned}
 P_{\text{plague}}(X_1, X_2, X_3) = & -6.948 \cdot 10^{-5} X_3^2 - 272.040 X_2 + 1.37910^{-3} X_2 X_3 \\
 & -6.904 \cdot 10^{-9} X_2 X_3^2 + 0.041 X_2^2 - 4.19910^{-6} X_2^3 - 0.019 X_1 X_3 + 1.03810^{-7} X_1 X_3^2 \\
 & + 0.344 X_1 X_2 - 7.18710^{-5} X_1 X_2^2 - 1.641 X_1^2 + 3.34310^{-5} X_1^2 X_3 \\
 & + 9.29910^{-5} X_1^2 X_2 + 3.36710^{-3} X_1^3
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

donnant lieu à un cycle limite de période 5 présenté Fig. 4.15c.

Le modèle permet de reproduire des trajectoires présentant des directions d'étirement différentes, suivant que l'on ait affaire à de petites ou de grandes oscillations, comme mentionné pour le portrait de phase issu des données. Pour les oscillations de plus grande amplitude, le taux de mortalité ne revient toutefois pas proche de zéro comme pour les données. En faisant varier le paramétrage du modèle, une dynamique chaotique est obtenue (Fig. 4.15d) ; sa structure se réduit à quatre branches correspondant à un enroulement (Fig. 4.15e). L'obtention de ce modèle permet de confirmer la présence d'un comportement sous-jacent déterministe, et potentiellement chaotique. Il est intéressant de noter qu'en considérant la période complète enregistrée 1887-1911 qui inclut la phase de régression de l'épidémie (en fait, l'épidémie a duré jusqu'en 1913 à Bombay), les modèles obtenus par approche globale convergent systématiquement vers un point fixe stable proche de  $(0, 0, 0)$ . En d'autres termes, l'effet de la vaccination semble pouvoir être capturé par les modèles.

## 4.5 Conclusions

Si l'approche de modélisation globale a pu être appliquée avec succès à un nombre considérable de systèmes théoriques et expérimentaux [138, 186], l'approche n'a permis d'obtenir qu'un petit nombre de modèles issus de contextes réels, que ce soit pour la dynamique des tâches solaires [196], une dynamique écologique [213] ou encore la dynamique de la respiration humaine [200]. Trois autres contextes ont été présentés dans le présent chapitre concernant la dynamique des cultures céréalières en régions semi-aride (résultats ayant pu être confirmés en différentes régions), la dynamique nivale sur les massifs Méditerranéens, et la dynamique éco-épidémiologique. L'approche globale nous semble plus que jamais prometteuse. Mieux encore, les modèles obtenus pour la dynamique céréalière présentent une structure d'une complexité qui n'a jamais été obtenue par modélisation globale, et qui semble relever d'une dynamique toroïdale faiblement dissipative. De telles structures sont encore très rares dans le domaine de la théorie du chaos [198] et les résultats présentés ici sont les premiers exemples issus de conditions réelles. Ils représentent donc des objets d'étude particulièrement intéressants, aussi bien d'un point de vue théorique que thématique, et fondamental comme appliqué. L'un des moyens de caractérisation du chaos les plus puissants est basée sur la topologie du chaos. Or les quelques cas de chaos toroïdal faiblement dissipatifs résistent mieux que les autres aux outils d'analyse de la topologie du chaos. La volonté d'explorer la topologie de nos modèles faiblement dissipatif, nous a conduit à développer un quatrième axe de recherche, qui concerne la topologie du chaos. Ce dernier axe fera l'objet du chapitre suivant.



# Chapitre 5

## Topologie du chaos

*"The fourth dimension I am still pushing ahead of me." Otto Rössler, 2011.*

*"Some of Gilmore's mathematician friends told him to give up. Perhaps..." C. Le-tellier, 2013.*

### 5.1 Introduction

Nous avons vu dans les chapitre 3 et 4 que la modélisation globale [138, 197] permettait d'obtenir des jeux d'équations à partir de séries observationnelles et, ainsi, d'en tirer des informations sur les dynamiques observées, sans hypothèse forte sur la formulation des équations sous-jacentes au système observé (cf. chapitre 2).

Nous avons également vu dans les précédents chapitres que trois types d'invariants peuvent être utilisés pour caractériser de telles dynamiques chaotiques, à savoir les invariants nonlinéaires géométriques, dynamiques et topologiques. Dans le présent chapitre, nous nous concentrerons exclusivement sur l'approche topologique qui présente l'intérêt très particulier de permettre une caractérisation non équivoque des dynamiques, ce qui n'est pas le cas des invariants dynamiques et géométriques. L'approche topologique permet, en effet, d'effectuer une classification systématique des dynamiques, point tout à fait fondamental pour la compréhension des différents types de comportements dynamiques, que ce soit pour des systèmes théoriques ou issus d'observations réelles. La théorie et les techniques actuelles présentent toutefois d'importantes limitations. D'une part, la théorie et les méthodes d'analyse qui en ont découlées [80, 225, 135, 286, 136, 199] ne sont valides qu'en dimension 3, ce qui constitue une sévère limitation [139]. D'autre part, plusieurs type de chaos tridimensionnels résistent encore à l'analyse : ce sont le chaos toroïdal [204] et le chaos faiblement dissipatif [206]. Ces limitations sont clairement évoquées dans [136, 195, 199]. Plusieurs des attracteurs chaotiques obtenus dans le chapitre précédent sont faiblement dissipatifs et présentent des caractéristiques qui évoquent clairement le chaos toroïdal. Leur analyse topologique pose effectivement, dès le départ, des difficultés spécifiques qui montrent que nous avons bien affaire à l'un de ces cas difficiles. Cette confrontation nous a conduit à mettre en place un quatrième axe de recherche, celui de la topologie du chaos.

Au démarrage du travail présenté dans ce chapitre, l'objectif était de mettre en place une approche qui permettrait d'effectuer l'analyse topologique du premier modèle (15 termes) obtenu pour la dynamique des cultures céréalières (cf. chapitre 4, Eq. 4.3, Fig. 4.2). Ce modèle présentant un comportement faiblement dissipatif ( $D_{KY} = 2.68$ ) et une structure d'apparence toroïdale, le problème revenait donc à s'attaquer à un problème ouvert. Nous avons développé une méthode adaptée à notre problème, ce qui nous a permis d'en déduire la structure sous-jacente à la dynamique des cultures céréalières. Etant parvenu à ce résultat très encourageant, nous avons alors cherché d'une part à mieux théoriser l'approche et à voir dans quelle mesure celle-ci pourrait être appliquée à d'autres systèmes paradigmatiques du chaos faiblement dissipatif (et potentiellement toroïdal) ; puis à essayer de voir si cette approche pourrait faciliter l'analyse de dynamiques de plus grande dimension.

Les investigations s'étant avérées *a posteriori* – comme souvent dans la recherche – peu linéaires, la présentation de ces résultats ne se fera pas dans l'ordre chronologique de leur avancée mais d'une toute autre manière : après avoir présenté les principaux concepts de la topologie du chaos, on se propose de présenter l'approche que nous avons développée pour l'étude et la description de structure d'attracteurs chaotiques faiblement dissipatifs. L'approche sera alors testée sur le premier attracteur chaotique faiblement dissipatif, découvert par Lorenz en 1984 [206]. Nous appliquerons ensuite l'approche au modèle à 15 termes présenté en chapitre 4, obtenu pour la dynamique des cultures céréalières et montrerons, en s'appuyant sur les critères introduits par Letellier & Aguirre [201], que l'attracteur obtenu de ce modèle est effectivement un nouvel attracteur. Nous chercherons ensuite à voir dans quelle mesure l'approche peut être étendue à des systèmes de plus grande dimension, en nous basant sur des cas théoriques chaotiques et hyperchaotiques.

## 5.2 Éléments de théorie et approches

L'attracteur d'un système dynamique est la structure sur laquelle vient s'accumuler la trajectoire dans l'espace des phases après un régime transitoire. En pratique, l'attracteur est obtenu en intégrant les équations d'un système sur un temps suffisamment long, jusqu'à ce que la trajectoire converge vers une structure invariante. La structure ainsi obtenue peut être très simple si l'attracteur est un point fixe ou un cycle périodique, mais peut aussi s'avérer d'une plus grande complexité, comme c'est le cas pour les dynamiques chaotiques dont les attracteurs sont constitués d'un enchevêtrement de trajectoires difficile à appréhender, auquel a été donné le nom d'attracteur chaotique [256]. L'objet de la topologie du chaos est de caractériser la structure de tels attracteurs en les ramenant à une description aussi synthétique que possible, visuelle (un schéma appelé *gabarit* ou *'template'* en anglais) et algébrique sur la base de nombres entiers.

L'approche topologique constitue un puissant outil par sa robustesse au bruit et sa faible sensibilité aux variations paramétriques [286]. En effet, contrairement aux autres invariants nonlinéaires qui varient lorsque les paramètres dynamiques sont modifiés, la description topologique ne varie que lorsque de nouvelles branches apparaissent, disparaissent ou se transforment, c'est-à-dire en présence de bifurcations, l'approche topologique est donc beaucoup plus robuste. La topologie du chaos a ainsi déjà permis de caractériser et de classer la plupart des attracteurs chaotiques tridimensionnels, qu'ils soient issus de systèmes théoriques ou de mesures observationnelles [186].

Pour analyser cet enchevêtrement complexe de trajectoires difficile à analyser, la topologie du chaos s'appuie sur les orbites périodiques instables. En effet, on sait depuis les travaux de Poincaré [244] qu'un flot s'organise autour des orbites périodiques du système (lesquelles sont instables dans le cas des attracteurs chaotiques). Disposer des orbites périodiques instables d'un attracteur nous procure donc une information essentielle pour la description de sa structure, c'est-à-dire pour recouvrer le squelette autour duquel s'organisent les trajectoires de l'attracteur. Mais une fois révélé, ce squelette n'en reste pas moins difficile à caractériser. La théorie des nœuds s'est avéré un moyen à la fois puissant et rigoureux de description de cet enchevêtrement d'orbites périodiques.

### Théorie des nœuds

En dimension trois, un nœud peut être défini comme une courbe déformable fermée, sans intersection avec elle-même. Un ensemble de nœuds forme un entrelacs. La théorie des nœuds permet de caractériser des nœuds et des entrelacs, et donc de les discerner et de les décrire de façon non ambiguë. Deux nœuds sont dits topologiquement équivalents s'il existe une transformation continue permettant de passer de l'un à l'autre. Les orbites périodiques instables autour desquelles sont structurés les attracteurs forment un ensemble de nœuds et d'entrelacs (qui présentent également la propriété d'être orientés). La théorie des nœuds constitue de ce fait un outils puissant pour caractériser la structure topologique d'un attracteur, et en faire le classement rigoureux.

La description d'un lien est basé sur les croisements successifs des courbes entre elles et nécessite le choix d'une convention de croisement (Fig. 5.1a-b). Parmi les croisements, certains peuvent être annulés ou déplacés suivant les trois mouvements de Reidemeister (Fig. 5.1c-e).

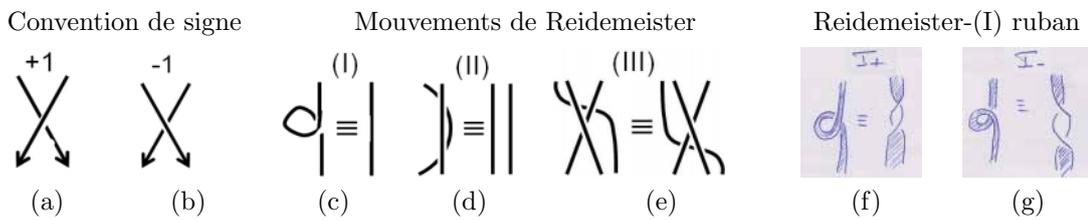


FIGURE 5.1 – Convention de signe de croisement et mouvements de Reidemeister de cordes et de rubans.

Le nombre d'enlacement (ou *linking number*) est un invariant topologique simple qui permet de montrer si deux entrelacs sont, ou non, équivalents : ils offrent ainsi un outil puissant de validation pour montrer que deux entrelacs ne sont pas équivalents [136]. Toutefois, des entrelacs non équivalents peuvent présenter le même nombre d'enlacement. Il s'agit d'un nombre entier qui se calcule comme la demi-somme des croisements orientés. Si les nombres d'enlacements peuvent s'avérer utiles, ils ne permettent pas pour autant de disposer d'une représentation visuelle des entrelacs. Qui plus est, ils ne permettent pas non plus une description non ambiguë comme nous l'avons déjà mentionné.

La réorganisation des entrelacs sous forme de tresses permet à la fois une description non ambiguë et une visualisation synthétique directe de la structure enchevêtrée d'un attracteur chaotique. Les tresses jouent un rôle d'autant plus important dans le cadre de la topologie du chaos que tout entrelacs orienté peut être ramené à une tresse fermée (théorème d'Alexander). Le support théorique actuel permet de décrire l'entrelacs des orbites périodiques d'un attracteur en les ramenant à une tresse fermée orientée, mais également de considérer cette tresse comme un ensemble de bandes (plutôt que de simples brins) permettant ainsi de prendre en considération la répartition du flot en bandes qui soient caractéristiques des dynamiques chaotiques. De plus, elles fournissent un descriptif non ambigu appelé gabarit pouvant être décrit sous une forme algébrique basée sur un ensemble de nombres entiers.

Le théorème de Birman & Williams [80] joue un rôle important dans ce contexte en garantissant – pour les attracteurs suffisamment dissipatifs – l'existence d'une correspondance entre la structure d'un attracteur et celle d'une variété branchée.

### 5.2.1 Méthodologie

De façon pratique, la caractérisation topologique d'un attracteur peut être entamée par l'obtention d'une frontière toroïdale pouvant se ramener aux contours de l'attracteur [279]. Le genre  $g$  d'un tore correspond au nombre de trous contenus dans sa surface, ou plus précisément au nombre maximum de courbes fermées élémentaires pouvant être tracées sans être déconnectées. Le genre  $g$  d'une frontière toroïdale nous procure une première information sur le nombre de composantes nécessaires pour obtenir une section de Poincaré capable de décrire notre dynamique. Pour  $g = 1$ , une unique section de Poincaré est nécessaire tandis que pour  $g \geq 3$ ,  $g - 1$  composantes sont nécessaires [279, 280]. Seule les tores de genre  $g = 1$  seront considérés dans ce chapitre ; ils pourront donc être caractérisés par une section de Poincaré unique.

#### L'approche usuelle

L'analyse détaillée des applications de premiers retours tirées de sections de Poincaré peut nous procurer une information considérable concernant la structure d'un attracteur et la partition de son flot (ex. [186]). Lorsque l'application de premier retour de la section de Poincaré présente un caractère lisse et unimodal, l'application de premier retour nous fournit directement le nombre de branches de l'attracteur et le découpage des différents domaines au sein de l'attracteur. L'analyse minutieuses de ces branches peut aussi nous procurer des informations sur les mécanismes de repliement et de déchirement au sein de l'attracteur et sur les types de torsion. Le fait de disposer

d'une telle information peut parfois nous permettre d'en déduire un gabarit de manière quasi-directe.

Pour décrire la structure d'un attracteur chaotique, la première tâche consiste donc à obtenir une section de Poincaré d'où une application de premier retour lisse et unimodale pourra être tirée. Lorsque le flot est tridimensionnel et fortement dissipatif, les trajectoires convergent rapidement vers une variété stable. Dans ces cas, la section de Poincaré bien choisie ramène le flot à une dimension unique et l'application de premier retour permet d'en déduire la partition en différentes branches du flot, ainsi que la topologie de l'attracteur.

### Le problème des systèmes faiblement dissipatifs

Pour les attracteurs faiblement dissipatifs et/ou toroïdaux, les sections de Poincaré nécessitent toujours deux dimensions pour être représentées et ne peuvent souvent pas donner lieu à des applications de premiers retours unimodales suffisamment lisses. L'extraction du gabarit s'avère alors plus délicate. Les applications de premiers retours ne permettent plus alors d'effectuer la partition du flot, et une autre approche doit être utilisée pour identifier les branches correspondant aux différents domaines de l'attracteur, ces dernières ne pouvant plus être identifiées simplement. Le premier problème rencontré est donc celui de la partition du flot qui nous empêche de recourir à l'application de premier retour. Cette première difficulté nous a conduit à remonter à l'étape précédant la reconstruction de l'application de premier retour : un retour à la section de Poincaré.

### 5.2.2 Une approche basée sur la section de Poincaré

Comme nous venons de l'évoquer, l'identification des différentes branches d'un attracteur est aisée dès lors qu'on est capable de ramener la dynamique à une application unidimensionnelle. Il n'en est toutefois pas toujours ainsi et d'autres approches ont été proposées. L'une des approches qui a été développée s'appuie sur les tangentes homoclines, c'est-à-dire les trajectoires pour lesquelles variétés stables et instables sont tangentes [143]. Une partition peut être obtenue en connectant les tangentes homoclines entre elles. La mise en application de cette approche s'est toutefois avérée particulièrement délicate car très sensible au bruit. En effet, les tangentes homoclines étant, par définition, tangentes aux variétés stables et instables, les trajectoires perturbées ne peuvent être raménées vers l'attracteur, conduisant à une amplification du bruit particulièrement marquée [161].

Une approche beaucoup plus robuste s'appuyant sur l'analyse des orbites périodiques instables a été proposée permettant d'éviter de recourir aux tangentes homoclines [183]. L'approche a notamment pu être appliquée au cas expérimental d'un laser  $\text{CO}_2$  à pertes modulées [182] dont la dynamique est caractérisée par une structure topologique difficile à distinguer. L'approche s'est également montrée d'une grande précision grâce à l'adjonction d'un algorithme de triangularisation [242]. À notre connaissance, l'approche n'a toutefois pas été appliquée à des cas faiblement dissipatifs, et n'est pas applicable à des dynamiques présentant des inversions.

Une approche d'identification des zones de piégeage basée sur l'extraction de ligne isochrones a également été proposée [84]. Cette autre approche a permis d'entamer la partition de la section de Poincaré et l'analyse topologique de l'attracteur de Chua [96] dans le cas d'un paramétrage pour lequel l'attracteur présente un enroulement en spirale qui ne peut être ramené à une application unidimensionnelle.

### Partition de la section de Poincaré

L'objectif de la partition de la section de Poincaré est d'identifier les différents domaines de l'attracteur chaotique, afin de comprendre ensuite les différentes façons de visiter ces domaines. Notre partition doit nous permettre de distinguer ces domaines sans redondance, c'est-à-dire sans effectuer de sous-découpage d'un domaine qui présenterait un comportement consistant, deux domaines consistants devant alors être rassemblés en un seul, ni de sur-découpage (un domaine ne peut être constitué de sous-domaines différents). Dans le cas d'un attracteur chaotique, cette partition doit distinguer au moins deux domaines distincts.

Identifier une partition adaptée de notre section de Poincaré consiste à obtenir une application surjective de notre section de Poincaré vers elle-même, qui, à chaque sous-ensemble de départ  $B_i$  permettra d'associer l'un de ces mêmes sous-ensemble  $B_j$  à l'arrivée. Pour être caractéristique de notre attracteur, la séparation entre ces différents sous-ensembles devra être le reflet des différents mécanismes à l'œuvre au sein de l'attracteur (repliement et déchirement, en particulier) lesquels devront donc être détectés au sein de la section de Poincaré. En pratique, ces mécanismes peuvent être plus ou moins difficiles à détecter. Les repliements se traduisent par une discontinuité au sein de la section de Poincaré (autrement-dit par une simple perte de difféomorphisme), les déchirements par une déconnexion (soit une perte d'homéomorphisme).

Le problème de partition peut se formuler comme suit. Soit  $F$  une application telle que :

$$\begin{aligned} F : S^n &\rightarrow S^n \\ \mathbf{x}_i &\mapsto \mathbf{x}_{i+1} \end{aligned} \quad (5.1)$$

où  $S^n$  est une section de Poincaré de dimension  $n$  de l'attracteur chaotique  $CA$  plongé dans un espace de dimension  $d > n$ , c'est-à-dire

$$S^n \equiv CA \cap Q_+^n, \quad CA \subset \mathbb{R}^d \quad (5.2)$$

où  $Q_+^n$  correspond à la surface orientée de la section  $Q_n$  choisie.

Notre objectif est d'obtenir une partition de  $S^n$  en un ensemble de  $m$  sous-ensembles, qui garantisse d'abord les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} B_0 &\equiv \{\mathbf{x}_j\}_{B_0 \subset S^n} \neq \emptyset \\ B_{i>0} &\equiv \left\{ F^i(\mathbf{x}_j) \setminus F^i(\mathbf{x}_j) \cap \{F^k(\mathbf{x}_j)\}_{k \in [0, i-1]} \right\}_{\{\mathbf{x}_j\} \subset B_0} \\ B_i &\subset S^n, \quad \bigcup_{i=0}^m B_i = S^n, \quad \bigcap_{i=0}^m B_i = \emptyset \end{aligned} \quad (5.3)$$

où  $B_0$  est un sous-ensemble de départ, non nul, inclus dans  $S^n$  (et différent de  $S^n$ ); les  $B_i$  sont des sous-ensembles qui ne présentent pas d'intersection entre eux et qui découlent de  $B_0$ . L'ensemble des  $B_i$  ( $i=0$  à  $m$ ) couvrent la totalité de la section  $S^n$ .

Cette formulation permet de garantir que notre partition de départ soit effectivement une partition, mais ne permet pas d'identifier la partition d'arrivée. Or la partition d'arrivée diffère nécessairement de la partition de départ. En particulier, une telle partition ne permet pas d'expliquer comment la zone  $B_0$  initialement choisie sera réoccupée. Cette information nous sera donnée en prolongeant l'application jusqu'à  $B_{m+1}$ . On aura alors

$$\begin{aligned} B_{m+1} &\equiv \left\{ F^{m+1}(\mathbf{x}_j) \setminus F^{m+1}(\mathbf{x}_j) \cap \{F^k(\mathbf{x}_j)\}_{k \in [1, m]} \right\}_{\{\mathbf{x}_j\} \subset B_0} \\ B_i &\subset S^n, \quad \bigcup_{i=1}^{m+1} B_i = S^n, \quad \bigcap_{i=1}^{m+1} B_i = \emptyset \end{aligned} \quad (5.4)$$

Cette formulation du problème en deux systèmes d'équations (Eqs. 5.3 et 5.4) nous permet d'expliquer en partie la problématique, mais reste insuffisante.

En effet, cette formulation garantit une partition complète et sans recoupement de notre section  $S^n$  au départ et à l'arrivée, mais ne permet aucunement d'en garantir la cohésion avec la structure de l'attracteur. Pour que cette partition soit représentative de la structure de l'attracteur, il faut que les limites des sous-ensembles  $B_i$  soient en correspondance avec les variétés stables et instables de l'attracteur, qui structurent le flot. Les variétés stables peuvent être définies comme l'ensemble des points du flot ayant même futur, les variétés instables comme ceux ayant même passé, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} W^s(\bar{x}) &= \{x \setminus \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x) = \bar{x}\} \\ W^u(\bar{x}) &= \{x \setminus \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(x) = \bar{x}\}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Le contour des sous-ensembles  $B_i$  doivent donc être en cohésion avec les variétés stables et instables du flot, soit

$$\bigcup_{i=1}^m \zeta(B_i) \subseteq \bigcup_k \zeta(S^n \cap W_k^{s,u}) \quad (5.6)$$

où  $\zeta(\cdot)$  est la fonction contour,  $d$  la dimension de l'espace des phases, et où les  $W_k^{s,u}$  correspondent aux variétés stables et instables du flot.

Cet ensemble d'équations (Eqs. 5.3, 5.4 et 5.6) nous fournit toutes les contraintes et propriétés nécessaires à la distinction des différentes branches du flot. Il est important de noter que cette formulation n'est pas propre à la dimension  $d = 3$  mais est – au contraire – tout à fait générale.

Cette formulation nous fournit également une partie de la méthodologie à mettre en œuvre pour obtenir la partition puisqu'elle s'appuie sur la propagation d'un ensemble  $B_0$  pour en déduire les autres ensembles. Elle ne nous indique toutefois pas comment choisir  $B_0$ , qui reste un point critique de la procédure. De manière pratique, on pourra noter que les contraintes ainsi formulées sont également valides en sens rétrogrades et peuvent ainsi permettre d'obtenir un autre découpage – rétrograde donc – qui pourra, si nécessaire, être recoupé avec le découpage direct. Un tel recoupage conduira toutefois à un sous-découpage de la partition optimale qui devra donc être simplifié, ensuite en associant les branches présentant les mêmes comportements.

De manière pratique, nous nous sommes, pour notre part, appuyés sur cette formulation pour obtenir la partition des sections de Poincaré de façon empirique, privilégiant une approche manuelle afin notamment de mieux comprendre les résultats rencontrés en cours d'analyse et de s'assurer de leur validité. Le développement méthodologique nous a d'ailleurs beaucoup aidé à comprendre les mécanismes en jeu dans les attracteurs. Pour cette analyse empirique, nous nous sommes appuyés sur les traceurs colorés qui permettent souvent une excellente distinction des mécanismes à l'œuvre au sein de l'attracteur. Ces mécanismes sont nombreux, il s'agit de : (a) l'étirement, (b) la compaction (ou l'agglomération lorsque plusieurs couches distinctes sont compactées), (c) le déchirement, (d) le collage et (e) le repliement. Les déchirements sont les plus faciles à détecter puisqu'ils se manifestent par la séparation du flot en sous parties, et donc au scindement en sous-ensembles d'un domaine originalement connexe. La partition pouvant être appliquée dans le sens direct ( $i > 0$ ) comme dans le sens rétrograde ( $i < 0$ ), les mécanismes de collage peuvent être détectés de même en considérant l'application rétrograde.

La détection des comportements de repliement est tout aussi importante pour effectuer la partition du flot dans la mesure où il s'agit, avec le mécanisme de collage, de l'autre mécanisme permettant d'assembler des branches différentes. Leur détection est néanmoins beaucoup plus délicate dans la mesure où elle nécessite de distinguer, non pas une déconnexion, mais une perte de différentiabilité locale pouvant se trouver au sein d'une section connexe. Pour en faciliter la détection, l'utilisation d'un traceur coloré (éventuellement basé sur une palette bi-dimensionnelle) s'est avéré d'une très grande utilité.

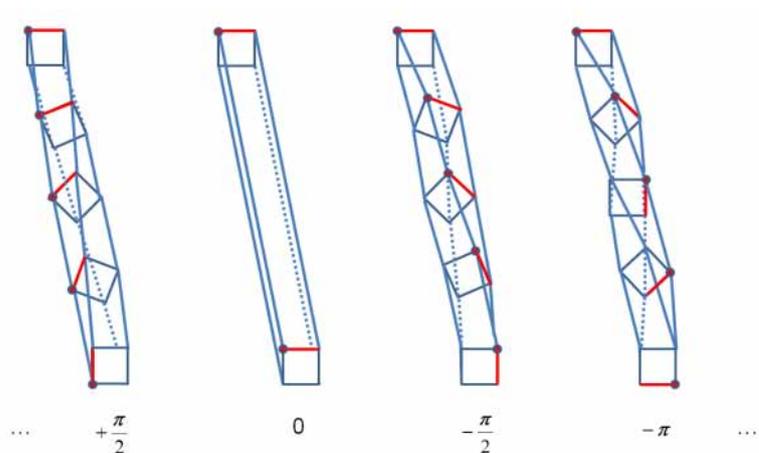
La détection des mécanismes d'étirement et de compaction / agglomération jouent un rôle essentiel pour comprendre la structuration du flot, mais ce ne sont pas eux qui vont induire la partition, leur détection n'est pas indispensable à ce stade.

### Descriptif des comportements des branches

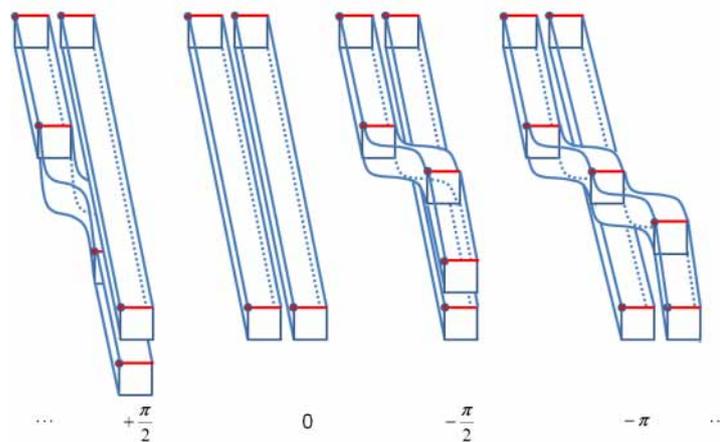
Une partition obtenue sur la base des propriétés et contraintes énoncées ci-dessus fournit de manière directe la correspondance entre branches, mais aucune information relative à leurs entrelacs.

En dimension trois, les entrelacs peuvent en principe être déduits des nombres d'enlacements calculés avec l'une des méthodes mentionnées plus haut (cf. § 5.2). Dans certains cas, les entrelacs peuvent être observés en utilisant une succession de coupes le long du flot, de même que les rotations des branches sur elle-mêmes. Qui plus est, lorsque l'attracteur ne présente pas de mécanisme de déchirement, le flot reste en contact avec lui-même en tout point de l'espace et l'analyse de la structure de l'attracteur peut se déduire presque entièrement de l'analyse de la section de Poincaré, c'est-à-dire à une rotation modulo  $2\pi$  du flot dans son ensemble.

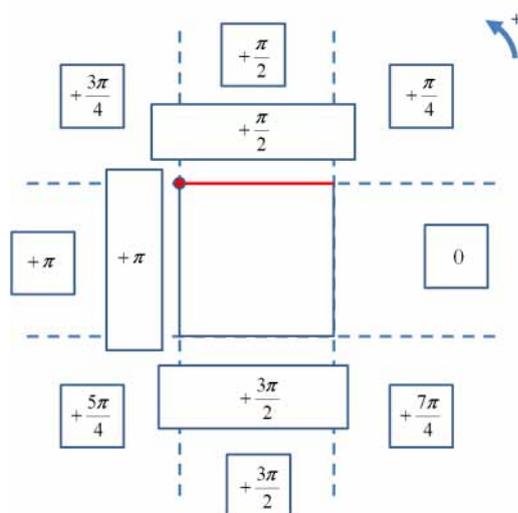
Bien que la méthode de partition de la section de Poincaré reste tout aussi valable en dimension supérieure, elle ne peut permettre d'en déduire la structure d'un attracteur de manière aussi directe. En effet, en dimension quatre, la notion de nœud doit être reconsidérée dans la mesure où des brins qui se croisent en dimension trois peuvent se décroiser en dimension quatre. Nous montrerons néanmoins qu'une description peut tout de même être envisagée en dimension quatre. Nous reviendrons sur ces points en section 5.4.



(a) Auto-rotation



(b) Rotation relative



(c) Convention de signe

FIGURE 5.2 – Auto-rotations et rotations relatives d'un flot 3D dans un espace 3D.

### Descriptif algébrique – section 2D dans $\mathbb{R}^3$

Quelle information obtenir d'une partition de la section de Poincaré? Comme nous l'avons vu plus haut, la topologie du chaos a déjà permis d'obtenir la description visuelle et algébrique d'un très grand nombre de systèmes dynamiques. Dans le cas des systèmes suffisamment dissipatifs, la description visuelle est assurée par un ensemble de bandes connectées entre elles dont l'existence est garantie par le théorème de Birman-Williams. Le descriptif de ces bandes – ou variétés branchées – peut être interprétée comme une succession de torsions – individuelles ou relatives – du flot qui peuvent être décrites par des entiers relatifs caractérisant le nombre de demi-tours effectués par chaque bande. Si l'on ne dispose que d'une section de Poincaré (et non du flot complet), une partie de l'information est perdue et l'on ne dispose plus alors que d'une information modulo  $2\pi$  sur les rotations de branches indépendantes (individuellement et entre-elles). Cette ambiguïté ne peut être levée qu'en effectuant le suivi des branches le long du flot, au sein de l'attracteur. Lorsque les branches restent toujours connectées entre elles (absence de déchirement), l'information concernant les rotations entre les branches reste entièrement préservée. Cette remarque est importante puisqu'elle va nous permettre d'analyser la structure de certains flots – les flots connexes – en se basant exclusivement sur une section de ce flot.

Pour les attracteurs faiblement dissipatifs, l'épaisseur du flot ne permet pas toujours de les réduire à une bande. D'autres descriptifs doivent donc être envisagés et développés. Nous ne considérons plus ici un flot dont la section serait unidimensionnelle – une ligne – mais comme une forme bidimensionnelle que nous symboliserons donc par un carré dont les orientations pourront correspondre à l'étirement et à la contraction. Les torsions successives d'un tel carré devront alors être assurées par un entier relatif correspondant à un nombre de rotation d'angle  $\pi/2$  (cf. Fig. 5.2a). Il en sera de même concernant l'entrelacs des branches entre elles (deux à deux), comme représentées Fig. 5.2b. Le cas de rotations intermédiaires, *i.e.* d'angles  $\pi/4$  devra également être conservé afin de disposer d'une plus grande généralité descriptive (cf. Fig. 5.2c).

S'appuyant sur cette nomenclature, toute section de Poincaré  $S^n$  pouvant être ramenée à un ensemble de  $m$  sous-ensembles  $B_i (i = 1..m)$  pourra être décrite sous une forme matricielle similaire à celles précédemment introduites dans les travaux de R. Gilmore [135], mais sur la base de rotations d'angle  $\pi/4$ , et relative à des objets bidimensionnels. Un exemple didactique est présenté en Fig. 5.3, dont la matrice de rotation  $\Gamma$  serait (dans l'hypothèse d'une direction de rotation unique et dans le sens négatif)

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -7 & -3 \\ -3 & -3 & -6 & -4 & -5 \\ -6 & -7 & -4 & -2 & -5 \\ -4 & -3 & -5 & -5 & -4 \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

Ne disposant pas d'information sur la rotation d'ensemble, ce descriptif ne sera donc valable qu'à  $2\pi$  près. Notons que, dans le cas où les directions et les nombres de rotations ne seraient pas connus, ce descriptif constituerait néanmoins un premier indicateur – simplifié – de la structure de notre attracteur. La matrice de rotation  $\Gamma$  pourrait être complétée par une matrice de contact  $C$  :

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & +1 \\ -1 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

visant à caractériser déchirements ( $-1$ ) et recollages ( $+1$ ). Dans le cas où déchirements et recollages se produiraient au cours d'une même itération (que ce soit pour recoller deux branches suivant des faces identiques ou différentes), la matrice de contact pourrait s'avérer ambiguë et il serait utile de distinguer les modifications de contact de début et de fin, la valeur ( $0$ ) n'aurait plus d'ambiguïté et correspondrait alors à une situation inchangée. Cette matrice de contact pourrait également être raffinée en précisant les côtés en contacts (ceux-ci n'étant pas nécessairement adjacents dans la représentation rectangulaire).

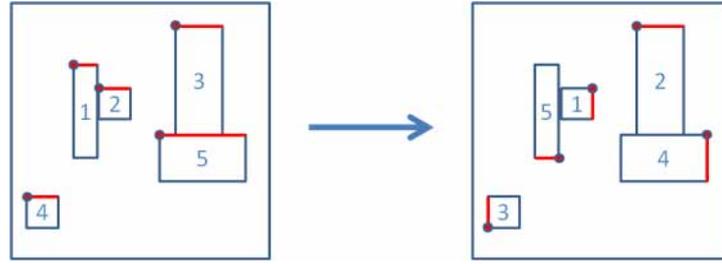


FIGURE 5.3 – Schéma d'exemple d'application d'une section de Poincaré vers elle-même visant à construire une matrice de rotation de premier retour.

Avant de pouvoir appliquer la présente nomenclature à une partition, une reformulation de la partition sous la forme d'un ensemble de rectangles convenablement positionnés les uns par rapport aux autres doit être effectuée. Ce repositionnement doit se faire en distinguant les directions d'étirement des directions de contractions. Dans la pratique, cette distinction n'a pas posé de problème majeur sur les cas analysés. L'existence de cas plus complexes ne peut toutefois pas être exclue.

### 5.3 Application au chaos faiblement dissipatif

#### 5.3.1 Le système de Lorenz-84

En 1984, Lorenz a introduit un modèle destiné à modéliser la dynamique de la circulation atmosphérique globale. Il s'agit d'un modèle de dimension trois

$$\begin{cases} \dot{x} = -y^2 - z^2 - ax + af \\ \dot{y} = xy - bxz - y + G \\ \dot{z} = bxy + xz - z. \end{cases} \quad (5.9)$$

Pour le paramétrage suivant  $(a, b, F, G) = (0.25, 4.0, 8.0, 1.0)$ , le système présente un régime dynamique chaotique et faiblement dissipatif, caractérisé par une section de Poincaré clairement bidimensionnelle et une dimension de Kaplan-Yorke  $d_{KY} = 2.38$ , grande par rapport à 2. L'attracteur présente également une structure d'apparence toroïdale comme l'illustrent le portrait de phase et une section de Poincaré présentés Fig. 5.4a-b.

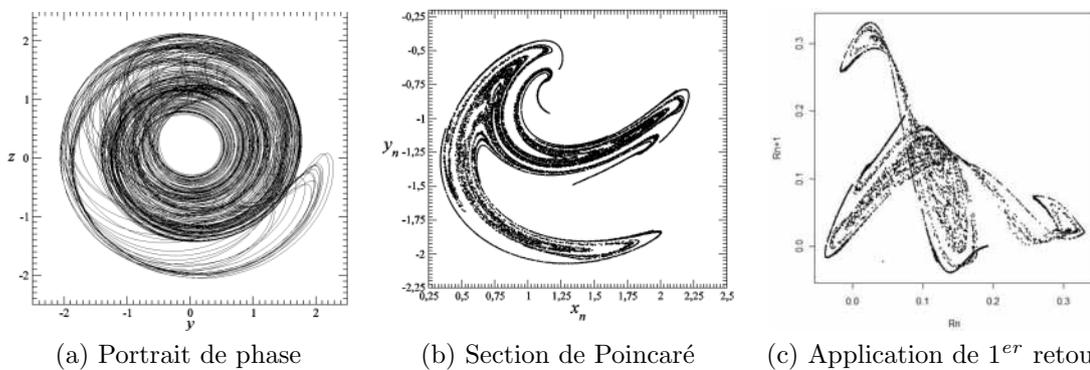


FIGURE 5.4 – Attracteur chaotique de structure toroïdale obtenu par intégration numérique des équations du système de Lorenz-84 (5.9).  $D_{KY} = 2.39$ .

Dans de nombreux cas, la distinction des différentes branches d'un attracteur peut se faire

grâce à une application de premier retour obtenue à partir d'une section de Poincaré choisie. Pour que cette méthode puisse être efficace, l'application de 1<sup>er</sup> retour doit présenter une structure garantissant la surjectivité de l'application. Une partition directe du flot peut alors en être tirée directement. Aucune application de ce type n'a pu être trouvée pour le présent attracteur en raison de l'épaisseur du flot et de la structure complexe de l'attracteur. Un exemple d'application de 1<sup>er</sup> retour est présenté en Figure 5.4c. La partition ne pouvant être obtenue en se basant sur l'application de 1<sup>er</sup> retour, l'approche introduite dans la section précédente (cf. § 5.2.2) a été utilisée.

### Partition basée sur la méthode des traceurs

L'utilisation de l'approche par traceurs colorés présentée plus haut a permis d'obtenir, pour l'attracteur de Lorenz-84, un sous-ensemble  $B_0$  pouvant être propagé jusqu'à couvrir l'ensemble de la section (cf. Fig. 5.5), et permettant ainsi de définir une première partition de la section de Poincaré étudiée. L'œil étant un très bon intégrateur, l'utilisation d'une palette colorée bidimensionnelle s'est avérée être ici un outil particulièrement efficace pour la détection des mécanismes de rotation, de collage, d'étirement, de compaction et de repliement (les déchirements étant généralement par nature plus facile à détecter).

L'un des points essentiels qui a pu être noté, en considérant les sous-domaines de l'attracteur de Lorenz-84 et leur propagation entre itérations successives, a été la rotation unidirectionnelle autour d'un centre situé sur la bordure inférieure de la zone de sélection  $B_0$  (cf. Fig. 5.5) qui se manifeste par un comportement alternativement à droite et à gauche de la zone située à proximité de ce point. Ce comportement rotatif met clairement en évidence le caractère toroïdal de l'attracteur. On note également, pour la région centrale, un mécanisme de contraction dans la direction verticale et d'étirement suivant l'horizontal (Fig. 5.5a). Les zones plus éloignées du centre permettent de distinguer une zone de repliement marquée, particulièrement visible sur le sous-ensemble  $B_1$ . Ce repliement tend à ralentir la rotation sur le tore dans certaines zones plus éloignées du centre de rotation. De ce repliement émerge une nouvelle branche dans la direction de compaction du flot, qui est rendue possible par l'épaisseur du flot.

En revanche, aucun déchirement n'a pu être détecté. Ce constat est important pour la façon de conduire notre analyse puisqu'il signifie que notre structure reste toujours connexe. En conséquence, les mouvements de rotation relative seront tous détectables de façon non ambiguë. Seule la rotation du flot sur lui-même – dans son ensemble – ne pourra être identifiée qu'à  $2\pi$  près, à moins de disposer d'une information complémentaire. L'analyse qualitative du portrait de phase présenté Fig. 5.4 ne présente aucune torsion d'ensemble du flot, la rotation d'ensemble est donc égale à 0.

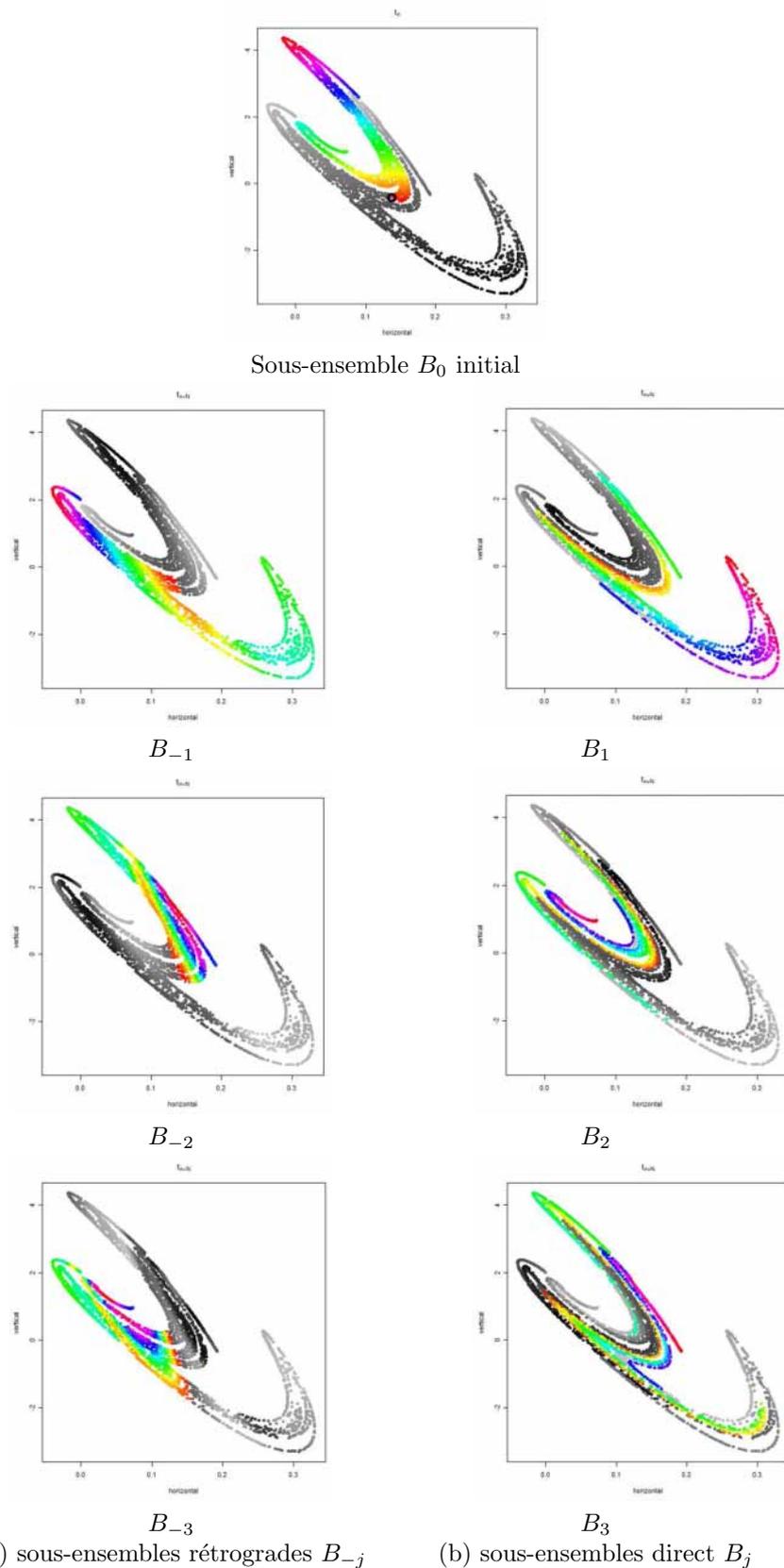


FIGURE 5.5 – Sections de Poincaré de l'attracteur de *Lorenz-84* avec zone sélectionnée  $B_0$  et propagation de cette zone sur l'attracteur suivant le sens direct  $B_i, i = 1..3$  et rétrograde  $B_{-i}, i = 1..3$ .

Ces différents points nous permettent de proposer la partition ajustée, constituée de 5 sous-ensembles notés 0, 1, 2a, 2b et 3, présentée Fig. 5.6a. En s'appuyant, parallèlement, sur le partitionnement direct et rétrograde présenté Figure 5.5, cette première partition nous permet, de constater les liens de correspondance suivant :  $(0-1) \rightarrow (2a)$  et  $(2b)$ ,  $(2a-2b) \rightarrow (0)$  et  $(3)$ ,  $(3) \rightarrow (1)$ . La dernière correspondance  $(3) \rightarrow (1)$  apparaît très simple tandis que les deux autres sont plus délicates.

La notation  $(0-1)$  indique ici que les branches  $(0)$  et  $(1)$  peuvent être vue comme un regroupement équivalent à une branche unique, qui va donner naissance à deux nouvelles branches  $(2a)$  et  $(2b)$  distinctes, mais présentant une extrémité commune. La séparation entre ces deux branches est marquée par une zone de discontinuité résultant d'un repliement dans un sens de rotation opposé à celui du mouvement d'ensemble sur le tore (cf. Fig. 5.5, passage  $B_0 \mapsto B_1$  où le repliement apparaît très nettement). À ce repliement correspond également un étirement très marqué puisque les zones colorées rouge et jaune, initialement très localisées à proximité du centre de rotation de la section, se retrouvent étirées sur une importante partie de l'attracteur. Qui plus est, cet étirement apparaît assez singulier puisqu'orienté suivant une direction ne correspondant pas à celle des branches (dont la forme allongée provient pourtant – nécessairement – d'un mécanisme d'étirement). L'étirement de la zone repliée se fait suivant une direction perpendiculaire à la direction de la branche comme le montre le passage  $B_{-2} \mapsto B_{-1}$  (Fig. 5.5), c'est-à-dire suivant la direction globalement « contractante ». Ce mécanisme joue un rôle très important au sein de cet attracteur puisqu'il contribue, d'une part, à entretenir l'épaisseur du flot, et parce qu'il conduit à transformer une branche double (cf. zone  $B_{-2}$ ) en une branche triple (zone  $B_{-1}$ ). Le repliement se faisant suivant une direction perpendiculaire à la branche, les zones  $(2a)$  et  $(2b)$  n'auront pas de correspondance simple avec les zones  $(0)$  et  $(1)$ .

L'étirement ici constaté est important à noter parce qu'il s'agit vraisemblablement d'une caractéristique constitutive des attracteurs faiblement dissipatifs dans la mesure où un tel mécanisme permet d'entretenir l'épaisseur du flot en étirant localement une direction contractante et en développant de nouvelles branches. D'autre part, il semble important de noter qu'un tel mécanisme n'a, à notre connaissance, pas encore été rapporté.

Le second lien de  $(2a-2b) \rightarrow (0)$  et  $(3)$  n'offre pas non plus de correspondance simple. En effet, on peut s'apercevoir en observant le passage  $B_{-3} \mapsto B_{-2}$  qu'une correspondance adéquate requiert une troisième séparation le long de la branche  $(2a-2b)$ , qui soit perpendiculaire à la branche, faisant émerger une branche supplémentaire  $(2c)$ . Cette extrémité  $(2c)$  se transforme alors en  $(3)$ , tandis que le reste  $(2a-2b)$  privé de  $(2c)$  se compacte pour se transformer en  $(0)$  au sein duquel peuvent être distinguées  $(0a)$  et  $(0b)$ . Une nouvelle partition, améliorée, mais encore incomplète, peut en être déduite (cf. Fig. 5.6b).

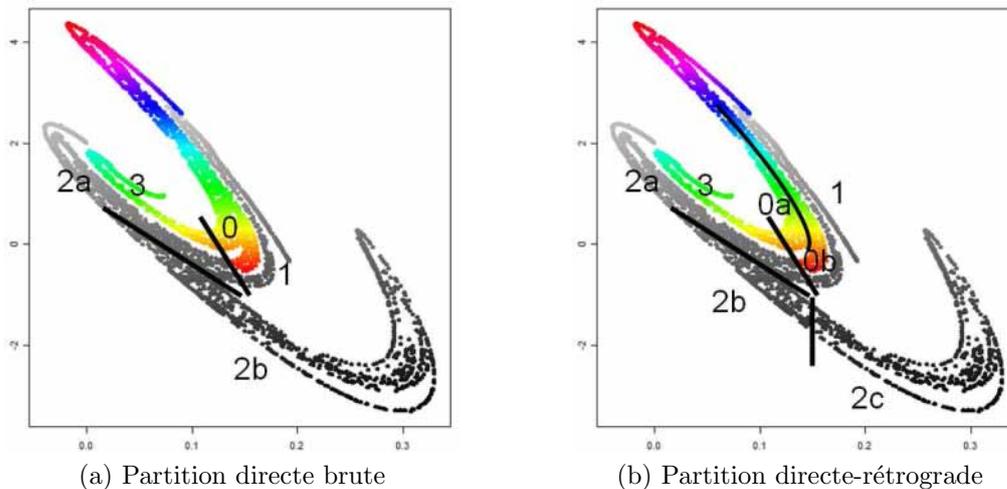


FIGURE 5.6 – Premières partitions (brute et améliorée) de la section de Poincaré.

### Reconstruction de la topologie du flot

L'absence constatée de déchirement nous autorise à effectuer une exploration de la structure topologique sans information supplémentaire. L'objet de cette exploration va être de trouver une déformation nous permettant de passer de la partition proposée vers elle-même sans y appliquer de coupure, ni d'autre déformation discontinue que celle observée entre (2a) et (2b) (cf. paragraphe précédent). Cette exploration peut être effectuée de tête, ou sur papier comme illustré en Figures 5.7 pour les passages  $(0-1) \rightarrow (2a)$  et  $(2b)$ , et  $(2a-2b) \rightarrow (3-0)$ .

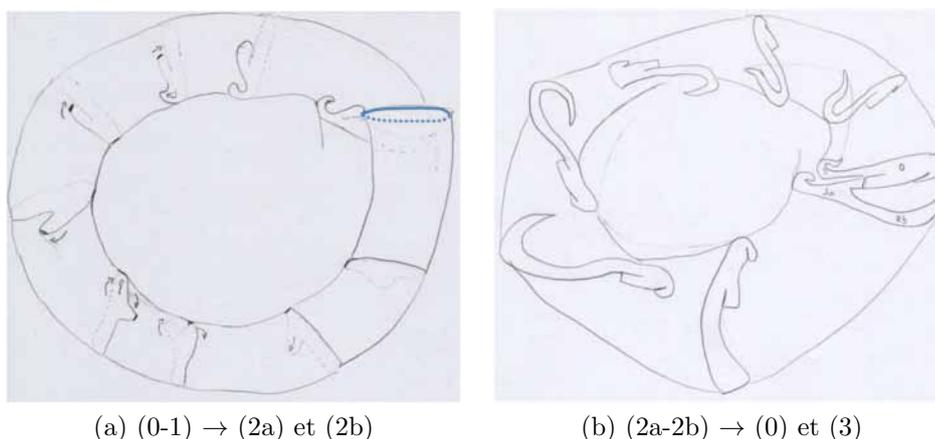
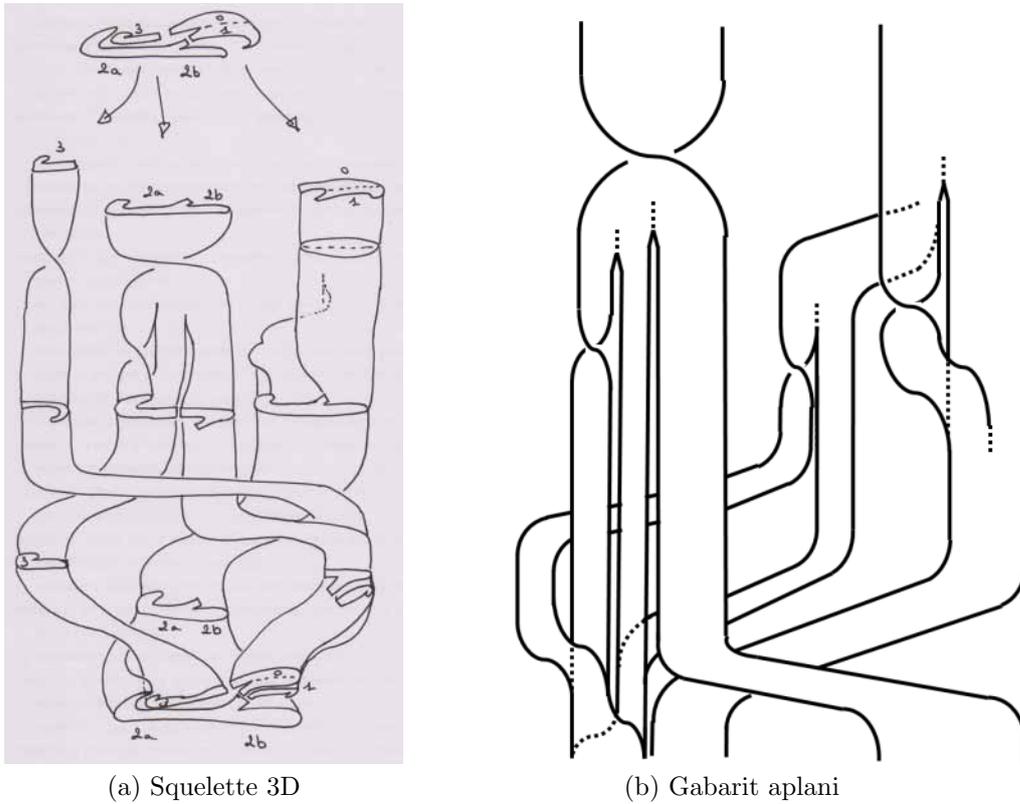


FIGURE 5.7 – Structure permettant l'auto-correspondance de la partition de la section de Poincaré présentée Fig. 5.6 vers elle-même.

Partant des représentations circulaires présentées Fig. 5.7, une représentation sous la forme d'une tresse 3D peut être proposée (Fig. 5.8a) où certains domaines, initialement superposés, sont artificiellement alignés permettant une meilleure visibilité. L'intérêt d'une représentation 3D est de permettre de prendre en compte la structuration et les déformations bidirectionnelles du flot, ce qu'une représentation en gabarit (2D) permet plus difficilement. Pour les attracteur fortement dissipatifs, le théorème de Birmann-Williams [80] nous garantit une isotopie entre les trajectoires du flot de l'attracteur et une variété branchée plane. Bien que cette propriété ne soit plus garantie dans le cadre d'attracteurs faiblement dissipatifs, il nous est tout de même apparu intéressant d'aplanir les structures obtenues afin de pouvoir effectuer des comparaisons de structures de gabarits. Appliqué à l'attracteur de Lorenz-84, cet aplanissement a permis de mettre en évidence les limites de validité de cette relation d'isotopie dans le cadre d'attracteurs faiblement dissipatifs. Pour le cas faiblement dissipatif ici considéré, l'émergence de la branche supplémentaire ne résultant pas d'un simple repliement (qu'il serait facile de représenter dans un plan), mais la branche émergeant effectivement de l'épaisseur du flot, sa représentation est apparue tout à fait inusuelle et délicate. Une représentation plane, en gabarit, a pu être obtenue en introduisant artificiellement l'émergence d'une branche dans une direction orthogonale au flot. Cette dernière est présentée Figure 5.8b. Ces deux modes de représentation (squelette et gabarit) ainsi présentés (Figs. 5.8a et 5.8b) présentent toutefois un inconvénient important. En séparant les bandes horizontalement, les unes à côté des autres, on distingue mieux les branches mais on perd l'information concernant leur organisation verticale. Le mode de description algébrique proposé au paragraphe §5.2.2 permet de conserver cette information.

### Formulation algébrique

Nous avons vu plus haut (cf. § 5.2.2) qu'il était possible de formuler algébriquement la structure topologique de l'attracteur. Une telle formulation requiert de disposer d'une partition pouvant être ramenée à des formes rectangulaires. Une partition rectangulaire a pu être obtenue en considérant une direction horizontale correspondant à la direction d'étirement (global) des branches, et une

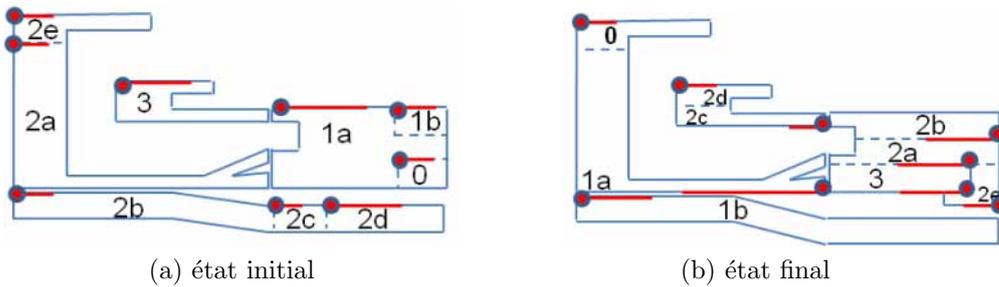


(a) Squelette 3D

(b) Gabarit aplani

FIGURE 5.8 – Représentation rectiligne du branchement entre les différents sous-ensembles de la section de Poincaré. La connexion entre les différentes branches est coupée pour une meilleure visualisation des parcours.

direction verticale orthogonale à cette dernière. Une section de Poincaré ainsi remodelée a pu être obtenue pour laquelle un raffinement de la partition a également été opéré afin de prendre en compte tous les repliements présents aux extrémités des branches.



(a) état initial

(b) état final

FIGURE 5.9 – Positions initiales et finales des neuf branches dans la section de Poincaré schématisée.

La partition détaillée ainsi obtenue présente neuf branches notées (0), (1a), (1b), (2a), (2b), (2c), (2d), (2e), (3), dont les états initiaux et finaux sont présentés Figure 5.9. Le passage de l'état initial à l'état final est décrit par la matrice de rotation  $\Gamma_{Lr84}$  :

$$\Gamma_{Lr84} = \begin{bmatrix} -8 & -4 & -4 & -5 & -6 & -7 & -8 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -2 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -2 & 0 & -2 & -3 & -3 & -4 & -1 & -2 \\ -5 & -4 & -2 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 \\ -6 & -4 & -3 & -4 & -4 & -4 & -5 & -4 & -4 \\ -7 & -4 & -3 & -4 & -4 & -4 & -6 & -4 & -4 \\ -8 & -4 & -4 & -4 & -5 & -6 & -8 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -1 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -2 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

Les termes sont exprimés en quart de tour. Ils sont tous de signe négatifs confirmant le caractère toroïdal de l'attracteur. Les termes diagonaux décrivent la rotation des branches sur elle-mêmes (ou auto-rotation) et présentent des valeurs de 0,  $-\pi$  et  $-2\pi$ . Les rotations relatives présentent tous les quarts de tours possibles : 0,  $-\pi/4$ ,  $-\pi/2$ , ...  $-2\pi$ . Une information complémentaire peut être apportée par l'usage d'une matrice de contact  $C_{Lr84}$  visant à décrire les liens de contact entre les branches :

$$C_{Lr84} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

Partant de cette formulation matricielle, nous avons pu vérifier qu'il était effectivement possible de remonter à une formulation de la partition équivalente à la partition rectangulaire présentée Fig. 5.9.

### 5.3.2 La dynamique céréalière

Un modèle global a été récemment obtenu pour le cycle des cultures céréalières [1] qui a été présenté en chapitre 4. Il s'agit d'un modèle faiblement dissipatif ( $D_{KY} = 2.68$ , section de Poincaré bidimensionnelle, cf. Fig. 4.6) caractérisé par un portrait de phase complexe d'apparence toroïdale (cf. Fig. 4.2). Aucune application de premier retour simple n'a pu en être tirée (cf. Fig. 4.6). Un tel modèle est intéressant dans la mesure où il est le premier de ce type à être obtenu à partir de données réelles. Le caractère à la fois multimodal et complexe de l'application de 1<sup>er</sup> retour compromet la possibilité d'en déduire simplement une partition du flot, laquelle est nécessaire pour distinguer les branches de l'attracteur par les approches usuelles. L'approche basée sur la méthode des traceurs colorés a donc été employée à nouveau sur ce cas réel, environnemental.

#### Partition basée sur la méthode des traceurs

Comme pour l'attracteur de Lorenz-84, la partition du flot a été appliquée en s'appuyant sur la formulation présentée par les équations 5.3, 5.4 et 5.6. Cette approche, bien qu'assez systématique, n'a pas encore pu être automatisée et nécessite de ce fait une recherche itérative manuelle. Pour la dynamique du cycle céréalière, l'obtention du domaine  $B_0$  de départ s'est révélé assez facile grâce à une région de la section de Poincaré déconnectée des autres. Cette région a donc été immédiatement prise comme domaine initial et sa propagation directe et rétrograde a pu être mise en œuvre (cf. Fig. 5.10).



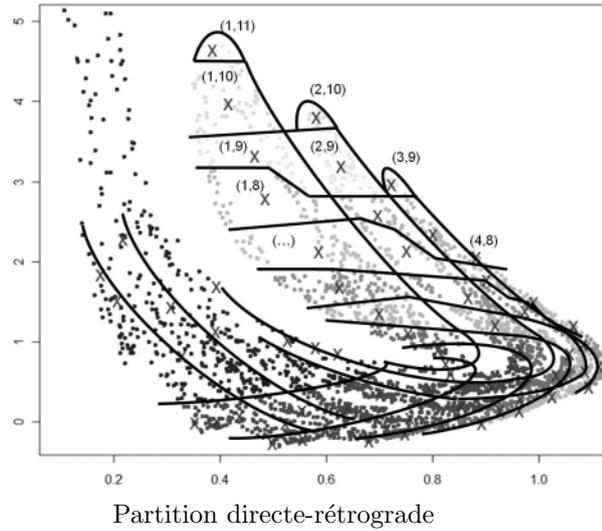


FIGURE 5.11 – Partition obtenue par la propagation directe-rétrograde systématique du domaine  $B_0$  choisi dans la section de Poincaré.

Pour que la totalité de la section de Poincaré soit visitée partant de ce domaine  $B_0$  de départ, il faut compter onze itérations dans chaque direction (directe et rétrograde). Le suivi de cette partition permet de mettre en évidence une rotation différentielle, très rapide à proximité de son centre (situé à l'extrémité inférieure du domaine  $B_0$ ) et très lente sur la région externes de l'attracteur. Ce comportement rotatif met en évidence le caractère toroïdal de l'attracteur. Une première partition du domaine relatif à une visite complète de la section de Poincaré peut être obtenue par recoupement des domaines visités en sens directs et rétrogrades qui correspondent respectivement aux variétés instables et stables. La partition qui en résulte est présentée Fig. 5.11. Cette partition systématique conduit à produire plus de branches que nécessaire à la description topologique du flot (les branches présentant les mêmes comportements doivent donc être regroupées). Pour distinguer les domaines pouvant être réunis en une branche et pour comprendre les liens existants entre branches distinctes, il est nécessaire d'analyser les différents mécanismes à l'œuvre au sein de l'attracteur. Outre les directions de contraction et d'étirement très visibles Fig. 5.10 (colonne de droite), le mécanisme le plus facile à détecter est ici un déchirement que l'on observe très bien entre  $B_{-1}$  (présentant un domaine connecté au reste de la section), et  $B_0$ , un domaine ne présentant plus de connexion au reste de la section (Fig. 5.10). La présence de ce déchirement permet de différencier d'emblée le présent attracteur de celui de Lorenz-84. Cette perte de contact entre les différents domaines du flot entraîne une perte d'information supplémentaire sur les rotations d'ensemble des domaines (identifiables à  $2\pi$  près) ainsi séparés, et sur concernant leur rotation relative (également identifiable à  $2\pi$  près). En pratique, cette indétermination a pu être élucidée par un suivi de la structure le long du flot.

Une analyse détaillée de ce passage  $B_{-1} \rightarrow B_0$  a été effectuée en distinguant par un code de couleur différent les deux côtés de la zone  $B_{-1}$  (Fig. 5.12). Cette distinction a permis de mettre en évidence plusieurs mécanismes. Tout d'abord un enroulement du domaine  $B_{-1}$  conduisant à venir recoller les bords inférieurs et supérieurs sur eux-mêmes, et donnant naissance à une zone creuse (qui continuera à se propager au sein de l'attracteur). Ce domaine  $B_{-1}$ , qui présente une forme très empatée dans sa partie inférieure (au contraire d'une forme supérieure très effilée), permet la mise en place d'un étirement différentiel dans sa zone inférieure, conduisant à l'émergence d'une troisième branche et à un étirement local de la direction de contraction. On retrouve donc ici un comportement d'étirement local dans une direction globalement contractante déjà observé dans le cas de l'attracteur de Lorenz-84. Ce mécanisme est à l'origine de l'épaisseur du caractère pleinement tridimensionnel du flot et du caractère faiblement dissipatif de l'attracteur. L'émergence d'une zone creuse tend vraisemblablement à renforcer encore l'épaisseur du flot dans le cas présent.

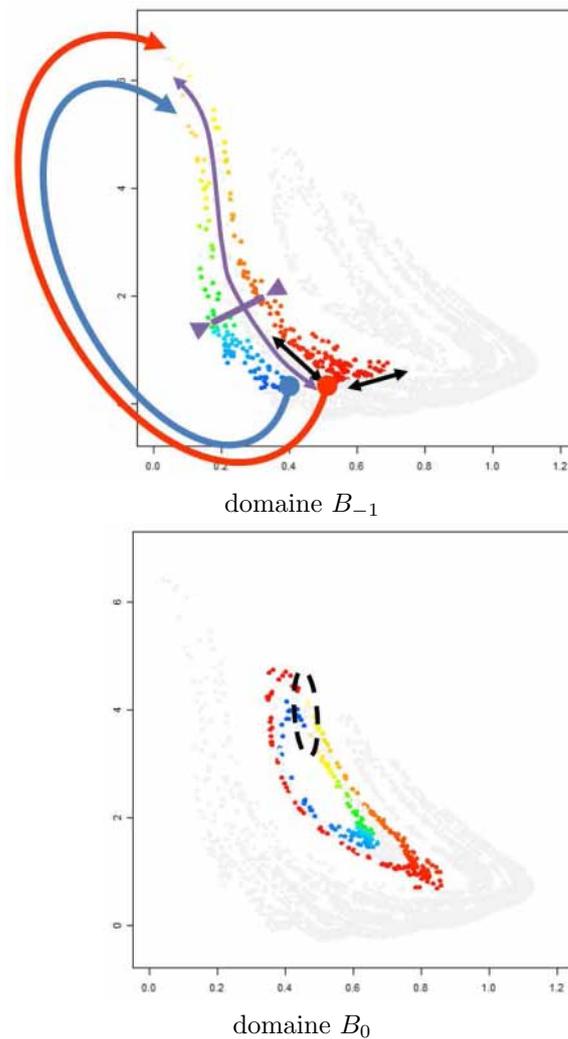


FIGURE 5.12 – Zoom sur la transition  $B_{-1}^* \rightarrow B_0^*$ . Les directions principales d'étirement et de contraction sont représentées en mauve, le mouvement d'enroulement est illustré par les flèches rouge et jaune. Les directions d'étirement locales sont également représentées par de petites flèches noires

### Reconstruction de la topologie du flot

L'analyse des différents mécanismes ici détectés permet d'en tirer une bonne visibilité du squelette de la zone d'enroulement (Fig. 5.13a). En laissant émerger une branche dans le sens perpendiculaire à la direction d'étirement, ce squelette peut être artificiellement ramené à une représentation plane – comme nous l'avons fait pour l'attracteur de Lorenz-84. Hormis l'identification de la zone de déchirement, le reste de l'attracteur a pu être obtenu en prenant en compte une succession de sections de Poincaré permettant d'identifier d'éventuels comportements de rotations ne pouvant être identifiés en s'appuyant uniquement sur la section (rotations à  $2\pi$  près des domaines indépendants et les uns par rapport aux autres). Un gabarit aplani a ainsi pu être obtenu (Fig. 5.13b).

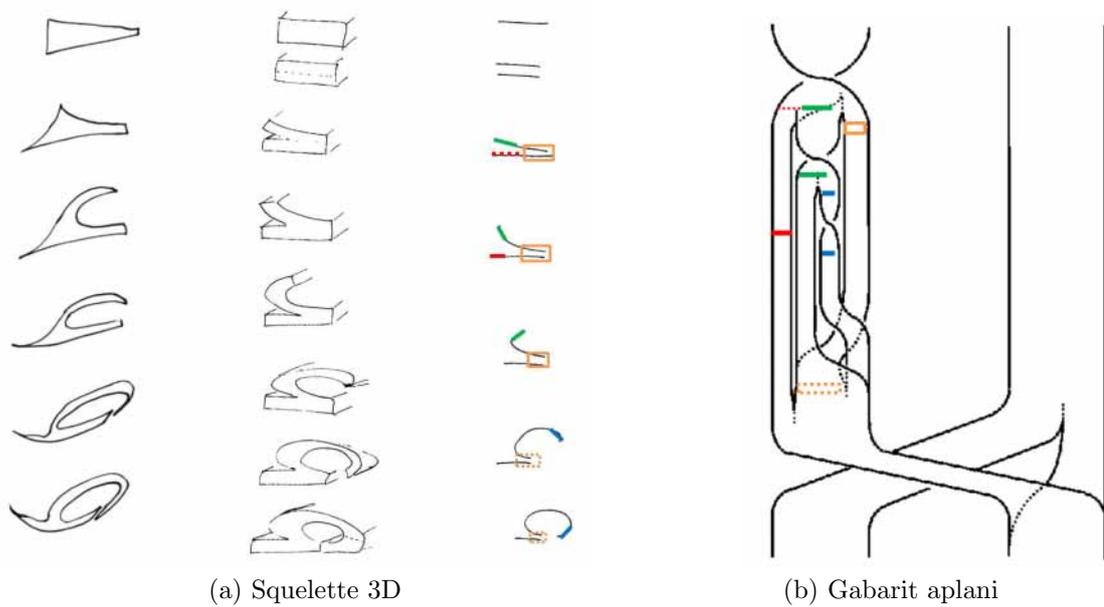


FIGURE 5.13 – (a) Passade d’une représentation 3D à une représentation 2D permettant de faire émerger une branche et de fournir une représentation plane du branchement entre les différents sous-ensembles de la section de Poincaré. (b) Gabarit ainsi obtenu. Le code de couleur permet de visualiser la zone d’émergence au sein du gabarit.

### Formulation algébrique

La formulation algébrique nécessite de revoir la représentation de la section de Poincaré sous la forme d'un ensemble de domaines constitué de formes rectangulaires. Cette représentation a pu être obtenue sans difficulté particulière dans le cas présent (cf. Fig. 5.14). La partition détaillée ainsi obtenue présente six branches notées de (1) à (6). Le passage de l'état initial à l'état final est décrit par la matrice de rotation  $\Gamma_{C_{crops}}$

$$\Gamma_{C_{crops}} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & -4 & -4 & -5 & -3 \\ -2 & -4 & -6 & -3 & -8 & -9 \\ -2 & -4 & -3 & -8 & -5 & -5 \\ -2 & -5 & -8 & -5 & -10 & -5 \\ -2 & -3 & -9 & -5 & -5 & -12 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

dont les termes sont exprimés en quart de tours. Les termes diagonaux (d'auto-rotation) vont de 0 à -12 (soit 0 à  $-3\pi$ ). Les rotations relatives varient de 0 à -9 (soit de 0 à  $-9\pi/4$ ). Une information complémentaire peut être apportée par l'usage d'une matrice de contact  $C_{C_{crops}}$  visant à décrire les liens de contact entre les branches

$$C_{C_{crops}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0^* \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0^* & 0^* & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Certaines valeur reviennent à zéro lors d'un recollage successif à un déchirement sur le même domaine (mais après un mouvement de rotation spécifique non trivial). Celles-ci sont notées  $0^*$  et sont en fait tels que :  $0^* = -1 + 1$ .

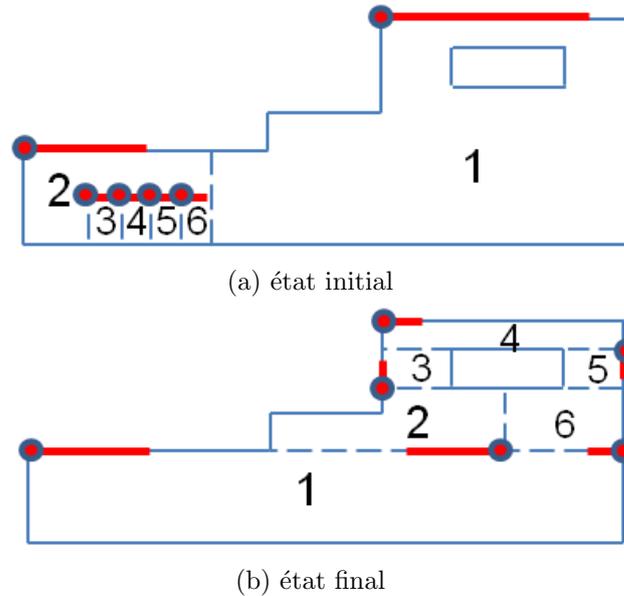


FIGURE 5.14 – Positions initiales et finales des neuf branches dans la section de Poincaré schématisée.

### 5.3.3 Comparatif *Lorenz-84* versus *cereal crops*

Nous avons analysé au cours des précédents paragraphes les attracteurs issus respectivement du modèle de Lorenz-84 [206] et le modèle global à 15-termes obtenu pour le cycle des cultures céréalières en zone semi-aride. Leurs analyses ont permis de révéler plusieurs caractéristiques communes permettant de les classer dans la même famille des attracteurs toroïdaux faiblement dissipatifs. Les deux attracteurs présentent, en particulier, dans les deux cas, une rotation différentielle du flot autour d'un cycle central, et des mécanismes spécifiques d'étirement locaux dans la direction globalement contractante conduisant à l'émergence de nouvelles branches.

Une importante différence a toutefois pu être constatée entre les deux structures. Celle de Lorenz-84 présente un flot sans déchirement alors qu'un déchirement prend place au sein du flot pour le modèle global obtenu pour le cycle des cultures céréalières.

L'identification d'un nouvel attracteur requiert deux conditions nécessaires [201] : la première est que l'attracteur présente une topologie qui n'ait pas été précédemment rapportée ; la seconde est que l'attracteur ne corresponde pas à la forme symétrique d'un attracteur déjà rapporté. Une comparaison rigoureuse requiert donc une analyse topologique.

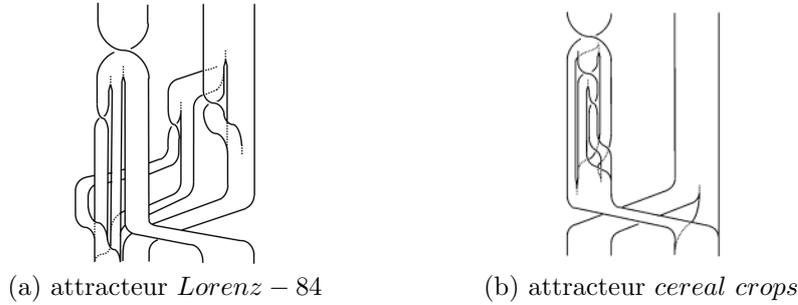


FIGURE 5.15 – Gabarits obtenus (a) pour l'attracteur de *Lorenz* – 84, et (b) pour l'attracteur *cereal crops*.

Il n'existe à ce jour que très peu d'exemples d'attracteurs toroïdaux faiblement dissipatifs. Le premier d'entre eux, introduit par Lorenz en 1984, a été choisi pour ce comparatif. Le caractère toroïdal des deux autres systèmes, introduits plus récemment [296, 95], n'a toutefois pas encore été établi rigoureusement, analyse topologique oblige. Le comparatif entre l'attracteur de Lorenz-84 et le modèle global [4] est vraisemblablement le premier comparatif topologique entre deux flots toroïdaux faiblement dissipatifs.

Le comparatif des gabarits des deux flots met sans ambiguïté en évidence des topologies très différentes (cf. Fig. 5.15a), lesquelles ne peuvent pas être ramenées à des formes plus simples par effet de symétrie. Nous avons donc bien affaire à un nouvel attracteur *cereal crops*, distinct de celui de *Lorenz-84*.

Qui plus est, les descriptifs algébriques, plus rigoureux car permettant de prendre en compte les squelettes des attracteurs sans les aplanir (et donc de préserver la structure de leur flot sans simplification) permet de confirmer – sans ambiguïté – ce résultat puisque  $\Gamma_{Lorenz-84} \neq \Gamma_{Crops}$  et  $C_{Lorenz-84} \neq C_{Crops}$  (cf. Eqs. 5.10, 5.11, 5.12 et 5.13).

## 5.4 Topologie du chaos en grande dimension ( $\geq 4$ )

L'une des plus sévères limitations de la topologie du chaos est de n'être applicable qu'en dimension trois [136, 139, 196, 199], essentiellement pour des raisons théoriques. En conséquence, très peu d'articles se sont intéressés à la topologie du chaos en grande dimension [226, 184]. La topologie du chaos s'appuie largement sur la théorie des nœuds. Or, en dimensions 4 et supérieures, des nœuds constitués de brins indépendants se dénouent. Cette propriété tient du fait qu'à partir de la dimension quatre, des brins croisés en dimension trois peuvent être décroisés par simple déplacement suivant une direction orthogonale aux directions utilisées par le nœud ; Et cette propriété de décroisement ne dépend pas de la dimension des brins (cf. Fig. 5.16). Pour cette raison, des courbes fermées indépendantes qui présentent des nœuds en dimension trois, vont se dénouer en dimensions quatre et supérieures. Une description topologique basée sur la notion de nœud ou d'entrelacs peut donc apparaître caduque, car rendant certains des éléments de base de la topologie du chaos (essentiellement tridimensionnelle) de peu d'utilité. Cette propriété de décroisement s'appuie toutefois sur le cas de brins indépendants et n'est pas vraie pour des brins latéralement connexes (cf. Annexe C).

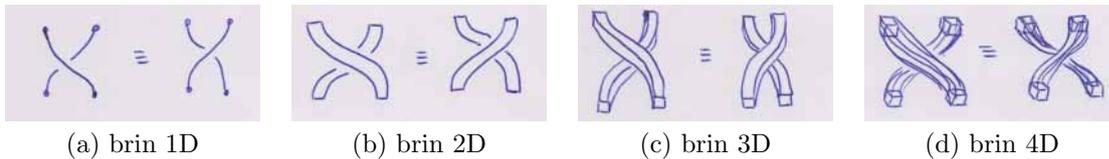


FIGURE 5.16 – En dimension quatre, le croisement de brins indépendants n'est qu'apparent, qu'il s'agisse de brins constitués de simples lignes (a), de surfaces (b) de volumes (c) ou d'hypervolumes (d).

Nous avons pu voir au début de ce chapitre qu'en dimension trois les mouvements d'un flot pouvaient être interprétés à partir des mouvements de rotation des différents domaines de ce flot. Ces différents domaines doivent d'abord être identifiés par une partition de la section de Poincaré, et la structure du flot peut alors être déduite des mouvements de rotation de ces domaines qui sont détectables au sein de la section de Poincaré par une analyse comparative entre les états initiaux et finaux (cf. Fig. 5.4), qu'il s'agisse de mouvements d'auto-rotation (rotation d'un domaine sur lui-même), ou de rotation relative (rotation d'un domaine par rapport à un autre domaine). Dans le cas général d'un flot 4D, les sections de Poincaré sont de dimension trois. À une partition initiale de l'hypersection (3D) du flot va correspondre une partition finale (un exemple pédagogique est présenté Fig. 5.17). Une première caractérisation du flot peut donc se faire en décrivant les mouvements de rotation nécessaires pour passer de la partition initiale à la partition finale.

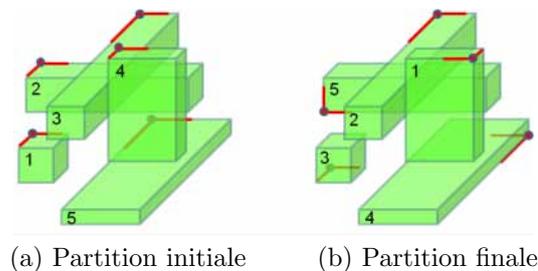


FIGURE 5.17 – Correspondance d'une section de Poincaré 3D à elle-même (exemple didactique).

Notons toutefois qu'en augmentant de dimension, les différents mouvements de rotation vont être multipliés et devenir ainsi plus difficiles à analyser. En effet, outre la difficulté de se représenter un espace de dimension quatre ou supérieure, d'autres difficultés vont découler du fait que les

rotations ne vont plus se faire autour d'axes mais d'hyper-axes, plus difficiles à intellectualiser. Il est également important de rappeler que les mouvements de rotation ne sont – généralement – pas commutatifs. De ce fait l'ordre de mouvements consécutifs ne pourra pas être modifié librement, ce qui pourra en perturber la compréhension.

### Liens dimensionnels entre flot d'une application de Poincaré

Avant de lister les mouvements possibles que peut présenter un ensemble de Poincaré avant de revenir à la section initiale, il convient d'abord de bien distinguer la section  $S$  définissant l'hypersurface de dimension  $d-1$  retenue comme étant transverse au flot  $\phi_t : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  du système étudié. Soit  $\hat{\phi}_t(\vec{x}_0)$  le vecteur directeur au temps  $t$  du flot  $\phi_t$  issu d'une condition initiale  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ . Par définition, la section de Poincaré est choisie telle que

$$\vec{S} \cdot \hat{\phi}_t \neq 0, (\forall t \in \mathbb{R}^+) \quad (5.14)$$

cette condition étant suffisante dans la mesure où le système dynamique est supposé ergodique lorsque  $\vec{x}_0 \in \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$  où  $\mathcal{A}$  est un ensemble attracteur invariant sous l'action du flot. Soit  $\Sigma_0$  l'ensemble de Poincaré associé à cette section  $S$  et tel que

$$\Sigma_0 = \{\vec{x} \in t/\vec{x} \subset S\}. \quad (5.15)$$

Soit  $\Sigma_1$  l'ensemble image de  $\sigma_0$  sous l'action du flot  $\phi$  et tel que

$$\Sigma_1 = \{\phi_{\tau(\vec{x})}(\vec{x})/\vec{x} \in \Sigma_0, \quad \forall t < \tau(\vec{x})/\phi_t(\vec{x}) \in \Sigma_0\}. \quad (5.16)$$

Puisque la cohérence de phase n'est pas rigoureusement assurée, le temps  $\tau(\vec{x})$  auquel le flot issu de  $\vec{x} \in \Sigma_0$  croise la section de Poincaré dépend du point  $\vec{x}$ . Il convient alors d'introduire le temps topologique  $\varphi \in [0; 1]$  et tel que  $\varphi = 0$  pour toute condition initiale  $\vec{x} \in \Sigma_0$  et  $\varphi = 1$  pour toute image telle que  $\phi_1(\vec{x}) \in \Sigma_1$ . Par extension, l'ensemble de Poincaré  $\Sigma_0$  a pour image  $\Sigma_\varphi$  au temps  $\phi \in ]0; 1]$  et  $\Sigma_1 = \Sigma_{\phi=1}$ . Par définition, l'espace tangent  $\sigma_\varphi(\vec{x})$  à  $\Sigma_\varphi$  en  $\vec{x}$ , et dont la normale est désignée par  $\vec{\sigma}_\varphi^\perp$ , est toujours tel que :

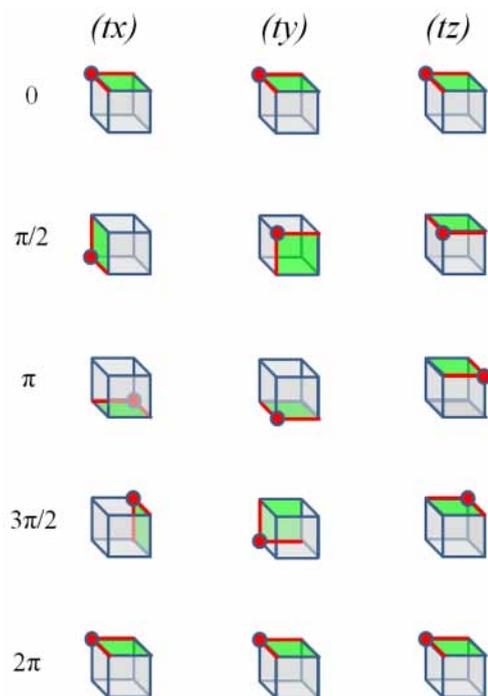
$$\vec{\sigma}_\varphi^\perp(\vec{x}) \cdot \hat{\phi}_\varphi(\vec{x}) \neq 0. \quad (5.17)$$

Cette condition restreint les transformations que peut subir  $\Sigma_0$  sous l'action du flot  $\phi_\varphi$ . Par définition, les transformations de  $\Sigma_\varphi$  sous l'action du flot  $\phi_\varphi$  ne peuvent se faire que dans l'espace tangent  $\sigma_\varphi$ ; de ce fait, la transformation de  $\Sigma_\varphi$  implique nécessairement une rotation  $\mathcal{R}_{\hat{\phi}_\varphi}(\theta)$  autour de l'axe  $\hat{\phi}_\varphi$  et d'angle  $\theta$  (ou de l'hyper-axe incluant  $\hat{\phi}_\varphi$ ).

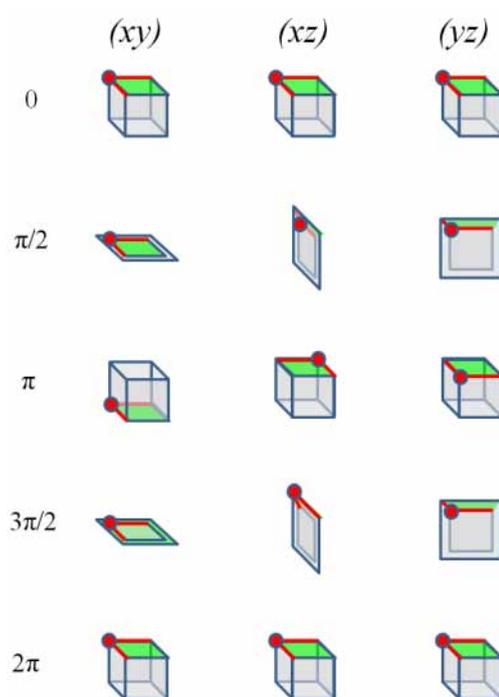
De là, il vient qu'il n'existe aucun  $\vec{x} \in \Sigma_0$  tel que  $\vec{\sigma}_1^\perp(\vec{x}) = -\vec{\sigma}_0^\perp(\vec{x})$  où  $\sigma_1(\vec{x})$  est l'image de l'espace tangent  $\sigma_0(\vec{x})$  sous l'action du flot  $\phi_1$ . De ce fait, pour tout ensemble de Poincaré  $\Sigma_0 \in \mathbb{R}^m$  tel qu'il existe au moins un  $\vec{x} \in \Sigma_0$  vérifiant  $\vec{\sigma}_1^\perp(\vec{x}) = -\vec{\sigma}_0^\perp(\vec{x})$  alors la suspension de l'ensemble  $\Sigma_0$  doit être plongée dans  $\mathbb{R}^{m+2}$ ; dans le cas contraire où un tel point n'existe pas, la suspension peut être plongée dans  $\mathbb{R}^{m+1}$ .

### Mouvements d'un ensemble de Poincaré au sein d'un flot

L'analyse du lien dimensionnel entre flot et ensemble de Poincaré présentée ci-dessus montre la nécessité de distinguer la direction du flot des autres directions. Associée à une propriété de connexité (qui empêche le croisement comme le décroisement des brins), cette distinction interdit l'enroulement de brins sur eux-même (cf. Annexe C.2) et permet ainsi de garantir la possibilité de déduire la structure d'un flot de l'analyse des mouvements de rotations au sein d'un ensemble de Poincaré. Pour analyser un tel ensemble de Poincaré de dimension  $m$ , il peut être utile de suivre le comportement des différents domaines de l'ensemble de Poincaré partitionné. Le recours à des hypercubes de dimension  $m$  (des carrés pour des ensembles de Poincaré 2D, des cubes en 3D, des tesseractes en 4D etc.) s'est avéré très utile dans notre démarche, et sur la plupart des cas rencontrés, permettant en particulier de bien distinguer les directions d'étirement et de contraction, les mouvements d'auto-rotation du flot (pouvant révéler les inversions d'orientation et donc la nécessité de recourir à un espace  $\mathbb{R}^{m+2}$ ) et les mouvements de rotation relative entre les différents domaines de la partition.

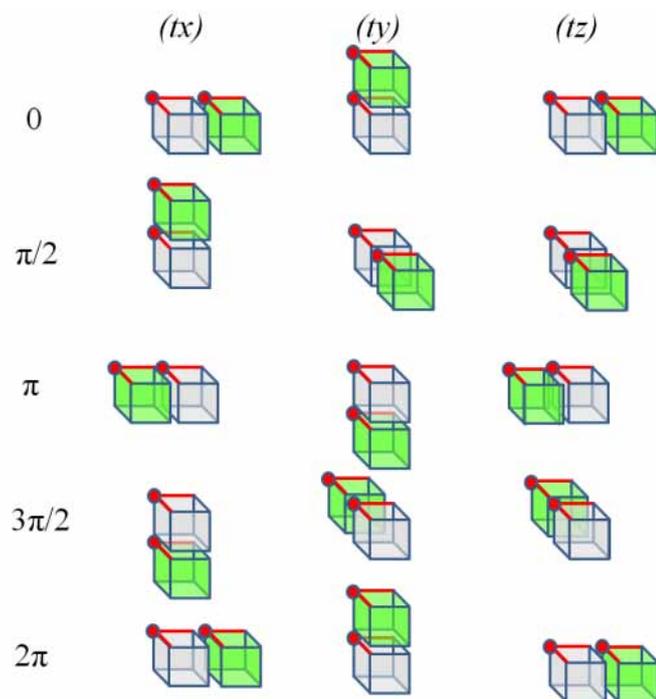


(a) Auto-rotations d'un flot 4D

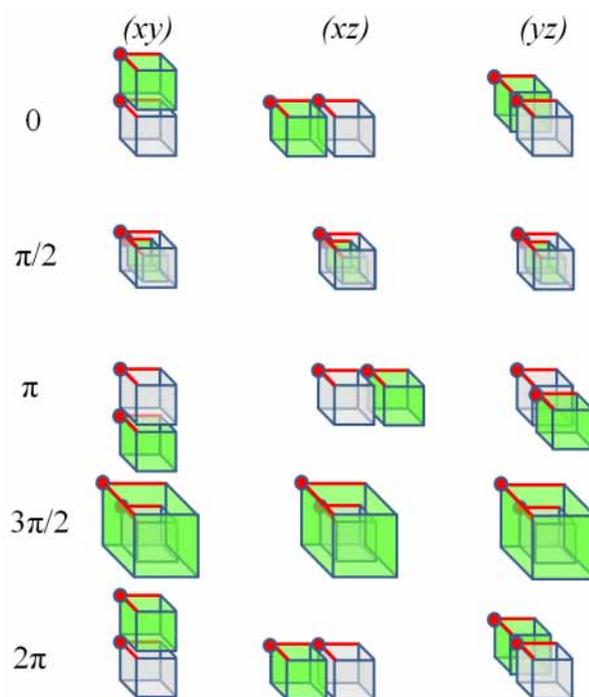


(b) Auto-rotations d'une section 3D d'un flot 5D

FIGURE 5.18 – Auto-rotations au sein d'un espace 4D pour des angles allant de 0 à  $2\pi$  autour des six plans possibles.



(a) Section 3D d'un flot 4D



(b) Section 3D d'un flot 5D

FIGURE 5.19 – Rotations relatives d'un flot 4D dans un espace 4D.

Les différents types de mouvements de rotation possibles au sein d'un flot 4D présentant un ensemble de Poincaré 3D sont présentés Fig. 5.18 et 5.19. Comme pour les flots 3D, ces mouvements de rotation peuvent être séparés en mouvements d'auto-rotation et mouvements de rotation relative. Les mouvements d'auto-rotation se rapportent à des branches individuelles (Fig. 5.18), et sont équivalents à la rotation d'un cube dans un espace 4D (présentés ici par intervalles d'angle  $\pi/2$ ). Les rotations relatives des branches entre elles reviennent à considérer la rotation de cubes les uns par rapport aux autres (Fig. 5.19). Ces rotations relatives sont également présentées par intervalles d'angle  $\pi/2$ . Des angle intermédiaires  $\pi/4$  sont toutefois nécessaires en pratique pour de disposer d'un descriptif non ambigü de la structure du flot entre états initial et final (cf. Fig. 5.17). Les deux Figures 5.18 et 5.19 permettent aussi de définir les conventions de signe relatives à chacune des rotations.

Les mouvements n'impliquant pas d'inversion du flot peuvent se produire dans un espace  $\mathbb{R}^4$  (Figs. 5.18a et 5.19a), les autres nécessitent de recourir à un espace de dimension  $\mathbb{R}^5$  (Figs. 5.18b et 5.19b).

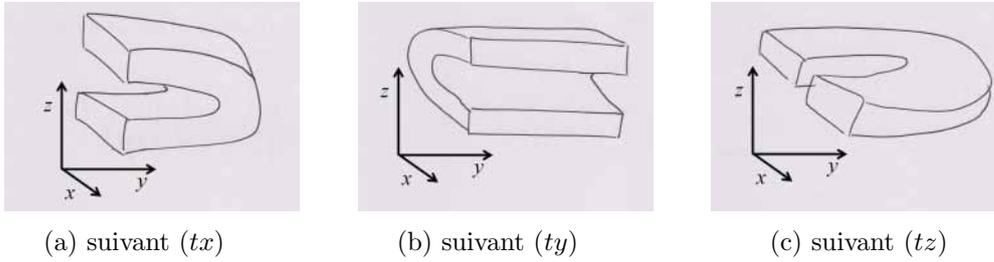


FIGURE 5.20 – plis d'une section 3D

Si l'on prend pour exemple le cas d'un ensemble de Poincaré de dimension 3, qui peut être vu comme un objet tridimensionnel pouvant se déformer dans une espace lui-même 3D (la quatrième dimension du flot correspondant à celle du temps topologique  $t$ ), dans cet espace, trois hyper-axes de rotations sont possibles, respectivement  $(tx)$ ,  $(ty)$  et  $(tz)$  auxquels pourront correspondre trois types de plis (cf. Fig. 5.20).

En s'appuyant sur les différents mouvements de cubes présentés en Figs. 5.18a et 5.19a, le pli présenté par exemple en Fig. 5.20a revient donc à une combinaison simple de rotation et d'auto-rotation comme illustrée Fig. 5.21. Notons que pour un tel pli, la rotation relative revient à un angle de  $+\pi/2$  tandis que l'auto-rotation correspond à des angles de  $+\pi$ . Pour exprimer ces mouvements de rotation, on propose la notation matricielle suivante où les colonnes et les lignes se rapportent à la partition des différents domaines du flot (ici 0 et 1), où les hyper-axes de rotations sont donnés entre parenthèse et les angles de rotations sont exprimés en huitième de tour ( $\pi/4$ ), soit  $-8, -7, \dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots, +8$  pour  $-2\pi, -7\pi/4, \dots, -\pi/2, -\pi/4, 0, +\pi/2, +\pi/4$ .

$$\Gamma_{+\pi} = \begin{bmatrix} (tx)^{+4} & (tx)^{+2} \\ (tx)^{+2} & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.18)$$

De la même manière, un pli d'angle opposé pourra être exprimé comme

$$\Gamma_{-\pi} = \begin{bmatrix} (tx)^{-4} & (tx)^{-2} \\ (tx)^{-2} & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.19)$$

D'autre part, les mouvements de rotations n'étant en général pas commutatifs, une notation en crochet  $\{ \cdot, \cdot \}$  sera utilisée pour indiquer une liste de mouvements successifs.

Il est important de préciser que partant d'un ensemble de Poincaré – et non d'un flot – certaines information seront nécessairement perdues. La première de ces information perdue correspond à la rotation d'ensemble du flot qui ne peut donc être connue que modulo  $2\pi$ , quelle que soit la rotation considérée. Pour un flot caractérisé par une succession de mouvements  $\Gamma$ , on ne pourra remonter, partant d'un ensemble de Poincaré de son flot, qu'à  $\tilde{\Gamma}$  tel que

$$\tilde{\Gamma} = \{ (t \cdot)^{0 \bmod [8]}, \Gamma \} \quad (5.20)$$

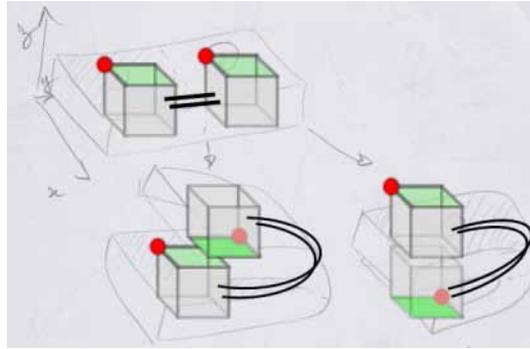


FIGURE 5.21 – plis d’une section 3D suivant  $(tx)$  pour des angles positif (à gauche) et négatif (à droite).

où  $(t \cdot)$  représente toute rotation autour d’un hyper-axe incluant la direction  $(t)$  de l’ensemble du flot (où les termes sont – dans ce cas particulier – commutatifs).

Précisons ici que ne disposant que des états initiaux et finaux, il ne sera pas nécessairement possible d’identifier l’ordre des mouvements. Toutefois, les mouvements de rotation étant algébriquement non commutatifs dans le cas général, les différentes solutions possibles n’en seront pas moins très contraintes et en conséquence leur nombre restreint.

#### Mouvement d’un ensemble de Poincaré 2D dans l’espace 4D

Les mouvements de rotation possibles au sein d’un flot 4D présentant un ensemble de Poincaré 2D peuvent être directement déduits des Figures 5.18 et 5.19 en faisant tendre l’épaisseur de l’une des directions vers 0. Ces mouvements sont présentés Fig. 5.18, obtenus en négligeant l’épaisseur suivant la direction  $(x)$ . Les mouvements de rotation présentés autour du plan  $(tx)$  se ramènent alors aux mouvements de rotations possibles dans  $\mathbb{R}^3$ . Les mouvements de rotation autour des plans  $(ty)$  et  $(tz)$  qui permettent une inversion de la normale au flot restent spécifiques à  $\mathbb{R}^4$  et leur détection révélatrice de cette situation. Notons que si l’on ne dispose pas du flot, mais seulement d’un ensemble de Poincaré 2D, les mouvements de rotation autour de  $(ty)$  et  $(tz)$  ne pourront être perçus qu’au signe près (puisque l’on ne pourra donc pas distinguer  $\Gamma_{+\pi}$  de  $\Gamma_{-\pi}$  dans les Eqs 5.18 & 5.19). Le même type de perte d’information aura lieu pour un ensemble de Poincaré 3D issu d’un flot 5D et plus généralement pour un ensemble de Poincaré  $nD$  issu d’un flot  $(n + 2)D$ .

## 5.5 Application aux systèmes discrets à deux variables

Nous avons vu qu’en dimension trois, les flots rencontrés pouvaient être plus ou moins épais selon qu’ils correspondent à des comportements plus faiblement ou plus fortement dissipatifs. Pour des raisons méthodologiques, cela nous a conduit à distinguer les flots présentant des sections de Poincaré localement unidimensionnelles des flots présentant des sections pleinement bidimensionnelles. La même nécessité de distinguer la dimension des sections peut être attendue en dimension quatre avec les sections de Poincaré 2D mais aussi 3D. Pour anticiper ces comportements, deux types de systèmes ont été considérés, basés sur des formulations discrètes à deux ou trois variables.

Les derniers paragraphes de ce chapitre 5 visent à vérifier l’applicabilité de l’analyse topologique à différents cas. En effet, nous avons vu au paragraphe précédent (§5.4), qu’il était possible, en s’appuyant sur le suivi des sections de Poincaré (malgré certaines ambiguïtés, pour les section 2D, notamment) de caractériser un flot quadridimensionnel par l’analyse de la partition initiale et finale. Pour cela, le flot doit être connexe, ce qui doit se traduire par l’absence de déchirement au sein de la section de Poincaré. Plutôt que d’appliquer l’approche à des systèmes continus (pour lesquels il serait nécessaire d’effectuer un choix de section de Poincaré qui pourrait s’avérer délicat),

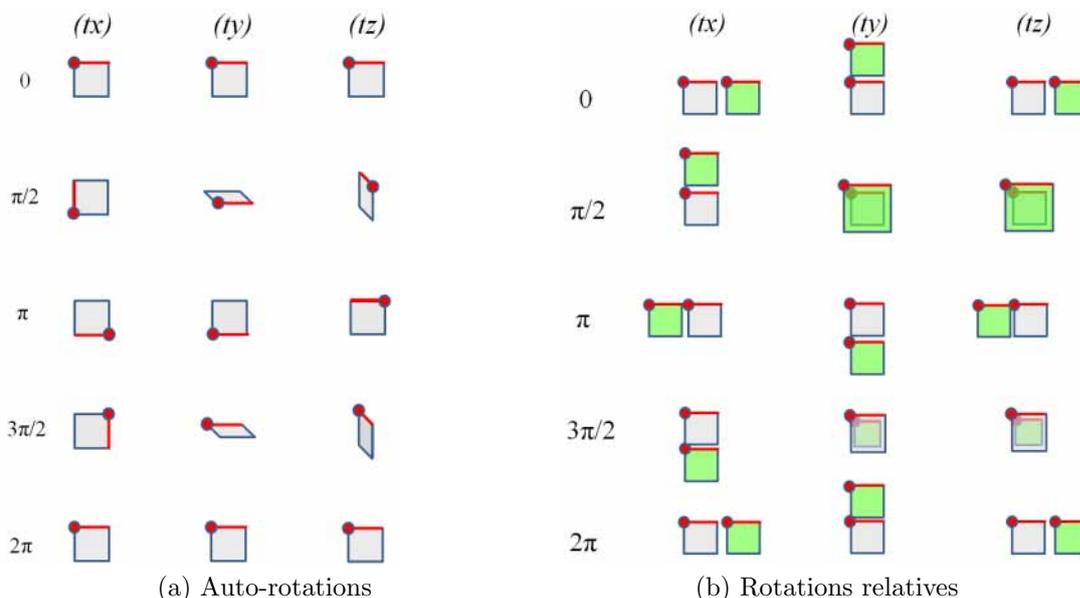


FIGURE 5.22 – Mouvements de rotation possibles pour un flot dans  $\mathbb{R}^4$  présentant un ensemble de Poincaré 2D.

nous avons préféré nous intéresser d'abord à des systèmes chaotiques discrets bien identifiés, et à chercher à reconstruire leur suspension – possiblement quadridimensionnelle – et d'en obtenir un gabarit ou un squelette.

### 5.5.1 le système de Hénon à suspension 4D connexe

Le système de Hénon est une application discrète bidimensionnelle introduite en 1976 [158]. Cette application est définie comme

$$\begin{cases} X_{i+1} = Y_i + 1 - aX_i^2 \\ Y_{i+1} = bX_i. \end{cases} \quad (5.21)$$

pour lesquels deux types de comportements peuvent être distingués, préservant, ou non, l'orientation de l'application et pour lesquels des suspensions différentes peuvent donc être attendues. Une suspension 3D est attendue lorsque l'orientation est préservée, et le modèle tridimensionnel d'une telle suspension a récemment pu être obtenu [269].

Pour  $(a, b) = (1.4, 0.3)$ , la dynamique présente un comportement chaotique avec une inversion d'orientation. Une telle inversion étant impossible en dimension trois, une suspension de dimension quatre doit être attendue. Une représentation plane de la structure peut toutefois en être espérée, s'agissant d'une dynamique chaotique et non hyperchaotique.

L'analyse de la suspension de cette application peut être effectuée en considérant cette application comme la section de Poincaré d'un flot continu. La méthode du traceur coloré a été utilisée ici dans l'objet d'obtenir la structure topologique de la suspension de cette application. L'application étant bidimensionnelle, son analyse est très similaire à celle présentée, précédemment, pour un flot 3D. En utilisant un traçage coloré (Fig. 5.23a), on aboutit après une itération, à la configuration présentée Fig. 5.23c. L'utilisation du traceur coloré pour suivre les différentes parties de l'application entre l'état initial (a) et l'état final (c), met en évidence deux éléments essentiels. D'une part, aucun déchirement n'est présent entre l'état initial et l'état final, la suspension est donc connexe et l'analyse topologique doit pouvoir être directement déduite de l'analyse de cette transformation (à  $2\pi$  près concernant son comportement d'ensemble du flot). D'autre part, il n'est pas possible

de passer de l'état  $i$  à l'état  $i + 1$  ni par de simples rotations dans le plan de l'application, ni par anamorphose. En effet, l'utilisation d'un traceur de la normale (présenté Fig. 5.23 sous la forme d'un petit carré orienté) nous révèle la présence d'une symétrie et illustre la nécessité de disposer d'un espace de dimension 4 pour pouvoir reconstruire la suspension 4D de cette application. En utilisant les rotations autorisées par la dimension quatre, le passage de l'état  $i$  à l'état  $i + 1$  devient quasi-direct (pour une meilleure correspondance visuelle, on choisira pour les variables la correspondance suivante :  $X \equiv y$  et  $Y \equiv z$ ). En effet, une fois l'inversion de symétrie effectuée par une rotation de  $\pm\pi$  autour du plan  $(tz)$  (les deux cas  $(tz)^{-4}$  et  $(tz)^{+4}$  sont possibles ici, le sens de rotation étant perdu, cf. §5.4); en revanche, la section étant plane, le recours à un flot de dimension cinq ne peut être justifié, il ne reste plus qu'à effectuer une contraction de la section, suivi d'un repliement d'angle  $\pm\pi$  suivant l'axe  $(tx)$  d'une partie de l'application. L'obtention de la structure du flot de la suspension en découle directement.

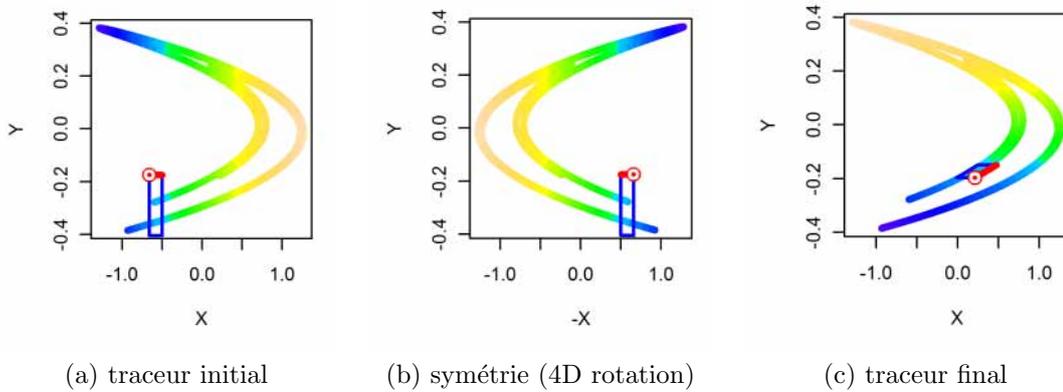


FIGURE 5.23 – Passage de l'état initial (a) au final (c) du traceur.

Ne pouvant disposer ici que d'une section unique, la topologie ne peut être obtenue qu'à  $2\pi$  près pour ce qui concerne la rotation d'ensemble du flot (cf. Eq. 5.20). Nous avons, de ce fait, cherché à produire la formulation la plus simple possible. Le squelette ainsi obtenu pour l'attracteur de Hénon est présenté Fig. 5.24a. Il est formulé sous la forme de deux mécanismes successifs : une auto-rotation (de  $\pm\pi$  autour de  $(tz)$ ) et une distinction (séparation sans déchirement) en deux sous-branches (connexes donc), l'une présentant une rotation de  $\pm\pi$  dans le plan de l'application et venant se placer sous la première. Le squelette ainsi obtenu peut être ramené en un gabarit classique (Fig. 5.24b) en symbolisant l'auto-rotation mentionnée ci-dessus sous la forme d'un trapèze vertical (rotation autour du plan  $(tz)$ ) de sens indifférencié (en raison de l'ambiguïté du signe, qui est spécifique aux sections 2D dans  $\mathbb{R}^4$ ).

En s'appuyant sur ces mécanismes successifs, et sur les rotations qui leur correspondent (cf. Fig. 5.22), un descriptif algébrique est également possible. La formulation permet de distinguer le mouvement d'ensemble du mouvement relatif, en deux matrices distinctes, chaque élément de matrice étant constitué d'une succession ordonnée (afin d'assurer la non commutativité des rotations) décrivant les rotations successives. Le squelette ainsi obtenu peut être décrit par la matrice  $\Gamma_H$

$$\Gamma_H = \left[ \begin{array}{cc} \{(tz)^{\pm 4}, (tx)^{-4}\} & \{(tz)^{\pm 4}, (tx)^{-2}\} \\ \{(tz)^{\pm 4}, (tx)^{-2}\} & \{(tz)^{\pm 4}, 1\} \end{array} \right] = \left\{ (tz)^{\pm 4}, \left[ \begin{array}{cc} (tx)^{-4} & (tx)^{-2} \\ (tx)^{-2} & 1 \end{array} \right] \right\} \quad (5.22)$$

où les lignes et colonnes correspondent aux différentes branches du flot, les accolades présentent l'ordre successif des rotations, et les nombres entiers placés en exposant expriment les angles de rotation en huitième de tours ( $\pi/4$ ) suivant les conventions présentées plus haut (cf. Figs. 5.18, 5.19 et 5.22). Cette solution n'est pas unique ici dans la mesure où la rotation par rapport au plan  $(tz)$  pourrait être effectuée en second plutôt qu'en premier. Toutefois, l'ordre des rotations ne peut pas être simplement inversé en raison de la non commutativité des rotations; une telle inversion

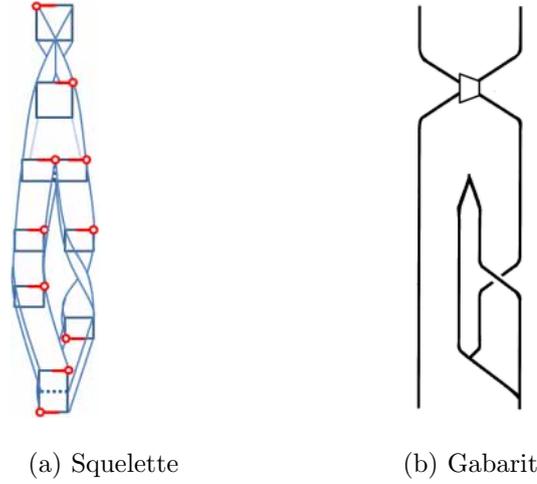


FIGURE 5.24 – Squelette (a) et gabarit (b) correspondant à la suspension (la plus simple possible) du système de Hénon.

nécessite de modifier la formulation de  $\Gamma_H$  en

$$\tilde{\Gamma}_H = \left\{ \left[ \begin{array}{cc} (tx)^{+4} & (tx)^{+2} \\ (tx)^{+2} & 1 \end{array} \right], (tz)^{\mp 4} \right\}. \quad (5.23)$$

L'utilisation des quaternions permettrait certainement de disposer d'une notation plus synthétique pour la description de la topologie d'une telle structure ; elle serait peut-être également plus efficace pour automatiser la recherche des formulations les plus simples ou pour effectuer plus efficacement des comparatifs de dynamiques. Malgré son efficacité, le descriptif présenté ci-dessus ne permet pas d'explicitier la connectivité latérale des différents domaines d'un attracteur. Le dispositif peut donc encore être un peu raffiné.

### 5.5.2 Le système super-Hénon à suspension 4D connexe

L'application super-Hénon est introduite ici afin de disposer d'un cas un peu plus complexe. L'application super-Hénon est définie ici comme :

$$\begin{cases} X_{i+1} = d(Y_i + (1 + c) - aX_i^2)^2 - c \\ Y_{i+1} = bX_i. \end{cases} \quad (5.24)$$

Pour  $(a, b, c, d) = (1.4, 0.3, 0.95, 0.5)$ , le système présente un comportement chaotique. L'analyse topologique peut être conduite de la même manière, en se basant sur des traceurs colorés (Fig. 5.25). L'application présente une structure très similaire, hormis une nouvelle zone de replis sur laquelle nous allons porter notre attention. Ce repliement naît d'un mouvement de rotation de la zone couleur sable, centrée sur  $(x, y) = (1.3, 0.0)$ , au sein du grand rectangle vert. La région située à gauche de cette zone  $x < 1.3$  présente le même comportement que celui présenté pour l'attracteur de Hénon tandis que la région supérieure présente une nouvelle rotation se traduisant visuellement par une nouvelle inversion de la normale. Un squelette à trois branches peut directement être déduit de cette analyse (Fig. 5.25c) : un gabarit peut aussi être obtenu par projection suivant la direction de contraction (Fig. 5.25d).

$$\Gamma_{super-H} = \left[ \begin{array}{ccc} \{(tz)^{\pm 4}, (tx)^{-4}\} & \{(tz)^{\pm 4}, (tx)^{-2}\} & \{(tz)^{\pm 4}, (tx)^{-2}\} \\ \{(tz)^{\pm 4}, (tx)^{-2}\} & \{(tz)^{\pm 4}, 1\} & \{(tz)^{\pm 4}, (tx)^{-2}\} \\ \{(tz)^{\pm 4}, (tx)^{-2}\} & \{(tz)^{\pm 4}, (tx)^{-2}\} & \{(tz)^{\pm 4}, (tx)^{\pm 4}\} \end{array} \right] \quad (5.25)$$

où les ambiguïtés de signe  $\pm 4$  proviennent de l'incertitude spécifique aux sections bidimensionnelles dans  $\mathbb{R}^4$ . Dans le cas présent, le premier mouvement de rotation correspondant à un mouvement de l'ensemble du flot, qui peut être ainsi simplifié en

$$\Gamma_{super-H} = \left\{ (tz)^{\pm 4}, \begin{bmatrix} (tx)^{-4} & (tx)^{-2} & (tx)^{-2} \\ (tx)^{-2} & 1 & (tx)^{-2} \\ (tx)^{-2} & (tx)^{-2} & (tz)^{\pm 4} \end{bmatrix} \right\}. \quad (5.26)$$

Le fait, ici encore, de pouvoir réduire à un gabarit une dynamique au flot quadridimensionnel tient au fait qu'une seule direction est en fait instable et que la dynamique est fortement dissipative.

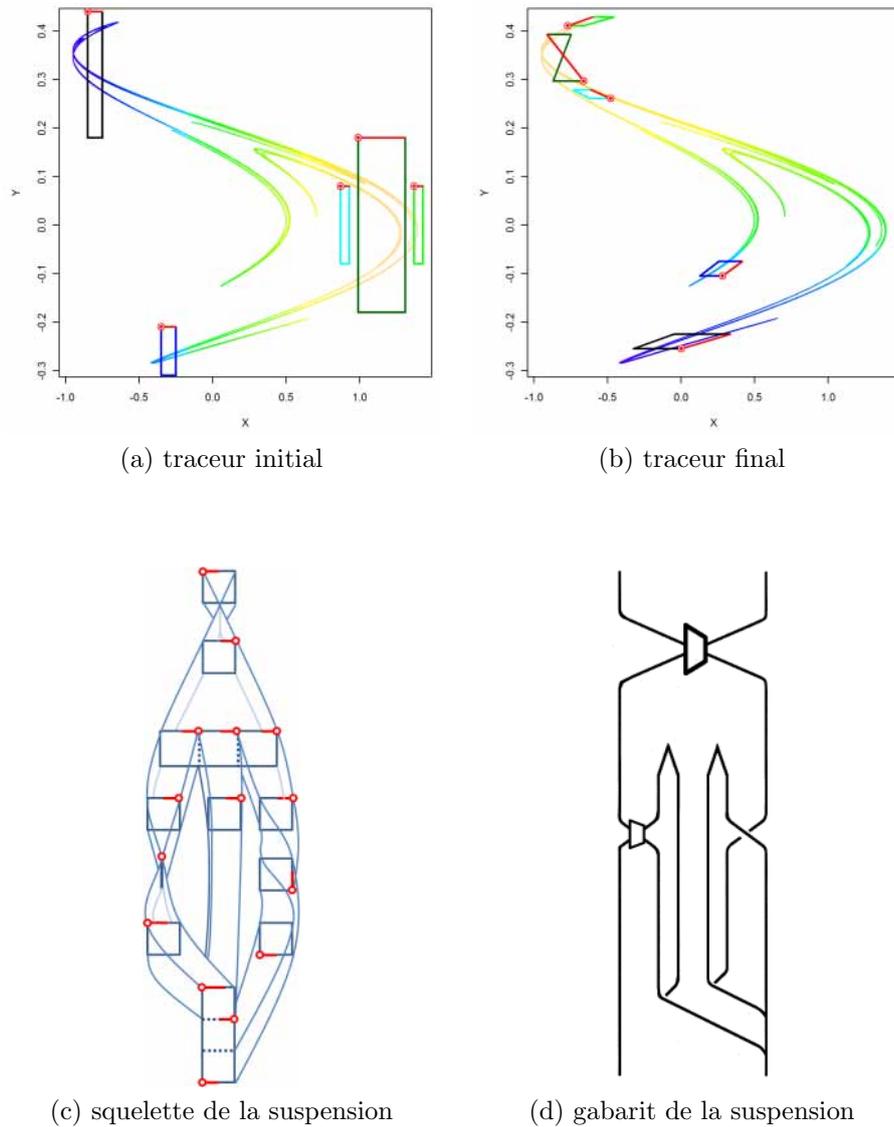


FIGURE 5.25 – Passage de l'état initial (a) au final (b) des traceurs colorés pour l'application super-Hénon. Gabarit (c) et squelette (d) des suspensions les plus simples.

## 5.6 Application à un système discret à trois variables

Nous venons de voir qu'il était possible de déduire le squelette d'un attracteur chaotique 4D connexe présentant une unique direction instable, sur la base d'une section de son flot, et d'en tirer un gabarit plan tout en conservant toutefois certaines ambiguïtés de signe dues à la perte d'information, qui est spécifique au cas des sections 2D (cf. § 5.22). Intéressons nous maintenant à des systèmes présentant non plus une, mais deux directions instables, caractéristiques d'un régime hyperchaotique. Le système le plus paradigmatique d'un tel comportement, en dimension quatre, est assurément le système hyperchaotique introduit par Rössler en 1979 [255] dont les équations originales sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + 0.25y + w \\ \dot{z} = 3 + xy \\ \dot{w} = -0.5z + 0.05w. \end{cases} \quad (5.27)$$

Pour ce paramétrage, le système présente un régime hyperchaotique caractérisé par deux exposants de Lyapunov positifs [255]. La topologie de ce système est inconnue à ce jour et constitue l'un des importants défis actuels de la théorie du chaos [195, 199]. Les approches introduites dans notre travail peuvent-elles nous permettre d'aborder le problème ?

### 5.6.1 L'application *walking stick 3D* à suspension 4D connexe

Comme nous avons pu le voir précédemment, quel que soit le système considéré, le premier problème consiste à choisir une section de Poincaré, problème pouvant s'avérer délicat en dimension trois, *a fortiori* en dimension quatre. Pour contourner ce problème, le choix effectué a été, comme pour les cas simplement chaotiques présentés aux paragraphes § 5.5.1 et § 5.5.2, de partir d'un système discret plutôt que continu. Un système discret hyperchaotique appelé *3D-walking stick* a été proposé par Rössler comme « prototype » du jeu d'équations du système continu (Eqs. 5.27). Ce prototype apparaît tout à fait intéressant à considérer ici. Les équations de cette application hyperchaotique à trois variables sont [255]

$$\begin{cases} x_{i+1} = 3.8x_i(1 - x_i) - 0.05(y_i + 0.35)(1 - 2z_i) \\ y_{i+1} = 0.1[(y_i + 0.35)(1 - 2z_i) - 1](1 - 1.9x_i) \\ z_{i+1} = 3.78z_i(1 - z_i) + 0.2y_i. \end{cases} \quad (5.28)$$

L'application de ce système permet d'obtenir le portrait 3D présenté Fig. 5.26a, qui se caractérise par une forme parabolique suivant l'axe des  $y$ , et d'un comportement d'apparence beaucoup plus simple suivant les deux autres axes  $x$  et  $z$ . Comme nous l'avons fait pour les systèmes de Hénon (Eqs. 5.21) et de super-Hénon (Eqs. 5.24), nous allons chercher à retrouver la topologie de la suspension à cette application en la considérant comme la section de Poincaré d'un flot de  $\mathbb{R}^4$ . L'approche des traceurs colorés va être appliquée ici encore. Étant à ce stade principalement visuelle et manuelle, l'approche nécessite, pour pouvoir être appliquée, de disposer d'une bonne visibilité des différentes parties de la section. Afin de disposer d'une meilleure visibilité, le difféomorphisme suivant a d'abord été appliqué à la section :

$$\begin{cases} \tilde{x} = x - 0.95 + 100(y + 0.006)^2 \\ \tilde{y} = y \\ \tilde{z} = z \end{cases} \quad (5.29)$$

permettant d'obtenir une nouvelle section présentée Fig. 5.26b, équivalente à la précédente mais permettant de visualiser des structures au sein de la parabole, et donc d'en entamer l'analyse. En se

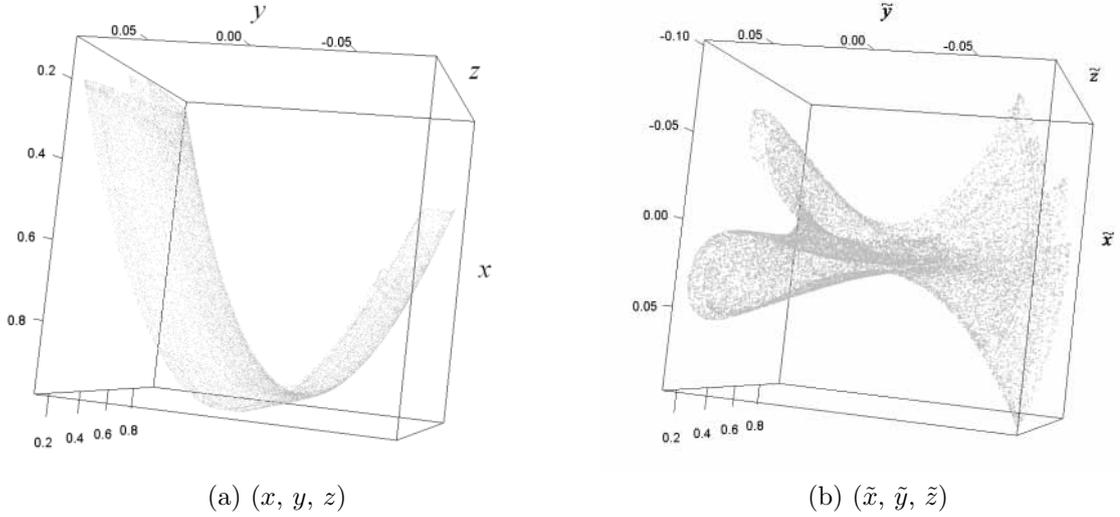


FIGURE 5.26 – Portrait original (a) et portrait anamorphosé suivant le difféomorphisme présenté en (5.29) (b) de l'application *3D walking stick* (Eq. 5.28, [255]).

basant sur ce portrait de section anamorphosé, la méthode des traceurs colorés (Fig. 5.27) a permis d'obtenir une partition de la section et de montrer qu'il n'y avait pas de mécanisme de déchirement au sein de l'attracteur. Ce point est ici essentiel puisqu'il nous garantit que l'analyse topologique pour la suspension du système *3D-Walking stick* peut être effectuée de manière complète sur la base d'une section unique (à un mouvement de rotation de l'ensemble du flot modulo  $2\pi$  près). En effet, les ambiguïtés de signe rencontrées dans le cadre de sections 2D ne se rencontrent pas avec les sections 3D. L'analyse détaillée permet de mettre en évidence deux plis principaux donnant finalement lieu à une partition en 28 branches. Sur cette base, un squelette de l'attracteur a pu être proposé (Fig. 5.28). Bien que sa structure gagne à être représentée de façon quadrimensionnelle pour un meilleur suivi des mécanismes de repliement, sa dimension peut être réduite et le squelette ramené à un squelette 3D, avec des sections 2D au départ et à l'arrivée. Ce squelette ne peut en aucune façon être ramené à un gabarit plan habituel. Cette impossibilité résulte directement du double étirement, c'est-à-dire du caractère hyperchaotique du système.

En s'appuyant sur une notation la plus condensée, la topologie du squelette ainsi obtenu peut être formulée comme

$$\Gamma_{WS} = \{ (tx)^A, (tz)^B, (ty)^C \} \quad (5.30)$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{et } C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & +2 & +2 \\ 0 & 0 & +2 & +2 \\ +2 & +2 & +4 & 0 \\ +2 & +2 & 0 & +4 \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

où les lignes et les colonnes des matrices correspondent à une partition simplifiée en quatre branches (1, 2, 3 et 4). Cette formulation ne fournit toutefois pas la totalité de l'information puisqu'elle n'explique que les mouvements successifs d'auto-rotation et de rotations relatives des branches principales (ce qui revient à décrire les plis du flot) sans détailler le comportement des sous-branches, et sans spécifier la correspondance des branches entre partition initiale et partition finale. Pour expliciter cette correspondance, il est nécessaire de détailler les branches, ce qui peut se faire de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 \end{bmatrix}, \\
B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.32) \\
C &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +2 & +2 & +1 & +3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +2 & +2 & +2 & +3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & +2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +2 & +2 & +1 & +4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +2 & +1 & +3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +2 & +1 & +2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +2 & +1 & +2 \\ +2 & +2 & 0 & +1 & 0 & +2 & +1 & +1 & +1 & +4 & 0 & 0 & 0 \\ +2 & +2 & +1 & +1 & +1 & +2 & +2 & +2 & +2 & 0 & +4 & 0 & 0 \\ +1 & +2 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & 0 & 0 & +4 & 0 \\ +3 & +3 & +2 & +1 & +1 & +4 & +3 & +2 & +2 & 0 & 0 & 0 & +4 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

où les lignes et les colonnes correspondent à la partition 1a, 1b, 1c, 1d, 1e, 2a, 2c, 2d, 2f, 3, 4a, 4b, 4c. La redistribution de la sous-partition de  $C$  se fait suivant la correspondance

$$\begin{aligned}
\{1a_1, 1c_1, 1d_1, 2a_1, 2c_1, 2d_1, 3_1, 4a_1, 4c_1\} &\rightarrow \{1\} \\
\{1a_2, 1b_2, 1c_2, 1d_2, 1e_2, 2a_2, 2c_2, 3_2, 4a_2, 4b_2, 4c_2\} &\rightarrow \{2\} \\
\{1d_3, 2d_3, 2f_3\} &\rightarrow \{3\} \\
\{1d_4, 2e_4, 2d_4, 2f_4\} &\rightarrow \{4\}
\end{aligned} \quad (5.33)$$

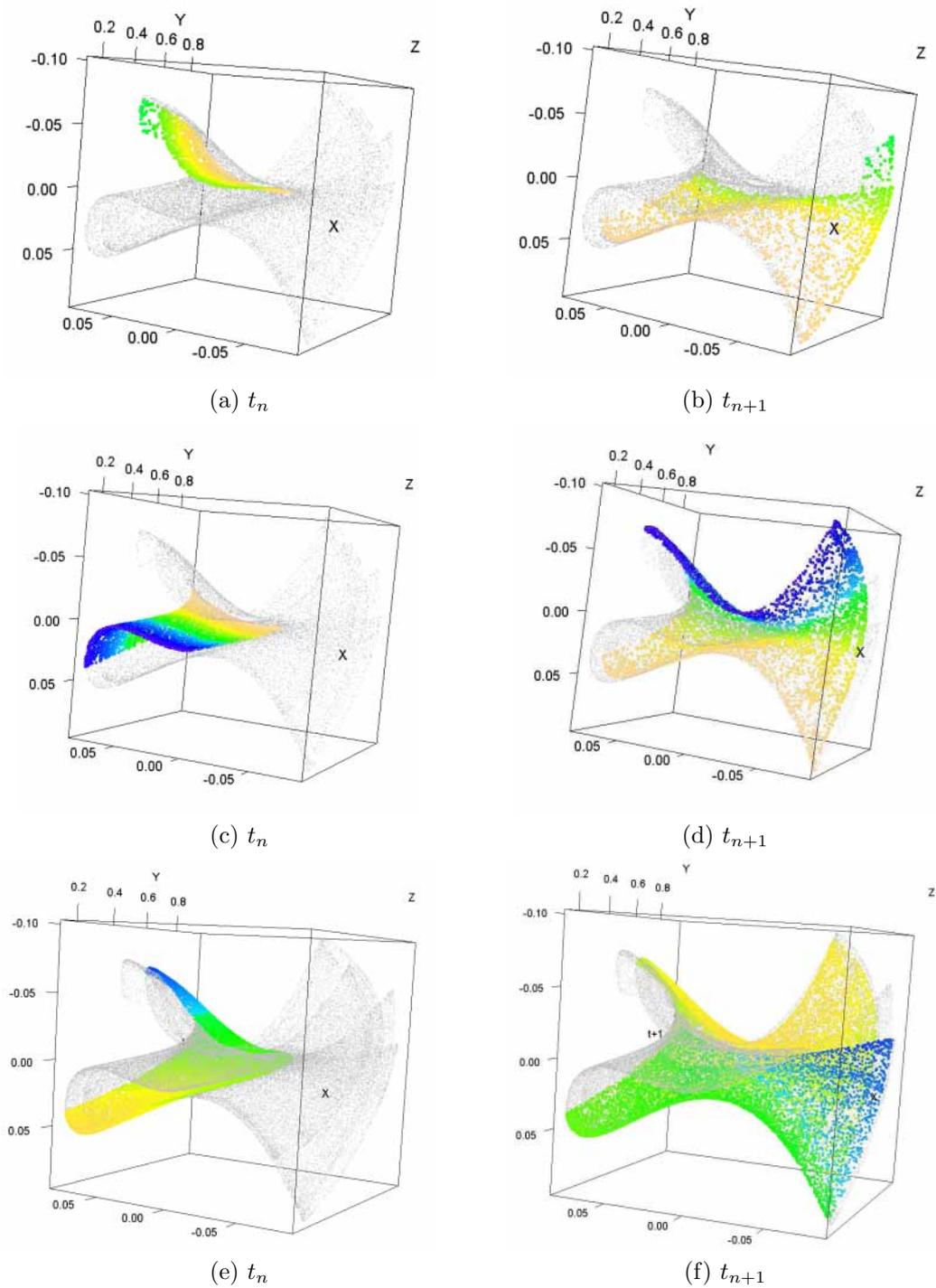


FIGURE 5.27 – Sections de l'attracteur *3D-Walking Stick* [255] avec trois zones sélectionnées au temps  $t_n$  (à gauche) et propagation de cette zone sur l'attracteur au temps  $t_{n+1}$ .



FIGURE 5.28 – Squelette de l'attracteur 3D-walking stick [255] (Eq. 5.28) qui peut être réduite à un squelette épais (2D plus le temps), mais gagne à être représenté et pensé en 4D.

Le descriptif topologique est alors complet (descriptif des contacts mis à part). Contrairement au cas des partitions de sections 2D (en dimension 4), celui des sections 3D ne laisse que très peu d'ambiguïtés. La première ambiguïté correspond à la rotation d'ensemble du flot modulo  $2\pi$ . La seconde tient à l'impossibilité de savoir dans quel ordre les mécanismes de repliement sont appliqués au sein du flot. L'ensemble des solutions équivalentes correspondant de cette seconde ambiguïté est toutefois très contrainte et doit pouvoir être déduite des propriétés de commutations des mouvements de rotations.

Mise à par ces deux ambiguïtés, la topologie de la suspension de cette application est entièrement déterminée. L'analyse a permis de montrer, en particulier, que les rotations  $(xy)$ ,  $(xz)$  et  $(yz)$  spécifiques aux flots 5D n'étaient pas nécessaires à décrire la suspension. Le flot correspondant est donc bien un flot 4D, ce qui constitue une première condition pour que cette application puisse être un bon prototype de l'attracteur de Rössler-79. Cette analyse est à notre connaissance la première à aboutir à l'analyse topologique détaillée d'un attracteur hyperchaotique 4D.

## 5.7 Au-delà

L'obtention d'un squelette pour la suspension 4D du système discret *3D-Walking Stick* est tout à fait enthousiasmante et nous conduit à penser que la topologie du chaos, après les travaux essentiels qui l'ont initiés et développés (notamment [80, 225, 135, 186, 136]) a assurément de beaux jours devant elle. L'une des premières questions qui apparaît naturellement alors est celle de savoir si le système *3D-Walking Stick* proposé comme prototype de l'attracteur hyperchaotique de Rössler-79 (Eq. 5.27) lui est véritablement topologiquement équivalent. Cette proximité supposée en fait un cas d'étude tout à fait intéressant dans la mesure où, en dimension quatre, les approches comparatives se limitent à ce jour à des critères purement dynamiques ou géométriques (et les approches topologiques utilisées se basent sur l'entropie topologique [128] qui ne peut garantir que l'équivalence des matrices de transition et non celle des structures topologiques). Pour effectuer une telle comparaison, la même analyse devra simplement être appliquée au système continu après avoir effectué un choix de section de Poincaré adapté. Les mêmes critères que ceux utilisés en dimension trois [201] pourront être utilisés en dimension quatre et supérieures pour distinguer (ou non) un nouvel attracteur.

Ce résultat ouvre aussi à l'exploration de nouveaux cas théoriques. Nous nous sommes concentrés ici sur les flots quadridimensionnels connexes. Qu'en est-il alors pour les flots non connexes? La réflexion sur cet autre point doit être poursuivie, et des systèmes présentant de tels comportements explorés. D'autre part, nous avons pu voir que les suspensions 4D étudiées pouvaient être ramenées à des squelettes plans, c'est-à-dire à des gabarits, pour les systèmes de Hénon et de super-Hénon alors qu'il s'agissait de systèmes discrets bidimensionnels présentant une structure épaisse. Cette épaisseur ne tient toutefois pas à un caractère très faiblement dissipatif mais résulte de la rotation du flot dans  $\mathbb{R}^4$ . Le squelette épais obtenu pour l'application *3D-Walking Stick* résulte directement du caractère hyperchaotique de l'application. L'application apparaît toutefois extrêmement contractante dans l'une des directions. Le système est donc fortement dissipatif dans la mesure où il compense très fortement les deux directions d'étirement. Cette observation nous pousse à penser qu'il doit exister, comme pour le cas tridimensionnel, des cas faiblement dissipatifs quadridimensionnels dont les squelettes seraient proprement 4D. Le cas des systèmes hyperchaotiques 4D faiblement dissipatifs, c'est-à-dire tels que

$$\frac{\sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i}{\sum_{\lambda_i < 0} |\lambda_i|} \lesssim 1, \quad (5.34)$$

devrait constituer une nouvelle étape de l'analyse topologique 4D. Ces questions cacheraient-elles chacune de nouvelles applications? Probablement. Car si certains cas plus exotiques – ou tout simplement plus difficiles à découvrir – manquent à l'appel, il existe déjà des candidats à l'analyse, qu'il s'agisse de systèmes théoriques ou de modèles obtenus par approche globale [255, 213, 189], etc.

La question des systèmes de plus grande dimension a déjà été évoquée concernant les systèmes de dimension cinq, et plus [199]. Nous avons, pour notre part, commencé à proposer certaines

propriétés de distinction des flots 5D par la détection d'inversion de la normale au flot ou de mouvements de rotation spécifiques aux dimensions  $\geq 5D$ . Les résultats présentés dans ce chapitre rendrons cette question, nous l'espérons, plus ardente. Mais la 5D n'a été évoquée qu'à partir de sections 3D. Qu'en est-il en fait, dans  $\mathbb{R}^5$ ? De manière générale, les sections ne seront plus tridimensionnelles mais quadridimensionnelles. Il ne faudra plus alors considérer une partition de cubes mais de tesseractes (hypercubes de dimension 4). De façon projective, cette étape nous paraît — en principe — tout à fait accessible, aussi bien d'un point de vue théorique, dans la mesure où la rotation d'un tesseract — bien que difficile à visualiser mentalement — est quelque chose de bien identifié et bien connu. Il est plus difficile de s'avancer d'un point de vue pratique, dans la mesure où s'ajoute à la difficulté de représentation mentale, une grande diversité de possibilités (80 positionnements relatifs possibles d'un tesseract autour d'un autre hypercube dans  $\mathbb{R}^5$  alors qu'il n'y en avait que 26 pour un cube autour d'un autre cube dans  $\mathbb{R}^4$ ). Quoi qu'il en soit, cette limite ne nous paraît pas infranchissable et nous gagerions qu'elle pourra l'être dans les années qui arrivent.

Au delà de  $\mathbb{R}^5$ , certainement gagnerions-nous à disposer du troisième œil de Shiva, de la double paire d'yeux de Cang Jie, ou mieux encore (la vision hexaoculaire de Kitou Scrogneugneu peut-être?) qui, combinée à une représentation virtuelle, nous permettrait de nous déplacer dans un tel espace et peut-être d'avancer dans notre représentation mentale des extra-dimensions. Dans l'attente d'une telle évolution génétique, d'autres approches devront être envisagées. La représentation mentale des espaces multidimensionnels est certainement une piste de travail importante qui ne doit pas être écartée trop rapidement comme superflue, fantasmagorique ou fantaisiste, et qu'il nous faudrait probablement explorer. Nous disposons d'une capacité tout à fait saisissante à représenter les scènes en perspective depuis la renaissance italienne. Nous disposons également d'outils numériques de visualisation 3D très puissants. Une combinaison de tels outils doit pouvoir être envisagée. Des approches plus systématiques doivent nécessairement être aussi explorées, mais le travail sur la représentation mentale des dimensions quatre et cinq ne doit pas être sous-estimées. La résolution de problèmes dans  $\mathbb{R}^6$ , et au delà, reviendra certainement d'abord à celle d'être capable de les formuler de façon générale afin d'être capable d'en tirer une formulation automatisée, et non d'obtenir une visualisation mentale d'un espace 5D (ou plus) qui nous est — mais nous sommes tous différents! — encore tout à fait inabordable. Raison de plus pour s'y intéresser.

## Chapitre 6

# Ouvertures

*'Le Caenorhabditis elegans a 302 neurones qui composent un système nerveux élémentaire qui permet de fuir, de descendre dans la terre, de se nourrir, d'excréter, de se cacher, d'aller dans des endroits humides, etc. un comportement quand même !' Yves Agid, Le cerveau, 2012*

*'Ces systèmes de courbes, ces nuages de points évoquent parfois des galaxies, ou des feux d'artifice, et parfois de bien étranges et inquiétantes floraisons. C'est tout un monde de formes qui restent à explorer, et d'harmonies qui restent à découvrir.' David Ruelle, La Recherche, 1980.*

Nous avons d'abord cherché à présenter, dans ce manuscrit, le cheminement qui nous a progressivement permis de mettre en place une démarche originale et un programme de recherche à axes multiples, et d'en présenter les principaux résultats. Nous avons également cherché à montrer que ces recherches avaient permis de contribuer à la formation d'étudiants dans une optique intermédiaire incluant à la fois recherche théorique et recherche appliquée, et de contribuer à la formation d'étudiants d'origines diverses.

Notre logique de recherche se décline suivant un programme en quatre axes. Un premier axe méthodologique qui nous a permis de produire des outils d'analyse qui peuvent être considérés équivalents aux outils de référence actuels, en matière de modélisation globale. Ces développements sont principalement axés sur des logiciels *open source* permettant de faciliter les échanges, le dynamisme et l'exploration, sans présenter de contrainte forte de licences, ce qui peut constituer un avantage considérable pour des collaborations avec les pays du sud, point important dans le cadre de notre institut de rattachement, l'Institut de Recherche pour le Développement.

Un second axe théorique concernant l'exploration de dynamiques spatialement distribuées. L'un de ces travaux nous a permis de montrer l'invariance d'échelle concernant les dynamiques chaotiques en synchronisation de phase. Cette invariance d'échelle pourrait présenter un intérêt particulier dans le cadre environnemental où les résolutions différentes des modèles, des mesures *in situ* et des mesures par télédétection, rendent souvent les comparaisons ardues. Ces développements pourraient ainsi permettre une caractérisation adaptée aux échelles étudiées, mais aussi l'étude et l'analyse de comportements d'échelle émergents. Elle pourrait aussi contribuer à mettre en évidence des invariances d'échelle et donc de valider des modèles ou des produits satellitaires à résolutions différentes.

Un troisième axe appliqué qui nous a permis d'obtenir le premier attracteur chaotique toroïdal faiblement dissipatif pour la dynamique des cultures céréalières et de montrer que ce résultat ne constituait pas une singularité, mais au contraire un cas plutôt général, ce résultat ayant pu être obtenu en de nombreux sites. Cet axe appliqué a également permis de montrer que l'approche pouvait aussi être appliquée à d'autres cas environnementaux, telle la dynamique nivale ou la dynamique épidémiologique, et d'autres thématiques d'exploration sont en cours.

Un dernier axe a permis de présenter une nouvelle approche pour la caractérisation du chaos permettant de s'attaquer à l'analyse topologique du chaos faiblement dissipatif et du chaos quadri-dimensionnel qui constituent d'importants verrous de la topologie du chaos. Appliqués à l'attrac-

teur de *Lorenz-84* [206] et à l'attracteur *cereal crops*, une analyse topologique a permis de montrer que ces deux attracteurs étaient bien distincts l'un de l'autre, et, que l'attracteur *cereal crops*, était donc bien un nouvel attracteur. Appliqué à l'application *3D-Walking Sticks* [255], l'approche a permis d'obtenir le premier squelette d'un attracteur chaotique quadridimensionnel, relatif ici à la suspension de cette application. Qui plus est, ces travaux ont permis de mettre en évidence la nécessité de détecter les comportements d'inversion de normale au sein d'une application de Poincaré de dimension  $d$  pour en déduire la dimension  $d + 1$  ou  $d + 2$  du flot de sa suspension, élément essentiel à la compréhension des systèmes dynamiques de grande dimension.

Ces différents travaux permettent de montrer l'originalité de notre démarche, le haut niveau scientifique et technique dans un ensemble de domaines relativement larges de la science, et la capacité de les communiquer à de plus jeunes chercheurs par l'encadrement de travaux de thèse et de master, valorisés par des publications.

Les perspectives de ce programme de recherche nous paraissent nombreuses et diverses. Outre de nouveaux développements que nous souhaitons progressivement conduire vers la constitution d'une plateforme complète d'analyse globale, visant à disposer d'une vision plus complète et d'outils plus opérationnels que ce qu'ils sont pour le moment (une partie des outils ne disposant pas tous de la même interactivité, malgré leur puissance). De nouveaux algorithmes devront également être approfondis et testés, et notamment ceux destinés à identifier les liens de causalités. Un ensemble d'outils destinés à automatiser l'analyse des dynamiques de dimension quatre et supérieures devront également être développés.

Les cas d'applications théoriques comme pratiques ne devraient pas manquer. Mentionnons notamment le cas des données de télédétection spatiale, qui, sur des périodes de temps longues, ne permettent que de disposer des séries temporelles d'une seule variable. Il en est tout aussi vrai pour ce qui concerne les enregistrements issus de mesures *in situ*. Nous avons déjà pu commencé à nous intéresser à d'autres types de dynamiques, concernant le flux de sève ou le débit des sources, qui nous permettent d'ores et déjà d'envisager de nouveaux cas d'application. Une autre application pourrait concerner la classification des couverts observés par télédétection. En effet, la théorie des systèmes dynamiques nonlinéaires permet, par l'usage de l'espace des phases, de disposer d'une représentation de l'histoire d'un système. La modélisation globale permet, quant-à elle, du moins en principe, de tirer d'une trajectoire particulière la dynamique globale. Moyennant certains développements, l'approche pourrait donc permettre la distinction de certains comportements dynamiques théoriques ou observées. Bien qu'à explorer, cette problématique devrait constituer une intéressante zone d'exploration.

Les cas multivariés à explorer apparaissent également très nombreux, bien que les cas théoriques nécessitent d'être approfondis afin de pouvoir commencer à explorer des cas de jeux de données issus de conditions de mesures réelles. L'une des applications environnementales pourrait être la dynamique des eaux souterraines que nous avons déjà commencé à explorer [5, 40].

Concernant l'analyse topologique, de nombreux modèles ayant pu être obtenus pour la dynamique des cultures céréalières, de nombreuses analyses topologiques pourront en découler visant à montrer, soit la similarité, soit la diversité des dynamiques chaotiques toroïdales rencontrées.

L'exploration des dynamiques de dimension quatre doit également être poursuivie. Le cas des systèmes continus (cas 4D connexes) devrait s'avérer plus compliqué que celui des applications discrètes 3D prises comme section de Poincaré en raison, notamment, de la difficulté à choisir la section de Poincaré. Toutefois, contrairement aux approches basées sur les applications de premier retour, le problème ne sera plus de trouver une section la plus simple possible mais, au contraire, de trouver une section suffisamment générale afin de ne pas perdre d'information sur la structure du flot. La difficulté est donc inversée, qui devrait vraisemblablement conduire à simplifier la problématique. Enfin, les développements ayant été effectués en s'appuyant sur des hypothèses suffisamment générales, les résultats obtenus nous permettent également d'envisager l'analyse de dynamiques quadridimensionnelles faiblement dissipatives et de dynamiques de dimension cinq. De tels systèmes permettraient d'illustrer plus clairement le potentiel de l'approche introduite dans nos travaux.

En ce qui concerne les dynamiques de plus grande dimension, et les dynamiques nonconnexes en général, cela n'est pas pour nous déplaire, il sera assurément nécessaire d'approfondir encore

notre réflexion.



# Annexe A

## Packages R

L'idée de développer et d'explorer les outils de modélisation nonlinéaires destinés à la modélisation et l'analyse de dynamiques observées s'est imposée lors de la préparation de mes premiers projets de recherche pour le passage de concours pour des postes de chargé de recherche. De premiers tests avaient été effectués auparavant en s'appuyant sur un algorithme de stratégie d'évolution [153] qui s'étaient montrés efficaces pour l'optimisation de paramètres [28], mais à l'aide duquel nous n'étions pas parvenus à identifier de structures de modèles. D'autres pistes devaient donc être envisagées et la rencontre avec Laurent Drapeau après mon recrutement à l'IRD (et notre affectation au CESBIO), et son enthousiasme pour le langage R, m'ont fait opter pour ce langage (nouveau pour moi). Ce choix s'est avéré très fructueux, et cette collaboration à la fois très efficace, très complémentaire et tout à fait agréable.

### A.1 PoMoS & GloMo

Les modules Polynomial Model Search (PoMoS) et Global Modeling (GloMo) ont été les premiers éléments d'un ensemble d'algorithmes destinés à la modélisation globale. L'idée de départ de ces nouveaux modules était de disposer d'outils qui soient à la fois plus efficaces et plus robustes, mais aussi plus génériques dans leur formulation en termes de formulation pour la modélisation de comportements observés à partir de séries temporelles uniques ou multiples.

La volonté d'un tel développement venait du fait que les outils destinés à mettre en œuvre l'approche globale [138] n'étaient pas librement disponibles. Cette approche a été d'emblée privilégiée pour son intérêt à la fois pratique, puisque'elle avait pu être testée sur des cas expérimentaux [186], et analytique [138] sur des modèles théoriques tels que le système de Rössler-76 [254] ou de Lorenz-63 [205]. D'autres part, un outil tel que le logiciel JMulti [173] nous avait permis de nous intéresser à des problèmes multivariés (cf. chapitre 1 & [5]). Son champ d'action étant essentiellement linéaire, il ne pouvait pas permettre de mettre en place une approche globale, mais nous fournissait par contre l'exemple d'une formulation à la fois conviviale et interactive.

C'est avec cet objectif en tête qu'a été lancé le projet de développer une librairie constituée d'un ensemble de packages destiné à la modélisation globale et à l'analyse de modèles globaux. Les premiers éléments ont été développés au cours du stage de Raphaël Coudret [45] (co-encadré avec Laurent Drapeau) permettant de mettre en place un formalisme générique suffisamment général et très efficace [45, 3], de tester l'approche sur des cas théoriques simples et de tenter les premières analyses de séries temporelles observées.

La contribution de L. Drapeau à l'encadrement, son aide et son suivi ont notamment permis de rendre l'outil tout à fait opérationnel grâce à la mise en place d'une interface tout à fait pratique, permettant d'aboutir à un dépôt du package au *Comprehensive R Archive Network* (CRAN) [100], qui a nécessité une compétence informatique très pointue. Le package est maintenant directement téléchargeable sur le site du CRAN.

## A.2 LyapLoc

Les invariants nonlinéaires sont bien adaptés à la description des dynamiques chaotiques, qu'il s'agisse d'invariants dynamiques, géométriques ou topologiques. Parmi ceux-ci, les exposants de Lyapunov [298] sont les plus souvent utilisés. Une telle approche est particulièrement intéressante dans le contexte de modèles globaux, qui fournissent une approximation des équations du système, et, permettent ainsi de disposer d'estimations insensibles au bruit. Deux algorithmes ont été développées. Le premier est directement basé sur l'approche proposée dans les années 1980 [298]. Le second, proposé plus récemment [147], permet de distinguer explicitement la direction du flot des autres directions de divergence et de contraction. Il autorise ainsi l'estimation des exposants de Lyapunov locaux. Les deux algorithmes nécessitent d'estimer la matrice Jacobienne du modèle. Une approche semi-formelle a été spécifiquement développée pour automatiser cette estimation permettant ainsi l'estimation automatisée des exposants de Lyapunov des modèles globaux obtenus. Les algorithmes ont pu être validés par une comparaison basée sur les résultats obtenus par les auteurs ayant développé cette seconde approche [148], et en s'appuyant sur le modèle de Lorenz-63 (cf. Fig. A.1).

Rappelons toutefois qu'une analyse détaillée du système de Rössler-76, de sa formulation canonique intuitive de la variable  $y$ , et des modèles globaux qui avaient pu être obtenus des variables  $x$ ,  $y$  ou  $z$  a permis de montrer que pour les modèles globaux, l'invariance des exposants de Lyapunov ne pouvaient pas être garantis sur la base des approches utilisées dans nos travaux (cf. §3.2.3).

Notons toutefois que le signe des exposants s'est montré tout à fait robuste, la détection d'un modèle global (nécessairement déterministe) et d'un premier exposant de Lyapunov positif, reste donc une preuve forte (et suffisante) de chaos.

Rappelons encore que l'estimation de la dimension de Kaplan-Yorke  $d_{KY}$  [168] s'est montrée très robuste pour la caractérisation des modèles globaux obtenus de nos algorithmes (cf. §3.2.3).

## A.3 AMoGlo

Les dynamiques chaotiques étant à la fois déterministes et très sensibles aux conditions initiales, les modèles utilisés (qu'ils soient eux-même chaotiques ou non) nécessitent, pour effectuer des prévisions, d'être réajustés au fur et à mesure des simulations. De tels réajustements peuvent également être utilisés pour estimer les capacités prédictives des modèles. Ces méthodes d'ajustement des trajectoires sont des méthodes d'assimilation de données. L'objet du développement d'un module associé AMoGlo (pour Assimilation de données dans un Modèle Global), était de développer et d'automatiser différents schémas d'assimilation de données afin de pouvoir sélectionner le mieux adapté sur des critères empiriques d'efficacité. Ces investigations ont été effectuées au cours du travail de Master de Malika Chassant [42], permettant d'aboutir à de premiers développements. Plusieurs schémas d'assimilation de données ont été développés : (1) simple réinitialisation, (2) Filtre de Kalman Étendu, (3) Filtre de Kalman d'Ensemble et (4) synchronisation directe et rétrograde (Back and Forth Nudging). Les schémas nécessitant le calcul de la Jacobienne ont pu s'appuyer sur le module destiné à l'estimation des exposants de Lyapunov qui permet leur estimation automatisée. Ces différents schémas ont d'abord été testés sur le modèle de Lorenz-84 avant d'être appliqués au modèle *cereal crops*. Ce module permet également d'effectuer des estimations des niveaux de bruit additif et dynamique [237].

## A.4 SpatioGloMo

Cet autre module a été développé dans l'objet d'analyser des ensembles de séries temporelles, qu'il s'agisse d'enregistrements morcelés, d'ensembles de séries courtes spatialement distribuées, ou d'ensembles de mesures agrégées. Ce module a été développé dans le cadre du stage de Master de Flavie Le Jean [41]. Pour une plus grande efficacité, ce module s'est appuyé sur un nouveau noyau de testage des modèles basé sur une reformulation des critères de priorité (cf. §2.3.3).

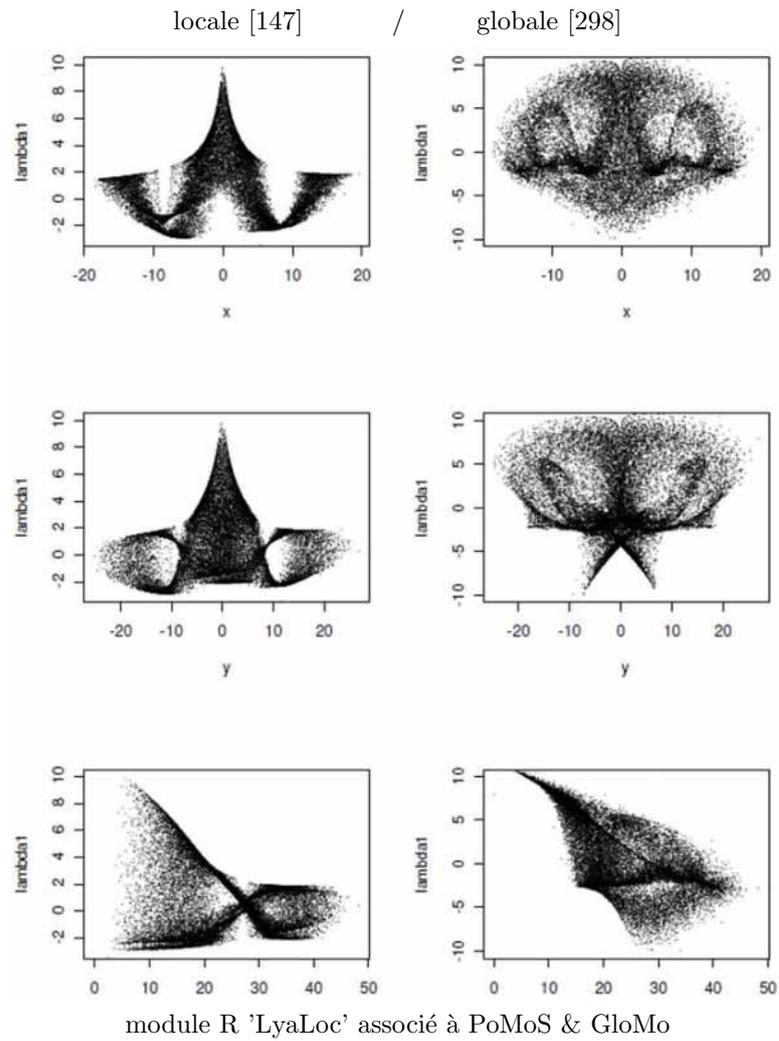


FIGURE A.1 – Distributions du premier exposant de Lyapunov en fonction des variables  $x$  (première ligne),  $y$  (seconde ligne) et  $z$  (troisième ligne) du système de Lorenz-63, selon que la méthode [298] (colonne de gauche) ou la méthode [147] (colonne de droite) soit utilisée.



## Annexe B

# Formulation analytique de modèles agrégés

### B.1 Le cas de la variable Rössler- $y$

#### B.1.1 Agrégation de deux variables synchronisées

Pour la variable  $y$  du système de Rössler [254], la fonction  $F(X, Y, Z)$  du modèle global, dans sa formulation canonique, est polynômiale et telle que

$$\begin{aligned}
 F(X, Y, Z) = & -b + (a + c)(Z_i + Z_j) \\
 & + c(X_i + X_j) - (ac + 1)(Y_i + Y_j) \\
 & - a(X_i + X_j)^2 - a(Y_i + Y_j)^2 \\
 & - a(X_i + X_j)(Z_i + Z_j) + (Y_i + Y_j)(Z_i + Z_j) \\
 & + (a^2 + 1)(X_i + X_j)(Y_i + Y_j);
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

elle peut être reformulée comme

$$\begin{aligned}
 F(X, Y, Z) = & F(X_i, Y_i, Z_i) + F(X_j, Y_j, Z_j) \\
 & + b - 2aX_iX_j - 2aY_iY_j - aX_iZ_j - aZ_iX_j \\
 & + Y_iZ_j + Z_iY_j + (a^2 + 1)X_iY_j \\
 & + (a^2 + 1)X_jY_i.
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

En appliquant l'approximation de synchronisation ( $\dot{\beta} \approx 0$  pour  $X_i \gg 0$ ), on obtient

$$\left| \begin{aligned}
 X_j &= \beta X_i \\
 Y_j &= \dot{X}_j = \dot{\beta}X_i + \beta\dot{X}_i = \dot{\beta}X_i + \beta Y_i \approx \beta Y_i \\
 Z_j &= \dot{Y}_j = \dot{\beta}X_i + \beta\dot{Y}_i + \dot{\beta}Y_i + \beta Z_i \approx \beta Z_i.
 \end{aligned} \right. \tag{B.3}$$

L'équation (B.2) devient alors

$$\begin{aligned}
 F(X, Y, Z) = & F(X_i, Y_i, Z_i) + F(X_j, Y_j, Z_j) \\
 & + b - 2a\beta X_i^2 - 2a\beta Y_i^2 - 2a\beta Z_i X_i + \beta Y_i Z_i \\
 & + \beta Y_i Z_i + \beta(a^2 + 1)X_i Y_i + \beta(a^2 + 1)X_i Y_i,
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
 F(X, Y, Z) = & F(X_i, Y_i, Z_i) + F(X_j, Y_j, Z_j) \\
 & + b - 2a\beta(X_i^2 + Y_i^2) - 2a\beta X_i Z_i + 2\beta Y_i Z_i \\
 & + 2\beta(a^2 + 1)X_i Y_i.
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

En utilisant les relations

$$\left| \begin{aligned}
 X &\approx (1 + \beta)X_i \\
 Y &\approx (1 + \beta)Y_i \\
 Z &\approx (1 + \beta)Z_i,
 \end{aligned} \right. \tag{B.6}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
F(X, Y, Z) &= F(X_i, Y_i, Z_i) + F(X_j, Y_j, Z_j) \\
&+ b - \frac{2a\beta}{(1+\beta)^2}(X^2 + Y^2) - \frac{2a\beta XZ}{(1+\beta)^2} \\
&+ \frac{2\beta YZ}{(1+\beta)^2} + \frac{2\beta(a^2+1)XY}{(1+\beta)^2}.
\end{aligned} \tag{B.7}$$

En posant  $\gamma = \frac{2\beta}{(1+\beta)^2}$ , on obtient

$$\begin{cases} \dot{X} = Y \\ \dot{Y} = Z \\ \dot{Z} = F(X, Y, Z) - b + \gamma [a(X^2 + Y^2) + aXZ \\ \quad - YZ - (a^2 + 1)XY], \end{cases} \tag{B.8}$$

ce se simplifie en

$$\begin{cases} \dot{X} = Y \\ \dot{Y} = Z \\ \dot{Z} = -2b - cX + (ac - 1)Y + (a - c)Z \\ \quad - (1 - \gamma) [a(X^2 + Y^2) - (a^2 + 1)XY + aXZ - YZ]. \end{cases} \tag{B.9}$$

### B.1.2 Agrégation de $N$ variables synchronisées

Lorsqu'on considère la somme de  $N$  systèmes agrégés, les variables agrégées s'écrivent

$$\begin{cases} X = \sum_{i=1}^N X_i \\ Y = \sum_{i=1}^N Y_i \\ Z = \sum_{i=1}^N Z_i \end{cases} \tag{B.10}$$

Le modèle global résultant s'écrit alors

$$\begin{aligned}
F_{\Sigma}(X, Y, Z) &= -b + (a - c) \sum_{i=1}^N Z_i - c \sum_{i=1}^N X_i + (ac - 1) \sum_{i=1}^N Y_i \\
&- a(\sum_{i=1}^N X_i)^2 - a(\sum_{i=1}^N Y_i)^2 - a(\sum_{i=1}^N X_i)(\sum_{i=1}^N Z_i) + (\sum_{i=1}^N Y_i)(\sum_{i=1}^N Z_i) \\
&+ (a^2 + 1)(\sum_{i=1}^N X_i)(\sum_{i=1}^N Y_i),
\end{aligned} \tag{B.11}$$

En utilisant les relations

$$\begin{aligned}
(\sum_{i=1}^N X_i)^2 &= \sum_{i=1}^N X_i^2 + \sum_{i=1}^N [X_i \sum_{j \neq i}^N X_j] \\
(\sum_{i=1}^N Y_i)^2 &= \sum_{i=1}^N Y_i^2 + \sum_{i=1}^N [Y_i \sum_{j \neq i}^N Y_j] \\
(\sum_{i=1}^N Z_i)^2 &= \sum_{i=1}^N Z_i^2 + \sum_{i=1}^N [Z_i \sum_{j \neq i}^N Z_j] \\
\text{et} \\
(\sum_{i=1}^N X_i)(\sum_{i=1}^N Y_i) &= \sum_{i=1}^N (X_i Y_i) + \sum_{i=1}^N [X_i \sum_{j \neq i}^N Y_j] \\
(\sum_{i=1}^N X_i)(\sum_{i=1}^N Z_i) &= \sum_{i=1}^N (X_i Z_i) + \sum_{i=1}^N [X_i \sum_{j \neq i}^N Z_j] \\
(\sum_{i=1}^N Y_i)(\sum_{i=1}^N Z_i) &= \sum_{i=1}^N (Y_i Z_i) + \sum_{i=1}^N [Y_i \sum_{j \neq i}^N Z_j]
\end{aligned} \tag{B.12}$$

le système peut être réécrit en

$$\begin{aligned}
F_{\Sigma}(X, Y, Z) &= -b + (a - c) \sum_{i=1}^N Z_i \\
&- c \sum_{i=1}^N X_i + (ac - 1) \sum_{i=1}^N Y_i \\
&- a \sum_{i=1}^N X_i^2 - a \sum_{i=1}^N Y_i^2 \\
&- a \sum_{i=1}^N X_i Z_i + \sum_{i=1}^N Y_i Z_i \\
&+ (a^2 + 1)(\sum_{i=1}^N X_i Y_i) - a \sum_{i=1}^N [X_i \sum_{j \neq i}^N X_j] \\
&+ (a^2 + 1) \sum_{i=1}^N [X_i \sum_{j \neq i}^N Y_j] \\
&- a \sum_{i=1}^N [X_i \sum_{j \neq i}^N Z_j] - a \sum_{i=1}^N [Y_i \sum_{j \neq i}^N Y_j] \\
&- a \sum_{i=1}^N [Y_i \sum_{j \neq i}^N Z_j],
\end{aligned} \tag{B.13}$$

En utilisant

$$\left\{ \begin{array}{l} X \approx (1 + \sum_{i \neq 1} \beta_i) X_i \\ Y \approx (1 + \sum_{i \neq 1} \beta_i) Y_i \\ Z \approx (1 + \sum_{i \neq 1} \beta_i) Z_i \\ \text{et} \\ G = \frac{[(\sum \beta_i)^2 - \sum \beta_i^2]}{1 + \sum_{i \neq 1} \beta_i}, \end{array} \right. \quad (\text{B.14})$$

on obtient

$$F_{\Sigma}(X, Y, Z) = \sum_{i=1}^N F(X_i, Y_i, Z_i) + (N-1)b - aGX^2 - aGY^2 + (a^2 + 1)GXY - aGXZ + GYZ, \quad (\text{B.15})$$

ce qui se réduit en

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X} = Y \\ \dot{Y} = Z \\ \dot{Z} = -Nb - cX + (ac - 1)Y + (a - c)Z \\ -(1 - G) [a(X^2 + Y^2) - (a^2 + 1)XY + aXZ - YZ] . \end{array} \right. \quad (\text{B.16})$$

Notons que pour  $N = 2$ , on obtient  $G = \gamma$ , et le système (B.9) peut être retrouvé). Le système agrégé correspond à un système de Rössler paramétrisé comme

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = Nb + z[(1 - G)x - c], \end{array} \right. \quad (\text{B.17})$$

ce qui signifie que le système original de Rössler est une bonne approximation d'un ensemble de systèmes de Rössler agrégés du point de vue de la variable  $y$ . Pour  $N = 1$ , on a  $G = 0$  et le système original de Rössler est retrouvé.

### B.1.3 Agrégation de $N$ variables non synchronisées

Dans le cas de  $N$  systèmes indépendants, la variable agrégée  $X = \sum_{i=1}^N y_i$  correspond à l'agrégation de  $N$  variables indépendantes qui ne peuvent être produites par un système tridimensionnel. Cela peut être montré de la façon suivante. Posons

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{x} = \sum_{i=1}^N x_i \\ \tilde{y} = \sum_{i=1}^N y_i \\ \tilde{z} = \sum_{i=1}^N z_i \end{array} \right. \quad (\text{B.18})$$

les variables agrégées, et

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{x}} = \sum_{i=1}^N \dot{x}_i \\ \dot{\tilde{y}} = \sum_{i=1}^N \dot{y}_i \\ \dot{\tilde{z}} = \sum_{i=1}^N \dot{z}_i \end{array} \right. \quad (\text{B.19})$$

leurs dérivées. Le système résultant s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{x}} = -\sum_{i=1}^N y_i - \sum_{i=1}^N z_i \\ \dot{\tilde{y}} = \sum_{i=1}^N x_i + \sum_{i=1}^N a_i y_i \\ \dot{\tilde{z}} = Nb + \sum_{i=1}^N [z_i(x_i - c)] \end{array} \right. \quad (\text{B.20})$$

ce qui, en utilisant la relation  $a_i = a + \delta a_i$ , se réduit à

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{x}} = -\tilde{y} - \tilde{z} \\ \dot{\tilde{y}} = \tilde{x} + a\tilde{y} + \sum_{i=1}^N \delta a_i y_i \\ \dot{\tilde{z}} = Nb + \tilde{z}(\tilde{x} - c) - \sum_{i \neq j}^N x_i z_j . \end{array} \right. \quad (\text{B.21})$$

En conséquence, il est impossible de récrire le système agrégé comme un système tridimensionnel puisque il est impossible d'exprimer les variables  $x_i$  et  $z_i$  en fonction de  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Le système résultant sera nécessairement  $3 \times N$ -dimensionnel.

## B.2 Cas général

Dans le cas général, la formulation canonique n'existe pas nécessairement sous forme analytique et n'est pas nécessairement polynômiale. Néanmoins, une formulation approchée peut dans certains cas être obtenue par approche globale. Sur cette base, l'agrégation peut être analysée dans le cas d'une formulation plus générale de la fonction  $F$  du modèle canonique.

### B.2.1 Agrégation de deux variables $z$ synchronisées de Rössler-76

Pour la variable  $z$ , le modèle global le plus concis qui ait pu être obtenu comporte neuf variables, soit

$$F(X, Y, Z) = \alpha_{020}Y^2 + \alpha_{101}XZ + \alpha_{102}XZ^2 + \alpha_{110}XY + \alpha_{120}XY^2 + \alpha_{200}X^2 + \alpha_{201}X^2Z + \alpha_{300}X^3 + \alpha_{400}X^4. \quad (\text{B.22})$$

En suivant le même raisonnement que pour la variable  $y$  (§ B.1.1), le système canonique peut être ramené à

$$\begin{cases} \dot{X} = Y \\ \dot{Y} = Z \\ \dot{Z} = (1 - 2\nu)(\alpha_{020}Y^2 + \alpha_{101} + \alpha_{110}XY + \alpha_{200}X^2) \\ \quad + (1 - 3\nu)(\alpha_{102}XZ^2 + \alpha_{120}XY^2 + \alpha_{201}X^2Z + \alpha_{300}X^3) \\ \quad + (1 - \nu_2)\alpha_{400}X^4. \end{cases} \quad (\text{B.23})$$

où  $\nu = \beta/(1 + \beta)^2$  et  $\nu_2 = 2\beta(2\beta^2 + 3\beta + 2)/(1 + \beta)^4$ .

Il peut également être généralisé pour un ensemble de  $N$  systèmes agrégés. Le résultat est donc tout à fait généralisable, quel que soit le degré de l'approximation polynômiale de la fonction  $F$ .

### B.2.2 Agrégation de deux variables synchronisées, cas général

Pour une formulation générale, et afin de distinguer les termes linéaires des termes nonlinéaires, le modèle global peut s'écrire :

$$F(X, Y, Z) = \alpha_{000} + \sum_{i+j+k=1} \alpha_{ijk}X^iY^jZ^k + \sum_{2 \leq i+j+k \leq q} \alpha_{ijk}X^iY^jZ^k. \quad (\text{B.24})$$

où  $q$  est le degré maximum du polynôme. En suivant toujours le même raisonnement, le système canonique peut être ramené à

$$\begin{cases} \dot{X} = Y \\ \dot{Y} = Z \\ \dot{Z} = 2\alpha_{000} + \sum_{i+j+k=1} \alpha_{ijk}X^iY^jZ^k \\ \quad + (1 - \nu_2) \sum_{i+j+k=2} \alpha_{ijk}X^iY^jZ^k + \dots \\ \quad + (1 - \nu_n) \sum_{i+j+k=n} \alpha_{ijk}X^iY^jZ^k + \dots \\ \quad + (1 - \nu_q) \sum_{i+j+k=q} \alpha_{ijk}X^iY^jZ^k. \end{cases} \quad (\text{B.25})$$

avec  $\nu_n = \sum_{i=2}^{n-1} r_i \beta^i / (1 + \beta)^n$ , où les coefficients  $r_i$  correspondent à la  $i$ ème ligne du triangle de Pascal et où  $q$  correspond au degré max du polynôme. La formulation peut être condensée en :

$$\begin{cases} \dot{X} = Y \\ \dot{Y} = Z \\ \dot{Z} = 2\alpha_{000} + \sum_{i+j+k=1} \alpha_{ijk}X^iY^jZ^k \\ \quad + \sum_{n=2}^q [(1 - \nu_n) \sum_{i+j+k=n} \alpha_{ijk}X^iY^jZ^k]. \end{cases} \quad (\text{B.26})$$

Cette formulation montre que les modulations du modèle agrégé vont être différents selon le degré de nonlinéarité. Le résultat est généralisable pour un ensemble de  $N$  systèmes agrégés.

## Annexe C

# Topologie 4D – précisions complémentaires

### C.1 Rotation connexe

Nous avons vu au chapitre 5 que la structure topologique d'une suspension relative à un ensemble de Poincaré pouvait être, en grande partie, déduite de l'analyse de l'application de cet ensemble de Poincaré vers lui-même. Pour effectuer cette analyse, il est utile de disposer d'un ensemble de Poincaré connexe (les cas non connexes n'ayant pas encore été explorés). La propriété de connexité nous garanti la dépendance des brins de la suspension et l'impossibilité de les décroiser. En effet, la propriété de dénouage des nœuds et des entrelacs en dimension quatre n'est vérifiée que lorsque les différents domaines du flot sont latéralement non-connexes, car ils peuvent alors être manipulés indépendamment les uns des autres. Il n'en est pas de même si les brins sont collés les uns aux autres.

Les conséquences de cette observation sont importantes. D'une part, cela signifie que – dans le cas de flots 4D connexes – les mouvements ne vont pas être plus libres comme pouvait le laisser supposer la propriété de décroisement de brins. Ils vont être — au contraire — plus contraints. En effet, les comportements de rotations de différents domaines ne pourront plus être considérés individuellement, mais toujours en prenant en compte leur lien aux autres brins, latéralement connexes. D'autre part, les mouvements de rotation n'étant pas commutatifs (en général), la décomposition en mouvements successifs de rotation ne pourra pas être modifiée librement.

Les conséquences sont de taille : les équivalences du type mouvement de Reidemeister III ne seront donc plus valides dans le contexte des flots 4D connexes et au lieu d'être assouplies (par la propriété de dénouement des brins indépendants, cf. 5.16), elles seront durcies. De ce fait, l'information concernant les mécanismes successifs de rotations des différents domaines du flot sera marquée dans la section de Poincaré. Deux exceptions peuvent être toutefois mentionnées : comme pour le cas des flots 3D, le mouvement d'ensemble du flot ne pourra être identifié qu'à  $2\pi$  près (quel que soient les plans de rotation considérés) ; d'autre part, l'ordre des rotations dites « doubles », qui sont spécifiques aux dimensions supérieures à quatre ne pourra être distingué à partir de la section de Poincaré, puisque celles-ci peuvent être effectuées simultanément (et indépendamment) et sont donc commutatives. De manière générale, ces indéterminations ne pourront altérer que marginalement la reconstruction du squelette du flot sur la base d'un ensemble de Poincaré.

L'information caractéristique d'un flot 4D connexe étant presque entièrement contenue dans un ensemble de Poincaré 3D tiré de son flot, il sera donc de même possible de se baser sur des systèmes discrets plutôt que continus pour appliquer l'analyse topologique, évitant ainsi d'avoir à effectuer le choix d'une section de Poincaré.

## C.2 Paradoxe de l'enroulement bidirectionnel

Il existe toutefois un paradoxe concernant le premier mouvement de Reidemeister (cf. chapitre 5, Fig. 5.1c) qui mérite d'être considéré avec plus de minutie. En dimension trois, le premier mouvement de Reidemeister se ramène à un mouvement d'enroulement pour un brin présentant une certaine largeur, et dont le sens d'enroulement dépend du passage supérieur ou inférieur de la bande par rapport à elle-même (cf. 5.1f-g). Or les mouvements supérieurs et inférieurs apparaissent équivalents en dimension quatre, dans la mesure où les deux situations peuvent être ramenées l'une à l'autre en déplaçant l'une des deux tiges suivant une quatrième direction (propriété de décroisement des brins indépendants, cf. Fig. 5.16). Cette situation nous mène directement à un paradoxe puisque conduisant à rendre équivalents deux mouvements d'enroulement en deux sens opposés. De ce fait, la propriété de décroisement ne peut pas être appliquée ici.

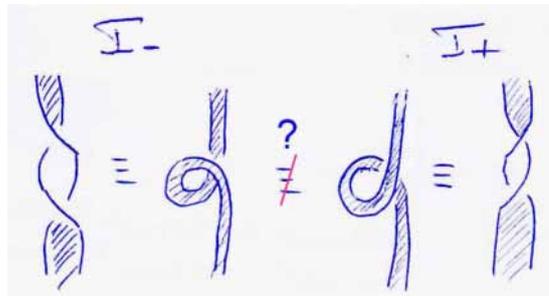


FIGURE C.1 – Premier mouvement de Reidemeister en dimension quatre, paradoxe de l'enroulement bidirectionnel.

Or, comme nous l'avons montré au paragraphe §5.4, il est nécessaire de distinguer la direction du flot – orientée suivant la flèche du temps – des autres directions qui lui sont orthogonales. En conséquence, la direction du flot ne peut être inversée, interdisant ainsi toute rotation autour d'un hyper-axe excluant celui du temps. Le décroisement nécessitant ici d'inverser la direction du flot ne peut donc pas être autorisé ici. Les deux mouvements sont donc effectivement distincts puisqu'il n'est pas possible de passer de l'un à l'autre sans violer le déterminisme du flot. Il s'agit bien ici d'un paradoxe (une contradiction apparente), et non d'une réelle contradiction. D'un point de vue pratique, afin de s'affranchir des difficultés de visualisation dans les espaces multidimensionnels, il convient de toujours privilégier la direction du flot vis-à-vis des autres directions permettant de veiller à ce que la flèche du temps ne soit jamais inversée. Pour l'analyse pratique d'un flot, cette confusion doit – en principe – pouvoir être évitée en modifiant l'angle de vue pour en tirer un point de vue permettant de visualiser l'évolution du brin à temps croissant (cf. Fig. C.2).

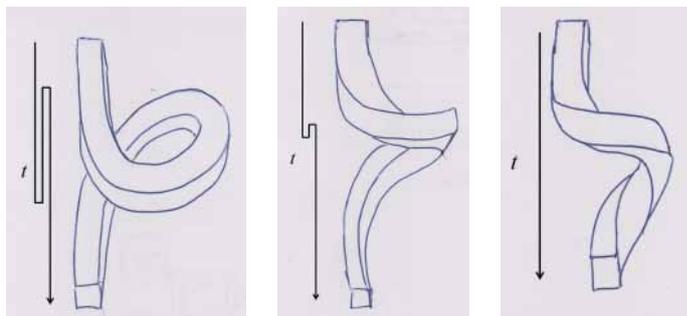


FIGURE C.2 – Différentes vues d'un mouvement de Reidemeister en 4D.

# Documents et ouvrages spécifiques

Bien que de styles très différents, les références ci-dessous citées ont, chacune à leur façon, joué dans notre parcours un rôle spécial, servant de référence incontournables pour les unes, de source de réflexion pour d'autre, ou encore de porte d'ouverture, et méritent – en ce sens – toutes d'être citées ici séparément.

Monod J., *Le hasard et la nécessité. Essai sur la philosophie naturelle de la biologie moderne.* Editions du seuil, Points, essais, 1970.

de Raymond J.-F., *L'improvisation.* Librairie philosophique J. Vrin, Problèmes et controverses, 1980.

Tufillaro N.B., Abbot T. & Reilly J., *An experimental approach to nonlinear dynamics and chaos.* Addison Wesley, 1992.

Abarbanel H.D.I., *Analysis of observed chaotic data.* Springer, 1995.

Letellier C., *Caractérisation topologique et reconstruction d'attracteurs étranges.* Thèse de doctorat de l'Université Paris VII, 1994.

Charru F., *Phénomènes non linéaires.* Notes de cours prises à la main de Maîtrise de Physique UM2 1997-98 de l'Université Toulouse III - Paul Sabatier.

Barelli A. & Charru F., *Travaux dirigés de phénomènes non linéaires.* Maîtrise de Physique UM2 1997-98 de l'Université Toulouse III - Paul Sabatier.

Bergé P., Pommeau Y. & Vidal C., *L'ordre dans le chaos.* Hermann, 1998.

Letellier C., *Systèmes Dynamiques Complexes, de la caractérisation topologique à la modélisation.* Habilitation à diriger des Recherches de l'Université de Rouen, 1998.

Kantz H. & Schreiber T., *Nonlinear time series analysis.* Cambridge, 2000.

Gilmore R. & Lefranc M., *The topology of chaos, Alice stretch and squeezeland.* Wiley-vch, 2002.

Lo Jacomo F., *Visualiser la quatrième dimension. Des images perçues dans les miroirs ... à la construction des objets mathématiques.* Vuibert, 2002.

Mazzega P., *Petites enquêtes sur une relation difficile : modèles  $\Leftrightarrow$  données* Habilitation à diriger des Recherches de l'Université de Toulouse, 2002.

Françoise J.-P., *Oscillations en biologie. Analyse qualitative et modèles.* Springer, *Mathématiques & Applications* 46, 2005.

Ghys E., *La théorie du chaos.* De vive voix, 2011.

Letellier C., *Le chaos dans la nature.* Vuibert, 2006.

Lütkepohl H., *New introduction to multiple time series analysis.* Springer, 2006.

McMullen C., *Fourth Dimension. Volume 1 : Tesseracts and glomes. Volume 2 : Hypercube- and hypersphere-based structures* Custom books, 2009.

Prochiantz A., *Construire une théorie du vivant.* De vive voix, 2010.

Letellier C. & Gilmore R., *Topology and dynamics of chaos. In celebration of Robert Gilmore's 70th birthday.* World Scientific, Series A, vol. 84, 2013.

Popper K. R., Des sources de la connaissance et de l'ignorance. (conférence donnée par Popper le 20 janvier 1960 à la British Academy) Rivages poche / Petite Bibliothèque, 1985.

# Bibliographie

## [1] **Articles de rang A**

- Mangiarotti S., Drapeau L. & Letellier C., Two chaotic global models captured from the cycle of cereal crops observed from satellite in Northern Morocco, *Chaos*, **24**(2), 023130, 2014.
- [2] Belaqziz S., Mangiarotti S., Le Page M., Khabba S., Er-Raki S., Agouti T., Drapeau L., Kharrrou M.H., El Adnani M. & Jarlan L., Irrigation scheduling of a classical gravity network based on the Covariance Matrix Adaptation – Evolutionary Strategy algorithm. *Computers and Electronics in Agriculture*, **102**, 64-72, 2014.
- [3] Mangiarotti S., Coudret R., Drapeau L. & Jarlan L., Polynomial search and Global modeling : two algorithms for modeling chaos. *Physical Review E*, **86**(4), 046205, 2012.
- [4] Mangiarotti S., Martinez J.-M., Bonnet M.-P., Buarque D.C., Filizola N. & Mazzega P., Water Flow and Solid Suspended Particles Flow Estimated along the Mainstream of the Amazon and the Madeira Rivers (from in situ and MODIS Satellite Data). *International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation*, **21**, 341-355, 2013.
- [5] Mangiarotti S., Sekhar M., Berthon L., Javeed Y. & Mazzega P., Causality Analysis of Groundwater dynamics based on a Vector Autoregressive model in the semi-arid basin of Gundal (South India). *Journal of Applied Geophysics*, **83**, 1-10, 2012.
- [6] Mangiarotti S., Mazzega P., Mougin E. & Hiernaux P., Predictability of vegetation cycles over the semi-arid region of Gourma (Mali) from forecasts of AVHRR-NDVI signals, *Remote Sensing of Environment*, **123**, 246-257, 2012.
- [7] Mangiarotti S., Mazzega P., Mougin E. & Hiernaux P., The vegetation cycle in West Africa from AVHRR-NDVI data : Horizon of predictability *versus* spatial scales, *Remote Sensing of Environment*, **114** (9), 2036-2047, 2010.
- [8] Javeed J., Sekhar, M., Bandyopadhyay S. & Mangiarotti S., EOF and SSA analyses of hydrological time series to assess climatic variability and land-use effects : a case study in the Kabini River basin of South India. *IAHS publication*, **329**, 167-177, 2009.
- [9] Mougin E., Hiernaux P., Kergoat L., Grippa M., de Rosnay P., Timouk F., Le Dantec V., Demarez V., Arjounin M., Lavenu F., Soumaguel N., Ceschia E., Mougénot B., Baup F., Frappart F., Frison P.L., Gardelle J., Gruhier C., Jarlan L., Mangiarotti S., Sanou B., Tracol Y., Guichard F., Trichon V., Diarra L., Soumaré A., Koité M., Dembélé F., Lloyd C., Hanan N.P., Damesin C., Delon C., Serça D., Galy-Lacaux C., Seghieri J., Becerra S., Dia H., Gagneron F. & Mazzega P., The AMMA-CATCH Gourma observatory site in Mali : Relating climatic variations to changes in vegetation, surface hydrology, fluxes and natural resources, *Journal of Hydrology*, *375*(1-2), 1-33, 2009.
- [10] Mangiarotti S. , Mazzega P., Jarlan L., Mougin E., Baup F. & Demarty J., Evolutionary bi-objective optimization of a semi-arid vegetation dynamics model with NDVI and  $\sigma_0$  satellite data, *Remote Sensing of Environment* (special issue), **112**(4), 1365-1380, 2008.
- [11] Jarlan L., Mangiarotti S., Mougin E., Mazzega P. & Hiernaux P., Assimilation of NDVI data into a Sahelian Grassland model. *Remote Sensing of Environment* (special issue), **112**(4), 1381-1394, 2008.

- [12] Mangiarotti S. & Lyard F., Surface pressure and wind stress effect on sea level change estimations from Topex-Poseidon satellite altimetry in the Mediterranean Sea. *Journal of Atmospheric and Oceanographic Technology*, **25**(3), 464-474, 2008.
- [13] Mangiarotti S., Coastal sea level trends from TOPEX-Poseidon satellite altimetry and tide gauge data in the Mediterranean Sea during the 1990s. *Geophysical Journal International*, **13**, 132-144, 2007.
- [14] Cazenave A., Cabanes C., Dominh K. & Mangiarotti S., Recent Sea Level Change in the Mediterranean Sea Revealed by Topex/Poseidon Satellite Altimetry *Geophys Research Letters*, **28**, 1607-1610, 2001.
- [15] Mangiarotti S., Cazenave A., Soudarin L., Crétaux J.-F., Annual vertical crustal motions predicted from surface mass redistribution and observed by space geodesy, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **106**(B3), 4277-4291, 2001.

#### Articles soumis / compléments d'articles

- [16] Mangiarotti S., Coudret R., Drapeau L. & Jarlan L., Global models' formulation and associated transition matrices for the Rössler system, the electro-dissolution of copper in phosphoric acid and the cycles of rainfed wheat observed from satellite in North Morocco. Supplemental Material to [3], available at <http://link.aps.org/supplemental/>
- [17] Letellier C., Mangiarotti S. & Aguirre L.A., Global modeling from unstable periodic orbits : Feasibility and the influence of the data on the model quality. *submitted to Physical Review E*, under revision.
- [18] Mangiarotti S., Le Jean F., Letellier C., Global Modeling of aggregated and associated chaotic dynamics. *Submitted to Chaos*, under revision.

#### Packages

- [19] Mangiarotti S., Coudret R., Drapeau L., PoMoS : Polynomial (ordinary differential equation) Model Search. *Comprehensive R Archive Network*, <http://cran.r-project.org/web/packages/PoMoS/index.html>

#### Chapitre de livre

- [20] Sekhar M., Javeed Y., Bandyopadhyay S., Mangiarotti S. & Mazzega P., 2011. Groundwater management practices and emerging challenges : lessons from a case study in the Karnataka State of South India. In : Groundwater Management Practices, A. N. Findikakis & K. Sato (eds.), CRC Press, *IAHR Monographs*. ISBN-10 : 0415619874.

#### Actes de colloques

- [21] Mangiarotti S., Analyse Topologique de systèmes chaotiques faiblement dissipatifs : applications aux attracteurs *Lorenz-84* et *cereal crops*, *Conférence sur les Systèmes Dynamiques Complexes, Université Houari Boumediene, Alger, 10-13 Juin 2013*.
- [22] Nassah H., Hanich L., Fakir Y. & Mangiarotti S., Analysis and modeling of the variations of the groundwater level in the Haouz of Marrakech (Morocco), *7th International Conference on Thermal Energy, Marrakech, Morocco, Mai 2014*.
- [23] Mangiarotti S., Mazzega P., Dardel C., Mougin E. & Kergoat L., Predictability of Vegetation Cycles at Four Study Sites in a Semi-Arid Region (Gourma, Mali), *XVth Symposio SEPLER*, Nov. 2012, Cayena, Guyane française.
- [24] Mangiarotti S., Chassan M. & Drapeau L., Prévisibilité du cycle du blé : Modélisation par approche globale et assimilation de données, *Proceeding of the 9th International Conference*

- African Association of Remote Sensing of the Environment*, Oct.-Nov. 2012, El Jadida, Morocco.
- [25] Jarlan L. et 48 auteurs The SUDMED program and the Joint International Laboratory TREMA dealing with "emote Sensing of Water Resources in the semi-arid Mediterranean area", *Water and Environment International Conference*, Oct. 2011, Marrakech, Morocco.
- [26] Jarlan L., Abaoui J., Duchemin B., Tourre Y., Ouldbba A., Mangiarotti S., Kharrou H., Khabba S., Ballaghi R., Le Page M., Mokssit A., Chehbouni A., Determinants climatiques de la variabilité interannuelle des rendements en céréales et prévision précoce. Application à la province de SETTAT (Maroc), *Proceeding of the 9th International Conference African Association of Remote Sensing of the Environment*, Oct.-Nov. 2012, El Jadida, Morocco.
- [27] Mangiarotti S., L. Drapeau, R. Coudret & Jarlan L., Modélisation par approche globale de la dynamique du blé pluvial observée par télédétection spatiale en zone semi-aride, *14e Rencontre du Non Linéaire*, Université Pierre et Marie Curie, Paris, France, 2011.
- [28] Mangiarotti S. & Schoenauer M., 2011. Identification des paramètres du modèle de Lorenz en contexte perturbé, par une approche de stratégie de dévolution, *14e Rencontre du Non Linéaire*, Université Pierre et Marie Curie, Paris, France, 2011.
- [29] Mangiarotti S., L. Drapeau & Coudret R., 2010. Prévisibilité du cycle de la végétation en zone semi-aride par télédétection et reconstruction, Colloque Commisco'2010, Bondy, France.
- [30] Sekhar M., Javeed Y. & Mangiarotti S., Climatic variability and anthropogenic effects on groundwater behaviour in the upper Cauvery river basin, *International Groundwater Conference*, Jaipur, India, 2008.
- [31] Mangiarotti S., Jarlan L. et al., 2006. Assimilation de données Optique et Radar dans un modèle simple de fonctionnement régional de la végétation au Sahel par stratégies d'évolution multicritère, *Colloque National Assimilation de données*, météo-France, Toulouse, 2006.
- [32] Mangiarotti S., Mazzega P. et al., Predictability of the Annual Vegetation cycles over Sahel from AVHRR-NDVI data : a preliminary space-time analysis, *1st international AMMA conference*, Dakar, Sénégal, 2006.
- [33] Mangiarotti S., Jarlan L. et al., Assimilation of VEGETATION/SPOT4 NDVI data in a simple land surface model to monitor vegetation over the AMMA meso-scale site (Mali), *1st international AMMA conference*, Dakar, Senegal, 2006.
- [34] Mangiarotti S., Cazenave A., Crétaux J.-F. & Soudarin L., Mouvements verticaux annuels relatifs aux échanges de surfaces et observés par géodésie spatiale, *GDR AGRET 1999-2001*, 2002.
- [35] Fourcade P., Mangiarotti S. & Cadoz C., Generating pitches in transients by percussive excitation, *ICMC99 International Computer Music Conference*, Beijing, China, 1999.

#### Coencadrement d'études doctorales

- [36] Salwa Belaqziz (2009-2013). Optimisation des tours d'eau d'un réseau d'irrigation. LMI TREMA. Dir. Mohamed El Adnani, codir. Saïd Khabba, Abdelghani Chehbouni, Michel Le Page, Sylvain Mangiarotti.
- [37] Youssef Javeed (2007-2010). Analysis of groundwater dynamics in semi-arid regions : effect of variability and pumping. CEFIRSE. Dir. Sekhar Muddu (IISc).

#### Stages de master

- [38] Pauline Nouallet (Sept. – Fev. 2014). Modélisation globale de systèmes dynamiques non-linéaires, Application à l'hydrologie des surfaces en milieu semi-aride. Master 2 (AgroParis-Tech). Dir. Sylvain Mangiarotti, Codir. Salah Er-Raki.
- [39] Mohamed Abouharya (Fev – on). Modélisation globale de systèmes dynamiques nonlinéaires. Master 1 (UCAM, Maroc). Dir. Sylvain Mangiarotti, Codir. Aberrahmane Lahrouni.

- [40] Houda Nassah (Fev – Jul. 2013). Analyse et modélisation des variations hydrodynamiques de la nappe du Haouz de Marrakech. Master Science et Technique Eau Environnement (UCAM, Maroc). Dir. Sylvain Mangiarotti, Lahoucine Hanich & Younes Fakir.
- [41] Flavie Le Jean (Fev–Jul. 2011). Analyse spatialisée par approche globale. Master (MSE, Toulouse). Dir. Sylvain Mangiarotti.
- [42] Malika Chassan (Fev–Jul. 2011). Assimilation de données dans un modèle chaotique obtenu par approche globale. Master (IMAT, Toulouse). Dir. Sylvain Mangiarotti.
- [43] Mickaël Soulier (Fev – Jul. 2011). Assimilation de données dans un modèle chaotique obtenu par approche globale. Master (SIM, Toulouse). Dir. Laurent Drapeau, Codir. Sylvain Mangiarotti.
- [44] Dounia Benhadji Serradj (Avril 2010 – Fev. 2011). Préviation des indices de végétation par approches nonlinéaires. Master MCP de Tlemcem (Algérie). Dir. Sylvain Mangiarotti, Brahim Cherki (Univ. Tlemcem) & Jean-Pierre Barbot (ECS-lab).
- [45] Raphaël Coudret (Mars – Août 2010). Méthodes statistiques et systèmes dynamiques dans l'analyse de séries temporelles. Master 2, INSA (Toulouse). Dir. Sylvain Mangiarotti & Laurent Drapeau.
- [46] Mathieu Alos (Février – Juillet 2010). Prédiction des rendements agricoles au Maroc par approche Support Vector Machine. IUP de l'UPS (Toulouse). Dir. Sylvain Mangiarotti, Lionel Jarlan & Benoît Duchemin.
- [47] Lucie Berthon (juin – septembre 2009). Etude du comportement des niveaux d'eau profonde du bassin de la Gundal (Inde du Sud) sur la base d'une analyse causalité à partir de modèles Vectoriels Auto-Régressifs. 2nd year of engineering at INP-ENSEEIH (Toulouse). Dir. Sylvain Mangiarotti & Codir. P. Mazzega.
- [48] Antony Rol (juin – août 2007). Analyse des caractéristiques vibratoires d'une anche de saxophone alto. 2nd year of engineering at INP-ENSEEIH (Toulouse). Dir. Jean-François Rouchon (LEEI) & Sylvain Mangiarotti.

#### Autres encadrements

- [49] Léo Rogel (février 2011). Observation d'un laboratoire de recherche, le Cesbio. Stage d'observation de 3e, collège (Toulouse). Dir. Sylvain Mangiarotti.
- [50] Math en jeans (septembre 2013 – Juin 2014). Suivi de six étudiants visant à leur introduire les concepts de la théorie du chaos par une démarche de recherche (étudiants de second cycle). Lycée Victor Hugo (Marrakech, Maroc). Activité animée par Frédéric Danchin (Lycée V. Hugo).

#### Manuscrits

- [51] Mangiarotti S., Les variations basse fréquence du niveau de la mer Méditerranée au cours de la deuxième moitié du XXe siècle par altimétrie spatiale et marégraphie. *PhD Thesis*, Université Toulouse III Paul Sabatier, Legos, Dir. Anny Cazenave, codir. F. Lyard, Toulouse, France, 178 pp., 2003.
- [52] Mangiarotti S., Étude des mouvements crustaux associés aux charges de surface. *Rapport de Diplôme d'Études Approfondies*, Université Toulouse III Paul Sabatier, Dir. Anny Cazenave, Legos, Toulouse, France, 58 pp., 1999.
- [53] Mangiarotti S., Etude de l'attaque d'un son non-entretenu à partir d'excitateurs multi-percussionnels. *Rapport de Maîtrise*, Université Toulouse III Paul Sabatier, Association de Création et de Recherche sur les Outils d'Expression (ACROE), Dir. Claude Cadoz, Grenoble, France, 65 pp., 1997.
- [54] Mangiarotti S., Petite étude des rapports de groupe au sein d'une classe de Cours Moyen 2ème année. *Rapport de stage de Licence*, Université Toulouse III Paul Sabatier, Dir. Christian Sempé, Toulouse, France, 18 pp., 1994.

- [55] Mangiarotti S., La grille ouverte. Livre + CD, *travail non publié*.

### Références

- [56] Abarbanel H. D. I., Analysis of Observed Chaotic Data. New York : Springer Verlag 272 pp., 1996.
- [57] Abraham R., The peregrination of Poincaré. In : Topology and dynamics of chaos. In celebration of Robert Gilmore's 70th birthday. Eds Letellier C. & Gilmore R., World Scientific, Series A, vol. 84, 23-38, 2013.
- [58] Aguirre L.A. & Jácome C.R.F., Cluster Analysis of NARMAX Models for Signal-Dependent Systems, *IEE Proceedings, Part D – Control Theory and Applications*, **145** (4), 409-414, 1998.
- [59] Aguirre L.A., Freitas U.S., Letellier C. & Maquet J., Structure selection techniques applied to continuous-time nonlinear models, *Physica D*, **158** (1-4), 1-18, 2001.
- [60] Aguirre L. A. & Billings S. A., Dynamical effects of overparametrization in nonlinear models, *Physica D*, **80** (1,2), 26-40, 1995.
- [61] Abarbanel H. D. I. & Kennel M. B., Local false nearest neighbors and dynamical dimensions from observed chaotic data, *Physical Review E*, **47** (5), 3057-3068, 1993.
- [62] Akaike H., A new look at the statistical model identification, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **19** (6), 716-723, 1974.
- [63] Ali A., Lebel T. & Amani A., Invariance in the spatial structure of Sahelian rain fields at climatological scales. *Journal of Hydrometeorology*, **4** (6), 996-1011, 2003.
- [64] Allen R.G., Pereira L.S., Raes D. & Smith M., Crop Evapotranspiration : Guidelines for computing crop water requirements. In *FAO Irrigation and Drainage*, Rome, paper 56, 1998.
- [65] Alzueta I., Abeledo L. G., Mignonea C. M. & Miralles D. J., Differences between wheat and barley in leaf and tillering coordination under contrasting nitrogen and sulfur conditions, *European Journal of Agronomy*, **41**, 92-102, 2012.
- [66] Auerbach D., Cvitanović P., Eckmann J.-P., Gunaratne G. & Procaccia I., Exploring Chaotic Motion Through periodic Orbits *Physical Review Letters*, **58** (23), 2387-2389, 1987.
- [67] Auroux D. & Blum J., A nudging-based data assimilation method for oceanographic problems : the back and forth nudging (bfn) algorithm, *Nonlinear Processes in Geophysics*, **15**, 305-319, 2008.
- [68] <http://www.aviso.oceanobs.com/en/home.html>
- [69] Bacaër N., The model of Kermack and McKendrick for the plague epidemic in Bombay and the type reproduction number with seasonality. *J. Math. Biol.*, **64**, 403-422, 2012.
- [70] Balaghi R., Tychon B., Eerens H. & Jlibene M., Empirical regression models using NDVI, rainfall and temperature data for the early prediction of wheat grain yields in Morocco *International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation*, **10** (4), 438, 2007.
- [71] Bassett M.R. & Hudson J.L., Quasi-periodicity and chaos during an electrochemical reaction, *The Journal of Physical Chemistry*, **93**, 2731-2737, 1989.
- [72] Bate A.M. & Hilker F.M., Complex Dynamics in an Eco-epidemiological Model, *Bulletin of Mathematical Biology*, **75** (11), 2059-2078, 2013.
- [73] Baú D., Gambolati G. & Teatini P., Residual land subsidence near abandoned gaz fields raises concern over northern adriatic coastland. *EOS*, 245-249, 2000.
- [74] Boiron M.-A. & Malasoma J.-M., Modélisation globale de systèmes chaotiques : vers une extension de la bibliothèque de modèles, *6e Rencontre du Non Linéaire*, Université Pierre et Marie Curie, Paris, France, 2003.
- [75] Boiron M.-A., Modélisation phénoménologique de systèmes complexes non-linéaires à partir de séries chronologiques scalaires, Thèse de Doctorat de l'Université Claude Bernard (Lyon), 2005.

- [76] Belaqziz S., Khabba S., Er-Raki S., Jarlan L., Le Page M., Kharrou M.H., El Adnani M. & Chehbouni G., A new irrigation priority index based on remote sensing data for assessing the networks irrigation scheduling. *Agricultural Water Management*, **119**, 1-9, 2013.
- [77] Bergé P., Pommeau Y. & Vidal C., L'ordre dans le chaos. *Hermann*, 1998.
- [78] Bethoux J.P. & Gentili B., Functioning of the Mediterranean Sea : past and present changes related to freshwater input and climate changes. *Journal of Marine Systems*, **20**, 33-47, 1999.
- [79] Billings S.A., Chen S. & Korenberg M.J., Identification of MIMO non-linear systems using a forward-regression orthogonal estimator, *Int. J. Control*, **49** (6), 2157-2189, 1989.
- [80] Birman J. & Williams R. F., Knotted periodic orbits in dynamical systems - I : Lorenz's equations, *Topology*, **22** (1), 47-82, 1983.
- [81] Deng B., Constructing homoclinic orbits and chaotic attractors, *International Journal of Bifurcation & Chaos*, **4**, 823, 1994.
- [82] Bonnet M.P., Barroux G., Martinez J.M., Seyler F., Moreira-Turcq P., Cochonneau G., Melack J.M., Boaventura G., Maurice-Bourgoin L., León J.G., Roux E., Calmant S., Kosuth P., Guyot J.L. & Seyler P., Floodplain hydrology in an Amazon floodplain lake (Lago Grande de Curuai). *Journal of Hydrology*, **349**, 18-30, 2008.
- [83] Boudjema G. & Cazelles B., Constructing homoclinic orbits and chaotic attractors, *Chaos, Solitons & Fractals*, **12**, 2051-2069, 2001.
- [84] Boughaba S. & Lozi R., Fitting trapping regions for Chua's attractor – a novel method based on isochronic lines, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **10**(1), 205-225, 2000.
- [85] Brown G.S., The average impulse response of a rough surface and its applications. *IEE trans. antennas propagat.*, **AP-25** (1), 67-74, 1977.
- [86] Cabanes C., Cazenave A. & Le Provost C., Sea level rise during past 40 years determined from satellite and in situ observations. *Science*, **294**, 840-842, 2001.
- [87] Callède J., Cochonneau G., Ronchail J., Alves F.V., Guyot J.L., Guimarães V.S. & Oliveira E.D., Les apports en eau de l'Amazonie à l'Océan Atlantique. *Revue des Sciences de l'Eau*, **23** (3), 247-273, 2010.
- [88] Calmant S. & Seyler F., Continental surface waters from satellite altimetry. *Geosciences Comptes Rendus*, **338**, 1113-1122, 2006.
- [89] Carrère L. & Lyard F., Modeling the barotropic response of the global ocean to atmospheric wind and pressure forcing – comparisons with observations *Geophysical Research Letters*, **30**(6), 1275, 2003.
- [90] Cartwright D.E. & Tayler R.J., New computations of the tide-generating potential. *Geophys. JR astr. Soc.*, **23**, 45-74, 1971.
- [91] Cayrol P., Kergoat L., Moulin S., Dedieu G. & Chehbouni A., Calibrating a coupled SVAT/vegetation growth model with remotely sensed reflectance and surface temperature. A case study for the HAPEX-Sahel grasslands sites. *Journal of Applied Meteorology*, **39**, 2452-2472, 2000.
- [92] Cazenave A. & Llovel W., Contemporary sea level rise. *Annual Review of Marine Science*, **2** (1), 145-173, 2010.
- [93] Chelton D.B., Ries J.C., Haines B.J., Fu L.-L., Nerem R.S. & Tapley B.D., Satellite altimetry. - In : Satellite altimetry and Earth sciences, a handbook of techniques and applications, Fu L.-L. et Cazenave A. (eds.), *Int. Geophys. Series, Academic Press*, **69**, 1-131, 2001.
- [94] Chen Z., Grasby S.E. & Osadetz, K.G., Relation between climate variability and groundwater levels in the upper carbonate aquifer, southern Manitoba, *Canada. J. Hydrol.*, **290**, 43-62, 2004.
- [95] Chlouverakis K.E. & Sprott J.C., A comparison of correlation and Lyapunov dimensions, *Physica D*, **200**, 156-164, 2004.
- [96] Chua L. O. & Komuro, M., The double scroll family, *IEEE Trans. Circuits Syst.*, **33**, 1073-1118, 1986.

- [97] Church J.A., Gregory J.M., White N.J., Platten S.M. & Mitrovica J.X., Understanding and projecting sea level change. *Oceanography*, **24** (2), 130-143, 2011.
- [98] Cissé A.M., Dynamique de la strate herbacée des pâturages de la zone sudsahélienne. Ph.D. dissertation. Wageningen Agriculture University, Wageningen. 211pp, 1986.
- [99] Corrêa M.V., Mendes E.M.A.M. & Aguirre L.A., Modeling chaotic dynamics with discrete nonlinear rational models. *Int. J. Bifurcation Chaos*, **10** (5), 1019-1032, 2000.
- [100] The Comprehensive R archive Network. <http://cran.r-project.org/>.
- [101] Crétaux J.-F., Soudarin L., Cazenave A. & Bouillé F., Present-day tectonic plate motions and crustal deformations from the DORIS space system *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **103** (B12), 30167-30181, 1998.
- [102] Crutchfield J. P. & McNamara B. S., Equations of motion from a data series, *Complex Systems*, **1**, 417, 1987.
- [103] De Mey P., Auclair F., Jordà G., Lamouroux J., Lyard F., Mangiarotti S., Marsaleix P., Mourre B., Pairaud I., Estournel C. & Le Provost C., Data assimilation in regional and shelf seas, International Liège Colloquium on Marine Environmental Monitoring and Prediction, Liège, Belgique, Mai 2004.
- [104] Dickinson J. E., Hanson R. T., Ferre T. P. A. & Leake S. A., Inferring time-varying recharge from inverse analysis of long-term water levels. *Water Resour. Res.*, **40**, W07403, 2004.
- [105] Di Donato G., Negredo A.M., Sabadini R. & Vermeersen L.L.A., Multiple processes causing sea-level rise in the central Mediterranean. *Geophys. Res. Letters*, **26** (12), 1769-1772, 1999.
- [106] Diks C., Estimating invariants of noisy attractors., *Physical Review E*, **53** (5), R4263-R4266, 1996.
- [107] Ding M. & Yang W., Deterministic point processes generated by threshold crossings : Dynamics reconstruction and chaos control *Physical Review E*, **55** (3), 2397-2402, 1997.
- [108] Duane G.S., Tribbia J.J. & Weiss J.B., Synchronicity in predictive modelling : a new view of data assimilation *Nonlinear Processes in Geophysics*, **13**, 601-612, 2006.
- [109] Ducet N., Le Traon P. Y. & Gauzelin P., Response of the Black Sea mean level to atmospheric pressure and wind forcing. *Journal of Marine Systems*, **22**, 311-327, 1999.
- [110] Duchemin B., Hadria R., Erraki S., Boulet G., Maisongrande P., Chehbouni A., Escadafal R., Ezzahar J., Hoedjes J.C.B., Kharrou M.H., Khabba S., Mougenot B., Olioso A., Rodriguez J-C. & Simonneaux V., Monitoring wheat phenology and irrigation in Central Morocco : on the use of relationships between evapotranspiration, crops coefficients, leaf area index and remotely-sensed vegetation indices. *Agricultural Water Management*, **97** (1), 1-27, 2006.
- [111] Dunne T., Mertes L.A.K., Meade R.H., Richey J.E. & Forsberg B.R., Exchanges of sediment between the flood plain and channel of the Amazon River in Brazil. *The Geological Society of America Bulletin*, **110** (4), 450-467, 1998.
- [112] Eanes R.J. & Bettadpur S.V., The CSR 3.0 global ocean tide model, CSR-TM-95-06, Center for Space Res., Univ. of Texas at Austin, 1995.
- [113] Eltahir E.A.B. & Yeh P.J.F., On the asymmetric response of aquifer water level to floods and droughts in Illinois. *Water Resour. Res.*, **35** (4), 1199-1217, 1999.
- [114] Er-Raki S., Chehbouni A., Khabba S., Simonneaux V., Jarlan L., Ouldbba A., Rodriguez J.C. & Allen R., Assessment of reference evapotranspiration methods in semi-arid regions : Can weather forecast data be used as alternate of ground meteorological parameters? *Journal of Arid Environments*, **74**, 1587-1596, 2010.
- [115] Espinoza R.E., Martinez J.-M., Guyot J.L., Frazy P., Armijos E., Crave A., Bazán H., Vauchel P. & Lavado W., The integration of field measurements and satellite observations to determine river solid loads in poorly monitored basins. *Journal of Hydrology*, **444-445**, 221-228, 2012.
- [116] Espinoza R.E., Martinez J.-M., Le Texier M., Guyot J.L., Fraizy P., Meneses P. & Oliveira E., A study of sediment transport in the Madeira River, Brazil, using MODIS remotesensing images. *Journal of South American Earth Sciences*, **44**, 45-54, 2013.

- [117] Estournel C., Durrieu de Madron X., Marsaleix P., Auclair F., Julliand C. & Vehil R., Observation and modelisation of the winter coastal oceanic circulation in the Gulf of Lions under wind conditions influenced by the continental orography (FETCH experiment). *Journal of Geophysical Research*, **108** (C3), 8059, 2003.
- [118] Evensen G., Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using Monte-Carlo methods to forecast error statistics. *Journal Geophysical Research*, **99**, 10143-10162, 1994.
- [119] Evensen G. & van Leeuwen P.J., An Ensemble Kalman Smoother for Nonlinear Dynamics, *Monthly Weather Review*, **128** (6), 1852-1867, 2000.
- [120] El Mekki A.A., Cereal Policies in Morocco, *CIHEAM Analytic Note*, **7**, 1-21, 2006.
- [121] Emanuel K. A., Edward Norton Lorenz 1917-2008 – A biographical memoir, National Academy of Sciences, Washington, D.C., 2011.
- [122] Fekete B.M. & Vörösmarty C.J., The current status of global river discharge monitoring and potential new technologies complementing traditional discharge measurements. In : Proceedings of the PUB Kick-off Meeting, *IAHS Publication*, **309**, Brasilia, pp. 129-136, 2007.
- [123] Filizola N., Spínola N., Arruda W., Seyler F., Calmant S. & Silva J., The Rio Negro and Rio Solimões confluence point – hydrometric observations during the 2006/2007 cycle. In : Vionnet, et al. (Eds.), *River, Coastal and Estuarine Morphodynamics : RCEM 2009*.
- [124] Frappart F., Hiernaux P., Guichard F., Mougou E., Kergoat L., Arjounin M., et al., Rainfall regime over the Sahelian climate gradient in the Gourma, Mali. *Journal of Hydrology*, **375** (1-2), 128-142, 2009.
- [125] Fei Z., Hudson J. L. & Kelly R. G., A low-noise contact for rotating electrodes, *Journal of the Electrochemical Society*, **141** (9), L123-L124, 1994.
- [126] Freitas U., Letellier C. & Aguirre L., Failure in distinguishing colored noise from chaos using the "noise titration" technique, *Physical Review E*, **79**, 035201, 2009.
- [127] Frede V. & Mazzega P., A Preliminary Nonlinear Analysis of the Earth's Chandler Wobble, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, **137**, 565-579, 1999.
- [128] Froyland G., Junge O. & Ochs G., Rigorous computation of topological entropy with respect to a finite partition *Physica D*, **154**, 68-84, 2001.
- [129] Furtado H.C.F. ; de Campos Velho H.F. & Macau, E.E.N., Data assimilation : Particle filter and artificial neural networks, *Journal of Physics : Conference Series*, **135**, 012073, 2008.
- [130] Gaspar P., Ogor F., Le Traon P.-Y. & Zanife O.-Z., Estimating the sea state bias of Topex and Poseidon altimeters from crossover differences. *J. Geophys. Res.*, **99** (C12), 24981-24994, 1994.
- [131] Garrett C., Variable sea level and strait flow in the Mediterranean : A theoretical study of the response to meteorological forcing. *Oceanologica Acta*, **6**, 79-87, 1983.
- [132] Gill A.E., *Atmosphere-Ocean Dynamics*, Academic Press, San Diego, CA, 1982.
- [133] Glass L., Chaos and heart rate variability, *Journal of Cardiovascular Electrophysiology*, **10**, 1358-1360, 1999.
- [134] Glass L., Introduction to controversial topics in nonlinear science : Is the heart rate chaotic ?, *Chaos*, **19**, 028501, 2009.
- [135] Gilmore R., Topological analysis of chaotic dynamical systems. *Review of Modern Physics*, **70**, 1455-1530, 1998.
- [136] Gilmore R. & Lefranc M., *The Topology of Chaos, Alice in Stretch and Squeezeland*, Wiley, 495pp., 2002
- [137] Gomes M.E.D., Souza A.V.P., Guimarães H.N. & Aguirre L.A., Investigation of determinism in heart rate variability, *Chaos*, **10** (2), 398-410, 2000.
- [138] Gouesbet G. & Letellier C., Global vector field reconstruction by using a multivariate polynomial  $L_2$ -approximation on nets, *Physical Review E*, **49** (6), 4955-4972, 1994

- [139] Gouesbet G., Meunier-Guttin-Cluzel S. & Menard O., Chaos and its reconstruction Nova Science Pub Incorporated, 2003
- [140] Goulding M., Barthem R. & Ferreira E., The Smithsonian Atlas of the Amazon. Smithsonian Institution press, Washington, 2003.
- [141] Granger C.W.J., Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods. *Econometrica*, **37**(3), 424-438, 1969.
- [142] Grassberger P. & Procaccia I., Characterization of strange attractors, *Phys. Rev., Lett.*, **50**, 346-349, 1983.
- [143] Grassberger P. & Kantz H., Generating partitions for the dissipative Hénon map, *Phys. Lett. A*, **113**, 235-238, 1985.
- [144] Grebogi C., Ott E., Pelikan S. & Yorke J.A., Strange attractors that are not chaotic. *Physica D*, **13**, 261-268, 1984.
- [145] Gregory J.M., Church J.A., Boer G.J., Dixon K.W., Flato G.M., Jackett D.R., Lowe J.A., O'Farrell S.P., Roeckner E., Russell G.L., Stouffer R.J. & Winton M., Comparison of results from several AOGCMs for global and regional sea-level change 1900-2100. *Climate Dynamics*, **18**(3/4), 225-240, 2001.
- [146] Gröger M. & Plag H-P., Estimations of global sea level trend : limitations from structure of the PSMSL global sea level data set. *Global and Planetary Change*, **8**, 161-179, 1993.
- [147] Grond F., Diebner H.H., Sahle S., Mathias A., Fischer S. & Rössler O.E., A robust, locally interpretable algorithm for Lyapunov exponents. *Chaos, Solitons & Fractals*, **16**, 841-852, 2003.
- [148] Grond F. & Diebner H.H., Local Lyapunov exponents for dissipative continuous systems *Chaos Solitons & Fractals*, **23**, 1809-1817, 2005.
- [149] Guyot J.L., Filizola N. & Laraque A., Régime et bilan du flux sédimentaire de l'Amazone à Óbidos (Pará Brésil) de 1995 à 2003. In : Proceedings of Sediment Budget symposium held during the Seventh IAHS Scientific Assembly, *IAHS Publication*, **291**, Foz do Iguazu, pp. 347-354, 2005.
- [150] Hagolle O., Huc M., Villa Pascual D. & Dedieu G., A multi-temporal method for cloud detection, applied to FORMOSAT-2, VEN $\mu$ S, LANDSAT and SENTINEL-2 images, *Remote Sensing of Environment*, **114**, 1747-1757, 2010.
- [151] Haines B.J. & Bar-Sever Y.E., Monitoring the TOPEX microwave radiometer with GPS : stability of columnar water vapor measurements. *Geophys. Res. Lett.*, **25**(19), 3563-3566, 1998.
- [152] Hall D.K., Salomonson V.V. & Riggs G.A., MODIS/Terra Snow Cover 8-Day L3 Global 500m Grid. Version 5. MOD10A2. Boulder, Colorado USA : National Snow and Ice Data Center, 2006.
- [153] Hansen N., Müller S. D. & Koumoutsakos P., Reducing the time complexity of the de-randomized evolution strategy with covariance matrix adaptation (CMA-ES). *Evolutionary Computation*, **11** (1), 1-18, 2003.
- [154] Hansen N., Auger A., Ros P. P. R. & Finck S., Comparing results of 31 algorithms from the black-box optimization benchmarking bbob-2009. In : *GECCO '10 : Proceedings of the 12th annual conference comp on Genetic and evolutionary computation*, 1689-1696, New York, NY, USA, ACM, 2010.
- [155] Hansen J.A. & Penland C., On stochastic parameter estimation using data assimilation *Physica D*, **230**, 88-98, 2007.
- [156] Han X. & Li X., An evaluation of the nonlinear/non-Gaussian filters for the sequential data assimilation *Remote Sensing of Environment*, **112**, 1434-1449, 2008.
- [157] Hayne G.S., Radar altimeter mean return waveforms from near-normal-incidence ocean surface scattering. *IEE Trans. Antennas Propagat.*, **AP-28** (5), 687-692, 1980.

- [158] Hénon M., A two-dimensional mapping with a strange attractor, *Communications in Mathematical Physics*, **50**, 69-77, 1976.
- [159] Hiernaux P., Cissé M. I., Diarra L., Maiga A. & De Leeuw P. N., Dynamique de la végétation des terres de parcours sahéniennes. Document de travail. Centre International pour L'Elevage en Afrique. Bamako (Mali), vol. 1-10. 1130 pp., 1994.
- [160] Holben B.N., Characteristics of maximum-value composite images for temporal AVHRR data, *International Journal of Remote Sensing*, **7**, 1435-1445, 1986.
- [161] Jaeger L., Kantz H., Structure of generating partitions for two-dimensional maps, *J. Phys. A*, **30**, L567-L576, 1997.
- [162] Jarlan L., Tourre Y., Mougin E., Philippon N. & Mazzega P., Dominant patterns of AVHRR NDVI interannual variability over the Sahel and linkages to key climate signals (1982-2003), *Geophys. Res. Lett.*, **32**, L04701, 2005.
- [163] Jarlan L., Abaoui J., Duchemin B., Ouldbba A., Tourre Y. M., Khabba S., Le Page M., Balaghi R., Mokssit A. & Chehbouni G., Linkages between common wheat yields and climate in Morocco (1982-2008), *Int. J. Biometeorol*, DOI 10.1007/s00484-013-0753-9, 2013
- [164] Jarlan L. et al., cereal yields prediction in Morocco. soumis.
- [165] Javeed Y., Analysis of groundwater dynamics in semi-arid regions : effect of rainfall variability and pumping. *PhD thesis (Unpublished)*, Indian Institute of Science, Bangalore, 2010.
- [166] Judd K. & Mees I., On selecting models for nonlinear time series. *Physica D*, **82**, 426-444, 1995.
- [167] Kaplan D.T. & Glass L., Direct test for determinism, *Physical Review Letters*, **68** (4), 427-430, 1992.
- [168] Kaplan J.L. & Yorke J.A., Chaotic Behavior of Multidimensional Difference Equations, In : Functional Differential Equations and Approximations of Fixed Points, edited by H.-O. Peitgen and H. -O. Walter, *Lecture Notes in Mathematics*, **730**, Springer, Berlin, 1979.
- [169] Karam M. A., Fung A. K., Lang R. H. & Chauhan N. S., Microwave scattering model for layered vegetation. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, **30**, 767-784, 1992.
- [170] Kennel M.B. & Abarbanel H.D.I., False neighbors and false strands : A reliable minimum embedding dimension algorithm. *Physical Review E*, **66**, 1-18, 2002.
- [171] Kermack W.O. & McKendrick A.G., Contributions to the mathematical theory of epidemics. *Proc R Soc A*, **115**, 700-721, 1927.
- [172] Kilham N. & Roberts D., Amazon River time series of surface sediment concentration from MODIS. *International Journal of Remote Sensing*, **32** (10), 2659-2679, 2011.
- [173] Krätzig M., A software framework for data analysis. *Computational Statistics & Data Analysis*, **52** (2), 618-634, 2007.
- [174] Lainscsek C. S. M., Shürer F. & Kadtke J., A general form for global dynamical data models for three-dimensional systems. *Int. Journal of Bifurcation and Chaos*, **8**, 899-914, 1998.
- [175] Lainscsek C. Letellier C. & Schürer C., Ansatz library for global modeling with a structure selection, *Physical Review E*, **64**, 016206, 2001.
- [176] Lainscsek C., Letellier C. & Gorodnitsky I., Global modeling of the Rössler system from the  $z$ -variable *Physical Letters A*, **314**, 409-427, 2003.
- [177] Lambeck K. & Johnston P., Land subsidence and sea-level change : contributions from the melting of the last great ice sheets and the isostatic adjustment of the Earth. – In :Land Subsidence., Proc. Fifth Int. Symp. On land Subsidence, The Hague, 16-20 Oct. 1995, F.J.Barends et al. (eds), Balkema, Rotterdam, 3-18, 1995.
- [178] Laplace P.S. de, Essai philosophique sur les probabilités, 1825.
- [179] Latour B., La boîte de Pandore, Points Seuil, Le Seuil, Paris, 1993.

- [180] Le Barbé L., Lebel T. & Tapsoba D., Rainfall variability in West Africa during the years 1950–90. *Journal of Climate*, **15** (2), 187-202, 2002.
- [181] Lebel T. & Amani A., Rainfall estimation in the Sahel : What is the ground truth? *Journal of Applied Meteorology*, **38**, 555-568, 1999.
- [182] Lefranc M. & Glorieux P., Topological analysis of chaotic signals from a CO<sub>2</sub> laser with modulated losses. *Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng.*, **3**, 643-649, 1993.
- [183] Lefranc M., Glorieux P., Papoff F., Molesti F., Arimondo E., Combining topological analysis and symbolic dynamics to describe a strange attractor and its crises, *Phys. Rev. Lett.*, **73**, 1364-1367, 1994.
- [184] Lefranc M., Alternative determinism principle for topological analysis of chaos *Physical Review E*, **74**, 035202(R), 2006.
- [185] Lerner D. N., Issar A. S. & Simmers I., Groundwater Recharge : A Guide to Understanding and Estimating Natural Recharge. *Int. Assoc. of Hydrogeol.*, Hanover, Germany, 1990.
- [186] Letellier C., Le Sceller L., Maréchal E., Dutertre P., Maheu B., Gouesbet G., Fei Z. & Hudson J.L., Global vector field reconstruction from a chaotic experimental signal in copper electrodisolution, *Physical Review E*, **51**, 5, pp. 4262-4266, 1995.
- [187] Letellier C. & Gouesbet G., Topological characterization of reconstructed attractors modding out symmetries, *J. Phys. II France*, **6**, 1615-1638, 1996.
- [188] Letellier C., Ringuet E., Maquet J., Maheu B. & Gouesbet G., Global vector field reconstruction of chaotic attractors from one unstable periodic orbit, *Entropie*, **202-203**, 147-153, 1997.
- [189] Letellier C., Le Sceller L., Gouesbet G., Lusseyran F., Kemoun A. & Izrar B., Recovering deterministic behavior from experimental time series in mixing reactor, *AIChE Journal*, **43**, 9, pp. 2194-2202, 1997.
- [190] Letellier C., Maquet J., Labro H., Le Sceller L., Gouesbet G., Argoul F. & Arnéodo A., Analysing chaotic behavior in a Belousov-Zhabotinsky reaction by using a global vector field reconstruction. *J. Phys. Chem. A*, **102**, 10265-10273, 1998.
- [191] Letellier C., Maquet J., Le Sceller L., Gouesbet G. & Aguirre L. A., On the non-equivalence of observables in phase space reconstructions from recorded time series, *Journal of Physics A*, **31**, 7913-7927, 1998.
- [192] Letellier C., Meunier-Guttin-Cluzel S. & Gouesbet G., Topological invariants in period-doubling cascades, *Journal of Physics A*, **33**, 1809-1825, 2000.
- [193] Letellier C., Ménard O., Klinger Th., Piel A. & Bonhomme G., Dynamical analysis and map modeling of a thermionic diode plasma experiment. *Physica D*, **156**, 169-178, 2001.
- [194] Letellier C., Aguirre L. A. & Maquet J., Relation between observability and differential embeddings for nonlinear dynamics, *Physical Review E*, **71**, 066213, 2005.
- [195] Letellier C., Le chaos dans la nature. *Vuibert*, 2006.
- [196] Letellier C., Aguirre L.A., Maquet J. & Gilmore R., Evidence for low dimensional chaos in the sunspot cycles. *Astronomy & Astrophysics*, **449**, 1, 379-387, 2006.
- [197] Letellier C., Aguirre L. A. & Freitas U. S., Frequently asked questions about global modeling, *Chaos*, **19**, 023103, 2009.
- [198] Letellier C. & Gilmore R., Poincaré sections for a new three-dimensional toroidal attractor, *J. Phys. A : Math. Theor.*, **42**, 015101, 2009.
- [199] Letellier C. & Gilmore R., Topology and dynamics of chaos. In celebration of Robert Gilmore's 70th birthday. *World Scientific, Series A*, vol. 84, 2013.
- [200] Letellier C., Rodrigues G.G., Jean-François Muir & Aguirre L.A., Individuality of breathing patterns in patients under noninvasive mechanical ventilation evidenced by chaotic global models *Chaos*, **23**, 013137, 2013.

- [201] Letellier C. & Aguirre L.A., Required criteria for recognizing new types of chaos : Application to the "cord" attractor *Physical Review E*, **85**, 036204, 2012.
- [202] Le Sceller L., Letellier C. & Gouesbet G., Structure selection for global vector field reconstruction by using the identification of fixed points, *Physical Review E*, **60** (2), 1600-1606, 1999.
- [203] Levitus S., Antonov J. I., Boyer T.P. & Stephens C., Warming of the world ocean. *Science*, **287**, 2225-2229, 2000.
- [204] Li D., A three-scroll chaotic attractor, *Phys. Lett. A*, **372**, 387, 2008.
- [205] Lorenz E. N., Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, **20**, 130-141, 1963.
- [206] Lorenz E. N., Irregularity : a fundamental property of the atmosphere, *Tellus*, **36A**, 98-110, 1984.
- [207] A Scientist by Choice. Speech delivered on the occasion of Lorenz's acceptance of the Kyoto Prize in 1991.
- [208] Lütkepohl H., New Introduction to Multiple Time Series Analysis. *Springer Verlag*, Berlin, 2008.
- [209] Lütkepohl H. & Kräzig M., Applied Time Series Econometrics. *Cambridge University Press*, Cambridge, <http://dx.doi.org/10.2277/0521547873>, 2004.
- [210] Lyard F., Roblou L. & Mangiarotti S., Simulation of the Mediterranean HF ocean response to the meteorological forcing over the T/P period. Application to the alias reduction problem. Jason-1 SWT meeting, Biarritz, France, 2002.
- [211] Lyard F., Roblou L., Mangiarotti S. & Marsaleix P., En route to coastal oceanography from altimetric data : some ALBICOCCA project insight. In : Paper presented at the Ocean surface topography science team meeting, Arles, France, 2003.
- [212] Maas S. J., Use of remotely sensed information in plant growth simulation models. *Advances in Agronomy*, **1**, 17-26, 1991.
- [213] Maquet J., Letellier C. & Aguirre L.A., Global models from the Canadian lynx cycles as a direct evidence for chaos in real ecosystems. *J. of Mathematical Biology*, **55** (1), 21-39, 2007.
- [214] Marengo J.A., Tomasella J. & Uvo C., Trends in streamflow and rainfall in tropical South America : Amazonia eastern Brazil, and northwestern Peru. *Journal of Geophysical Research*, **103** D2, 1775-1783, 1998.
- [215] Mariño I.P. & Míguez J., On a recursive method for the estimation of unknown parameters of partially observed chaotic systems *Physica D*, **220**, 175-182, 2006.
- [216] Martínez M.D., Lana X., Burgueño A. & Serra C., Predictability of the monthly North Atlantic Oscillation index based on fractal analyses and dynamic system theory. *Nonlinear Processes in Geophysics*, **17**, 93-101, 2010.
- [217] Martinez J.-M., Guyot J.L., Filizola N. & Sondag F., Increase in suspended sediment discharge of the Amazon River assessed by monitoring network and satellite data. *Catena*, **79**, 257-264, 2009.
- [218] Maurice-Bourgoin L.M., Bonnet M.P., Martinez J.-M., Kosuth P., Cochonneau G., Moreira-Turcq P., Guyot J.-L., Vauchel P., Filizola N. & Seyler P., Temporal dynamics of water and sediment exchanges between the Curuaí floodplain and the Amazon River, Brazil. *Journal of Hydrology*, **335**, 140-156, 2007.
- [219] Mayaux P., Bartholomé E., Fritz S. & Belward A., A new land-cover map of Africa for the year 2000. *J. Biogeogr.*, **31**, 861-877, 2004.
- [220] Mazzega P., On the assimilation and inversion of small data sets under chaotic regimes. In : *Inverse methods in Global Geochemical cycles*, *AGU geophysical monograph*, **114**, eds. P. Kasibhatla et al., 2000.
- [221] Meade R.H., Suspended sediments of the modern Amazon and Orinoco rivers. *Quaternary International*, **21**, 29-39, 1994.

- [222] Melack J.M., Hess L.L., Gastil M., Forsberg B.R., Hamilton S.K., Lima I.B.T. & Novo E.M.L.M., Regionalization of methane emissions in the Amazon basin with microwave remote sensing. *Global Change Biology*, **10**, 530-544, 2004.
- [223] Mercier F., Altimétrie spatiale sur les eaux continentales : apport des missions Topex/Poseidon et ERS-1&2 à l'étude des lacs, mers intérieures et bassins fluviaux. *Thèse de doctorat de l'Université Paul Sabatier Toulouse III*, 2001.
- [224] Mertes L.A.K., Daniel D.L., Melack J.M., Nelson B., Martinelli A. & Forsberg B.R., Spatial patterns of hydrology, geomorphology, and vegetation on the floodplain of the Amazon River in Brazil from a remote sensing perspective. *Geomorphology*, **13**, 215-232, 1995.
- [225] Mindlin G.B., Hou X.-J., Solari H.G., Gilmore R. & Tufillaro N.B., Classification of strange attractors by integers, *Physical Review Letters*, **64** (20), 2350-2353, 1990.
- [226] Mindlin G.B. & Solari H.G., Toil and Klein bottles in four-dimensional chaotic flows, *Physica D*, **102**, 177-186, 1997.
- [227] Miller R.N., Ghil M. & Gauthiez F., Advanced Data Assimilation in Strongly Nonlinear Dynamical Systems, *Journal of Atmospheric Sciences*, **51** (8), 1037-1056, 1994.
- [228] Miller R.N., Carter Jr. E.F. & Blue S.T., Data assimilation into nonlinear stochastic models', *Tellus*, **51** A, 167-194, 1999.
- [229] Mitchum G.T., An improved calibration of satellite altimetric heights using tide gauge sea levels with adjustment for land motion. *Marine Geodesy*, **23**, 145-166, 2000.
- [230] Myneni R.B. & Williams D.L., On the relationships between FAPAR and NDVI, *Remote Sensing of Environment*, **49**, 200-211, 1994.
- [231] Molinier M., Guyot J.L., Oliveira E. & Guimaraes V., Les regimes hydrologiques de l'Amazonie et de ses affluents. *AIHS*, **238**, 209-222, 1996.
- [232] Mougin E., Lo Seen D., Rambal S., Gaston A. & Hiernaux P., A regional sahelian grassland model to be coupled with multispectral satellite data. I. Description and validation. *Remote Sensing of Environment*, **52**, 181-193, 1995.
- [233] Moulin S., Kergoat L., Cayrol P., Dedieu G. & Prévot L., Calibration of a coupled canopy functioning and SVAT model in the ReSeDa experiment. Towards the assimilation of SPOT/HRV observations into the model. *Agronomie*, **22**, 681-686, 2002.
- [234] Negrodo A.M., Sabadini R., Bianco G. & Fernandez M., Three-dimensional modelling of crustal motions caused by subduction and continental convergence in the central Mediterranean. *Geophys. J. Int.*, **136**, 261-274, 1999.
- [235] Nobre P., Malagutti M., Urbano D.F., de Almeida R.A.F. & Giarolla E., Amazon deforestation and climate change in a coupled model simulation. *Journal of Climate*, **22** (21), 5686-5697, 2009.
- [236] Oh Y., Sarabandi K. & Ulaby F. T., An empirical model and inversion technique for radar scattering from bare soil surfaces. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, **30**, 370-381, 1992.
- [237] Orrell D., Filtering chaos : A technique to estimate dynamical and observational noise in nonlinear systems, *Int. J. Bifurcat. Chaos*, **15** (01), 99-107, 2005.
- [238] Panda D. K., Mishra A., Jena S. K., James B. K. & Kumar A., The influence of drought and anthropogenic effects on groundwater levels in Orissa, *India. J. Hydrol.*, **343**, 140-153, 2007.
- [239] Peltier W.R., Postglacial variations in the level of the sea : implications for climate dynamics and solid-Earth geophysics. *Review of Geophysics*, **36** (4), 603-689, 1998.
- [240] Pham D. T., Stochastic Methods for Sequential Data Assimilation in Strongly Nonlinear Systems *Monthly Weather Review*, **129**, 1194-1207, 2001.
- [241] Pinardi N. & Mazetti E., Variability of the large scale general circulation of the Mediterranean sea from observations and modelling : a review, *Paleo*, **158**, 153-174, 2000.
- [242] Plumecoq J., Lefranc M., *Physica D*, **144**, 231-258, 2000.

- [243] Poincaré H., *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*, *J. Math. Pures Appl.*, **III** (7), 375-422 1881, **III** (8), 251-296 1882, **IV** (1), 167-244, 1885, **IV** (2), 151-217 1886.
- [244] Poincaré H., *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Gauthier-Villard, Paris, 1892.
- [245] ORE HYBAM, The Environmental Research Observatory (ORE) HYBAM (Geodynamical, hydrological and biogeochemical control of erosion/alteration and material transport in the Amazon basin) operates since 2003. <http://www.ore-hybam.org>.
- [246] Packard N. H., Crutchfield J. P., Farmer J. D. & Shaw R.S., Geometry from a time series, *Physical Review Letters*, **45** (9), 712-716, 1980.
- [247] Philippon N., Martiny N. & Camberlin P., Forecasting the vegetation photosynthetic activity over the Sahel : a model output statistics approach *International Journal of Climatology*, **29**, 1463, 2009.
- [248] Poon C.-S. & Barahona M., Titration of Chaos with Added Noise, *Proc. Natl. Acad. Sci. of USA*, **98** (13), 7107-7112, 2001.
- [249] Rabbel W. & Zschau J., Static deformations and gravity changes at the earth's surface due to atmospheric loading, *J. Geophys.*, **56**, 81-99, 1985.
- [250] Reynolds R.W. & Smith T.M., Improved global sea surface temperature analyses using optimal interpolation. *Journal of Climate*, **7**, 929-948, 1994.
- [251] Richey J.E., Meade R.H., Salati E., Devol A.H., Nordin C.F. & Santos U.M., Water discharge and suspended sediment concentrations in the Amazon River : 1982-1984. *Water Resources Research*, **22** (5), 756-764, 1986.
- [252] Rikitake T., Oscillations of a System of Disk Dynamos, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **54**(1), 89-105, 1958.
- [253] Ross T., Garrett C. & Le Traon P.Y., Western Mediterranean sea level rise : Changing exchange flow through the strait of Gibraltar, *Geophys Research Letters*, **27** (18), 2949-2952, 2000.
- [254] Rössler O. E., An equation for continuous chaos, *Physics Letters A*, **57** (5), 397-398, 1976.
- [255] Rössler O.E., An Equation for Hyperchaos, *Physics Letters A*, **71** (2,3), 155-157, 1979.
- [256] Ruelle D. & Takens F., On the Nature of Turbulence. *Commun. math. Phys.*, **20**, 167-192, 1971.
- [257] Salvucci G.D., Saleem J.A. & Kaufmann R., Investigating soil moisture feedbacks on precipitation with tests of Granger causality. *Advances in Water Resources*, **25**, 1305-1312, 2002.
- [258] Santamaría-Gómez A., Gravelle M., Collilieux X., Guichard M., Martín Míguez B., Tiphaneau P. & Wöppelmann G., Mitigating the effects of vertical land motion in long tide gauge records using a state-of-the-art GPS velocity field, *Global and Planetary Change*, **98-99**, 6-17, 2012.
- [259] Sauvanet P., L'improvisation entre création et interprétation, *Colloquium Acts* (September 2004) L'imaginaire musical entre création et interprétation, Mara Lacchè (Ed.), Paris-Sorbonne, pp. 163-176, L'Harmattan, 2006.
- [260] Schwarz G., Estimating the dimension of a model, *The Annals of Statistics*, **6** (2), 461-464, 1978.
- [261] Seaquist J. W., Olsson L. & Ardö J., A remote sensing-based primary production model for grassland biomes. *Ecological Modelling*, **169**, 131-155, 2003.
- [262] Sekhar M., Rasmi S.N., Javeed Y., Gowrisankar D. & Ruiz L., Modelling the groundwater dynamics in a semi-arid hard rock aquifer influenced by boundary fluxes, spatial and temporal variability in pumping/recharge. *Advances in Geosciences*, **4**, 173-181, 2006.
- [263] Sekhar M., Rasmi S.N., Sivapullaiyah P.V. & Ruiz L., Groundwater Flow Modeling of the Gundal Sub-basin in Kabini River Basin, India. *Asian Journal of Water, Environment and Pollution*, **1** (1-2), 65-77, 2004.

- [264] Simeoni U. & Bondeson M., The role and responsibility of man in the evolution of the Italian Adriatic coast. In : Transformations and evolution of the Mediterranean coastline. *Bulletin de l'Institut océanographique, Monaco*, F. Briand et A. Moldonado (eds), no Spécial **18**, 111-132, 1997.
- [265] Simonneaux V., Lepage M., Helson D., Metral J., Thomas, S, Duchemin B., Cherkaoui M., Kharrou H., Berjami B. & Chehbouni A., Estimation spatialisée de l'évapotranspiration des cultures irriguées par télédétection. Application à la gestion de l'irrigation dans la plaine du Haouz (Marrakech, Maroc). *Sécheresse*, **20** (1), 123-130, 2009.
- [266] Sirguey P., Mathieu R. & Arnaud Y., Subpixel monitoring of the seasonal snow cover with MODIS at 250-m spatial resolution in the Southern Alps of New Zealand : methodology and accuracy assessment, *Remote Sens. Environ.*, **113**, 160-181, 2009.
- [267] Soudarin L. & Cazenave A., Large-scale tectonic plate motions measured with the DORIS Space Geodesy System. *Geophysical Research Letters*, **22** (4), 469-472, 1995.
- [268] Spratt R.S., Modelling the effect of atmospheric pressure variations on gravity. *Geophysical J. R. Astron. Soc.*, **71**, 173-186, 1982.
- [269] Starrett J. & Nicholas C., A suspension of the Hénon map by periodic orbits. *Chaos, Solitons & Fractals*, **45**, 1486-1493, 2012.
- [270] Stanley D.J., Mediterranean deltas : subsidence as a major control of relative sea-level rise. In : Transformations and evolution of the Mediterranean coastline. *Bulletin de l'Institut Océanographique (Monaco)*, **18**, 35-62, 1997.
- [271] Stolz A. & Larden D.R., Seasonal displacement and deformation of the Earth by the atmosphere. *Journal of Geophysical Research*, **84**, 6185-6194, 1979.
- [272] Stum J., A comparison between TOPEX microwave radiometer, ERS 1 microwave radiometer, and european centre for medium-range weather forecasting derived wet tropospheric corrections. *J. Geophys. Res.*, **99** (C12), 24927-24939, 1994.
- [273] Takens F., Detecting Strange Attractors in Turbulence, in : *Dynamical Systems and Turbulence, Warwick 1980*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 898, eds. D. A. Rand and L. S. Young, pub. Springer-Verlag, New York, 366-381, 1981.
- [274] Talagrand O., Assimilation of observations, an introduction, *Journal of the Meteorological Society of Japan*, **75** (1B), 191-209, 1997.
- [275] Tarantola A. & Valette B., Generalized nonlinear inverse problems solved using the least squares Criterion. *Rev. of geogr. space phys.*, **20** (2), 219-232, 1982.
- [276] Taupin J.-D., Précision de l'estimation des précipitations au Sahel selon la densité du réseau d'observation pluviométrique (Accuracy of the precipitation estimate in the Sahel depending on the rain-gauge network density). *Comptes Rendus Géoscience*, **335**, 215-225, 2003.
- [277] Taylor C. M. & Lebel T., Observational evidence of persistent convective-scale rainfall patterns. *Monthly Weather Review*, **126**, 1597-1607, 1998.
- [278] Theiler J., Eubank S., Longtin A., Galdrikian B. & Farmer J.D., Testing for nonlinearity in time series : the method of surrogate data, *Physica D*, **58**, 77-94, 1992.
- [279] Tsankov T. D. & Gilmore R., Strange Attractors are Classified by Bounding Tori, *Phys. Rev. Letters*, **91** (13), 134104, 2003.
- [280] Tsankov T. D. & Gilmore R., Topological aspects of the structure of chaotic attractors in  $\mathbb{R}^3$ , *Phys. Rev. E*, **69** (5), 056206, 2004.
- [281] Tsimplis M.N. & Vlahakis G.N., Meteorological forcing and sea-level variability in the Aegean Sea. *Journal of Geophysical Research*, **99** (C5), 9879-9890, 1994.
- [282] Tsimplis M.N. & Baker T., Sea level drop in the Mediterranean sea : an indicator of deep water salinity and temperature changes, *Geophys Research Letters*, **27**, 1731-1734, 2000.
- [283] Tsimplis M.N., Josey S. A., Rixen M. & Stanev E.V., On the forcing of sea level in the Black Sea. *Journal of Geophysical Research*, **109**, 2004.

- [284] Tucker C.J., Vanpraet C.L., Sharman M.J. & Van Ittersum G., Satellite remote sensing of total herbaceous biomass production in the Senegalese Sahel : 1980-1984, *Remote Sensing of Environment*, **17**, 223-249, 1985.
- [285] Tucker C. J., Pinzon J. E., Brown M. E., Slayback D. A., Pak E. W., Mahoney R., Vermote E. F. & Saleous N. E., An extended AVHRR 8-km NDVI dataset compatible with MODIS and SPOT vegetation NDVI data, *Int. J. Remote Sens.*, **26**, 4485-4498, 2005.
- [286] Tufillaro N.B., Abbott T. & Reilly J., An experimental approach to nonlinear dynamics and chaos. Addison-Wesley : New York, 1992.
- [287] Upadhyay R.K., Bairagi N., Kundu K. & Chattopadhyay J., Chaos in eco-epidemiological problem of the Salton Sea and its possible control. *Applied Mathematics and Computation*, **196**, 392-401, 2008.
- [288] Van Dam T.M. & Wahr J.M., Displacements of the Earth's surface due to atmospheric loading : effects on gravity and baseline measurements, *J. Geophys. Res.*, **92**, 1281-1286, 1987.
- [289] Van Dam T.M. & Wahr J., The atmospheric load response of the ocean determined using Geosat altimeter data, *Geophys. J. Int.*, **113**, 1-16, 1993.
- [290] Van Dam T.M., Wahr J., Chao Y. & Leuliette E., Predictions of crustal deformation and of geoid and sea-level variability caused by oceanic and atmospheric loading, *Geophys. J. Int.*, **129**, 507-517, 1997.
- [291] Van Dam T.M. & Wahr J., Modeling environment loading effects : a review, *Phys. Chem. Earth*, **23**, 1077-1087, 1998.
- [292] Savitzky A. & Golay M. J. E., Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures, *Analytical Chemistry*, **36** (8), 1627-1639, 1964.
- [293] Scanlon B.R., Keese K.E., Flint A.L., Flint L.E., Gaye C.B., Edmunds W.M. & Simmers I., Global synthesis of groundwater recharge in semiarid and arid regions. *Hydrol. Processes*, **20**, 3335-3370, 2006.
- [294] Scanlon B.R., Jolly I., Sophocleous M. & Zhang L., Global impacts of conversion from natural to agricultural ecosystem on water resources : quantity versus quality. *Water Resour. Res.*, **43**, W03437, 2007.
- [295] Verjbitski D.T., Bannerman W.B. & Kápadia R.T., Reports on Plague Investigations in India *The Journal of Hygiene*, **8** (2), 161-308, 1908.
- [296] Wiczorek S., Krauskopf B. & Lenstra D., A unifying view of bifurcations in a semiconductor laser subject to optical injection, *Optics Communications*, **172**, 279295, 1999.
- [297] Winter T.C., The concept of hydrologic landscapes. *J. Am. Water Resour. Assoc.*, **37**, 335-349, 2001.
- [298] Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L. & Vastano J.A., Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D*, **16**, 285-317, 1985.
- [299] Yu D., Small M., Harrison R. G. & Diks C., An efficient implementation of the Gaussian kernel algorithm in estimating invariants and noise level from noisy time series data. *Physical Review E*, **61** (4), 3750-3756, 2000.

## RÉSUMÉ LONG

La théorie du chaos concerne les comportements déterministes imprévisibles à long terme. Elle prend sa source dans les travaux de Poincaré à la fin du XIXe siècle. Les premiers exemples d'un tel comportement n'ont pu être mis en évidence qu'une cinquantaine d'années plus tard. Cette théorie modifie fondamentalement notre conception du déterminisme et nous conduit à développer de nouvelles approches d'analyse et de modélisation. L'une d'entre elles est la modélisation par approche globale qui vise à l'un des problèmes essentiels de la science : construire à partir de données expérimentales des modèles capables de reproduire la dynamique observée. Initiée au cours des années 1990, cette approche a d'abord permis d'obtenir des résultats pour des systèmes chaotiques théoriques et expérimentaux d'une relative simplicité. Au cours des années 2000, de premiers modèles globaux ont pu être obtenus à partir de données issues de mesures environnementales. Cette approche permet, en outre, d'apporter un argument puissant quant-à la présence d'un déterminisme sous-jacent aux données observationnelles. Elle constitue en cela un outil très précieux pour la mise en évidence du chaos.

Or, les dynamiques environnementales sont d'une grande complexité (systèmes de très grande dimension, couplages multiples, fortes non linéarités, etc.) et mal identifiées (la connaissance de leurs équations est souvent assez parcellaire) qui en rendent l'analyse et la modélisation délicate. L'étude des comportements environnementaux vus sous l'angle de la théorie du chaos – ou théorie des systèmes dynamiques non linéaires – est au cœur de notre démarche de recherche. Nos expériences successives de plusieurs thématiques environnementales (océanographie, enveloppes fluides de surface, couvert végétal) et de divers outils utilisés pour leur étude (télédétection spatiale, analyses statistiques, optimisation, modélisations physique ou semi-empiriques) nous ont progressivement conduit à mettre en œuvre un programme de recherche original nécessitant le développement d'outils dédiés à l'analyse du chaos, dans l'objet d'explorer d'autres facettes de la problématique environnementale.

Dans ce manuscrit, une importante part est ainsi d'abord consacrée à la méthodologie : outils développés pour la modélisation et l'analyse des comportements chaotiques à partir de séries temporelles uniques ou multiples ; caractérisation et validation des modèles obtenus en s'appuyant sur les invariants non linéaires (dynamiques, géométriques et topologiques), sur les capacités prévisionnelles des modèles en recourant à des techniques d'assimilation de données afin de s'affranchir des problèmes de sensibilités aux conditions initiales, ou encore sur l'estimation du degré de déterminisme. Mais la validation d'approches de type modélisation globale passe d'abord par l'application à des systèmes théoriques afin de vérifier – en pratique – le potentiel, c'est-à-dire la puissance et les limitations, des algorithmes développés sur des cas d'école contrôlables et parfaitement identifiés. Différents cas tests sont ainsi présentés dans ce manuscrit en s'appuyant d'abord sur le système chaotique introduit par O. RöSSLER en 1976, dont les variables présentent des niveaux de difficulté de modélisation différents. Un second cas d'application concerne les dynamiques agrégées et associées auxquels correspondent des cas d'application réels dans le domaine de la télédétection spatiale. Sur cette question, une étude analytique permet, dans le cadre de comportements présentant une synchronisation de phase, de mettre en évidence certaines invariances de la dynamique par changement d'échelle. Ce résultat est important dans le contexte de la télédétection spatiale où les comportements sont souvent observés à des résolutions très différentes. Un troisième cas de modélisation globale multi-variable est également présenté.

La technique de modélisation globale est ensuite appliquée à des données environnementales, et en particulier au cycle des cultures céréalières observé par télédétection spatiale sur différentes provinces du Maroc (ou en agrégeant et associant différentes régions). L'approche permet d'obtenir dans de nombreux cas des modèles chaotiques de petite dimension présentant un caractère faiblement dissipatif et des structures toroïdales. L'obtention de tels modèles est inattendue. Ces modèles permettent de mettre en évidence la prégnance du caractère déterministe sous-jacent à la dynamique observée, la possibilité d'approcher la dynamique par un système autonome de très petite dimension (trois variables), et le caractère chaotique de la dynamique analysée (forte sensibilité aux conditions initiales et déterminisme associés). Ce constat est important dans la mesure où il n'existe à ce jour que peu de cas d'attracteurs chaotiques tridimensionnels qui soient faible-

ment dissipatifs et toroïdaux, et qu'aucun n'est issu de données observationnelles. L'obtention de multiples modèles de ce type pour les cycles des cultures céréalières apporte donc une preuve forte, et nouvelle, de l'existence d'un tel type de chaos dans le monde réel.

Au cours des deux dernières décennies la topologie du chaos s'est révélée être un outil d'analyse sans équivalent pour caractériser et classer sans ambiguïté les comportements dynamiques de petite dimension. Son champ d'application reste toutefois très restreint puisque l'approche n'a pu être appliquée à ce jour qu'à des systèmes tridimensionnels fortement dissipatifs. L'obtention de modèles chaotiques faiblement dissipatifs nous a permis de nous confronter à ce problème reconnu particulièrement ardu et de proposer une nouvelle approche d'analyse. Appliquée au premier système chaotique faiblement dissipatif introduit par Lorenz en 1984 et au modèle *cereal crops* obtenu par technique globale, de premières analyses topologiques ont pu être entamées, mettant en évidence des comportements d'étirements bidirectionnels locaux au sein des flots faiblement dissipatifs. L'approche a ensuite été généralisée afin d'être testée sur des systèmes de plus grande dimension, permettant d'obtenir les « squelettes » de suspensions-4D pour les applications chaotiques de Hénon (introduite en 1976) et de super-Hénon (proposée ici), ainsi que pour l'application hyperchaotique *3D-walking-stick* introduite par Rössler en 1979.

Dans leur ensemble, ces travaux mettent d'abord en évidence le potentiel de la modélisation par approche globale à approcher les dynamiques environnementales complexes par des modèles déterministes de petite dimension. Ils permettent aussi de contribuer à ouvrir le domaine de la topologie du chaos au champ peu exploré des dynamiques chaotiques faiblement dissipatives et de plus grande dimension. Dans leur ensemble, ces travaux montrent que la technique globale et l'analyse topodynamique constituent un ensemble très complet qui offre une grande cohérence et présente un fort potentiel pour l'analyse des comportements environnementaux observés par télédétection spatiale et, plus largement, pour tout type de signal observationnel.

## RÉSUMÉ COURT

La théorie du chaos concerne les comportements déterministes imprévisibles à long terme. Cette théorie modifie fondamentalement notre conception du déterminisme et conduit à développer de nouvelles approches d'analyse et de modélisation permettant de prendre en compte cette propriété. L'une des approches ayant découlée de cette théorie est la technique de modélisation globale qui permet de construire des modèles à partir de données expérimentales. Le premier objectif du présent ouvrage est de présenter cette approche, de l'appliquer à l'étude des dynamiques environnementales, et d'en montrer le potentiel comme un tout d'une grande cohérence. Après avoir présenté quelques cas de dynamiques environnementales rencontrées au cours de notre parcours et étudiées en s'appuyant sur des outils plus classiques, nous présentons les principaux concepts de la théorie du chaos et introduisons la technique de modélisation globale et certains de ses outils de validation. La validité de cette technique ne pouvant être testée qu'en se basant sur des dynamiques bien identifiées, la robustesse de l'approche est d'abord appliquée à différents cas d'école lors d'études présentant des niveaux de difficulté croissants, partant de l'attracteur de Rössler dont les variables présentent des niveaux d'observabilité différents, considérant ensuite des cas d'agrégation et d'association, pour finir par des cas d'analyses multi-variables. La technique est ensuite appliquée à l'étude de séries environnementales observées en conditions réelles, en commençant par l'analyse du cycle des cultures céréalières en région semi-aride observé par télédétection spatiale. Ce cas d'application a permis d'obtenir le premier cas d'attracteur chaotique toroïdal faiblement dissipatif qui soit directement issu de mesures réelles. Ce résultat a ensuite pu être confirmé par l'obtention de multiples modèles chaotiques permettant de confirmer ces propriétés. Le potentiel de la technique de modélisation globale est également illustré avec succès pour deux autres thématiques environnementales, en hydrologie nivale et en écoépidémiologie. Au cours des deux dernières décennies la topologie du chaos s'est révélée être un outil d'analyse sans équivalent pour caractériser et classer sans ambiguïté les comportements dynamiques. Son champ d'application reste toutefois très restreint puisque l'approche n'a pu être appliquée à ce jour qu'à des systèmes tridimensionnels fortement dissipatifs. L'obtention de modèles chaotiques faiblement dissipatifs nous a permis de nous confronter à ce problème reconnu particulièrement ardu et de proposer une nouvelle approche d'analyse. Appliquée au premier système chaotique faiblement dissipatif introduit par Lorenz en 1984 et au modèle *cereal crops* obtenu par modélisation globale, l'approche a permis d'obtenir les premières analyses topologiques de telles dynamiques, mettant en évidence des comportements d'étirements bidirectionnels locaux au sein de flots faiblement dissipatifs. L'approche a ensuite été généralisée et expérimentée sur des systèmes de plus grande dimension, permettant d'obtenir les « squelettes » de suspensions 4D pour les applications chaotiques de Hénon (introduite en 1976) et de super-Hénon (proposée ici), ainsi que pour l'application hyperchaotique *3D-walking-stick* introduite par Rössler en 1979. L'ensemble de ces résultats permet de montrer la grande cohérence et le fort potentiel de l'approche globale et de la caractérisation topologique pour l'analyse des dynamiques chaotiques, et tout particulièrement pour les comportements environnementaux observés par télédétection spatiale.



## ABSTRACT

Theory of chaos deals with deterministic behaviors that are unpredictable at long term. This theory modifies fundamentally our concept of determinism, and shows the need to develop new analysis and modeling approaches in order to account for this essential property. One of these approaches is the global modeling technique which aim is to obtain models directly from experimental data. One important objective of the present work is to introduce new tools devoted to this technique initiated in the 1990s and to show its potential for the study of environmental dynamics. After presenting several analyses of environmental dynamics based on more classical approaches, the important concepts of chaos theory are presented and the global modeling technique is introduced. Such technique can be validated only based on well identified dynamics. The robustness of the global modeling technique is then tested on various cases presenting an increasing level of difficulty, starting from the Rössler chaotic system which variables exhibit different levels of observability, then considering cases of associated and aggregated dynamics, and then performing a multiple variables analysis. The global modeling technique is then applied to analyze environmental behaviors based on observational data. Applied to the cycles of cereal crops observed from space in semi-arid regions, a global model is obtained. This model is chaotic, weakly dissipative, and exhibits the first case of toroidal structure obtained from real data. This result is then confirmed by obtaining several models presenting these properties. The potential of the global modeling technique is also successfully tested on other environmental domains in hydrology and in eco-epidemiology. During the last two decades, topology of chaos has proven to be a powerful tool to characterize dynamical behaviors in a non ambiguous fashion. Nonetheless, its application field remains restricted since it could be applied only to strongly dissipative 3-dimensional systems. Obtaining weakly dissipative models brought us to cope with this hard problem and to introduce a new approach to deal with it. Applied to the first weakly dissipative chaotic system introduced by Lorenz in 1984 and to the *cereal crops* model obtained here with the global modeling technique, the first analyses of weakly dissipative chaotic dynamics could be performed, revealing behaviors of locally bidirectional extension of the flow. This new approach was then generalized in order to test its ability in higher dimension. It was possible to obtain the skeletons of 4D-suspensions for the Hénon (1976) and the super-Hénon chaotic maps, and also for the *3D-walking-stick* hyperchaotic map introduced by Rössler in 1979. These overall work and results show the strong potential of the global modeling technique and the topological approach to analyze in a very consistent manner environmental behaviors observed from space by remote sensing, and more generally any chaotic dynamics.