

Dubreuil Pierre

Initiation à l'analyse hydrologique : dix exercices suivis des corrigés

Paris : ORSTOM, 1972, 199 p. multigr.

S O M M A I R E

	<u>Pages</u>
- CHAPITRE I : Contrôle de qualité des données pluviométriques	1 à 13
- CHAPITRE II : Homogénéisation des données pluviométriques	15 à 26
- CHAPITRE III : Maximisation de l'information "Débits" par modèles probabilistes	27 à 47
- CHAPITRE IV : Analyse statistique des débits annuels (Loi Normale)	49 à 66
- CHAPITRE V : Analyse statistique des débits annuels et mensuels (Loi de GALTON)	67 à 75
- CHAPITRE VI : Analyse statistique des débits extrêmes, crues et étiages (Lois de PEARSON III et de GUMBEL)	77 à 89
- CHAPITRE VII : Analyse des crues par modèle global (Hydrogramme unitaire)	91 à 107
- CHAPITRE VIII : Reconstitution de crues complexes à l'aide de l'hydrogramme unitaire	109 à 120
- CHAPITRE IX : Prédétermination des crues exceptionnelles de petits bassins versants	121 à 133
- CHAPITRE X : L'aspect quantitatif de l'étude physique et morphométrique d'un bassin versant	135 à 151
- ANNEXES : Tableaux numériques	153 à 157
- CORRIGES des EXERCICES	161 à 199

## CHAPITRE I - CONTROLE DE QUALITE DES DONNEES PLUVIOMETRIQUES

Toute étude climatique ou hydrologique est basée sur l'exploitation de séries de données recueillies pendant des périodes plus ou moins longues continues ou discontinues.

Les méthodes statistiques d'analyse de ces séries exigent de celles-ci une homogénéité de ses composants. En d'autres termes, on ne peut faire une analyse statistique, d'un échantillon composé de  $n$  réalisations d'une variable climatique ou hydrologique, que si certaines de ces  $n$  réalisations ne présentent pas d'erreurs systématiques rendant l'échantillon hétérogène.

En particulier, les données pluviométriques sont très généralement des relevés journaliers effectués à un pluviomètre. Cet appareil est relativement facile à mettre en place et à utiliser ; cela explique, sans le justifier, que l'on a souvent changé l'emplacement d'un pluviomètre, ou bien qu'on l'a confié successivement à de nombreux observateurs plus ou moins qualifiés et mal rémunérés. Il en résulte que les séries de données présentent des lacunes particulièrement fréquentes, et que l'on n'est jamais parfaitement sûr qu'elles représentent, comme disent les statisticiens, un échantillon d'une seule population.

A plus forte raison si l'on s'intéresse à la pluie moyenne d'un bassin, fournie par les données d'un certain nombre  $N$  de postes, le calcul de cette moyenne peut toujours être effectué, par exemple année par année, en utilisant les données disponibles ; il se peut alors que pendant 5 ans la moyenne soit fournie par les pluviomètres A, B, C, pendant les 10 années suivantes par B, C, D, E, F, ensuite par A, B, E, etc... De plus, le pluviomètre A a pu fournir par exemple deux séries de données n'ayant pas la même signification, avant et après l'interruption constatée dans les relevés, ou de part et d'autre d'une date quelconque à laquelle on a omis de faire figurer un renseignement utile sur la feuille de relevés ou dans les registres établis par la suite.

Il est évident que dans ces conditions, la série des valeurs de la pluie moyenne calculée n'est pas très satisfaisante. Il est donc nécessaire, avant toute utilisation des variables pluviométriques, de contrôler leur qualité afin de réduire les erreurs systématiques qui pourraient les affecter. Des échantillons homogènes sortent de ce contrôle de qualité.

Si l'utilisation des variables pluviométriques ainsi contrôlées et corrigées se limite à l'analyse indépendante de séries correspondant chacune à un poste pluviométrique déterminé, on peut se contenter des échantillons précités. Mais dans de nombreux cas, l'étude envisagée porte sur une région ou un bassin et par conséquent concerne plusieurs postes pluviométriques. Les durées d'observations en ces divers postes ont de fortes chances de ne pas être égales ; il y a là une cause d'hétérogénéité de seconde espèce qu'il faut également corriger. Ceci fait l'objet de l'homogénéisation des données pluviométriques traitée au chapitre II.

L'amélioration obtenue, en définitive, ne conduit pas forcément à des valeurs très différentes pour les moyennes interannuelles des pluviométries annuelles saisonnières ou mensuelles, ou des caractéristiques climatiques ou hydrologiques qu'on peut en déduire par corrélation, mais elle conduit à des conclusions bien plus exactes quand on cherche à estimer certains quantiles ou valeurs extrêmes de la distribution des variables pluviométriques, apparaissant avec une probabilité donnée dans une période donnée. Elle conduit aussi à des valeurs plus exactes pour l'intervalle de confiance dans lequel on a p % de chances de trouver les valeurs moyennes interannuelles déterminées.

## 1 - NATURE DES HETEROGENEITES AUXQUELLES ON PEUT PORTER REMEDE

### 1.1 - Absence de données

C'est l'hétérogénéité la plus apparente, à laquelle on remédie par l'extension des données de la station défaillante B à partir d'une corrélation entre les données de cette station et celles d'une station de référence A (cf. chapitre II).

### 1.2 - Données défectueuses

Si les relevés n'ont pas été toujours effectués dans de bonnes conditions, on peut être amené à les éliminer (et on est alors ramené, pour une ou plusieurs périodes, au cas précédent), ou à faire subir aux données une correction qui les rendra utilisables, au moins dans une certaine mesure.

### 1.3 - Données correspondant à deux ou plusieurs séries homogènes non défectueuses, groupées sous le nom d'une même station

On se trouve dans ce cas si le pluviomètre a été déplacé ou si l'environnement immédiat a changé.

#### 1.3.1 - Déplacement des pluviomètres

Ce n'est pas forcément l'éloignement des deux sites successifs qui est responsable de l'hétérogénéité d'une série de données : c'est plutôt un ensemble de caractéristiques de ces sites (altitude, forme du terrain, orientation du relief, végétation, hydrographie, sols, degré d'urbanisation). On peut seulement dire que plus la distance de deux sites est grande, plus il y a de chances pour que l'ensemble de ces caractéristiques accuse de nombreuses différences. A partir d'un certain degré de différenciation géographique, on peut parler d'un changement dans le régime pluviométrique, mais il est très difficile, et sans grand intérêt pour l'hydrologue dans l'état actuel de sa science, de définir exactement et universellement ce qu'est un changement de régime. Il suffit de savoir que dans la pratique :

- a) certaines caractéristiques de la pluviométrie varient graduellement quand on change de région climatique (par exemple en ALSACE, on passe d'un climat océanique à l'Ouest à un climat continental à l'Est, et ce sont les coefficients mensuels pluviométriques qui changent) ;
- b) d'autres caractéristiques peuvent présenter des variations plus nombreuses (nombre de jours de pluie, et surtout pluviométrie moyenne annuelle de certains sites où les mouvements ascendants sont plus fréquents, à cause de la topographie, de la direction des vents ou de la présence de fumées, etc....).

Comme on le comprendra en étudiant la signification statistique des moyennes, on peut très rarement, à partir des données disponibles, prouver avec une faible probabilité d'erreur que les pluviométries moyennes interannuelles de deux sites très voisins sont différentes, et par conséquent que tel ou tel facteur géographique, qui en l'espèce serait le seul à différencier ces sites, a telle ou telle influence sur la pluviométrie.

### 1.3.2.- Changements d'environnement des pluviomètres

Parmi les caractéristiques d'un site que l'on a citées au paragraphe précédent, celles qui peuvent être modifiées sont les suivantes :

- a) végétation à proximité immédiate (croissance d'un arbre qui devient progressivement un obstacle et peut même rendre les données defectueuses), ou bien encore dans une région plus ou moins étendue autour du poste (plantation de forêts ou déboisement, mise en culture sèche ou irriguée) ;
- b) hydrographie (création de plans d'eau, assèchement de marais ou simplement drainage de zones très humides) ;
- c) urbanisation (surfaces bâties, surfaces aplanies, création de zones industrielles, pollution et réchauffement de l'atmosphère).

Cette liste n'est évidemment pas limitative. Cependant, l'intervention humaine modifie assez rarement l'environnement d'un poste pluviométrique au point de créer une hétérogénéité dans la série des données recueillies à ce poste. Par contre, quand cela se produit, c'est généralement assez grave car il s'agit alors d'une action qui rend presque defectueuse les données recueillies par la suite : à la limite, s'il s'agit de la construction d'un immeuble de 30 m de hauteur à une distance très inférieure à 60 m du pluviomètre, les données recueillies ultérieurement peuvent présenter des anomalies plus ou moins faciles à corriger (cf. 1.2.). Il en sera de même avec la croissance rapide d'une végétation arborée comme cela arrive souvent en région intertropicale.

## 2 - PREMIERES VERIFICATIONS DES DONNEES PLUVIOMETRIQUES

Avant de vérifier l'homogénéité des séries de totaux annuels, il y a lieu de détecter toutes les erreurs grossières dont la correction peut parfois être faite avec un peu de bon sens mais qui pourraient passer inaperçues si l'on se contentait d'examiner des totaux annuels ou même mensuels.

Autant que possible, une étude de la pluviométrie doit donc commencer par l'examen de tous les relevés journaliers, sur les feuilles de relevé des observateurs. En pratique, en FRANCE, le Service météorologique procède à cet examen critique, corrige éventuellement certaines données, renonce à la publication de certaines autres jugées trop erronées, et classe ensuite tous les "originaux", bons ou mauvais, qui deviennent dès lors assez difficiles à consulter. On peut le regretter dans la mesure où certaines données ont été jugées mauvaises un peu trop sévèrement, mais en compensation, si l'on se contente des données publiées, on peut les utiliser en toute confiance. Le problème de la vérification des "originaux" se pose surtout pour les données ne provenant pas d'un correspondant du Service Météorologique.

Les différentes causes d'erreurs dans la mesure de la pluviométrie sont signalées dans la littérature spécialisée. On les reconnaîtra plus ou moins bien en découvrant telle ou telle anomalie quand elle peut être interprétée comme une erreur.

#### 2.1 - Anomalies rencontrées dans les "originaux" d'un poste relativement isolé

Si le poste considéré ne fait pas partie d'un réseau particulièrement dense comme le réseau d'un ensemble de bassins représentatifs, il est impossible de comparer efficacement dans le détail les totaux journaliers avec ceux qui ont été relevés ailleurs. On doit se contenter de vérifier la vraisemblance des données :

- a) nombre de jours de pluie mois par mois, estimé d'un coup d'oeil sur la feuille et comparé à ce qu'on trouve en général dans la région,
- b) position et durée approximative des séquences pluvieuses dans le mois (les jours de pluies sont en effet très généralement groupés),
- c) fréquences, estimées également grosso modo, des précipitations de moins de 1 mm et de plus de 10 mm (ces fréquences doivent avoir des valeurs raisonnables, sinon il est permis de supposer par exemple - soit que les faibles pluies n'ont pas été mesurées et que l'eau recueillie s'est évaporée, si le temps s'y prêtait, avant la précipitation suivante - soit que le pluviomètre avait une fuite, etc....) ;
- d) fréquences d'apparition de chacun des chiffres 0 à 9 comme dernier chiffre significatif de la mesure (que celle-ci soit effectuée directement en mm ou bien en  $cm^3$ ) : on verra si l'observateur n'a pas eu tendance à arrondir les valeurs, d'une façon plus ou moins logique, ce qui dénoterait un manque de soin (en particulier si le chiffre 0 apparaît abusivement) ;
- e) indices divers, prouvant, indirectement, un manque de soin ou de compétence de l'observateur (30 relevés en Février, 31 en Avril, etc....).

Des anomalies comparables à celles classées sous les rubriques b et e précédentes peuvent être aisément corrigées puisqu'elles correspondent souvent à une "méconnaissance" du calendrier et (ou) à un décalage de 24 à 48 heures au plus.

Les mauvaises lectures d'éprouvette ou les fautes d'addition de l'observateur (anomalie sous rubrique d) peuvent encore, si elles ne sont pas trop nombreuses, être corrigées par un contrôleur sagace.

Par contre, les anomalies correspondant aux rubriques a et c, quand elles deviennent importantes, altèrent définitivement la qualité de la série. On s'en rend généralement compte à un manque de jours de pluie par rapport aux autres postes régionaux et par une nette insuffisance des petites pluies, de moins de 10 mm, ce qui est aisément vérifiable car le nombre de celles-ci est important et représente bien souvent plus de la moitié du nombre total de pluies et près du double du nombre de pluies de la tranche comprise entre 10 et 20 mm. Dans la plupart des cas, ces anomalies conjuguées dénotent une carence de l'observateur qui "oublie" de mesurer toutes les petites pluies. Celles-ci sont alors, soit évaporées et perdues, soit groupées à plusieurs ou avec la forte pluie suivante. L'échantillon observé présente les symptômes de sous-estimation de la hauteur totale relevée sur un mois ou un an, et de distorsion des fréquences d'apparition des pluies de diverses hauteurs. Si les anomalies sont importantes, un tel échantillon n'est utilisable qu'avec précaution pour l'étude des hauteurs mensuelles et annuelles, et n'est pratiquement pas utilisable pour celle des hauteurs journalières.

#### 2.2 - Anomalies rencontrées dans les copies des "originaux"

On peut rencontrer, s'il s'agit d'une copie, des erreurs supplémentaires : des chiffres peu lisibles ont pu être mal interprétés par le copieur, la virgule a pu être omise, l'ordre chronologique des feuilles mensuelles a pu être mal reproduit, etc...

La répétition des mêmes relevés, jour pour jour, pendant deux mois consécutifs ou non, est le signe indubitable d'une erreur, et on ne peut qu'éliminer une des deux séries en cause.

La vérification des copies plonge bien souvent le contrôleur dans l'incertitude. Dans la mesure du possible, il faut s'efforcer de retrouver les originaux et ne travailler sur les copies que si cette recherche a été infructueuse.

### 3 - PRINCIPE DE LA METHODE DE COMPARAISON DES TOTAUX CUMULES ANNUELS

La méthode exposée ci-dessous est souvent appelée improprement méthode des "doubles-masses", par suite de la mauvaise traduction du terme anglais "double-mass curve" (to mass : cumuler).

### 3.1 - Caractère de la liaison existant entre les totaux annuels de deux postes pluviométriques

Si les deux postes considérés sont situés dans la même grande région climatique, et à une distance relativement faible à l'échelle d'un continent, il existe une liaison positive significative entre les totaux annuels pluviométriques, c'est-à-dire qu'il y a seulement 5 % de chances, par exemple, pour que les séries soient complètement indépendantes, ou présentent des variations de sens contraires.

Cette liaison est d'autant meilleure que la région n'est pas trop montagneuse ; dans un tel cas, la liaison existe encore mais la région d'application est d'aire plus limitée.

D'autre part, les séries de totaux pluviométriques annuels présentent une distribution statistique à peu près normale, en particulier en FRANCE où la loi de GAUSS est même sans doute la plus adéquate. Dans ces conditions, la régression entre deux séries a de fortes chances d'être linéaire et l'on peut tester le degré de liaison de cette régression (coefficient de corrélation). Il en est alors de même pour toute combinaison linéaire des termes correspondants de ces séries, et en particulier, des totaux cumulés à partir d'une même origine des temps arbitraires.

Sur le graphique des totaux annuels comparés des deux postes, il apparaît une certaine dispersion. On pourrait examiner sur ce graphique si les points représentatifs des années successives présentent des écarts simplement aléatoires autour de la droite de régression, ou si jusqu'à telle année les écarts oscillent autour d'une valeur négative ou vice-versa. Le procédé est d'autant plus difficile à appliquer que les séries sont plus longues et leur liaison plus lâche.

Il est préférable de rétablir la chronologie des observations annuelles pour mieux déceler la date de l'anomalie éventuelle. On remplace donc le graphe  $X, Y$  comparant les couples  $X_i, Y_i$  des années  $i$  par le graphe  $\sum_1^i X_i$  et  $\sum_1^i Y_i$  comparant les couples  $\sum_1^i X_i$  et  $\sum_1^i Y_i$  de l'année 1 à l'année  $i$ . Ce dernier graphe est celui des totaux annuels cumulés comparés.

Le graphique des totaux cumulés est bien plus lisible car ces totaux sont tous deux des fonctions monotones du temps. C'est ce graphique qui est utilisé pour détecter les anomalies systématiques susceptibles de modifier la liaison.

### 3.2 - Analyse graphique de la liaison et altérations possibles

Supposons que la pluviométrie des stations A et B soit connue à partir du 1er janvier de l'année  $X_1$  jusqu'au 31 décembre de l'année  $X_n$ .

Le graphique des totaux cumulés B en fonction des totaux cumulés A présentera (n + 1) points qui, si les séries sont homogènes, seront tous situés à proximité d'une droite de pente m voisine du rapport des moyennes interannuelles  $\frac{P_B \text{ moy.}}{P_A \text{ moy.}}$ .

Par contre, si l'homogénéité de la série B est rompue à partir du 1er janvier de l'année  $X_1$ , le graphique présente i + 1 points situés à proximité d'une première droite de pente m et (n - i + 1) points à proximité d'une seconde droite de pente  $m'$ , ces deux ensembles de points ayant évidemment un point commun.

On peut alors faire plusieurs hypothèses pour expliquer cette altération de la liaison :

a) Un changement instrumental intervenu le 1er janvier de l'année X a induit l'observateur en erreur, et ses relevés sont systématiquement erronés à partir de cette date et peuvent être corrigés jour par jour. C'est l'anomalie classique la plus répandue mais en contrepartie la plus aisée à détecter et à corriger. Une telle anomalie se produit quand un service gestionnaire d'un réseau pluviométrique utilise simultanément ou successivement des pluviomètres de diamètre d'entonnoir différent. En effet, les éprouvettes de lecture sont graduées directement en dixièmes de millimètres et correspondent donc à un type de pluviomètre de diamètre d'entonnoir déterminé. Malheureusement, ce diamètre n'est indiqué, ni sur le pluviomètre, ni sur l'éprouvette et le mélange est d'autant plus facile que des appareils commerciaux très répandus existent avec des diamètres voisins (surfaces de réception de l'entonnoir égale à 200, 300, 314, 400 cm<sup>2</sup> par exemple). La substitution d'une éprouvette pour pluviomètre de 400 cm<sup>2</sup> à une éprouvette pour pluviomètre de 314 cm<sup>2</sup> (celui du poste) qui se produit après bris de celle-ci, par exemple, a pour conséquence de donner des hauteurs de pluie 1,27 fois trop faibles.

Ceci se traduit sur la courbe des totaux cumulés comparés par une cassure et la mise en évidence de deux droites d'ajustement dont le rapport des pentes sera précisément égal ou voisin de 1,27.

Dans ce cas, il est possible de corriger toutes les hauteurs journalières observées durant la période correspondant à l'emploi de l'éprouvette non conforme.

b) Le 1er janvier de l'année  $X_1$ , le pluviomètre B a été déplacé. Le déplacement n'a pas été assez important pour qu'on change de région climatique, mais le nouveau site peut être en moyenne plus ou moins arrosé que l'ancien (Cf 1.3.). La série B peut être rendue homogène en effectuant une correction : tous les totaux annuels des années  $X_1$  à  $X_n$  seront multipliés par le rapport  $\frac{m}{m'}$ , ou par  $\frac{m'}{m}$ . On choisit celle de ces deux solutions qui paraîtra la plus judicieuse ; la première par exemple :

- si le 1er emplacement est situé plus loin que le second des obstacles naturels ou artificiels pouvant perturber localement la répartition de la pluie,

- si, au contraire, il représente une catégorie de sites dont on veut connaître la pluviométrie,

On peut également choisir :

- soit de retenir la période la plus longue comme période de référence et corriger la plus courte
- soit de conserver intacte la fraction de série relative à l'emplacement actuel du poste pluviométrique.

L'étude de certaines corrélations hydropluviométriques en ALSACE tend à prouver qu'on a intérêt à utiliser une expression de la pluviométrie qui n'est pas forcément la plus voisine possible de la moyenne spatiale vraie. Si l'étude de la pluviométrie est faite dans le but d'étendre une série de débits par corrélation hydropluviométrique, on peut donc choisir indifféremment l'une des deux corrections possibles à faire subir aux données d'un poste tel que B.

Si l'étude de la pluviométrie doit servir à celle des besoins en eau d'irrigation, il vaut mieux adopter la correction qui conduira aux conclusions les plus pessimistes quant aux apports pluviaux.

Dans tous les cas, une correction, destinée à homogénéiser des données pluviométriques correspondant à deux emplacements successifs, ne peut porter que sur les totaux annuels et en général sur les totaux mensuels, mais pas sur les totaux journaliers. Dans ce cas, en effet, il ne faut pas altérer la plus ou moins grande probabilité d'occurrence des fortes précipitations en chacun des deux sites, ce qui affecterait toute étude statistique ultérieure de la variable "hauteur de pluie journalière".

- c) Le 1er janvier de l'année  $X_i$ , on a modifié l'environnement immédiat du pluviomètre. Si l'on sait que l'état actuel des lieux est le même que pendant la période des années  $X_i$  à  $X_n$ , on peut vérifier s'il est satisfaisant et dans l'affirmative corriger les données de la période plus ancienne. Si l'on ignore quel était l'état des lieux pendant chacune des deux périodes, on est ramené au cas (b) ci-dessus.

### 3.3 - Interprétation du graphique : choix entre les hypothèses possibles d'altération de la liaison

Avant de décider ou non d'une correction et de l'ampleur de celle-ci, il faut choisir entre les diverses hypothèses qui ont été envisagées pour expliquer l'altération de la liaison. Ce choix intervient après que l'on ait effectué l'une ou la totalité des démarches suivantes : nouvel examen des relevés originaux, enquêtes diverses, prise en compte de l'ensemble des données régionales.

Si l'on a détecté une hétérogénéité sur le graphe, il est bon de vérifier si elle apparaît, et de quelle façon, dans les relevés journaliers. Dans certains cas, un indice de la mauvaise qualité générale des observations peut être ainsi découvert, après être passé inaperçu au premier examen; en pareil cas, si la lecture du graphique des totaux cumulés comparés laissait planer un doute sur la correction à effectuer - cas (b) ou (c) - ce doute est levé automatiquement car la cause physique supposée être la cause principale de l'hétérogénéité s'avère alors comme une cause secondaire.

On peut chercher à connaître, auprès des personnes qui détiennent les relevés anciens ou celles qui sont chargées actuellement des relevés, les dates de changement possible d'emplacement de l'appareil, de modifications possibles de l'environnement, de changement de l'observateur (qui peut ne pas être toujours la personne chargée officiellement des relevés, mais un membre de sa famille), etc.

Comme on l'a dit au début du paragraphe 3.2, les diverses hypothèses émises au sujet du poste B reposent sur la certitude a priori que c'est la série B et non la série A qui est hétérogène. En pratique, on a rarement cette certitude.

Il faut donc compléter l'information fournie par le graphique "B en fonction de A" par celle des graphiques "C, D, ..., en fonction de A" (C, D, ..., étant d'autres stations de la même région). Si ces derniers graphiques n'accusent pas de "cassure", les séries A, C, D, ..., sont très probablement homogènes et B est hétérogène. Si tous les graphiques présentent une cassure à la même date, et si les rapports des pentes  $\frac{m}{m'}$  sont les mêmes quel que soit le poste B, C, D, ..., on peut dire que c'est la série A qui est hétérogène.

Il faut pourtant se méfier des dates où un bouleversement général a pu se produire dans la région: un certain nombre de postes B, C, D, ..., peuvent avoir été perturbés alors que A a été épargné (il est vrai que dans ce cas, les perturbations produisent généralement des cassures caractérisées par des rapports  $\frac{m}{m'}$  différents).

L'élément important à retenir ici est la nécessité d'opérer tout contrôle d'homogénéité de données pluviométriques et tout essai de correction d'hétérogénéité par la méthode des totaux annuels cumulés sur l'ensemble des postes d'une région et non pas en se limitant aux seuls postes, A et B par exemple, dont on pense avoir besoin ultérieurement pour une certaine étude spécifique.

#### 4 - DETERMINATION DE SERIES HOMOGENES CORRESPONDANT AUX PERIODES D'OBSERVATION PAR APPLICATION DE LA METHODE DE COMPARAISON DES TOTAUX CUMULES ANNUELS

Le procédé de détection des hétérogénéités et de leur correction a été décrit dans ses grandes lignes.

Il reste à préciser comment on doit ajuster la droite de liaison sur un graphique de totaux cumulés comparés, et quelle série de base jugée homogène doit-on choisir pour corriger cette série hétérogène détectée.

#### 4.1 - Tracé des droites de comparaison

La théorie mathématique de la méthode n'a, semble-t-il, pas encore été faite, mais l'expérience a montré que l'ajustement graphique d'une droite doit être fait de la façon suivante : la droite doit avoir pour pente la valeur modale (c'est-à-dire la plus fréquente) du rapport  $(\frac{P_B}{P_A})_i$  des totaux annuels des deux postes. En

pratique, les années pour lesquelles ce rapport est très voisin de sa valeur modale se suivent par 3 ou 4 ; les points représentatifs sont alignés, et l'on peut tracer la droite d'ajustement parallèle à ces alignements. On remarquera que la pente de cette droite n'est pas exactement égale, en général, au rapport des totaux cumulés en fin de période  $\frac{\sum P_B}{\sum P_A}$ , ni même au rapport des moyennes interannuel-

les vraies dont l'expression ci-dessus n'est qu'une estimation. La théorie mathématique de la méthode montrerait sans doute que ce fait est lié à la dissymétrie de la loi de distribution du rapport  $(\frac{P_B}{P_A})_i$ . La droite ne passe non plus pas nécessairement par les

points représentatifs des années 1 et n.

Le procédé d'ajustement des droites, indiqué ci-dessus, n'est pas aussi facile à appliquer que s'il suffisait de joindre le 1er et le i° ou le n° point du graphique, ou s'il fallait tracer la droite de régression de  $\sum P_B$  en  $\sum P_A$  ou de  $\sum P_A$  en  $\sum P_B$ . Le procédé conseillé a donc l'inconvénient de laisser intervenir un facteur personnel, mais on verra à l'usage qu'il permet de déterminer avec moins d'ambiguïté la date d'une cassure ; de plus, le résultat de l'ajustement est moins influencé par les valeurs exceptionnellement fortes ou faibles du rapport  $\frac{P_B}{P_A}$  qui, certaines années, peuvent

provenir d'un défaut impossible à déceler dans les observations de l'un des postes, ou d'une irrégularité climatique locale (très violent orage centré sur l'un des postes, par exemple).

En pratique, on cherche la ou les pentes les plus fréquentes correspondant à des séries d'années consécutives (au moins 3 ou 4) et l'on trace les droites aux moindres écarts, à l'oeil. Généralement, une direction privilégiée apparaît sur le graphe ; les autres s'il en apparaît doivent être tracées seulement si elles sont nettes ; avec l'expérience le résultat est vite acquis. Il peut parfois subsister un doute, soit pour une courte période, soit pour l'année exacte de la cassure entre deux droites. On applique alors les consignes du paragraphe 3.3.

#### 4.2 - Choix d'une série de base homogène

Il faut trouver dans la région, soit un poste, soit de préférence plusieurs postes observés le plus longtemps possible afin qu'ils puissent être comparés à tous les autres et parmi lesquels on détectera ceux qui ne paraissent affecter par aucune hétérogénéité. Les totaux moyens cumulés des postes ainsi sélectionnés forment la série de base homogène par comparaison à laquelle on détecte et l'on corrige les anomalies des autres postes de la région.

Le choix d'un groupe de base exige au préalable la comparaison deux à deux de tous les postes susceptibles d'être intégrés dans ce groupe. Si aucune hétérogénéité n'est décelable, on peut constituer le groupe. A défaut, on peut former des groupes limités à des sous-régions; les fluctuations aléatoires autour des droites de liaison seront moindres et les anomalies plus faciles à déceler. Enfin, on peut se contenter d'un poste de base par région, ou par sous-région.

L'avantage d'un groupe est d'atténuer les irrégularités accidentelles affectant une année de-ci de-là et partant de faciliter la détection des vraies anomalies.

La série de base étant choisie pour l'étude systématique de tous les postes d'une région, il est possible de grouper les graphiques de comparaison des totaux cumulés en un seul, la série de base étant reportée sur l'axe des abscisses et chaque millésime étant indiqué en face de l'intervalle correspondant. Les graphiques peuvent être décalés par changement d'origine sur l'axe des ordonnées, afin d'éviter que leurs droites d'ajustement se croisent. Si l'on prend soin de choisir judicieusement l'ordre du tracé des différents graphiques, en groupant les postes par sous-région géographique ou climatique, on verra apparaître des caractères communs aux séries des postes d'une même sous-région : même allure des fluctuations, autour de la droite d'ajustement, de la ligne brisée joignant les points représentatifs.

Ceci est illustré par le graphe 1 sur lequel sont reportées en comparaison d'un groupe de base, 5 stations :

- A station homogène
- C station présentant une cassure nette
- B station présentant deux cassures nettes, avec rétablissement de la pente la plus fréquente
- D station avec lacune offrant deux périodes de même pente donc homogènes
- E station en régime pluviométrique particulier (dispersion élevée des points) mais paraissant homogène.

On y remarque également que les années situées entre l'année N et l'année N + p sont les plus perturbées (cassures de B et C, lacune de D) par suite ici de modification notable dans la gestion du service.

Certaines années exceptionnelles (points cerclés) apparaissent de-ci, de-là sans affecter l'homogénéité des périodes.

Ce graphique général établi pour toute la région permet de mettre en évidence des hétérogénéités, en conservant à peu près la même sévérité pour l'ensemble des postes, c'est-à-dire en considérant comme hétérogénéité les seules "cassures" qui affectent l'allure des graphiques de façon nettement plus accusée que les fluctuations à caractère locales et accidentelles évoquées précédemment.

En pratique, on a intérêt à calculer les totaux cumulés en remontant le temps à partir de la dernière année d'observations parce que les implantations actuelles des postes sont bien connues et que les lacunes concernent plutôt des années anciennes.

5 - EXERCICE D'APPLICATION DE LA METHODE DE COMPARAISON DES TOTAUX ANNUELS CUMULES

Le thème de l'exercice est emprunté à une étude générale d'homogénéisation des observations pluviométriques effectuée en Alsace, dans le but de réaliser une synthèse régionale des régimes hydrologiques. La recherche des stations de base a conduit sur cet exemple d'une région accidentée (versant des Vosges formant écran et frontière occidentale) et allongée selon l'axe nord-sud à choisir des stations de base uniques applicables à deux sous-régions (nord et sud). L'exemple choisi est celui du contrôle du poste de TRUTTENHAUSEN situé à 40 km au nord de la station de base de SAINT-GILLES (5 km ouest de COLMAR).

On sait que les observations à ce poste de TRUTTENHAUSEN ont été confiées successivement à 3 personnes différentes :

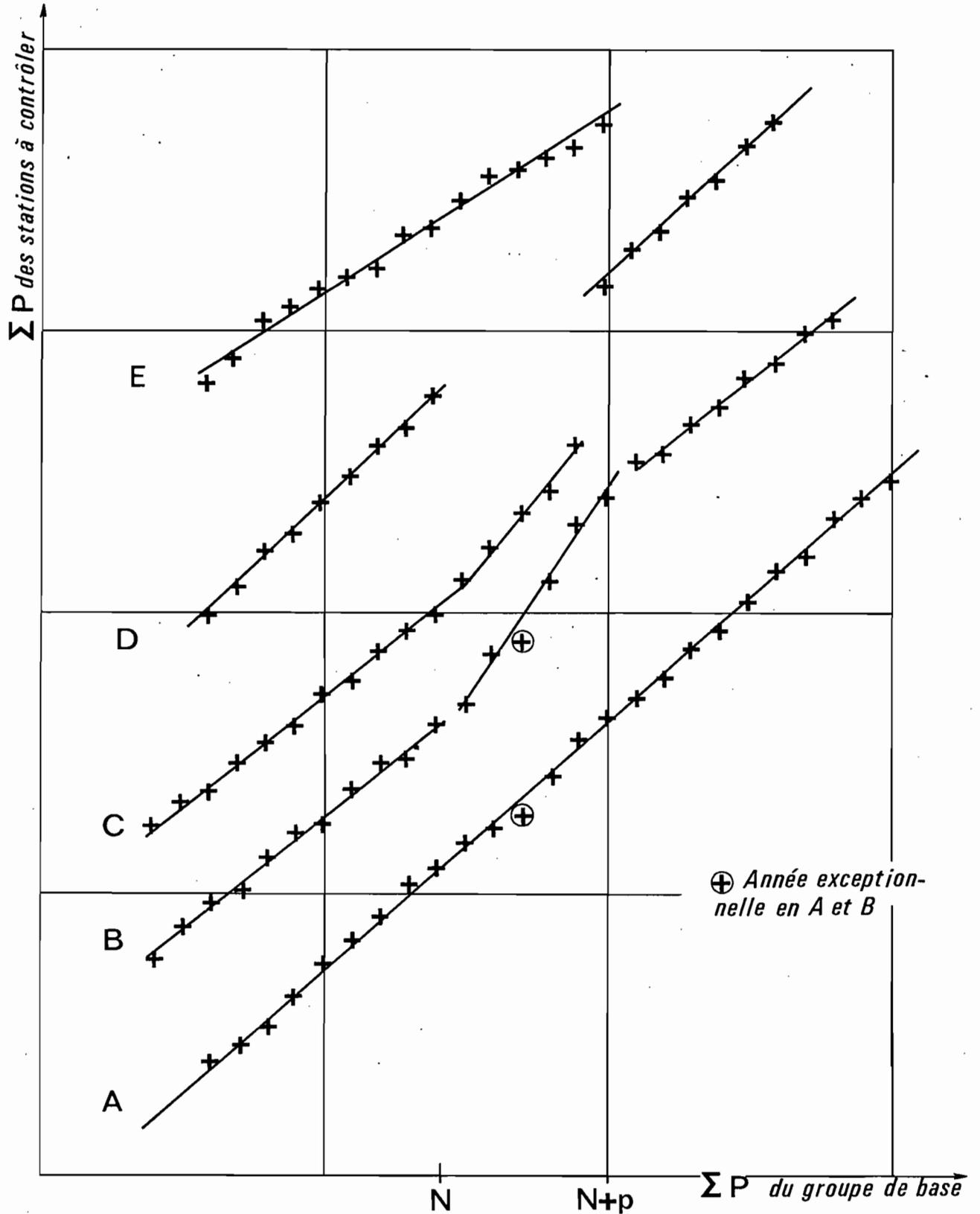
- de 1946 à 1949 inclus
- de 1950 à 1952 inclus
- de 1953 à 1960 inclus

La période d'observations à TRUTTENHAUSEN qui va de 1946 à 1960 est entièrement incluse dans celle de SAINT-GILLES qui s'étend de 1895 à 1965.

Présentation des données (hauteurs annuelles de précipitations aux 2 postes en millimètres)

Année	ST-GILLES	TRUTTENHAUSEN	Année	ST-GILLES	TRUTTENHAUSEN
1960	800	869	1952	820	953
59	549	596	51	841	882
58	858	994	50	732	945
57	540	643	49	459	694
56	657	736	48	522	875
55	677	734	47	540	849
54	702	699	46	511	791
53	393	546			

# Application régionale de la méthode de comparaison des totaux annuels cumulés



On demande :

- de comparer les totaux annuels cumulés des 2 postes par la méthode graphique
- d'ajuster une ou plusieurs droites à cet ensemble de points
- de corriger éventuellement les données d'une ou de plusieurs périodes dans l'hypothèse où l'étude de la pluviométrie du poste de TRUTTENHAUSEN aurait pour objectif la détermination de besoins en eau pour l'irrigation
- d'indiquer si la (ou les) correction éventuelle précédente serait modifiée si le problème des besoins en eau n'existait pas.



## CHAPITRE II - HOMOGENEISATION DES DONNEES PLUVIOMETRIQUES

L'homogénéisation des données pluviométriques a été brièvement mentionnée dans l'introduction du chapitre I car dans la pratique des études pluviométriques simples ou appliquées à l'hydrologie, cette opération s'effectue aussitôt après celle qui a été décrite dans le chapitre I sous le titre de "contrôle des données pluviométriques" et en étroite liaison avec elle.

L'homogénéisation porte sur les périodes d'observations des séries homogènes, ou rendues homogènes, de relevés aux postes pluviométriques. Ces périodes sont disparates : certains postes sont observés plus longtemps que d'autres, certains présentent des lacunes de plusieurs années. L'homogénéisation doit s'efforcer de combler les lacunes ou l'insuffisance d'observations de certaines stations en prenant en considération les observations sans lacune et de longue durée effectuées en d'autres stations.

Le résultat est l'obtention de séries pluviométriques homogènes dans le temps et dont les résultats sont comparables dans une étude régionale et sont affectés de la plus faible incertitude possible.

La méthode pratique d'homogénéisation est la régression linéaire entre variables (hauteurs annuelles de pluie) représentatives de postes pris deux à deux.

On peut se demander pourquoi la méthode de comparaison des totaux annuels cumulés n'est pas utilisable ici.

On écarte cette méthode graphique pour la raison principale suivante : elle ne permet d'estimer directement que des valeurs annuelles et des moyennes interannuelles ; la variance des termes d'une série ainsi étendue ne peut être estimée directement à partir de celles des données observées. Rien n'empêche d'estimer la variance de la série étendue à partir des termes estimés, et d'en déduire par exemple l'intervalle de confiance de la moyenne interannuelle, mais le "facteur personnel" intervenu dans l'ajustement graphique de la droite aura ici des conséquences plus graves que dans l'estimation des valeurs annuelles et des moyennes.

En attendant qu'une théorie plus complète permette l'exploitation, par le calcul, des totaux cumulés comparés, on utilise donc la régression entre totaux annuels.

### 2.1 - Conditions préalables à l'homogénéisation

La mise en oeuvre d'une opération régionale d'homogénéisation requiert que certaines conditions préalables soient satisfaites ; les unes sont relatives à la possibilité d'application de la méthode de régression linéaire ; les autres concernent le but poursuivi et le choix de la période d'homogénéisation et des stations de base.

Pour que la méthode des régressions soit intéressante, il faut que la régression soit linéaire, ce qui se vérifie sur examen graphique effectué entre séries longues, à défaut de tests statistiques rigoureux de la linéarité d'une régression. Il faut également, pour que l'on puisse estimer les variances des échantillons étendus par comblement de lacunes, et le gain d'information ainsi obtenu, que les variables confrontées suivent une loi normale. Il faut enfin que les réalisations successives des variables soient indépendantes.

L'expérience montre qu'en FRANCE, ainsi que sous tout climat à pluviosité abondante et (ou) peu variable (climats tempéré, équatorial, tropical, entre autres), la hauteur annuelle de précipitations est une variable normale et indépendante et que la régression entre deux variables est linéaire.

Selon le but poursuivi, l'étude sera complète ou incomplète :

- si l'on veut dresser une carte d'isohyètes interannuelles, les données de tous les postes peuvent être utiles, même si pour certains la série observée est très courte. Le calcul de l'intervalle de confiance de la moyenne estimée sur la période étendue, évite de mal interpréter certains écarts et dans l'ensemble le tracé des isohyètes y gagne de la précision.

- par contre, si les données pluviométriques sont destinées à établir des régressions hydropluviométriques en vue de préciser les caractéristiques du régime d'une rivière observée pendant  $k$  années, il est inutile de chercher à étendre les séries pluviométriques ne présentant pas, au départ, beaucoup plus de  $k$  années d'observation.

Il est important de noter que le but ci-dessus est généralement celui de l'hydrologue quand il a besoin d'une homogénéisation des données pluviométriques.

Pour le choix de la période d'homogénéisation, et des séries de base, on a deux alternatives :

- soit l'on dispose de moyens de calcul automatique et l'on peut déterminer l'ensemble des opérations qui conduisent au gain d'information maximal ; l'ordinateur peut effectuer tous les calculs à partir de chacun des schémas qu'on lui propose et choisir ainsi le meilleur schéma,

- soit les calculs doivent être faits à l'aide de simples machines électromécaniques et l'on doit choisir, à priori, le schéma des opérations qui sera vraisemblablement le meilleur.

Voyons comment opérer dans ce second cas (beaucoup de règles de bon sens étant d'ailleurs applicables au premier cas).

On peut commencer par dresser un inventaire des observations. Par exemple, on dispose de 33 postes observés durant des périodes variant de 9 à 44 ans, ainsi réparties :

pour 4, la période est de 44 ans			pour 1, la période est de 20 ans		
2	35	19			
1	33	18			
1	31	17			
1	29	15			
2	28	12			
1	25	11			
2	23	10			
		9			

Dans un tel exemple, le choix peut se porter sur une période d'homogénéisation de 29 ans, qui est atteinte ou dépassée par 9 des 33 postes. Le choix d'une période plus courte entraînerait une perte d'information et il est probable que si l'on essayait d'étendre toutes les séries à une période plus longue, le gain d'information serait négligeable par suite de la proportion plus faible de données observées dans les séries.

Parfois, il est possible de trouver quelques postes présentant une série d'observations complète pour la période d'homogénéisation (cas du bassin du MONO évoqué ci-dessus), mais en règle générale, on doit résoudre un à un les problèmes posés par chaque poste.

La méthode du choix des séries de base, c'est-à-dire de celles à partir desquelles on va combler les lacunes d'observations des autres séries, peut être montré sur un exemple de 5 postes décrits sur le graphe 2.

Considérons le poste B observé de 1955 à 66 inclus.

On cherche à étendre la série à la période 1935-66, à l'aide des données des postes A, C, D, E.

Les valeurs de la pluviométrie en B peuvent être estimées :

- de 1951 à 54 à partir de A, C, D, ou E
- de 1949 à 50 " C, D ou E
- de 1941 à 48 " C ou E
- de 1935 à 40 " E

Cependant, on ne peut envisager le calcul d'une régression linéaire pour des échantillons inférieurs à une dizaine de couples de valeurs. L'estimation de  $P_B$  de 1935 à 40 doit donc être effectuée en deux étapes :

- estimation de P en C ou en D à partir de E
- estimation de  $P_B$  en B à partir de C ou D.

Parfois, les séries ont déjà été comparées deux à deux par la méthode graphique des totaux cumulés : on voit entre les deux combinaisons, BA et BC par exemple, celle qui correspond au graphique le plus satisfaisant, et si BA est préférable, on estimera  $P_B$  de 1951 à 54 à partir de A et seulement de 1941 à 50 à partir de C : schéma (1). Même si les deux graphiques sont aussi satisfaisants, on adopte le même schéma de calcul (1), car la longueur de l'échantillon est de 12 années pour le couple BA contre 10 pour le couple BC.

Si les couples BA et BC n'ont pas fait l'objet d'un contrôle graphique d'homogénéité, les séries A, B, C, doivent au moins figurer, chacune pour son compte, sur le graphique général de comparaison à une série de base régionale, et l'examen de ce document suffit : le schéma (1) indiqué dans l'exemple ci-dessus sera effectivement choisi sauf si l'allure du graphique de contrôle est très différente pour la série A d'une part, et les séries B et C d'autre part.

Notons que  $P_B$  aurait pu être estimé de 1951 à 54 à partir de D, mais un tel schéma n'est pas satisfaisant car la distance BA est plus courte que BD, et parce qu'une crête isole la station D des autres.

Supposons maintenant, pour simplifier, que le critère "allure des graphiques de contrôle" ne soit déterminant pour le choix d'aucun schéma. Nous voyons que, en appliquant les critères déjà énoncés au passage dans l'étude de notre exemple,  $P_B$  devrait être estimé à partir de D pour 1949 et 50, à partir de C pour 1935 à 48,  $P_C$  ayant été estimé au préalable à partir de E pour 1935 à 40.

En pratique, cependant, pour alléger les calculs sans perdre une quantité d'information appréciable,  $P_B$  sera estimé à partir de C de 1935 à 50.

En résumé, les critères de choix entre divers schémas sont par ordre d'importance :

- 1° L'intensité de la liaison des séries, combinée à l'étendue des échantillons (si l'on traitait le problème par le calcul, ce critère deviendrait : valeur du coefficient de corrélation ayant telle probabilité donnée, par exemple 95 %, d'être dépassée).
- 2° La distance des postes deux à deux (ou en cas d'égalité, leur différence d'altitude, ou de situation géographique).
- 3° La réduction du volume des calculs, si elle peut être consentie sans s'écarter sensiblement du choix dicté par les autres critères.

## 2.2 - Conduite des calculs pour l'extension des séries de totaux pluviométriques annuels

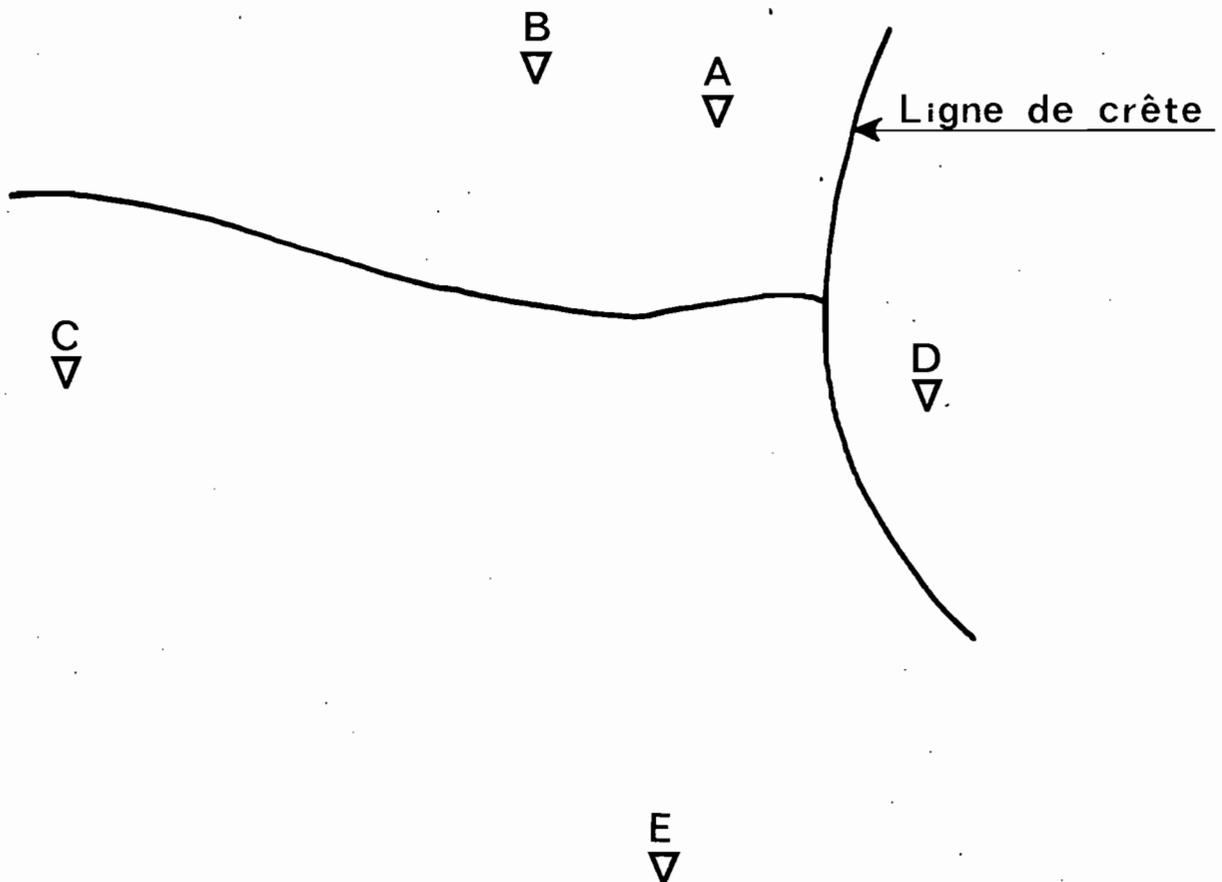
Dans ce chapitre, comme dans certains chapitres suivants, il est fait appel à des équations statistiques que nous ne démontrons pas. Comme cela a été dit dans l'introduction, une telle démonstration n'a pas sa place dans cet ouvrage d'exercices ; elle doit être recherchée dans les ouvrages théoriques généraux de statistique ou d'hydrologie.

# Exemple de périodes d'observation de postes pluviométriques à homogénéiser

Gr. 2

Noms des postes pluviométr.	ANNÉES																																								
	196.										195.										194.										193.										
	6	5	4	3	2	1	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	9	8	7	6
A	-----										-----										-----										-----										
B	-----										-----										-----										-----										
C	-----										-----										-----										-----										
D	-----										-----										-----										-----										
E	-----										-----										-----										-----										

SITUATION GÉOGRAPHIQUE DES DITS POSTES



Ici par exemple, nous empruntons une démonstration à M. ROCHE (⊗). On suppose qu'il s'agit d'étendre une série courte Y de hauteurs annuelles de précipitations à l'aide d'une série longue X, toutes deux suivant une loi normale et ayant entre elles une liaison linéaire.

Les estimations des valeurs annuelles et des paramètres statistiques d'une série Y de K années observées au poste B, à partir d'une série X de n valeurs observées en A, sont fournies par les formules suivantes (les k années d'observation de Y étant incluses dans les n de X) :

$$a) y_x = \bar{y}_k + k^{r_{xy}} \frac{k^s_y}{k^s_x} (x - \bar{x}_k) \quad (1)$$

Dans laquelle on a :

$y_x$  moyenne conditionnelle de y liée à x (par exemple moyenne des valeurs possibles de la pluviométrie au poste B pour l'année 1952 sachant qu'elle était  $x = 854$  mm en A).

$\bar{x}_k$  et  $\bar{y}_k$  moyennes interannuelles de x et de y calculées respectivement à partir de k valeurs de x et de y observées simultanément.

$k^{r_{xy}}$  coefficient de corrélation entre x et y estimé à partir des k couples de valeurs observées simultanément.

$k^s_x$  et  $k^s_y$  écarts-types de x et y estimés à partir des échantillons de k valeurs.

$$b) \hat{y} = \bar{y}_k + k^{r_{xy}} \frac{k^s_y}{k^s_x} (\bar{x}_n - \bar{x}_k) \quad (2)$$

dans laquelle on a :

$\hat{y}$  estimation de la moyenne de y (dont l'espérance mathématique est  $\bar{y}$ , toujours inconnue) à partir de la première estimation  $\bar{y}_k$ , des autres paramètres statistiques des échantillons de valeurs observées et du coefficient de corrélation entre x et y.

$\bar{x}_n$  moyenne interannuelle de x calculée à partir des n valeurs observées.

On note que l'équation (2) est de même forme que l'équation (1) ; c'est d'ailleurs elle que l'on utilise si l'on veut une meilleure estimation de la moyenne des pluies Y ; on utilise seulement (1) pour reconstituer chaque valeur estimée de Y pour les n-k années non observées à l'aide des valeurs correspondantes de X, si l'on a besoin de ces valeurs par exemple pour une corrélation ultérieure avec des débits. Mais cette seconde utilisation, celle de l'équation (1) est beaucoup plus rare que la première citée, celle de l'équation (2).

$$c) \hat{\sigma}_y^2 = k^2 s_y^2 + k^2 r^2 \frac{k^2 s_y^2}{k^2 s_x^2} (n s_x^2 - k^2 s_x^2) \quad (3)$$

dans laquelle on a :

$\hat{\sigma}_y^2$  estimation de la variance de y (dont l'espérance mathématique est  $\sigma_y^2$ ), à partir de la première estimation  $k^2 s_y^2$ , et des estimations de la variance de x et du coefficient de corrélation entre x et y.

$n s_x^2$  variance de x estimée à partir de l'échantillon de n valeurs.

Alors que la nouvelle estimation de la moyenne de Y est sans équivoque, celle de la variance appelle quelques commentaires. En effet, le résultat donné par la formule (3) est celui que l'on trouverait en appliquant la formule de définition de la variance

$$n s_y^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y}_n)^2}{n - 1}$$

à la série composite des k valeurs  $y_i$  observées et des (n - k) valeurs estimées par la formule (1) ; les (n - k) valeurs estimées pourraient être lues sur le graphique de régression grâce à la droite de régression de y en x d'équation (1), et ceci montre bien que l'estimation de la variance  $\hat{\sigma}_y^2$  est sûrement trop faible, la dispersion des valeurs estimées étant plus faible que celle des valeurs observées.

Donc, si le  $\hat{\sigma}_y^2$  trouvé est plus faible que  $k^2 s_y^2$ , ce qui ne se produit tout de même pas toujours, on conserve la valeur  $k^2 s_y^2$  à la place de  $\hat{\sigma}_y^2$ , sauf si le coefficient de corrélation  $k^2 r_{xy}$  est supérieur à 0,95, car il faut bien admettre une restriction de ce genre (en effet pour  $r = 1$ ,  $\hat{\sigma}_y^2$  est forcément une meilleure estimation que  $k^2 s_y^2$  puisqu'elle a la valeur que donnerait un échantillon de n valeurs observées). Cette restriction n'a pas de base théorique mais seulement expérimentale. Elle nous paraît satisfaisante pour l'hydrologue, jusqu'à démonstration d'un meilleur critère.

A côté des paramètres moyenne et variance de la série étendue Y qui sont calculés par les équations (2) et (3), on doit noter que la nature de la régression de Y en X est modifiée également par cette extension et qu'en conséquence une nouvelle estimation du coefficient de corrélation doit être recherchée. A cela répond l'équation (4) :

$$d) \hat{p} = k^2 r_{xy} \frac{k^2 s_y}{k^2 s_x} \frac{n s_x}{\hat{\sigma}_y} \quad (4)$$

dans laquelle on a :

$\hat{p}$  : estimation du coefficient de corrélation entre  $x$  et  $y$  (dont l'espérance mathématique est  $p$ ), à partir de la première estimation  $k^r_{xy}$ , des écarts-types des échantillons de valeurs observées et de l'estimation  $\hat{\sigma}_y$  définie ci-dessus.

En pratique, comme on ne possède pas actuellement de test permettant de juger de la signification relative de  $\hat{p}$  et de  $k^r_{xy}$ , on reste plus prudent que pour la variance et dans les usages ultérieurs, on conserve le coefficient expérimental calculé  $k^r_{xy}$ .

### 2.3 - Moyens d'appréciation du gain obtenu par l'extension

Le bénéfice de l'extension de la série Y à l'aide de la série X pour la connaissance de la série Y est d'autant plus grand que le coefficient de corrélation  $k^r_{xy}$  est élevé. Ce bénéfice a été traduit par R. VERON en efficacité relative, qui s'exprime selon l'équation (5) :

$$E = 1 + \left(1 - \frac{k}{n}\right) \left[\frac{1 - (k-2)r^2}{k-3}\right] \quad (5)$$

E efficacité relative de  $\bar{y}_k$  et de  $\hat{y}$ , définie par le rapport de la variance de  $\hat{y}$  à celle de  $\bar{y}_k$ .

r qui désigne évidemment le coefficient de corrélation  $k^r_{xy}$ .

Sachant que r est toujours positif et que k ne peut être inférieur à 3 (inutile et impensable de faire une régression de Y en X sur moins de 4 valeurs !), on peut donc voir que E varie de k à 1 mais en augmentant quand le bénéfice diminue, ce qui n'est pas très judicieux pour estimer une efficacité.

Il est plus parlant de traduire ce bénéfice, en utilisant E, sous la forme du gain réel d'information que l'on exprime à l'aide du nombre d'années "efficaces" ou "fictives"  $n'$  à laquelle correspond l'échantillon Y étendu. En d'autres termes,  $n'$  varie de k (aucun gain, corrélation nulle entre Y et X) à n (gain maximal, liaison fonctionnelle entre Y et X avec  $r = 1$ ) et s'évalue ainsi :

$$n' = \frac{k}{E} \quad (6)$$

On admet que la série Y étendue correspond en poids d'information à ce que donnerait une série Y réellement observée durant  $n'$  années.

L'utilisation de la loi normale sur des variables hydrologiques fait l'objet du chapitre 4, dans lequel sont examinés en détail tous les problèmes de statistique que pose cette utilisation. On y verra en particulier le calcul des intervalles de confiance, à l'intérieur desquels il y a une certaine probabilité pour que s'y placent les vraies valeurs des paramètres, moyenne et variance, de la population étudiée et dont ne sont connues que des estimations fournies par les échantillons observés ou étendus.

Il suffit ici pour achever l'appréciation du gain obtenu par l'extension d'admettre que les intervalles de confiance à 95 % (par exemple) pour un échantillon normal de plus de 30 valeurs sont les suivants :

$$\begin{aligned} \text{a) pour la moyenne} & \quad \pm 1,96 \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{k}} \\ \text{b) pour la variance} & \quad \pm 1,96 \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{2k}} \end{aligned} \quad (7)$$

On peut ainsi comparer le resserrement de l'intervalle de confiance sur la moyenne de  $\bar{y}$  et sur la variance  $\hat{\sigma}_y$  lorsque l'on remplace k par n' dans les équations précédentes (7), c'est-à-dire lorsque l'on passe de l'échantillon Y observé k années à l'échantillon étendu sur n' années fictives. Bien entendu, dans ces équations (7), on utilise pour  $\hat{\sigma}$  soit la valeur observée  $s_y$  soit la valeur étendue  $\hat{\sigma}_y$ , selon leur valeur relative et celle de  $k_{xy}^r$  comme il a été dit plus haut.

On voit d'après les équations (7) que le resserrement de l'intervalle de confiance à la moitié de sa valeur initiale, auquel correspond un doublement de la précision sur la connaissance du paramètre incriminé, n'est possible que si le nombre d'années k est multiplié par 4. Selon la valeur de n' par rapport à celle de k, on aura un gain plus ou moins accru de la précision, comme on va le voir dans l'exercice d'application de ce chapitre.

#### 2.4 - Remarques sur la pratique de l'extension

L'homogénéisation des données pluviométriques n'est pas un but en soi. Aussi l'extension des séries courtes à l'aide des séries de base est-elle une opération qui peut s'exécuter sur des variables qui peuvent être différentes selon l'objectif final.

Par exemple, si l'on effectue une étude qui comporte la recherche de corrélation hydropluviométrique à l'échelle annuelle, on peut avoir intérêt à choisir à priori la date du début de l'année hydrologique. En effet, si ce choix est à peu près imposé par la considération du régime (étiage très nettement marqué, faible importance relative des variations du volume d'eau stocké dans les couches souterraines en relation avec la rivière), il est plus rapide et plus exact d'opérer avec les totaux pluviométriques observés par année hydrologique (desquels on déduit les totaux non observés par extension) que d'opérer avec les totaux calendaires.

Cependant, si la date du début de l'année hydrologique ne peut être choisie qu'à la suite de divers essais de corrélations hydropluviométriques, parmi lesquelles on adoptera celle qui a la meilleure efficacité, le plus simple est alors d'opérer sur les totaux pluviométriques calendaires pour effectuer l'extension à l'échelle annuelle ; ceci est d'autant plus logique qu'il y a de fortes chances pour que la corrélation hydropluviométrique ne soit pas simple, mais fasse appel à un facteur principal et à un ou plusieurs autres facteurs de l'écoulement, facteurs liés principalement à la répartition de la pluviométrie dans l'année hydrologique et à l'état des réserves souterraines lié lui-même aux précipitations antérieures (cf chapitre III).

L'estimation des totaux mensuels ou saisonniers ne mérite pas, en général, d'être effectuée avec autant de précision que celle des totaux annuels, d'autant plus que les valeurs estimées doivent être corrigées pour éviter une incohérence désagréable de l'ensemble des résultats (on s'arrange pour que la somme des estimations des totaux pluviométriques, pour les différentes parties d'une année, soit égale à l'estimation du total annuel). Une telle estimation n'est admissible qu'à la condition que les liaisons soient linéaires entre séries courtes et longues et également que les variables mensuelles ou saisonnières soient normales, ce qui est assez rare même en climat tempéré humide comme en France. Si la normalité des variables n'est pas sûre, mais si la linéarité existe, on peut adapter la méthodologie de l'extension comme suit :

a) on fait d'abord l'extension telle que décrite au paragraphes 2.2 sur les totaux annuels

b) on établit ensuite graphiquement les liaisons linéaires entre séries mensuelles, ou plurimensuelles, Y à étendre et séries X de base, ceci pour la période commune de k années.

c) on estime point par point sur la droite de régression les  $n - k$  valeurs de la série Y non observées ; ces deux opérations correspondent à l'application de l'équation (1) mais dans laquelle, les lois n'étant pas normales, le coefficient  $r_{kxy}$  n'a plus la signification d'un coefficient de corrélation.

d) on est alors en possession de plusieurs séries mensuelles ou plurimensuelles de la station Y chacune desquelles composées de k valeurs observées et  $n - k$  reconstituées. Il faut maintenant faire les sommes des  $n - k$  valeurs reconstituées par mois ou groupe de mois afin d'obtenir les  $n - k$  valeurs annuelles correspondantes.

e) on confronte enfin pour chaque année j de la période étendue de k à n années, le total annuel  $P_j$  obtenu directement ci-dessus en a) et le total annuel  $P'_j$  obtenu par sommation des valeurs mensuelles ou plurimensuelles, puis l'on corrige ces dernières valeurs du produit  $\frac{P_j}{P'_j}$  afin de les rendre homogènes avec

l'estimation globale  $P_j$  faite à l'échelle annuelle.

2.5 - Exercice d'application de l'extension d'une série de totaux pluviométriques annuels à partir d'une régression linéaire avec une autre série plus longue

Le thème de cet exercice est, comme celui de l'exercice d'application du chapitre I, emprunté à une étude d'homogénéisation des observations pluviométriques d'ALSACE ayant pour objectif final des corrélations hydropluviométriques.

Le poste de base est comme précédemment celui de ST-GILLES situé à environ 5 km à l'ouest de COLMAR et observé sans lacune ni anomalie depuis 1891. On utilise ici la série X de ST-GILLES des hauteurs annuelles de précipitations calendaires de 1891 à 1965 inclus.

L'exemple de station à durée courte d'observation choisi est celui du poste de GUEBWILLER, situé à environ 18 km au sud de ST-GILLES, qui n'est observé que depuis 1946.

Les deux séries de hauteurs annuelles des deux postes semblent à l'examen des périodes observées suivre des lois normales, être homogènes (dans le sens du contrôle de qualité exposé dans le 1er chapitre) et liées linéairement.

L'objectif de l'exercice est de procéder à l'extension de la série 1946-65 de GUEBWILLER à l'aide de la série 1891-1965 de ST-GILLES et d'apprécier le gain d'information résultant sur la connaissance des hauteurs annuelles de précipitation à GUEBWILLER.

On demande en conséquence l'exécution des opérations suivantes, sachant que l'on appelle Y la série de GUEBWILLER, X celle de ST-GILLES, k la longueur de la période commune 1945-65 et n celle de la période totale de ST-GILLES :

- a) calculer moyennes et variances des échantillons Y et X sur k années, X sur n années, coefficient de corrélation  $r_{kxy}$  et équation de la droite de régression de Y en X
- b) tracer la droite de régression et placer sur le graphe les points observés à titre de vérification
- c) estimer les nouvelles valeurs étendues de la moyenne  $\hat{y}$  et de la variance  $\hat{\sigma}_y$  de la série de GUEBWILLER à l'aide des éléments de ST-GILLES, estimer également le nouveau coefficient de corrélation
- d) calculer l'efficacité relative E de l'extension, le nombre d'années fictives n' de la série étendue de GUEBWILLER
- e) calculer les intervalles de confiance à 95 % et les précisions correspondantes en % sur la moyenne interannuelle de GUEBWILLER (série de k années et série étendue de n' années) et de ST-GILLES (série de n années) et comparer les résultats.

Données d'observations et éléments de calcul

Le tableau suivant fournit les totaux annuels de précipitations (en millimètres) à ST-GILLES et GUEBWILLER pour la période commune 1946-65

Années : ST-GILLES : GUEBWILLER				Années : ST-GILLES : GUEBWILLER					
46	:	511	:	810	56	:	657	:	886
47	:	540	:	793	57	:	540	:	776
48	:	522	:	737	58	:	858	:	1 288
49	:	459	:	639	59	:	549	:	948
1950	:	732	:	1 169	1960	:	800	:	1 059
51	:	841	:	1 002	61	:	625	:	872
52	:	820	:	1 248	62	:	568	:	970
53	:	393	:	522	63	:	659	:	1 059
54	:	702	:	1 044	64	:	548	:	762
1955	:	677	:	1 140	1965	:	817	:	1 499

Pour éviter les calculs fastidieux, certains éléments intermédiaires de calcul sont donnés ci-dessous pour la période 1946-65 :

$$\sum_1^k x^2 = 8.573.110$$

$$\sum_1^k x = 12.818$$

$$\sum_1^k y^2 = 19.543.239$$

$$\sum_1^k y = 19.223$$

$$\sum_1^k xy = 12.861.707$$

$$\bar{x}_n = 667 \text{ mm}$$

$$s_x^2 = 18.541$$

L'exécution des calculs requis par les équations n° (1) à (7) est facilitée si l'on opère à l'aide du jeu de formules suivantes dérivées des formules classiques de définition de la variance et du coefficient de corrélation et qui sont particulièrement adaptées au calcul sur machine électromécanique de bureau (tous les signes  $\Sigma$  doivent être lus  $\Sigma_1^k$ , somme de 1 à k valeurs) :

variance expérimentale de x sur k valeurs

$$s_x^2 = \frac{k \Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}{k (k - 1)} \quad (8)$$

variance de y :  $s_y^2 =$  expression analogue en y

On conserve les numérateurs de ces expressions, pour les calculs suivants. En effet, l'équation (1) de la droite de régression, donnée dans l'exposé de la méthode, peut être mise sous la forme  $y = ax + b$ . On a alors :

$$\begin{aligned} a &= \frac{k \sum xy - \sum x \sum y}{k \sum x^2 - (\sum x)^2} \\ b &= \frac{\sum y \sum x^2 - \sum x \sum xy}{k \sum x^2 - (\sum x)^2} \end{aligned} \quad (9)$$

Le coefficient de corrélation entre X et Y sur k valeurs :

$$k r_{xy}^2 = a \frac{k \sum xy - \sum x \sum y}{k \sum y^2 - (\sum y)^2} \quad (10)$$

Notons aussi l'expression suivante qui entre dans le calcul de  $\hat{\sigma}_y^2$  et dans celui de  $\hat{\beta}^2$ .

$$k r_{xy}^2 \frac{k s_y^2}{k s_x^2} = a^2$$

### CHAPITRE III - MAXIMISATION DE L'INFORMATION "DEBITS" PAR MODELES PROBABILISTES

Ce chapitre est le premier qui aborde l'étude des débits. Il commence par un bref rappel des facteurs de l'écoulement, des conditions de transformation des précipitations en écoulement dans le cadre du bilan hydrologique d'un bassin.

L'étude proprement dite des débits commence avec les chapitres IV et V qui abordent l'aspect statistique de cette étude pour ce qui est des apports de longue période (mois, saison, année). Avant d'entreprendre cette étude statistique des débits, il importe de s'assurer que l'information disponible est complète et ne peut pas être améliorée. En d'autres termes, sachant quelle (s) station(s) hydrométrique (s) on doit considérer, il faut vérifier si la série des débits en cette (ces) station (s) est suffisante. Dans le cas contraire, on recherche s'il n'y a pas d'autre station hydrométrique plus ancienne ou des stations pluviométriques également plus anciennes qui soient susceptibles d'accroître l'information disponible.

Il faut admettre que cette opération de maximisation de l'information "débits" est de règle dans la grande majorité des cas ou des pays. En effet, les réseaux de mesures pluviométriques sont toujours ou presque toujours plus anciens et plus denses que les réseaux hydrométriques et dans ceux-ci les stations de longue durée (20 ou 30 ans au moins) sont rares. Ainsi par exemple a-t-on vu dans les exercices des chapitres I et II que l'on avait des stations de 75 ans de relevés pluviométriques en France, et cela existe un peu partout dans le pays, tandis que les stations hydrométriques n'ont souvent que 10 ans et rarement plus de 20 ans de relevés. On retrouve cette disproportion dans de très nombreux pays.

On se propose donc dans ce chapitre de présenter brièvement toutes les méthodes susceptibles de permettre l'amélioration d'une information insuffisante et de donner un développement particulier à la méthode des déviations résiduelles ou des résidus qui offre un grand intérêt dû essentiellement à sa souplesse et à sa mise en oeuvre aisée, malgré une absence de rigueur très criticable (cf.3.42).

#### 3.1 - Bilan hydrologique et facteurs de l'écoulement

On admet ici connu le bilan hydrologique d'un bassin, tel qu'il est développé dans les manuels d'hydrologie.

On se contente de rappeler l'existence de 3 types de termes différents dans un bilan : les entrées, les sorties et les stocks.

Le graphique 3 fournit une bonne représentation de l'imbrication des divers termes entre eux, bien qu'il ne présente que les principaux termes et les principaux mouvements de l'eau.

Le tableau 1 montre l'incidence des échelles de temps du bilan (année, saison, mois) sur les variations des stocks et indique quels paramètres permettent l'estimation des variations non négligeables.

L'examen du bilan hydrologique d'un bassin permet deux conclusions :

a) la résolution de l'équation du bilan est d'autant plus précise et plus facile que la période prise en compte est longue et les variations de stocks peu importantes. En pratique, le bilan annuel est de résolution classique, les bilans saisonniers sont plus difficiles et restent du domaine de la recherche.

b) en matière d'aménagement hydraulique, la ressource en eau est, soit le débit  $Q$  (terme "écoulement à l'exutoire" du bilan) du cours d'eau, soit la disponibilité des nappes. L'ordre de grandeur relatif de ces ressources est très différent ; la seconde n'est estimable avec précision qu'après études hydrogéologiques complexes, lesquelles se situent hors du thème développé ici. La difficulté réside dans le fait que les termes du bilan sont alors disproportionnés : part prééminente du poste entrée (précipitations en majorité) et du stock (réserve de la nappe) en comparaison de la ressource qui est en fait la variation du stock. Quand l'aménagement repose sur l'exploitation de la ressource "eau superficielle", les termes principaux, sinon les seuls importants, du bilan sont les entrées (pluies et neige) et les débits à l'exutoire.

Ce rappel de la notion de bilan hydrologique étant fait, on peut présenter les facteurs de l'écoulement avec un certain détail.

Le terme du bilan "écoulement à l'exutoire" est synonyme de l'information "débits" fournie par la station du réseau hydrométrique coïncidant avec l'exutoire du bassin étudié.

# BILAN HYDROLOGIQUE D'UN BASSIN COMPLET

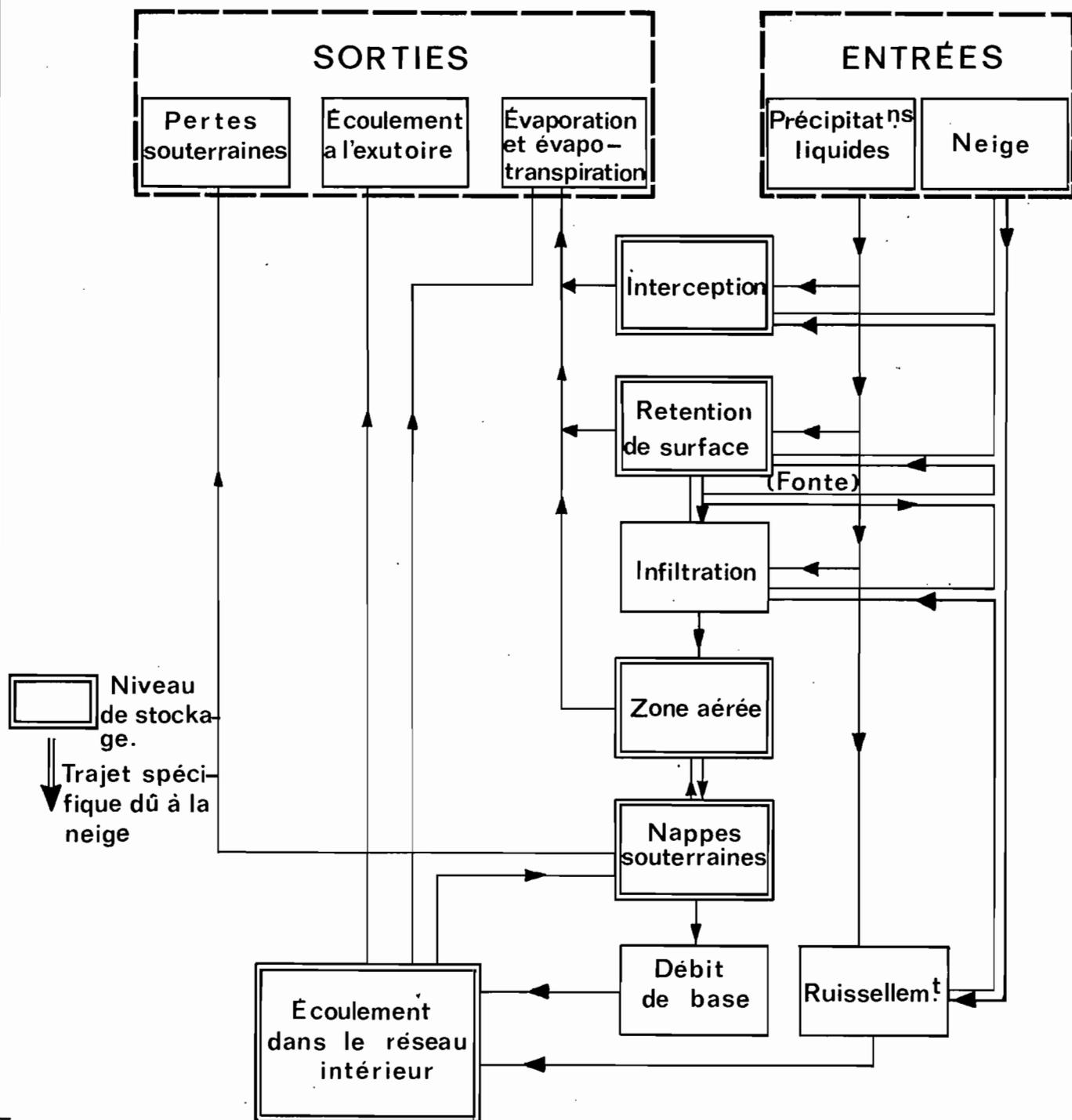


TABLEAU 1

VARIATIONS DES STOCKS DANS LE BILAN HYDROLOGIQUE  
D'UN BASSIN RECEVANT DES APPORTS PLUVIAUX (NEIGE EXCLUE)

Terme du bilan	Bassins peu perméables		Bassin perméable	
	Sans réservoir ni lac	Avec réservoir ou lac	Sans réservoir ni lac	Avec réservoir ou lac
<u>1 - Bilan à l'échelle de l'année hydrologique</u>				
Interception	Nulle	Nulle	Nulle	Nulle
Rétention de surface	Nulle	Nulle	Nulle	Nulle
Zone aérée	Négligeable	Négligeable	Fonction du taux d'humidité du sol	
Nappes souterraines	Négligeable	Négligeable	Fonction de la profondeur de la nappe	
Réseau intérieur	Négligeable	Fonction du niveau du réservoir	Négligeable	Fonction du niveau du réservoir
<u>2 - Bilan à l'échelle saisonnière (plusieurs mois)</u>				
Interception	Négligeable	Négligeable		
Rétention de surface	Négligeable	Négligeable	Identique au bassin	
Zone aérée	Fonction du taux d'humidité du sol		peu perméable	
Nappes souterraines	Fonction de la profondeur de la nappe			
Réseau intérieur	Fonction du niveau à l'exutoire	Fonction du niveau du réservoir		

Dans le cas où le site du projet d'aménagement (lieu de prise d'eau en rivière avec ou sans emmagasinement) ne coïncide pas avec une station du réseau, la détermination de l'information "débits" au site peut être faite par corrélation avec des données connues, selon des procédés qui sont analogues à ceux développés pour augmenter une information insuffisante (série de débits trop courte) ou pour créer une information inexistante (pas de station); ces procédés d'extension, ou de corrélation, sont exposés en détail dans le cours de ce chapitre.

L'information "débits" fournie par le réseau se présente, en règle générale, sous les formes élaborées suivantes :

- chroniques continues de débits journaliers,
- valeurs annuelles de l'écoulement (modules) et répartitions saisonnières (débits moyens mensuels), déduites des précédentes.

Le module représente l'abondance relative de l'écoulement ; la série des débits moyens mensuels représente la composante cyclique, la "forme" de l'écoulement annuel ; la chronique des débits journaliers (voire instantanés) représente à l'échelle fine la composante en quelque sorte aléatoire du phénomène, c'est-à-dire la "forme", à l'échelle de la crue par exemple.

Chacun de ces aspects de l'information élaborée "débits" est dû à une ou plusieurs causes, dépend de un ou plusieurs facteurs qui provoquent soit la valeur absolue du phénomène, soit les écarts relatifs entre phénomènes différents (même bassin ou bassins différents).

Les divers facteurs ont un effet souvent multiple, agissant à la fois sur plusieurs aspects du débit. On va en faire un inventaire rapide avec indication de leur rôle certain ou présumé.

### 3.1.1 - Les précipitations

Il s'agit du facteur principal, qui intervient par :

- sa hauteur totale annuelle,
- la fraction neigeuse de celle-ci,
- sa répartition mensuelle : plus ou moins forte concentration des pluies sur des mois successifs ou coïncidence plus ou moins prononcée entre les précipitations et les basses températures (réduction de l'évapotranspiration),
- l'importance, le nombre et la répartition des épisodes pluvieux, fortes averses, séquences sèches,
- la rapidité plus ou moins nette de la fonte des neiges.

Sous diverses formes, les précipitations influent de manière importante ou modérée sur tel ou tel aspect de l'écoulement. Les principales influences, les plus nettes et les plus vraisemblables, figurent réunies sur le tableau joint n° 2, tableau qui ne prétend pas être complet mais simplement évocateur.

TABLEAU 2

Les FACTEURS de l'ECOULEMENT et leurs INFLUENCES

Désignation du facteur	Écoulement annuel	Répartition mensuelle des débits	Crues	Etiages
<u>1 - Précipitations</u>				
1.1 Hauteur annuelle totale	XX			X
Fraction neigeuse	XX	X	X	
1.2 Répartition mensuelle	X	XX		
1.3 Episodes pluvieux	X	X	XX	
Averses exceptionnelles	X	X	XX	
Fonte du stock neigeux	X	XX	XX	
Séquences sèches	X	X		XX
<u>2 - Milieu physique</u>				
2.1 Température	X	X		X
Evapotranspiration potentielle	X	X		X
2.2 Structure du bassin-Forme			X	
Pente	X		X	
Réseau de drainage (forme, densité)	X		X	X
Orientation, exposition	X		X	
2.3 Nature du sol	X	X	XX	X
Couverture du sol (Végétation)	X	X	X	X
Nature du sous-sol	XX	X	X	XX

XX Influence importante

X Influence secondaire

### 3.1.2 - Le milieu physique

On inclut sous cette rubrique à la fois les autres paramètres climatiques et ceux propres au terrain. Les premiers sont souvent à effet multiple. Température et évapotranspiration agissent souvent par intermédiaire sur l'écoulement, en influant par **exemple** :

- la vitesse de fonte du stock neigeux,
- la répartition des précipitations entre pluie et neige,
- l'accroissement ou la limitation de l'étiage....etc..

Les paramètres proprement physiques différencient les bassins à régime de précipitations comparables quant à l'abondance de l'écoulement (réseau de drainage - forme et densité - nature du sol et du sous-sol) et influent sur les caractéristiques de crue (forme et pentes des bassins, nature du sol....) ou sur celle des étiages (nature du sous-sol, réseau de drainage...).

Le rôle des paramètres physiques est complexe ; leurs actions interfèrent et ne sont pas indépendantes ; elles sont souvent évidentes qualitativement mais rarement évaluables quantitativement.

La connaissance de ce rôle est pourtant très importante dans l'évaluation des ressources en eau, surtout à l'issue de petits bassins versants.

Si l'on peut déjà, pour certains bassins, dire que l'écoulement subit telle modification chiffrée à cause de tel paramètre physique, il est prématuré d'espérer répondre, avec précision, à la question inverse : quelle modification chiffrée du régime des débits provoquerait la suppression de la végétation ou la présence de terrain perméable au lieu de terrain imperméable sur un bassin connu ?

En conclusion, on peut dire que parmi les facteurs de l'écoulement :

- les précipitations sous quelque forme que ce soit jouent le rôle principal,
- les paramètres climatiques et physiques modifient l'influence du facteur précipitations dans un sens ou dans l'autre avec plus ou moins d'intensité,
- les précipitations et les facteurs climatiques sont des variables aléatoires, dans le temps et l'espace, de même nature donc que les débits qu'elles engendrent,
- les paramètres physiques ne sont pas variables dans le temps de manière très aléatoires (état de saturation des sols, croissance de la végétation mis à part et dont l'évolution temporelle dépend étroitement des facteurs précipitations et climat) et par conséquent représentent un état du terrain variable dans l'espace ; leur influence sur les débits est donc relative et incidente et non génératrice.

Alors que les paramètres climatiques et physiques aléatoires permettent d'expliquer quantitativement les variations des composantes du régime hydrologique d'un bassin déterminé, les paramètres physiques d'état de bassin permettent seulement de différencier les bassins entre eux dans leur comportement hydrologique.

### 3.2 - Objectifs et méthodes de la maximisation de l'information "débits"

#### 3.2.1 - Objectifs poursuivis

L'objectif général du sujet est le suivant : sachant que l'on dispose en une station S d'une chronique de débits  $Q_K$  sur K années, comment peut-on :

- a) soit améliorer cette information en utilisant la chronique des précipitations  $P_N$  observées sur le bassin amont de la station S durant une période  $N > K$  (avec ou sans l'aide des chroniques de température T, d'évapotranspiration ETP, etc...)
- b) soit transformer cette information en une chronique de débits  $Q'_K$  au point P d'un projet d'aménagement différent de la station S, situé soit sur le même cours d'eau, soit sur un cours d'eau voisin ;
- c) soit extraire de cette information, en utilisant les données relatives aux paramètres physiques, une information comparable pour une rivière non observée.

#### 3.2.2 - Généralités sur les méthodes employées

Aux cas a) et b), on répond par les procédés suivants :

- corrélation débits-débits entre 2 stations S et S' (ou S et P),
- corrélation débits-précipitations-autres facteurs entre la station S et son bassin versant.

Au cas c), on ne peut répondre que si l'on connaît plusieurs chroniques de débits à des stations  $S_1, S_2, \dots, S_n$  ; le procédé est celui de la corrélation entre les chroniques  $S_i$  et les paramètres physiques correspondants.

Les cas a) et b) répondent à l'intention d'extension des données observées sur un bassin connu (maximisation intrinsèque de l'information). Le cas c) répond à l'intention d'extension analogique des données observées à un bassin inconnu (transfert externe de l'information).

En matière d'aménagement hydraulique, le cas c) se pose au stade de l'avant-projet d'estimation des ressources en eau d'un certain cours d'eau ; la réponse est souvent peu précise ; elle permet cependant de conclure si le projet est intéressant ou non, et s'il vaut la peine d'entreprendre des études spéciales. La réponse n'est guère possible que dans une région déjà bien connue sous l'aspect hydrologique (données de base, monographies publiées...).

La mise en oeuvre du cas c) se fait à l'aide des mêmes méthodes de calcul que celle des cas a) et b), qui vont être décrites plus loin, mais comme elle requiert une connaissance particulière des facteurs physiques des bassins, un développement spécial lui est consacré dans le chapitre IX.

Les cas a) et b) - celui-ci n'étant qu'une généralisation du premier - se posent lors du projet proprement dit et leur résolution doit apporter une réponse précise, d'autant plus que sont longues et riches les informations "débits" et celles des facteurs de l'écoulement du bassin étudié.

L'échelle de temps opérationnelle est tantôt :

- celle de l'année : connaissance des modules,
- celle de saisons : connaissance des apports d'hiver, d'été,
- celle du mois : connaissance de l'étiage,
- celle du jour : connaissance de la crue.

Selon l'échelle de temps, le procédé d'analyse varie, en devenant d'autant plus complexe que l'intervalle considéré diminue :

- corrélation linéaire tantôt simple (surtout échelle annuelle) tantôt multiple (surtout échelle saisonnière et mensuelle),
- corrélation non-linéaire (méthode des résidus ou des déviations résiduelles) : échelle saisonnière, mensuelle, parfois annuelle,
- modèle déterministe à variabilité spatio-temporelle : échelle du jour pour la reconstitution d'une crue,
- modèle stochastique chronologique à l'échelle du jour, avec prise en compte de la non-indépendance des événements journaliers successifs (crues, étiages).

Les deux derniers types de modèles seront évoqués lors de la présentation des thèmes consacrés aux "crues" et aux "étiages", dans les chapitres 6, 7 et 8.

Ces dernières années, dans le cadre général de la théorie des modèles en hydrologie qui se développent à un rythme accéléré, de nombreux auteurs ont convenu d'appeler modèles probabilistes l'ensemble des méthodes de corrélations linéaires ou non, simples ou multiples.

En matière d'apports sur une période au moins mensuelle, les procédés employés peuvent encore se classer ainsi :

- corrélation à un seul facteur linéaire ou non, pouvant être résolu par le calcul sur machine électromécanique de bureau,
- corrélation à n facteurs :
  - soit dite multiple et nécessitant une linéarisation des facteurs (changement de variable), avant de pouvoir être résolue sur ordinateur,
  - soit dite graphique et pouvant être traitée manuellement (méthode des résidus).

On peut donc maintenant aborder l'examen des modèles probabilistes classés en deux groupes : corrélations simples et corrélations multiples.

On consultera auparavant avec fruit le tableau 3 qui présente quelques exemples d'application parmi les plus classiques des modèles probabilistes à l'hydrologie, en mettant en lumière la définition des variables étudiées et celles des variables causales tantôt uniques (corrélations simples) tantôt multiples (corrélations multiples) le plus souvent employées.

### 3.3 - Corrélations simples (à 2 variables)

La corrélation à deux variables s'emploie généralement entre valeurs annuelles (modules-modules ou modules-précipitations) et plus rarement entre variables saisonnières et mensuelles. Bien entendu, le choix des paramètres et la vérification de l'existence d'une corrélation précèdent tout calcul : on opère simplement par report graphique des couples de valeurs à comparer.

Deux cas peuvent se présenter, à l'examen du graphe, selon que les liaisons apparaissent linéaires ou non.

Dans le premier cas, il s'agit de la corrélation linéaire entre 2 variables Y et X (débit-débit ou débit-pluie) qui a été décrite en détail sous le titre de méthode d'extension dans le chapitre II, et sur laquelle il est inutile de revenir, sinon pour rappeler que l'appréciation du gain d'information (efficacité relative et nombre d'années efficaces) n'a de signification que si les deux variables suivent des lois normales (coefficient de corrélation significatif).

Dans le second cas, la liaison n'étant pas linéaire, on peut opérer de deux manières :

- a) un ajustement parabolique de la forme  $q = A (p - p_0)^n$  par la méthode des moindres carrés (calcul très laborieux),
- b) un ajustement graphique en se réglant par minimisation de la somme des écarts absolus  $q_{\text{obs}} - q_{\text{est}}$  entre les points  $q_i, p_i$  observés et la courbe tracée.

La première manière consiste implicitement à linéariser l'une des variables, sans le faire, puisqu'une transformation parabolique de la variable p conduirait à une liaison linéaire. Ce procédé est de la nature de celui qui est généralisé dans les corrélations multiples, et pour lequel l'ordinateur est souhaitable, même dans un cas simple à 2 variables.

La seconde manière est une simplification de la méthode des déviations résiduelles, en ne considérant qu'un seul facteur. Il nous a paru intéressant d'en faire une présentation sur un exemple avant de développer la méthode générale.

TABLEAU 3

QUELQUES EXEMPLES D'APPLICATION SIMPLE DES MODELES PROBABILISTES

Variable étudiée	Facteur principal (parfois unique)	Facteur secondaire
Module à une station S	Hauteur annuelle des précipitations sur le bassin versant	Fraction neigeuse des précipitations (Fonction de concentration mensuelle des précipitations) (Fonction de température)
Module à un site P (1)	Module à la station S la plus voisine	
Apport estival à la station	Hauteur de précipitations de l'hiver précédent	Hauteur de précipitations estivales Stock neigeux Fonction de température ou ETP
Débit mensuel M à la station S	Hauteur de précipitations du mois M  ou Débit mensuel M - 1 à la station S	Hauteur de précipitations du mois M - 1 Hauteur de précipitations des n mois antérieurs  ou Hauteur de précipitations du mois M
Etiage à la station S	Débit caractéristique de n mois, ou débit charnière, à la station S	Précipitations estivales
Débit maximal de crue à la station S ou lame ruisselée de crue	Fonction de précipitations (épisode pluvieux maximal)	Durée des précipitations Intensité maximale de précipitations Fonction de saturation du bassin (précipitations antérieures)

(1) La corrélation entre débits de stations voisines est utilisée également pour des intervalles plus courts : débit mensuel, débit caractéristique de n jours, maximum de crue, étiage absolu.

On rencontre souvent des corrélations simples non linéaires dans les liaisons entre modules ou entre modules et précipitations dans les régimes irréguliers des zones climatiques arides et semi-arides, dans lesquelles bien souvent les variables caractérisant la fonction annuelle (débit ou pluie) suit une loi non normale. Dans ces conditions, si l'on étend une série courte de modules Q à l'aide d'une série P de pluie, on peut estimer point par point sur la courbe de corrélation les valeurs de Q correspondantes aux valeurs observées de P et non observées en Q (période non commune n - k années par exemple). La série reconstituée de n valeurs de Q pourra ultérieurement faire l'objet d'un ajustement à une loi normale mais il ne sera pas possible d'estimer ni l'intervalle de confiance des paramètres tirés de l'échantillon nQ ni le gain d'information dû à la corrélation Q - P.

De façon approximative pour le gain, on peut toujours employer le mode de calcul valable pour une loi normale ; l'erreur commise croît avec la dissymétrie de la loi que suit la variable Q.

A titre d'exemple, on présente le cas d'un ajustement graphique (qui aurait d'ailleurs pu être calculé selon un schéma parabolique, étant donné la forme de la courbe tracée) entre lames annuelles écoulées Le et indice pluviométrique annuel IP pour un cours d'eau à régime très irrégulier tropical de tendance semi-aride, le rio SALGADO à IGO (affluent du JAGUARIBE, fleuve côtier du nord-est du BRÉSIL).

L'indice pluviométrique adopté est assez complexe ; il répond à la forme suivante :

$$IP = 0,90 \left[ \sum_1^{12} (P_1 - 50) + \sum_1^{12} (P_2 - 50) \right] + 1,2 \sum_1^{12} (P_3 - 50) \\ + \sum_1^{12} (P_4 - 250) + \sum_1^{12} (P_5 - 250).$$

Cet indice tient compte de 3 facteurs particuliers de la réaction du bassin à l'écoulement, intégrés en un seul chiffre :

- a) par les paramètres multiplicateurs 0,90 - 1,2 et 1 de la répartition spatiale des précipitations,
- b) par le terme soustractif  $P_0$  (50 ou 250) de l'aptitude au ruissellement différente selon les terrains cristallins (50) et sédimentaires (250),
- c) par les sommations  $\sum_1^{12} (P_i - P_0)$  de la concentration mensuelle des précipitations puisque ces termes représentent la somme des excédents mensuels de précipitations, au seuil  $P_0$ , pour les postes  $P_1$  à  $P_5$  représentatifs de la pluviosité du bassin.

La prise en compte de plusieurs facteurs aurait pu se faire classiquement avec régressions multiples, mais le calcul laborieux certes de l'indice IP conduit malgré tout à une résolution plus élégante.

Le graphique n° 4 fournit la représentation de l'ajustement effectué sur les 8 couples de points observés (1957 à 1964) ; on y constate les très faibles écarts absolus.

La série des précipitations est connue sur 52 ans (1913 à 1964) ; par tirage dans la courbe précédente, on déduit les 44 valeurs de lames écoulées non observées. La série étendue de 52 ans suit une loi dissymétrique, celle de GALTON.

Les paramètres de la série des lames écoulées annuelles à 100 sont les suivants :

	sur 8 ans	après extension à 52 ans
Moyenne	62,5	65
Ecart-type	54,5	79,5

On retient les 2 paramètres de la série étendue. L'appréciation du gain de l'extension par assimilation à des séries normales serait erronée car la dissymétrie est trop accusée, le coefficient de variation rapport de l'écart-type à la moyenne est supérieur à l'unité, ce qui est très fort, car au-delà de 0,50 à 0,60 il est rare que l'on soit en présence d'un échantillon normalement distribué.

Si cependant, on se permet d'estimer le gain par le calcul réservé aux variables normales, cette assimilation donne une efficacité de 0,233 (le coefficient de corrélation est de 0,937), soit un gain de 34 années. Pour apprécier l'amélioration réelle de l'extension, il faudrait tirer au hasard un grand nombre d'échantillons de 34 années dans la loi de GALTON et étudier la dispersion des moyennes, par exemple. L'ordinateur est évidemment requis pour un tel travail.

### 3.4 - Corrélations multiples (à plus de 2 variables)

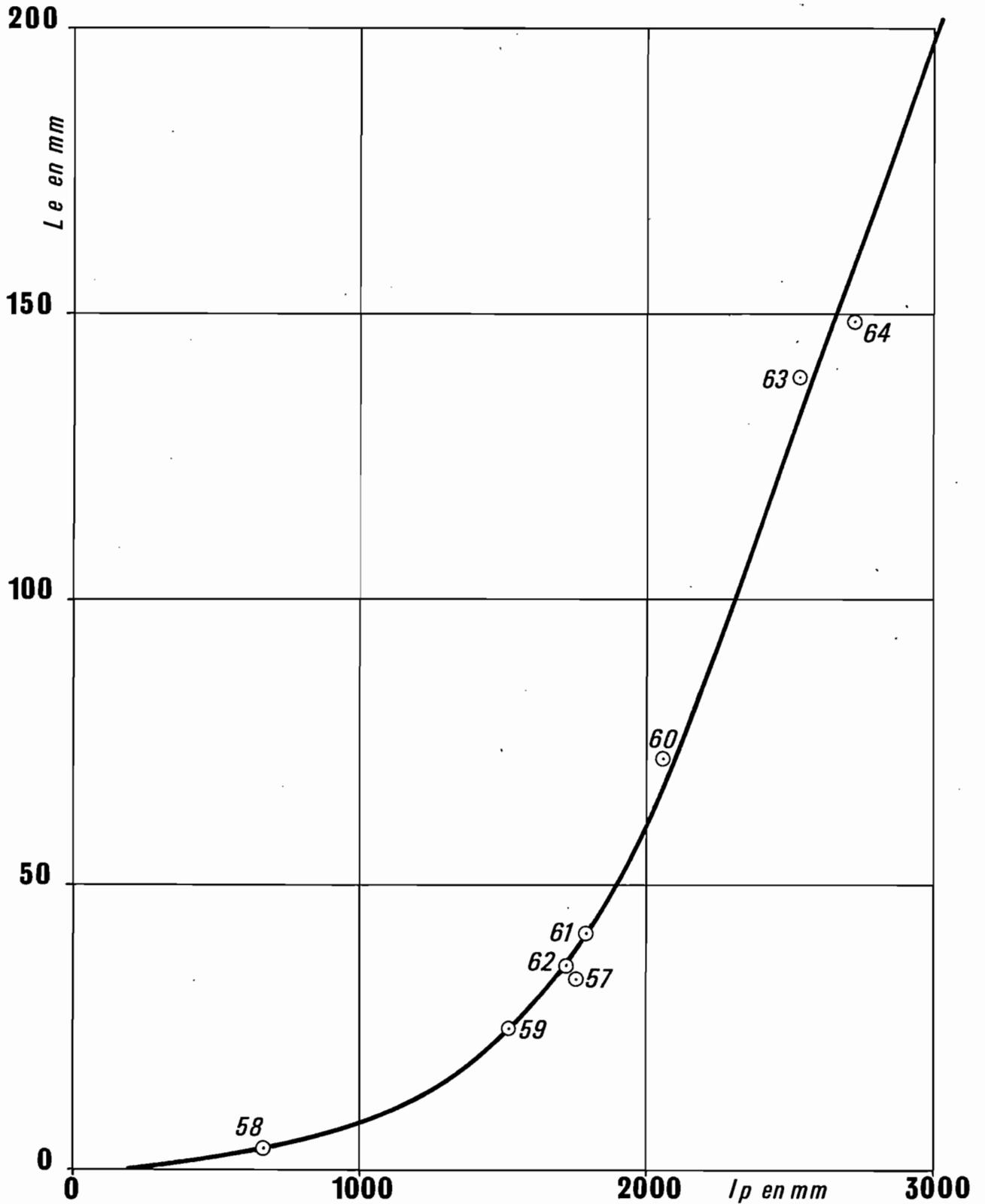
C'est le cas le plus général dès que l'on quitte l'échelle annuelle pour la saison, le mois, le couple de jours ; le tableau 3 donne un échantillonnage, très incomplet, des possibilités de liaison entre variable "débit", variable "précipitation" ou tout autre facteur ; mais cet échantillonnage montre les exemples d'application les plus courants et la souplesse du procédé qui n'est limitée que par l'imagination de l'hydrologue ou le manque de mesure.

La mise en oeuvre des corrélations multiples est beaucoup plus complexe que celle de la corrélation simple ; on peut utiliser soit la méthode générale dite des régressions multiples qui exige l'emploi d'un ordinateur, soit la méthode simplifiée applicable dans certains cas, dite méthode des résidus et qui, elle, ne requiert pas de moyens matériels importants.

# RIO SALGADO A ICÓ

Gr.4

## Corrélation lame écoulee - Indice pluviométrique



### 3.4.1 - Méthode des régressions multiples

Elle permet d'analyser le comportement d'une variable  $q$  par exemple, en fonction de plusieurs facteurs  $a, b, c...$  etc... sans avoir à tenir compte à priori de l'importance relative des divers facteurs sur la valeur de la variable et sans se préoccuper de la normalité des variables.

#### 3.4.1.1 - Les facteurs conditionnels sont indépendants dans leurs effets

L'expression générale d'une corrélation multiple est alors de la forme :

$$q = f(a) \cdot f(b) \cdot f(c) \dots \text{etc} \dots$$

les fonctions  $f(a) \dots \text{etc} \dots$  pouvant être des représentations complexes de la variable  $a, b \dots \text{etc}$ .

Dans la plupart des cas, on utilise des transformations de la variable  $a$  telle que l'influence de celle-ci sur la variable  $q$  soit linéaire (emploi du logarithme, de la puissance  $n \dots$ ).

Ainsi le débit maximal de crue  $q_M$  d'une rivière à la station  $S$  peut-il dépendre à la fois de :

- l'intensité maximale  $I$  en 1 heure,
- du débit  $q$  en  $S'$  en amont de la station  $S$ ,
- de la durée de précipitations  $T$ .

L'équation peut être de la forme :

$$q_M = \alpha I^n \cdot q^m \cdot T^p$$

C'est le modèle retenu, par exemple, par M. GRARD (EDF-DTG) pour la prévision du débit de pointe de crue de l'EYRIEUX, torrent cévenol. (Communication présentée à la Commission des Débits de la SHF, en Décembre 1964).

Pour apprécier la signification d'une telle corrélation, on calcule :

- a) des coefficients de corrélation partielle entre la variable et chaque facteur, les autres étant supposés constants. Par exemple, pour  $x = f(z, y)$ , on appelle coefficient de corrélation partielle entre  $x$  et  $y$ , liés par  $z$ , l'expression :

$$r_{xy,z} = \frac{r_{xy} - r_{xz} \cdot r_{yz}}{\sqrt{(1-r_{xz}^2)(1-r_{yz}^2)}}$$

Si la régression est linéaire (d'où l'intérêt de la linéarisation par changement de variable), ce coefficient exprime le degré de liaison entre  $x$  et  $y$ .

- b) un coefficient de corrélation multiple qui mesure la dispersion de x, sachant z et y, et qui répond à l'équation :

$$R^2_{x,yz} = 1 - (1 - r^2_{xz}) (1 - r^2_{xy,z})$$

La spécification de ces divers coefficients de corrélation peut être testée à l'aide de transformations de FISHER, qui permettent de trouver une fonction des dits coefficients obéissant soit à une loi normale, soit à une loi de STUDENT.

### 3.4.1.2 - Les facteurs ont des effets non indépendants

Certains facteurs non seulement influencent le comportement de la variable, mais également la valeur d'autres facteurs.

C'est le cas classique des précipitations mensuelles causes du débit d'un mois m à la station S.

La précipitation d'un mois (m - k) intervient de diverses façons :

- a) sur le volume des réserves, donc sur le débit de base, fraction du débit du mois m ;
- b) sur l'état de saturation du sol qui varie lentement et reste donc plus ou moins influencé au mois m par les états antérieurs (m - k)...

On peut dire que la liaison entre le débit mensuel  $Q_m$  et les précipitations p causales des mois m et (m - k) est du type à mémoire, sans composition linéaire ; elle peut se représenter ainsi :

$$Q_m = f_1 (p_m^a, p_{m-1}^{b_1}, p_{m-2}^{c_1} \dots) + f_2 (p_{m-1}^{b_2}, p_{m-2}^{c_2}, p_{m-3}^{d_1} \dots) + \dots \text{etc...} \quad (11)$$

La résolution d'une telle équation est certes plus complexe que dans le cas précédent, mais encore possible si l'on dispose d'un ordinateur pour l'estimation des paramètres. Cette équation est un véritable modèle mathématique dont le réglage ne peut se faire que par optimisation (par exemple par l'analyse différentielle dite "de plus grande pente") dont l'énoncé des processus complexe sort du propos de ce chapitre.

Cette interaction des facteurs peut varier dans le temps, c'est-à-dire que la variable et ses facteurs ne sont plus aléatoires mais soumis à des processus stochastiques dépendants du temps. La complexité de la méthode s'accroît encore ; elle est, sous cette forme, employée surtout pour la reconstitution des hydrogrammes de crue, des alternances de séquences sèches et humides, en pluies comme en débits.

Quel que soit l'aspect de la méthode des régressions multiples, la mise en oeuvre nécessite l'usage d'un ordinateur. La méthodologie opérationnelle se développe toujours selon la même litanie :

- a) essais graphiques préalables pour rechercher les facteurs et la forme de la variable les représentant pour avoir une liaison linéaire,
- b) calcul des liaisons selon les formules indiquées,
- c) contrôle des résultats à l'aide de tests statistiques, non présentés ici, mais qui figurent dans la littérature spécialisée.

Il ne sera pas fourni d'exemple pratique de cette méthode, étant donné les moyens matériels requis. On peut d'ailleurs dans de nombreux cas pratiques utiliser la méthode des résidus à la place de celle de la corrélation multiple.

#### 3.4.2 - Méthode des déviations résiduelles ou des résidus

Cette méthode procède à partir de la même équation (11) représentative de la corrélation multiple la plus générale, c'est-à-dire à effet itératif ou à mémoire. Si l'on adopte dans chaque polynôme des valeurs simples des paramètres (exposant 1 ou 2 tout au plus), la résolution graphique de l'équation (11) est possible.

Cette résolution graphique exige deux conditions facilement réalisables :

- a) classer au préalable par ordre d'importance décroissante les facteurs influant la variable étudiée,
- b) limiter à 3 ou 4 au plus le nombre de facteurs.

Ces conditions acquises, la méthode s'applique sans qu'il soit le moins du monde nécessaire de donner une forme analytique aux diverses liaisons ; la souplesse d'adaptation est de ce fait très grande ; ceci est indispensable puisque la simplification du choix des variables ne permet plus d'espérer linéariser les liaisons comme dans la méthode précédente (cette recherche de la variable linéarisant une liaison est parfois longue et les calculs d'essais exigent l'emploi de l'ordinateur).

Malheureusement, cette souplesse est aussi le point faible de la méthode : laisser libre le choix du tracé de la courbe de régression revient à se donner un nombre de degrés de liberté infini.

Ceci est très critiquable et en toute rigueur la méthode des régressions multiples linéaires doit être préférée. Convenant que ce livre développe seulement des exercices réalisables "à la main", sans ordinateur, on peut tolérer l'usage de la méthode des résidus à condition que les courbes de régression tracées n'adoptent pas des tracés trop complexes (recherche de la ligne droite ou courbe croissante type parabole... etc....)

Le déroulement de la méthode est exposé sur un exemple classique, celui du débit moyen mensuel conditionné par les précipitations du mois et des mois antérieurs ; ces liaisons peuvent être par exemple de la forme suivante :

$$Q_i = f_i (P_i, P_{i-1}, \dots) + f_{i-1} (P_{i-1}, P_{i-2}) + f_{i-2} (P_{i-2}, P_{i-3}, \dots) \dots \quad (12)$$

En dehors de la simple hauteur moyenne  $P_i$  des précipitations du mois  $i$ , on peut supposer que la répartition de ces précipitations dans l'espace et dans le mois sont également facteurs.

Dans la méthode des résidus, on fait un choix des principaux facteurs, les autres étant négligés.

Supposons, pour simplifier, que les polynômes de l'équation (12) soient représentés par les variables  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$  ; l'équation est alors de la forme :

$$Q_i = f(X_1) + f(X_2) + f(X_3) + \Delta Q \quad (13)$$

$\Delta Q$  est la déviation résiduelle qui peut être due en totalité ou en partie à :

- la négligence des autres facteurs,
- des erreurs de mesures éventuelles,
- des écarts aléatoires.

L'application de la méthode est satisfaisante quand  $\Delta Q$  est de faible importance devant toutes les valeurs de  $Q_i$ . On procède pratiquement de la manière suivante :

- a) sur un premier graphique, on porte les couples de points  $Q_i$ ,  $X_{1i}$  et l'on trace une courbe de liaison minimisant les écarts absolus, en tenant compte de l'influence de  $X_2$ .
- b) les écarts à cette courbe  $Q_i - f(X_{1i})$  sont appelés  $\Delta_1 Q$  et portés sur un second graphique en face de  $f(X_2)$  ; après tracé d'une courbe il subsiste des écarts  $\Delta_2 Q = \Delta_1 Q - f(X_2)$ .
- c) les écarts  $\Delta_2 Q$  sont portés sur un troisième graphique en face de  $f(X_3)$  ; les écarts résiduels représentent  $\Delta Q$  de l'équation (13).

Toutes ces courbes représentent les premières approximations des liaisons.

On admet que la plus forte part de  $\Delta Q$  provient des erreurs de tracé de ces premières courbes et l'on procède à une seconde approximation :

- a) report sur le 1er graphique des écarts  $\Delta Q$  à partir de la courbe  $Q_i = f(X_1)$  c'est-à-dire remplacement des points  $Q_i, X_{1i}$  par les points  $[f(X_1) + \Delta Q], X_{1i}$  ; tracé d'une nouvelle courbe par rapport à laquelle la somme des écarts absolus a dû diminuer fortement vis-à-vis du 1er tracé.
- b) les écarts  $\Delta'_1 Q$  à cette nouvelle courbe sont reportés sur la seconde à partir de celle-ci... etc...

On se contente généralement de 2 approximations (3 au plus) : les écarts aux courbes sont alors stabilisés. On possède en définitive un groupe de 3 courbes, en lesquelles l'équation (13) se décompose :

$$Q_i = f(X_1) + \Delta'_1 Q$$

$$\Delta'_1 Q = f(X_2) + \Delta'_2 Q$$

$$\Delta'_2 Q = f(X_3) + \Delta' Q$$

Les notations sont celles de la seconde approximation, en supposant qu'elle ait été la dernière.

La connaissance des facteurs  $X_1, X_2, X_3$  sur une période  $n > k$ ,  $k$  étant la période d'observation de  $Q_i$ , permet l'extension de la série des débits ; sachant pour une année  $i$  des valeurs  $X_{1i}, X_{2i}$  et  $X_{3i}$ , on tire des 3 courbes les valeurs correspondantes  $Q_i, \Delta'_{1i} Q, \Delta'_{2i} Q$  et la valeur résultante du débit est :

$$Q_i + \Delta'_{1i} Q + \Delta'_{2i} Q$$

En opérant ainsi pour chaque année de la période  $(n - k)$ , on peut estimer les années non observées en  $Q$  et en les ajoutant aux  $k$  valeurs observées constituer un échantillon de  $n$  valeurs de  $Q$ . Le traitement statistique de  $Q$  est soumis aux mêmes restrictions que celles énoncées dans le paragraphe précédent (exemple du SALGADO à ICÔ - § 3.3).

Le graphe 5 montre la mise en oeuvre de la méthode des résidus, avec 4 variables, dont 3 facteurs expliquant la variable  $Q$  ; on suit l'évolution des résidus sur le point 6 jusqu'à la 2ème approximation qui conduit à un changement de tracé de la courbe uniquement pour le 1er graphique, les tracés de la 2ème approximation pour les 2e et 3e facteurs restant tout de suite stables.

On remarque que le 1er tracé du 1er graphe tient compte de l'influence à venir du 2ème facteur (forte sur les points 5 et 6) ce qui permet de ne pas avoir de divergences de points et de minimiser rapidement les écarts résiduels.

En pratique, le plus difficile est de trouver les facteurs et leur ordre d'intervention ; ceci ne se fait pas sans tâtonnements graphiques.

Il faut ensuite avoir présent à l'esprit le sens le plus vraisemblable de l'effet d'un facteur pour tolérer les tracés de courbes en harmonie avec cet effet ; ceci est très important car certains points aberrants s'ils ne sont pas écartés pourraient conduire à déformer les tracés et à donner une signification physique absurde au phénomène qu'ils représentent. On ne doit pas oublier également les tendances des tracés aux extrémités de l'intervalle d'observation, afin que l'utilisation éventuelle d'une extrapolation de ces tracés ne conduise pas également à une absurdité physique.

La facilité et la souplesse d'emploi de la méthode des résidus ont un revers de médaille : il est indispensable que l'opérateur possède une forte expérience et un bon flair pour saisir dans les liaisons ce qui est possible ou ne l'est pas dans le comportement hydropluviométrique du milieu étudié.

La méthode des résidus fait l'objet du thème d'application de l'exercice dépendant de ce chapitre.

Pour faciliter cette application, on donne simplement ici deux graphiques (n° 6 et 7) correspondant à la reconstitution du débit moyen mensuel d'Avril pour le Rio SAIGADO à ICÓ (déjà cité) à partir de 2 facteurs :

- a) l'indice pluviométrique d'Avril, facteur principal,
- b) l'indice pluviométrique de Mars, facteur secondaire.

Ces indices pluviométriques ont le même mode de calcul que l'indice IP annuel présenté en application du paragraphe 3.3 (corrélation non-linéaire entre 2 variables non normales).

L'ajustement n'a nécessité qu'une seule approximation pour que le résultat soit satisfaisant. Le cas est particulièrement simple puisque les facteurs sont indépendants (pas d'effet itératif) mais la formule de l'indice pluviométrique cache la complexité des liaisons.

L'utilisation des 2 courbes est la suivante : soit pour une année donnée les indices suivants :

- IP Avril = 600 mm,
- IP Mars = 1 400 mm.

On tire du graphique 5 (IP Avril) :  $Q = 145 \text{ m}^3/\text{s}$

On tire du graphique 6 (IP Mars) :  $\Delta Q = 17 \text{ m}^3/\text{s}$

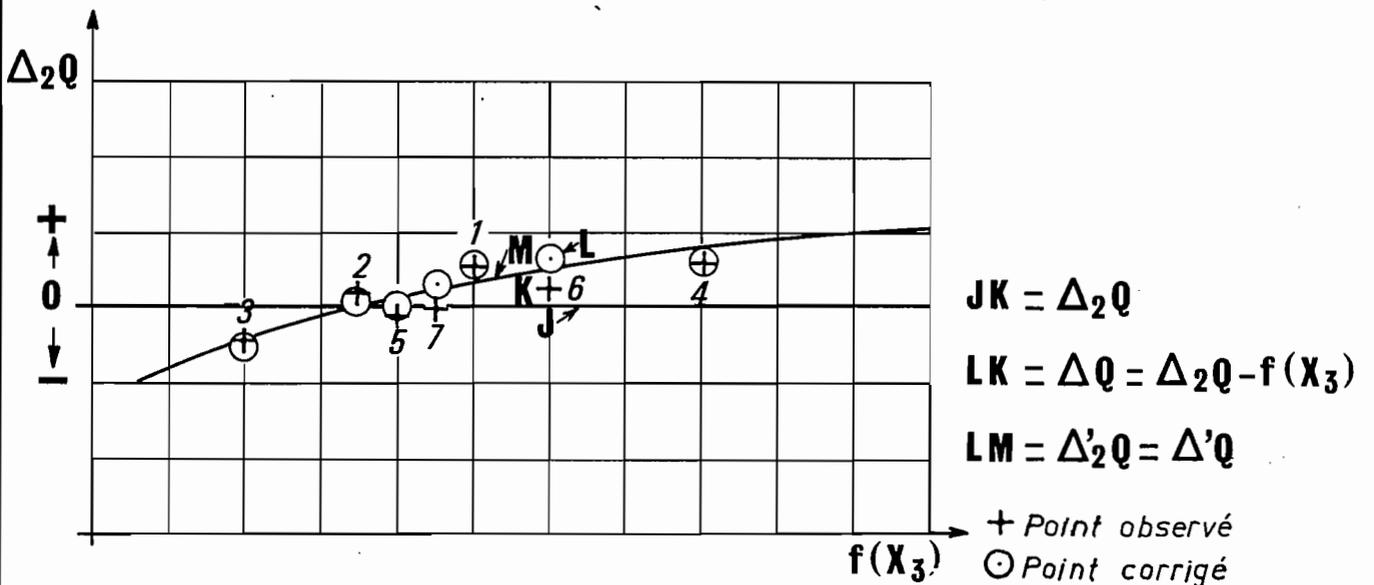
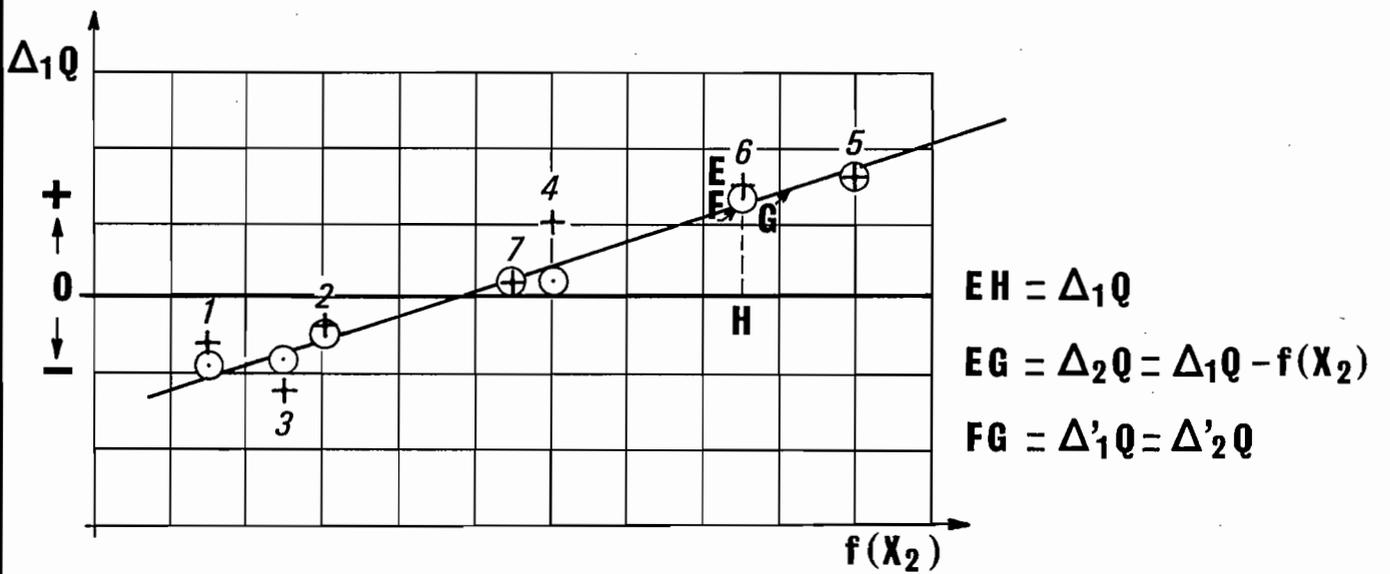
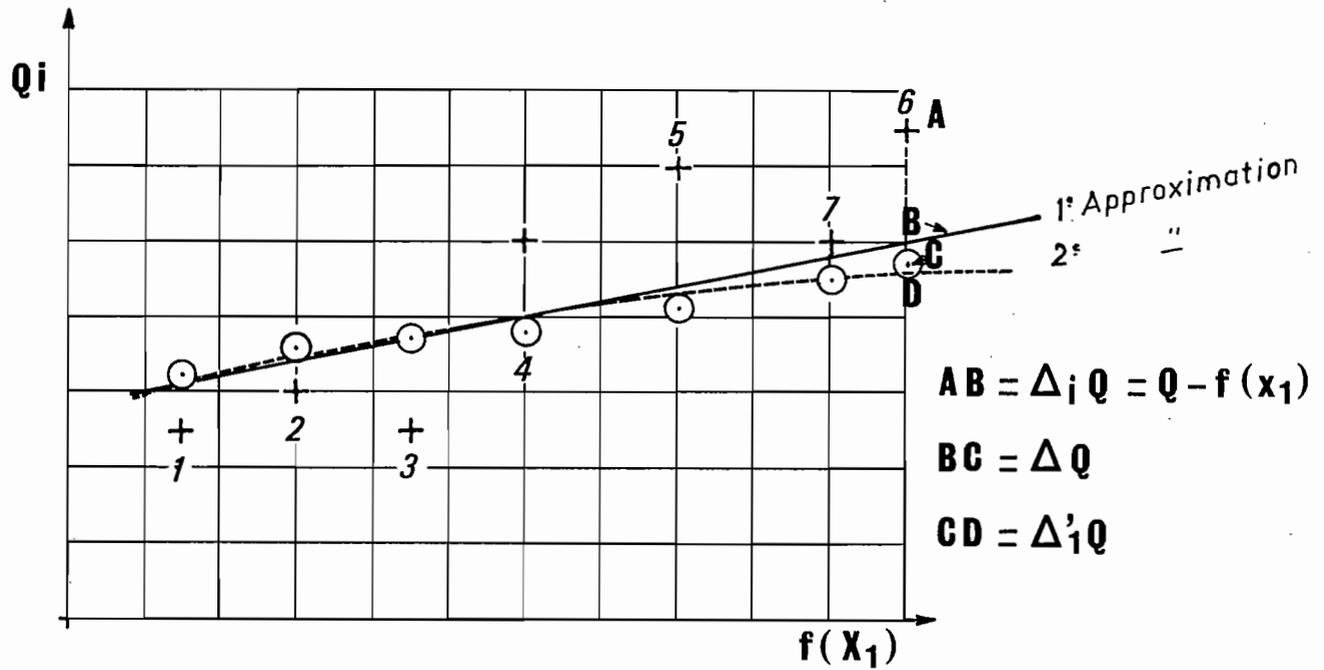
En conclusion, le débit d'Avril  $Q_{AV} = 145 + 17 = 162 \text{ m}^3/\text{s}$ .

A l'aide de ces 2 courbes, il a été procédé à la reconstitution des débits mensuels non observés de la période 1913-56. Ce travail réalisé pour les 12 mois de l'année conduit à une nouvelle série de 52 modules qui est évidemment plus fine que celle déduite directement de la corrélation hydropluviométrique annuelle. Les 2 séries sont très voisines : moyennes de 20,8 et 22,2, écart-type de 24,5 et 28,4 (en  $\text{m}^3/\text{s}$ ). La droite de régression entre les 2 séries a pour équation :

$$S_{AN} = 1,089 S_M - 1,593 \text{ avec } r = 0,938.$$

ce qui prouve l'existence d'une légère déviation systématique de  $S_{AN}$  par rapport à  $S_M$ , déviation d'ailleurs négligeable en pratique.

# MISE EN OEUVRE DE LA MÉTHODE DES RÉSIDUS

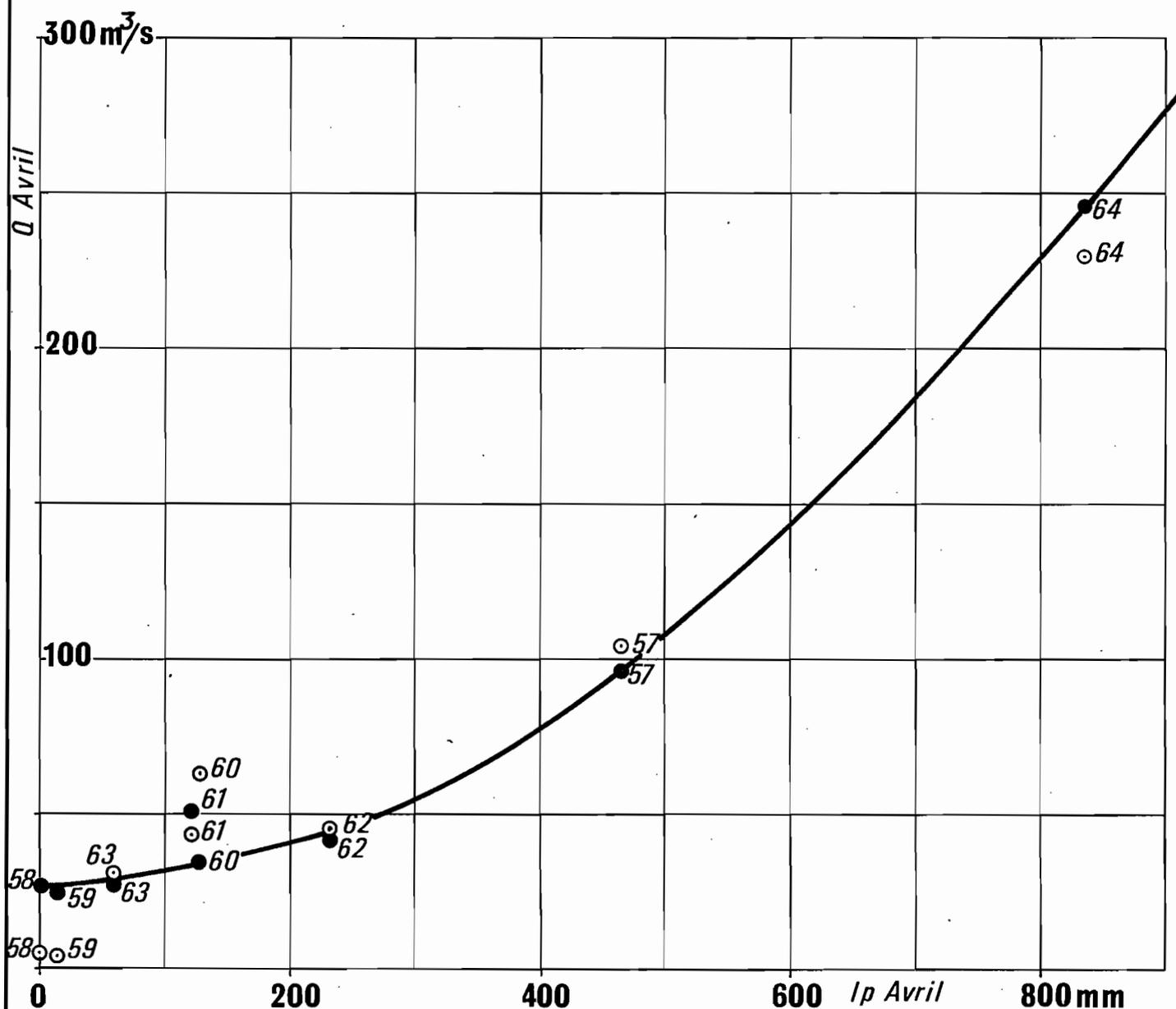


## RIO SALGADO A ICÓ

Facteur principal :  $I_p$  d'avril (correction par  $I_p$  de Mars)

## DÉBIT D'AVRIL

- Valeur observée prise en compte pour l'ajustement  
 ● Valeur corrigée " " " "

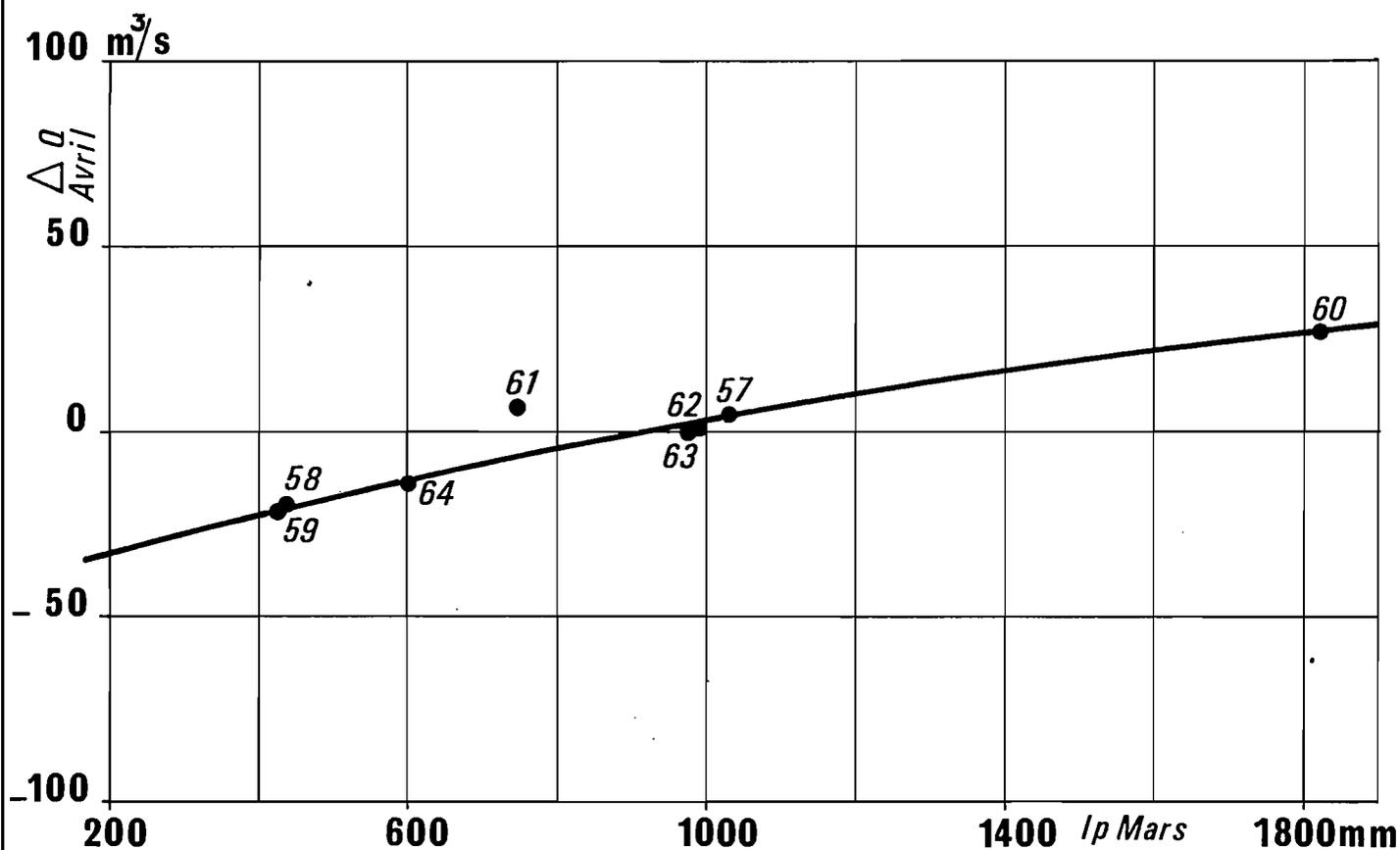


# RIO SALGADO A ICÓ

## Correction par $I_p$ de Mars

### DÉBIT D'AVRIL

● *Ecart correspondant aux valeurs observées après ajustement*



L'appréciation de l'efficacité de la méthode des résidus ne fait appel à aucun test consistant. On se contente de calculer la réduction obtenue entre les écarts absolus initiaux et finaux, c'est-à-dire dans le cas présenté plus haut à 2 approximations sur k valeurs :

écarts absolus initiaux  $\Sigma_1^k \Delta_1 Q$

écarts absolus finaux  $\Sigma_1^k \Delta' Q$

réduction relative des écarts : 
$$\frac{100 \times [\Sigma_1^k \Delta_1 Q - \Sigma_1^k \Delta' Q]}{\Sigma_1^k \Delta_1 Q}$$

Une réduction inférieure à 50 % est peu efficace.

Il est souhaitable et préférable de mettre en corrélation les valeurs observées et les valeurs calculées, le coefficient de corrélation étant significatif si les valeurs se distribuent à peu près normalement. Dans ce cas, un biaisage important (surestimation ou l'inverse) peut être mis en évidence et il est possible de l'atténuer en rectifiant le tracé des courbes de liaison.

### 3.5. - Conclusion sur la maximisation de l'information "débits"

Suivant l'échelle de temps adoptée pour l'étude des débits et la nature du régime local d'écoulement, la forme des liaisons de cause à effet (entre précipitation et écoulement) ou des liaisons de concomitance (écoulement de 2 cours d'eau voisins) est plus ou moins complexe et nécessite la prise en compte de variables conditionnelles en nombre plus ou moins grand.

Quel que soit le problème, il y a une méthode de résolution qui conduit à étendre, améliorer ou créer un nouvel échantillon de la variable étudiée. Mais il faut prendre garde à l'utilisation d'une corrélation entre k couples de valeurs ; elle n'est sûre qu'à l'intérieur de l'intervalle observé ; au-delà, toute extrapolation est hasardeuse. De ce point de vue, les méthodes graphiques permettent plus aisément d'éviter une extrapolation automatique que les méthodes numériques. Ceci n'est pas à négliger. La prise en compte du (ou des) facteur de l'écoulement ayant été observé sur la plus longue période connue permet d'affirmer que le nouvel échantillon est bien le résultat d'une maximisation de l'information. En pratique, l'extension se fait surtout dans le sens précipitation-écoulement.

Les échantillons de débits obtenus sont en partie fictifs, mais l'on sait estimer le gain réel en années de l'extension exactement si les variables sont normales, approximativement si elles sont dissymétriques : passage de k à n' années grâce à n années ( $k < n' < n$ ).

### 3.6 - Exercice d'application de la méthode des résidus à une corrélation hydropluviométrique complexe

L'exemple choisi est celui de la ZORN sous-affluent du RHIN par la MODER qui coule au Nord de Strasbourg d'ouest en est comme tous les cours d'eau qui descendent des Vosges, et dont le bassin repose principalement sur des grès perméables.

La station hydrométrique principale de la ZORN est située à WALTENHEIM à l'issue du cours moyen et d'un bassin drainé de 688 km<sup>2</sup>. On y possède des observations hydrométriques sur 16 années de 1949 à 1964, et l'on s'intéresse aux débits du mois de novembre qui sont généralement représentatifs de la fin de l'étiage, plus ou moins forts selon que l'été a été pluvieux et que les pluies d'automne sont précoces.

Après plusieurs essais, il a été retenu 2 facteurs conditionnels des débits de novembre :

- a) facteur principal : c'est une fonction des hauteurs totales mensuelles de précipitations au poste de ZINSWILLER, seul pluviomètre du réseau situé près du bassin, représentatif de sa pluviosité et observé sur une longue période. On a retenu une composition des pluies de novembre et d'octobre :  $P_{\text{oct}} \times P_{\text{nov}}$ .
- b) facteur secondaire : c'est également une fonction des précipitations relevées à ZINSWILLER qui doit représenter non plus la cause immédiate de l'écoulement de novembre, mais l'aptitude au ruissellement du bassin, c'est-à-dire l'état de saturation préalable.

On a retenu d'abord la somme des pluies comprises entre le 1er mai et le 30 novembre  $\Sigma P_5^{11}$  mais il a fallu corriger cet indice des fractions de pluies d'orage estivales ayant ruisselé et n'ayant donc pas participé à la réhumectation des terrains.

On a estimé ces fractions arbitrairement comme égales à l'excédent à 300 mm de  $\Sigma P_5^8$ , c'est-à-dire au total des pluies de mai à août.

Le facteur secondaire est donc le suivant :

$$\begin{aligned} \Sigma P_5^{11} & \quad \text{si} \quad \Sigma P_5^8 < 300 \text{ mm} \\ \Sigma P_9^{11} + 300 \text{ mm} & \quad \text{si} \quad \Sigma P_5^8 \geq 300 \text{ mm} \end{aligned}$$

On pourrait objecter que la fonction du facteur principal paraît bien complexe pour représenter les pluies de novembre et du mois précédent. Nous dirions alors que cette fonction "produit" s'est révélée aux essais plus efficace que la fonction "somme" ou que chaque terme pris successivement ; certes, sa signification physique n'est pas claire mais elle n'est pas absurde.

L'équation de la liaison débit-pluie est la suivante :

$$Q_{\text{nov}} = f(P_{\text{oct}} \cdot P_{\text{nov}}) + f(\Sigma P_9^{11} + \Sigma P_5^8) + \Delta Q$$

avec  $\Sigma P_5^8 \leq 300 \text{ mm}$

La résolution de cette équation s'obtient en 2 approximations sur 2 graphiques :

a)  $Q_{nov} = f (P_{oct} \cdot P_{nov}) + \Delta Q_1$

b)  $\Delta Q_1 = f (\Sigma P_9^{11} + \Sigma P_5^8) + \Delta Q_2$

et report de  $\Delta Q_2$  dans  $Q_{nov} \dots \Delta Q_1$  dans  $\Delta Q_1 \dots etc \dots$

Le tableau suivant fournit les données d'observation de la ZORN et les données élaborées des précipitations à ZINSWILLER.

Année: arrondi à 5 % près	$Q_{nov}$ en m3/s	$P_{oct} \cdot P_{nov}$ cm2	$\Sigma P_5^8$ mm	$\Sigma P_9^{11}$ mm
1949:	2,35	26,0	173	158
50:	5,70	27,5	335	255
51:	4,90	21,5	297	247
52:	13,25	253,0	153	434
53:	3,05	2,0	274	84
54:	3,05	25,0	282	213
55:	2,75	10,5	398	140
56:	4,60	64,5	317	233
57:	2,20	6,5	332	148
58:	3,60	34,0	461	162
59:	2,55	19,0	228	94
60:	7,80	160,5	437	306
61:	3,00	57,0	434	190
62:	1,80	4,5	219	140
63:	5,90	115,0	342	259
64:	2,65	85,5	162	270

On déterminera :

- a) le tracé définitif de chaque courbe de corrélation
- b) les valeurs calculées de  $Q_{nov}$  selon les courbes de corrélations pour comparaison aux valeurs observées, d'où l'on tirera une appréciation de la méthode d'après la réduction des écarts absolus.

Conseil pratique :

Avant de tracer la lère courbe, on peut porter en indice aux points du ler graphique, les valeurs du facteur secondaire et penser que la courbe  $Q_{nov} = f (P_{oct} \cdot P_{nov})$  correspond à un  $\Delta Q_1$  nul pour une valeur donnée de ce 2ème facteur.



## CHAPITRE IV - ANALYSE STATISTIQUE DES DEBITS ANNUELS (LOI NORMALE)

### 4.1 - ANALYSE CLASSIQUE ET ANALYSE STATISTIQUE

Avant d'étudier en détail le traitement statistique des débits, qui constitue la phase dynamique de l'analyse du régime hydrologique, il est bon de rappeler l'existence d'une phase de constat classique de cette analyse (représentation chronologique et monotone), phase qui s'opère dès l'élaboration des données d'observation avant toute opération de maximisation.

Méthodes et objectifs différencient l'analyse classique de l'analyse statistique.

Le décalage entre les deux phases de l'analyse se reflète dans la pratique. La représentation chronologique ou monotone peut être considérée comme une activité continue, selon une périodicité annuelle (révision des moyennes interannuelles, des séries classées...etc...), susceptible de s'inscrire après l'élaboration et la critique des données brutes ; elle est réalisée tantôt par le service gestionnaire du réseau, tantôt par l'hydrologue d'analyse (s'il est distinct de ce service). La phase d'analyse statistique, elle, ne peut être opérée qu'après un laps de temps suffisant pour que les séries observées atteignent des durées point trop courtes ; la variance des phénomènes pluies et débits est telle que, même en FRANCE pays tempéré, la longueur minimale d'un échantillon est bien de 10-à 15 ans si l'on ne veut pas aboutir à des résultats trop dispersés. La phase d'analyse statistique s'intègre généralement avec les travaux d'extension qui procèdent des mêmes méthodes ; elle est l'oeuvre du service d'analyse hydrologique. A l'encontre de la phase classique, on ne procède à une nouvelle analyse statistique que tous les 5 ans environ, au minimum, lorsque les longueurs d'échantillon ont été allongées de manière significative pour que la reprise de l'ajustement statistique puisse offrir un intérêt et avoir un sens (amélioration de la connaissance du régime).

Il est même en pratique assez rare que l'analyse statistique des données hydrométéorologiques soit effectuée systématiquement. Les services d'analyse hydrologique n'en ont ni le temps ni les moyens, car il s'agit là de travaux longs que seuls peuvent mettre en oeuvre des spécialistes. Une telle exploitation systématique peut constituer un objectif idéal : réalisation d'une monographie hydrologique complète d'un bassin et révision périodique. Aujourd'hui encore cet objectif n'est pas atteint et l'on procède au coup par coup : l'hydrologue répond aux questions des utilisateurs à l'occasion des projets d'aménagements impliquant usage ou consommation d'eau.

Il serait cependant très souhaitable que dans un pays donné, une grande région climatique ou un grand bassin hydrographique, l'analyse statistique des principales variables hydropluviométriques soit une opération systématique, ce qui permettrait, par l'examen simultané de nombreux échantillons, un choix plus sûr de la meilleure loi de distribution à leur appliquer et une homogénéité des résultats.

Les méthodes et résultats de l'analyse classique se trouvent bien décrits dans tous les bons manuels, il est inutile de revenir dessus qu'il s'agisse du graphique chronologique des débits journaliers, de la courbe annuelle des débits journaliers classés ou des courbes fréquentielles des débits moyens mensuels, par exemple.

L'analyse statistique des données hydrométéorologiques vise à définir les régimes à travers certaines valeurs caractéristiques et représentatives. L'analyse dégage ces valeurs. L'hydrologue procède alors à deux démarches, selon le cas :

- a) l'une, purement analytique bien souvent, pour répondre à une question précise d'un utilisateur ; par exemple quel sera l'apport moyen annuel à tel site de retenue projeté ?
- b) l'autre, à vocation plus synthétique, pour définir les régimes des pluies et des débits dans l'espace, selon une optique géographique de classification des régimes homogènes.

Les valeurs caractéristiques de régime sont de deux sortes : valeurs centrales et valeurs extrêmes.

Les valeurs centrales caractérisent l'abondance des régimes et leur irrégularité ; les couples les plus utilisés sont tantôt la Médiane  $M_e$  et l'intervalle interquartile  $I_Q$ , tantôt la moyenne  $\bar{M}$  et l'écart-type  $S$ .

Les valeurs extrêmes sont les quantiles qui explicitent la valeur que prend le débit pour une certaine probabilité choisie à l'avance.

Il nous a paru nécessaire dans ce chapitre de traiter en détail tout le cheminement de l'analyse statistique d'une certaine variable hydropluviométrique, bien que le thème soit limité à l'application de la loi normale à la connaissance des totaux annuels ; ainsi de nombreux développements d'ordre général sont-ils également valables pour les variables qui ne suivent pas des lois normales (cf. Chap. V, VI).

#### 4.2 - ESTIMATION D'UN DEBIT POUR UNE PROBABILITE DONNEE

L'ingénieur d'aménagement pose généralement la question suivante : quelle valeur prend le débit pour telle probabilité ? et avec quelle précision est estimée cette valeur ?

Quand il ne s'agit pas de la valeur moyenne du débit, le choix de la probabilité dépend de considérations économiques (durée de vie probable de l'aménagement, coût, risque de destruction...) ; la précision est indispensable car elle donne son vrai sens à l'estimation statistique et apporte une garantie supplémentaire au projeteur, puisqu'elle dépend également d'une probabilité de risque à choisir à priori selon des critères comparables.

Pour répondre à une telle question, on part généralement d'un échantillon de la variable "débit", définie par le problème, échantillon maximisé s'il y a lieu. Puis cet échantillon est soumis à un traitement statistique complet qui peut se scinder en 3 temps :

- a) analyse de l'échantillon et choix du type de loi.
- b) estimation des paramètres de la loi et vérification de son adéquation.
- c) estimation de la valeur de la variable pour la probabilité P retenue, et calcul de l'intervalle de confiance au seuil de risque  $\alpha$  choisi.

Un tel programme s'applique différemment selon que la variable choisie est ou non aléatoire. Le traitement des variables non aléatoires, c'est-à-dire qui sont liées au temps et dont les réalisations successives ne sont pas indépendantes, est long et compliqué ; il peut difficilement être mené à terme sans ordinateur et le calcul de l'intervalle de confiance est malaisé. En matière de débit, on ne rencontre de telles variables que dans les débits journaliers, c'est-à-dire lors de l'analyse des crues et des étiages. Au contraire, les valeurs moyennes sur des périodes assez longues sont des variables aléatoires ; ainsi en est-il des modules et des débits moyens mensuels pris séparément mois par mois. En toute rigueur, les modules de 2 années successives ne sont peut-être pas entièrement indépendants (effet retardé des réserves souterraines), mais l'hypothèse aléatoire n'entraîne pas d'erreur notable.

L'indépendance qui n'existe pas entre les débits moyens de 2 mois successifs est par contre totale entre les 2 réalisations annuelles successives d'un même mois, avril par exemple. Dans ce chapitre et le suivant, il n'est question que de modules et de débits mensuels, variables aléatoires dont le traitement est aisé.

#### 4.2.1 - Analyse de l'échantillon et choix du type de loi

Quelques notions élémentaires de statistiques doivent être rappelées avant d'aborder l'analyse de l'échantillon.

##### 4.2.1.1- Calcul de la fréquence expérimentale

En statistique, l'ensemble des observations de débits d'un cours d'eau durant une année constitue une épreuve ; de chaque épreuve on tire divers résultats dont le module annuel. L'ensemble de toutes les réalisations des résultats  $m$  (module) de toutes les épreuves possibles forme une population M : suite indéfinie hypothétique dont n'est jamais connue qu'une infime partie l'échantillon E observé des modules sur une période déterminée de  $N$  années.

La réalisation  $r$  dans la population  $M$  se produit  $n$  fois en  $N$  années ; on appelle :

fréquence expérimentale de  $r$  dans l'échantillon  $E$  :  $f = \frac{n}{N}$

probabilité de  $r$  dans la population  $M$  :

$$\text{prob} (r/M) = \lim. \frac{n}{N} \text{ quand } N \longrightarrow \infty$$

La réalisation est représentée par une valeur numérique de la variable aléatoire X, dont la fonction de répartition est :

$$F(x) = \text{Prob.} \quad [X \leq x]$$

la dérivée de F(x) est la densité de probabilité f(x) de la variable aléatoire, et l'on peut écrire :

$$\text{Prob} \quad [b \leq x \leq a] = F(a) - F(b) = \int_b^a f(x).dx$$

Ceci représente l'analogie existant entre courbe de densité de probabilité et polygone des fréquences, entre fréquence expérimentale et probabilité théorique.

Pour la pratique des calculs de la fréquence expérimentale, on parle tantôt de fréquence au dépassement :

$$F_1(x) = \int_x^{+\infty} f(x).dx$$

c'est-à-dire de la probabilité  $\text{Prob} \quad X \geq x$

tantôt de fréquence au non-dépassement  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x).dx$

La somme de ces fréquences  $F(x) + F_1(x)$  est évidemment égale à 1.

Or, si l'on calculait la fréquence expérimentale en appliquant simplement  $\frac{n}{N}$ , on arriverait à une somme supérieure à 1. On adopte donc la formule  $f = \frac{n - 1/2}{N}$  plus consistante que la formule  $f = \frac{n}{N+1}$  parfois utilisée et qui en diverge surtout pour les valeurs extrêmes.

On a dans ces formules :

n , après classement par ordre décroissant, le rang, compté à partir de 1, de la réalisation r,

N le nombre de réalisations de l'échantillon.

#### 4.2.1.2 - Caractéristiques de l'échantillon

Il ne saurait être question dans les calculs de toujours conserver la totalité des réalisations de la variable formant l'échantillon observé.

On peut caractériser cet échantillon par certaines variables centrales et de dispersion, déjà utilisées dans le chapitre III.

la moyenne  $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N}$

la variance  $s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N - 1} = \frac{1}{N - 1} [\sum x_i^2 - N \bar{x}^2]$  (8)

l'écart-type s étant la racine carrée de la variance, dont la seconde formulation est utilisée, plus commodément que la première, sur machine électromécanique.

L'échantillon ne donne qu'une image déformée de la population ses caractéristiques empiriques convergent vers celles de la population quand l'échantillon grandit ; cette déformation représente les erreurs d'échantillonnage.

Les caractéristiques empiriques sont des réalisations de variables aléatoires dont les lois de probabilité sont des distributions d'échantillonnage, plus ou moins dispersées autour des caractéristiques théoriques de la population :

espérance mathématique  $E(\bar{x}) = m$

variance théorique  $E(s^2) = \sigma^2$

Il est très important d'avoir présent à l'esprit le caractère provisoire et approximatif que comporte un échantillon vis-à-vis de la population infinie et de comprendre qu'en conséquence les résultats déduits de l'analyse statistique de cet échantillon sont plus ou moins précis.

Ceci peut être éclairé par des exemples pris dans des échantillons de longue durée en supposant que l'on ait connu que des fractions de ces échantillons.

Ainsi le module du RHIN à BALE pourrait-il avoir les moyennes empiriques suivantes calculées sur des échantillons de 20 ans :

1808-27	1 025 m <sup>3</sup> /s	1888-1907	990 m <sup>3</sup> /s
28-47	1 003 "	1908-27	1 058 "
48-67	971 "	28-47	1 024 "
68-87	971 "	41-60	978 "

qui oscillent toutes autour de la moyenne observée sur 153 ans : 1 005 m<sup>3</sup>/s laquelle n'est encore qu'une approximation de la vraie moyenne.

Dans quelles limites plausibles, peut varier une caractéristique empirique calculée sur l'échantillon observé, c'est-à-dire dans quelles limites autour de cette caractéristique empirique doit se situer la caractéristique théorique correspondante ? A cette question importante, il est répondu plus loin lors du calcul de l'intervalle de confiance.

#### 4.2.1.3 - Choix du type de loi

Echantillon classé, fréquence expérimentale, moyenne et variance empiriques calculées, il s'agit de trouver une loi de probabilité susceptible de s'ajuster de manière adéquate sur cet échantillon. De cette loi, caractéristiques théoriques estimées, il sera possible de répondre à toute question concernant toute éventuelle réalisation de la variable, et entre autres :

- de calculer l'estimation d'une valeur quelconque de la variable pour toute probabilité choisie,
- tirer au sort autant de réalisations de la variable que de besoin.

Le choix du type de loi susceptible de s'ajuster au mieux à l'échantillon s'effectue à l'aide de deux critères expérimentaux :

- a) dans une région climatique donnée, une variable hydropluviométrique déterminée suit généralement la même loi en tout site d'observations, d'où l'intérêt des études régionales systématiques et celui de la connaissance de toute étude antérieure.
- b) en l'absence d'information régionale, on fait un essai de report graphique des points observés sur papier à échelle gaussienne des abscisses, ce qui permet d'envisager une loi normale en une loi dissymétrique.

En effet, l'anamorphose d'échelle permet l'alignement des points suivant une loi normale, tandis que ceux suivant une loi dissymétrique se présenteraient selon une courbe à concavité tournée vers le haut (loi hypergaussienne) ou vers le bas (loi hypogaussienne).

Le choix doit également tenir compte de critères d'ordre statistique :

- c) selon le théorème central limite, une combinaison linéaire de  $N$  variables aléatoires est distribuée normalement, quand  $N$  tend vers l'infini, quelle que soit la loi propre de ces variables, si elles sont indépendantes et si leurs valeurs ne sont pas trop différentes,
- d) en dehors de la loi normale, on ne peut guère traiter les problèmes d'intervalle de confiance, de gain dans les extensions de série, de corrélations entre variables, sans difficulté et sans ordinateur.

Tout ceci appelle une conclusion : on essaye toujours d'ajuster une loi normale et parmi les lois dissymétriques, si nécessaire, on prend de préférence celles qui permettent un retour à la normalité par changement de variable : logarithme (loi de GALTON) ou racine  $n^{\text{ème}}$ .

Les variables, somme des variables, ont d'autant plus de chance d'être distribuées normalement que leurs composantes sont nombreuses et point trop différentes, c'est-à-dire que les régimes sont abondants.

En d'autres termes, la loi de probabilité ajustable à l'échantillon est d'autant plus près de la normalité que :

- a) le régime des débits est abondant,
- b) la variable concerne une longue échelle de temps.

Pratiquement le module d'un cours d'eau (comme celui d'une station pluviométrique) suit une loi normale quand le régime des précipitations régionales est abondant : région tempérée océanique et continentale, région tropicale et équatoriale. Ce module suit par contre une loi dissymétrique pour les régimes subdésertiques et désertiques, et l'on utilise alors tantôt une loi de GALTON, tantôt une loi GAMMA incomplète (cf. Chap. V, VI).

Pour bien montrer le processus à suivre dans l'analyse statistique, ce chapitre se poursuit parallèlement sur un plan théorique et sur un plan pratique, lequel consiste à présenter l'application théorique à un exemple. On a choisi ici le module de la ZORN à WALTENHEIM, rivière alsacienne déjà utilisée dans l'exercice du chapitre III. Le tableau n° 4 montre le calcul des caractéristiques de l'échantillon des modules de la ZORN de 1946 à 1967 (21 valeurs) et des fréquences expérimentales. Le report de ces valeurs observées sur le graphe 8 montre qu'un ajustement à une loi normale est conseillé.

La loi normale ou loi de GAUSS admet pour fonction de répartition :

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-1/2 u^2} \cdot du$$

avec  $u = \frac{x - \bar{x}}{s}$  variable réduite.

Cette seconde équation, sous la forme  $x = \bar{x} - su$  est celle de la droite dite de HENRI qui représente la courbe de GAUSS sur un papier à probabilité normale en abscisses.

La table de l'intégrale de GAUSS (tableau n° A en annexe) donne les valeurs de  $F(x)$  en fonction de celles de  $u$ .

#### 4.2.2 - Estimation des paramètres de la loi ajustée et test d'adéquation

Le choix d'une loi des probabilités étant arrêté, il faut estimer les paramètres de cette loi à partir de l'échantillon. Cette estimation, à laquelle l'on procède soit par la méthode du maximum de vraisemblance, soit par l'emploi des moments, donne des résultats qui sont évidemment entachés de l'erreur d'échantillonnage.

Les méthodes d'estimation sont du domaine de la statistique pure mais le caractère très particulier des échantillons de l'hydrologue impose à ce dernier un travail personnel de recherche des meilleurs estimateurs.

Il est démontré que la méthode du maximum de vraisemblance est la plus efficace, malheureusement à de rares exceptions près, son utilisation requiert un ordinateur. Aussi doit-on se contenter pour la plupart des lois d'estimer les paramètres par les moments, estimation consistante mais généralement non efficace.

L'estimateur recherché doit être sans distorsion, convergent vers la vraie valeur quand l'échantillon croît - et de faible variance.

On montre que les meilleurs estimateurs des paramètres de la loi normale sont la moyenne  $\bar{x}$  et la variance  $s^2$  calculées sur l'échantillon.

TABLEAU 4

ANALYSE DES MODULES DE LA ZORN à WALTENHEIM  
 CLASSEMENT DE L'ECHANTILLON ET CALCUL DES PARAMETRES EMPIRIQUES

Rang	Module (m <sup>3</sup> /s)	Année
1	6,93	1965-66
2	6,35	1952-53
3	5,99	1951-52
4	5,88	1966-67
5	5,87	1961-62
6	5,26	1954-55
7	5,19	1958-59
8	4,86	1950-51
9	4,86	1956-57
10	4,85	1955-56
11	4,83	1957-58
12	4,70	1947-48
13	4,56	1960-61
14	4,54	1953-54
15	3,93	1946-47
16	3,61	1964-65
17	3,37	1948-49
18	2,99	1963-64
19	2,90	1959-60
20	2,63	1949-50
21	2,62	1962-63

$$\text{Moyenne } \bar{Q} = \frac{\Sigma Q}{21} = \frac{96,72}{21} = 4,60 \text{ m}^3/\text{s}$$

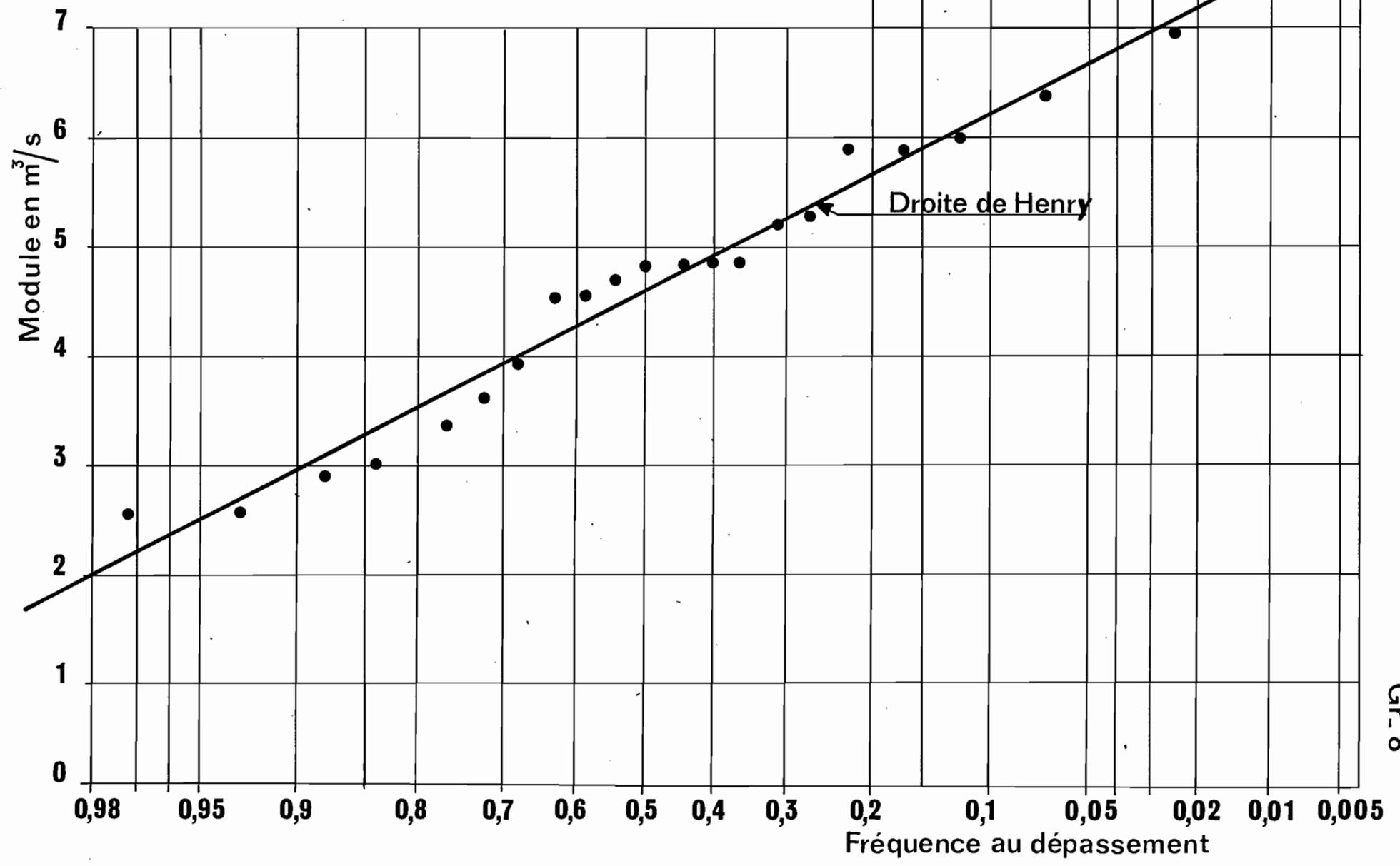
$$\text{Variance } s^2 = \frac{1}{20} \left[ \Sigma Q^2 - 21 \bar{Q}^2 \right] = 1,602$$

$$\text{Ecart-type } s = \underline{1,266}$$

$$\text{Coefficient de variation : } \frac{s}{\bar{Q}} = 0,275$$

La Zorn à Waltenheim

### Distribution normale des modules annuels



En exagérant légèrement, on pourrait dire que sur un échantillon de taille réduite (c'est toujours le cas en hydrologie, où les séries dépassent rarement quelques dizaines d'années) doté d'une variance importante, une loi de probabilité est toujours ajustable et que seule la multiplication de la taille, par 2, 3 ou plus, permettrait de vérifier l'adéquation de cet ajustement.

Or, d'échantillons de 10, 20 ou 30 ans, on essaye de tirer des conclusions centenaires et millénaires, bien qu'en pratique la prudence exige que l'on ne recherche pas un quantile dont la probabilité d'apparition corresponde à une période de retour supérieure au triple de la longueur de l'échantillon. L'extrapolation est d'autant plus hasardeuse que les diverses lois divergent généralement entre elles pour les faibles fréquences, alors qu'il est difficile de choisir la plus adéquate au vu d'ajustements sur les échantillons réduits possédés, lesquels sont peu riches en valeurs rares de la variable.

On ne peut donc pas exclure l'hypothèse selon laquelle la loi choisie n'est pas celle qui représente véritablement la population une telle erreur est une erreur d'adéquation. Cette erreur s'ajoute à l'erreur d'échantillonnage pour expliquer les divergences entre fréquences expérimentales et probabilités théoriques tirées de la loi ajustée.

On juge généralement l'adéquation d'une loi à un échantillon par le test du  $\chi^2$ , variable aléatoire dont la distribution a été étudiée par PEARSON.

Pour les échantillons réduits des variables hydrologiques, les règles d'emploi sont les suivantes :

- a) le découpage en classes doit introduire des classes d'égale probabilité théorique et d'un effectif théorique d'au moins 5 valeurs par classe
- b) La probabilité du  $\chi^2$  sur un échantillon de population inconnue représente l'adéquation, et a donc 50 % de chances d'être comprise entre 0,25 et 0,75 comme 90 % de l'être entre 0,05 et 0,95...

En pratique, on procède comme suit :

- découpage en k classes, suivant la règle a)

$$\text{- calcul de } \chi^2 = \sum_1^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} \quad (14)$$

avec  $n_i$  effectif observé de la classe i et  $np_i$  effectif théorique de cette même classe.

- calcul du nombre V de degrés de liberté, nombre égal à celui des classes diminué du nombre de liaisons entre échantillon et loi ajustée :

$$1 \text{ pour l'égalité des effectifs } \sum n_i = \sum np_i$$

1 par paramètre calculé de la loi.

Une table (tableau n° B en annexe) donne la valeur du  $\chi^2$  ayant une certaine probabilité d'être dépassée.

- l'adéquation est admise si  $P(\chi^2) \geq \alpha$  seuil du risque d'adéquation choisi généralement égal à 0,05 ; elle est rejetée si  $P(\chi^2) \leq 0,05$  d'autres valeurs des seuils peuvent être choisies ; on ne rejette parfois l'adéquation qu'en dessous du seuil de 0,01.
- l'obtention d'une forte probabilité, supérieure à 0,75 par exemple, doit inciter à revoir l'ensemble des calculs d'ajustement et de test.
- la signification du seuil 0,05 est assez complexe et peut se résumer ainsi :
  - a) si  $P(\chi^2) > 0,05$  on a 95 % de chances de voir se vérifier l'hypothèse d'adéquation mais également 5 % de chances de se tromper, c'est le risque de 1<sup>o</sup> espèce.
  - b) si  $P(\chi^2) < 0,05$ , on rejette l'adéquation avec 95 % de chances d'avoir raison mais également avec 5 % de chances de se tromper, c'est le risque de 2<sup>ème</sup> espèce.

Le choix du seuil n'est pas figé à 0,05. Pour des échantillons grands, on peut être plus sévères et aller par exemple jusqu'à 0,25.

De toute manière, le test du  $\chi^2$  n'est ni assez puissant, ni assez consistant même en appliquant la règle des classes d'égale probabilité théorique d'au moins 5 valeurs. En effet, il offre deux défauts importants :

- malgré la règle précédente, l'opérateur garde une certaine liberté dans le choix du nombre de classes et chaque découpage risque de donner des valeurs de  $\chi^2$  fort différentes ; un moindre mal serait de les calculer toutes et de ne garder que la valeur minimale
- le découpage en classes conduit à négliger les extrémités du rangement qui sont justement les plus importantes à la fois pour l'utilisation pratique et pour l'adéquation, et à limiter le test aux valeurs centrales ce qui est très restrictif.

Faute de meilleur test actuellement, on conserve celui du  $\chi^2$  mais il ne faut pas en méconnaître les limites.

Un exemple de calcul du  $\chi^2$  pour les modules de la ZORN à WALTENHEIM est fourni ci-après.

$$\text{Nombre de degrés de liberté : } v = k - p - 1 = 1$$

$$k = 4 \text{ classes}$$

$$p = 2 \text{ (moyenne et variance)}$$

$$P(\chi^2) = P(1,6668) ; \text{ à 1 degré de liberté : } P(1,67) > 0,10$$

L'adéquation est satisfaisante.

n° de classe (1)	limites de classes (en m3/s)	Effectif théorique $n_{pi}$	Effectif observé $n_i$	$(n_i - n_{pi})^2$	$\frac{(n_i - n_{pi})^2}{n_{pi}}$
1	$\leq 3,75$	5,25	6	0,5625	0,1071
2	3,75 - 4,60	5,25	3	5,0625	0,9644
3	4,60 - 5,45	5,25	7	3,0625	0,5834
4	$\geq 5,45$	5,25	5	0,0625	0,0119
TOTAL		21	21		1,6668

(1) Classement effectué sur l'échantillon classé.

On notera la méthode simple de calcul des limites de classes théoriques. Chacune a pour fréquence au dépassement  $\sum_{1}^c n_{pi}/N$ , c étant le numéro de la classe ; par exemple 5,25/21 pour la classe 1, 10,50/21 pour la classe 2, etc...

Cette fréquence introduite dans la table de Gauss donne la valeur correspondante  $u_c$  de la variable réduite. On peut alors calculer  $x_c$  limite de classe c avec l'équation de HENRI :  $x_c = \bar{x} - s.u_c$

#### 4.2.3 - Calcul de l'intervalle de confiance : signification des paramètres estimés et des quantiles

L'intervalle de confiance permet d'explicitier l'importance des erreurs d'échantillonnage. Son calcul et son choix découlent de l'étude des distributions d'échantillonnage, c'est-à-dire des lois auxquelles sont soumises les caractéristiques empiriques déduites des échantillons.

Ces caractéristiques empiriques sont fonction des variables aléatoires de l'échantillon et les erreurs d'échantillonnage qu'elles introduisent sont également dues au hasard, ce qui permet de déduire la dispersion des caractéristiques empiriques des propriétés de la loi ajustée sur l'échantillon.

Sous certaines hypothèses peu restrictives, la moyenne empirique  $\hat{x}$  d'un échantillon de longueur N d'une variable normale est également une variable normale :

de moyenne égale à  $\hat{x}$

de variance égale à  $\frac{s^2}{N}$

équations valables pour  $N \geq 30$

Pour un échantillon réduit,  $N < 30$ , la moyenne empirique sur une loi de STUDENT à  $N - 1$  degrés de liberté, loi dissymétrique qui se confond avec une loi de GAUSS pour  $N > 30$ .

On se rend compte immédiatement des deux propriétés de l'intervalle de confiance, intervalle dans lequel, compte tenu de sa distribution d'échantillonnage, on a  $\alpha \%$  de chance de trouver la vraie valeur du paramètre connu sur son estimation empirique :

- l'amplitude est d'autant plus grande que le degré de confiance  $\alpha$  choisi est grand,
- l'amplitude est d'autant plus grande que la longueur  $N$  de l'échantillon est réduite.

Selon les mêmes règles, la variance empirique  $s^2$  :

- pour un petit échantillon, suit une loi de  $\chi^2$  à  $N - 1$  degrés de liberté
- pour un grand échantillon, suit une loi normale de moyenne  $s^2$  et d'écart-type  $s\sqrt{\frac{2}{N}}$  ; la variance de l'écart-type empirique  $s$  étant  $\frac{s^2}{2N}$  et sa moyenne  $s$ . Ceci provient également du fait qu'au-delà de  $N = 50$ , la loi de  $\chi^2$  se confond avec la loi normale.

Les intervalles de confiance correspondant aux moyennes et variances empiriques donnent une signification à ces paramètres calculés.

Pour un degré de confiance  $\alpha$ , on a les intervalles suivants :

- grand échantillon ( $N > 30$  pour la moyenne et  $N > 50$  pour la variance)

$$\hat{x} \pm \frac{t_{1-\alpha}}{2} \cdot \frac{s}{\sqrt{N}} \text{ pour la moyenne}$$

$$s \pm \frac{t_{1-\alpha}}{2} \cdot \frac{s}{\sqrt{2N}} \text{ pour l'écart-type}$$

$t$  étant la variable réduite de la loi de GAUSS.

- petit échantillon ( $N < 30$  ou  $50$ )

$$\hat{x} \pm \frac{t_{1-\alpha}}{2} \cdot \frac{s}{\sqrt{N}} \text{ pour la moyenne}$$

$t$  variable de STUDENT pour  $N - 1$  degrés de liberté.

$$\frac{n s^2}{x_1^2} < \sigma^2 < \frac{n s^2}{x_2^2} \quad \text{pour la variance}$$

$$\text{avec } P \left[ \chi^2 \leq \chi_1^2 \right] = P \left[ \chi^2 \leq \chi_2^2 \right] = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

valeurs extraites d'une table de  $\chi^2$  à  $N - 1$  degrés de liberté.

Le choix du degré de confiance  $\alpha$  est libre et dépend de considérations économiques concernant le risque que le projeteur accepte. Le degré est choisi d'autant plus élevé que l'on recherche la sécurité ou que l'on refuse le risque trop grand.

Les valeurs communément admises sont :

95 à 90 % pour les problèmes importants à fort taux de sécurité ou pour des variables bien connues et peu dispersées,

80 % pour des variables assez dispersées,

50 % pour des variables très dispersées.

La signification du seuil  $\alpha$  est la même que celle qui est attribuée au seuil de validité du test du  $\chi^2$ . Dans un intervalle de confiance à 95 %, on a autant de chance de trouver la vraie valeur du paramètre estimé, mais il reste à celui-ci 5 % de chance de se trouver hors de l'intervalle sans que les hypothèses (homogénéité de la variable, validité de la loi ajustée) soient infirmées.

L'application numérique au cas de la ZORN est présentée maintenant, en choisissant un intervalle de confiance à 95 %.

ZORN à WALTENHEIM

- Signification des paramètres. Les modules suivent une loi normale.

Echantillon  $N = 21$  ( $< 30$ ) : la moyenne suit une loi de STUDENT à 20 degrés de liberté.

On a l'intervalle IC 95 :

$$\hat{Q} \pm t_{\frac{1-\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{N}} = 4,60 \pm 2,086 \cdot \frac{1,266}{\sqrt{21}}$$

avec  $t_{0,05}$  à  $V = 20$  dans table de STUDENT (tableau C en annexe)

Estimation de la moyenne :  $4,02 \leq \bar{Q} \leq 5,18$  (IC 95 %)

Après 21 ans d'observations, le module de la ZORN est donc connu, à 5 % de risque d'erreur près, avec une précision de  $\pm 0,58$  m3/s soit en valeur relative de  $\pm 12,5$  %.

La variance suit une loi de  $\chi^2$  à 20 d.d.l.

$$\text{On a : } P(\chi_1^2) = 0,025 \quad \chi_1^2 = 34,17$$

$$P(\chi_2^2) = 0,975 \quad \chi_2^2 = 9,59$$

valeurs tirées de la table de distribution du  $\chi^2$ .

$$\text{Estimation de la variance } \frac{n s^2}{\chi_1^2} \leq \hat{\sigma}^2 \leq \frac{n s^2}{\chi_2^2}$$

$$\text{avec } n = 21 \text{ et } s^2 = 1,602$$

$$\text{d'où : } 0,984 \leq \hat{\sigma}^2 \leq 3,515 \quad (\text{IC } 95 \%)$$

$$\text{et pour l'écart-type : } 0,314 \leq \hat{\sigma} \leq 1,875 \quad (\text{IC } 95 \%).$$

La précision relative sur l'écart-type est beaucoup moins bonne que pour la moyenne puisqu'elle se situe entre 50 et 70 %, l'intervalle étant dissymétrique.

On voit bien ainsi qu'une série de 20 ans permet seulement de se faire une idée de la moyenne sans que l'on puisse vraiment connaître sa variabilité.

#### 4.2.4. - Cas des échantillons tirés de corrélations d'extension

Les développements des paragraphes 4.2.1 à 4.2.3 s'appliquent exactement à des échantillons effectivement observés dans leur ensemble.

Dans les chapitres 2 et 3, il a été procédé de diverses manières à l'extension d'échantillons de longueur réduite. Au stade actuellement atteint, le traitement statistique de tels échantillons appelle les remarques suivantes :

- a) si l'échantillon est lié par une régression linéaire à un seul facteur conditionnel représenté par une variable normale, cet échantillon suit une loi normale dont les paramètres se déduisent directement de ceux du facteur conditionnel à l'aide des équations de régression. C'est le cas traité du module pluviométrique de GUEWILLER déduit de celui de ST-GILLES, dans l'exercice II.
- b) si l'échantillon provient d'une liaison non linéaire ou de plusieurs facteurs conditionnels - corrélation multiple - il y a lieu de procéder comme pour un échantillon totalement observé jusqu'au test d'adéquation, la divergence ne s'opère qu'au point suivant (intervalle de confiance). C'est le cas de l'exemple du SALGADO à ICO (Cf. 3.4) dont une partie de l'échantillon est reconstitué par la méthode des résidus.

De ces diverses considérations sur le calcul et les propriétés de l'intervalle de confiance, on comprend l'intérêt de toute extension de série ; par allongement de la durée d'observation, on réduit l'intervalle de confiance pour l'estimation des paramètres de la loi donc on améliore la connaissance de ces paramètres, de la loi, de l'échantillon.

Mais le calcul de l'intervalle de confiance est seulement possible avec rigueur lorsque l'extension résulte d'une corrélation linéaire entre deux variables.

Pour des échantillons déduits de corrélations d'extension, la longueur à prendre en compte n'est pas N années mais simplement  $N'$  ( $N > N' > k$ ), longueur estimée dans la recherche du gain apporté par la corrélation (§ 2.3., équation (5) de l'efficacité relative E).

L'exemple de GUEBWILLER dans l'exercice II illustre très bien cette question.

#### 4.2.5. - Calcul de quantiles et signification du résultat

Ainsi s'achève la question posée au début du chapitre : quel est le débit de probabilité  $p$  et avec quelle précision est-il estimé ?

Le débit de probabilité  $p$  est donné par l'équation de la fonction de répartition de la loi considérée dans laquelle l'inconnue est la variable pour cette probabilité, c'est-à-dire  $x_p$  ou  $u_p$  variable réduite.

Pour la loi de GAUSS, on a  $u_p = \frac{x_p - \bar{x}}{s}$

d'où :  $x_p = \bar{x} + s u_p$

On calcule l'intervalle de confiance d'un tel quantile  $x_p$  en admettant que sa variance est la somme des variances de la moyenne et du produit  $s u_p$ , donc de  $s$ . Cette supposition d'indépendance des variances de la moyenne et de l'écart-type n'est pas rigoureuse, mais peut être adoptée sans que l'erreur soit trop importante.

Si  $s_{xp}^2$  est la variance du quantile  $x_p$ , on a :

$$s_{xp}^2 = \frac{s^2}{N} + \frac{s^2}{2N} \cdot u_p^2$$

$$s_{xp}^2 = \frac{s^2}{N} \left( 1 + \frac{u_p^2}{2} \right)$$

l'écart-type correspondant est  $s_{xp} = \frac{s}{\sqrt{2N}} \sqrt{u_p^2 + 2}$  (15)

qu'il suffit de multiplier par  $t \frac{1-\alpha}{2}$  pour avoir l'intervalle de confiance à  $\alpha$  %.

Ceci n'est théoriquement pas applicable si l'échantillon est petit ( $N < 30$ ), ce qui est le cas de l'exemple de la ZORN. Le calcul présenté maintenant du module décennal faible de la ZORN et de sa précision est donc simplement indicatif de la marche à suivre, mais n'est pas correct.

- Calcul du module décennal faible :

$$Q_{0,90} = \bar{Q} + s \cdot U_{0,90}$$

La table de GAUSS donne :  $U_{0,90} = -1,28$

$$Q_{0,90} = 4,60 - 1,28 \cdot 1,266 = 2,98 \text{ m}^3/\text{s}$$

L'intervalle de confiance à 95 % est de  $\pm t_{0,025} \cdot \frac{s}{\sqrt{2,21}} \sqrt{1,28^2 + 2}$

Le module décennal faible est de :  $2,23 \leq Q_{0,90} \leq 3,73$  (IC 95 %).

#### 4.3. - EXERCICE D'APPLICATION D'UNE LOI NORMALE A UN ECHANTILLON DE MODULES

L'exercice a pour but de mettre en pratique l'ensemble de l'analyse statistique depuis le calcul des caractéristiques de l'échantillon jusqu'à l'estimation d'un quantile d'une certaine probabilité et sa signification.

L'exemple choisi est celui de l'AVEYRON à RODEZ, cours d'eau doté d'une station du réseau de la 5<sup>e</sup> Circonscription Electrique et dont les débits sont connus sur la période 1921 - 1965 soit 45 ans.

On demande de :

- a) déterminer à partir de l'échantillon observé des modules de l'AVEYRON à RODEZ, les caractéristiques empiriques de la distribution : moyenne et variance.
- b) montrer que cette distribution est normale : ajustement et test d'adéquation de  $\chi^2$ .
- c) préciser la signification des paramètres empiriques pour des intervalles de confiance à 90 % et à 95 %.
- d) estimer le module décennal faible et son intervalle de confiance à 95 %. Indiquer la période de retour moyenne du module de 1949.

Le tracé du graphique d'ajustement comportant tous les points observés et la droite de HENRI doit être fait sur papier à abscisse graduée en probabilité selon la loi de GAUSS. En l'absence de papier spécial, on peut utiliser un papier millimétré ordinaire à condition d'utiliser comme échelle de graduation des abscisses la variable réduite  $u$  de GAUSS, qui figure dans le tableau A ; on aura ainsi toujours un tracé linéaire de l'ajustement gaussique.

Il est précisé que la période de retour T encore appelée récurrence est l'inverse de la probabilité P :  $T = \frac{1}{P}$ , P étant assimilée à la fréquence au dépassement ou à son complément à 1 quand elle dépasse 0,50.

Les tableaux n° 5 et 6 fournissent les modules observés et des éléments de calcul intermédiaire (somme des modules, des carrés, fréquences pour n = 45).

TABLEAU 5  
MODULES en m<sup>3</sup>/s de l'AVEYRON à RODEZ  
(Période 1921 - 1965)

Année	Module en m <sup>3</sup> /s	Année	Module en m <sup>3</sup> /s
1921	2,95	1944	9,34
1922	8,62	1945	5,03
1923	9,20	1946	4,27
1924	3,97	1947	5,12
1925	3,40	1948	5,31
1926	8,48	1949	2,49
1927	7,30	1950	5,59
1928	6,99	1951	11,20
1929	4,56	1952	8,37
1930	10,40	1953	3,46
1931	7,87	1954	8,44
1932	7,25	1955	8,27
1933	5,60	1956	4,08
1934	7,76	1957	6,41
1935	11,80	1958	4,83
1936	7,12	1959	8,05
1937	9,91	1960	7,73
1938	4,68	1961	5,77
1939	7,83	1962	6,05
1940	9,40	1963	8,95
1941	9,90	1964	5,75
1942	5,57	1965	10,00
1943	5,44		

$$\sum_1^{45} Q_i = 310,51$$

$$\sum_1^{45} Q_i^2 = 2380,8035$$

TABLEAU 6

FREQUENCES EXPERIMENTALES POUR CLASSER 45 MODULES ANNUELS

n° d'ordre n	Fréquence $\frac{n-1/2}{N}$	n° d'ordre n	Fréquence $\frac{n-1/2}{N}$
1	0,0112	24	0,5222
2	0,0334	25	0,5444
3	0,0555	26	0,5666
4	0,0777	27	0,5888
5	0,1000	28	0,6111
6	0,1223	29	0,6333
7	0,1445	30	0,6555
8	0,1667	31	0,6777
9	0,1889	32	0,7000
10	0,2112	33	0,7222
11	0,2334	34	0,7444
12	0,2556	35	0,7666
13	0,2778	36	0,7888
14	0,3000	37	0,8111
15	0,3223	38	0,8333
16	0,3445	39	0,8555
17	0,3667	40	0,8777
18	0,3889	41	0,9000
19	0,4112	42	0,9222
20	0,4334	43	0,9444
21	0,4556	44	0,9666
22	0,4778	45	0,9888
23	0,5000		

## CHAPITRE V - ANALYSE STATISTIQUE DES DEBITS ANNUELS ET MENSUELS (loi de GALTON)

Ce chapitre suit étroitement le chapitre IV tant pour la nature des problèmes traités que pour les processus d'analyse statistique développés. En effet, les règles générales édictées au chapitre IV s'appliquent également ici, en ce qu'elles regardent le calcul des caractéristiques empiriques de l'échantillon, la méthode de recherche à priori du type de loi, et le cheminement du raisonnement statistique (calcul des paramètres, test d'adéquation, calcul des intervalles de confiance et des quantiles).

Comme il a été montré au paragraphe 4.2.3, les modules pluviométriques ou hydrométriques ne suivent généralement pas une loi normale quand il s'agit de régimes très irréguliers comme ceux que l'on observe en région méditerranéenne et sous les climats arides et semi-arides. Dans de tels cas, la série des modules obéit à une loi dissymétrique hypergaussienne et l'on peut choisir dans l'arsenal correspondant soit la loi de GALTON, soit celle de PEARSON III.

Ces deux lois sont également souvent utilisées pour représenter des échantillons de débits mensuels, qui ne sont pratiquement jamais normaux. Elles servent également pour caractériser certaines valeurs intéressantes à courte période de temps, telles que les débits d'étiage (moyenne sur 1, 10, 20 ou 30 jours consécutifs par exemple) et les débits de crue.

On a choisi ici de montrer l'application d'une loi de GALTON à des échantillons de modules et de débits mensuels, se réservant la mise en oeuvre des autres lois hypergaussiennes dans le chapitre VI consacré au traitement des crues.

Pour choisir, à priori, entre une loi normale et une loi de GALTON, on dispose des critères déjà cités au chapitre IV : étude régionale et report graphique. On peut également regarder la valeur du coefficient de variation  $C_v$  de l'échantillon, égal au rapport des caractéristiques empiriques estimées, écart-type  $s$  et moyenne  $m$  :  $C_v = \frac{s}{m}$ . Plus ce coefficient de variation est faible, plus la normalité est vraisemblable ; à partir de 0,50, plus ce coefficient est élevé, moins la normalité est vraisemblable.

Ainsi l'exemple choisi pour illustrer ce chapitre, la série des lames annuelles écoulées (identiques aux modules, à la superficie près du bassin versant) du rio SALGADO à ICO qui a un coefficient de variation supérieur à 1 suit sûrement une loi de GALTON tandis que les séries évoquées dans le chapitre IV (ZORN et AVEYRON) avec des  $C_v$  de 0,275 et de 0,337 avaient de fortes chances de s'ajuster sur des lois normales.

### 5.1.- Calcul des paramètres

La loi de GALTON s'appelle également loi log-normale ou loi gaussio-logarithmique car son expression est proche de celle de la loi normale à une anamorphose près, de type logarithmique, sur la variable.

On peut, en effet, lui donner la représentation suivante :

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot du \quad (16)$$

identique à celle d'une loi normale, mais dans laquelle on a :

$$u = a \log(x - x_0) + b \quad (16)$$

La variable d'origine étant  $x$  et  $u$  variable transformée s'apparente à la variable réduite qui obéit à la loi normale.

On peut également donner une autre formulation, en respectant cette fois l'équation de la variable réduite  $u = \frac{x - x_0}{\sigma}$

$$\text{On a alors } F(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_0^u \frac{1}{u} \cdot e^{-\frac{\log^2 u}{2\sigma^2}} \cdot du \quad (17)$$

Dans cette loi, à côté des paramètres d'échelle  $s$  et de forme  $\sigma$ , on a un paramètre de position  $x_0$ , qui est une borne inférieure de la variable d'origine (champ de  $x_0$  à + ).

Le système d'équation (17) peut être développé pour le calcul sur ordinateur des 3 paramètres d'ajustement, soit par la méthode des moments, soit par celle du maximum de vraisemblance.

Le système d'équations (16) est plus commode d'emploi pour le travail manuel sur machine électromécanique, et il se réfère à la même table de GAUSS que celle utilisée pour la loi normale, sans changement d'aucune sorte.

Des procédés de calcul assez laborieux ont cependant été élaborés pour être développés sans ordinateur. Ils utilisent les deux méthodes d'estimation des paramètres, en commençant par résoudre des équations en  $x_0$  afin de déterminer ce paramètre. La méthode des moments est préférable car son temps de calcul est nettement inférieur à celui que requiert la mise en oeuvre de la méthode du maximum de vraisemblance, lequel est presque prohibitif. On retient donc cette première méthode. Mais l'expérience a prouvé que ce calcul de  $x_0$  pour des échantillons petits pouvait introduire une certaine distorsion due au fait que les moments d'ordre 3 et 4 utilisés étaient très influencés par une ou deux valeurs extrêmes élevées des échantillons ; et systématiquement le calcul donne des valeurs de  $x_0$  trop fortes, ce qui altère la précision et la qualité de l'ajustement, comme on le verra dans le corrigé de l'exercice V.

Il est donc plus judicieux d'estimer la valeur du paramètre  $x_0$  sur graphique que de le calculer.

A ce propos, et avant d'aller plus loin, nous tenons à rappeler qu'il n'est pas dans les buts de cet ouvrage de démontrer les équations de statistique utilisées et que nous renvoyons aux manuels et publications citées en référence pour cela. Ceci s'applique tout particulièrement aux estimations de paramètres des lois de probabilités présentées dans ce chapitre et le suivant.

A titre d'information et pour permettre de comparer les méthodes d'estimation du paramètre  $x_0$ , on donne ici la formule de calcul déduite des équations des moments d'ordre 2 et 3 :

$$\frac{s^4}{\mu_3} = \frac{(\bar{x} - x_0)^3}{s^2 + 3(x - x_0)^2} \quad (18)$$

Cette équation est tirée du rapport de  $s^4$  (carré de la variance  $s^2$ ) et du moment centré de 3<sup>e</sup> ordre  $\mu_3$  ; il suffit par approximations successives de la résoudre en faisant varier  $x_0$  par tâtonnements.

Le moment centré d'ordre 3 (ou cumulants d'ordre 3) est calculé par :

$$\mu_3 = \frac{1}{(n-1)(n-2)} \left[ n \sum_1^n x_i^3 - 3 \sum_1^n x_i \cdot \sum_1^n x_i^2 + \frac{2}{n} (\sum_1^n x_i)^3 \right] \quad (18 \text{ Bis})$$

L'estimation graphique de  $x_0$  se fait en portant les points observés et leur fréquence expérimentale sur un papier à abscisse de probabilité gaussique et à ordonnée logarithmique. Les points doivent s'aligner si  $x_0$  est nul ; une concavité vers le bas se corrige avec un  $x_0$  négatif, c'est-à-dire en mettant en ordonnée  $x - x_0$  valeur supérieure à  $x$  ; une concavité vers le haut (plus rare) se corrige avec un  $x_0$  positif, c'est-à-dire des valeurs  $x - x_0$  inférieures à  $x$  en ordonnées.

Le tableau 7 donne les modules classés de la série des lames annuelles Le du SALGADO à ICO, avec les caractéristiques de l'échantillon de 52 valeurs (1912-13 à 1963-64). Le graphe n° 9 présente les points observés qui sont affectés d'une légère concavité vers l'axe des abscisses ; une valeur minimale de  $x_0 = -3$ , permet un ajustement linéaire satisfaisant de Le +3, ajustement à l'estime. On adopte en pratique la plus petite valeur absolue de  $x_0$  qui permet aux valeurs faibles de l'échantillon de s'aligner avec les valeurs fortes.

Pour achever la détermination complète de la loi de GALTON, il suffit de calculer la droite d'ajustement de l'équation (16) c'est-à-dire les coefficients  $a$  et  $b$  de celle-ci.

On peut procéder de trois manières différentes :

a) à l'aide des équations déduites des moments et qui donnent :

$$a = \frac{1,517}{\sqrt{\log \left[ 1 + \frac{s^2}{(\bar{x} - x_0)^2} \right]}} \quad \text{et} \quad (19)$$

$$b = \frac{1,1513}{a} - a \log (\bar{x} - x_0)$$

TABLEAU 7

ANALYSE DES LAMES D'ÉCOULEMENT ANNUEL DU SALGADO à ICO

CLASSEMENT DE L'ÉCHANTILLON ET CALCUL DES PARAMÈTRES EMPIRIQUES

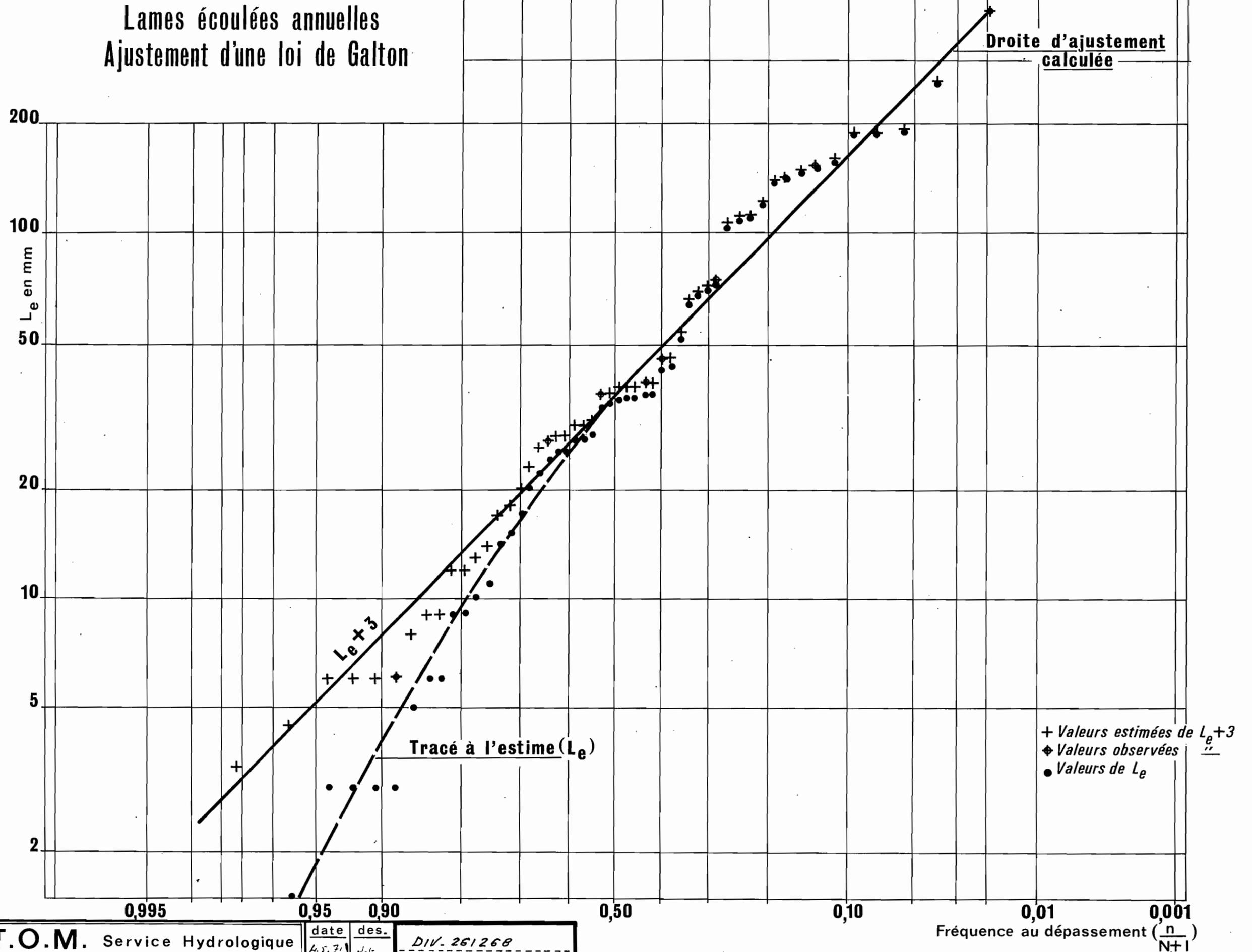
Rang	Lame (mm)	Année	Rang	Lame (mm)	Année
1	415	1923-24	27	34	1948-49
2	258	1916-17	28	33	1956-57
3	190	1939-40	29	28	1932-33
4	189	1946-47	30	27	1927-28
5	188	1924-25	31	27	1942-43
6	158	1933-34	32	25	1930-31
7	150	1963-64	33	25	1940-41
8	147	1955-56	34	24	1958-59
9	140	1962-63	35	22	1926-27
10	137	1920-21	36	20	1925-26
11	120	1954-55	37	17	1928-29
12	110	1917-18	38	15	1947-48
13	109	1921-22	39	14	1945-46
14	104	1934-35	40	11	1943-44
15	72	1959-60	41	10	1935-36
16	70	1922-23	42	9	1951-52
17	68	1919-20	43	9	1953-54
18	64	1949-50	44	6	1929-30
19	51	1938-39	45	6	1950-51
20	43	1915-16	46	5	1937-38
21	42	1960-61	47	3	1914-15
22	36	1912-13	48	3	1941-42
23	36	1961-62	49	3	1952-53
24	35	1913-14	50	3	1957-58
25	35	1936-37	51	1,5	1931-32
26	35	1944-45	52	0,5	1918 19

Moyenne  $\bar{L} = \frac{\sum L}{52} = 65,1 \text{ mm}$

Variance  $s^2 = \frac{1}{51} \left[ \sum L^2 - 52 \bar{L}^2 \right]$

Ecart-type  $s = 79,5$

Lames écoulées annuelles  
Ajustement d'une loi de Galton



b) en considérant la droite d'ajustement graphique et en exprimant que la variable transformée  $u$  est la variable réduite de

$y = \log(x_i - x_0)$ , c'est-à-dire en posant :

$$u = \frac{y_i - \hat{y}}{s}$$

et calculer deux points particuliers de la droite.

c) en utilisant les équations issues du maximum de vraisemblance (calculs beaucoup plus longs car faisant appel à tous les logarithmes d'écart à  $x_0$  pour toutes les valeurs de l'échantillon) :

$$a^2 = \frac{1}{\frac{\sum \log^2(x_i - x_0)}{N} - \frac{\sum^2 \log(x_i - x_0)}{N^2}} \quad (20)$$

$$b = \frac{-a \sum \log(x_i - x_0)}{N}$$

Bien entendu, un test d'adéquation du  $\chi^2$  doit être calculé.

#### 5.2 - Calcul des intervalles de confiance

C'est la variable  $y_i = \log(x_i - x_0)$  qui suit une loi normale. On peut donc sans difficulté calculer les intervalles de confiance à partir des lois de distribution d'échantillonnage de la moyenne  $\hat{y}$  et de l'écart-type  $s_y$  de la série des logarithmes  $\log(x_i - x_0)$ , comme il a été fait pour la loi normale (Chap. IV).

La moyenne  $x_i$  de la variable  $x_i$  ne suit pas une loi de GAUSS mais une loi de GALTON dans laquelle le mode, la médiane et la moyenne sont distincts et placés dans cet ordre croissant alors qu'ils sont égaux et confondus dans une loi normale. En conséquence à  $\bar{x}_i$  correspond une valeur  $y_i$  qui est un simple quantile dans la série normale des logarithmes. Pour calculer l'intervalle de confiance sur la moyenne  $\bar{x}_i$ , on calcule d'abord l'intervalle sur  $y_i = \log(\bar{x}_i - x_0)$  considérée comme quantile, en appliquant la formule (15) à la série des logarithmes :

$$\text{erreur-type de } y_i = \frac{s_y}{\sqrt{2N}} \sqrt{u^2 p + 2}$$

et l'on passe ensuite des bornes de l'intervalle en logarithmes aux bornes de la moyenne  $x_i$  par extraction des logarithmes, sans oublier de corriger ces valeurs de  $x_0$ .

Comme on l'a déjà dit dans le chapitre IV, ce procédé peut-être pas très rigoureux est cependant assez précis pour les problèmes que l'on traite.

L'exemple du SALGADO à ICO permet de mieux saisir le déroulement des calculs.

On rappelle en premier lieu que cet échantillon n'est pas entièrement observé mais provient d'une extension par la méthode des résidus présentée dans le chapitre III ; l'échantillon de 52 valeurs reconstituées une à une pour 44 d'entre elles a une durée efficace limitée à 34 ans, durée qui sera retenue pour les calculs d'intervalle de confiance.

Compte tenu de la grande dispersion des valeurs de l'échantillon et de la qualité modeste de celui-ci, l'intervalle de confiance est seulement pris à 80 % (cf. 4.2.3.).

La loi de GALTON des lames écoulées annuelles est représentée par :

$$u = 1,952 \log (L + 3) - 3,053 \quad (16)$$

L'intervalle de confiance à 80 % sur la moyenne estimée est : représentée par  $\pm 1,28 \frac{sy}{\sqrt{2.34}} \sqrt{u^2 + 2}$  (15)

Il faut connaître les paramètres de la série des logarithmes c'est-à-dire de  $\log (L + 3)$ , qui sont :

$$\text{moyenne } \hat{y} = 1,56414$$

$$sy = 0,5124$$

La moyenne des lames est de 65,1 mm, donc on utilise :

$y_i = \log (\bar{L} + 3) = \log (68,1) = 1,83315$  valeur évidemment supérieure à  $\hat{y}$  puisque celle-ci correspond environ au mode (inférieur à la moyenne) de la série des lames.

On peut calculer  $u_p = (\hat{y} - y_i) \cdot \frac{1}{sy} = 0,525$

L'intervalle de confiance vaut  $\pm 0,1238$  ; on repasse aux lames dont les logarithmes sont  $1,83315 \pm 0,1238$ , soit 90,5 et 51,2 mm.

On a l'estimation de la moyenne (valeur empirique 65,1 mm) :

$$48,2 \leq \hat{L} \leq 87,5 \quad (\text{IC } 80 \%)$$

L'intervalle de confiance, symétrique sur les logarithmes, ne l'est pas sur les lames. Il lui correspond une précision sur celles-ci de 22 à 38 % suivant la borne choisie. La différence est considérable avec un échantillon suivant une loi normale. Si l'on veut bien se reporter à l'exemple de la ZORN dans le chapitre IV, bien que l'échantillon n'ait que 21 ans contre 34 ici, la précision était de  $\pm 12,5\%$  pour un intervalle de confiance de 95 % ; elle aurait été de  $\pm 8\%$  si l'intervalle avait été de 80 %, comme ici (correction dans le rapport des variables de STUDENT pour 0,05 et 0,20).

On peut dire inversement que pour atteindre une précision comparable sur le SALGADO à ICO, il faudrait disposer d'une longueur d'échantillon bien supérieure qui pourrait être calculée en faisant N inconnu dans l'équation (15), l'intervalle de confiance étant fixé au départ en fonction de la précision souhaitée. Le calcul donnerait environ 325 ans au lieu de 21 à la ZORN pour avoir environ 8 % sur la moyenne (IC 80 %).

5.3. - Calcul d'un quantile

Il suffit d'utiliser l'équation (16) pour une probabilité à laquelle correspond la valeur  $u_p$  de la variable réduite de GAUSS ; on a :

$$\log(x_p - x_0) = \frac{1}{a} (u_p - b)$$

La résolution de l'équation en logarithme donne ensuite la valeur de  $x_p$ .

Le calcul de l'intervalle de confiance s'exécute exactement comme pour la moyenne d'une loi de GALTON, et avec les mêmes restrictions formelles, c'est-à-dire que cet intervalle est de :

$$\pm \frac{t_{1-\alpha}}{2} \cdot \frac{s}{\sqrt{2N}} \sqrt{u_p^2 + 2}$$

selon la formule (15),  $\alpha$  étant le degré de confiance choisi et  $t$  la variable réduite de GAUSS pour la probabilité  $\frac{1-\alpha}{2}$ , et  $s$  l'écart-type de la série des logarithmes.

- Calcul de la lame décennale forte - SALGADO à ICO -

On a :  $\log(L_{0,10} - L_0) = \frac{1}{a} (U_{0,10} - b)$

c'est-à-dire en valeurs numériques :

$$\log(L_{0,10} + 3) = \frac{1}{1,952} (1,28 + 3,053)$$

on en tire  $L_{0,10} + 3 = 156$  mm et  $L_{0,10} = 163$  mm

Le calcul de l'intervalle de confiance se mène comme suit :

$$\pm 1,28 \cdot \frac{sy}{\sqrt{68}} \cdot \sqrt{u_{0,10}^2 + 2}$$

il vaut :  $\pm 0,144$

Les bornes de l'intervalle des logarithmes sont donc :  $2,22011 \pm 0,144$  et conduisent à des valeurs de lames égales à 119 et 231 mm.

La lame décennale forte, estimée à 163 mm, vaut :

$$116 \leq L_{0,10} < 228 \text{ mm} \quad (\text{IC } 80 \%)$$

L'intervalle de confiance est plus grand que pour la moyenne (0,144 contre 0,1238 au niveau des logarithmes). Il lui correspond une précision de 29 à 40 % selon la borne choisie.

La disproportion de la précision sur un quantile éloigné tend à se réduire vis-à-vis de ce que donne la loi normale, puisque dans l'exemple de la ZORN déjà cité, on avait une précision de  $\pm 25\%$  sur le module décennal.

Très imprécise au niveau des valeurs centrales, la loi de GALTON (comme les autres lois dissymétriques) tend à ne l'être guère plus au niveau des quantiles éloignés quand on la compare à la loi normale.

#### 5.4. - Exercice d'application de la loi de GALTON à un échantillon de débits mensuels

On a repris le cours d'eau utilisé dans l'exercice IV, l'AVEYRON à RODEZ et l'on a choisi un mois, celui de novembre, qui offre la particularité d'avoir un débit moyen comparable au module annuel moyen, mais évidemment avec une bien plus grande dispersion ; novembre est en effet un mois de transition entre les basses eaux et les hautes eaux, avec des débits plus ou moins forts selon la précocité et l'importance des pluies du début de l'automne.

On demande de :

- à partir de l'échantillon observé des débits moyens mensuels de novembre de l'AVEYRON à RODEZ, déterminer les caractéristiques empiriques : moyenne, écart-type, coefficient de variation.
- montrer que cette distribution de débits mensuels est dissymétrique et qu'une loi de GALTON peut lui être ajustée : choix des paramètres d'ajustement (estimer  $x_0$  graphiquement) et test d'adéquation du  $\chi^2$ . On pourra estimer aussi  $x_0$  par le calcul d'après les moments, à titre de comparaison.
- calculer l'intervalle de confiance à 95 % de la moyenne de cette distribution.
- estimer le débit moyen mensuel déficitaire de récurrence égale à 20 ans et indiquer la période de retour théorique moyenne du débit de novembre 1957 (0,83 m<sup>3</sup>/s).

Le tableau n° 9 donne les débits moyens des 45 mois de novembre de la période observée 1921-65 avec leur rang de classement R et leur fréquence expérimentale  $F = \frac{R}{46}$ .

Pour résoudre le point C, on donne ici les caractéristiques de la série des logarithmes  $y_i = \log(Q_i - Q_0)$  :

$$\sum_1^{45} y_i = 35,978$$

$$\sum_1^{45} y_i^2 = 32,745$$

TABLEAU 9

DEBITS CLASSES DU MOIS DE NOVEMBRE DE L'AVEYRON A RODEZ  
(période 1921-65)

R	Q <sub>nov</sub> (m <sup>3</sup> /s)	Fréquence	R	Q <sub>nov</sub> (m <sup>3</sup> /s)	Fréquence
1	22,31	0,0217	24	5,58	0,5217
2	22,00	0,0435	25	5,41	0,5435
3	18,70	0,0652	26	5,35	0,5652
4	17,98	0,0870	27	4,71	0,5870
5	15,82	0,1087	28	4,59	0,6087
6	12,73	0,1304	29	3,75	0,6304
7	12,20	0,1522	30	3,63	0,6522
8	10,63	0,1739	31	3,25	0,6739
9	10,55	0,1957	32	3,10	0,6956
10	10,40	0,2174	33	3,04	0,7174
11	10,19	0,2391	34	2,94	0,7391
12	10,11	0,2609	35	2,27	0,7609
13	8,79	0,2826	36	2,24	0,7826
14	8,07	0,3043	37	2,12	0,8043
15	7,47	0,3261	38	2,10	0,8261
16	6,77	0,3478	39	1,94	0,8478
17	6,75	0,3696	40	1,50	0,8696
18	6,37	0,3913	41	1,40	0,8913
19	6,27	0,4130	42	1,11	0,9130
20	6,24	0,4348	43	1,01	0,9348
21	6,18	0,4565	44	0,84	0,9565
22	5,99	0,4783	45	0,83	0,9783
23	5,95	0,5000			

$$\Sigma Q_i = 311,18$$

$$\Sigma Q_i^2 = 3500,5386$$



CHAPITRE VI - ANALYSE STATISTIQUE DES DEBITS EXTREMES, CRUES ET ETIAGES (lois de PEARSON III et de GUMBEL)

Ce chapitre fait le pendant du chapitre V précédent en ce qu'il constitue une suite au chapitre IV dans lequel étaient exposés les principes généraux de l'analyse statistique des variables hydrologiques quelle que soit la loi ajustable, et parce que comme le chapitre V il présente des lois dissymétriques susceptibles de s'appliquer aux variables non normales.

Le texte de ce chapitre comprend deux parties : une première de tendance hydrologique résume la nature des variables caractéristiques des débits extrêmes que l'on peut soumettre à analyse statistique ; une seconde de contenu statistique développe sur l'exemple du débit de crue l'utilisation de deux lois parmi les plus usitées par les hydrologues, celles de PEARSON III et de GUMBEL.

6.1. - Caractères des informations "crue" et "étiage"

Les débits moyens annuels et mensuels, qui viennent d'être étudiés dans les chapitres IV et V, sont des moyennes de débits journaliers sur d'assez longues périodes et dont les réalisations successives ne sont guère liées que pour les débits de deux mois successifs.

Enfin, ces débits moyens mensuels et annuels sont représentés par des variables dont l'examen statistique suffit à en analyser complètement les caractères.

Au contraire, les débits extrêmes que sont les phénomènes de crues et d'étiage ne peuvent être complètement analysés et caractérisés que s'ils sont examinés dans leur ensemble et dans leur succession chronologique. Une crue ou un étiage c'est en effet une chronique de débits instantanés ou journaliers (ceux-ci suffisent lorsque la variabilité du phénomène n'est pas trop grande dans le temps, ce qui est le cas général des étiages et celui des crues des grands fleuves) d'une durée de plusieurs heures à plusieurs jours mais qui atteint rarement le mois. Enfin, les débits constituant cette chronique sont étroitement dépendant de ceux qui les précèdent.

Les phénomènes de crue et d'étiage sont donc bien différents des débits mensuels et annuels. Leur étude complète requiert des méthodes d'analyses diverses et complexes ; l'analyse statistique ne peut en donner qu'une description incomplète qui est cependant parfois, et même bien souvent, satisfaisante pour l'objectif poursuivi.

6.1.1. - Etude complète des chroniques de débits

Cette étude est soit complète, soit partielle. Lorsque l'étude d'une chronique est complète (exemple de la reconstitution d'un hydrogramme de crue en vue de l'examen ultérieur du passage de celui-ci dans un bief ou dans une retenue) elle repose sur une méthode de transformation des pluies en débits, tenant compte le cas échéant d'autres facteurs physico-climatiques influants (cas de la température pour la genèse des crues de fonte de neige).

Les méthodes de transformation de pluies en débits sont complexes et de mise en oeuvre délicate et certaines nécessitent l'ordinateur. On les réunit sous le vocable de modèles déterministes puisque, faisant intervenir les facteurs causals ou simplement influants, elles cherchent à expliquer le phénomène ; de ce fait, leur portée dépasse le cadre précis de leur domaine pour atteindre une portée scientifique générale.

Les modèles déterministes de portée générale utilisent un découpage "matriciel" c'est-à-dire dans le temps et dans l'espace des divers éléments constitutifs : hauteurs de pluie, écoulement, vitesse d'écoulement, réaction des terrains aux précipitations... etc... Ces modèles déterministes matriciels sont de diverses natures selon les schémas que leurs auteurs ont adopté pour représenter la transformation pluie-débit : modèles à réservoirs, modèles de ruissellement.

Tous ils exigent, tant pour leur calcul que pour le calage de leurs nombreux paramètres, le recours à des ordinateurs rapides et dotés de mémoires importantes. Leur présentation sortirait du cadre d'initiation de ces Exercices.

Il existe un modèle déterministe relativement simple puisque composé d'un opérateur global de transformation pluies-débits. Cet opérateur global est l'hydrogramme unitaire imaginé par K. SHERMAN. L'hypothèse suivante est à la base de cet opérateur global : l'hydrogramme de crue réponse d'un bassin a toujours la même forme et les mêmes valeurs s'il est provoqué par une même averse. Les contraintes d'application sont les suivantes : homogénéité du milieu physique du bassin pour avoir une réponse homogène, averses homogènes intéressant la totalité du bassin et dont la durée efficace est toujours inférieure au temps de montée de l'hydrogramme.

Les limites d'application de l'hydrogramme unitaire sont variables avec le paysage physico-climatique considéré. Par exemple, en Afrique intertropicale, ce sera un domaine allant d'environ 1 à 2 km<sup>2</sup> jusque vers 150 à 200 km<sup>2</sup>.

Le domaine d'application des modèles déterministes est général, mais il est particulièrement indiqué quand l'hydrogramme unitaire ne peut s'appliquer.

La relative facilité d'emploi de l'hydrogramme unitaire justifie de lui consacrer un développement particulier (chapitre VII). Les modèles déterministes ont l'avantage sur les méthodes statistiques de pouvoir être mis en oeuvre lorsque l'on possède seulement quelques années d'observations de débits - parfois une ou deux peuvent suffire -. La connaissance des pluies sur une plus longue période (cas généralement rencontré) permet d'attribuer une fréquence au phénomène pluie introduit dans le modèle. On peut en première approximation attribuer la même fréquence à la crue résultante ; il est cependant plus prudent eu égard à la complexité de la transformation pluie-débit, de parler de la crue "correspondant à la pluie de fréquence F" plutôt que de la crue de fréquence F.

#### 6.1.2. - Etude partielle des chroniques de débits

Mis à part l'hydrogramme unitaire d'application limitée à certaines crues, les modèles déterministes sont bien souvent trop complexes pour certains problèmes.

Il existe donc diverses méthodes qui font en quelque sorte le pont avec la méthode statistique simple, en ce sens qu'elles prennent leurs éléments aussi bien dans les modèles déterministes que dans les modèles probabilistes. En d'autres termes, ces méthodes prennent seulement en compte une partie de la chronique des débits et lui associent une analyse statistique.

Dans cette rubrique, on peut ranger surtout les méthodes d'étude des étiages telles que :

- a) l'étude du tarissement qui recherche la loi de décroissance des débits de basses eaux dues uniquement au drainage des terrains (restitution des nappes à l'écoulement fluvial) sous une forme exponentielle décroissante

$$Q = Q_0 e^{-at} \quad \text{par exemple.}$$

- b) la méthode de la charnière de M. ROCHE qui combine l'étude du tarissement avec la prise en compte d'un débit initial, charnière, du tarissement (assimilable au  $Q_0$  de l'équation précédente) et des précipitations durant la période de tarissement qui introduisent une variation aléatoire du débit de base.
- c) les méthodes d'analyse statistique à deux variables combinant un certain débit d'étiage (ou de crue au-dessus d'un seuil) avec la période sans pluie qui le précède (ou la période séparant ce débit du précédent), méthodes qui s'intéressent donc à l'aspect chronologique de successions d'épisodes pluvieux ou secs avec prise en compte de leur durée (ou de celle les séparant) et de leur intensité.

Toutes ces méthodes procèdent d'un examen chronologique des débits (et parfois aussi des pluies) instantanés ou journaliers pour isoler certaines variables susceptibles d'être analysées statistiquement. Les lois statistiques utilisées sont assez complexes (processus stochastiques - chaînes de MARKOV - ....etc....) et leur développement sort du cadre d'Exercices d'initiation.

### 6.1.3. - Aspect statistique des valeurs extrêmes

Dans de nombreux problèmes d'application liés à des aménagements hydrauliques, la connaissance statistique d'une variable caractéristique de l'information crue ou étiage suffit à répondre aux questions soulevées par ces problèmes.

La crue est un phénomène qui peut être valablement représentée par l'une ou l'autre des variables suivantes :

- débit maximal instantané (ou sur une courte période, journalière par exemple),
- volume au-dessus d'un certain seuil (débit critique ou débit de base)

Ces variables sont liées entre elles et souvent à la forme même de l'hydrogramme de crue qu'il n'est donc pas impossible de reconstituer grossièrement pour l'associer à celles-ci.

Tout cela suffit généralement à dimensionner un évacuateur de crue ou à calibrer un bief pour le transit sans débordement d'un certain débit, ces deux exemples étant les plus répandus des problèmes pratiques motivant l'étude des crues.

La préhension du phénomène étiage est beaucoup plus délicate. L'étiage est intéressant quand le besoin en eau ne peut être satisfait que par un prélèvement au fil de l'eau dans la rivière. Mais il faut avoir présent à l'esprit qu'en période d'étiage surtout l'effet des multiples prélèvements, dérivations et rejets dont est l'objet un bief fluvial en pays développé est un effet considérable. Or cet effet peut être exactement défini quand il s'agit d'un ouvrage important, grand barrage de dérivation pour canal de navigation, irrigation, etc... mais pas du tout lorsqu'il s'agit d'une multitude d'interventions individuelles en milieu rural ou de petite industrie ; et bien souvent sur la majorité des rivières ce sont ces interventions multiples qui sont responsables des perturbations du débit d'étiage. Dans de telles conditions, le débit instantané n'a généralement aucun sens, et l'on préfère définir l'étiage par l'une ou l'autre des variables suivantes :

- débit moyen le plus faible sur n (10,20, 30) jours consécutifs
- débit moyen du mois le plus faible
- débit classé le plus faible sur n (10,30) jours.

Ces variables sont classées par ordre décroissant d'intérêt; bien que l'étude statistique de l'une d'entre elles puisse suffire à répondre aux divers problèmes d'aménagements, on est dans certain cas enclins à considérer que la variable la plus représentative n'est pas la seule variable d'étiage mais la variable définissant la défaillance de fourniture ou de non satisfaction du besoin. L'intérêt de cette étude des défaillances justifie son examen détaillé dans le chapitre X.

## 6.2. - Lois statistiques pour les valeurs extrêmes

On utilise des lois dissymétriques dont le premier exemple, celui de la loi de GALTON étudiée au chapitre V, est applicable aussi bien pour les débits extrêmes mais ne sera cité ici que pour mémoire.

Les phénomènes crue et étiage représentés par les variables définies au paragraphe 6.1.3. ont généralement une dissymétrie positive c'est-à-dire que le mode  $d$  (ou valeur la plus fréquente) est inférieur à la médiane  $m$  elle-même inférieure à la moyenne  $\bar{u}$  (la "courbe en cloche des densités de probabilité monte plus vite qu'elle ne descend, ou encore, dans la représentation sur papier gaussique où les fréquences de dépassement sont portées en abscisses, les courbes ont leur concavité tournée vers les débits croissants : on dit aussi, pour cela, que la loi est "hypernormale").

Le seul exemple d'application de loi hyponormale, c'est-à-dire à dissymétrie négative, inverse du précédent cas, est celui des débits maximaux de crue des grands fleuves dotés de grandes plaines d'inondation qui conduisent presque à imposer une limite supérieure au débit de crue, ou plutôt à réduire la croissance du débit de crue au-delà d'une certaine limite de débordement. Les lois statistiques non normales sont très nombreuses, mais si l'on retient seulement pour application à l'hydrologie celles qui n'ont pas plus de 3 ou 4 paramètres, et ici celles dont la mise en oeuvre manuelle n'est pas trop laborieuse, on débouche sur une liste limitée dans laquelle se trouvent la quasi-totalité des lois utilisées pratiquement par tous les hydrologues et qui se classent en trois groupes : loi doublement exponentielle, exponentielle généralisée, gamma incomplète.

Pour leur présentation analytique simple, on adopte la fonction de répartition correspondant à la variable réduite  $u$  telle que  $u = (x - x_0) / s$ , variable sans dimension. Les paramètres sont de trois ordres :

- de position  $x_0$  c'est-à-dire tantôt le mode (confondu avec la moyenne dans les lois normale et de GUMBEL), tantôt la borne (cas de la loi de GALTON),
- d'échelle  $s$  (l'écart-type de la loi normale)
- de forme  $d$ , absent (lois normale, de GUMBEL), unique dans les autres lois.

#### Loi de GUMBEL ou doublement exponentielle

Loi dite des valeurs extrêmes dont la fonction de répartition est de la forme

$$e^{-e^{-u}}$$

#### Loi gamma incomplète, ou de PEARSON III

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^u u^{\gamma-1} e^{-u} du$$

$F(x)$  étant la fréquence au non-dépassement

$\Gamma(\gamma)$  étant la fonction gamma complète égale à  $\int_0^{\infty} u^{\gamma-1} e^{-u} du$

$\gamma$  est le paramètre de forme positif.

#### Lois exponentielles généralisées

L'expression générale est la suivante pour la fonction de répartition,  $F(x)$  étant la fréquence au non-dépassement :

$$F(x) = \frac{1}{d} e^{-u/d}$$

Selon les valeurs et signes des paramètres de forme  $d$  et d'échelle  $s$ , on a les lois particulières suivantes :

a)  $s$  et  $d$  positifs, loi de GOODRICH

$$F(x) = 1 - e^{-A} \frac{1}{d}$$

avec  $A = \frac{1}{s} (x - x_0)$

b) s positif, d négatif, loi de FRECHET

$$F(x) = e^{-Ax}$$

c) produit sd négatif, loi de JENKINSON

$$F(x) = e^{-cx}$$

avec  $c = \left(1 - \frac{x - x^i}{-s}\right)^{\frac{1}{d}}$ , sachant que  $x^i = x_0 + s$

Dans le thème d'application de ce chapitre, nous développons uniquement l'utilisation des lois de GUMBEL et de PEARSON III, de loin les plus courantes d'emploi, et pour lesquelles les calculs d'estimation des paramètres sont possibles sans ordinateur.

A la question : pourquoi choisir une loi plutôt qu'une autre pour représenter une certaine variable ? il n'y a pas de réponse claire et nette. Le choix est complet lorsque l'on dispose d'un ordinateur, limité lorsque l'on n'en dispose pas. La plus ou moins grande adéquation d'une loi à l'échantillon considéré pourrait théoriquement se rechercher :

- a) soit en calculant les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement dont les valeurs et champ de variation sont caractéristiques d'un type de loi, aux erreurs d'échantillonnage près bien entendu
- b) soit en essayant plusieurs lois et en retenant celle qui conduit à la meilleure probabilité du  $\chi^2$ .

En pratique devant l'importance des calculs, les erreurs d'échantillonnage et la puissance limitée du test du  $\chi^2$ , on se contente dans la majorité des cas, et à fortiori lorsque l'on ne dispose pas d'ordinateur, d'un choix de bon sens en adoptant le type de loi qui par expérience pour la région considérée a toujours donné les meilleures adéquations pour la variable étudiée. On verra d'ailleurs dans le corrigé de l'exercice, sur l'exemple de 2 lois, que les lois dissymétriques positives sont presque confondues dans l'intervalle central de probabilité et ne commencent à diverger, donc à s'individualiser, que pour des probabilités extrêmes auxquelles ne correspondent malheureusement que très peu de points expérimentaux ; en outre, ces points extrêmes dans un échantillon court peuvent très bien correspondre à des occurrences plus sévères (la probabilité d'apparition d'une crue centennale dans un échantillon de 30 ans est loin d'être négligeable) ce qui limite considérablement l'intérêt de ces points pour choisir telle loi plutôt que telle autre.

### 6.3. - Estimation des paramètres des lois de GUMBEL, et PEARSON III

6.3.1. - Loi de GUMBEL - Si l'on adopte Q comme représentation de la variable débit, la densité de probabilité de loi de GUMBEL peut être écrite ainsi en pratique :

$$f(Q) = e^{-a(Q - Q_0)} \quad (21)$$

le paramètre d'échelle  $s = \frac{1}{a}$  est différent de zéro  
le paramètre de forme est  $Q_0$ .

Leur estimation est assez simple en utilisant un système d'équations formées avec les moments des trois premiers ordres :

$$\frac{1}{a} = 0,780 \sigma \quad (22)$$

$$Q_0 = \bar{Q} - \frac{1}{a} = 0,577 \sigma \quad (23)$$

$\bar{Q}$  étant la moyenne de l'échantillon et  $\sigma$  son écart-type. Le grand intérêt pratique de la loi de GUMBEL est encore accentué par la facilité de sa représentation graphique : une double anamorphose logarithmique sur l'échelle des probabilités conduit à linéariser la répartition théorique de la variable, la droite de GUMBEL étant :

$$y = a (Q - Q_0) \quad (24)$$

Il existe du papier diagrammé à échelle de probabilité de GUMBEL permettant cette représentation linéaire. Ce papier de GUMBEL porte en graduation d'abscisse une échelle de fréquence au dépassement  $F(Q)$  et une échelle de la variable réduite  $y$ . La droite d'ajustement se trace en calculant 2 ou 3 valeurs de  $Q$  pour 2 ou 3 valeurs de  $y$  (2,0 et 7 par exemple) à l'aide de l'équation (24). En absence d'échelle graduée en  $y$ , il faudrait calculer  $F(Q) = e^{-e^{-y}}$  en entrant 2 fois dans une table de la fonction exponentielle  $e^{-y}$ .

Le calcul des quantiles peut se faire soit par lecture directe du graphe, soit en utilisant 2 fois à l'envers la table de  $e^{-y}$  puis en mettant  $y$  dans l'équation (24). On peut aussi savoir quelques valeurs importantes de  $y$  pour  $F(x)$  telles que :

$F(x)$	$y$	Récurrence
0,90	2,25	10 ans
0,95	2,97	20 ans
0,98	3,90	50 ans
0,99	4,55	100 ans
0,999	6,90	1000 ans

On trouve aussi sur ce papier de GUMBEL une échelle logarithmique en ordonnée. Elle sert à la loi de FRECHET dont l'expression analytique revient à substituer  $\log Q$  à  $Q$  dans l'expression de la loi de GUMBEL. Cette loi de FRECHET est donc d'emploi aussi facile ; elle sert lorsqu'un ajustement de GUMBEL n'est pas assez dissymétrique et laisse une concavité tournée vers le haut à l'ensemble des valeurs de l'échantillon.

Ce cas se rencontre assez fréquemment pour les valeurs extrêmes (crues maximales et hauteurs de pluie en 24 heures) en France.

6.3.2. - Loi de PEARSON III

Pour l'application qui va en être faite, on a introduit la simplification de fixer, à priori, la valeur du paramètre de position  $x_0$  à zéro. En retenant toujours  $Q$  comme variable débit, la variable réduite  $u = aQ$  si l'on fait  $a = \frac{1}{s}$ ,  $s$  étant le paramètre d'échelle.

Dans ces conditions, la fonction de répartition s'écrit :

$$F(Q) = \frac{a^\gamma}{\Gamma(\gamma)} \int_0^Q e^{-aQ} \cdot Q^{\gamma-1} \cdot dQ \quad (25)$$

L'estimation des paramètres de forme  $\gamma$  et d'échelle  $\frac{1}{a}$  peut se faire soit par la méthode du maximum de vraisemblance, soit par celle des moments.

Avec la première méthode, on calcule en premier lieu  $\gamma$  qui est obtenu par l'intermédiaire d'une fonction complexe  $g(\gamma)$  :

$$g(\gamma) = \log \bar{Q} - 0,4343 \psi(\gamma - 1)$$

où  $\psi(\gamma - 1)$  est une fonction tabulée pour  $\gamma$  compris entre 1 et 2, et telle que, pour les autres valeurs :

$$\psi(x + n) = \psi(x) + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \dots + \frac{1}{x+n}$$

La formule d'ajustement est :

$$g(\gamma) = \log \bar{Q} - \frac{\sum \log Q_i}{N} \quad (26)$$

Il faut donc calculer, pour l'échantillon, la moyenne  $\bar{Q}$  des  $Q_i$  et la moyenne des logarithmes décimaux des mêmes termes, puis en déduire  $g(\gamma)$  et enfin  $\gamma$  par l'intermédiaire d'une table qui est fournie dans le tableau suivant.

$\gamma$	$g(\gamma)$	$\gamma$	$g(\gamma)$	$\gamma$	$g(\gamma)$
: 1 :	0,25068	:: 18 :	0,01213	:: 35 :	0,00621
: 2 :	0,11741	:: 19 :	0,01151	:: 36 :	0,00602
: 3 :	0,07635	:: 20 :	0,01094	:: 37 :	0,00585
: 4 :	0,05654	:: 21 :	0,01042	:: 38 :	0,00570
: 5 :	0,04487	:: 22 :	0,00990	:: 39 :	0,00556
: 6 :	0,03719	:: 23 :	0,00949	:: 40 :	0,00544
: 7 :	0,03174	:: 24 :	0,00908	:: 41 :	0,00531
: 8 :	0,02767	:: 25 :	0,00870	:: 42 :	0,00518
: 9 :	0,02453	:: 26 :	0,00836	:: 43 :	0,00506
:10 :	0,02204	:: 27 :	0,00807	:: 44 :	0,00492
:11 :	0,02000	:: 28 :	0,00776	:: 45 :	0,00482
:12 :	0,01832	:: 29 :	0,00749	:: 46 :	0,00473
:13 :	0,01690	:: 30 :	0,00723	:: 47 :	0,00461
:14 :	0,01569	:: 31 :	0,00701	:: 48 :	0,00449
:15 :	0,01460	:: 32 :	0,00681	:: 49 :	0,00446
:16 :	0,01370	:: 33 :	0,00658	:: 50 :	0,00433
:17 :	0,01289	:: 34 :	0,00639	:: :	:

On a ensuite  $a = \frac{\bar{Y}}{\bar{Q}}$  (27)

Avec la méthode des moments, un peu plus longue, on doit calculer les rapports des moments centrés des trois premiers ordres :

$$R1 = \frac{\sum Qi}{n} = \frac{Y}{a}$$

$$R2 = \frac{\sum Qi^2}{\sum Qi} = \frac{Y}{a} + \frac{1}{a}$$

$$R3 = \frac{\sum Qi^3}{\sum Qi^2} = \frac{Y}{a} + \frac{2}{a}$$

puis le résidu  $R = R1 + R3 - 2 R2$  qui serait nul si l'échantillon avait une taille infinie.

On calcule une première approximation de  $Y$  :

$$Y = \frac{R1}{R2 - R1}$$

que l'on introduit dans un calcul améliorant  $R2$

$$R2a = R2 - R3 \cdot \frac{2}{3 + 7/(Y+1)}$$

En définitive, on a le couple d'équations :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{a} &= R2a - R1 \\ Y &= a R1 \end{aligned} \right\} (28)$$

Le test du  $\chi^2$  de PEARSON est évidemment applicable aux deux lois pour en contrôler l'adéquation, aux restrictions inhérentes à ce test.

#### 6.4. - Intervalles de confiance et quantiles

L'ajustement d'une loi à la répartition des débits de crue permet d'estimer le débit correspondant à une faible fréquence de dépassement donnée : crue décennale, crue centennale, crue millénaire. Quand on parle de crue millénaire, la fréquence de dépassement est bien de l'ordre de 0,001, mais étant donné que les échantillons de crues observées n'excèdent jamais quelques dizaines, l'extrapolation est très forte et la précision s'en ressent (si, inversement, on calculait l'intervalle de confiance du débit correspondant à une fréquence donnée, cet intervalle serait très large pour  $F_1(Q) = 0,001$ ).

A plus forte raison, lorsqu'on veut donner le débit d'une crue pratiquement impossible ("crue du projet", lorsqu'on ne peut accepter la destruction d'un ouvrage), on s'arrange pour que la fréquence  $F_1(Q)$  estimée soit de l'ordre de 0,0001, mais il est préférable de ne pas prononcer le terme "crue dix-millénaire".

Dans le cadre de certains projets, la connaissance de la crue décennale, par exemple, doit permettre d'effectuer un calcul économique : les travaux à prévoir pour se prémunir complètement contre la crue ne sont-ils pas plus onéreux que la prime de l'assurance à souscrire dans le cas où l'on accepte le risque d'une destruction ? Il faut alors connaître non seulement la valeur la plus probable mais aussi l'intervalle de confiance du débit de crue décennale.

La méthode de calcul des intervalles de confiance a été exposée pour un quantile d'une variable aléatoire distribuée suivant la loi de GAUSS ou la loi de GALTON (chapitres IV, V).

Pour les autres lois dissymétriques, la recherche des lois de distribution d'échantillonnage doit être empirique par tirage au sort dans la loi ajustée afin de créer un nombre suffisamment grand d'échantillons fictifs de la même taille que l'échantillon observé ( $N$  ou  $N'$  suivant son origine) sur lesquels se fait la détermination des dites distributions. Ce travail requiert l'usage de l'ordinateur.

Dans le cadre de nos Exercices d'application, on présente un exemple de calcul empirique approché de l'intervalle de confiance sur un quantile d'une loi de GUMBEL, dont la formulation est due à MM. BERNIER et VERON de E.D.F.

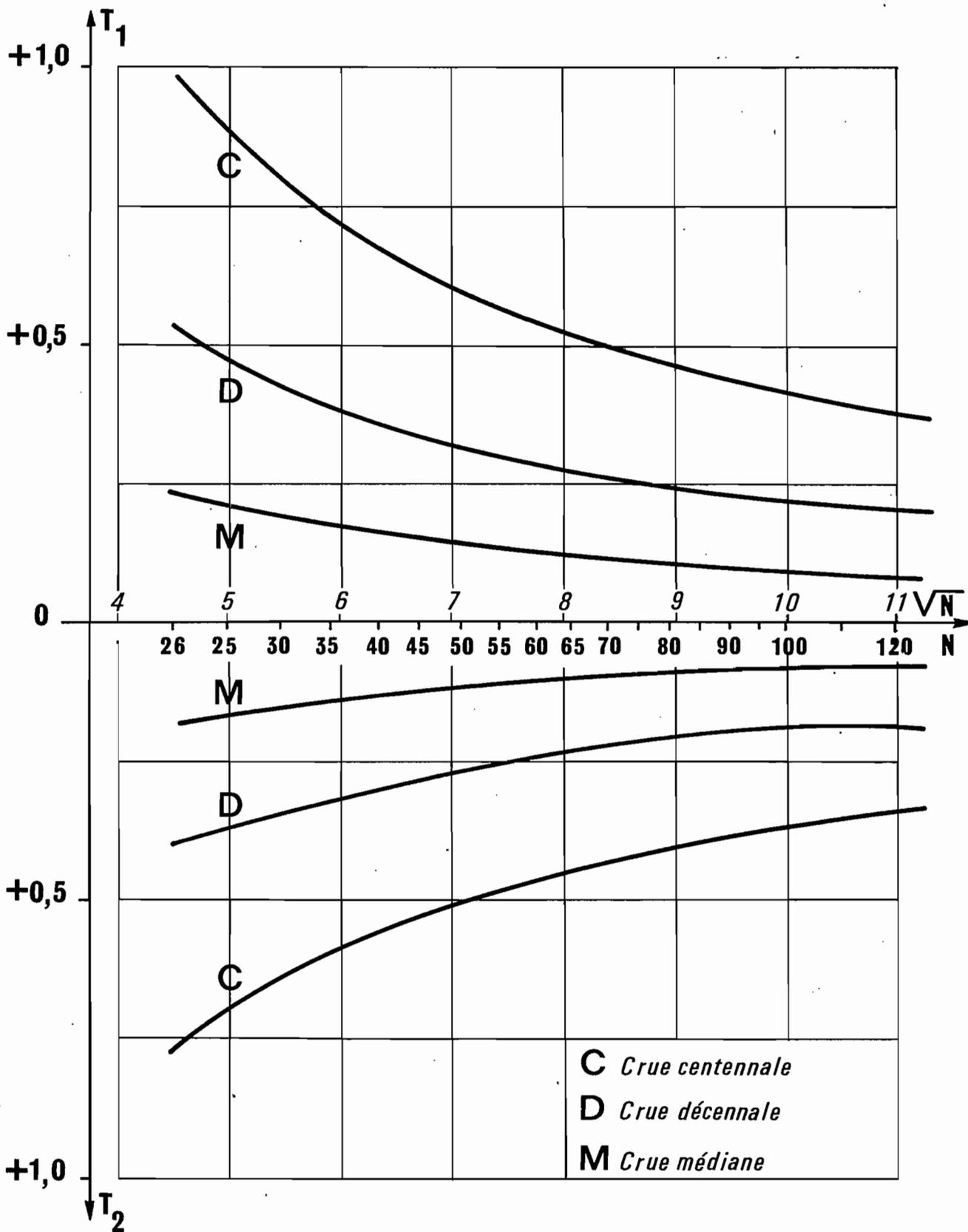
Soit  $\hat{Q}_{10}$  l'estimation de la crue décennale à partir d'un échantillon de  $N$  valeurs ajusté à la loi de GUMBEL : on a  $p$  % de chances de trouver la vraie valeur de  $Q_{10}$  dans l'intervalle  $(\hat{Q}_{10} - T_2\sigma, \hat{Q}_{10} + T_1\sigma)$ ,  $T_1$  et  $T_2$  étant des fonctions de  $N$  et de  $p$  pour la fréquence considérée (ici, décennale). En pratique, BERNIER et VERON ont établi des abaques, valables chacun pour un intervalle de confiance donné. Par exemple, pour l'IC 70 % (soit  $p = 0,70$ ), l'abaque ci-joint (graphique 10) donne en fonction de  $N$  (ou  $\sqrt{N}$ , plus commodément), les valeurs de  $T_1$  et  $T_2$  pour les crues médiane, décennale et centennale.

#### 6.5. - Exercice d'application des lois de GUMBEL et de PEARSON III à un échantillon de débits de crue

Les débits soumis à l'analyse sont les valeurs maximales annuelles des débits moyens journaliers de l'ILL à ERSTEIN (station du Pont de BOIS plus station du Pont de GERSTHEIM) ; voir le tableau ci-joint de 51 valeurs classées dans l'ordre chronologique de 1910 à 1962 (observations manquantes en 1920 et en 1943).

# LOI DE GUMBEL

Intervalle de confiance à 70% des crues estimées  
en fonction de la taille N de l'échantillon



C Crue centennale  
D Crue décennale  
M Crue médiane

DEBITS de CRUE de l'ILL à ERSTEIN  
(débits journaliers maximaux)

Années	Débit (m <sup>3</sup> /s)						
1910	516	1924	214	1937	192	1951	94
1911	120	1925	344	1938	80	1952	324
1912	42	1926	244	1939	205	1953	50
1913	205	1927	72	1940	182	1954	145
1914	158	1928	185	1941	452	1955	620
1915	204	1929	52	1942	82	1956	70
1916	203	1930	280	1944	360	1957	288
1917	135	1931	174	1945	340	1958	367
1918	316	1932	122	1946	126	1959	255
1919	550	1933	39	1947	485	1960	85
1921	33	1934	68	1948	134	1961	96
1922	225	1935	155	1949	30	1962	345
1923	203	1936	308	1950	324		

L'ILL est le collecteur de tous les torrents qui descendent des Vosges vers la plaine d'Alsace qu'il suit parallèlement au Rhin, avant de le rejoindre en aval de Strasbourg. La station d'Erstein est la dernière station aval de mesuré de tous les débits de l'ILL avant que les crues ne soient dirigées vers le Rhin par le canal de Gerstheim, seuls les débits ordinaires transitant dans le lit jusqu'à Strasbourg. A Erstein, le bassin de l'ILL a 3.200 km<sup>2</sup>.

On demande :

- de classer les valeurs observées par ordre croissant en regard de la fréquence expérimentale  $(r - 1/2)/N$  donnée pour  $N = 51$  dans le tableau suivant :

n° d'ordre n	fréquence: $\frac{n - 1/2}{N}$	n° d'ordre n	fréquence: $\frac{n - 1/2}{N}$	n° d'ordre n	fréquence: $\frac{n - 1/2}{N}$
1	0,0098	19	0,3628	37	0,7157
2	0,0294	20	0,3824	38	0,7353
3	0,0490	21	0,4020	39	0,7549
4	0,0686	22	0,4216	40	0,7746
5	0,0882	23	0,4412	41	0,7942
6	0,1079	24	0,4608	42	0,8138
7	0,1275	25	0,4804	43	0,8334
8	0,1471	26	0,5000	44	0,8530
9	0,1667	27	0,5196	45	0,8726
10	0,1863	28	0,5392	46	0,8922
11	0,2059	29	0,5589	47	0,9118
12	0,2255	30	0,5785	48	0,9314
13	0,2451	31	0,5981	49	0,9510
14	0,2647	32	0,6177	50	0,9706
15	0,2843	33	0,6373	51	0,9902
16	0,3039	34	0,6569		
17	0,3235	35	0,6765		
18	0,3432	36	0,6961		

- d'ajuster des lois de GUMBEL et de PEARSON III à cet échantillon de 51 débits classés et d'estimer les crues décennales et centennales ainsi que leurs intervalles de confiance à 70 % d'après GUMBEL.

Pour le déroulement des calculs, on donne les conseils suivants :

a) Loi de GUMBEL

On dispose d'un papier gradué, en ordonnées, suivant une échelle décimale pour le report des débits  $Q$  (une deuxième échelle, logarithmique, est prévue pour utilisation de la loi de FRECHET). En abscisses, on trouve à la fois la graduation régulière servant au report de  $y = a(Q - Q_0)$  et la graduation qui donne, en face des valeurs de  $y$ , celles de la fréquence théorique de non-dépassement  $e^{-y}$ .

La distribution expérimentale sera représentée par les 51 points de coordonnées  $F_e, Q$ .

On calculera la droite d'ajustement d'équation  $y = a(Q - Q_0)$  en appliquant les formules donnant les estimations de  $a$  et de  $Q_0$  en fonction de l'échantillon (résultats numériques fournis :  $\Sigma Q = 10\ 898$ ,  $\Sigma Q^2 = 3\ 354\ 448$ ,  $\Sigma Q^3 = 1\ 275\ 810\ 521$ ).

- On vérifiera que la droite passe bien au milieu des points expérimentaux.
- On reportera l'ensemble des résultats (points expérimentaux et droite d'ajustement) sur papier à abscisses gaussiennes (la droite devient une courbe, et les fréquences indiquées sur ce papier ne sont plus  $F$  mais  $F_1$  c'est-à-dire  $1 - F$ ). Ce deuxième graphe permettra de comparer l'ajustement à celui de PEARSON III.

b) Ajustement à la loi de PEARSON III

- On calculera les paramètres d'ajustement par les formules ad hoc, en fonction de l'échantillon (résultat numérique fourni :  $\Sigma \log Q_i = 113,240$ ). La valeur de  $\gamma$  sera arrondie à un chiffre après la virgule. On appliquera la méthode du maximum de vraisemblance (formules 26 et 27) et celle des moments (formules 28).

Le tracé de la courbe de fonction de probabilité doit se faire point par point. Sur papier à échelle logarithmique des probabilités, on obtient un ajustement sensiblement linéaire en portant en ordonnée la variable réduite  $u = a.Q$ . Afin de permettre une comparaison avec la loi de GUMBEL, il est conseillé d'utiliser un papier gaussien également (le même graphe) sur lequel la loi de PEARSON III a une allure courbe.

Le calcul des valeurs de fréquences théoriques requiert l'usage des Tables de PEARSON III d'usage assez long et complexe. Par souci de simplification, nous en fournissons ici un extrait dans lequel la valeur calculée de  $\gamma$  pour l'échantillon des crues de l'ILL a déjà été introduite, ce qui permet de n'avoir qu'une table (tableau 10).

Pour l'utilisation de la table de PEARSON (tableau 10), on calculera la variable :

$$u = \frac{a Q}{\sqrt{Y}} \quad (29)$$

qui sert de variable d'entrée, et on calculera par interpolation linéaire  $F(Q)$  avec 3 décimales de  $Q = 50$  à  $550$  et avec 4 décimales de  $Q = 650$  à  $850$ , les fréquences théoriques de dépassement  $F$  l'étant calculées pour les différentes valeurs suivantes de  $Q$  :  $50, 100, 150, 200, 250, 350, 450, 550, 650, 750$  et  $850$ . Les crues décennales et centennales peuvent être lues directement sur les courbes d'ajustement.

TABLEAU 10

(extrait simplifié des tables de PEARSON)

u (Q)	F (Q)	u (Q)	F (Q)
0	0,000	3,0	0,922
0,1	0,007	3,1	0,930
0,2	0,028	3,2	0,938
0,3	0,059	3,3	0,945
0,4	0,099	3,4	0,951
0,5	0,144	3,5	0,956
0,6	0,192	3,6	0,961
0,7	0,243	3,7	0,966
0,8	0,294	3,8	0,970
0,9	0,345	3,9	0,973
1,0	0,394	4,0	0,9761
1,1	0,442	4,1	0,9788
1,2	0,488	4,2	0,9813
1,3	0,532	4,3	0,9834
1,4	0,573	4,4	0,9853
1,5	0,611	4,5	0,9870
1,6	0,647	4,6	0,9886
1,7	0,680	4,7	0,9899
1,8	0,710	4,8	0,9911
1,9	0,738	4,9	0,9921
2,0	0,764	5,0	0,9931
2,1	0,788	5,1	0,9939
2,2	0,809	5,2	0,9946
2,3	0,828	5,3	0,9952
2,4	0,846	5,4	0,9958
2,5	0,862	5,5	0,9963
2,6	0,877	5,6	0,9967
2,7	0,890	5,7	0,9971
2,8	0,902	5,8	0,9975
2,9	0,912	5,9	0,9978



CHAPITRE VII - ANALYSE DES CRUES PAR MODELE GLOBAL  
(HYDROGRAMME UNITAIRE)

Les six chapitres précédents traitaient de l'information hydropluviométrique constituée d'échantillons, de plus ou moins longue durée, d'observations effectuées en des stations permanentes de réseaux hydropluviométriques. L'abondance de l'information en permettait un traitement final par les moyens statistiques.

Le chapitre VII et les trois suivants sont consacrés à exposer les méthodes d'analyse développées pour saisir des informations de courte durée, collectées sur des bassins versants de faible superficie.

Le chapitre VI a permis de montrer le caractère particulier de l'information "crue" et l'intérêt que présente son analyse par modèle de reconstitution de la chronique des débits. Lorsque l'on ne possède pas d'information en quantité suffisante, l'analyse statistique est impossible et le recours à l'analyse globale devient une nécessité. Cette situation est généralement celle que l'on rencontre dans l'étude des petits cours d'eau, ceux dont les bassins drainés ont des superficies qui sont dans une première approximation de l'ordre de quelques dizaines à quelques centaines de km<sup>2</sup>. Cette situation existe parce qu'il est rare qu'il y ait des stations de mesures à l'issue d'aussi petits bassins dans un service gestionnaire de réseau, étant donné les difficultés que présenterait une telle gestion.

7.1. Etudes sur bassins représentatifs, buts et moyens

La situation de carence d'observations hydrométriques à l'issue de petits bassins qui vient d'être mise en lumière est générale dans la grande majorité des pays. Mais ces petits bassins ne restent pas en dehors des activités économiques et font, comme les grands bassins, l'objet d'aménagements hydrauliques qui présentent souvent des caractères spécifiques : débouchés d'ouvrages d'art routier ou ferroviaire, prise d'eau pour adduction d'eau rurale, retenue collinaire à usage mixte consommation-irrigation. Tous ces aménagements ont en commun la particularité qu'ils peuvent être calculés avec des risques non négligeables de rupture, celle-ci étant rarement catastrophique, c'est-à-dire pour des crues de fréquence pas trop rare.

Un outil spécial a été forgé par les hydrologues pour répondre à ce problème. Il s'agit du bassin représentatif, encore appelé, selon certains traits particuliers qu'il peut prendre, expérimental, de recherche ou d'investigation. Sur ce bassin de petite superficie, on concentre d'importants moyens de mesure des paramètres hydropluviométriques. La forte densité des points de mesure et la cadence élevée des observations permettent de pallier en quelques années l'absence d'information hydrométrique à condition que l'on possède à proximité du bassin, dans un climat identique, une station de référence pluviométrique susceptible de fournir une connaissance statistique du régime des pluies.

Cette condition remplie, le bassin représentatif ainsi équipé permet d'atteindre à la connaissance du régime hydrologique des petits cours d'eau et tout particulièrement à celle des crues à laquelle nous nous limitons ici. L'analyse des crues observées s'effectue essentiellement à l'aide du modèle global qu'est l'hydrogramme unitaire dont le développement est l'objectif direct du présent chapitre. Cette analyse des crues observées doit permettre l'estimation de crues de fréquence rare pour le dimensionnement de divers aménagements. Cette estimation requiert la connaissance :

- a) statistique du régime local des précipitations,
- b) des règles d'application de cette étude statistique ponctuelle à une surface de bassin (abattement),
- c) de la fonction complexe de transformation précipitation-saturation-ruissellement,
- d) de l'hydrogramme unitaire.

La méthodologie de cette estimation des crues rares fait l'objet des chapitres VIII et IX.

## 7.2. Théorie et limites de l'hydrogramme unitaire

### 7.2.1. Rappels théoriques

Elaborée par L. K. SHERMAN dès 1932 aux U.S.A., la théorie de l'hydrogramme unitaire a fait l'objet de nombreux développements et applications dans les années suivantes de la part d'autres hydrologues américains. Devenue méthode, la théorie de l'hydrogramme unitaire a été appliquée avec quelques adaptations par les hydrologues de l'ORSTOM, sur plus de 250 bassins des régions arides et intertropicales du globe, sur lesquelles cette utilisation a été très fructueuse. C'est de cette expérience que nous tirons la teneur pratique des deux chapitres VII et VIII, dans lesquels une méthode claire et simple est exposée sans cacher qu'elle évite certaines complexités et anomalies de détail et que d'autres méthodes plus compliquées ont été et sont encore parfois employées.

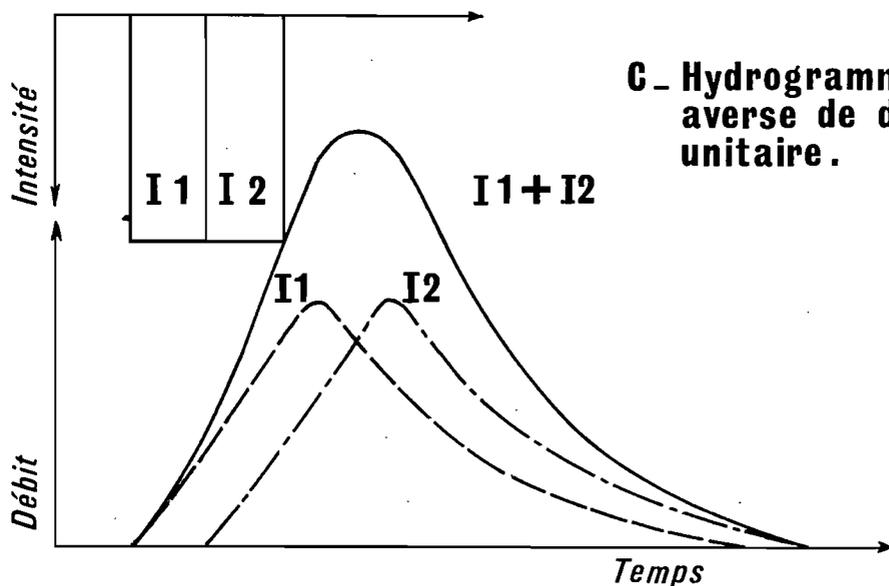
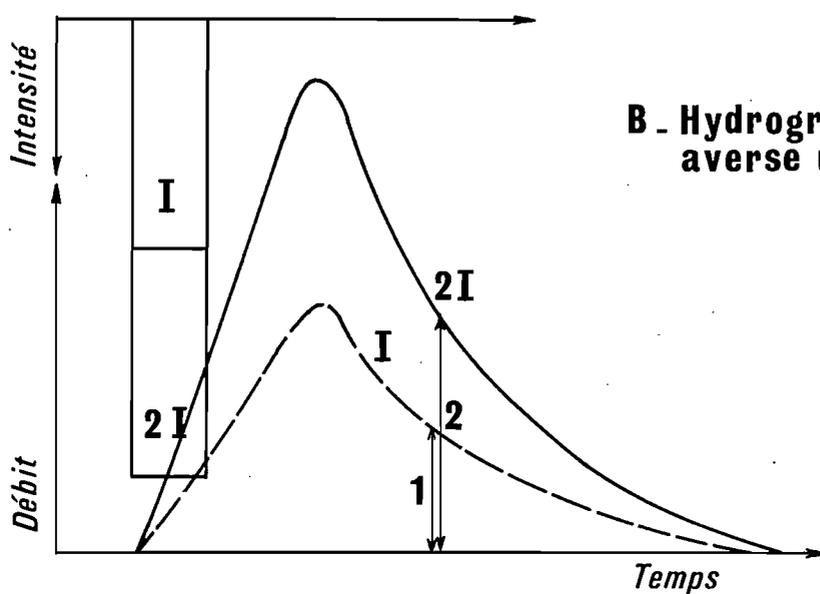
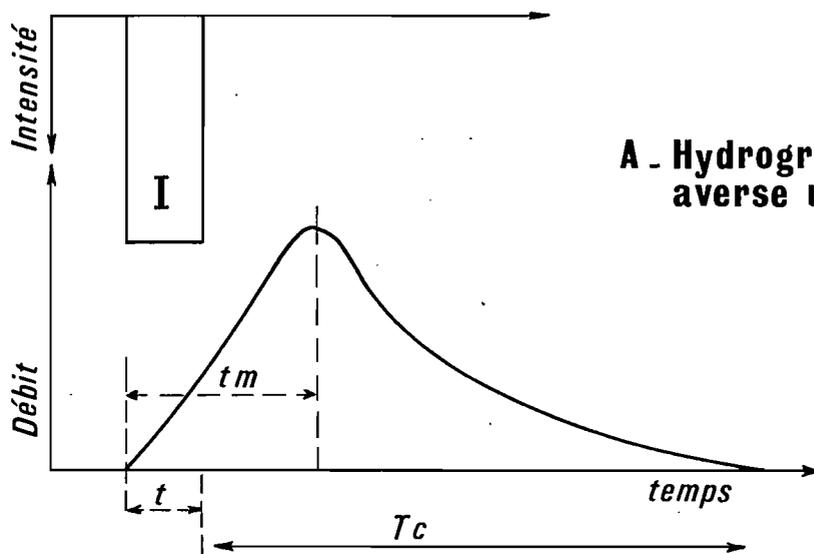
Le graphe 11 résume en trois schémas la théorie de l'hydrogramme unitaire.

Sous réserve de vérification des conditions d'homogénéité du bassin versant et du régime des précipitations, qui seront explicitées en 7.22, la théorie de l'hydrogramme unitaire découle de l'observation suivante :

Une averse homogène couvrant la totalité du bassin et d'intensité constante  $I$  engendre un hydrogramme de forme et d'intensités (ou débits) caractéristiques quand la durée de cette averse est suffisamment faible.

Cette averse est appelée averse unitaire et l'hydrogramme engendré est l'hydrogramme unitaire.

## Schéma théorique de l'hydrogramme unitaire



Deux corollaires découlent des hypothèses d'additivité et de linéarité appliquées à l'hydrogramme unitaire ainsi conçu :

a) une averse unitaire d'intensité double  $2 I$  engendre un hydrogramme unitaire de même forme et dont les débits sont doubles, par homothétie ou affinité,

b) une averse d'intensité  $I$  de durée double de l'averse unitaire engendre une crue non unitaire formée par la composition de deux hydrogrammes unitaires décalés entre eux de la durée de l'averse unitaire.

Pour expliciter en termes hydrologiques pratiques cet énoncé de la théorie de l'hydrogramme unitaire, il faut utiliser un certain nombre de variables caractéristiques de l'averse et de l'hydrogramme que nous allons définir :

- $t$  durée de l'averse unitaire d'intensité  $I$
- $T_c$  temps de concentration du bassin défini comme la durée mise pour atteindre l'exutoire par la goutte d'eau tombant en un point du bassin le plus éloigné de cet exutoire
- $t_m$  temps de montée de l'hydrogramme unitaire

La durée de ruissellement de l'hydrogramme unitaire est évidemment égale à  $t + T_c$ . Si une averse homogène d'intensité  $I$  durait indéfiniment, la crue engendrée tendrait asymptotiquement (courbe en S) vers un maximum atteint lorsque cette durée dépasse  $T_c$ . La différence entre deux courbes en S, décalées de  $t$ , est représentée par l'hydrogramme unitaire.

La durée de l'averse unitaire  $t$  étant faible devant  $T_c$ , on peut dire qu'une averse homogène est unitaire lorsque la durée du ruissellement de l'hydrogramme est constante et égale à une valeur limite inférieure, peu supérieure à  $T_c$ .

L'hydrogramme unitaire ayant une forme fixe pour un bassin donné, cela veut dire que son temps de montée  $t_m$ , comme celui du ruissellement, est constant et égal à une valeur limite inférieure ; cela veut dire également que si l'hydrogramme est divisé en  $n$  tranches de durée  $d$ , le pourcentage du volume ruisselé total dû à chaque tranche est une constante caractéristique du bassin.

### 7.2.2. Limites d'application

Il n'y a hydrogramme unitaire que s'il y a ruissellement généralisé sur l'ensemble du bassin, ce qui implique trois contraintes :

a) les précipitations doivent être intenses, du type orage d'été des pays tempérés ou du type tornade ou grain des zones intertropicales,

b) la superficie du bassin versant ne doit pas dépasser celle couverte normalement par une précipitation intense et homogène,

c) le bassin versant doit être de constitution physique homogène quant à sa susceptibilité au ruissellement c'est-à-dire qu'à une sollicitation d'intensité donnée, il réponde dans sa totalité par du ruissellement.

En pratique, ces contraintes s'expriment par une liaison entre durée d'averse et surface de bassin versant.

A titre d'exemple, les règles empiriques suivantes étaient appliquées aux U.S.A., lors de la mise en oeuvre de la méthode :

Durée de l'averse unitaire (heures)	Surfaces du bassin (km <sup>2</sup> )
12	2500
6 à 8	250 à 2000
2	50

Pour les bassins inférieurs à 50 km<sup>2</sup>, le temps de concentration étant une variable difficile à déterminer, on s'appuyait sur le temps de montée et l'on disait unitaire toute averse de durée inférieure au tiers ou au quart de ce temps de montée de l'hydrogramme. Dans les régions intertropicales, l'homogénéité de l'averse et du bassin n'est obtenue que sur de petites surfaces, comprises entre 5 et 200 km<sup>2</sup> environ, la bande de 10 à 50 km<sup>2</sup> étant la plus sûre. Au-delà de 200 km<sup>2</sup>, les bassins sont rarement couverts en totalité par l'averse ; en dessous de 5 km<sup>2</sup>, l'averse n'est jamais unitaire car les temps de montée y sont de quelques minutes.

Le domaine d'application de l'hydrogramme unitaire est donc fonction du climat et du milieu physique.

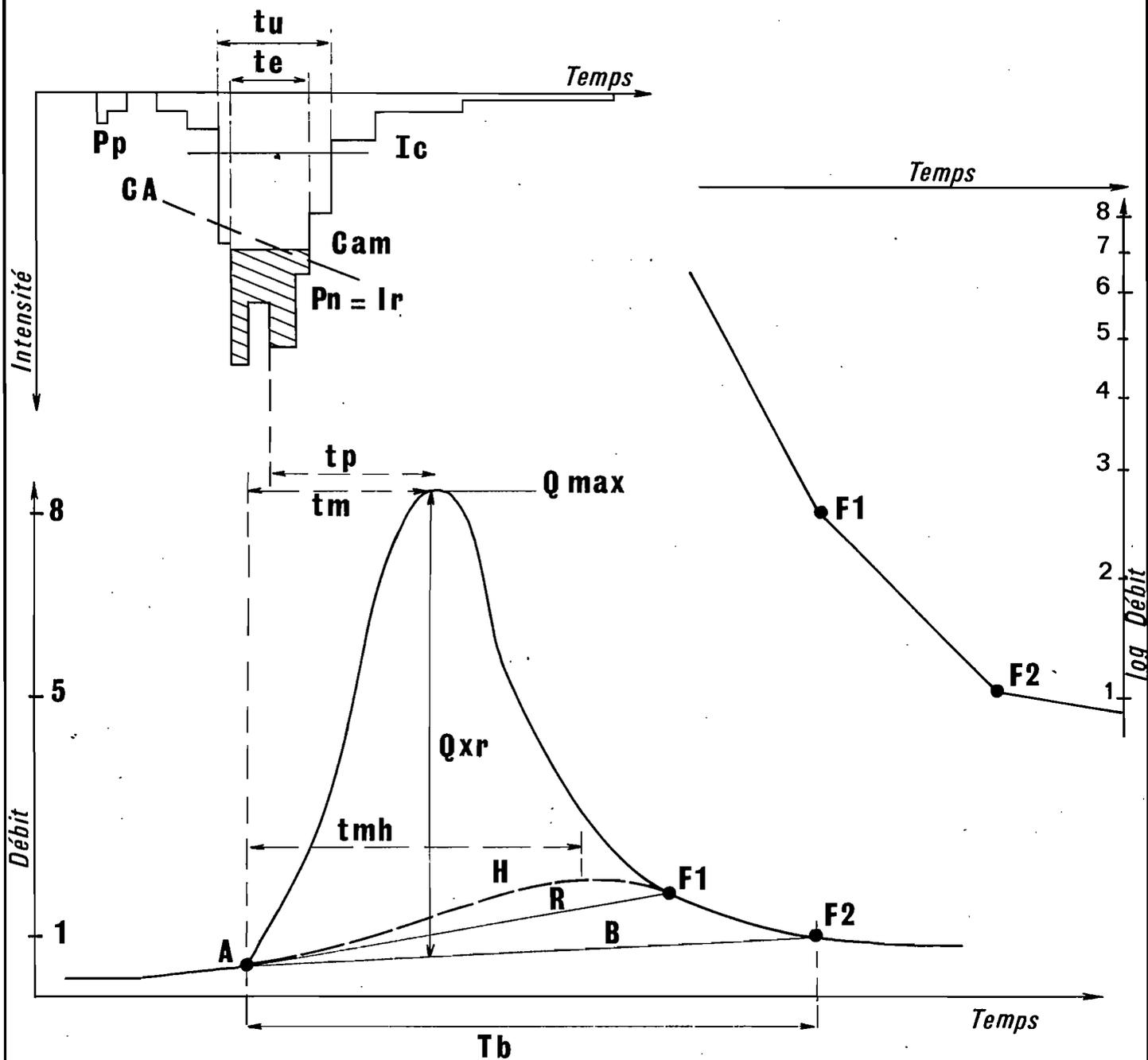
### 7.3. Sélection et calcul des hydrogrammes unitaires

#### 7.3.1. Caractéristiques des événements averse-crue (Graphe 12)

L'averse provoque une réponse du bassin versant qui peut être soit nulle - absence de crue -, soit positive - présomption de crue.

Une réponse positive peut être la manifestation d'une crue localisée, d'une crue généralisée ou d'un écoulement hypodermique.

# Valeurs caractéristiques de la pluie et de la crue à tendance unitaire



L'écoulement hypodermique ou ruissellement retardé se produit dans la couche d'humus ou de matériaux en décomposition à la surface du sol ou dans les premiers centimètres de ce sol ; il est d'autant plus net et abondant que la végétation arborée est importante.

L'écoulement hypodermique se manifeste généralement, quand il existe, comme intégré dans le ruissellement, avec lequel il vient se surimposer à l'écoulement de base dû au drainage de la nappe, s'il y a lieu.

L'écoulement hypodermique peut s'observer seul ; il est caractérisé par un écoulement très lent ; son temps de montée  $t_{mh}$  est très supérieur à celui du ruissellement  $t_m$ .

Une crue localisée provient d'une averse n'ayant intéressé qu'une fraction du bassin ; son hydrogramme est déformé par rapport à l'hydrogramme unitaire.

Si la réponse est une crue généralisée à l'ensemble du bassin, il peut s'agir d'une crue unitaire ou d'une crue complexe plus ou moins aisément décomposable en  $n$  hydrogrammes unitaires. La sélection des averses et crues unitaires ne peut se faire qu'après une analyse préparative ayant fait ressortir les caractéristiques principales des événements averse-crue.

Ces caractéristiques sont représentées sur le graphe 12 et leur définition et leur détermination appellent les commentaires suivants :

a) si le volume de ruissellement est égal à  $V_r$  (détermination par séparation des écoulements développée au 7.3.2.), il lui correspond une pluie nette  $P_n = I_r$  lame de ruissellement telle que

$$I_r = \frac{V_r}{A} \quad (\text{aux unités près}), A \text{ étant la surface du bassin,}$$

b) la fraction de la pluie ayant engendré le ruissellement, donc la pluie nette, est prise à partir des plus fortes intensités et constitue la pluie efficace  $P_e$ , de durée  $t_e$ ,

c) la capacité apparente moyenne d'absorption

$$C_{am} = \frac{P_e - P_n}{t_e} ; \text{ elle est choisie arbitrairement constante dans le temps}$$

parce que plus facile à calculer que la capacité d'absorption  $C_A$  qui décroît avec le temps suivant une loi difficile à connaître. On considère que la capacité d'absorption contient avec la part de l'infiltration, celle des pertes par stockage superficiel et par évapotranspiration,

d) la difficulté d'affirmer que la pluie efficace est la seule fraction de la pluie ayant engendré du ruissellement conduit à parler de la pluie utile, plus grande qu'elle, dont la définition est d'être assez intense pour avoir pu raisonnablement provoquer du ruissellement ; on a  $P_u \geq P_e$  et  $t_u \geq t_e$ ,

e) une averse répond généralement au schéma suivant : un corps central intense (à peu près la pluie utile) précédé d'une pluie préliminaire  $P_p$ , liée ou non à lui sans intermittence de pluie, d'intensités souvent faibles, et de durée assez courte ; ce corps est suivi d'une traîne également à faible intensité et de durée souvent bien plus longue que celle du corps,

f) on choisit le plus souvent la pluie utile, correspondant au corps, comme la fraction de l'averse tombant avec une intensité supérieure à un seuil critique  $I_c$ , d'autant plus élevé que le bassin est perméable,

g) l'hydrogramme est caractérisé par son débit maximal  $Q_x$  et trois temps, le temps de montée  $t_m$  écart entre le début et le maximum du ruissellement, le temps de base  $T_b$  ou durée du ruissellement (voir 7.3.2.), et le temps de réponse  $t_p$  écart entre les centres de gravité de la pluie et de la crue, mesuré en pratique entre le moment où 50 % de la pluie utile sont tombés et le maximum de ruissellement.

### 7.3.2. Sélection des crues unitaires

Sur un bassin versant, après au moins une année d'observations, on procède à l'analyse des réponses du bassin aux précipitations et l'on calcule pour chaque événement averse-crue identifié toutes les caractéristiques définies au paragraphe précédent, plus certaines autres qui situent chaque événement dans la chronique des événements de l'année afin d'estimer l'état de saturation préalable du bassin (cf. chap. VIII).

Nous allons maintenant poursuivre ce chapitre, en utilisant un exemple à titre d'illustration. L'exemple retenu est celui du bassin de KORHOGO (Côte d'Ivoire) qui draine une superficie de 3,63 km<sup>2</sup> de terrains d'altérations granitiques contenant une nappe permanente d'arènes ; ces terrains sont en majorité cultivés assez intensément (plantes vivrières, mil, manioc, arachides ...). Le climat régnant est tropical pur avec une pluviosité de 1400 mm par an, concentrée de mai à octobre. A l'issue de 4 années d'observations, une étude du ruissellement fut entreprise. Des tableaux de caractéristiques des averses et crues ont été établis pour chaque année, sur le modèle de celui de 1963, présenté dans le tableau 11.

.../...

- TABLEAU 11 -

Crues 1963

BASSIN de KORHOGO - (S = 3,63 km<sup>2</sup>)

- 1er semestre -

Pluviométrie					Crue											
1	2	3	4	5	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
N°	Date	P <sub>max.</sub> mm	P <sub>moy.</sub> mm	P <sub>u</sub> mm	V <sub>r</sub> 10 <sup>3</sup> l <sup>3</sup>	I <sub>r</sub> %	K <sub>r</sub> %	K <sub>ru</sub> %	t <sub>m</sub> mn	T <sub>b</sub> h-mn	Q <sub>o</sub> m <sup>3</sup> /s	Q <sub>max.</sub> m <sup>3</sup> /s	Q <sub>rx</sub> m <sup>3</sup> /s	Q <sub>rx</sub> lr	Obs.	
5	10-6	25,5	23,2	20	4,86	1,34	5,85	6,7	45	5-30	0,035	1,15	1,11	0,82	U - AM	
6	12-6	28,7	22,9	17	1,34	0,37	1,60	1,59	75	5-30	0,030	0,27	0,23	0,62	-	
7	20-6	24,0	19,5	9	0,77	0,21	1,07	2,33	60	8-00	0,030	0,079	0,045	0,21	-	
8	29-6	21,5	17,4	13	0,48	0,13	0,75	1,00	90	5-50	0,02	0,074	0,050	0,38	-	
9	30-6	70,3	53,0	26	9,36	2,58	4,87	9,92	60	8-00	0,030	2,30	2,25	0,87	C - AV	

P<sub>u</sub> calculé pour I<sub>c</sub> > 18 mm/h

Crues 1963

BASSIN de KORHOGO - (S = 3,63 km<sup>2</sup>)

- 2ème semestre -

		Pluviométrie			Crue										
1	2	3	4	5	8	9	10	12	13	14	15	16	17	18	
N°	Date	P <sub>max.</sub> mm	P <sub>moy.</sub> mm	P <sub>u</sub> mm	V <sub>r</sub> 10 <sup>3</sup> m <sup>3</sup>	l <sub>r</sub> mm	K <sub>r</sub> %	t <sub>m</sub> mn	T <sub>b</sub> h-mn	Q <sub>o</sub> m <sup>3</sup> /s	Q <sub>max.</sub> m <sup>3</sup> /s	Q <sub>rx</sub> m <sup>3</sup> /s	Q <sub>rx</sub> /l <sub>r</sub>	Obs.	
10	5-7	28,0	24,6	14	1,20	0,33	1,34	40	5-40	0,036	0,186	0,150	0,45	U -	
11	8-7	37,0	33,0	31,5	11,90	3,28	9,94	40	5-30	0,036	3,1	3,060	0,93	U -	
14	22-7	19,7	11,6	8	0,57	0,16	1,38	60	5	0,030	0,118	0,088	0,55	U - AV	
15	23-7	33,2	29,8	16	0,96	0,25	0,84	25	5-20	0,030	0,150	0,120	0,48	U -	
16	30-7	23,5	20,8	19	1,45	0,40	1,92	35	5-30	0,040	0,340	0,290	0,72	C - AV	
17	4-8	19,9	16,2	13,5	1,27	0,35	2,16	60	5	0,056	0,204	0,148	0,43	C - CT	
18	5-8	78,6	71,5	53	64,86	17,86	24,98	55	7	0,100	7,600	7,400	0,42	C - AV	
19	11-8	34,0	26,6	22	10,32	2,84	10,68	60	6	0,080	3,950	3,870	1,36	C - AV	
21	20-8	42,9	35,7	25	7,06	1,94	5,43	25	8-40	0,050	1,800	1,730	0,89	C - CT	
24	26-8	11,5	9,0	6	0,72	0,20	2,22	20	4	0,122	0,245	0,123	0,62	U -	
25	29-8	42,6	38,1	25	17,29	4,76	12,49	45	7	0,100	3,00	2,880	0,60	C -	

P<sub>u</sub> calculé pour I > 18 mm/h

Outre des variables déjà définies en 7.3.1., on y trouve les autres variables suivantes :

- $P_{max}$  maximum ponctuel observé de précipitation
- $Q_0$  débit de base avant la crue
- $Q_{rx}$  débit maximal de ruissellement
- $Q_{rx}/lr$  débit maximal de ruissellement pour une lame ruisselée de 1 mm.

Une colonne observations rend compte de l'analyse de la répartition spatiale des précipitations (CT centrale, AV maximum en aval ...), et du caractère unitaire U ou complexe C de l'événement (critère de la pluie utile inférieure à la moitié du temps de montée, et d'une averse à corps central unique et intense).

La sélection des crues unitaires se fait en deux stades, d'abord en recherchant les averses unitaires, ensuite en regardant les caractéristiques des crues résultantes. On suit pour cela un processus par élimination :

a) recherche des averses d'une hauteur suffisante pour avoir provoqué une crue généralisée et de répartition spatiale assez homogène pour ne pas engendrer un hydrogramme déformé,

b) les averses satisfaisant les critères précédents doivent avoir une durée de pluie utile inférieure à la moitié ou aux deux tiers du temps de montée pour un bassin de quelques dizaines de km<sup>2</sup>,

c) les averses satisfaisant aux critères précédents doivent également présenter un hyétogramme de forme homogène dont les tranches à forte intensité sont rassemblées dans un corps unique, partie intégrante et principale de la pluie utile. La présence de pointes à forte intensité un peu espacées dans le temps risque de provoquer des réactions distinctes du bassin et un hydrogramme résultant déformé.

On attend généralement le contrôle des hydrogrammes pour éliminer des événements, mais l'on peut déjà en écarter quelques uns à ce stade d'examen de l'averse. Ainsi sur l'exemple de KORHOGO (Tableau 11) peut-on facilement laisser de côté les événements n° 7, 14 et 24 dont les hauteurs de pluie utile sont trop faibles pour qu'elles aient pu avec certitude engendrer un ruissellement généralisé.

Avant de procéder au contrôle des crues, il faut avoir séparé le ruissellement de l'écoulement. Pour cela, on trace la courbe de décrue de l'hydrogramme observé sur papier semi-logarithmique (temps en abscisses, log. du débit en ordonnée) comme sur le graphe 12. On constate en général que la droite de décrue (log. débit fonction du temps) présente deux changements de pente :

- le premier en F1 correspond à l'arrêt du ruissellement superficiel immédiat et au passage au ruissellement retardé ou hypodermique,

- le second F2 coïncide avec la cessation de tout ruissellement et le passage à l'écoulement de base.

Si le second changement de pente est presque toujours net, dans la mesure évidemment où une nouvelle crue ne démarre pas sur la décrue de la précédente, il n'en est pas de même du premier. En effet le ruissellement hypodermique n'existe que sur les bassins soit très perméables, soit forestiers avec grosse litière végétale, et d'assez faible pente ; en outre, son importance est variable en cours de saison dans certains cas. Si le ruissellement hypodermique n'est pas relativement abondant vis-à-vis du ruissellement superficiel, le changement de pente F1 n'est pas net et se confond souvent avec le second changement F2, ce qui rend la séparation des formes d'écoulement plus délicate. Aussi, sauf étude particulière orientée vers la connaissance du ruissellement hypodermique lorsqu'il est abondant, vaut-il mieux considérer ensemble ruissellements superficiel et hypodermique et séparer seulement l'écoulement de base. Pour ce faire, le point F2, déterminé sur le papier logarithmique, est reporté sur l'hydrogramme et l'on trace la droite B reliant ce point F2 au début A du ruissellement (graphe 12) ; cette droite est sensée représenter la séparation entre les deux formes de ruissellement et l'écoulement de base ; la distance entre A et F2 correspond au temps de base  $T_b$ , durée du ruissellement. Cette séparation linéaire est une simplification qui n'introduit pas d'erreur significative. En réalité, la séparation serait curviligne à convexité vers les débits de ruissellement, et toutes proportions gardées la différence correspondrait à celle qu'il y a entre la droite ARF1 de séparation linéaire entre ruissellement superficiel et hypodermique et la courbe H dont la forme peut se déduire d'observations de réactions aux pluies ne contenant que du ruissellement hypodermique pur (graphe 12).

L'hydrogramme de ruissellement se déduit de l'hydrogramme observé en soustrayant point par point des ordonnées de ce dernier celles de la droite ABF2. La quantité d'eau inscrite entre cet hydrogramme observé et cette droite est le volume de ruissellement  $V_r$  ; le débit maximal de ruissellement  $Q_{xr}$  ne correspond plus qu'à la partie du débit maximal observé  $Q_x$  situé au dessus de la droite ABF2.

On peut achever la sélection des crues unitaires en procédant au contrôle des hydrogrammes de ruissellement ainsi déterminés :

a) les crues issues des averses unitaires ont des temps de montée et de base qui doivent présenter des valeurs tendant vers des limites inférieures, lorsque la durée des averses n'est pas trop longue. A KORHOGO, ces limites semblent être à peu près 40 minutes et 4 heures,

b) les hydrogrammes unitaires étant affins, il suffit pour les comparer de ramener leurs volumes à un volume unité ; un contrôle rapide s'effectue sur les débits maximaux  $Q_{rx}$  ramenés à une lame ruisselée  $l_r$  de 1mm, en faisant  $Q_{rx}/l_r$ . Les valeurs de  $Q_{rx}/l_r$  sont voisines et élevées pour les crues unitaires ; elles sont plus faibles pour les crues complexes ou hypodermiques et nettement plus élevées pour des crues dues à des averses localisées à l'aval des bassins.

Le critère du temps de montée à KORHOGO (tableau 11) conduit à éliminer les crues n° 6, 8, 9, 17, 18 et 19 (tm supérieur à 60 mn). Le critère du temps de base confirme l'élimination des crues n° 9, 18 et 19 et conseille celle de la crue n° 25 (tous Tb supérieurs à 6 heures).

L'examen final des quotients  $Q_{rx}/I_r$  montre que des valeurs supérieures à 1 correspondent à des crues localisées à l'aval (cas de la n° 19) et que des valeurs inférieures à 0,50 désignent des crues molles complexes (crues n° 7, 8, 10, 15, 17 et 18).

Le bilan des éliminations après contrôle des averses et des crues ne laisse plus subsister que les événements n° 5, 11, 16 et 21. Les deux derniers sont dus à des averses unitaires mais ayant deux pointes d'intensités séparées ; il vaut mieux dans ce cas les écarter. Il ne reste plus que les crues n° 5 et 11 qui peuvent être sélectionnées comme unitaires. Le déchet est important mais l'expérience montre qu'il faut être sévère dans l'application des contrôles si l'on veut avoir des crues réellement unitaires.

### 7.3.3. Calcul de l'hydrogramme unitaire type du bassin

Le travail de sélection opéré sur l'ensemble des événements averse-crue observés sur un bassin, on peut envisager d'analyser les crues unitaires retenues dès que leur nombre est suffisant (au moins cinq).

La comparaison des crues unitaires s'effectue sur leurs hydrogrammes de ruissellement - donc après séparation de l'écoulement de base - ramenés à un volume correspondant à une lame équivalente de 1 ou de 10 mm, selon que le bassin a un faible ou un fort ruissellement, afin que les hydrogrammes ainsi réduits n'aient pas des valeurs de débits extraordinaires.

La représentation numérique des hydrogrammes de ruissellement unitaires ainsi réduits peut se faire de diverses manières :

a) en donnant les débits relatifs à certains instants repérés de part et d'autre du maximum auquel correspond l'origine des temps ; les intervalles de temps peuvent être constants mais pour bien représenter un hydrogramme, il peut être suffisant d'avoir un intervalle  $\Delta t$  pour les forts débits - montée et début de décrue - et des intervalles multiples - 2 à 4  $\Delta t$  - pour les faibles débits de fin de décrue,

b) en calculant les débits moyens pour divers intervalles de temps et en passant aux volumes correspondants qui sont exprimés en pourcentages du volume total ruisselé ; on peut dans le même ordre d'idée cumuler ces volumes partiels en les exprimant également en pourcentages.

Le graphe 13 montre comment s'effectuent ces représentations et leurs différences.

Le premier mode de représentation est recommandé car il est plus direct puisqu'il évite le passage par les volumes.

Dans le découpage du temps de ruissellement, il est indispensable dans la première façon de représenter l'hydrogramme, de prendre le débit maximal et dans la seconde un intervalle centré sur ce maximum, intervalle auquel correspond le pourcentage de pointe du bassin.

L'exemple de KORHOGO permet ici encore de suivre mieux le déroulement de l'analyse. Après trois années d'observations (1962-64), on a pu retenir 6 crues unitaires, dont les deux sélectionnées dans l'exemple précédent (7.3.2.). Le tableau 12 ci-dessous contient les valeurs numériques des six hydrogrammes de ruissellement réduits à une lame de 1 mm ( $V_r = 3\,630\text{ m}^3$  puisque la surface  $S = 3,63\text{ km}^2$ ).

Les intervalles de temps sont de 10 minutes ; on aurait pu les prendre de 20 minutes en fin de décrue, disons après + 40 minutes suivant le maximum, sans perdre de précision. On peut remarquer une légère dispersion des débits à un instant donné, entre les divers hydrogrammes. Ceci est dû bien entendu au fait que les principes théoriques d'homogénéité des pluies et de réaction du bassin sont toujours un peu altérés en pratique. Il est donc judicieux de choisir pour former l'hydrogramme type caractéristique du bassin non les débits moyens mais les médians, en vérifiant que le total correspond toujours au volume unité retenu. A titre de comparaison, on donne ci-dessous les valeurs correspondantes de l'hydrogramme médian exprimées en volumes et en volumes cumulés pour le Bassin de KORHOGO. Afin de mieux cerner le maximum, les intervalles ne coïncident pas avec ceux des débits (voir graphe 13) sur cet exemple.

Intervalles de temps cumulés	15'	25'	35'	45'	55'	65'	75'	85'	105'	125'	145'	165'
Volume en %	1	4,1	10,1	15,4	13,9	11,3	8,9	6,8	10,3	7	4,8	3,3
Volumes cumulés en %	1	5,1	15,2	30,6	44,5	55,8	64,7	71,5	81,8	88,8	93,6	96,9
"	185'	205'	230'									
"	1,9	0,9	0,3									
"	98,9	99,7	100									

On peut remarquer qu'au maximum de 0,88 m<sup>3</sup>/s après 40 minutes de temps de montée correspond en volume un pourcentage de pointe de 15,4 % entre 35 et 45 minutes après le début de la crue.

Constituer un hydrogramme type de bassin en admettant qu'il est représenté par la médiane des hydrogrammes unitaires observés revient implicitement à convenir que les conditions d'écoulement sont constantes.

# Diagramme de distribution unitaire

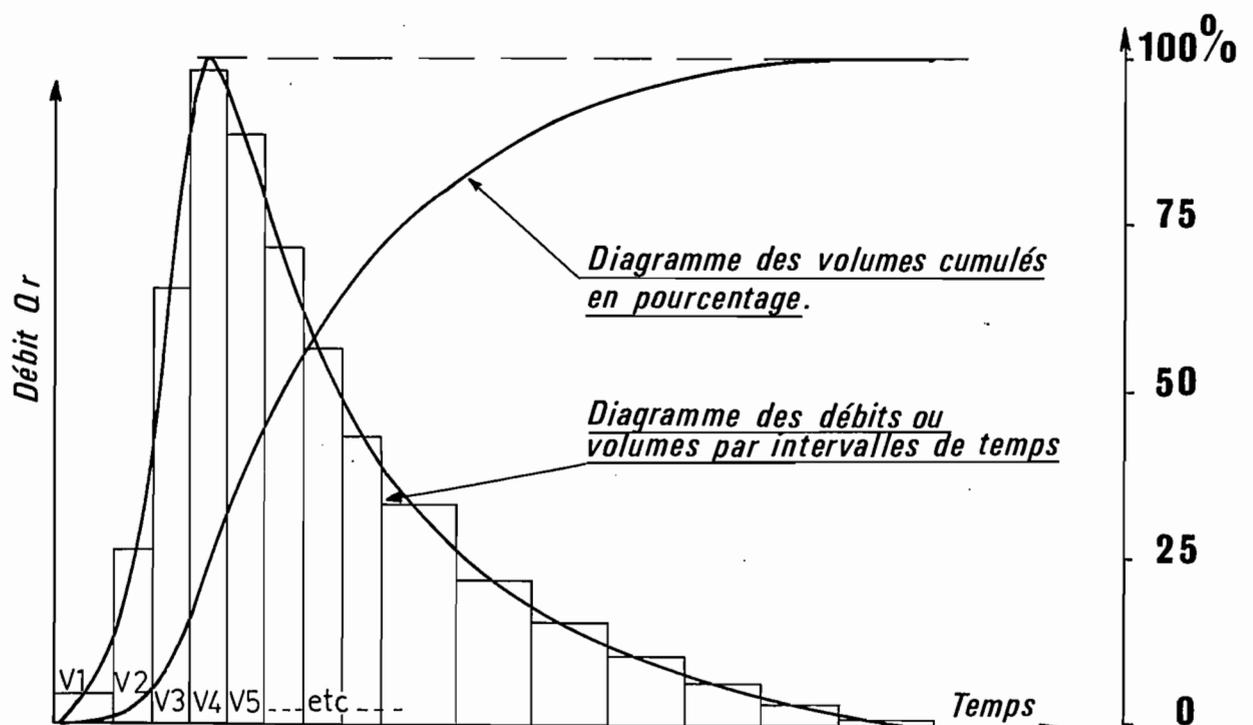
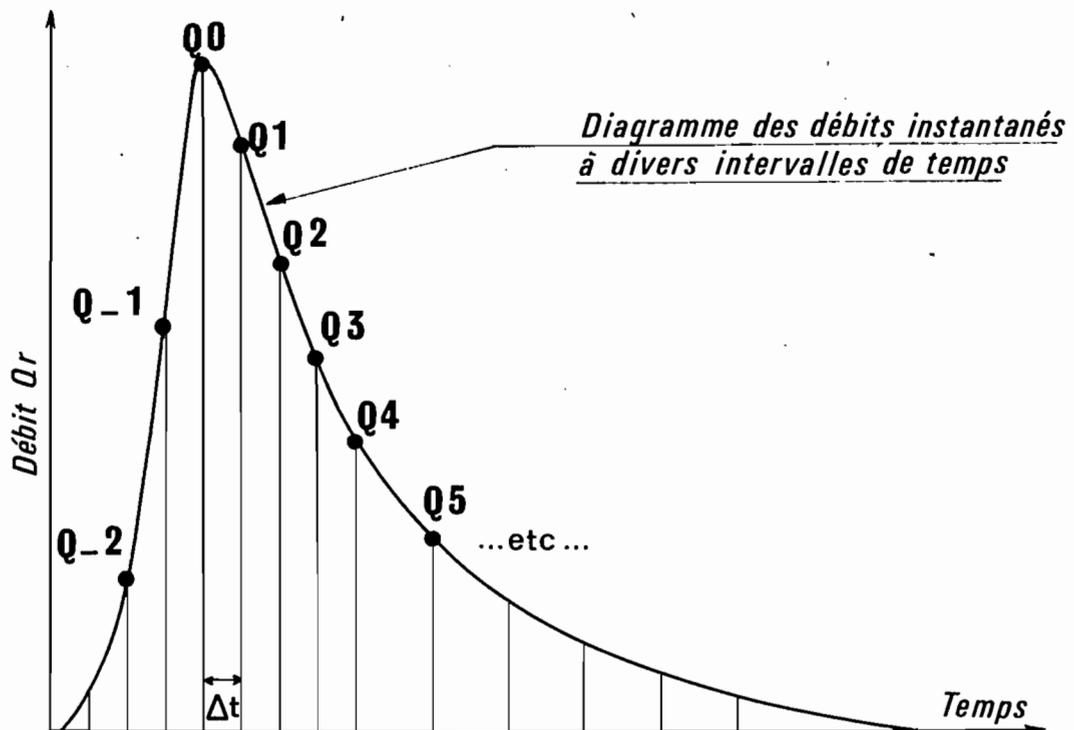


TABLEAU 12

HYDROGRAMME-TYPE du BASSIN VERSANT de KORHOGO

(Débits en m<sup>3</sup>/s)

Repère de crue	- 40	- 30	- 20	- 10	0	+ 10	+ 20	+ 30	+ 40	+ 50
15-62	: 0,03	: 0,08	: 0,23	: 0,54	: 0,85	: 0,82	: 0,66	: 0,52	: 0,42	: 0,36
11-63	: -	: 0,02	: 0,05	: 0,49	: 0,97	: 0,91	: 0,71	: 0,57	: 0,44	: 0,37
45-63	: -	: 0,01	: 0,21	: 1,18	: 1,33	: 1,18	: 0,81	: 0,45	: 0,33	: 0,21
11-65	: 0,05	: 0,26	: 0,57	: 0,75	: 0,77	: 0,72	: 0,60	: 0,46	: 0,38	: 0,31
5-63	: -	: 0,08	: 0,19	: 0,42	: 0,83	: 0,69	: 0,54	: 0,41	: 0,34	: 0,32
18-64	: -	: 0,03	: 0,12	: 0,46	: 0,90	: 0,78	: 0,60	: 0,46	: 0,36	: 0,27
Hydrogramme- type médian	: 0	: 0,05	: 0,20	: 0,55	: 0,88	: 0,77	: 0,63	: 0,50	: 0,38	: 0,31

	1 h	+ 10	+ 20	+ 30	+ 40	+ 50	2 h	+ 10	+ 20	+ 30	+ 40	+ 50	3 h	:	:
15-62	: 0,30	: 0,24	: 0,19	: 0,14	: 0,11	: 0,08	: 0,07	: 0,05	: 0,03	: 0,02	: 0,01	:	:	:	:
11-63	: 0,31	: 0,26	: 0,22	: 0,19	: 0,16	: 0,13	: 0,11	: 0,09	: 0,07	: 0,05	: 0,04	: 0,02	: 0,01	: -	:
45-63	: 0,10	: 0,05	: 0,01	: -	: -	: -	: -	: -	: -	: -	: -	: -	: -	: -	:
11-65	: 0,25	: 0,20	: 0,15	: 0,09	: 0,07	: 0,06	: 0,05	: 0,05	: 0,03	: 0,02	: 0,01	:	:	:	:
5-63	: 0,31	: 0,29	: 0,27	: 0,23	: 0,19	: 0,16	: 0,13	: 0,10	: 0,09	: 0,07	: 0,06	: 0,03	: 0,02	: 0,2	: 0,01
18-64	: 0,21	: 0,17	: 0,15	: 0,13	: 0,13	: 0,14	: 0,14	: 0,13	: 0,12	: 0,11	: 0,11	: 0,09	: 0,08	: 0,06	: 0,05
Hydrogramme- type médian	: 0,26	: 0,22	: 0,17	: 0,14	: 0,12	: 0,10	: 0,08	: 0,06	: 0,05	: 0,04	: 0,03	: 0,02	: 0,015	: 0,01	: -

Temps en h. et min. de part et d'autre du maximum (temps zéro)

Or bien souvent, il n'en est pas ainsi et la réaction d'un bassin n'est pas "linéaire" ; autrement dit la vitesse de ruissellement croît d'autant plus vite que la précipitation est intense et élevée. La pratique montre que les très fortes pluies intenses, de fréquence rare, engendre des réponses plus violentes et plus rapides que les précipitations disons plus courantes. En se contentant de la lecture du tableau 12, on peut voir sur les seuls pourcentages de pointes que les crues 45-63 et 11-63 par exemple sont bien plus sévères que les autres parce qu'engendrées par des pluies plus élevées et plus intenses. Si l'on recherche un hydrogramme unitaire pour reconstituer une crue exceptionnelle, on ne doit pas le choisir sur la base médiane générale mais seulement à partir de ces événements sévères.

Ainsi sur l'exemple de KORHOGO, peut-on élaborer, d'après les deux événements précités, un hydrogramme type de forte crue, différent de l'hydrogramme médian : temps de montée de 30 au lieu de 40 minutes, temps de base de 3 h 30 au lieu de 4 h, débit maximal de 0,95 au lieu de 0,88.

L'hydrogramme unitaire médian ainsi déterminé doit être testé avant d'être définitivement adopté. Ce test s'effectue sur une ou plusieurs crues observées n'ayant évidemment pas le caractère unitaire. Comme ce test est équivalent à l'opération de reconstitution de crue à laquelle sert en premier lieu un hydrogramme unitaire, on a jugé bon de développer la méthodologie correspondante dans un chapitre spécial, le suivant.

#### 7.4. Exercice d'application sur la recherche des crues unitaires et le calcul de l'hydrogramme unitaire médian d'un bassin

L'analyse complète des événements averses-crues observés sur un bassin est une opération très longue et qui nécessite la consultation de très nombreux documents (tableaux numériques et graphiques relatifs aux hyétogrammes et hydrogrammes observés) ; il n'est pas possible matériellement, dans le cadre d'un exercice d'application, de donner tous les éléments permettant une telle analyse.

L'exercice porte donc sur les points les plus délicats et les plus originaux de l'analyse des événements : sélection des crues unitaires, séparation du ruissellement pur, tableau des diagrammes unitaires de ruissellement, choix de l'hydrogramme médian.

On admet donc que sont connues les opérations négligées : calcul de la pluie moyenne, du hyétogramme moyen, établissement du tableau des valeurs caractéristiques, choix du seuil de pluie utile ... etc ...

L'exercice dont le contenu est ainsi nettement délimité est développé sur les informations recueillies dans le bassin de KOUNTKOUZOUT au Niger. Les principales caractéristiques de ce bassin sont les suivantes :

- superficie drainée 16,6 km<sup>2</sup>

.../...

- climat tropical semi-aride (400 mm de précipitations entre juin à septembre),
- grès recouverts de cuirasse latéritique,
- végétation steppique (2/3) et cultures vivrières (1/3),
- relief notable,
- crues violentes non suivies d'écoulement permanent,
- averses courtes et intenses présentant souvent plusieurs pointes qui engendrent une crue complexe difficile à décomposer,
- en dessous de 15 mm de pluie moyenne, il n'y a pas de ruissellement généralisé à tout le bassin.

Le tableau 13 rassemble un échantillon de 15 crues sélectionnées parmi les 150 observées en 4 années, échantillon contenant toutes les crues unitaires et quelques autres typiques. Les paramètres portés dans ce tableau sont les suivants, à partir de la 3e colonne : pluie maximale ponctuelle, pluie moyenne sur le bassin, durée utile de la pluie, nombre de pointes intenses de la pluie utile nettement séparées, volume ruisselé global, lame ruisselée équivalente, coefficient de ruissellement, temps de montée de la crue, temps de base de celle-ci, son débit maximal total et rapporté à 1 mm de lame.

Le graphe 14 fournit une représentation de deux crues observées qui sont unitaires, et le tableau 14 les hydrogrammes de ruissellement pour d'autres crues unitaires.

Il est demandé :

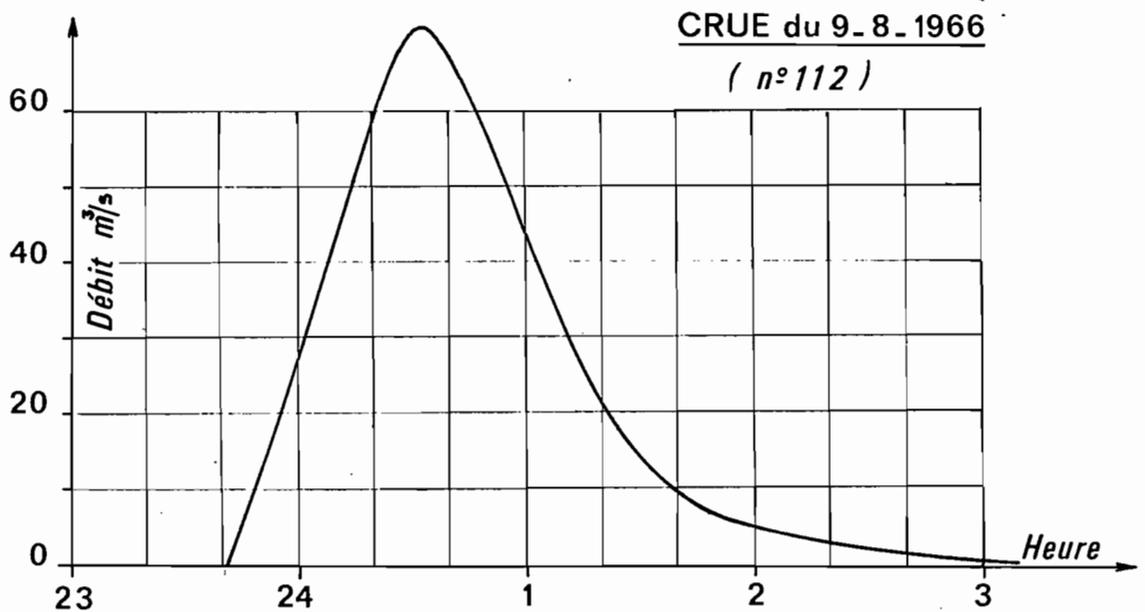
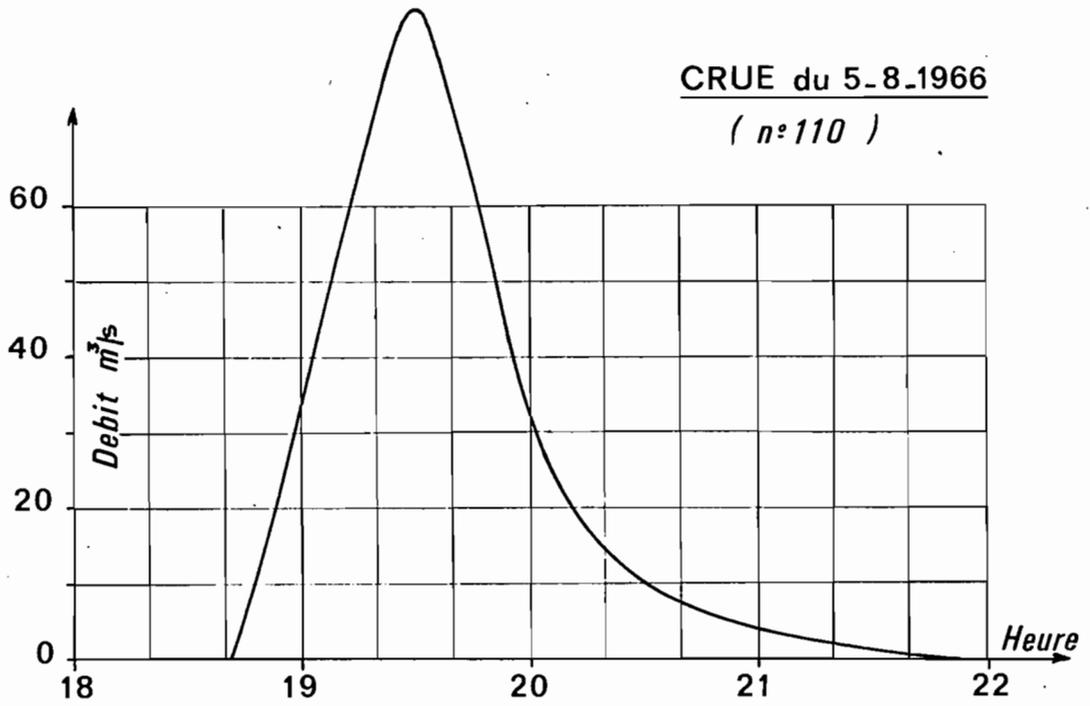
- a) de trouver les raisons pour lesquelles 8 crues du tableau 13 ne peuvent pas être considérées comme unitaires, en s'appuyant sur les renseignements fournis sur le bassin et sur les critères de sélection décrits en 7.3.,
- b) de déterminer les hydrogrammes de ruissellement pur des crues dessinées sur le graphe 14, sachant que l'analyse complète a révélé une disparité des temps de ruissellement global due au fait qu'il y a une part non négligeable, mais variable, de ruissellement hypodermique retardé qu'il importe de séparer du ruissellement pur immédiat,
- c) de composer le tableau des diagrammes de ruissellement pur relatifs aux 7 crues unitaires, homogénéisées pour une lame de 1 mm, en adoptant la représentation en débits à divers intervalles de temps de part et d'autre du maximum,
- d) de déterminer l'hydrogramme unitaire médian par le calcul sur les diagrammes précédents.

- TABLEAU 13 -

Caractéristiques intéressantes de crues du bassin de KOUNTKOUZOUT (16,6 km<sup>2</sup>)

N°	Date	P <sub>max.</sub> (mm)	P <sub>moy.</sub> (mm)	t <sub>u</sub> (minutes)	Nbre de pointes	V <sub>r</sub> 10 <sup>3</sup> m <sup>3</sup>	l <sub>r</sub> (mm)	K <sub>r</sub> %	t <sub>m</sub> (min.)	T <sub>b</sub> (min.)	Q <sub>rx</sub> (m <sup>3</sup> /s)	Q <sub>rx</sub> /l <sub>r</sub> m <sup>3</sup> /s
4	10.7.64	104	70,8	70	1	490	29,5	41	non observés		136	4,6
23	24.8.64	72,5	60,2	90	4	336	20,2	33,8	16	270	57,5	2,8
26	29.8.64	46	42,6	45	2	146,5	8,8	20,8	50	185	33,0	3,7
39	11.6.65	54,5	43,5	35	2	261	15,7	36,2	23	260	60	3,8
58	8.8.65	21	17,3	20	1	26,4	1,6	9,2	40	180	5,80	3,6
70	30.8.65	25,8	21,2	30	2	17,8	1,1	5,0	27	210	6,1	5,5
82	26.5.66	58,3	47,4	30	1	247	14,9	31,5	48	210	70,7	4,7
94	26.6.66	7,7	4,1	10	1	4,2	0,25	6,1	17	85	2,5	10
100	8.7.66	28,2	15,5	20	1	84,6	5,1	23,4	37	135	32,6	6,4
109	3.8.66	23,2	18,8	25	2	44,6	2,7	14,3	20	200	10,6	3,9
110	5.8.66	60,6	47,9	35	1	283	17,0	35,7	60	190	86	5,0
112	9.8.66	69	42,6	40	1	275	16,6	38,9	60	200	71	4,3
124	16.9.66	63,8	47,8	55	2	244	14,7	30,8	36	280	44	3,0
146	23.7.67	25,4	17,5	20	1	55	3,3	18,8	52	135	16,5	5,0
148	24.7.67	37,3	25,3	25	1	140	8,5	33,4	64	195	46	5,4

# Hydrogrammes de crues unitaires observées (KOUNTKOUZOUT)



- TABLEAU 14 -

Hydrogrammes de ruissellement pur de crues unitaires à KOUNTKOUZOUT  
(débits en m<sup>3</sup>/s)

N°	Temps (minutes)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	lr pure (mm)
58:		0	0,09	1,15	3,08	4,93	5,75	5,46	5,0	4,46	3,77	3,08	2,23	1,62	0,62	0	1,54
82:		0	21,9	35,7	39,8	49,4	70	61	45,2	34,3	18,5	8,2	4,11	2,06	0		13,7
100:		0	2,55	13,2	27,5	32,5	25,7	16,3	8,4	5,1	3,57	2,29	1,27	0,25	0		5,1
146:		0	2,92	9,24	10,8	13,1	16,2	12,9	9,06	5,4	2,31	1,08	0,15	0			3,08
148:		0	1,52	8,75	14,1	23,6	38,8	45,2	33,8	18,2	10,3	6,08	3,80	1,90	1,14	0	7,6



CHAPITRE VIII - RECONSTITUTION DE CRUES COMPLEXES A L'AIDE DE L'HYDROGRAMME UNITAIRE

Le modèle global qu'est l'hydrogramme unitaire est destiné à permettre la prédétermination d'une crue exceptionnelle sachant la pluie qui la provoque. Avant qu'une telle application soit possible, il faut tester l'hydrogramme unitaire médian, calculé comme on l'a montré dans le chapitre VII, sur des crues observées, de préférence complexes.

La reconstitution de crues complexes par composition d'hydrogrammes unitaires, afin de tester la forme de ceux-ci, apporte des informations complémentaires sur le mécanisme de transformation pluies-débits, informations qui seront utiles lors de la prédétermination de crues non observées.

Bien que cette prédétermination fasse l'objet du chapitre IX, nous donnons ici un résumé des étapes essentielles du processus permettant sa réalisation :

- a) estimation des valeurs globales du coefficient de ruissellement  $K_r$  ou de la lame ruisselée  $l_r$  relatives à la précipitation et compte tenu de l'état de saturation des terrains,
- b) décomposition de la précipitation en  $n$  averses unitaires et estimation de la variation du  $k_r$  de l'averse  $1$  à l'averse  $n$ , c'est-à-dire de la fonction de ruissellement ou d'infiltration  $k_r = f(t)$  ou  $I = P - l_r = f(t)$
- c) application de la fonction de ruissellement aux  $n$  averses unitaires pour calcul des  $n$  hydrogrammes unitaires et composition de ceux-ci.

Dans la reconstitution d'une crue complexe observée, l'étape a est supprimée puisque les éléments sont connus, mais les étapes b et c subsistent. L'estimation de la fonction de ruissellement ou d'infiltration est même l'opération principale. C'est à elle que nous consacrons en fait ce chapitre VIII. Cette opération est en pratique assez compliquée et il existe de nombreuses méthodes de résolution ; nous les présenterons brièvement en développant surtout l'une d'entre elles, plus simple et cependant suffisante pour résoudre les problèmes des bassins soumis à des précipitations intenses suivies de forts ruissellements. La totalité de cet exposé sera fait en suivant deux exemples extraits d'observations, le premier consistant à analyser une crue, le second à en reconstituer une autre.

.../...

## 8.1. Analyse d'une averse et d'une crue complexe

### 8.1.1. Comment procéder

Connaître la fonction de ruissellement d'un bassin c'est savoir comment au cours d'une précipitation varie ce coefficient avec le temps, sachant généralement sa valeur moyenne globale. L'analyse se fait plutôt sur le résidu du ruissellement c'est-à-dire sur la capacité d'absorption CA ou sur sa moyenne apparente, la capacité apparente moyenne d'absorption Cam, (cf. 7.3.1. et graphe 12) toutes deux exprimées en intensité.

Ces capacités d'absorption comprennent une part dominante celle de l'infiltration et deux parts mineures celles des pertes par stockage superficiel et par évapotranspiration immédiate. C'est pourquoi, l'on trouve parfois une confusion entre la capacité d'absorption et celle d'infiltration et que l'on parle de la fonction d'infiltration au cours d'une averse. Et d'autant plus que divers travaux expérimentaux, depuis HORTON, ont permis de montrer que sous pluie d'intensité constante, la vitesse ou capacité d'infiltration décroît exponentiellement à partir d'une valeur initiale dépendant de l'état de saturation préalable du terrain et qu'elle a une limite inférieure correspondant vraisemblablement au sol saturé ou à la capacité au champ.

La capacité d'absorption, dont la composante principale est cette capacité d'infiltration, doit vraisemblablement se comporter comme elle et décroître exponentiellement durant une pluie.

La détermination de la variation exponentielle de la capacité d'absorption est très difficile ; heureusement elle n'est pas nécessaire et l'on peut simplement se contenter d'avoir une idée approchée de cette variation en déterminant celle de la capacité apparente moyenne Cam, ce qui est beaucoup plus facile.

Il ne faut pas aborder le problème sur une crue trop complexe c'est-à-dire par exemple une crue très forte due à une pluie intense de longue durée, mais au contraire sur un événement dans lequel la variation de Cam puisse être aisée à voir, événement qui est fourni par une averse à pointes multiples c'est-à-dire dont les fractions intenses ayant provoqué du ruissellement sont séparées par des périodes moins intenses non génératrices de ruissellement. Il vaut mieux choisir un tel événement non seulement au vu du schéma de la pluie, mais surtout à l'examen de l'hydrogramme qui doit présenter des ondes nettement séparées afin qu'elles puissent être imputées sans équivoque aux pointes séparées de la pluie.

### 8.1.2. Le hyétogramme moyen

Le schéma de la pluie c'est-à-dire la variation des intensités dans le temps est représenté par le hyétogramme. On dresse autant de hyétogrammes qu'il y a de pluviographes sur un bassin. Il faut ensuite composer ces hyétogrammes ponctuels pour former le hyétogramme moyen. C'est une opération très délicate pour laquelle existent divers procédés dont aucun n'est réellement satisfaisant.

En fait, le hyétogramme moyen n'est qu'une représentation parfois un peu irréaliste de la variation dans le temps des intensités de telle sorte que le total de précipitation soit égal à la hauteur moyenne de pluie. Les pluviographes étant affectés d'une aire d'influence sur le bassin - soit par exemple 60 et 40 % s'ils sont deux - il faut vérifier que les hauteurs totales de pluie reçues à chacun - soit Pa et Pb - composées à l'aide des coefficients d'aire d'influence - soit 0,6 Pa + 0,4 Pb - donnent la hauteur moyenne de la pluie sur le bassin Pm calculée à l'aide de toutes les observations, pluviomètres inclus ; sinon une correction s'impose.

Ensuite la composition des hyétogrammes se fait en conservant les intensités et en pondérant les durées, ce qui conduit à un hyétogramme moyen correct en intensité donc duquel il est possible d'extraire des valeurs plausibles de Cam, mais qui n'est guère utilisable en temps c'est-à-dire pour la décomposition en averse unitaires ou la mise en place d'hydrogrammes unitaires ; en opérant par conservation des durées et pondération des intensités, on arrive évidemment à un résultat inverse, les deux hyétogrammes moyens pouvant être assez différents. Enfin la composition s'exécute soit en conservant les heures exactes d'occurrence des intensités, soit en faisant coïncider les intensités maximales, puisque l'hydrogramme intègre par lui-même les temps de parcours des ruissellements partiels générés en divers points du bassin.

Le tableau 15 et le graphe 15 montrent sur un exemple simple de deux hyétogrammes Pa et Pb dont les poids respectifs sont 60 % et 40 %, les résultats d'élaboration du hyétogramme moyen selon le procédé employé, sachant que la hauteur totale précipitée est de 20 % supérieure à la moyenne pondérée des hauteurs correspondant à Pa et Pb : (Pa = 15 mm, Pb = 26 mm et Pm = 23,3 mm ; donc  $0,6 Pa + 0,4 Pb = 19,4$  mm et  $23,3/19,4 = 1,20$ ) :

- solution A obtenue par conservation des temps et des durées, la pondération affectant les intensités ; il y a écrasement de celles-ci et modération excessive du hyétogramme moyen due au fait que les maximums sont décalés,
- solution B obtenue par conservation des intensités en les prenant dans l'ordre chronologique de leur occurrence et en pondérant leurs durées ; le décalage des intensités en temps produit un hyétogramme moyen d'aspect très différent des hyétogrammes observés,
- solution C obtenue en décalant les temps des hyétogrammes observés pour faire coïncider les moments des intensités maximales, puis comme dans la solution A en pondérant les valeurs d'intensités, les durées étant conservées.

Cette dernière solution est de loin préférable : elle conserve au mieux la forme de chaque hyétogramme observé, sans réduire ni augmenter exagérément les intensités et n'altère pas outre mesure les temps et durées. On peut en juger concrètement sur les exemples du graphe 15 où l'on a représenté les valeurs que prendrait Cam pour une lame ruisselée de 2,7 mm ; la solution C donne 33 mm/h durant 20 minutes continues, tandis que la solution A ne donne qu'une valeur de 25 mm/h, trop faible, et que la solution B s'égaré sur 30 mm/h répartis en deux périodes séparées de 10 minutes.

TABLEAU 15

Diverses méthodes de calcul du hyétogramme moyen

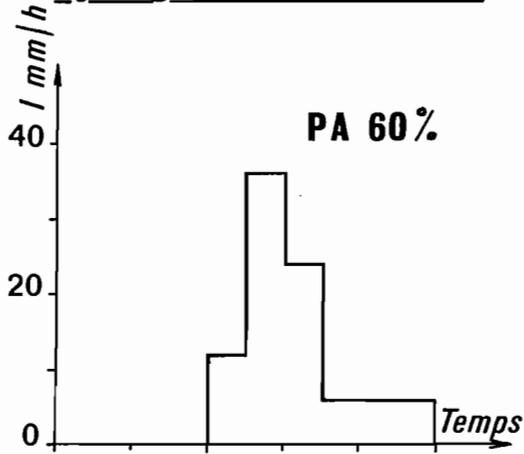
Hyétogrammes observés			
Temps en minutes	Intensités à PA (mm/h)	Temps en minutes	Intensités à PB (mm/h)
40 - 50	12	50 - 60	6
50 - 60	36	60 - 70	48
60 - 70	24	70 - 90	36
70 - 100	6	90 - 100	18
		100 - 120	6

Hyétogrammes moyens					
Solution A		Solution B		Solution C (adoptée)	
Temps en minutes	Intensités en mm/h	Temps en minutes	Intensités en mm/h	Temps en minutes	Intensités en mm/h
40 - 50	8,6	40 - 47	12	45 - 55	11,5
50 - 60	28,8	47 - 52	6	55 - 65	49
60 - 70	40,4	52 - 59	36	65 - 75	34,5
70 - 90	21,6	59 - 64	48	75 - 85	21,6
90 - 100	13	64 - 71	24	85 - 95	13
100 - 120	2,9	71 - 81	36	95 - 105	7,2
		81 - 103	6	105 - 115	2,9
		103 - 108	18		
		108 - 118	6		

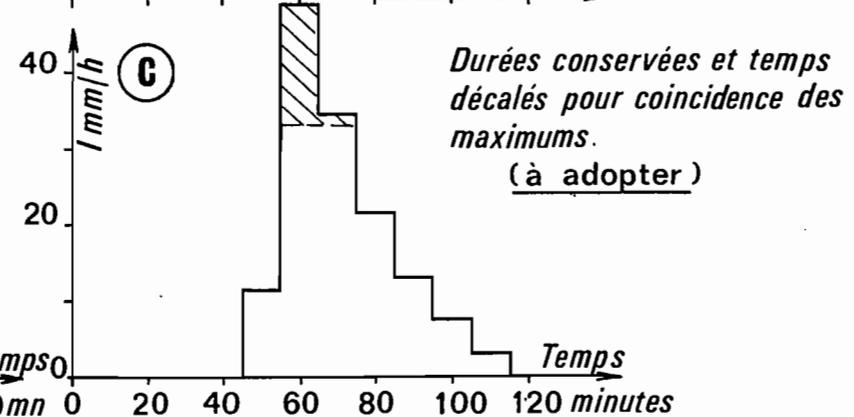
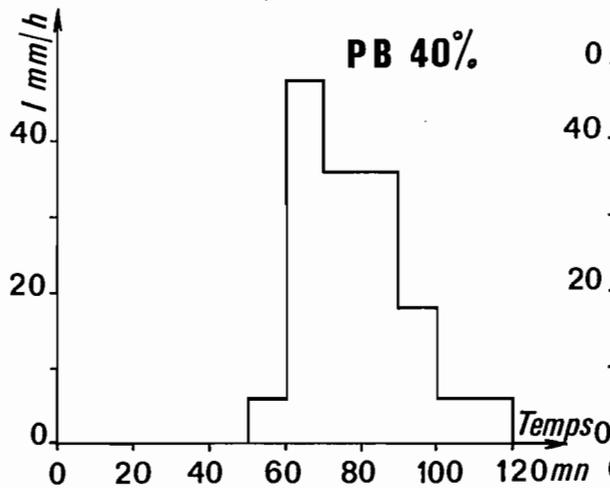
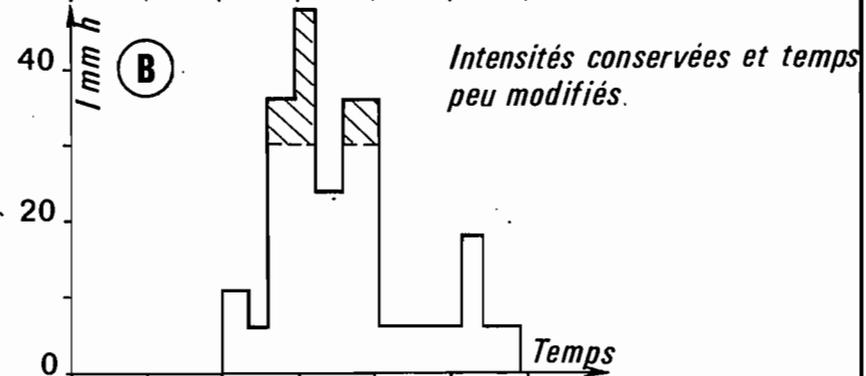
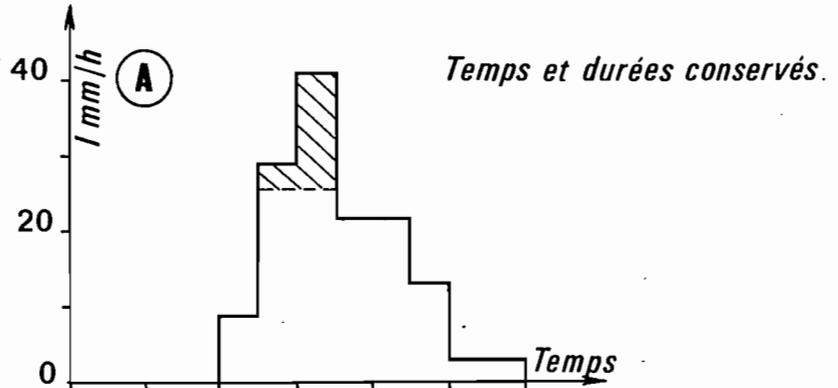
# Calcul du hyétogramme moyen

Gr.15

## Hyétogrammes observés



## Hyétogrammes moyens



Ces quelques chiffres montrent les écarts considérables que l'on peut introduire dans le calcul de Cam rien que par la composition des hyétogrammes.

Lorsque les hyétogrammes ponctuels sont plus nombreux et que leurs formes diffèrent beaucoup, la détermination du hyétogramme moyen est beaucoup plus difficile même en suivant la procédure de la solution C, qui reste la meilleure.

Lors d'une analyse d'événements averse-crue observés, on oriente la détermination du hyétogramme moyen d'après l'aspect de l'hydrogramme : selon qu'il apparaît de tendance unitaire ou non, selon qu'une ou deux pointes s'y manifestent, selon les temps de début et de maximum ... il y a lieu d'agir sur la procédure de base de la solution C pour donner au hyétogramme moyen une forme unitaire ou non, un temps de début plus ou moins avancé ou reculé ... Ainsi dans les exemples des graphes 12 à 14 du chapitre VII, l'hydrogramme unitaire exclut un hyétogramme à deux pointes comme celui de la solution B.

### 8.1.3. Variation de la capacité d'absorption pendant un événement double

Les hyétogrammes moyens établis, on choisit pour analyser la variation de la capacité d'absorption au cours d'une averse de préférence parmi les crues complexes, celles qui présentent deux pointes de crues aisément séparables et que l'on qualifie d'événements doubles.

La méthode d'analyse peut être suivie sur l'exemple de la crue du soir du 02.08.1962 survenue sur le bassin de KORHOGO - présenté dans le chapitre VII - et dont le graphe 16 fournit une représentation de l'hydrogramme et du hyétogramme moyen.

Les caractéristiques globales de cet événement double sont les suivantes :

$$\begin{aligned} P_m &= 26 \text{ mm} & P_u &= 22,5 \text{ mm} \quad (I_c > 18 \text{ mm/h}) \\ V_r &= 6\,810 \text{ m}^3 \\ l_r &= 1,87 \text{ mm} & K_{ru} &= 8,3 \% \end{aligned}$$

Après séparation de l'écoulement de base, on voit que la crue se scinde très facilement en deux pointes 1 et 2 dont on peut calculer les valeurs caractéristiques propres :

$$\begin{aligned} V_r 1 &= 1\,080 \text{ m}^3 & l_r 1 &= 0,29 \text{ mm} & K_{ru} 1 &= 3,7 \% \\ V_r 2 &= 5\,730 \text{ m}^3 & l_r 2 &= 1,58 \text{ mm} & K_{ru} 2 &= 10,7 \% \end{aligned}$$

.../...

La lame ruisselée de la première pointe de crue, reportée comme pluie nette ( $P_u = 0,29$  mm) sur la première pointe du hyétogramme ( $I_x = 60$  mm/h pendant 5 mn) permet le calcul de Cam 1, on a en effet :

$$\text{Cam 1} = I_x - \frac{P_u \times 60}{5} \text{ ce qui fait } 56,5 \text{ mm/h}$$

A titre de contrôle, on peut noter que l'hydrogramme unitaire correspondant à une lame de 0,29 mm a un maximum de  $0,88 \times 0,29 = 0,25$  m<sup>3</sup>/s qui correspond au débit maximal ruisselé de la première pointe.

On rappelle ici que l'hydrogramme unitaire de KORHOGO (tableau 12, chapitre VII) a un temps de montée de 40 minutes et un maximum de 0,88 m<sup>3</sup>/s pour une lame  $l_r = 1$  mm.

La seconde pointe de crue par contre ne doit pas être unitaire, car pour une lame de 1,58 mm elle devrait avoir un maximum de  $0,88 \times 1,58$  soit 1,3 m<sup>3</sup>/s alors qu'elle n'atteint que 1,0 m<sup>3</sup>/s.

Il faut donc admettre que les deux pointes de la seconde phase de la pluie utile ont toutes deux contribué à donner du ruissellement.

La troisième pointe d'intensité commençant 40 minutes après la première, l'hydrogramme résultant commencera seulement lorsque l'hydrogramme, dû à la pointe précédente, aura atteint son maximum ; il n'y aura donc pas d'interférence et l'on peut admettre que le débit maximal ruisselé de la deuxième pointe de crue, 1 m<sup>3</sup>/s, est dû à l'hydrogramme unitaire de la deuxième pointe d'averse dont la pluie nette vaut  $\frac{1}{0,88}$  soit 1,14 mm.

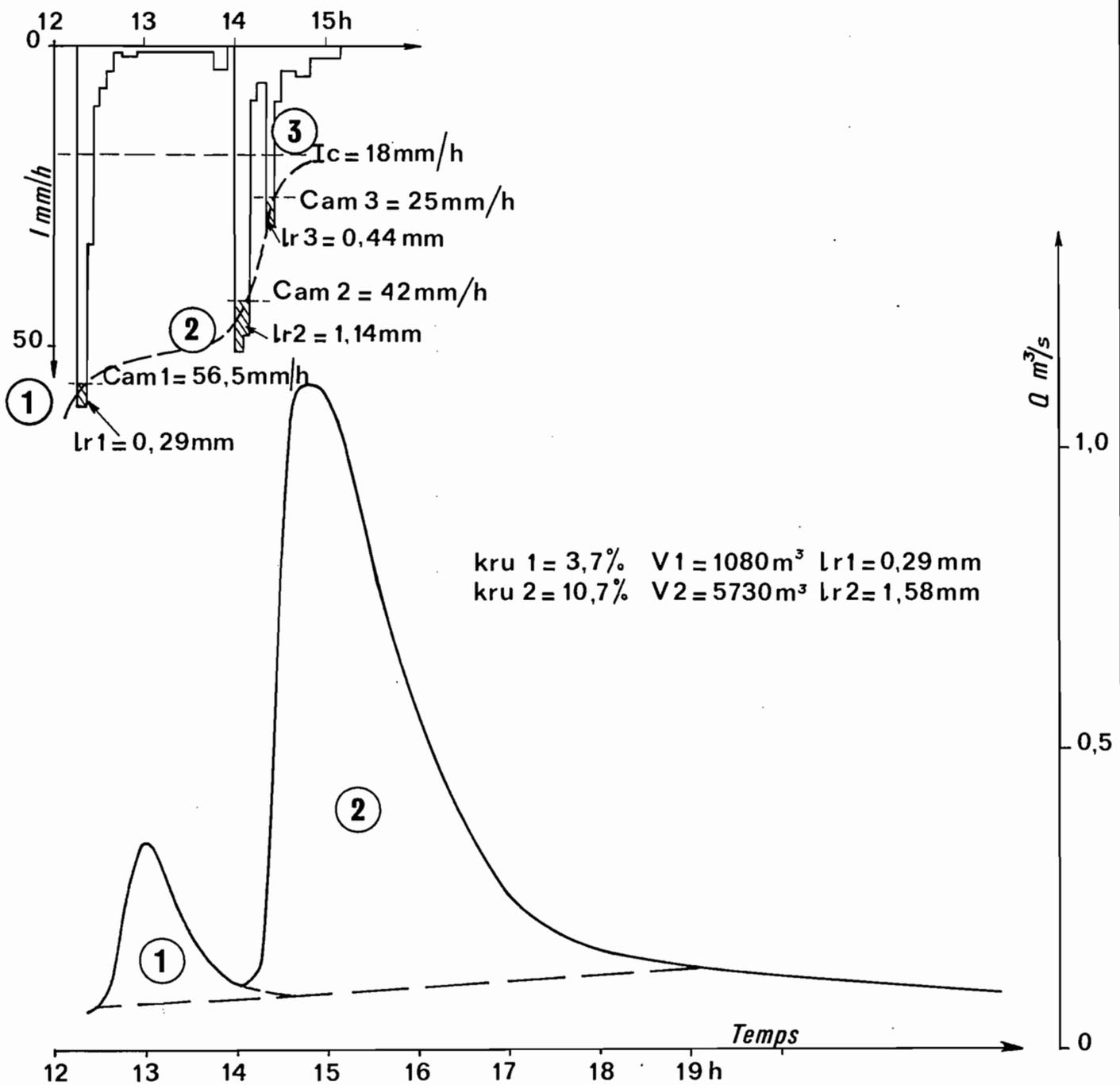
On retire cette pluie nette de la deuxième pointe pour avoir une nouvelle valeur de Cam 2 égale à 42 mm/h. La même opération sur la troisième pointe ( $P_u = 0,44$  mm) donne Cam 3 = 25 mm/h.

On obtient ainsi une série de trois valeurs de capacité apparente moyenne régulièrement décroissantes et l'on peut tracer grosso modo la courbe de variation de la capacité d'absorption instantanée de telle sorte qu'elle recoupe ces trois valeurs (cf. graphe 16). Une certaine vitesse de décroissance et une valeur initiale de CA sont ainsi obtenues.

Il faut bien noter que la procédure analytique décrite ci-dessus sur l'exemple de KORHOGO a pour objet de répartir la pluie nette totale (équivalente à la lame ruisselée totale) en pluies nettes partielles qui correspondent aux lames ruisselées partielles des pointes séparées de l'hydrogramme si ces pointes se révèlent être unitaires (strictement ou de tendance) ; une pluie nette partielle peut être scindée en fractions si l'aspect du hyétogramme moyen rend la chose possible lorsque la pointe de crue correspondante n'est pas unitaire.

# Analyse d'un évènement double

(KORHOGO 2 - 8 - 1962 soir)



On voit donc que le travail de décomposition analytique doit s'effectuer en opérant de manière conjuguée et minutieuse sur l'hydrogramme et sur le hyétogramme, si l'on veut obtenir des valeurs de Cam ayant une signification.

En opérant de la même manière sur tous les événements doubles observés puis en passant peu à peu aux crues plus complexes, on peut rassembler une information suffisante sur :

- a) la valeur initiale de la capacité d'absorption, en début d'averse, qui dépend de l'état de saturation préalable des sols,
- b) la vitesse de décroissance de cette capacité d'absorption qui dépend des valeurs d'intensités, de la durée de celles-ci, et des intervalles sans ruissellement entre deux pointes.

Cette information peut être traduite en termes de coefficients de ruissellement si on le désire, (fonction de croissance du  $k_r$  avec la durée et l'intensité de pluie, valeurs initiales liées à l'état de saturation ...).

#### 8.2. Reconstitution d'une crue complexe

Il s'agit encore d'une opération analytique dont le but principal est de vérifier l'hydrogramme unitaire médian retenu, mais qui permet d'atteindre comme but secondaire l'amélioration de la connaissance de la fonction de ruissellement ou d'infiltration élaborée par les études des événements doubles.

Comme pour l'analyse de l'événement double, la procédure de reconstitution d'une crue complexe est décrite sur un exemple, pris toujours dans le bassin de KORHOGO (crue du 2 août 1962, le matin). Le graphe 17 représente l'événement considéré : hyétogramme de l'averse et hydrogramme observé.

Le hyétogramme montre deux pointes d'intensités nettement distinctes ; la première pointe, peut-être considérée comme unitaire (durée 15 minutes), est responsable de la montée de la crue (correspondance des temps) et a donc engendré un hydrogramme unitaire. La seconde pointe d'intensité a débuté 55 minutes après la première, par conséquent le ruissellement qu'elle a provoqué n'a commencé que 55 minutes après celui dû à la première pointe, ce qui signifie que le maximum de la crue est dû uniquement à la première pointe et correspond à l'hydrogramme unitaire (la montée de celui-ci ne dure en effet que 40 minutes).

Les caractéristiques globales de l'événement sont les suivantes :

$P_m$	=	31,7 mm	$P_u$	=	18,2 mm ( $I > 18$ mm/h )
$V_r$	=	12 450 m <sup>3</sup>	$I_r$	=	3,42 mm $K_{ru} = 18,80 \%$
$Q_{rx}$	=	2,65 m <sup>3</sup> /s			

Le débit maximal de ruissellement de  $2,65 \text{ m}^3/\text{s}$  ; s'il correspond à un hydrogramme unitaire, celui-ci est dû à une lame ruisselée  $l_r 1 = \frac{2,65}{0,88} = 3 \text{ mm}$  (on fait le rapport du  $Q_{rx}$  à celui de l'hydro-

gramme unitaire pour une lame de 1 mm).

On doit donc supposer que cette première fraction  $l_r 1$  de ruissellement correspond à une pluie nette de 3 mm à prélever sur le sommet de la première pointe d'intensité pour avoir une première valeur de  $Cam$  :  $Cam 1 = 54 \text{ mm/h}$  (on a en effet retiré 3 mm sur 5 minutes à  $72 \text{ mm/h}$  suivies de 5 minutes à  $63 \text{ mm/h}$ ).

La lame ruisselée résiduelle  $3,42 - 3$  soit  $0,42 \text{ mm}$  est donc à retirer sur la seconde pointe de pluie (5 minutes à  $39 \text{ mm/h}$ ) où elle permet de calculer une seconde valeur de  $Cam$ , égale cette fois à  $34 \text{ mm/h}$ . On peut voir sur le graphe 17 le tracé à l'estime de la variation instantanée de la capacité d'absorption  $CA$  que nous en avons déduit ; il est tout à fait en harmonie avec celui dessiné pour la pluie du 02.08.62 au soir analysée au paragraphe précédent ; ce qui confirme en quelque sorte les résultats de cette analyse.

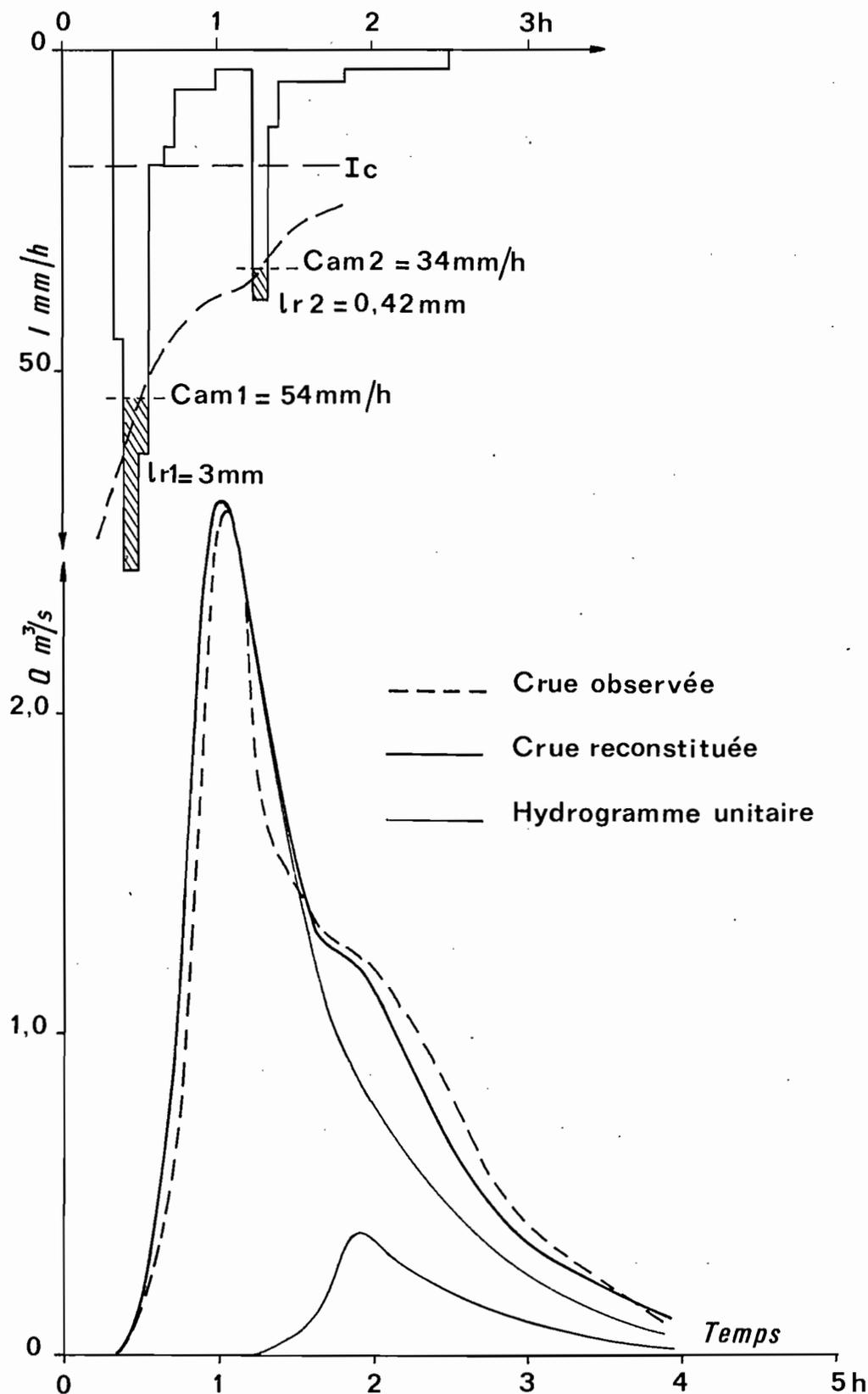
La reconstitution de la crue du 02.08.62 au matin s'effectue ensuite en composant deux hydrogrammes unitaires :

- a) le premier induit par la première pointe d'averse et de lame ruisselée égale à 3 mm (ses débits sont donc triples de ceux de l'hydrogramme médian pour 1 mm de lame) commence à la même heure que cette pointe,
- b) le second provoqué par la deuxième pointe d'averse, équivaut à une lame ruisselée de  $0,42 \text{ mm}$  (ses débits sont égaux à 42 % de ceux de l'hydrogramme médian pour 1 mm) et ne commence que 55 minutes après le premier (décalage identique à celui des débuts des deux pointes d'averse).

Leur somme donne une crue reconstituée qui suit assez fidèlement le tracé de la crue observée pour que l'on puisse estimer satisfaisante et cette construction, et les prémisses de son élaboration (valeurs des  $Cam$ ). On peut remarquer que le coefficient de ruissellement  $k_{ru}$  ne croît pas entre les deux pointes (3 mm sur 14,9 mm pour la première pointe soit 20 % et  $0,42 \text{ mm}$  sur 3,3 mm soit 12,7 % pour la deuxième pointe) comme c'était le cas dans l'événement double analysé au paragraphe 8.2. En effet, la deuxième pointe d'averse étant ici beaucoup plus faible que dans cet autre événement, la fonction  $k_r$  ne croît apparemment pas ; c'est pourquoi il est souvent préférable de faire l'analyse sur la capacité d'absorption  $Cam$  dont la variation est plus régulière dans le temps et moins sensible à l'importance relative des divers tronçons de la pluie.

# Reconstitution d'une crue complexe

(KORHOGO 2 - 8 - 1962 matin )



Les deux événements se sont produits chacun après une forte pluie survenue six heures auparavant et ont donc rencontré des conditions de saturation des terrains très voisines. Les capacités apparentes d'absorption lors des premières pointes sont comparables : 56,5 et 54 mm/h ; après une heure dans un cas et deux heures dans l'autre à pluie fine, ces Gam tombent respectivement à 34 mm/h et 42 mm/h (puis 25 mm/h). La variation du coefficient de ruissellement s'explique mieux en regardant les intensités et durées de la pluie utile :

- 20 % pour une première pointe ayant fait en deux fois 5 minutes respectivement 72 mm/h et 63 mm/h.
- 3,7 % pour une première pointe n'ayant fait que 5 minutes à 60 mm/h.
- 12,7 % pour une deuxième pointe de 5 minutes à 39 mm/h.
- 10,7 % pour une deuxième pointe de 10 minutes à 52 et 48 mm/h.

Bien entendu, après vérification de l'hydrogramme unitaire par reconstitution de quelques crues provoquées par des averses à pointes séparées unitaires, l'analyse complète d'un bassin doit se poursuivre par la reconstitution des crues complexes dues à des averses longues et intenses ; ce n'est qu'alors que l'on voit bien apparaître la variation dans le temps du coefficient de ruissellement, ou de la capacité apparente, les intensités de précipitation restant supérieures au seuil de pluie utile durant des périodes représentant plusieurs fois la durée unitaire. Par exemple, pour une pluie utile atteignant quatre fois la durée unitaire, la décomposition en quatre tronçons unitaires s'effectue de telle manière que les quatre hydrogrammes unitaires résultant se combinent pour redonner la crue observée ; on en retire quatre valeurs successives croissantes du coefficient de ruissellement  $k_r$  ou  $k_{ru}$ .

De telles séries de valeurs de  $k_r$  ou  $k_{ru}$  servent ensuite lors de la prédétermination de crues exceptionnelles, puisque celles-ci, en règle générale, sont provoquées par des pluies de longue durée.

### 8.3. Exercice d'application de la méthode de reconstitution des crues complexes par composition d'hydrogrammes unitaires.

Comme dans l'exercice du chapitre VII, afin de ne pas allonger démesurément l'application numérique, on a retenu ici la phase la plus intéressante de la méthodologie de reconstitution des crues complexes, qui vient d'être exposée.

.../...

On a tout d'abord jugé inutile de demander la détermination du hyétogramme moyen d'une averse à partir de p pluviogrammes disponibles sur un bassin, car la procédure - coïncidence des maximums et conservation des intervalles de temps - étant choisie, l'opération n'est plus compliquée, tandis que si l'on laissait le choix de la procédure, les résultats seraient trop divergents pour que la reconstitution correcte de la crue soit ensuite réalisable.

On a ensuite écarté l'estimation de la variation de la capacité apparente moyenne d'absorption en cours d'averse parce qu'il s'agit d'une opération très délicate qui d'une part requiert l'examen de tous les événements averse-crue observés, et qui d'autre part n'obéit pas à une procédure rigide.

On se contente de poser le problème de la reconstitution d'une crue complexe sur un bassin versant représentatif dont l'analyse des données a permis de connaître :

- la loi de variation de la capacité d'absorption  $C_{am}$ ,
- le hyétogramme moyen de l'averse complexe,
- l'hydrogramme observé de la crue complexe,
- l'hydrogramme unitaire médian du bassin.

L'application numérique est effectuée sur l'information obtenue dans le bassin de KORHOGO, présenté dans le chapitre VII (cf. 7.3.2.), et qui sert de support aux explications de texte relatives à la détermination de l'hydrogramme unitaire et à la reconstitution des crues complexes.

Il est rappelé que ce bassin :

- a) draine une superficie de 3,63 km<sup>2</sup>,
- b) a son hydrogramme type médian donné en diagramme de débits de part et d'autre du maximum dans le tableau 12 du chapitre VII pour un volume ruisselé équivalent à une lame de 1 mm,
- c) admet des averses unitaires si elles durent moins de 15 minutes,
- d) a un seuil critique de la pluie utile pris égal à 18 mm/h.

En complément de ces informations générales déjà fournies, il est indiqué plus spécifiquement :

- a) que la capacité apparente moyenne d'absorption  $C_{am}$  en mm/h décroît régulièrement selon une exponentielle au cours d'une averse en fonction du temps  $t$  en minutes, compté depuis le début de l'averse ; cette décroissance est représentée par l'équation :

$$\log C_{am} = 1,86 - 0,0052 (t + 10)$$

.../...

Il va de soi que cette équation n'est explicitée que pour faciliter l'exercice car en réalité la capacité Cam varie également avec l'intensité de la pluie et a une valeur maximale d'origine non constante comme ici mais fonction de l'état de saturation préalable du bassin.

L'événement complexe averse-cruie à analyser et reconstituer est fourni sur le tableau 16 joint sous la forme d'un hyéto-gramme moyen (les intervalles de temps et les intensités moyennes correspondantes) et d'un hydrogramme (les débits observés et les heures correspondantes).

Il est indiqué enfin :

- que le débit de base varie en croissant régulièrement de 0,10 à 0,40 m<sup>3</sup>/s entre le moment du début de la crue et celui de la fin de celle-ci,
- que le volume ruisselé extrait de l'hydrogramme observé est de 28 600 m<sup>3</sup> auquel équivaut une lame de 7,86 mm.

Il est demandé de reconstituer la crue observée complexe par composition d'hydrogrammes unitaires en s'efforçant de faire coïncider au mieux les temps des crues observées et calculées (moment du départ et du maximum surtout) même si les débits ne sont pas toujours bien correspondants. La loi de variation de Cam doit donner des valeurs moyennes de Cam à divers moments à partir du maximum afin de déterminer le nombre d'averses unitaires de durée maximale 15 minutes. Un léger tâtonnement autour des valeurs moyennes de Cam pour ces diverses averses doit permettre de recomposer exactement la lame ruisselée.

TABLEAU 16

EVENEMENT AVERSE-CRUE COMPLEXE A KORHOGO

Hyétogramme moyen		Hydrogramme observé	
Heures et minutes	Intensité en mm/h	Heures et minutes	Débit en m <sup>3</sup> /s
5 h - 5 h 5'	16	5 h	0,10
5 h 5' - 5 h 15'	10	5 h 30'	0,10
5 h 15' - 5 h 20'	14	5 h 40'	0,30
5 h 20' - 5 h 25'	24	5 h 50'	1,20
5 h 25' - 5 h 30'	38	6 h	2,70
5 h 30' - 5 h 35'	78	6 h 10'	3,45
5 h 35' - 5 h 40'	56	6 h 20'	4,00
5 h 40' - 5 h 50'	28	6 h 30'	4,50
5 h 50' - 5 h 55'	35	6 h 40'	4,40
5 h 55' - 6 h	45	6 h 50'	3,70
6 h - 6 h 5'	39	7 h	3,20
6 h 5' - 6 h 20'	12	7 h 10'	2,96
6 h 20' - 6 h 26'	36	7 h 20'	2,72
6 h 26' - 6 h 30'	8	7 h 30'	2,50
6 h 30' - 6 h 50'	6	7 h 40'	2,25
6 h 50' - 7 h	22	7 h 50'	2,00
7 h - 7 h 10'	7	8 h	1,80
7 h 10' - 7 h 45'	3	8 h 20'	1,40
		8 h 40'	1,10
		9 h	0,85
		9 h 20'	0,68
		9 h 40'	0,52
		10 h	0,46
		10 h 30'	0,42
		11 h	0,40

CHAPITRE IX - PRED-TERMINATION DES CRUES EXCEPTIONNELLES  
DE PETITS BASSINS VERSANTS

Ce chapitre est l'aboutissement logique des deux chapitres VII et VIII précédents consacrés à l'analyse des événements averse-crue par modèle global (hydrogramme unitaire) sur bassin versant de superficie modeste. Dans ce chapitre, nous allons exposer la méthode permettant d'estimer, donc de prédéterminer, une crue connaissant la précipitation génératrice ou après estimation de celle-ci en se donnant uniquement au départ la probabilité d'occurrence de cette précipitation. Cette méthode de prédétermination utilise non seulement les résultats d'analyse obtenus précédemment (hydrogramme unitaire, variation de  $k_r$  ou de  $C_{am}$  en cours d'averse) mais également d'autres éléments analytiques que l'on va d'abord présenter brièvement car ils se déterminent tous à partir de procédures de base (analyse statistique d'échantillons, corrélations multiples ...) déjà exposées dans divers chapitres précédents.

9.1. Schéma général de la méthode de prédétermination

Nous présentons ici dans l'ordre logique séquentiel de leur utilisation dans la méthode de prédétermination les différents éléments déduits des analyses diverses.

- a) le choix de la probabilité d'occurrence  $p$  de la précipitation, dont la crue résultante doit être prédéterminée, s'effectue en considérant les objectifs d'utilisation de cette crue (calcul d'ouvrage d'un projet plus ou moins important devant assurer la protection contre un risque de destruction plus ou moins grand, etc ...),
- b) l'analyse statistique des précipitations journalières en une station de longue durée, dont le régime pluvieux est comparable à celui du bassin étudié, fournit la hauteur de précipitation  $P_j$  de probabilité  $p$  (loi de distribution hypergaussienne, de type Pearson III par exemple),
- c) l'étude de la réduction que subit une précipitation ponctuelle comparée à une précipitation moyenne sur un bassin d'une certaine superficie  $S$  km<sup>2</sup> fournit le coefficient d'abattement  $K$  à appliquer à  $P_j$  pour avoir la pluie moyenne  $P_m \leq P_j$  sur le bassin,
- d) l'analyse des hyétoigrammes d'averses observés permet d'estimer la pluie utile et la durée de celle-ci ( $P_u$ ,  $t_u$ ) correspondant à la pluie moyenne  $P_m$ ,

.../...

- e) le coefficient de ruissellement global ( $K_r$  ou  $K_{ru}$ ) est déterminée en fonction de la précipitation globale ( $P_m$  ou  $P_u$ ) et d'un facteur exprimant l'état de saturation préalable du bassin, à partir de l'analyse de tous les événements averse-crue observés sur le bassin considéré,
- f) la lame ruisselée totale  $l_r$  s'obtient en appliquant le coefficient de ruissellement global déterminé en c) à la hauteur totale de précipitation  $P_m$  obtenue en c) ; on a :  $K_r \times P_m$  ou  $K_{ru} \times P_u$
- g) l'hydrogramme unitaire médian du bassin est obtenu par analyse des crues observées ; cela fournit outre une répartition des débits dans le temps, une durée limite pour l'averse unitaire, et une variation des fonctions  $K_r(t)$  ou  $C_{am}(t)$ ,
- h) la précipitation de probabilité  $p$  est divisée en autant de fractions unitaires qu'il est nécessaire (comparaison de la durée limite unitaire de l'averse pour le bassin et de la durée utile  $t_u$  liée à la pluie  $P_u$ ) et l'on estime les valeurs correspondantes de  $K_r$  (ou  $K_{ru}$ ) à l'aide de la fonction  $K_r(t)$  de telle sorte que leurs moyennes soient les valeurs globales estimées ci-dessus,
- i) à chaque fraction unitaire d'averse correspond un hydrogramme unitaire ; la sommation de tous ces hydrogrammes unitaires décalés du temps adéquat fournit l'hydrogramme global de ruissellement,
- j) la crue relative à la précipitation de probabilité  $p$  est obtenue en ajoutant l'écoulement de base à l'hydrogramme global de ruissellement.

Ce schéma général appelle quelques commentaires et explications relatives tout particulièrement aux points non développés dans les chapitres VII et VIII et pour lesquels une procédure assez particulière est requise ; ceci s'applique aux points c), d) et e), les points a) et b) ne posant pas de problèmes compliqués tandis que les points f) à j) sont soit évidents, soit traités dans les chapitres précédents.

#### 9.1.1. La durée utile des précipitations

Il faut estimer la durée utile de la précipitation moyenne de hauteur déterminée par l'analyse statistique et corrigée de l'effet d'abattement, ceci afin de pouvoir dire si cette précipitation est unitaire ou non et dans ce cas en combien de fractions unitaires elle peut être divisée.

Il s'agit d'un travail d'estimation qualitative car l'on ne possède ni règle précise, ni relations certaines entre hauteurs et durées d'averses et ceci quels que soient les types de climat ou les régimes de précipitations. On notera à cet effet que les courbes classiques d'intensité-durée déduites d'observations pluviographiques sont obtenues par destruction de la chronologie et donc inadéquates pour caractériser la "forme" de la pluie, qui seule nous intéresse ici. Cependant, il est bien évident qu'il y a une tendance positive commune à la durée et à la hauteur pour croître ensemble ; cette tendance peut être plus aisément cernée si, éliminant les traînes d'averse, on limite l'analyse aux corps intenses, donc aux pluies utiles.

L'examen des averses observées sur le bassin étudié durant son exploitation doit suffire à donner une valeur moyenne de la liaison hauteur-durée de la pluie utile. Il est conseillé d'effectuer l'examen au niveau des hyétogrammes ponctuels, et non moyens ; l'on peut même utiliser des observations recueillies en d'autres postes pluviographiques, situés hors du bassin, pourvu qu'ils se trouvent soumis au même régime de pluviosité.

On remarquera que le résultat n'a pas besoin d'être très précis, et en tout état de cause si le caractère non unitaire d'une pluie n'est pas évident, il vaut mieux la supposer unitaire, ce qui aura pour conséquence de surestimer légèrement le débit maximal de la crue, opération qui va dans le sens de la sécurité.

#### 9.1.2. L'abattement des précipitations

La hauteur moyenne sur un bassin d'une précipitation donnée est toujours inférieure à des hauteurs ponctuelles relevées en divers emplacements de ce bassin, d'où l'idée qu'il pourrait en être de même lors d'un événement exceptionnel et que l'application de la hauteur ponctuelle, issue de l'analyse statistique d'une station de longue durée, à la superficie du bassin nécessiterait un abattement.

La méthodologie d'étude de l'abattement est, en résumé, la suivante :

- décompte par classes de 5 ou 10 mm de toutes les précipitations ponctuelles observées et de toutes les précipitations moyennes correspondantes, sur un bassin,
- correction de la distorsion de la distribution en classes de la série des précipitations ponctuelles (échantillon de courte durée) par la prise en compte de la loi de distribution journalière des pluies au poste de longue durée (la loi n'est que le lissage de la distribution par classes),

.../...

- correction correspondante de la distribution en classes de la série des précipitations moyennes et ajustement d'une loi de même type que celle lissant les pluies journalières,
- les coefficients d'abattement pour diverses fréquences se déduisent des deux lois de distribution.

La méthode des décomptes corrigés par la statistique permet une estimation de l'abattement pour un bassin donné.

L'abattement d'une précipitation ponctuelle semble :

- croître pour un bassin donné lorsque la hauteur de précipitation et la superficie du bassin augmentent,
- varier avec le type de précipitations et les conditions de relief d'un bassin à l'autre.

Pour diverses raisons, parmi lesquelles les dispersions dues aux échantillonnages jouent un grand rôle, il ne semble pas que les valeurs d'abattement obtenues pour un certain bassin soient très significatives. La méthode n'a d'intérêt réel qu'appliquée à de très nombreux bassins afin que l'on puisse en déduire par réduction des erreurs particulières des valeurs moyennes régionales qui seraient elles significatives.

Dans le cadre de ce chapitre, et compte tenu de l'esprit de l'ouvrage, il ne paraît pas utile de développer plus avant la méthodologie de l'abattement ; nous mettant dans le cas d'un bassin particulier, nous faisons l'hypothèse que les valeurs régionales moyennes de l'abattement sont connues.

### 9.1.3. La relation entre précipitation, ruissellement et saturation

C'est la clé de voûte de l'opération de transformation des quantités de pluies en débits d'écoulement. Elle consiste à appréhender globalement la quantité (lane ruisselée) ou la part (coefficient de ruissellement) qui se transforme en écoulement ; lane et coefficient de ruissellement croissent évidemment avec la hauteur de précipitations mais cette croissance est plus ou moins rapide et s'effectue à des niveaux plus ou moins élevés selon divers facteurs dont le plus important est l'état de saturation préalable des sols.

La recherche de la relation entre précipitation, ruissellement et saturation s'effectue donc dans le cadre des corrélations multiples ; comme les variables ne sont pas toujours normales et que les liaisons ne sont que rarement linéaires, la solution la plus pratique au niveau de l'analyse d'un bassin donné consiste à employer la méthode des déviations résiduelles. Cette méthode ayant fait l'objet d'un développement particulier dans le chapitre III, il est inutile d'y revenir et l'on se contente ici de présenter les variables généralement employées et quelques règles pratiques d'usage.

La variable à expliquer est tantôt le coefficient de ruissellement  $K_r$  (ou parfois  $K_{ru}$ ), tantôt la lame ruisselée  $l_r$ . Il est plus simple d'utiliser la variable  $K_r$ , car avec  $K_{ru}$  apparaît ensuite le problème du passage de la pluie globale à la pluie utile qui ne peut se résoudre avec précision ; quant à la lame  $l_r$ , la représentation de sa variation en fonction de la pluie est délicate, car elle doit admettre une asymptote à  $45^\circ$  (quand  $P_m$  croît,  $l_r$  tend vers  $P_m$ ). Le facteur principal du ruissellement est la pluie représentée par la variable  $P_m$ , hauteur moyenne sur le bassin, ou parfois par la variable  $P_u$ , pluie utile fraction de  $P_m$  d'intensité supérieure à un certain seuil qui dépend de la perméabilité des sols des bassins (la gamme de variation de ce seuil s'étend à peu près de 5 à 20 mm/h ; on a avec  $P_u$  les mêmes imprécisions qu'avec  $K_{ru}$ ).

Le facteur secondaire caractérise la plus ou moins grande saturation préalable des terrains c'est-à-dire la plus ou moins grande teneur en eau de ces terrains au début de la précipitation considérée ; il est bien évident que l'aptitude ou la potentialité au ruissellement d'un bassin soumis à une certaine pluie est d'autant plus élevée que la saturation préalable des terrains est importante.

À défaut de mesures des teneurs en eau des sols qui ne sont ni courantes, ni répandues en gestion opérationnelle d'un bassin, on caractérise la saturation en faisant appel à des paramètres indirects :

- soit le débit de base avant la montée de la crue, qui représente de manière intégrale la succession des pluies antérieures (dont l'infiltration a généré ledit débit de base),
- soit une fonction de cette chronique des pluies antérieures, qui est appelée l'indice d'humidité ou de saturation antérieur.

La saturation est d'autant plus élevée qu'il a beaucoup plu et que ces pluies se sont produites peu de temps avant l'événement considéré. L'indice d'humidité a donc une forme générale qui est la suivante :

$$IH = \sum_1^n Pa. ta^{-k} \quad (30)$$

équation dans laquelle l'on effectue la somme sur  $n$  jours antérieurs à l'événement des produits  $Pa. ta^{-k}$  relatifs à chaque pluie antérieure,  $Pa$  étant la hauteur moyenne d'une pluie antérieure et  $ta$  l'intervalle de temps antérieur qui sépare cette pluie de l'événement considéré,  $k$  étant un paramètre de réglage.

L'équation (30) peut se voir substituer des formes voisines, telles que :

$$\sum_1^n Pa. e^{-mta} \quad \text{ou} \quad \sum_1^n Pa. b^{ta} \quad (\text{avec } b < 1).$$

Suivant la nature des bassins, leur perméabilité, la plus ou moins rapide vitesse de ressuyage de leurs sols (fonction de l'évapotranspiration potentielle, du relief ...), la sommation précédente est étendue à  $n = 5$  à 10 jours environ ; parfois elle va jusqu'au début de la saison des pluies si celui-ci est net, parfois elle se limite à la première pluie antérieure cause de crue.

Dans certains cas enfin, l'équation (30) est simplifiée et il ne subsiste tantôt que  $\sum_1^n P_a$ , tantôt que  $t_a$  (relatif à la dernière pluie génératrice de crue).

Dans d'autres cas plus raffinés, l'équation (30) se complique par le fait que la pluie antérieure n'est pas représentée par sa hauteur moyenne globale  $P_a$ , mais par cette hauteur corrigée de la lame ruisselée due à cette pluie ( $P_a - l_a$ ) ou encore en tenant compte d'une constante d'évaporation  $E$  ( $P_a - l_a - E$ ).

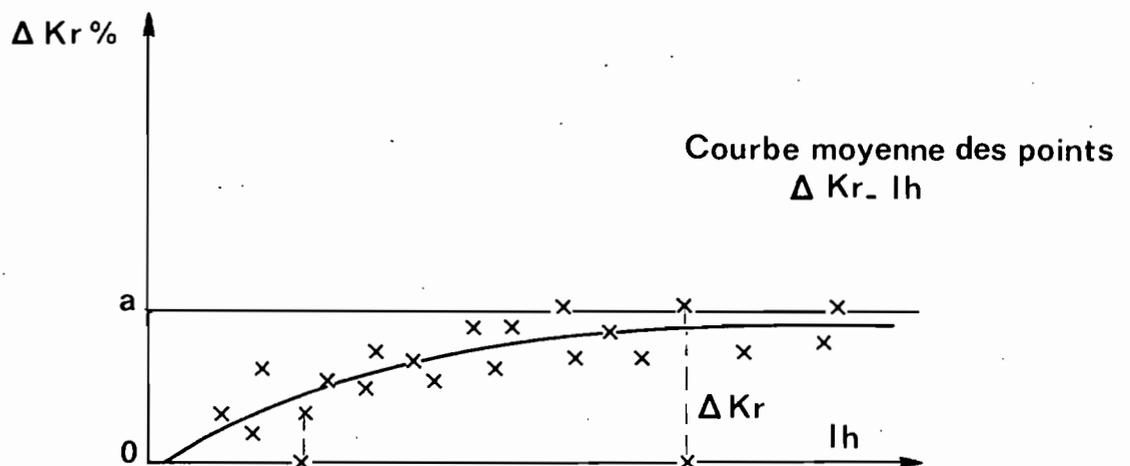
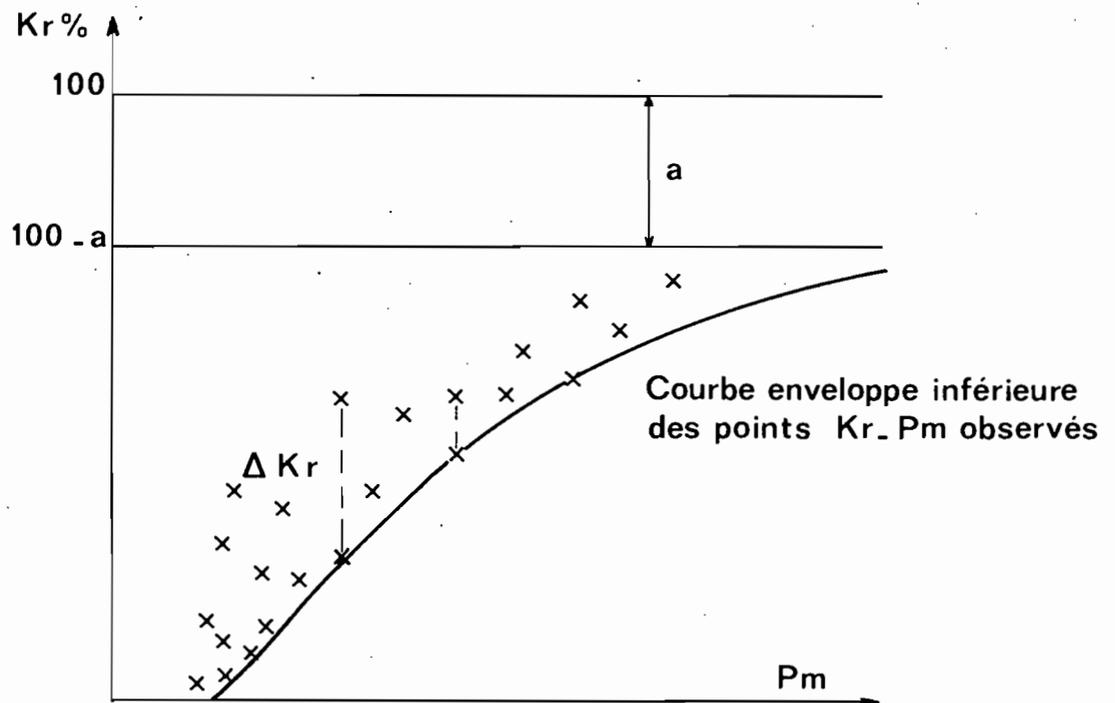
L'équation (30) ainsi compliquée n'est évidemment utilisable que par des hydrologues déjà expérimentés et travaillant sur des données observées de bonne qualité et disponibles en grande quantité.

La mise en application de la méthode des déviations résiduelles sur le schéma de relations ainsi élaboré -  $K_r = f(P_m, I_H)$  - suit quelques règles pratiques qui découlent de la nature intrinsèque de ces mêmes relations :

- a) la fonction  $K_r = f(P_m)$  est croissante et l'on n'a pas intérêt à ne pas la faire régulièrement croître sans point d'inflexion,
- b) la relation de second ordre donnant  $\Delta K_r$  en fonction de  $I_H$  est également croissante régulièrement.  
Comme  $K_r$  ne peut excéder 100 %, sa valeur tend asymptotiquement vers cette limite. Pour éviter toute anomalie dans la composition des deux graphiques ( $K_r$  et  $\Delta K_r$ ) il faut et il suffit de :
- c) tracer la courbe  $K_r = f(P_m)$  avec une asymptote à  $(100 - a)$  %,
- d) tracer ladite courbe  $K_r = f(P_m)$  en enveloppe inférieure des points observés et non pas en position médiane afin que la correction  $\Delta K_r$  soit toujours positive et puisse être tracée elle en position médiane et avec une asymptote égale à  $a$  %.

Le graphe 18 montre schématiquement l'application de ces quelques règles. Il suffit de les suivre pour établir aisément la relation précipitation-ruissellement-saturation à partir des caractéristiques des averses et des crues observées sur un bassin versant donné.

## Schéma simple de relation Précipitation-Ruissellement-Saturation



Bien entendu, les règles précédentes sont surtout utiles pour des bassins à très forts ruissellements. Pour des bassins à très faibles ruissellements, dont les  $K_r$  restent inférieurs à 50 et même à 20 ou 10 %, il n'y a qu'un risque négligeable de voir excéder 100 % dans la composition des deux graphiques ; et d'ailleurs dans de tels cas, les courbes  $K_r = f(P_m)$  dans la partie expérimentale observée restent très proches de l'axe des  $P_m$ , très loin d'une quelconque asymptote et même n'ébauchent pas encore leur concavité vers le haut.

## 9.2. Mise en oeuvre de la méthode de prédétermination

Nous allons mettre en oeuvre le schéma général décrit ci-dessus en suivant un exemple tiré d'un bassin de la région de MANGA (Haute-Volta), situé sur des terrains granitiques très altérés, à pentes assez fortes, où le défrichement est intense ; le climat tropical y règne avec une pluviosité de 920 mm répartie (pour plus de 80 %) en 5 mois pluvieux de mai à septembre.

On choisit une station installée à l'issue d'un petit bassin de 10,6 km<sup>2</sup>, en laquelle des observations ont été faites durant trois années, permettant une bonne analyse des caractéristiques hydrologiques.

Nous allons suivre le plan du schéma méthodologique décrit en 9.1.. La prédétermination de crue est envisagée pour l'événement engendré par une précipitation ponctuelle de récurrence décennale - récurrence couramment choisie pour les petits aménagements hydro-agricoles -, événement que l'on appelle "crue décennale".

Une station pluviométrique de longue durée fonctionne à MANGA ; l'analyse statistique selon une loi de Pearson III fournit l'estimation de 100 mm pour la pluie journalière de récurrence décennale. L'étude de l'abattement spatial des pluies ponctuelles réalisée sur ce bassin, en prenant appui sur le poste de MANGA, donne une valeur de 0,84 pour sa récurrence décennale. On convient donc que la précipitation moyenne décennale sur le bassin est de 84 mm. L'étude des averses et crues observées a permis de situer vers 12 mm/h le seuil d'intensité pour la pluie utile.

Une synthèse régionale des relations intensités-durées des précipitations a été consultée pour choisir la forme et la durée du hyétogramme de la pluie décennale ; ce choix figure sur le graphe 20 : la pluie dure environ deux heures (traîne à faible intensité non comprise), au cours desquelles une pointe unique de fortes intensités dépasse le seuil de 12 mm/h durant 55 minutes.

L'hydrogramme unitaire médian extrait des observations de crues unitaires a les caractéristiques suivantes :

- temps de montée de 30 minutes,
- durée de 3 h 40 minutes,
- débit maximal de 2,96 m<sup>3</sup>/s (lame de 1 mm).

Nous allons suivre le plan du schéma méthodologique décrit en 9.1.. La prédétermination de crue est envisagée pour l'événement engendré par une précipitation ponctuelle de récurrence décennale - récurrence couramment choisie pour les petits aménagements hydro-agricoles -, événement que l'on appelle "crue décennale".

Une station pluviométrique de longue durée fonctionne à

est égale au plus au tiers du temps de montée (petit bassin) donc à 10 minutes.

La pluie utile atteignant 55 millimètres, la crue décennale n'est pas unitaire (cas général pour les petits bassins tropicaux) et devra être composée.

L'analyse des relations précipitation-ruissellement-saturation a été menée à partir du coefficient de ruissellement  $K_r$ , de la pluie moyenne  $P_m$  et d'un indice d'humidité préalable obtenu par la formule suivante :

45  
1  
les courbes tracées selon la méthode des déviations résiduelles l'ont été en position moyenne et non enveloppe ; on les trouve sur le graphe 20. On admet que pour la crue décennale les conditions de saturation préalable à retenir doivent être médianes, c'est-à-dire correspondre à une correction nulle de  $K_r$  par l'indice IH (valeur médiane de 16 mm donnant  $\Delta K_r = 0$  sur le graphe 10) ; de cette manière  $K_r = 38 \%$ .

Si l'on avait recherché la crue maximale probable, il est certain que l'on aurait alors considéré les pires conditions de saturation préalable à savoir celles correspondant à la plus forte correction par IH (environ 40 à 50 mm pour IH et  $\Delta K_r$  de l'ordre de + 15 %) afin d'obtenir le  $K_r$  le plus élevé possible (peut-être 60 + 15 soit 75 % pour 150 mm de pluie en extrapolant les courbes du graphe 20).

La crue décennale correspond ici, dans l'exemple suivi, à une lame de  $84 \times 0,38 = 32$  mm.

Il importe de répartir cette lame, sous la forme de pluie nette, sur les fractions intenses de la pluie utile du hyétogramme de l'averse décennale.

L'analyse des averses et crues observées, la reconstitution de crues complexes ont permis d'estimer la variation moyenne de la capacité d'absorption du bassin pendant une pluie intense ; cette variation moyenne a été reportée sur le graphe du hyétogramme après quelques tâtonnements pour dégager une pluie nette de 32 mm.

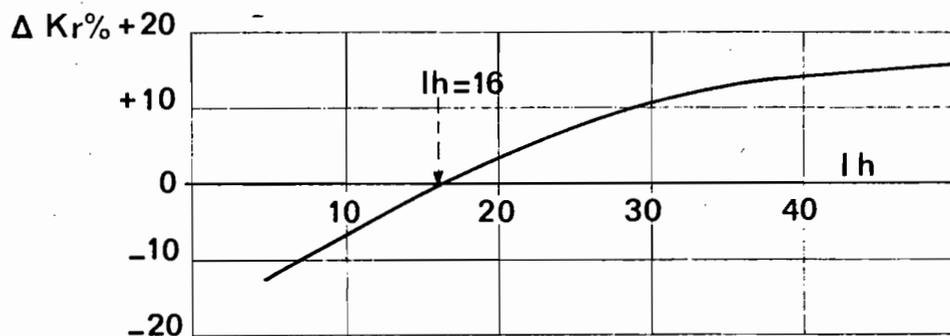
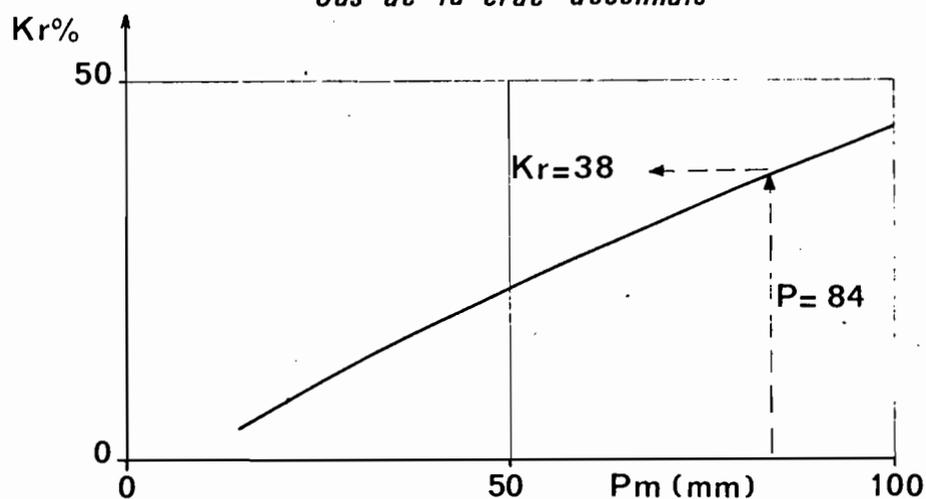
L'averse unitaire étant de 10 minutes, on a remplacé la courbe de  $CA = f(t)$  par une courbe en escaliers de 10 minutes relative à la capacité apparente moyenne d'absorption  $Cam$  ; on arrive ainsi à quatre averses unitaires de 10 minutes, pour un total de 40 minutes (durée de la pluie efficace).

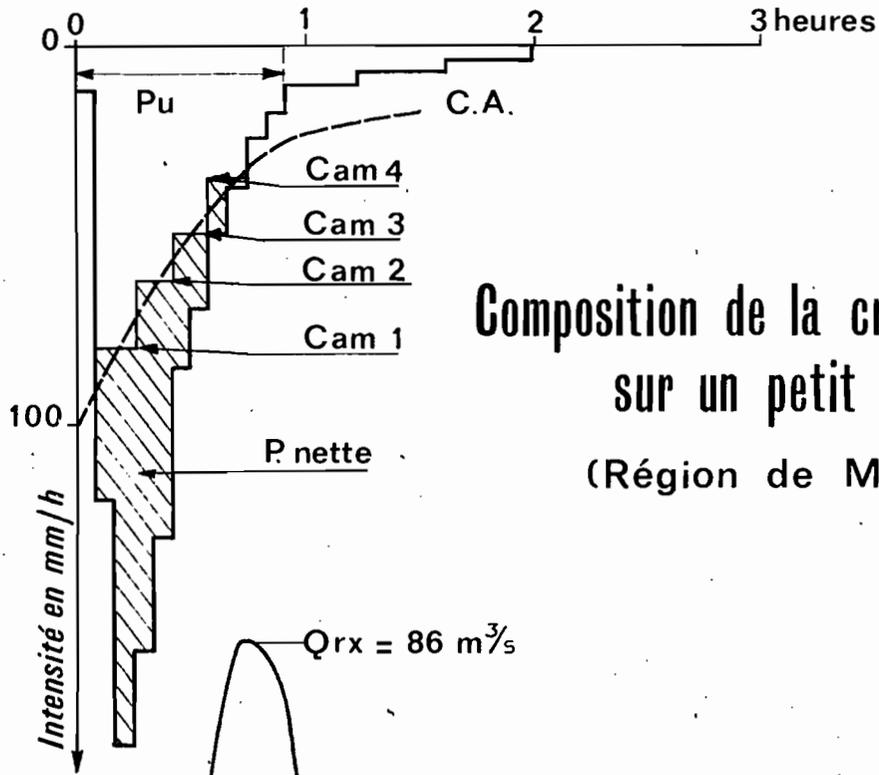
.../...

# Relation Pluie-Ruissellement-Saturation sur un petit bassin

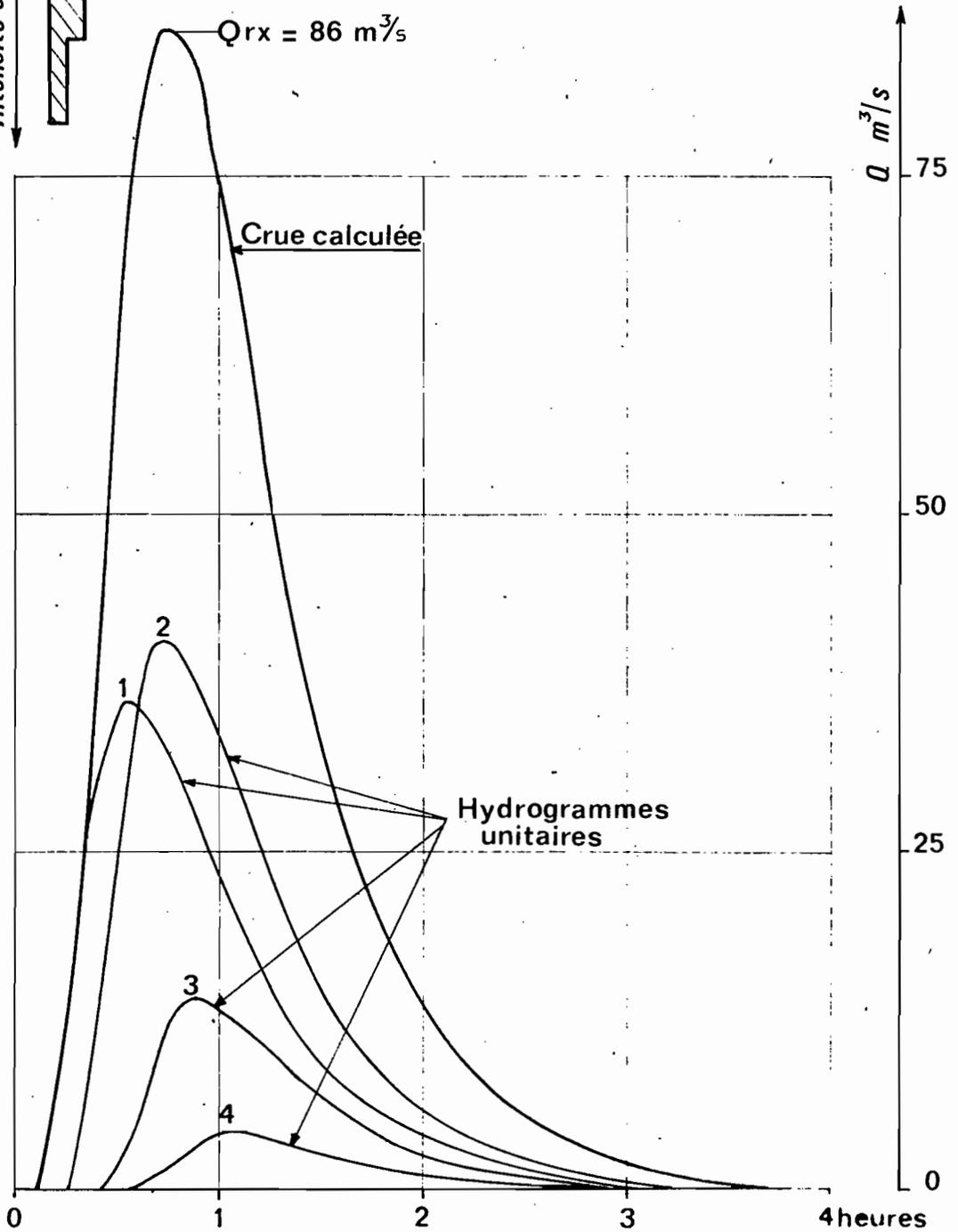
(Région de MANGA)

*Cas de la crue décennale*





### Composition de la crue décennale sur un petit bassin (Région de MANGA)



La décomposition numérique est montrée sur le tableau suivant n° 17.

TABLEAU 17

CALCUL DE LA PLUIE NETTE

Hyétogramme moyen			Décomposition en tranches de 10 mn			
Intervalles (minutes)	Intensités (mm/h)	Hauteurs (mm)	Pluie moyenne efficace	Absorption	Lame ruisselée	(mm)
0 - 5	12	1	Interv. (minutes)	P eff (mm)	Cam (mm/h)	Total (mm)
5 - 10	120	10				
10 - 15	185	15,4				
15 - 20	160	13,3				
20 - 25	130	10,8	5 - 15	25,4	80	13,3
25 - 30	85	7,1				12,1
30 - 35	70	5,8	15 - 25	24,1	62	10,3
35 - 40	50	4,2				13,8
40 - 45	38	3,2	25 - 35	12,9	50	8,2
45 - 50	25	2,1				4,7
50 - 55	18	1,5	35 - 45	7,4	36	6,0
... etc	.. etc ..	.. etc ..				1,4
Total pluie utile		74,4	40	69,8		37,8
Total pluie globale		84				32

La décroissance régulière de 80 à 36 mm/h des valeurs de Cam met en évidence les quatre fractions unitaires de pluie nette ou lame ruisselée (différence entre pluie efficace et total absorbé) égales successivement à 12,1 - 13,8 - 4,7 et 1,4 mm.

.../...

Le procédé de décomposition basé sur la variation de la capacité d'absorption est plus sûr que celui qui repose sur la variation intrinsèque du coefficient de ruissellement trop liée aux intensités de pluie ; en effet, dans l'exemple ci-dessus, autour du  $K_r$  global de 38 %, les valeurs relatives aux quatre averses unitaires sont respectivement de 47,5 - 57 - 36 et 19 % (rapports des fractions unitaires de pluie nette aux pluies efficaces par tranches de 10 minutes), valeurs qu'il aurait été difficile d'estimer directement.

Il reste maintenant à composer les quatre hydrogrammes unitaires, décalés de 10 en 10 minutes. Le graphe 20 montre cette composition dont les principaux éléments numériques figurent dans le tableau 18.

TABLEAU 18

COMPOSITION DES HYDROGRAMMES UNITAIRES (EN M<sup>3</sup>/s)

Temps (minutes)	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	125	145	175	215	255
1° H.U. (12,1mm)	0	11	30,6	35,8	32,6	26,5	20,6	14,9	11	7,9	5,8	3,3	1,8	0,7	0	-
2° H.U. (13,8mm)	-	0	12,4	34,9	40,8	37,1	30,2	23,5	17	12,4	9	5,1	2,8	1,1	0,2	-
3° H.U. (4,7mm)	-	-	0	4,2	11,9	13,9	12,6	10,3	8	5,8	4,2	2,2	1,3	0,5	0,1	-
4° H.U. (1,4mm)	-	-	-	0	1,2	3,5	4,2	3,8	3,1	2,4	1,7	0,9	0,5	0,2	0,05	0
Total (32 mm)	0	11	43	74,9	86,0	81,0	67,6	52,4	39,1	28,5	20,7	11,5	6,4	2,5	0,35	0

Le maximum de crue survient 45 minutes après le début de la pluie, coïncidant avec le maximum du second et plus important hydrogramme unitaire relatif à la seconde tranche d'averse unitaire (entre les instants 15 et 25 minutes après le début de la pluie).

En l'absence d'écoulement de base notable, la crue décennale est uniquement constituée de l'onde de ruissellement ainsi prédéterminée.

.../...

Au cours des trois années d'observations, la plus forte crue avait été de 50 m<sup>3</sup>/s ; compte tenu de ses conditions d'écoulement et des caractéristiques topographiques du thalweg, la crue de 86 m<sup>3</sup>/s peut être conservée telle quelle sans réduction pour débordements importants. Ce point doit toujours être examiné avant l'adoption finale d'une crue exceptionnelle calculée à partir d'hydrogrammes unitaires correspondant généralement à des conditions d'écoulement sans débordement. La déformation de l'onde de crue exceptionnelle par débordements dans le lit majeur doit être estimée d'après les observations des plus fortes crues et des conditions topographiques ; il s'agit souvent d'une estimation assez délicate qui diminue la précision de la prédétermination.

### 9.3. Exercice de prédétermination d'une crue décennale sur un bassin représentatif

L'exercice d'application de ce chapitre suit étroitement le processus décrit en détail dans le paragraphe précédent relatif à la mise en oeuvre de la méthode de prédétermination.

L'implantation géographique du thème d'application concerne cette fois le département de la GUYANE, et plus précisément le bassin de la Crique VIRGILE qui a fait l'objet d'études intensives de terrain de 1959 à 1962.

A quelques 60 km au sud de CAYENNE, ce bassin est en pleine forêt dense humide, il repose sur des terrains schisteux imperméables dont la géomorphologie externe revêt l'aspect de collines escarpées. Le bassin couvre 7,6 km<sup>2</sup> ; le régime des précipitations est de type équatorial boréal c'est-à-dire qu'il pleut presque toute l'année avec deux périodes plus humides de novembre à février et d'avril à juillet, séparés par des périodes moins arrosées en mars et d'août à octobre ; au total il tombe en moyenne 4 000 mm par an.

La Crique VIRGILE a un écoulement permanent.

L'étude statistique des hauteurs journalières ponctuelles de précipitation enregistrées aux anciens postes de la région conduit à attribuer une valeur de 175 mm à la fréquence décennale.

On se propose de calculer la crue provoquée par cette pluie sur le bassin de la Crique VIRGILE, dont l'analyse fournit les informations suivantes :

- a) le coefficient d'abattement de l'averse ponctuelle sur ce bassin de faible superficie (7,6 km<sup>2</sup>) est égal à 0,95,
- b) la pluie utile représente environ 93 % de la précipitation totale, sur ce bassin imperméable, presque toujours saturé d'eau,

.../...

c) la forme des précipitations est assez mal connue parce que très variable ; pour une même hauteur on peut avoir aussi bien plusieurs pointes intenses séparées par de la pluie fine qu'une très longue pluie peu intense ; on a retenu un schéma simpliste pour le hyétogramme de l'averse décennale, schéma sévère et capable d'assurer une forte crue puisque la pluie utile a été estimée devoir durer huit heures et se subdiviser en quatre fractions de deux heures à la même intensité moyenne dont 13 le total précipité représente successivement ~~54,6~~ % - 54,6 % - ~~22,7~~ % et 9,7 % de la hauteur de la pluie utile de huit heures,

22,7

d) l'hydrogramme unitaire de ruissellement dure huit heures et demie, a un temps de montée de deux heures et demie et calculé pour une lame de 10 mm (76 000 m<sup>3</sup>) a le diagramme de répartition suivant :

Temps (h)	-2 1/2	-2	-1 1/2	-1	-1/2	0	+1/2	+1	+1 1/2
Débit (m <sup>3</sup> /s)	0	0,6	1,8	3,6	4,9	5,5	5,1	4,6	3,9
Temps (h)	+2	+2 1/2	+3	+3 1/2	+4	+4 1/2	+5	+5 1/2	+6
Débit (m <sup>3</sup> /s)	3,2	2,6	2,0	1,4	1,0	0,7	0,4	0,2	0

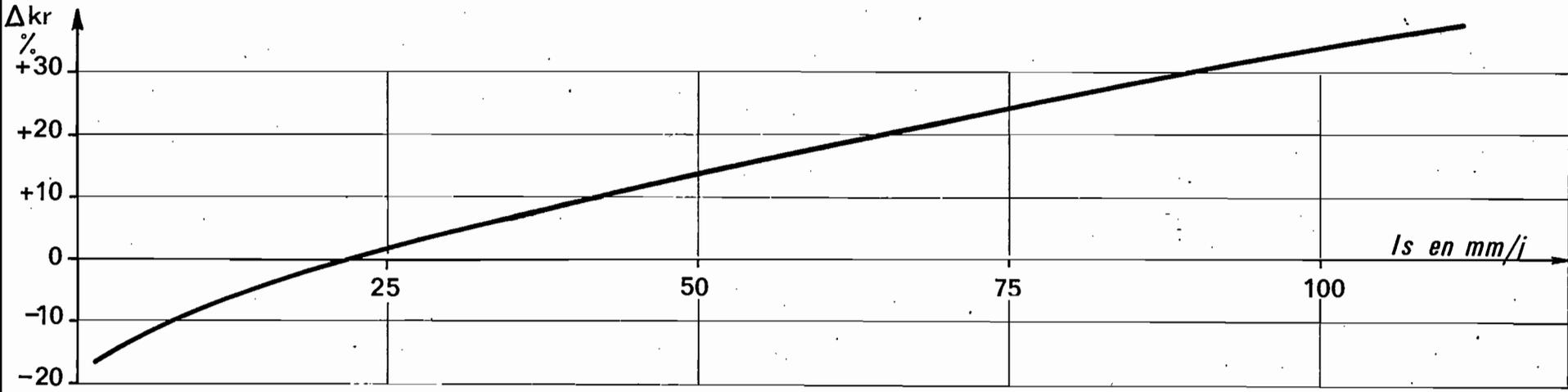
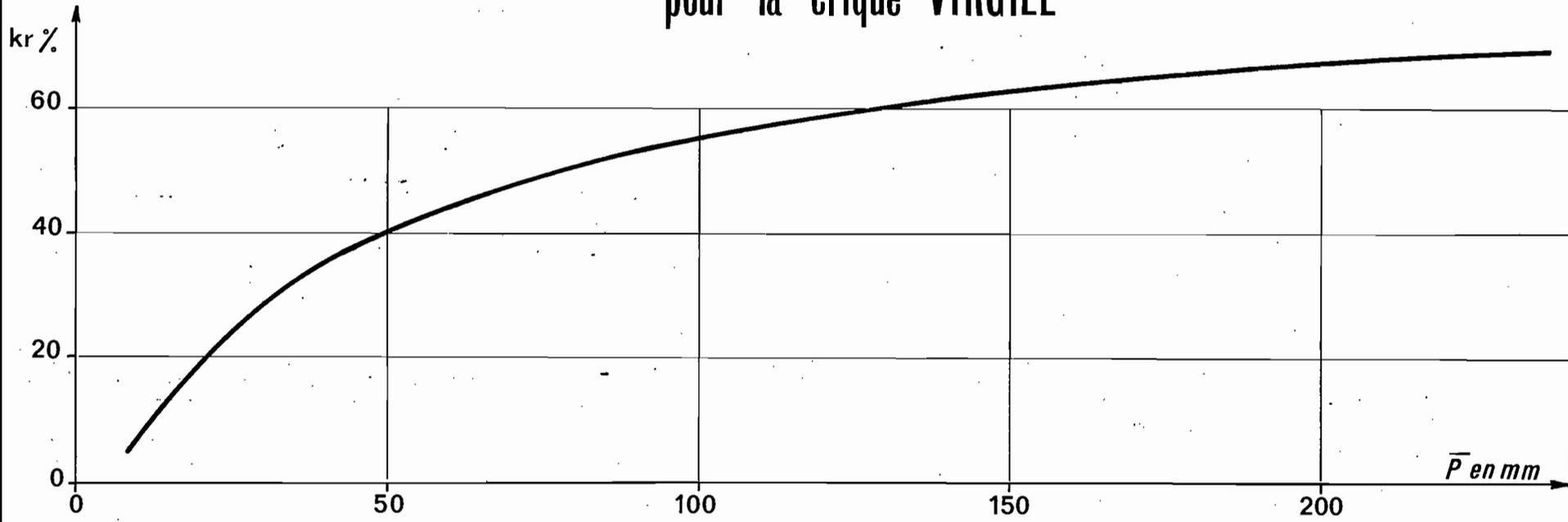
e) l'étude de l'influence des précipitations et de la saturation des terrains sur la formation du ruissellement a conduit à un couple de graphiques obtenus par la méthode des résidus (graphe n° 21) dans lequel l'un lie le coefficient de ruissellement Kr % à la pluie moyenne totale P, et l'autre explique les écarts Kr % en fonction d'un indice I<sub>S</sub> ; l'indice I<sub>S</sub> a été calculé à l'aide de l'équation :

$$I_S = \Sigma (P_a - l_a) \cdot t_a - 1,5$$

dans laquelle P<sub>a</sub> est une pluie antérieure survenue t<sub>a</sub> jours avant l'événement considéré et qui a, cette pluie P<sub>a</sub>, provoqué un ruissellement équivalent à la lame l<sub>a</sub>.

.../...

# Relations "ruissellement-saturation-précipitation" pour la crique VIRGILE



Il est demandé de prédéterminer la crue décennale de la Crique VIRGILE en tenant compte des informations précédentes et des indications suivantes :

- l'indice de saturation pour la pluie décennale est de  $I_S = 34 \text{ mm/j}$ ,
- la capacité moyenne apparente d'absorption  $Cam$  (en mm/h) varie au cours d'une averse continue selon une équation de la forme :

$$\log Cam = b + a \log (t + 60)$$

dans laquelle l'instant initial  $t_0$  est égal à zéro, 60 minutes avant le début de la pluie utile, l'expression  $(t + 60)$  représentant donc en minutes le temps écoulé depuis  $t_0$ .

On déterminera les valeurs de  $a$  et de  $b$  de telle sorte que la  $Cam$  soit d'environ 20 mm/h au début de la pluie utile et que la pluie nette qui sera calculée par application de l'équation corresponde à la lame ruisselée obtenue par la méthode des résidus.

- Les diverses valeurs de  $Cam$  seront calculées chaque heure, en se plaçant au centre de chaque tranche horaire de la pluie utile,
- On composera des hydrogrammes unitaires pour chaque tranche horaire de la pluie utile pour affiner la prédétermination bien qu'il eût suffi d'adopter un pas de temps de deux heures,
- Le débit de base de la Crique VIRGILE, dans les conditions d'une pluie décennale (saturation  $I_S = 34 \text{ mm/j}$ ) est d'environ 1 m<sup>3</sup>/s avant la montée des eaux de ruissellement et va croître selon une progression constante et égale à 0,2 m<sup>3</sup>/s par heure, tout au long de la crue.



## CHAPITRE X - L'ASPECT QUANTITATIF DE L'ETUDE PHYSIQUE ET MORPHOMETRIQUE D'UN BASSIN VERSANT

L'analyse hydrologique emploie des méthodes diverses, dont certaines parmi les plus utilisées ont fait l'objet des développements des neuf chapitres précédents. Toutes ces méthodes ont recours à des degrés variés aux appareils mathématiques en général, à l'appareil statistique en particulier.

Mais il ne suffit pas à l'hydrologie moderne de pouvoir analyser correctement les observations issues de tel ou tel bassin ; il lui faut également pouvoir comparer les résultats d'analyse entre bassins afin de rechercher les causes des variations des caractéristiques hydrologiques définies dans ces résultats. Cette recherche des causes regarde évidemment vers ce qui différencie les bassins : le climat qu'ils subissent et leur propre milieu physique. Une mise en évidence rigoureuse de ces causes ne peut se faire que si le milieu physique, en particulier, est lui aussi analysable avec un appareil mathématique. Il n'est pas possible de se contenter d'indications qualitatives du genre "très accidenté" ou "de faible perméabilité".

La quantification des facteurs caractéristiques du milieu physique s'impose. Pour que la recherche des causes de variation du régime hydrologique dans l'espace soit rigoureuse, il faut que cette quantification s'effectue de manière homogène c'est-à-dire que la mesure des paramètres du milieu obéisse à des méthodes précises et définies.

L'objet de ce chapitre est d'illustrer l'aspect pratique de ces méthodes de mesures des paramètres du milieu physique, en insistant plus particulièrement sur les paramètres géométriques, de relief et morphométriques dont la détermination repose sur l'emploi des photographies aériennes ou des cartes topographiques dressées par restitution de celles-ci.

### 10.1. La mesure des paramètres géométriques et de relief

Nous rappelons tout d'abord les principaux paramètres de ce groupe, ceux qu'il est devenu classique de mesurer :

- a) comme paramètres géométriques la superficie  $A$  du bassin, son périmètre stylisé  $P$ , son indice de forme ou de compacité  $C$ , les côtés de son rectangle équivalent (même superficie et même périmètre),
- b) comme paramètres de relief l'indice de pente  $I_p$  de ROCHE et l'indice global  $I_g$  qui requièrent la connaissance de la répartition hypsométrique (pourcentages de la superficie entre les courbes de niveau connues) et de la dénivelée utile  $D$  (entre les altitudes qui délimitent 90 % de la surface du bassin sur la courbe hypsométrique).

.../...

La détermination de ces divers paramètres s'effectue à la chaîne : les uns s'obtiennent directement sur carte par planimé-  
trage ou mesure de longueurs au curvimètre, les autres se calculent  
à partir des premiers.

Toute la mesure et par conséquent la précision de celle-ci dépendent des cartes utilisées, de la précision des indications qu'elles contiennent et de la précision propre au planimètre et au curvimètre.

Comme la détermination s'effectue en chaîne, c'est sur le dernier paramètre mesuré que vont se manifester les erreurs de mesure les plus élevées ; en fixant une précision souhaitable pour ce dernier paramètre on s'oblige à atteindre une précision supérieure pour la détermination des autres paramètres.

Les derniers paramètres sont les indices de pente ; comme ils sont surtout destinés à placer les bassins dans des classes de relief (définies entre des bornes correspondant à certaines valeurs de ces indices) on a jugé acceptable une précision de 25 % sur l'indice  $I_p$  et de 40 % sur l'indice  $I_g$ .

Dans ces conditions et compte tenu des précisions propres du planimètre et du curvimètre (erreur de lecture des graduations) et des erreurs dues au tracé des limites réelles et stylisées d'un bassin versant, il faut obtenir une précision de 2 % sur la mesure de la surface et de 5 % sur celle du périmètre, valeurs de précision qui sont liées entre elles, la surface étant liée au périmètre. Ceci traduit en grandeur à mesurer sur la carte topographique conduit à des dimensions minimales de bassin liées aux échelles des cartes disponibles. Les tableaux 19 et 20 donnent l'un les caractéristiques des cartes de l'Institut Géographique National pour la France métropolitaine et d'outre-mer et pour les pays francophones d'Afrique, l'autre les limites d'emploi de ces cartes pour l'obtention d'une précision prédéterminée. Par exemple, la surface et le périmètre d'un bassin de 1,3 km<sup>2</sup> ne peuvent être valablement mesurés que sur des cartes à l'échelle du 1/25 000e ou à plus grande échelle.

Le problème de la stylisation du tracé du périmètre d'un bassin mérite quelques commentaires. La limite topographique d'un bassin est d'abord tracée avec toutes ses sinuosités pour permettre le calcul exact de la superficie. Il importe ensuite de styliser ce tracé car la mesure du périmètre sert uniquement à calculer l'indice de compacité C. Or cet indice, comme son nom l'indique, est sensé représenter la plus ou moins grande compacité du bassin c'est-à-dire qu'il est sensé rendre compte de la plus ou moins grande vitesse de concentration à l'exutoire des eaux de ruissellement en provenance des diverses parties du bassin c'est-à-dire du temps de concentration. Il est donc inutile que le périmètre suive des sinuosités qui ne contournent pas un thalweg de drainage de ruissellement, sinon il conduirait à une valeur exagérée de l'indice de compacité ; en outre, le tracé réel dépend de l'échelle de la carte, du relief et peut être plus ou moins sinueux pour des bassins ayant une même forme générale. La stylisation s'impose pour que l'on ait des périmètres donc des compacités homogènes, mais elle ne doit pas trop s'écarter du tracé réel afin que la surface contenue dans le périmètre stylisé ne soit pas significativement différente de la surface réelle.

TABLEAU 19

Caractéristiques des principales cartes  
de l'Institut Géographique National (IGN)

P a y s	Echelle de cartes	Equidistance des courbes de niveau (m)			Observations
		plaine	en général	montagne	
FRANCE	10 000		5		cartes locales
	20 000		5 ou 10		Proj. Lambert
	25 000		5 ou 10		Dérivée de la 20 000
	50 000	5	10	20	"
	100 000		20	40	"
	250 000	20	40	80	"
	80 000	10	20	40	Proj. Bonne-mercator
200 000		20	40	Dérivée du 80000	
Afrique de l'Ouest	50 000		20		sporadique
	100 000		20		sporadique
	200 000		20 ou 25	50	
Afrique Centrale	50 000		20		sporadique
	100 000		20		sporadique
	200 000		40		
MADAGASCAR	50 000		25 ou 50		sporadique
	100 000		25 ou 50		
REUNION NOUVELLE-CALEDONIE POLYNESIE	50 000		20		
GUYANE	50 000		20		sporadique
	100 000		25 ou 50		
	200 000		50		
GUADELOUPE	20 000		5 ou 10		
	50 000		20		
MARTINIQUE	20 000		10		
	50 000		20		

TABLEAU 20

Limites d'emploi des documents cartographiques pour le calcul des paramètres physiques avec une précision acceptable

Echelle de carte	Limite inférieure de surface admissible en km <sup>2</sup>	Equidistance des courbes de niveau d (m)	Limites inférieures de dénivelée D (m) recommandée pour le calcul de $I_p$ et de $I_G : D = 3d$
250 000	40	20 40 80	60 120 240
<u>200 000</u>	25	<u>20</u>	60
<u>100 000</u>	7	<u>25</u> <u>40</u> <u>50</u>	75 120 150
80 000	4	10 20 40	30 60 120
<u>50 000</u>	1,6	5 10 <u>20</u> <u>25</u>	15 30 60 75
25 000	0,40	5	15
<u>20 000</u>	0,25	<u>10</u>	30
10 000	0,07	5	15

N. B. Les échelles et équidistances soulignées correspondent aux cartes des pays d'Outre-Mer.

Le graphe n° 22 montre une telle stylisation comportant l'élimination ou le respect des sinuosités selon leur importance, leur rôle sur le temps de concentration et leur influence sur la surface drainée ; on pourrait y constater que le périmètre stylisé mesure 33,2 km tandis que le périmètre réel atteint 35,5 km, soit 7 % de plus.

L'indice de compacité se calcule en appliquant la formule :

$$C = 0,28 P \cdot A^{-1/2} \quad (31)$$

il est égal à 1 pour un bassin circulaire et croît d'autant plus que la compacité diminue.

Le rectangle équivalent est tel que  $2(L + l) = P$  et  $L \cdot l = A$  ; il se réduit à un carré pour une compacité  $C = 1,12$ . Sa notion est admissible car pratiquement très peu de bassins ont des compacités inférieures à 1,12.

On calcule sa longueur L en appliquant :

$$L = A^{1/2} \frac{C}{1,12} \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{(1,12)^2}{C}} \right] \quad (32)$$

Pour éviter le calcul précédent, on l'a traduit en une courbe graphique donnant  $L \cdot A^{-1/2}$  en fonction de C (graphe n° 23). Si l'on reprend l'exemple du bassin du graphe 22, on peut déterminer C et L à l'aide du périmètre stylisé pour comparer aux valeurs qu'aurait donné le périmètre réel. On obtient pour C les valeurs de 1,49 et de 1,60 (périmètre non stylisé), sachant que  $A = 38,8 \text{ km}^2$  ; puis pour L on détermine sur le graphe 23 des valeurs de 13,8 et 15,3 km, cette seconde valeur étant supérieure de 11,1 % à la précédente (contre seulement 7 % d'excès sur P et C).

Compte tenu de la forme de la relation (31), et du fait que la précision sur C, dépendant entièrement de celle sur A et P, est d'au moins de 6 %, on peut établir que L est connu à 23 % près pour une compacité de 1,12 et que cette précision s'améliore quand C croît pour devenir inférieure à 8 % avec C 1,35.

Les indices de pente se déterminent à partir de la connaissance de la répartition hypsométrique sur le bassin. Pour obtenir cette détermination avec la précision désirée, il faut que la répartition hypsométrique soit entachée d'une erreur négligeable devant les erreurs de mesure (erreur sur L, erreur sur le planimétrage entre courbes de niveau) ; on a admis qu'il en était ainsi à condition que l'on ait au moins 4 courbes de niveau traversant le bassin c'est-à-dire que la dénivelée D soit au moins égale à 3 fois l'équidistance d des courbes de niveau dessinées sur la carte. Cette équidistance étant variable avec le type de cartes, on a de nouvelles limites à l'emploi des cartes qui s'ajoutent aux limites précédentes (mesures de A et P) et sont portées également sur le tableau 20.

L'indice de pente  $I_p$  de ROCHE se calcule ainsi :

$$I_p = L^{-1/2} \sum_1^n \sqrt{a_i d_i} \quad (33)$$

équation dans laquelle  $a_i$  représente la fraction en % de la surface A comprise entre deux courbes de niveau voisines distantes de  $d_i$ .

Si sur la courbe hypsométrique, on prend les points tels que la surface supérieure ou inférieure soit égale à 5 % de A, on a les altitudes  $H_5$  et  $H_{95}$  (entre lesquelles s'inscrivent 90 % de l'aire du bassin) et la dénivelée  $D = H_5 - H_{95}$ .

$$\text{L'indice de pente global } I_G = \frac{D}{L} \quad (34)$$

On se rend compte que la stylisation du périmètre qui influe sur la valeur de C puis sur celle de L se répercute jusqu'aux indices de pente. L'indice global  $I_G$  serait comme L surestimé de 11 % si l'on ne stylisait pas, tandis que l'excès ne serait que de 5 % sur  $I_p$  (action de  $\sqrt{L}$  et non de L) dans l'exemple du graphe 22.

## 10.2. La mesure des paramètres morphométriques

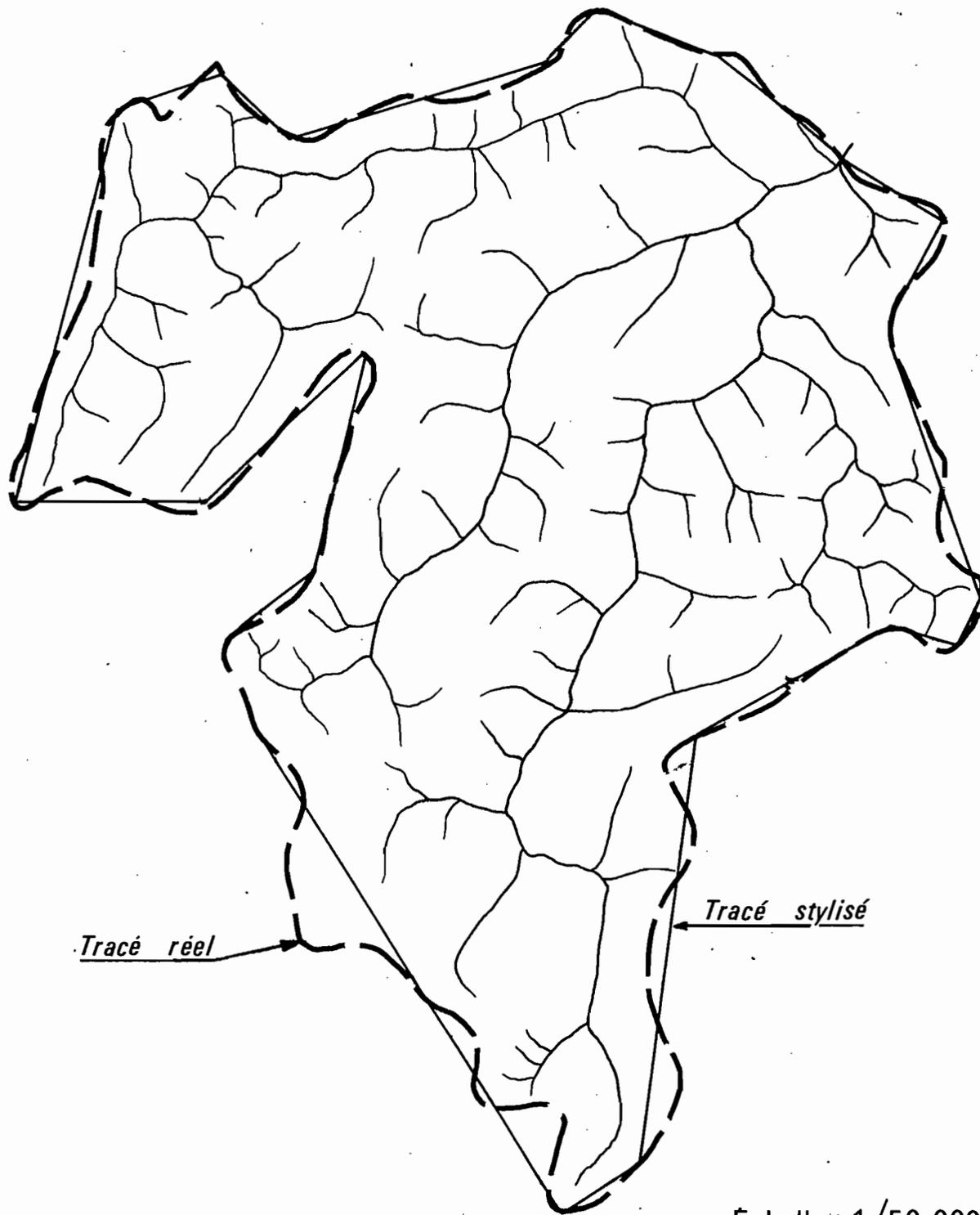
Les paramètres morphométriques les plus classiques sont la densité de drainage, les rapports de longueur et de confluence. Leur détermination exige que soit définie une classification des thalwegs par ordres et que soient mesurés pour chaque ordre les nombres de thalwegs et les longueurs totales de ceux-ci. En conséquence toute la mesure repose sur l'établissement du plan du chevelu hydrographique complet du bassin versant à une échelle connue (1ère source d'erreurs) ; on aura ensuite à décompter les thalwegs puis à en mesurer les longueurs (2e source d'erreurs), enfin il faudra évaluer les rapports de longueur et de confluence par ajustement graphique (3e source d'erreurs).

### 10.2.1. Classification et tracé des thalwegs

Au départ, il y a un choix de la méthode de classification des thalwegs.

Comme d'autres, américains et français, nous avons écarté la classification de HORTON, quoique plus ancienne, au profit de celle de SCHUMM, après avoir procédé à plusieurs essais comparatifs.

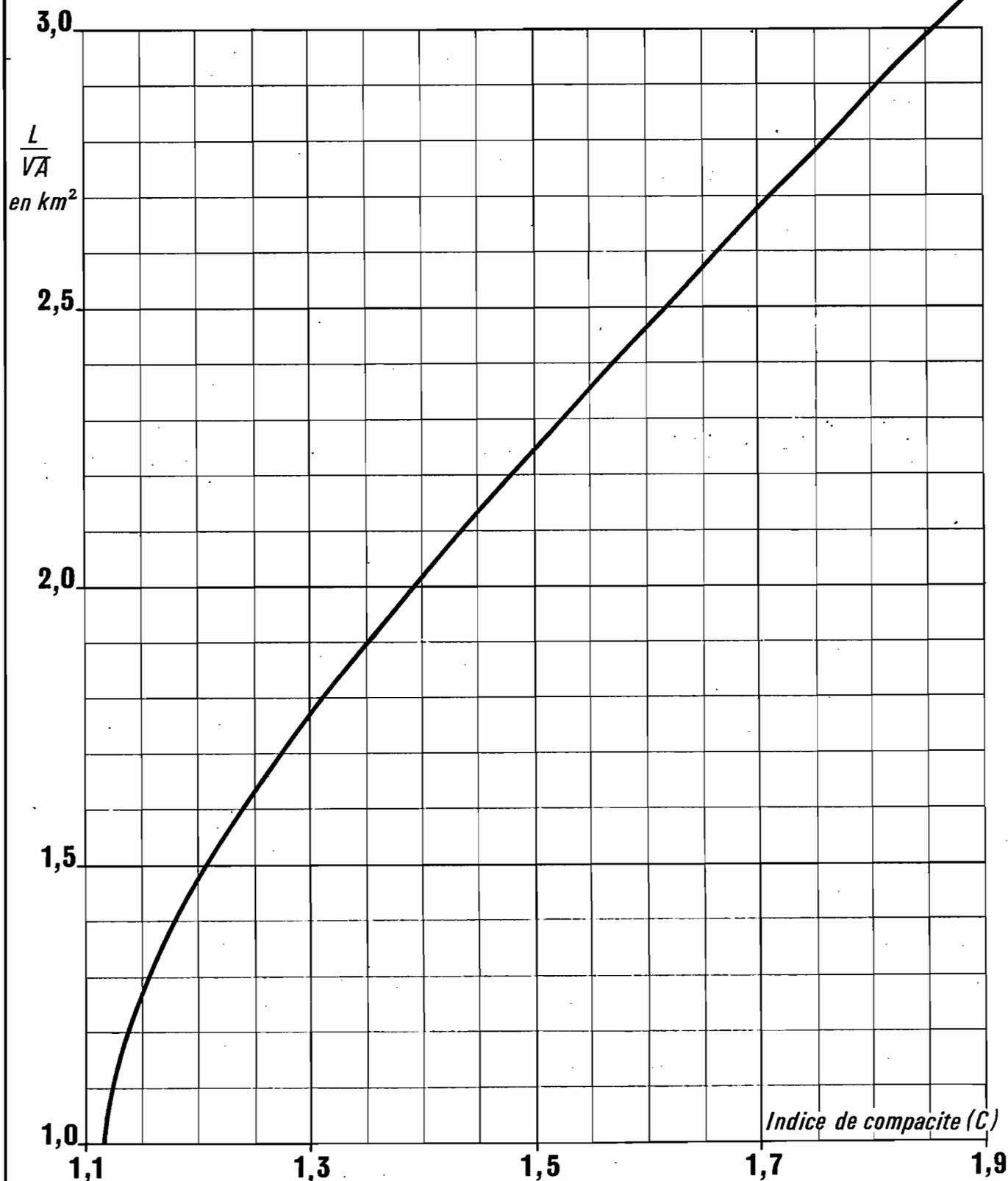
# Stylisation du tracé du périmètre Bassin de l'AVEA (Cameroun)



Échelle : 1/50 000

# Relation entre la longueur du rectangle equivalent L et l'indice de compacité (C) d'un bassin

(A : Surface en  $km^2$ )



La classification de HORTON définit un ordre des thalwegs à partir d'une règle apparemment simple : tout cours d'eau sans affluent est d'ordre 1, tout cours d'eau ayant un affluent d'ordre  $x$  est d'ordre  $x + 1$  et garde cet ordre sur toute sa longueur. A la confluence de deux thalwegs d'importance égale, cas très répandu, on donne l'ordre supérieur au plus long. C'est cette ambiguïté qui nous a fait écarter cette classification. Il est en effet difficile et long de vérifier quel est le plus long de deux thalwegs ; en outre la longueur n'est pas le seul critère valable du rôle d'un thalweg dans la concentration, la propagation des eaux et dans l'évacuation du débit. La méthode de HORTON peut amener des résultats différents avec deux opérateurs ; de nombreux résultats peuvent ne pas être homogènes donc comparables.

La classification de SCHUMM définit un ordre des tronçons de thalwegs à partir d'une règle simple et sans ambiguïté : est d'ordre  $x + 1$  tout tronçon de rivière formé par la réunion de deux cours d'eau d'ordre  $x$ . Les résultats sont toujours comparables et homogènes. Le graphe n° 24 montre comment se classent les thalwegs dans les deux méthodes. La classification de SCHUMM ne modifie en rien la densité de drainage mais présente l'inconvénient de modifier légèrement les lois de HORTON sur les confluences et les longueurs, à l'aide desquelles on évalue les rapports de longueur et de confluence.

En pratique les lois de longueur et de confluence se conservent assez bien mais avec des valeurs différentes, ce qui confirme l'intérêt du choix de la classification de SCHUMM à condition de l'utiliser seule, dans les études de synthèse comparative.

Le tracé du chevelu hydrographique d'un bassin doit être fait directement à partir des photographies aériennes, par examen au stéréoscope, mais l'obtention d'un tracé précis et complet est difficile.

On ne peut obtenir de précision que si l'opérateur possède une bonne vision stéréoscopique, ce qui n'est pas le cas de tout le monde. En outre, le travail de recherche des thalwegs, puis le dessin de leur cours sont des opérations longues et fastidieuses et seul un opérateur patient et ordonné peut bien les accomplir. En pratique, le risque est d'obtenir une sous-estimation du nombre des thalwegs, et tout particulièrement des thalwegs élémentaires que l'opérateur ne voit pas ou néglige.

On peut atteindre des erreurs considérables avec des opérateurs inexpérimentés (sous-estimation de 50 à 70 % du nombre des thalwegs élémentaires ...).

En pratique, après un entraînement d'une certaine durée, un opérateur qui voit bien en stéréoscopie, fournit des résultats qui ne doivent pas être erronés de plus de 5 % en moyenne, 10 % au grand maximum sur les cas difficiles.

.../...

Les consignes générales d'exécution du tracé d'un chevelu hydrographique sont les suivantes :

- a) Avant toute chose, il faut rechercher les thalwegs élémentaires

Les thalwegs d'ordre supérieur sont généralement visibles sans difficulté. L'omission de thalwegs élémentaires, toujours possible quand il s'agit de tous petits ravins, entraîne des anomalies dans le nombre de cours d'eau, dans la classification de ceux-ci par ordre et en conséquence dans les calculs de tous les caractères morphologiques.

b) Le tracé des thalwegs élémentaires doit être si possible contrôlé sur le terrain. Ceci permet de s'assurer de l'exactitude de l'interprétation stéréoscopique, de la corriger et de la reprendre le cas échéant. Ce contrôle de terrain s'effectue par sondages au hasard d'un ou deux thalwegs élémentaires par zones de quelques dix km<sup>2</sup>, thalwegs reconnus sur le terrain et devant figurer sur le tracé stéréoscopique.

c) En troisième lieu, il faut respecter tous les méandres afin que le tracé en longueur des thalwegs ne soit pas altéré, par réduction.

d) En quatrième lieu, il faut faire attention aux emplacements exacts des confluences surtout lorsque plusieurs thalwegs se rejoignent en une même zone et lorsqu'il s'agit de cours d'eau d'ordre élevé. Toute erreur de tracé décalerait la classification des cours d'eau.

Le dessin du chevelu s'exécute sur feuille de papier translucide type kodatrace, à la dimension d'une photographie, ensuite on décalque soigneusement (attention aux longueurs à conserver) sur un plan unique les portions de chevelu obtenues à l'examen stéréoscopique de chaque couple de deux photographies voisines. Les calculs ultérieurs s'effectuent sur un tirage de ce plan.

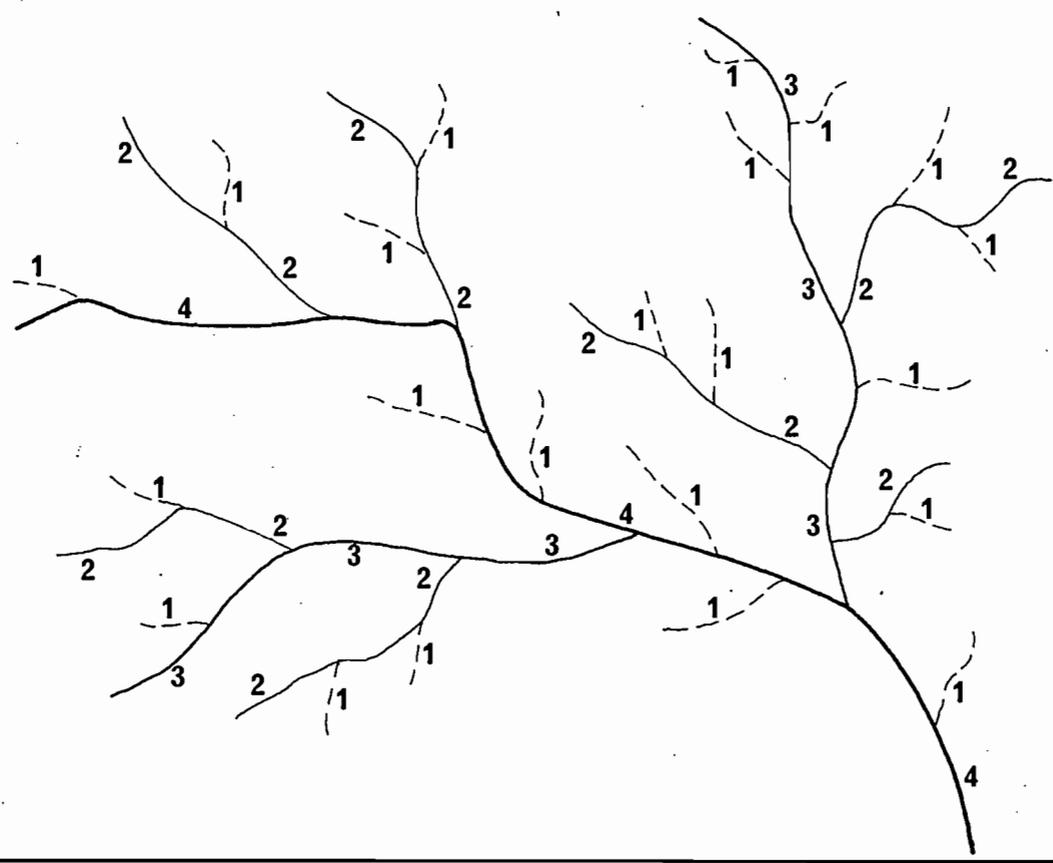
Le tracé du chevelu hydrographique n'est pas toujours simple, il peut comporter des anomalies dues entre autres à l'endoréisme, aux bras multiples, aux lacs et dépressions. On convient de tracer aussi bien les bras multiples, les thalwegs endoréïques que les dépressions ainsi que les contours des lacs. Leur prise en compte pour le calcul de la densité de drainage et des rapports de HORTON doit faire l'objet d'un examen spécial.

L'échelle des prises de vues aériennes est approximative ; sa détermination exacte est indispensable pour l'analyse morphométrique.

Cette échelle dépend de l'altitude du vol par rapport au sol ; elle peut varier quand l'altitude du sol change et d'une bande à la suivante (changement de ligne de vol).

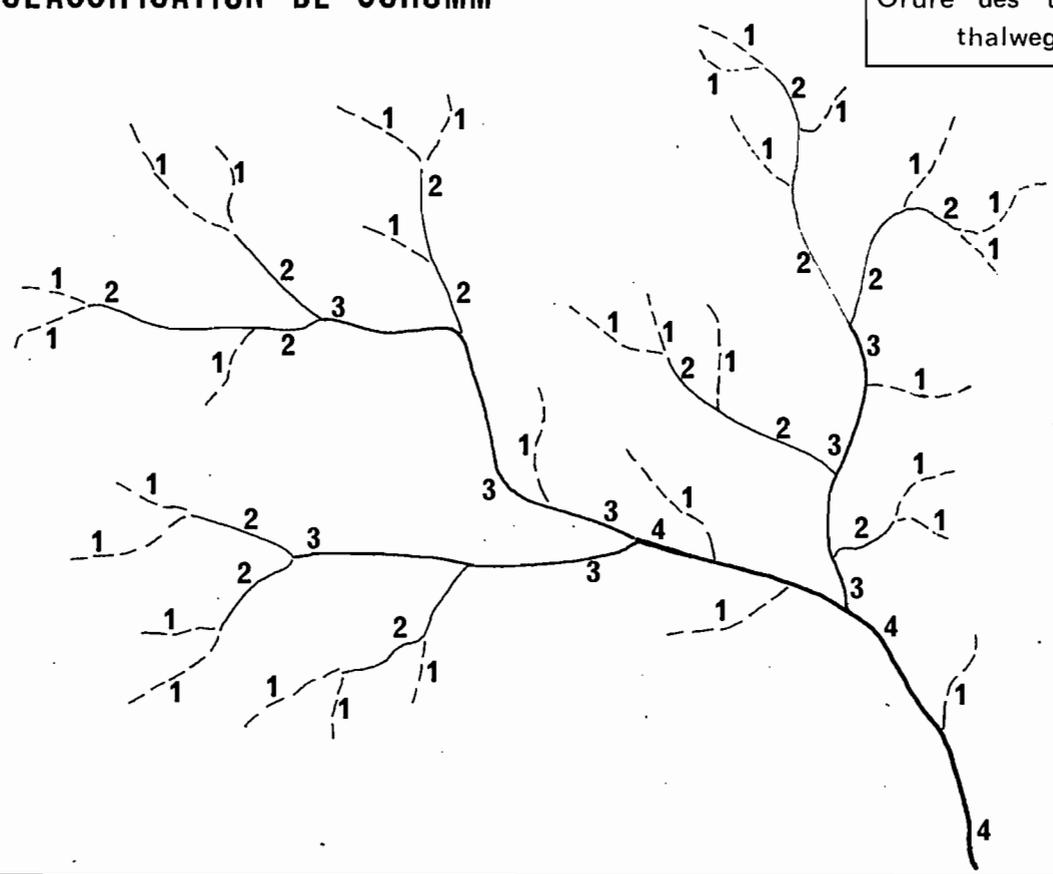
# CLASSIFICATION DE HORTON

Ordre des thalwegs



# CLASSIFICATION DE SCHUMM

Ordre des tronçons de thalwegs



La mise à l'échelle idéale s'effectue sur le terrain par le tracé et la mesure d'une base rectiligne repère, ou mieux de deux bases selon deux directions sensiblement perpendiculaires.

La mise à l'échelle peut encore se faire par référence à la carte correspondante. Le repère de plusieurs points caractéristiques (croisées de chemins, virages brusques de cours d'eau, de chemins ... etc ...) permet le tracé de plusieurs (3 ou 4) lignes droites orientées différemment. On adopte comme échelle la moyenne des échelles déduites des mesures sur chaque ligne.

Des opérateurs sans qualification particulière arrivent à déterminer l'échelle à  $\pm 2\%$  ; cette précision est excellente car il n'est pas rare de voir les prises de vues au 1/50 000e environ osciller entre 1/45 000e et 1/55 000e, c'est-à-dire avec  $\pm 10\%$  d'écart.

En l'absence de couverture aérienne (de plus en plus rare même dans les pays en voie de développement) ou bien si le bassin est très grand (plus de 1 000 km<sup>2</sup>), on utilise les cartes topographiques sur lesquelles le chevelu hydrographique n'est reproduit ni complètement ni fidèlement.

Le cartographe reproduit des éléments du chevelu hydrographique et trace des courbes de niveau à une certaine équidistance de telle sorte qu'après adjonction des informations de géographie humaine et économique (noms ... etc ...) la carte soit claire et lisible.

En conséquence et toujours un peu théoriquement, on peut dire que la reproduction cartographique du chevelu hydrographique est d'autant plus fidèle que l'échelle de la carte est grande et que la région représentée est peu peuplée ou économiquement peu développée.

Le résultat pratique de cette cartographie est une diminution importante, voire une disparition des thalwegs des ordres inférieurs.

Pour la France l'ordre 1 (thalweg élémentaire théorique) lu sur une carte correspondrait en moyenne à l'ordre 2 réel (carte au 1/20 000e), à l'ordre 3 réel (carte au 1/50 000e), à l'ordre 4 réel (carte au 1/100 000e), ou à l'ordre 5 réel (carte au 1/200 000e).

Dans les régions intertropicales, la fidélité de la carte est meilleure.

Les cartes au 1/20 000e bien que représentant des zones urbaines sont fidèles.

Les cartes au 1/50 000e sont également apparemment fidèles tout au moins pour les régions forestières testées (GABON, CAMEROUN) et pour la NOUVELLE-CALÉDONIE.

.../...

Les cartes au 1/200 000e d'Afrique, les plus répandues, ne sont pas toujours fidèles ; et corollaire des règles de travail du cartographe, elles le sont d'autant moins qu'il y a beaucoup de choses à dessiner c'est-à-dire d'abord que le chevelu hydrographique est dense :

- a) la fidélité est conservée à peu près lorsque les densités de drainage sont très faibles, inférieure à 0,50,
- b) lorsque la densité de drainage croît, celle mesurée sur la carte n'en représente plus que la moitié (densité réelle de 2 à 2,50) ou le cinquième (densité réelle de 3 à 3,5),
- c) le décalage moyen d'ordre des thalwegs passe de 1 à 2 quand la densité croît.

Les cartes au 1/100 000e n'ont pas été contrôlées. On peut penser qu'elles ont un degré de fidélité supérieur à celui des cartes au 1/200 000e sans atteindre souvent la fidélité complète.

Pour plus de sûreté et compte tenu de la variabilité du degré de fidélité d'une région à l'autre et d'un cartographe à l'autre, il vaut mieux admettre que le degré de fidélité de la carte est variable d'une carte à l'autre et doit faire l'objet d'une détermination directe sur une portion de carte.

Par conséquent et en cas d'obligation d'emploi de la carte, et à partir de l'échelle au 1/20 000e en France et au 1/100 000e en régions intertropicales, il faut procéder sur une fraction du bassin étudié au tracé sur photographies aériennes.

On peut ainsi sur cette zone témoin avoir la somme des longueurs des thalwegs mesurés sur carte  $L_c$  et sur photos  $L_p$  et calculer le rapport de correction  $R = L_p / L_c$ .

#### 10.2.2. Calcul de la densité de drainage

On appelle :

x l'ordre des thalwegs classés selon SCHUMM de 1 à s (ordre du thalweg principal), en croissant,

$L_x$  la longueur totale cumulée des thalwegs de l'ordre x, en km,

A la surface du bassin en km<sup>2</sup>.

.../...

La densité de drainage est donnée par l'équation (35) :

$$Dd = \sum_1^S L_x / A \text{ en km par km}^2$$

La longueur des thalwegs est mesurée au curvimètre pour chaque ordre séparément, puis la somme est faite. Cette mesure soigneuse exige que soient respectées toutes les sinuosités des thalwegs.

Dans le cas d'une détermination sur carte topographique, si  $Dd_c$  est la densité mesurée sur cette carte et  $R$  le rapport de correction exprimant le degré d'infidélité de celle-ci, et calculé comme indiqué plus haut ( $R = L_c / L_r$ ), on peut évaluer la densité de drainage réelle en faisant :  $Dd = Dd_c \cdot R$ .

La densité de drainage qui vient d'être définie est la densité totale. On peut considérer qu'elle est constituée de l'addition de deux fractions distinctes :

- a) la densité de drainage permanent  $Dd_p$  formée des thalwegs qui coulent en permanence, alimentés par l'écoulement de base fourni par la nappe (en aval des sources, affleurements divers),
- b) la densité de drainage temporaire additionnelle  $Dd_t$  formée du reste des thalwegs qui coulent par intermittence seulement lors des pluies engendrant du ruissellement.

La détermination de la densité permanente ne peut être faite généralement que sur le terrain, en localisant les points (sources ... etc ...) de départ de l'écoulement permanent sur les diverses branches du chevelu hydrographique. Il est en effet très difficile de se fier aux seules photographies aériennes pour déceler si un petit cours d'eau est en eau s'écoulant, en eau stagnante dans les moulles, à sec.

La distinction entre ces deux densités partielles ne doit être faite que si l'objectif hydrologique visé en a vraiment besoin.

Pour le calcul de la densité de drainage, les anomalies de tracé du chevelu hydrographique sont interprétés de la manière suivante :

- a) les thalwegs endoréiques sont négligés à moins qu'ils ne participent à la formation du ruissellement lors des grandes crues (distinction entre  $Dd_p$  et  $Dd_t$ ),
- b) les dépressions, mares et lacs peu importants sont assimilés à des thalwegs ordinaires tracés au milieu et hiérarchisés selon leur position dans le chevelu,

- c) les rives des grands lacs recevant des affluents sont assimilables à des thalwegs ayant l'ordre du cours d'eau le plus hiérarchisé entrant dans ces lacs,
- d) les bras multiples sont pris en compte selon qu'ils véhiculent ou non le gros de l'écoulement et qu'ils reçoivent ou non des affluents.

### 10.2.3. Calcul du rapport de confluence

Les cours d'eau classés sur la carte du chevelu hydrographique sont comptés séparément pour chaque ordre.

Le rapport de confluence  $R_c$  est le quotient du nombre de thalwegs d'ordre  $x$  par celui des thalwegs d'ordre supérieur  $(x + 1)$  soit :

$$R_c = N_x / N_{x+1} \quad (36)$$

En fait il est plus judicieux de dire qu'en moyenne - prise au sens statistique - dans un bassin les nombres de cours d'eau d'ordres successifs croissants forment une série géométrique inverse.

En effet les rapports successifs  $R_c$  sont vaguement égaux et plutôt que de chercher la moyenne de tous ces  $R_c$  il est hautement préférable d'estimer directement la valeur moyenne de  $R_c$  dont le logarithme est la pente de la droite ajustée à l'ensemble des points  $N_x, x$  portés sur un graphique semi-logarithmique. Tout le problème du calcul de  $R_c$  repose donc sur le tracé de la droite ajustée aux points  $N_x, x$ .

La notion de série géométrique inverse ne peut être nette que si le nombre de thalwegs est suffisamment grand dans tous les ordres pour que les valeurs des rapports de nombre entre thalwegs d'ordres voisins se stabilisent autour de leur moyenne probable.

L'ajustement est d'autant plus aisé que le réseau hydrographique est dense et que la hiérarchie entre les ordres est claire et bien développée.

Dans le cas des bassins homogènes, la règle d'ajustement est de tenir compte essentiellement des points correspondant à la succession des ordres depuis  $x = 2$  jusqu'à  $x = s - 1$ , la prise en compte des points correspondant aux ordres 1 et  $s$  étant sujette à caution.

Le nombre de thalwegs d'ordre 1 risque d'être parfois un peu sous-estimé aussi le tracé de la droite doit-il passer au-dessus du point  $(N_1, 1)$  s'il ne peut passer sur ce point.

Le point correspondant à l'ordre supérieur  $s$  n'a souvent qu'un rôle indicatif car il est rarement significatif. En effet, l'ensemble hiérarchique des thalwegs qui donne naissance à l'ordre  $s$  n'est complet que lorsque ce thalweg  $s$  va confluer avec un thalweg d'ordre équivalent. Avant ce confluent, le nombre des thalwegs d'ordres inférieurs à  $s$  est sous-estimé, et la droite d'ajustement passe généralement en dessous du point  $N_s = 1$ . Ceci se rencontre la plupart du temps puisque les bassins d'études sont arrêtés arbitrairement à des stations de mesure qui se situent bien avant que le thalweg  $s$  n'ait achevé son développement.

L'ajustement n'offre aucune difficulté et conduit à un tracé exact pour les bassins dont le thalweg principal est d'ordre supérieur ou égal à 5.

L'ajustement est soit impossible, soit sans signification pour les bassins dont le thalweg principal est d'ordre 2. On ne calcule, dans ce cas, ni rapport de confluence, ni rapport de longueur ; ceci concerne les petits bassins de quelques km<sup>2</sup> ou moins, selon l'importance locale du drainage.

L'ajustement est possible quoique manquant de précision pour les bassins dont le thalweg supérieur est d'ordre 3 ou 4. Le tracé doit s'appuyer sur le point  $N_1$ , 1 car il n'y a qu'un ou deux autres points sûrs. L'imprécision peut être assez grande. Dans les meilleures conditions d'homogénéité de bassin, on ne peut espérer obtenir la pente à mieux de 6 % près, ce qui donne le rapport de confluence à  $\pm 7$  % au mieux. La précision réelle doit être en moyenne inférieure et plus proche de  $\pm 10$  %.

La précision devient illusoire pour les bassins à très faible densité de drainage ( $Dd < 1$ ), comme on en rencontre beaucoup dans la région à faible pente de la savane plus ou moins dense de HAUTE-VOLTA, du Nord-DAHOMÉY ... etc ... Même pour de grands bassins atteignant 4 ordres de thalwegs, la hiérarchie reste lâche et les points sont mal alignés. Dans de tels cas l'imprécision sur le tracé de la droite d'ajustement graphique aux points  $N_x$ ,  $x$  devient importante ; elle peut se traduire par une erreur d'environ 20 % sur l'estimation de sa pente (soit du logarithme de  $R_c$ ) à laquelle correspond près de 40 % d'erreur sur l'estimation de  $R_c$ .

A titre de démonstration du calcul des rapports morphométriques, on a choisi l'exemple d'un bassin de 61,3 km<sup>2</sup> dans la région semi-aride de l'Est du TCHAD, le bassin de TOUNKOUL. Le tableau 21 montre le résultat du décompte  $N_x$  des thalwegs par ordre  $x$  et de la mesure de la longueur cumulée des thalwegs par ordre  $L_x$ .

On peut déjà voir que la densité de drainage est de :

$$Dd = \Sigma L_x / A = 236,8 / 61,3 = 3,86$$

Tableau 21

ANALYSE MORPHOMETRIQUE DU BASSIN DE TOUNFOUL (A = 61,3 km<sup>2</sup>)

Ordre x	Nombre N <sub>x</sub>	Longueur L <sub>x</sub> (km <sup>2</sup> )	$\bar{l}_x$ (km)
5	1	9,3	9,3
4	4	11,5	2,87
3	15	22,5	1,50
2	61	55	0,90
1	280	138,5	0,495
	Total	236,8	

Quant au rapport de confluence, on a reporté tous les couples  $N_x, x$  sur le graphe semi-logarithme (n° 25). On peut constater un bon alignement des points ce qui facilite le tracé d'une droite d'ajustement à l'estime sans équivoque. Cette droite étant d'équation  $\log N_x = a x + b$ , on voit que sa pente  $a$  correspond à  $\log N_x - \log N_{x-1}$  par exemple, donc à  $\log R_c$  en application de la formule (36).

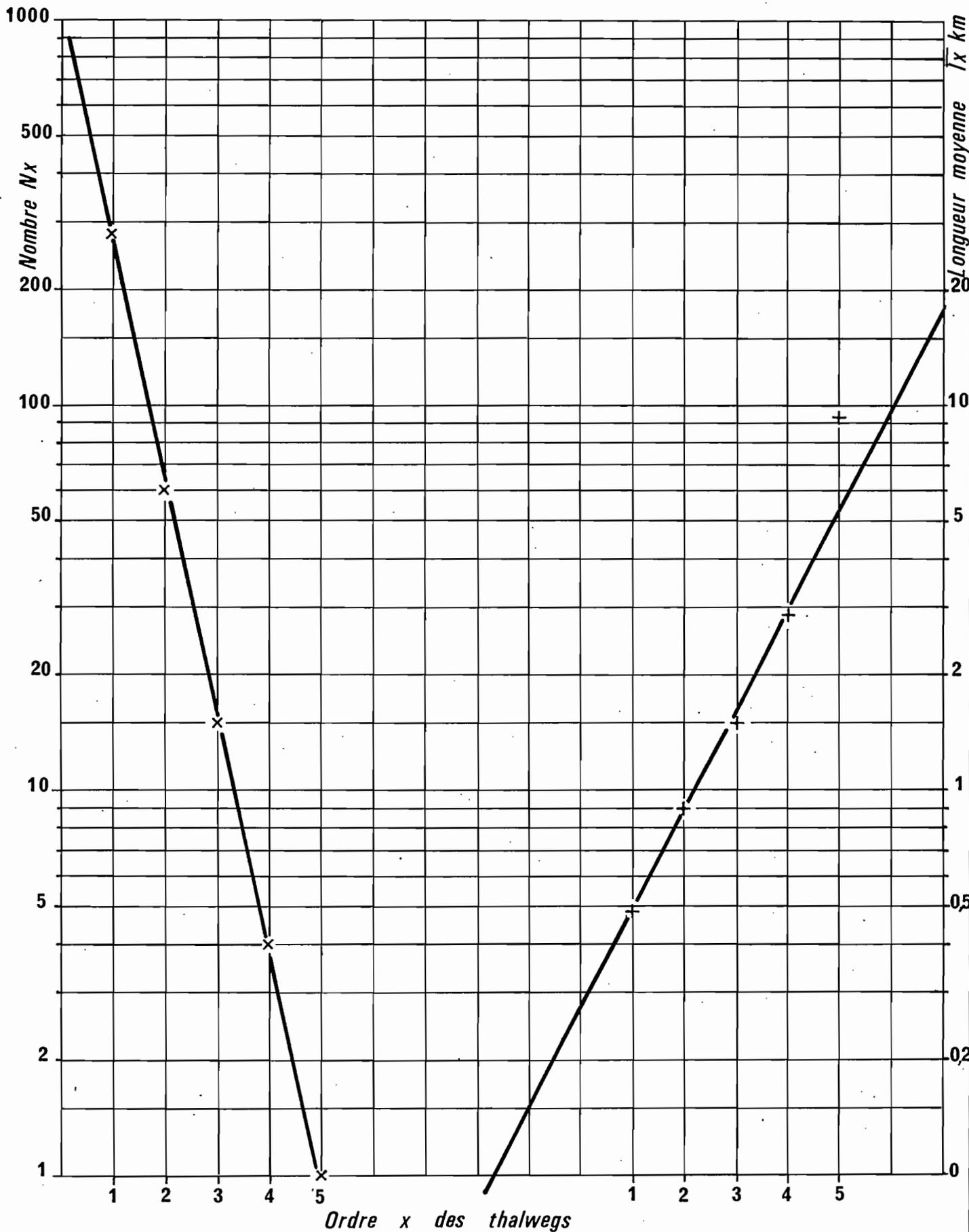
Sur le graphe 25, on peut calculer entre  $N_x = 100$  et  $N_x = 1$ , un écart sur l'axe des  $x$  de 3,25, ce qui donne  $\log^x R_c = 2 / 3,25 = 0,615$ . La valeur de  $R_c$  est 4,12.

Bien entendu, l'ajustement graphique de la droite aux couples  $N_x, x$  n'est pas toujours aussi adéquate et souffre de plusieurs anomalies classiques : présence de dépressions, de lacs, de confluences multiples (plus de 2 à la fois) de thalwegs altérant la hiérarchie du chevelu, influence de la tectonique sur le tracé du chevelu, hétérogénéité du drainage dans le bassin ... etc ... Chaque anomalie doit faire l'objet d'un examen particulier destiné à rechercher le meilleur ajustement.

Le travail sur carte ne semble pas altérer le rapport de confluence, qui peut être conservé sans correction.

.../...

# Calcul des indices morphométriques du bassin de TOUNKOUL



### 10.2.3. Calcul du rapport de longueur

La classification de SCHUMM altère un peu la loi de HORTON sur les longueurs ce qui ne facilite pas le calcul du rapport de longueur.

Le rapport de longueur  $R_1$  est le quotient de la longueur moyenne des thalwegs d'ordre  $(x + 1)$  par celle des thalwegs d'ordre  $x$  :

$$R_1 = \frac{\bar{l}_x + 1}{\bar{l}_x} \quad (37)$$

En fait ce rapport comme celui de confluence est l'expression d'une tendance moyenne au sens statistique : dans un bassin les longueurs moyennes des thalwegs d'ordres successifs croissants forment une série géométrique directe.

Comme pour le rapport de confluence, les valeurs successives de  $R_1$  ne sont pas nécessairement égales et il vaut mieux estimer directement la valeur moyenne de  $R_1$  dont le logarithme est la pente de la droite ajustée à l'ensemble des points  $\bar{l}_x, x$ , portés sur papier semi-logarithmique.

L'expression analytique de  $R_1$  peut s'écrire différemment en introduisant  $L_x$  longueur totale des thalwegs d'ordre  $x$  ; sachant que  $L_x = N_x \cdot \bar{l}_x$ , il vient :

$$R_1 = R_c \frac{L_x + 1}{L_x}$$

Le rapport de longueur est lié au rapport de confluence et par conséquent toutes les remarques énoncées au sujet de celui-ci s'appliquent aussi à  $R_1$  tant pour les règles d'ajustement de la droite  $\bar{l}_x, x$  que pour les anomalies et difficultés.

Seules sont vraiment significatives les longueurs moyennes  $\bar{l}_x$  qui sont calculées à partir d'un nombre  $N_x$  suffisamment élevé pour que l'effet statistique joue et atténue l'effet déformateur de la classification de SCHUMM. En conséquence  $\bar{l}_s$  n'est presque jamais significatif et il en est souvent de même de  $\bar{l}_s - 1$  ; ces valeurs sont généralement sous-estimées.

La précision de  $\bar{l}_1$  est réduite car  $N_1$  est parfois sous-estimé et la mesure des longueurs des thalwegs d'ordre 1, très courts, est difficile.

.../...

La règle d'ajustement sur les points des ordres 2 à  $s - 2$  est ici de rigueur, plus sévère que pour  $R_c$ , et guère significative pour des bassins n'ayant pas au moins 5 à 6 ordres.

Si l'on reprend l'exemple du bassin du TOUNKOUL, on a les valeurs moyennes  $\bar{l}_x = \frac{L}{N_x}$  dans le tableau 21, ces valeurs sont portées sur une échelle logarithmique en regard des ordres  $x$  (graphe 25). On y constate encore un ajustement satisfaisant avec un ordre supérieur cette fois un peu trop long, dont on ne tient pas compte ; il est aisé de tracer une droite ajustée sur les 4 longueurs moyennes des ordres inférieurs.

Les mêmes calculs que pour  $R_c$  nous amènent ici à :

$$\log R_1 = 3 / 11,7 = 0,256 \text{ donc } R_1 = 1,80$$

Bien entendu cet exemple est relativement facile ; en réalité la plupart du temps l'ajustement est assez difficile à tracer graphiquement.

Les anomalies d'ajustement sont les mêmes que pour  $R_c$  et l'on tente de les résoudre de la même manière.

L'effet du travail d'après carte sur le rapport de longueur n'est pas net. Un décalage d'ordre important aurait tendance à diminuer le rapport, les longueurs moyennes des ordres inférieurs sur carte étant surestimées (nombre de thalwegs sous-estimé). Aucune règle correcte et sûre n'a pu se dégager. On conseille de conserver le rapport de longueur d'après carte mais il sera toujours considéré comme peu précis et présenté entre parenthèses, car son homogénéité avec les rapports calculés d'après les photographies aériennes n'est pas du tout certaine.

### 10.3. Exercice d'application des méthodes de calcul des paramètres physiques et morphométriques d'un bassin versant

Cet exercice prend son point d'appui géographique sur un bassin voisin de celui de TOUNKOUL présenté dans le texte explicatif du chapitre. Il s'agit du bassin de BIDJIR également au TCHAD (région orientale de OUADDAI), reposant sur terrains granitiques recouverts d'un faible manteau d'altération - sols minéraux bruts d'érosion - à faible perméabilité. Ce bassin est soumis au climat tropical pur, et reçoit en moyenne 835 mm de pluie par an concentrée entre juin et septembre. Une savane arbustive dense recouvre les terrains, quelques pointements de granites en boules affleurent sur le pourtour du bassin.

Le graphe 26 fournit une représentation complète du chevelu hydrographique obtenu par analyse stéréoscopique des photographies aériennes, mises à l'échelle exacte du 1/50 000e ; ce graphe donne également le tracé précis du périmètre réel du bassin. Le tableau 22 donne la récapitulation hypsométrique déterminée par planimétrage d'une carte altimétrique détaillée, établie au 1/50 000e par nivellement barométrique spécial suivi d'une restitution photogrammétrique, et sur laquelle les courbes de niveau sont tracées à l'équidistance de 10 mètres.

On demande :

1. de tracer le périmètre stylisé du bassin, d'en mesurer la longueur puis, connaissant la superficie donnée au tableau 22, d'en déduire l'indice de compacité du bassin,
2. de calculer la longueur du rectangle équivalent au bassin par application du graphe 23,

Tableau 22

REPARTITION HYSOMETRIQUE DU BASSIN DE BIDJIR

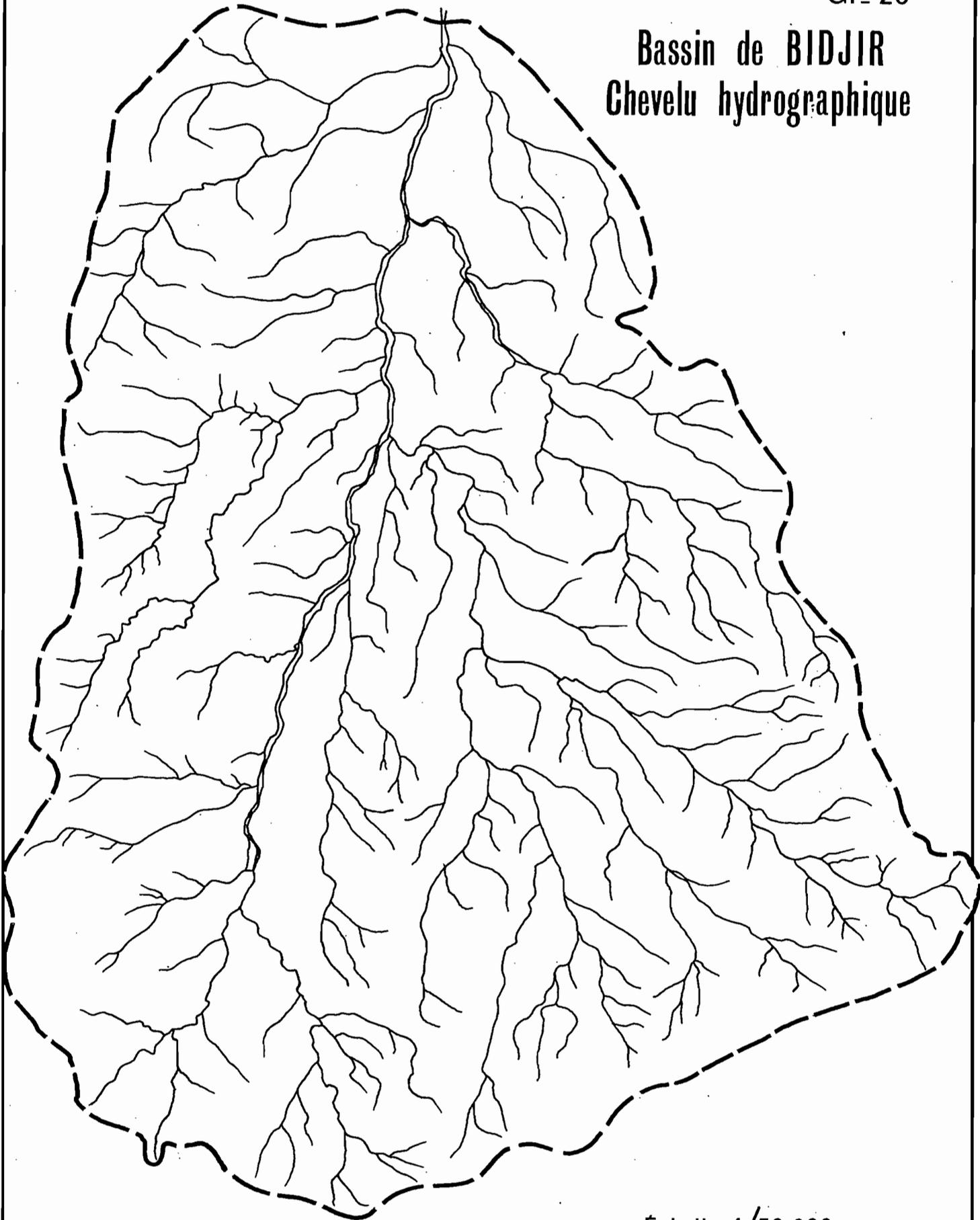
Altitude (n)	Surface cumulée inférieure (km <sup>2</sup> )	Altitude (m)	Surface cumulée inférieure (km <sup>2</sup> )
475	0	550	55,90
480	0,50	560	63,30
490	3,42	570	70,10
500	8,90	580	73,60
510	14,40	590	73,85
520	19,75	600	73,95
530	30,75	760	74,00
540	46,65		

3. de calculer l'indice de pente  $I_p$  de ROCHE à l'aide des éléments du tableau 22 et l'indice de pente global  $I_g$  en s'aidant du tracé de la courbe de répartition hypsométrique sur papier millimétré pour sélectionner la dénivelée utile,
4. de classer les thalwegs du graphe 26 selon la classification de SCHUMM, de les décompter par ordre et d'en mesurer les longueurs,
5. de calculer la densité de drainage, les rapports de confluence et de longueur, en présentant la graphique semi-logarithmique d'ajustement.



Gr. 26

**Bassin de BIDJIR**  
**Chevelu hydrographique**



Échelle: 1/50 000

A N N E X E S

- TABLEAU A : Valeurs de l'intégrale de Gauss

- TABLEAU B : Valeurs de  $\chi^2$

- TABLEAU C : Valeurs de la Loi de Student

TABLEAU A

Valeurs de l'intégrale de Gauss pour  $u \geq 0$   
 (Probabilités pour que  $u$  soit supérieur ou égal à ...)

$u$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
:0,0:	50000	49601	49202	48803	48405	48006	47608	47210	46812	46414
:0,1:	46017	45620	45224	44828	44433	44038	43644	43251	42858	42465
:0,2:	42074	41683	41294	40905	40517	40129	39743	39358	38974	38591
:0,3:	38209	37828	37448	37070	36693	36317	35942	35569	35197	34827
:0,4:	34458	34090	33724	33360	32997	32636	32276	31918	31561	31207
:0,5:	30854	30503	30153	29806	29460	29116	28774	28434	28096	27760
:0,6:	27425	27093	26763	26435	26109	25785	25463	25143	24825	24510
:0,7:	24196	23885	23576	23270	22965	22663	22363	22065	21770	21476
:0,8:	21186	20897	20611	20327	20045	19766	19489	19215	18943	18673
:0,9:	18406	18141	17879	17619	17361	17106	16853	16602	16354	16109
:1,0:	15866	15625	15386	15151	14917	14686	14457	14231	14007	13786
:1,1:	13567	13350	13136	12924	12714	12507	12302	12100	11900	11702
:1,2:	11507	11314	11123	10935	10749	10565	10383	10204	10027	98525
:1,3:	96800	95098	93418	91759	90123	88508	86915	85343	83793	82264
:1,4:	80757	79270	77804	76359	74934	73529	72145	70781	69437	68112
:1,5:	66807	65522	64255	63008	61780	60571	59380	58208	57053	55917
:1,6:	54799	53699	52616	51551	50503	49471	48457	47460	46479	45514
:1,7:	44565	43633	42716	41815	40930	40059	39204	38364	37538	36727
:1,8:	35930	35148	34380	33625	32884	32157	31443	30742	30054	29379
:1,9:	28717	28067	27429	26803	26190	25588	24998	24419	23852	23295
:2,0:	22750	22216	21692	21178	20675	20182	19699	19226	18763	18309
:2,1:	17864	17429	17003	16586	16177	15778	15386	15003	14629	14262
:2,2:	13903	13553	13209	12874	12545	12224	11911	11604	11304	11011
:2,3:	10724	10444	10170	99031	96419	93867	91375	88940	86563	84242
:2,4:	81975	79763	77603	75494	73436	71428	69469	67557	65691	63872

:2,5:		62097	60366	58677	57031	55426	53861	52336	50849	49400	47988
:2,6:		46612	45271	43965	42692	41453	40246	39070	37926	36811	35726
:2,7:		34670	33642	32641	31667	30720	29798	28901	28023	27179	26354
:2,8:		25551	24771	24012	23274	22557	21860	21182	20524	19884	19262
:2,9:		18658	18071	17502	16948	16411	15899	15382	14890	14412	13949
:		:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
:3,0:		13499	13062	12639	12228	11829	11442	11067	10703	10350	10008
:3,1:	0,0 <sup>3</sup>	96760	93544	90426	87403	84474	81635	78885	76219	73638	71136
:3,2:		68714	66367	64095	61895	59765	57703	55706	53774	51904	50094
:3,3:		48342	46648	45009	43423	41889	40406	38971	37584	36243	34946
:3,4:		33693	32481	31311	30179	29086	28029	27009	26023	25071	24151
:		:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
:3,5:		23263	22405	21577	20778	20006	19262	18543	17849	17180	16534
:3,6:		15911	15310	14730	14171	13632	13112	12611	12128	11662	11213
:3,7:		10780	10363	99611	95740	92010	88417	84957	81624	78414	75324
:3,8:	0,0 <sup>4</sup>	72348	69483	66726	64072	61517	59059	56694	54418	52228	50122
:3,9:		48096	46148	44274	42473	40741	39076	37475	35936	34458	33037
:		:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
:4,0:		31671	30359	29099	27888	26726	25609	24536	23507	22518	21569
:4,1:		20658	19783	18944	18138	17365	16624	15912	15230	14575	13948
:4,2:		13346	12769	12215	11685	11176	10689	10221	97736	93447	89337
:4,3:	0,0 <sup>5</sup>	85399	81627	78015	74555	71241	68069	65031	62123	59340	56675
:4,4:		54125	51685	49350	47117	44979	42935	40980	39110	37322	35612
:		:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
:4,5:		33977	32414	30920	29492	28127	26823	25577	24386	23249	22162
:4,6:		21125	20133	19187	18283	17420	16597	15810	15060	14344	13660
:4,7:		13008	12386	11792	11226	10686	10171	96796	92113	87648	83391
:4,8:	0,0 <sup>6</sup>	79333	75465	71779	68267	64920	61731	58693	55799	53043	50418
:4,9:		47918	45538	43272	41115	39061	37107	35247	33476	31792	30190

Pour  $u = 0$ , il suffit de prendre le complément à 1 des valeurs contenues dans le tableau, les nombres de la première colonne désignant alors les valeurs absolues de  $u$ .

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-1/2 u^2} \cdot du \text{ avec } u = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

TABLEAU B

Table de distribution de  $\chi^2$  (Loi de K. Pearson)  
 Valeurs de  $\chi^2$  ayant la probabilité P d'être dépassées

P \ v	0,990	0,975	0,950	0,900	0,100	0,050	0,025	0,010	0,001
1	0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	2,71	3,84	5,02	6,63	10,83
2	0,02	0,05	0,10	0,21	4,61	5,99	7,38	9,21	13,82
3	0,12	0,22	0,35	0,58	6,25	7,81	9,35	11,34	16,27
4	0,30	0,48	0,71	1,06	7,78	9,49	11,14	13,28	18,47
5	0,55	0,83	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	20,52
6	0,87	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	22,46
7	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,47	24,32
8	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	26,13
9	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	27,88
10	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	29,59
11	3,05	3,82	4,57	5,58	17,27	19,67	21,92	24,72	31,26
12	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	32,91
13	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	34,53
14	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	36,12
15	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	37,70
16	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,84	32,00	39,25
17	6,41	7,56	8,67	10,08	24,77	27,59	30,19	33,41	40,79
18	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,80	42,31
19	7,63	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19	43,82
20	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	45,32
21	8,90	10,28	11,59	13,24	29,61	32,67	35,48	38,93	46,80
22	9,54	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29	48,27
23	10,20	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	41,64	49,73
24	10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	36,41	39,37	42,98	51,18
25	11,52	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31	52,62
26	12,20	13,84	15,38	17,29	35,56	38,88	41,92	45,64	54,05
27	12,88	14,57	16,15	18,11	36,74	40,11	43,19	46,96	55,48
28	13,57	15,31	16,93	18,94	37,92	41,34	44,46	48,28	56,89
29	14,26	16,05	17,71	19,77	39,09	42,56	45,72	49,59	58,30
30	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89	59,70

Lorsque  $v \geq 30$  on peut admettre que la quantité  $\sqrt{2 \chi^2} - \sqrt{2v - 1}$  suit la loi normale réduite.

$$\chi^2 = \sum_1^k \frac{(n_i - n_{pi})^2}{n_{pi}}$$

TABLEAU C

Loi de Student-Fisher

Valeur de t qui a la probabilité P d'être dépassée en module

(v, nombre de degrés de liberté)

P \ v	0,90.	0,80.	0,70.	0,60.	0,50.	0,40.	0,30.	0,20.	0,10.	0,05.	0,02.	0,01.
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,955	9,925
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:



INITIATION A L'ANALYSE HYDROLOGIQUE

CORRIGES DES EXERCICES

-----  
P. DUBREUIL

Paris, Juin 1972



EXERCICE I - "Comparaison des totaux annuels cumulés de pluie à ST-GILLES et TRUTTENHAUSEN"

Le graphe n° 1, établi en remontant le temps de 1965 à 1946, montre une excellente liaison entre les pluies aux 2 postes et l'existence d'une hétérogénéité nette.

La série de TRUTTENHAUSEN doit être scindée en deux parties, dont l'une devra être corrigée pour être rendue homogène avec l'autre.

La date d'apparition de l'hétérogénéité peut être fixée en 1950 ou en 1951 ; mais sachant que l'observateur du poste a changé le 1er janvier 1950, le choix doit de préférence se porter sur cette date. La période récente (1950-65) étant la plus longue, on calcule le rapport de la pente  $m$  de la droite relative à cette période par rapport à celle  $m'$  de la période antérieure (1946-49). Le rapport de ces pentes  $m/m'$  est égal à 0,727.

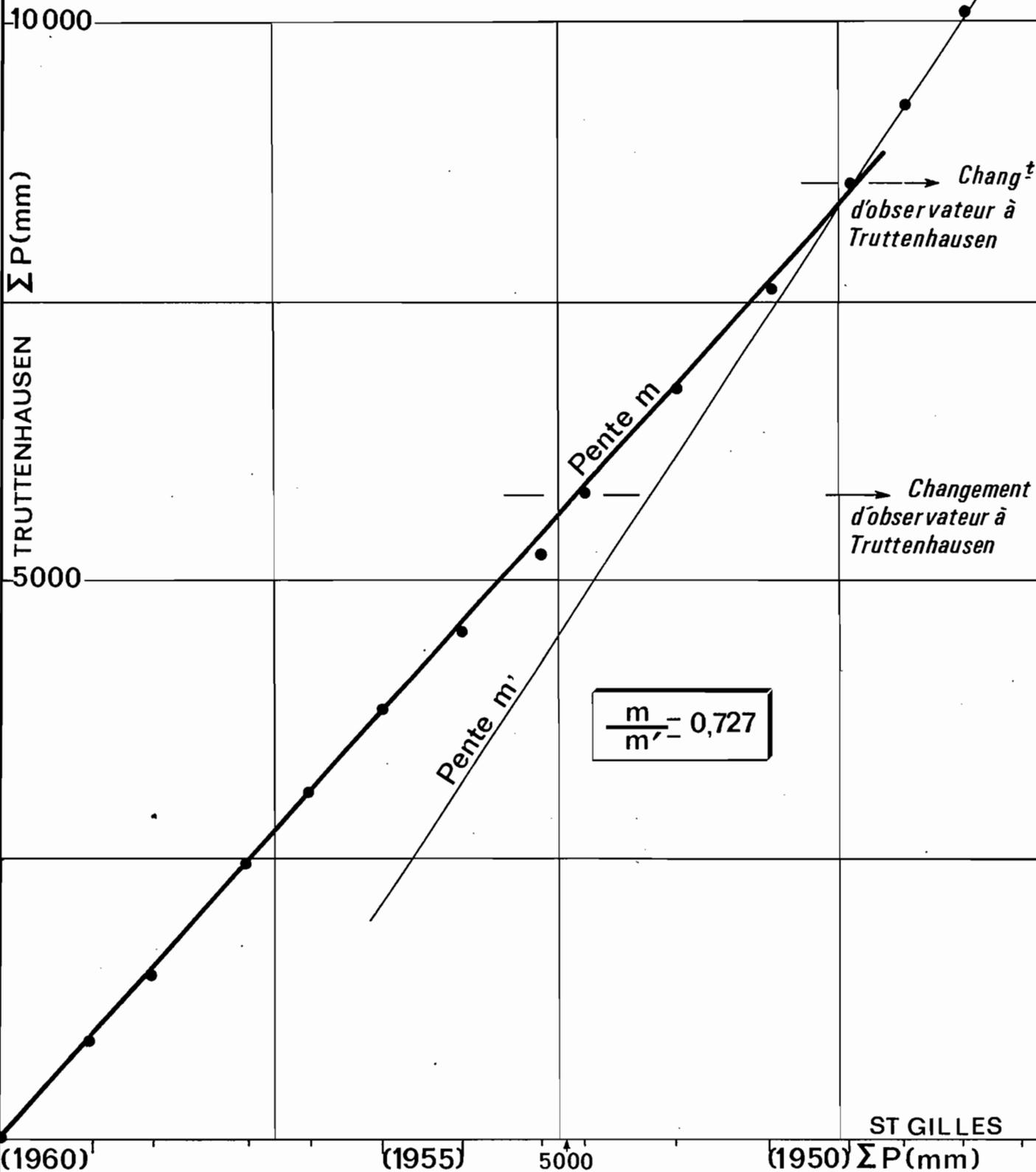
Ni ce rapport, ni son inverse égal à 1,37 ne correspondent à des rapports classiques de surface d'entonnoir de pluviomètre. On ne peut donc dire que l'anomalie est due à une modification d'appareillage. Il doit plus vraisemblablement s'agir d'un changement de site corrélatif au changement d'observateur. Dans ces conditions, on ne doit pas corriger les hauteurs journalières de précipitations, mais seulement les totaux annuels et peut-être mensuels.

Le but de l'étude étant la détermination de besoins en eau pour l'irrigation, il est préférable de ne pas surestimer les apports pluviaux. Des deux périodes, celle de 1946 à 49 est relativement la plus pluvieuse, c'est donc elle dans cette hypothèse d'étude qu'il faut corriger : les totaux annuels et mensuels de 1946 à 1949 sont à multiplier par 0,727 afin de rendre homogène la série complète 1946-60 à TRUTTENHAUSEN.

Si le motif de l'étude des besoins en eau d'irrigation n'existait pas, cette correction devrait cependant être appliquée puisque la période de référence est la plus longue et la plus récente (1950-65) et qu'il vaut mieux corriger les relevés anciens pour avoir une série homogène représentative du dernier site connu du poste de TRUTTENHAUSEN.



# Comparaison des totaux pluviométriques annuels cumulés



EXERCICE II - Extension de la série des totaux annuels de précipitations à GUEBWILLER à l'aide de la série de base de ST-GILLES

Dans la pratique, on commence à porter sur un graphe (Gr n° 2) l'ensemble des couples observés  $X_i, Y_i$  de précipitations aux 2 postes de GUEBWILLER et SAINT-GILLES durant les  $k = 20$  années communes de 1946 à 65. L'examen de ce graphe montre qu'il existe une corrélation serrée entre les deux séries et qu'il y a tout lieu de croire que cette corrélation est linéaire. Un tel examen graphique est toujours utile quand on aborde une région mal connue ou une variable n'ayant pas encore fait l'objet d'études intenses.

Dans la pratique également la règle est de vérifier, après le constat de corrélation et de linéarité précédent, l'adéquation d'une loi normale sur la série de base de ST-GILLES. Plus exactement dans une opération d'homogénéisation des données pluviométriques à l'échelle régionale, la recherche d'adéquation d'une loi normale aux séries de base s'effectue aussitôt après le choix de celles-ci, puis l'on entreprend la recherche graphique précédente de corrélation et de linéarité par sondages sur quelques stations prises au hasard dans la région ; ensuite seulement on exécute l'extension proprement dite, en retenant systématiquement pour une station courte la station de base avec laquelle la corrélation est la plus serrée. C'est à ce stade de développement de l'opération dans la pratique que se situe le thème de l'exercice II.

Régression de GUEBWILLER - ST-GILLES

On conserve les symboles tels qu'ils sont donnés dans le chapitre II c'est-à-dire en mettant en indice de chaque variable soit à gauche le nombre d'années et à droite le nom de la (ou des) série concernée, soit simplement à droite le nombre d'années.

On utilise les équations (8), (9) et (10) données dans l'énoncé.

Les échantillons de 20 ans (1946-65) ont les paramètres suivants :

- GUEBWILLER    moyenne     $\bar{y}_k = \frac{19.223}{20} = 961 \text{ mm}$

                  variance     $20 s_y^2 = \frac{21.341.051}{20 \times 19} = 56.161$

                  écart-type     $20 s_y = 237 \text{ mm}$

- ST-GILLES    moyenne     $\bar{x}_k = \frac{12.818}{20} = 641 \text{ mm}$

                  variance     $20 s_x^2 = \frac{7.161.076}{20 \times 19} = 18.845$

                  écart-type     $20 s_x = 137,3 \text{ mm.}$

La droite de régression de Y en X a les paramètres suivants :

$$a = \frac{10.833.726}{7.161.076} = 1,513$$

$$b = \frac{-60.466.796}{7.161.076} = -8,4$$

et s'écrit  $y = 1,513 x - 8,4$

Le coefficient de corrélation a pour valeur :

$$20r_{xy}^2 = 1,513 \cdot \frac{10.833.726}{21.341.051} = 0,768$$

$$20r_{xy} = 0,875$$

La droite de régression doit être tracée sur le graphique 2 afin que l'on puisse vérifier de la justesse de son calcul, de sa position correcte au milieu des points observés  $x_i, y_i$  dont la dispersion doit être conforme à ce que laisse penser la valeur du coefficient de corrélation. L'expérience permet rapidement de juger cette dispersion sur graphique.

#### - Extension de la série de GUEBWILLER

L'application de l'équation (2) permet le calcul de la nouvelle estimation de la moyenne à GUEBWILLER :  $\bar{y} = 1001$  mm.

L'application de l'équation (3) fournit la nouvelle estimation de la variance

$$\hat{\sigma}_y^2 = 56.161 - (1,513)^2 \cdot (18.845 - 18.541) = 55.465$$

L'estimation sur 20 ans était de  $20s_y^2 = 56.161$ , donc supérieure à la nouvelle ; comme d'autre part le coefficient de corrélation est inférieur à 0,95, on doit conserver la variance estimée sur 20 ans.

On note que la nouvelle estimation du coefficient de corrélation d'après l'équation (4) est :

$$\hat{\rho}^2 = 1,513^2 \cdot \frac{18.541}{56.161} = 0,7557$$

$$\hat{\rho} = 0,869$$

#### - Appréciation du gain d'information sur GUEBWILLER

On adopte donc pour la série étendue des totaux annuels de pluie à GUEBWILLER les paramètres suivants :

moyenne 1001 mm

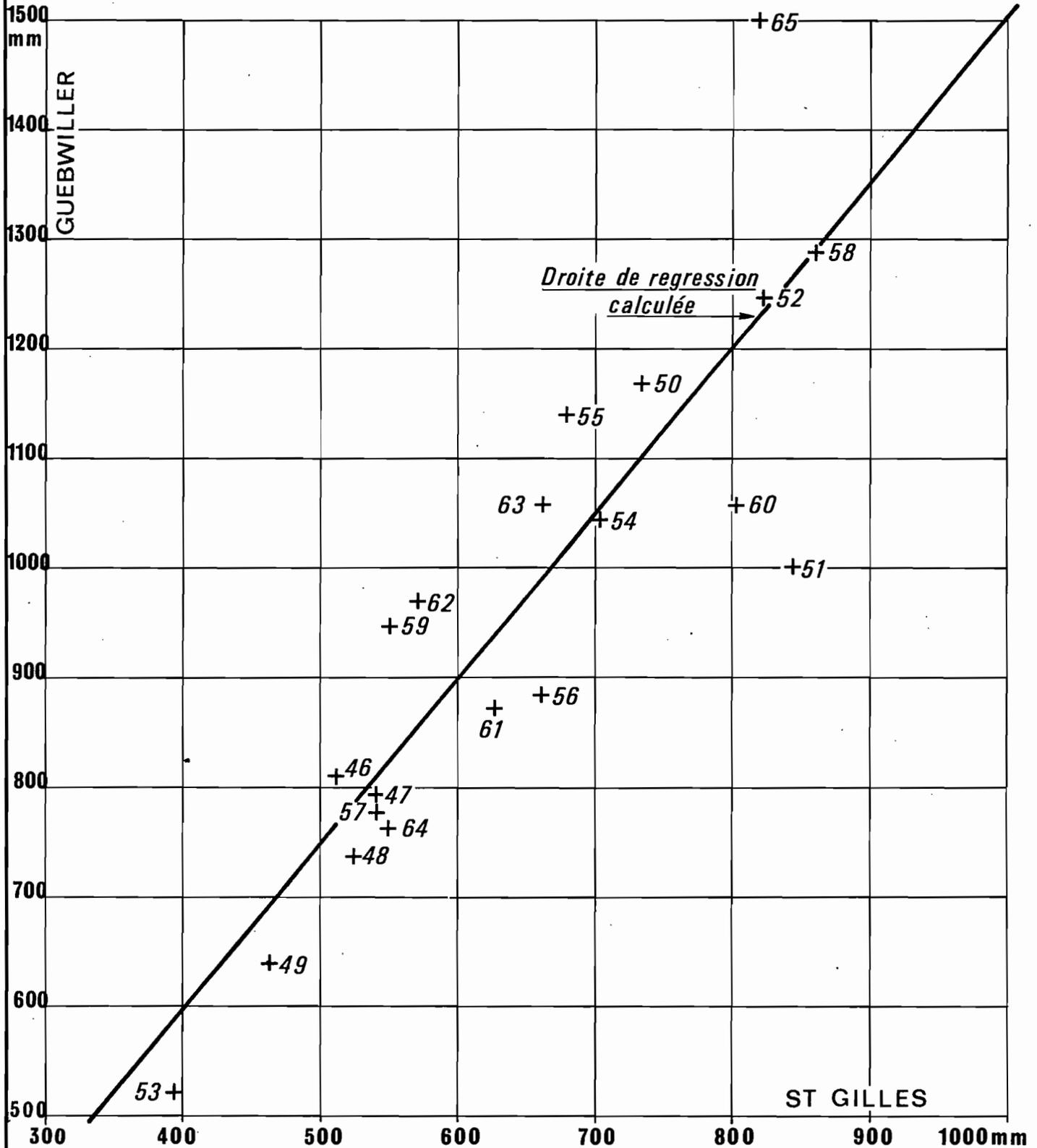
variance 56.161

écart-type 237 mm

coeff. de corrélation 0,875

# Correlation entre totaux annuels pluviométriques

(GUEBWILLER - ST GILLES)



L'application de l'équation (5) permet le calcul de l'efficacité relative de l'extension  $E = 0,456$

L'équation (6) nous donne le poids auquel correspond la série étendue, poids exprimé en années fictives ou efficaces :

$$n^* = \frac{k}{E} = \frac{20}{0,456} = 44 \text{ ans}$$

On peut donc déjà émettre une première appréciation : à l'aide d'une série, ST-GILLES, comme sur  $n = 75$  ans (1891-1965), on peut étendre la série de GUEBWILLER observée seulement durant 20 années communes avec St-GILLES de telle sorte qu'elle atteigne un poids de 44 ans, plus du double de son poids initial ; ceci est obtenu avec un coefficient de corrélation de 0,875 auquel correspond une perte de gain de 75-44 soit 31 ans par rapport à la valeur 1. On peut en conclure aisément que le gain d'information d'une extension décroît beaucoup plus vite que le coefficient de corrélation ne s'éloigne de 1 et qu'avec des valeurs de celui-ci inférieures à 0,70 environ, ce gain devient faible.

- Précision sur la connaissance des totaux annuels de précipitations

En appliquant l'équation (7) on peut calculer l'intervalle de confiance à 95 % de la moyenne des totaux pluviométriques des diverses séries.

- GUEBWILLER (20 ans, donc loi de STUDENT)

$$IC_{95} = \pm 2,086 \cdot \frac{237}{\sqrt{20}} = \pm 106 \text{ mm}$$

les bornes de l'intervalle sont telles que  $961 \pm 106$  mm.

- GUEBWILLER (44 ans)

$$IC_{95} = \pm 1,96 \cdot \frac{237}{\sqrt{44}} = \pm 71 \text{ mm}$$

les bornes de l'intervalle sont telles que  $1001 \pm 71$  mm

- ST-GILLES (75 ans)

$$IC_{95} = \pm 1,96 \cdot \frac{137,3}{\sqrt{75}} = \pm 31 \text{ mm}$$

les bornes de l'intervalle sont telles que  $667 \pm 31$  mm.

L'appréciation de la précision sur la connaissance de la moyenne peut se faire en exprimant en pourcentage le demi-intervalle de confiance par rapport à l'estimation de la moyenne. On obtient ainsi une précision de 11 % à GUEBWILLER observé 20 ans, précision qui après l'extension s'améliore pour devenir 7,1 % lorsque le poids de GUEBWILLER passe à 44 ans.

En comparaison, avec 75 ans de relevés, la connaissance de la moyenne à ST-GILLES est donnée avec une précision de 4,6 %.



EXERCICE III - Corrélation hydropluviométrique entre les débits de la ZORN à WALTENHEIM et les précipitations à ZINSWILLER (méthode des résidus)

La lecture du tableau des données d'observations de débit et de précipitations fournies avec l'énoncé de l'exercice, appelle quelques réflexions qui permettent d'orienter le choix possible du tracé des courbes de corrélation :

- a) la majorité des débits de novembre sont des débits d'étiage peu influencés par les précipitations et oscillant entre 2 et 4 m<sup>3</sup>/s
- b) certains débits sont très élevés et correspondent non seulement à une pluviosité abondante d'octobre et novembre mais surtout à un été pluvieux caractérisé par un facteur secondaire supérieur à 500 mm. On pouvait donc penser que dans le 1er tracé de liaison entre le débit et le facteur principal, il fallait laisser bien au-dessus de la courbe les points représentatifs d'années à été très pluvieux (cas de 1950, 1952 et 1960 entre autres).

Les graphes 3 et 4 montrent les tracés que l'on obtient après deux approximations. On voit ainsi sur le graphe 3 qu'il ne faut pas faire passer le 1er tracé  $\Gamma$  1 au-dessus du tracé choisi pour des valeurs du facteur principal supérieures à 100 si l'on ne veut pas s'exposer au risque de ne pouvoir faire apparaître l'action du facteur secondaire et en conséquence de ne pouvoir minimiser fortement la somme des écarts absolus.

La courbe de correction  $\Delta Q = f(\Sigma_5^{11})$  est nulle pour  $\Sigma_5^{11} = 510$  mm, ce qui signifie que la courbe de corrélation principale est tracée pour cette valeur du facteur secondaire.

L'examen de ces graphiques appelle 2 remarques :

- a) le débit de novembre est très lentement influencé par la croissance de  $P_{\text{oct}} \cdot P_{\text{nov}}$  jusqu'à un seuil, voisin de 150 à 200 mm, à partir duquel il se met à augmenter fortement : influence des pluies abondantes d'automne.
- b) le débit de novembre est beaucoup plus sensible à la variation de  $\Sigma_5^{11}$ , c'est-à-dire à l'état des réserves en eau des terrains du bassin.

Malgré cela, il vaut mieux garder cet ordre des facteurs ; l'inversion donne un résultat voisin mais moins efficace.

Les tracés retenus pour les courbes  $\Gamma$  et C sont admissibles aux limites : la correction  $\Delta Q$  ne descend pas en dessous de - 1,5 m<sup>3</sup>/s alors que l'ordonnée à l'origine de  $\Gamma$  est 3,7 m<sup>3</sup>/s (pas de risque de débit négatif) ; pour les valeurs fortes,  $\Delta Q$  ne semble pas pouvoir dépasser + 10 m<sup>3</sup>/s pour plus de 800 mm à  $\Sigma_5^{11}$  ce qui amènerait au plus Q à quelques 20 à 25 m<sup>3</sup>/s, valeurs non aberrantes.

L'efficacité obtenue est assez satisfaisante. La somme des écarts absolus initiaux est égale à  $20,4 \text{ m}^3/\text{s}$ , celle des écarts absolus finaux à  $4,2 \text{ m}^3/\text{s}$  ; la réduction est d'environ 80 % et l'écart absolu moyen final est inférieur à  $0,3 \text{ m}^3/\text{s}$  ce qui revient pour une médiane des débits observés proche de  $3 \text{ m}^3/\text{s}$  à une précision moyenne de 10 % qui n'est pas mauvaise.

Le graphique 5 compare les débits observés aux débits calculés à l'aide des 2 courbes : la droite à  $45^\circ$  montre l'inexistence d'une distorsion de l'ajustement et la précision de celui-ci.

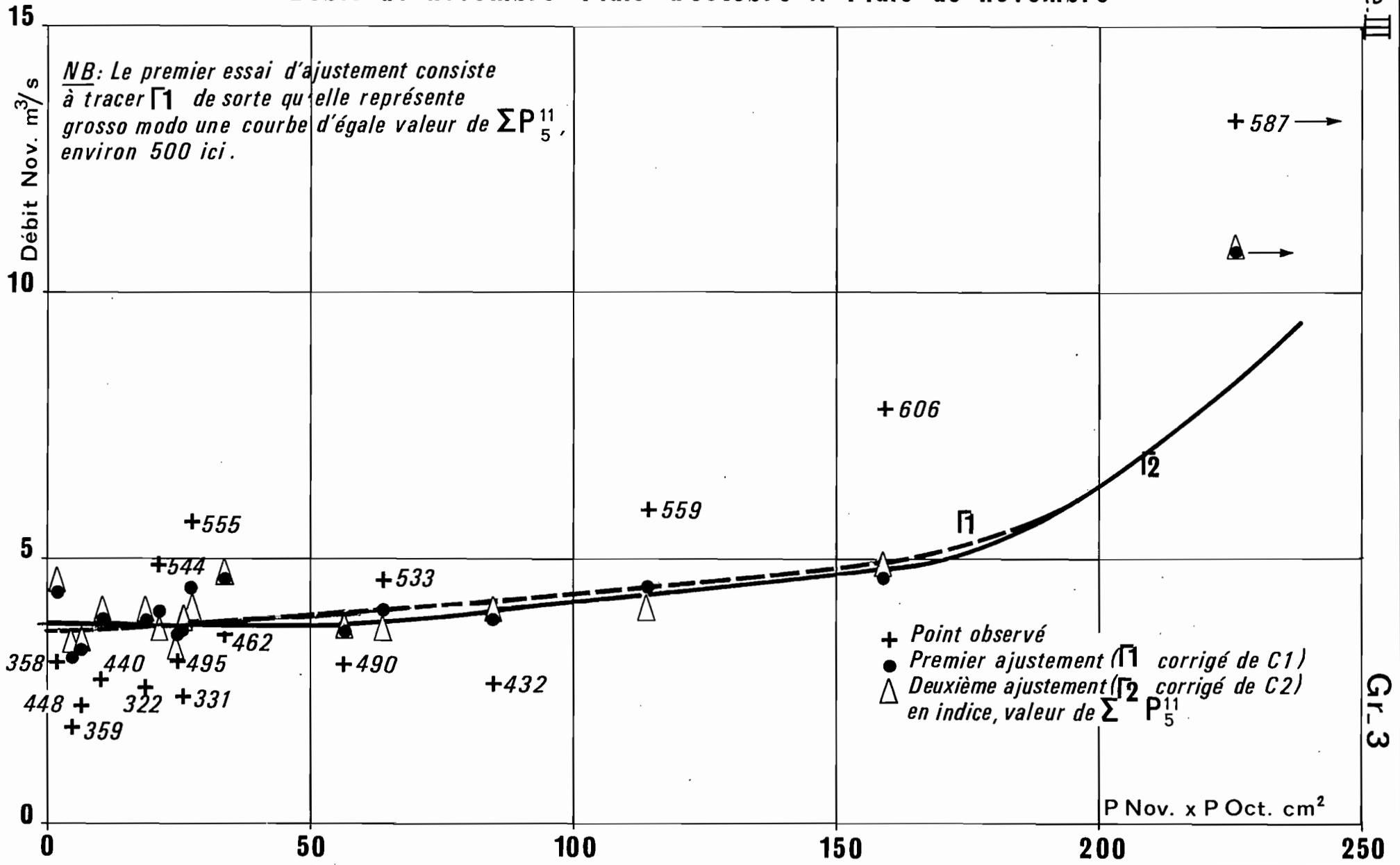
Les débits de novembre n'étant pas distribués normalement, il est inutile de calculer un coefficient de corrélation ; quoiqu'il en soit celui-ci aurait été très proche de 1, au vu des résultats.

Une anamorphose logarithmique sur les débits de novembre aurait peut-être pu linéariser grossièrement cette variable et permettre un ajustement plus facile et un contrôle par le coefficient de corrélation plus clair. On ne peut que recommander de telles anamorphoses simples lorsqu'elles peuvent faciliter la tâche de l'opérateur, mais il faut alors faire très attention aux valeurs extrêmes aux limites (direction asymptotique...).

L'introduction de données pluviométriques dans ce jeu de courbes permet la création d'une information débit non observée pour étendre la série des 16 années observées ; cette extension serait très fructueuse, au vu de la qualité des corrélations.

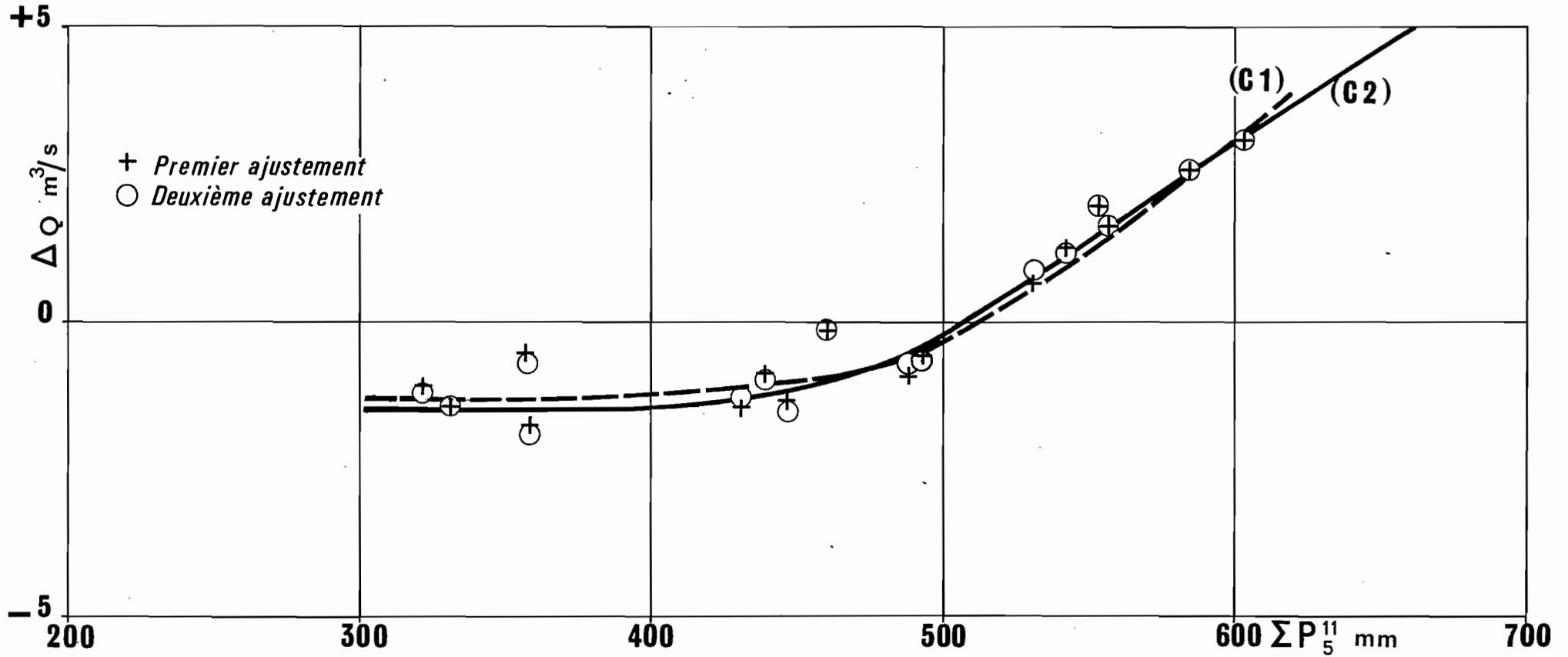
# CORRÉLATION PRINCIPALE

## Débit de novembre - Pluie d'octobre x Pluie de novembre



## CORRELATION SECONDAIRE

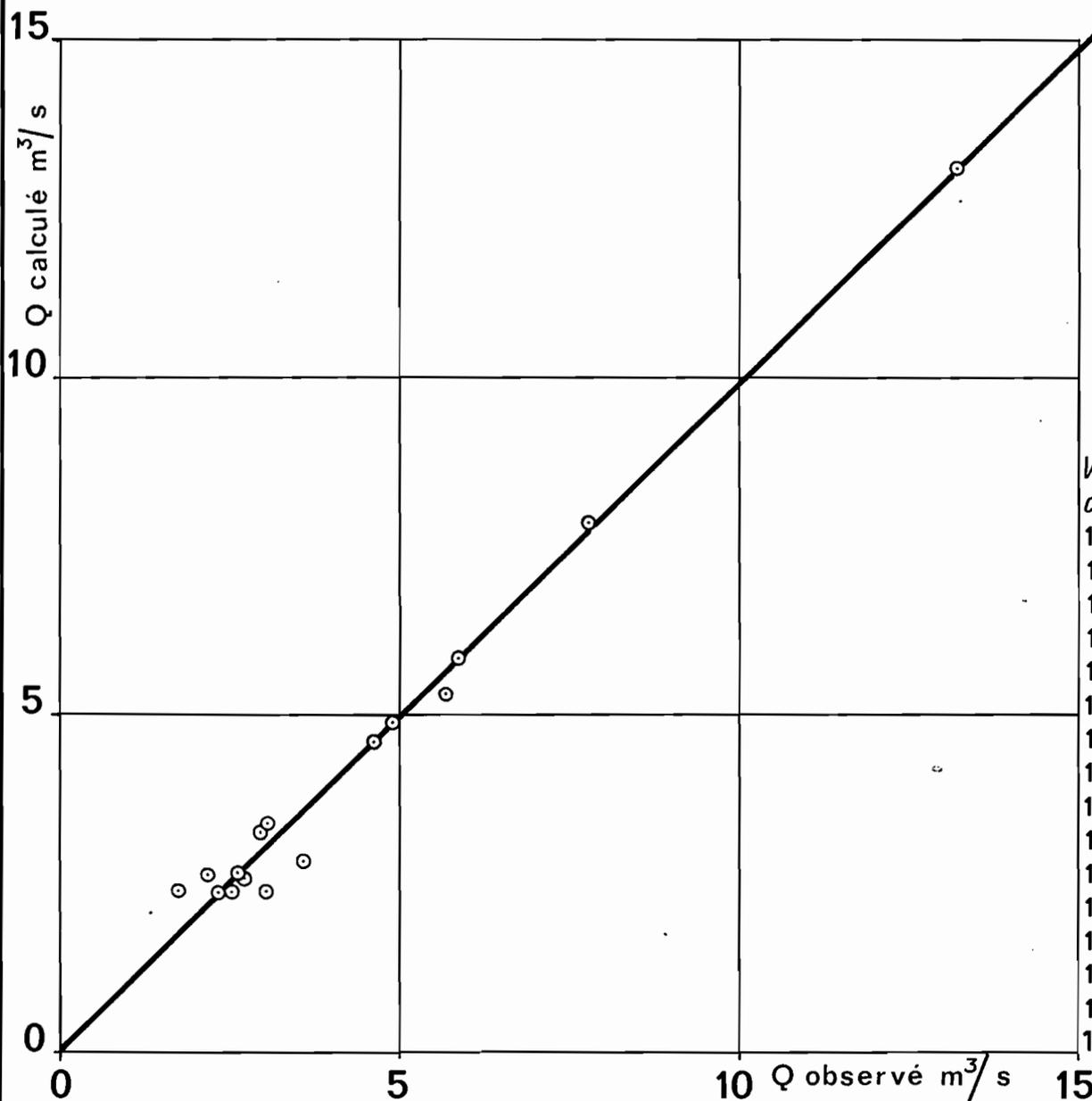
### Résidu du débit-Pluie de Mai à Novembre



*NB: Le tracé de C1 (premier ajustement) et de C2 (deuxième ajustement) est tel que l'écart absolu moyen soit minimal, en s'interdisant tout changement de concavité.*

### VÉRIFICATION DE LA CORRELATION

Débit calculé = (ordonnée du point de  $r_2$ ) + (ordonnée du point de  $C_2$ )



Valeurs de  $Q$  calculées ( $m^3/s$ )

1949	2,35
1950	5,30
1951	4,90
1952	13,25
1953	2,35
1954	3,35
1955	2,55
1956	4,60
1957	2,60
1958	2,80
1959	2,35
1960	7,90
1961	3,25
1962	2,35
1963	5,90
1964	2,65

EXERCICE IV - Distribution normale des modules de l'AVEYRON à RODEZ

L'AVEYRON dont le bassin s'inscrit entre ceux du TARN au sud et du LOT au nord, draine surtout des terrains calcaires (cause de SEVERAC) et quelques terrains cristallins dans une vallée imperméable (marnes). Son régime d'écoulement est de type pluvial atlantique à influence négligeable de la neige et influence faible mais non négligeable du climat méditerranéen qui peut rendre sévères les étiages. Le bassin à RODEZ a une superficie de 563 km<sup>2</sup>.

On a placé sur le tableau suivant les modules classés sur la période 1921-65 (45 ans).

MODULES ANNUELS CLASSES DE L'AVEYRON A RODEZ

(Périodes 1921 - 1965)

Rang	Module (m <sup>3</sup> /s)	Année	Rang	Module (m <sup>3</sup> /s)	Année
1	11,80	1935	24	6,99	1928
2	11,20	1951	25	6,41	1957
3	10,40	1930	26	6,05	1962
4	10,00	1965	27	5,77	1961
5	9,91	1937	28	5,75	1964
6	9,90	1941	29	5,60	1933
7	9,40	1940	30	5,59	1950
8	9,34	1944	31	5,57	1942
9	9,20	1923	32	5,44	1943
10	8,95	1963	33	5,31	1948
11	8,62	1922	34	5,12	1947
12	8,48	1926	35	5,03	1945
13	8,44	1954	36	4,83	1958
14	8,37	1952	37	4,68	1938
15	8,27	1955	38	4,56	1929
16	8,05	1959	39	4,27	1946
17	7,87	1931	40	4,08	1956
18	7,83	1939	41	3,97	1924
19	7,76	1934	42	3,46	1953
20	7,73	1960	43	3,40	1925
21	7,30	1927	44	2,95	1921
22	7,25	1932	45	2,49	1949
23	7,12	1936			

Les caractéristiques empiriques de cet échantillon sont :

Moyenne  $\bar{Q} = \frac{\sum Q_i}{45} = 6,90 \text{ m}^3/\text{s}$

Variance  $s^2 = \frac{1}{44} (\sum Q_i^2 - 45 \cdot \bar{Q}^2) = 5,414$

Ecart-type  $s = 2,327$

Coefficient de variation  $\frac{s}{\bar{Q}} = 0,337$

Le graphique n° 6 sur papier à échelle d'abscisse gaussique montre la disposition des 45 points des modules en face de leurs fréquences expérimentales  $F = \frac{r - 1/2}{45}$ . L'alignement des points est satisfaisant et permet d'augurer un bon ajustement d'une loi normale à cet échantillon de modules.

La droite de HENRI d'ajustement est tracée après report de 3 points :

- la moyenne  $Q = 6,9$  et  $F = 0,50$
- 2 valeurs quelconques par exemples pour  $F = 0,10$  et  $0,90$  pour lesquelles  $u = 1,28$  (table de GAUSS) :  $6,90 \pm 1,28 \cdot 2,327$  soit  $3,92$  et  $9,88 \text{ m}^3/\text{s}$ .

Elle se place bien au milieu des points, preuve d'un calcul exact des caractéristiques empiriques.

Quelles que soient la méthode d'estimation des paramètres et la confiance que l'on peut avoir dans les moyens de calcul utilisés, le report graphique est vivement recommandé. Il permet de juger du type de loi le mieux adapté à l'échantillon, d'apprécier la justesse des calculs de paramètres, d'évaluer le degré d'adéquation espéré et enfin d'examiner les points extrêmes et leur compatibilité avec la grandeur de l'échantillon. Une valeur très rare dans un échantillon court est toujours possible ; elle risque de déformer l'ajustement et l'on peut envisager de n'en pas tenir compte pour calculer les paramètres. Une telle option délicate à prendre ne peut l'être que par un hydrologue expérimenté, ayant pu par des moyens indirects évaluer la période de retour probable de cette valeur rare. Rien de tel avec les modules de l'AVEYRON dont les valeurs extrêmes ne s'écartent pas ou peu de la droite de HENRI.

- On procède ensuite au test d'adéquation du  $\chi^2$

On choisit de retenir 7 classes d'égale probabilité théorique, donc comprenant chacune  $\frac{45}{7} = 6,43$  valeurs théoriques  $v_i$ .

Les limites de classes découlent de ce choix.

Dans ces limites, on relève sur le tableau précédant des modules classés, les valeurs expérimentales contenues  $n_i$ .

Le tableau suivant donne le détail du calcul.

n° de classes	Limites de classes	$n_i$	$V_i$	$n_i - V_i$	$(n_i - V_i)^2$	$\frac{(n_i - V_i)^2}{V_i}$
1	< 4,41	7	6,43	0,57	0,3249	0,0505
2	4,41 - 5,58	8	"	1,57	2,4649	0,3833
3	5,58 - 6,48	6	"	0,43	0,1849	0,0287
4	6,48 - 7,32	4	"	2,43	5,9049	0,9182
5	7,32 - 8,22	5	"	1,43	2,0449	0,3180
6	8,22 - 9,39	8	"	1,57	2,4649	0,3833
7	> 9,39	7	"	0,57	0,3249	0,0505
TOTAL						2,1325

On a :  $7 - (2 + 1) = 4$  degrés de liberté

$$P(\chi^2) = P(2,13) \text{ donc } 0,90 < P(\chi^2) < 0,10$$

L'adéquation est très satisfaisante. La loi normale peut être adoptée sans réserve.

Compte tenu de la grandeur de l'échantillon et des règles d'usage du  $\chi^2$ , on aurait pu choisir des découpages en 5 classes (9 valeurs), 6 classes (7,5 valeurs), 8 classes (5,625 valeurs) ou 9 classes (5 valeurs) et chercher le  $\chi^2$  minimal. On aurait trouver successivement 2,20 - 5,70 - 6,21 et 6,0 toutes valeurs correspondant à des probabilités inscrites entre 0,10 et 0,90.

- Calcul des intervalles de confiance

L'échantillon de 45 valeurs est assez grand pour que la moyenne puisse être considérée comme une variable aléatoire normale ; la variance n'est pas loin d'en être une également.

L'erreur-type sur la moyenne est de  $\frac{s}{\sqrt{45}}$  soit  $\frac{2,327}{\sqrt{45}}$

L'erreur-type sur l'écart-type est de  $\frac{s}{\sqrt{90}}$  soit  $\frac{2,327}{\sqrt{90}}$

Avec un choix d'intervalle de confiance à 95 %, on a les estimations suivantes de la moyenne et de l'écart-type, sachant que l'intervalle est le double de l'erreur-type (I, 96 fois, exactement),

$$\bar{Q} = 6,90 \pm 0,68 \quad \text{ou} \quad 6,22 \leq \bar{Q} \leq 7,58 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\sigma = 2,327 \pm 0,48 \quad \text{ou} \quad 1,85 < \sigma < 2,81$$

Avec 45 ans de relevés, le module moyen est connu à  $\pm 10$  % et l'écart-type à  $\pm 20$  % près.

Si l'on retient un intervalle de confiance à 90 %, ce qui est moins sévère mais encore non négligeable, on peut voir les variations conséquentes sur les estimations des paramètres puisque l'on prend seulement 1,645 fois l'erreur-type :

$$\bar{Q} = 6,90 \pm 0,57 \quad \text{ou} \quad 6,33 \leq \bar{Q} \leq 7,47 \text{ m3/s}$$

$$\sigma = 2,33 \pm 0,40 \quad \text{ou} \quad 1,93 \leq \sigma \leq 2,73$$

Dans ce cas, la moyenne est cernée à  $\pm$  8 % et l'écart-type à  $\pm$  17 % près.

On aurait pu calculer l'intervalle de confiance sur l'écart-type à l'aide de la loi de  $\chi^2$  sachant que le nombre de degré de liberté  $V = 44$  et qu'en conséquence  $\sqrt{2 \chi^2} - \sqrt{2V-1}$  suit une loi normale réduite. On a donc pour une fréquence au dépassement de 0,025, une variable réduite de GAUSS égale à 1,96 et

$$\chi^2 = \frac{1}{2} \left[ 1,96 + \sqrt{2 \times 44 - 1} \right]^2$$

ce qui donne 63,5 et 27,1 (pour  $u = -1,96$ ).

$$\text{On aura alors : } \frac{44 \times 5,414}{63,5} \leq \sigma^2 < \frac{44 \times 5,414}{27,1}$$

bornes qui sont égales à 1,94 et 2,96 peu différentes on le voit des bornes 1,85 et 2,81 admises avec la loi normale.

#### - Calcul du module décennal sec

Le module décennal sec correspond à une fréquence au dépassement de 0,90, à laquelle correspond une valeur de  $u = 1,28$  pour la variable réduite de GAUSS.

$$\text{On obtient : } Q_{0,9} = 6,90 - 1,28 \times 2,327 = 3,92 \text{ m3/s}$$

L'intervalle de confiance approximatif à 95 % pour ce module décennal est de :

$$1,96 \times 2,327 \times \frac{1}{\sqrt{90}} \sqrt{1,28^2 + 2} \text{ soit } 0,915$$

Le module décennal sec fait l'objet de l'estimation suivante :

$$Q_{0,9} = 3,92 \pm 0,92 \quad \text{ou} \quad \underline{3,00 \leq Q_{0,9} < 4,84 \text{ m3/s}}$$

Evidemment la précision décroît fortement par rapport à celle qui affecte la connaissance des caractéristiques de la distribution, puisque ce quantile n'est connu qu'à  $\pm$  23 % près.

#### - Récurrence théorique du module de 1949

La plus faible valeur observée, en 1949, est un module de 2,49 m3/s. Sa fréquence expérimentale de 0,978 est très peu précise.

En s'appuyant sur l'analyse précédente, on voit de suite que ce module est encore plus sévère que le module décennal sec estimé. On calcule la valeur de la variable réduite de GAUSS lui correspondant :

$$2,49 = 6,90 - 2,327 \cdot u_p$$

$$\text{d'où } u_p = \frac{6,90 - 2,49}{2,327} = 1,895$$

A  $u_p = 1,895$  correspond une fréquence théorique  $F(u)$  donc une probabilité d'apparition de 0,971. La période de retour moyenne d'un tel événement est de 1 année sur 35 environ. On note que cette estimation est moins pessimiste que celle de l'échantillon qui correspond à 1 sur 45.

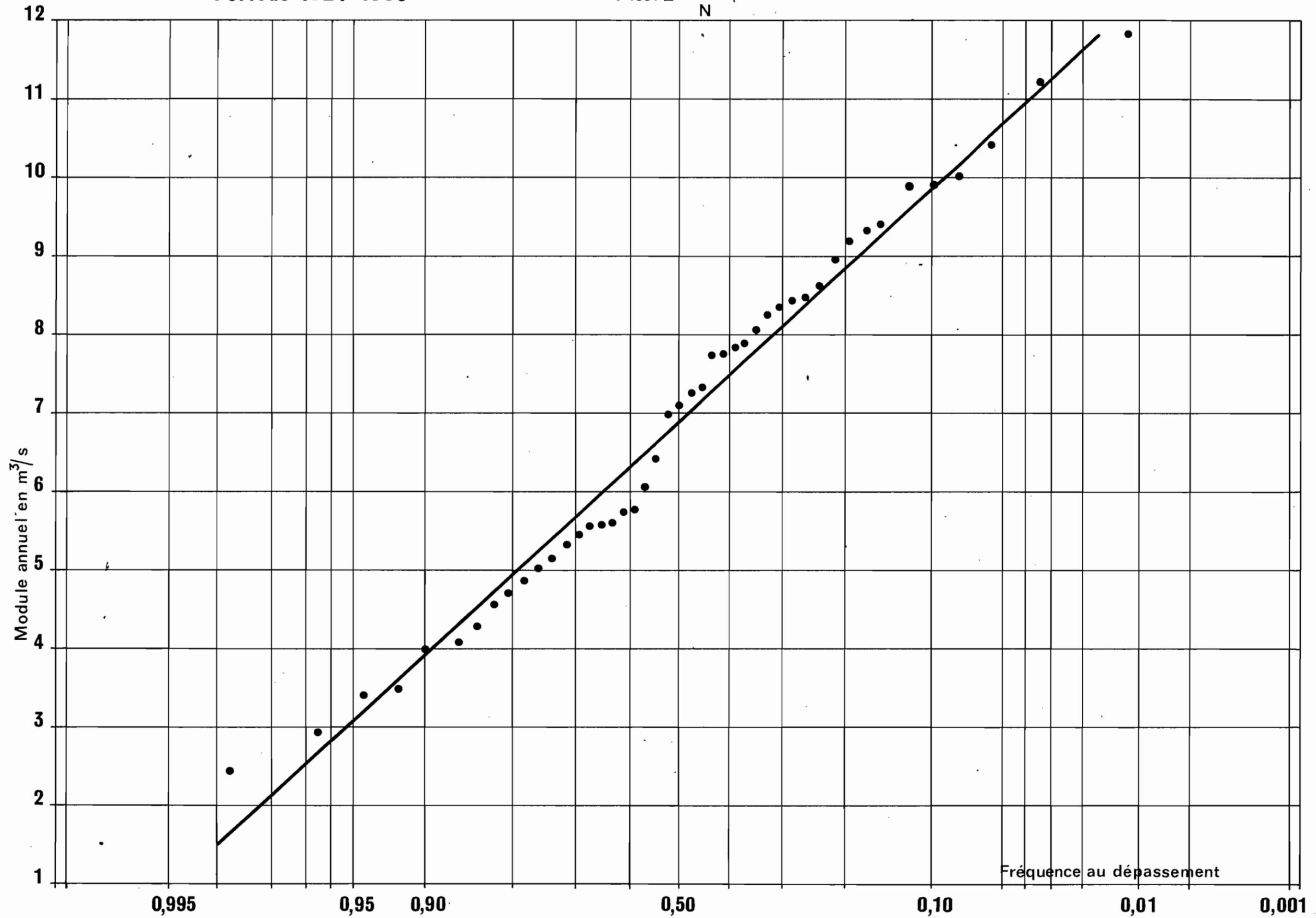
La période observée de 1921 à 1965 ne présente aucune année particulièrement sèche.



Distribution des modules annuels

Période 1921-1965

$$F(x) = \frac{r - 1/2}{N}$$



EXERCICE V - Distribution gaussio-logarithmique des débits de novembre de l'AVEYRON à RODEZ

A. Les caractéristiques empiriques de l'échantillon des 45 débits de novembre observés sont les suivants :

Moyenne  $\bar{Q} = \frac{\sum Q_i}{45} = 6,91 \text{ m}^3/\text{s}$

Variance  $s^2 = \frac{1}{44} \left[ \sum Q_i^2 - 45 \cdot \bar{Q}^2 \right] = 30,653$

Ecart-type  $s = 5,54 \text{ m}^3/\text{s}$

Coefficient de variation  $Cv = \frac{s}{\bar{Q}} = 0,80$

La dispersion de l'échantillon est mise en lumière par le fort coefficient de variation. On peut également comparer sa variance à celle des 45 modules de l'AVEYRON, qui admettent une moyenne équivalente : 30,6 contre 5,41. L'échantillon est certainement dissymétrique.

La valeur (0,80) du coefficient de variation, bien supérieure à 0,50 milite également en faveur de cette dissymétrie ; on se souvient que le coefficient de variation des modules de l'AVEYRON était seulement de 0,337.

B. La dissymétrie de l'échantillon peut être montrée en portant les points représentatifs des débits en face de leur fréquence expérimentale sur un papier à échelle d'abscisse gaussique (forte concavité vers le haut de la série alignée). La dissymétrie subsiste sur un papier équivalent mais à échelle d'ordonnée logarithmique pour les débits : la concavité des points prononcée vers les faibles valeurs est caractéristique d'un échantillon hypergaussique (graphique n° 7). Une loi de GALTON doit très bien s'ajuster. Après essai, on retient une valeur de 1 m<sup>3</sup>/s à ajouter aux débits pour obtenir un bon alignement des points sur le graphique 7.

L'équation de GALTON s'écrit alors :

$u = a \log (Q + 1) + b$ , dans laquelle  $Q_0 = -1 \text{ m}^3/\text{s}$ .

A titre de curiosité, le graphique 7 montre également le résultat d'un ajustement par l'estimateur  $\frac{s^4}{u_3}$ , rapport du carré de la variance au moment de 3<sup>o</sup> ordre (formule 18). La valeur de  $Q_0$  n'est plus - 1 mais - 6,5 m<sup>3</sup>/s.

Cet ajustement calculé figure sur le graphique 7 sous le numéro 3.

Afin de montrer ce que l'on peut attendre des 2 méthodes de calcul des paramètres a et b (formules 19 ou 20), on a procédé aux deux estimations sur le graphique 2 (courbes 1 et 2) : il apparaît clairement que l'estimation par les formules 20 établies à partir des logarithmes de  $(Q_i + 1)$  est meilleure (courbe 2), ce qui est souvent le cas. L'écart est négligeable avec l'autre estimation (formule 19 et courbe 1) qui est cependant plus généralement employée car plus rapide à calculer.

L'ajustement retenu pour la suite des calculs est celui de la courbe 1 :

$$u = 3,647 \log (Q + 1) - 2,960$$

Le test d'adéquation du  $\chi^2$  est effectué sur le tableau suivant à partir de cette relation d'ajustement : le résultat est positif.

On a choisi de retenir 8 classes d'égale probabilité théorique, comprenant chacune  $\frac{15}{8}$  soit 5,625 effectif théorique  $V_i$ .

Les limites de classe découlent de ce choix et permettent le calcul des effectifs expérimentaux  $n_i$  par classe.

Détail du calcul du  $\chi^2$

N° de classe	limites de classes	Effectif théorique	Effectif expérimental	$n_i - V_i$	$(n_i - V_i)^2$	$\frac{(n_i - V_i)^2}{V_i}$
1	> 12,44	5,625	6	0,375	0,1406	0,025
2	: 8,91-12,44	"	6	0,375	0,1406	0,025
3	: 6,94- 8,91	"	3	2,625	6,8906	1,227
4	: 5,50- 6,94	"	9	3,375	11,3906	2,110
5	: 4,31- 5,50	"	4	1,625	2,6406	0,470
6	: 3,24- 4,31	"	3	2,625	6,8906	1,227
7	: 2,13- 3,24	"	5	0,625	0,3906	0,694
8	: < 2,13	"	9	3,375	11,3906	2,110
TOTAL						7,888

Nombre de degrés de liberté  $k - p - 1 = 8 - 3 - 1 = 4$

$p(\chi^2) = P(7,888)$  à 4 degrés

$$P(\chi^2) \neq 0,09$$

Bien que supérieure au seuil de 0,05, cette probabilité est faible et témoigne peut-être d'une adéquation modeste. Cependant une telle prise de position ne doit être retenue qu'après exploration des possibilités du test du  $\chi^2$ , c'est-à-dire en recherchant le  $\chi^2$  minimal par classement en 9,7,6 ou 5 classes par exemple, comme cela fut fait et montré dans l'exercice IV.

C. Le calcul de l'intervalle de confiance sur l'estimation de la moyenne des débits de novembre s'effectue en passant aux logarithmes (variable normale).

On cherche la valeur de la variable réduite de GAUSS  $u = \frac{y_i - \bar{y}}{s_y}$  sachant que  $y_i$  est le logarithme de la moyenne des débits et  $\bar{y}$  la moyenne des logarithmes, et  $s_y$  l'écart-type des logarithmes.

$$y_i = \log(6,91 + 1) = 0,89818$$

$$\text{sachant que } \bar{y} = \log(Q_i + 1) = 0,79950 \text{ et } s_y = 0,301$$

on obtient :  $u = 0,328$

La formule de l'intervalle de confiance à 95 % est :

$$1,96 \times \frac{s_y}{\sqrt{2N}} \sqrt{u^2 + 2}$$

$$\text{soit } 1,96 \times \frac{0,301}{\sqrt{90}} \sqrt{0,328^2 + 2} = 0,109$$

Les bornes de l'intervalle des logarithmes sont :

$$0,89818 \pm 0,109$$

En repassant aux débits, et en retranchant  $Q_0 = 1 \text{ m}^3/\text{s}$ , on trouve les bornes 5,15 et 9,17  $\text{m}^3/\text{s}$  pour la moyenne estimée à 6,90  $\text{m}^3/\text{s}$  :

$$5,15 < \bar{Q} < 9,17 \text{ m}^3/\text{s} \text{ (IC 95)}$$

On peut encore dire que la précision de cette estimation oscille entre 25 et 33 % (intervalle dissymétrique) autour de 6,91  $\text{m}^3/\text{s}$ .

On peut encore ici comparer la différence de précision obtenue à partir d'échantillons de même longueur (45 ans) selon qu'ils sont ou non normalement distribués : le module de l'AVEYRON est connu à 10 % près, le débit moyen de novembre l'est seulement à environ 30 % près soit avec une imprécision relative trois fois plus importante.

D. Au débit moyen mensuel de récurrence 20 ans recherché, correspond une fréquence théorique de 0,05 au non dépassement, pour laquelle la variable réduite de GAUSS vaut -1,645. On introduit cette valeur dans l'équation d'ajustement de la loi de GALTON :

$$u = 3,647 \log(Q + 1) - 2,960$$

$$\text{On a } \log(Q_{0,05} + 1) = \frac{2,960 - 1,645}{3,647} = 0,361$$

$$Q_{0,05} = 1,29 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Le débit de 1,29 m<sup>3</sup>/s a été dépassé en sévérité 4 fois au cours de la période étudiée de 45 ans. Ceci confirme les remarques relatives à l'ajustement retenu et qu'illustre le graphique n° 7 : la courbe est trop optimiste pour les basses eaux et le débit de probabilité 0,95 calculé est surestimé. Sur le graphique 7 l'ajustement de la courbe 2 reconnu meilleur, donne par simple lecture  $Q_{0,05} = 1,04 \text{ m}^3/\text{s}$ , ce qui est plus près des observations (3 valeurs expérimentales seulement sont plus sévères en 45 ans).

L'absence de précision et d'intérêt de l'ajustement par les estimateurs (courbe 3 du graphique n° 7) peut être mise clairement en évidence sur ce même sujet. La courbe 3 donne pour  $P = 0,95$  un débit de 6,5 m<sup>3</sup>/s. Comme d'après les calculs théoriques  $Q_0 = 6,5 \text{ m}^3/\text{s}$ , cela revient à dire que le débit de novembre s'annule tous les 20 ans. La sévérité exagérée et l'absence de précision de cet ajustement sont très nettes en ce qui concerne les valeurs déficitaires ; il doit être rejeté, tandis qu'il pourrait être conservé pour les estimations des valeurs excédentaires pour lesquelles il fait jeu égal avec les courbes 1 et 2.

Ces constatations sur les divergences des estimations appellent les quelques remarques complémentaires suivantes : lorsque l'on a le choix entre plusieurs estimateurs conduisant à plusieurs solutions possibles des équations d'ajustement, on doit s'orienter vers la solution qui s'adapte le mieux à l'objectif poursuivi. Or, celui-ci peut être une bonne adéquation générale de l'échantillon (cas d'une étude générale) ou simplement une bonne adéquation limitée à l'une des extrémités de l'échantillon (valeurs supérieures s'il s'agit de crues par exemple, valeurs inférieures s'il s'agit de basses eaux) car l'on recherche l'adéquation pour en tirer une estimation de la variable pour une probabilité rare. Selon l'objectif visé, on peut ainsi dans le choix graphique du paramètre de position  $x_0$  s'arrêter à la valeur qui satisfait le mieux à l'adéquation sur le domaine intéressant de l'échantillon. C'est pourquoi sur l'exemple du débit de novembre de l'AVEYRON, considéré comme une information de basses eaux, si les études tendent à préciser l'apport à faible probabilité en période sèche, faut-il chercher la meilleure adéquation possible des valeurs faibles de l'échantillon. C'est dans cette optique que l'ajustement selon la courbe 2 pouvait être considéré comme étant le plus satisfaisant.

La période de retour moyenne théorique du débit observé le plus faible : 0,83 m<sup>3</sup>/s en novembre 1957 doit être supérieure à 20 ans.

$$\text{On a : } \log(0,83 + 1) = 0,26245$$

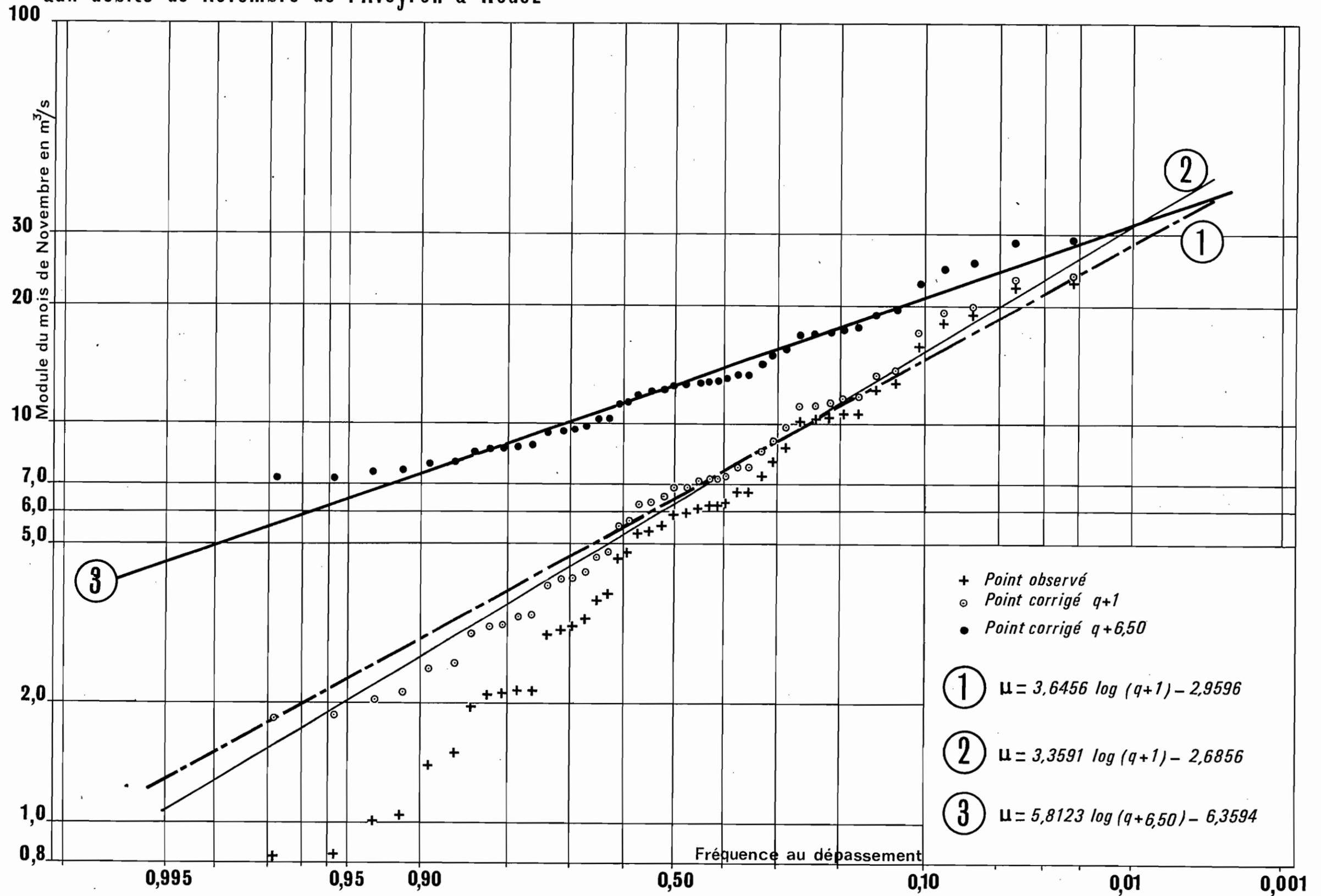
L'équation de GALTON permet de calculer u :

$$u = 3,647 \times 0,26245 - 2,960 = - 2,003 \text{ (courbe 1)}$$

La table de GAUSS indique pour  $u = - 2,003$  une probabilité de 0,9775 à laquelle correspond une récurrence de 45 ans environ qui se trouve être égale à la récurrence expérimentale.

A l'aide de la courbe (2), on trouve une récurrence de 53 ans. On peut donc dire en conclusion que l'échantillon des 45 ans ne semble pas présenter d'événement beaucoup plus sévère que sa période ne devait théoriquement en contenir.

# Ajustement d'une loi de Galton aux débits de Novembre de l'Aveyron à Rodez



EXERCICE VI - Distributions de GUMBEL et de PEARSON III pour les débits de crue de l'ILL à ERSTEIN

Les paramètres statistiques de l'échantillon sont .

moyenne  $\bar{Q} = 213,686$  soit  $213,7$  m<sup>3</sup>/s environ

Ecart-type  $\sigma = 143,2$  m<sup>3</sup>/s

Les paramètres d'ajustement de la loi de GUMBEL sont :

$$s = \frac{1}{a} = 0,780 \cdot 143,2 = 111,7$$

$$Q_0 = 213,7 - 0,577 \times 111,7 = 149,2 \text{ m}^3/\text{s}$$

L'équation de la droite sur papier de GUMBEL est alors :

$$y = \frac{Q - 149,2}{111,7}$$

dont la représentation graphique est donnée sur papier de GUMBEL dans le graphe 8 et sur papier gaussique dans le graphe 9.

A première vue, l'ajustement paraît satisfaisant pour l'ensemble des valeurs de l'échantillon, à l'exception peut-être des 5 valeurs les plus fortes pour lesquelles il semblerait un peu sous-estimé.

Le calcul des paramètres de la loi de PEARSON III s'effectue à partir de celui de  $g(\gamma)$

$$g(\gamma) = \log 213,686 - \frac{113,240}{51}$$

$$g(\gamma) = 2,32977 - 2,22039 = 0,10938$$

Le tableau du texte du chapitre donnant  $\gamma$  en fonction de  $g(\gamma)$  permet d'estimer par interpolation logarithmique (elle est recommandée car plus précise que l'interpolation linéaire)  $\gamma$  à 2,13. On retient la valeur arrondie de  $\gamma = 2,1$ .

On calcule ensuite le second paramètre  $a$ .

$$a = \frac{2,1}{213,7} = 0,009827$$

La méthode des moments conduit aux estimations suivantes :

$$R_1 = \frac{10.898}{51} = 213,68$$

$$R_2 = \frac{3.354.448}{10.898} = 307,78$$

$$R_3 = \frac{1.275.810.521}{3.354.448} = 380,33$$

$$\text{d'où } R = 213,68 + 380,33 - (2 \times 307,78) = 21,55.$$

La lère approximation de  $\gamma$  est égale à :

$$\gamma = \frac{213,68}{307,78 - 213,68} = 2,26$$

On a ensuite  $R 2_a = 307,78 + 21,55 \times \frac{2}{3 + 7/3,26}$

$$R 2_a = 316,16$$

En définitive:  $\frac{1}{a} = 316,16 - 213,68 = 102,48$

$$\gamma = \frac{213,68}{102,48} = 2,09$$

Les estimations sont très voisines de celles fournies par la méthode du maximum de vraisemblance, que l'on conserve pour la suite des calculs.

Pour le calcul des fréquences théoriques, on fait le changement de variable de la formule (29) :

$$u = \frac{0,009827Q}{\sqrt{2,1}} = 0,006781 Q$$

L'utilisation de la table de PEARSON III, simplifiée pour  $\gamma = 2,1$  et que donne le tableau 10 du chapitre VI, permet le calcul des fréquences  $F_1(Q)$  que résume le tableau suivant :

Q	u	F (Q)	F <sub>1</sub> (Q)
50	0,339	0,074	0,926
100	0,678	0,23	0,77
150	1,017	0,40	0,60
200	1,356	0,555	0,445
250	1,695	0,68	0,32
300	2,034	0,772	0,228
350	2,373	0,842	0,158
450	3,051	0,927	0,073
550	3,729	0,967	0,033
650	4,407	0,9855	0,0145
750	5,085	0,9938	0,0062
850	5,763	0,99735	0,00265

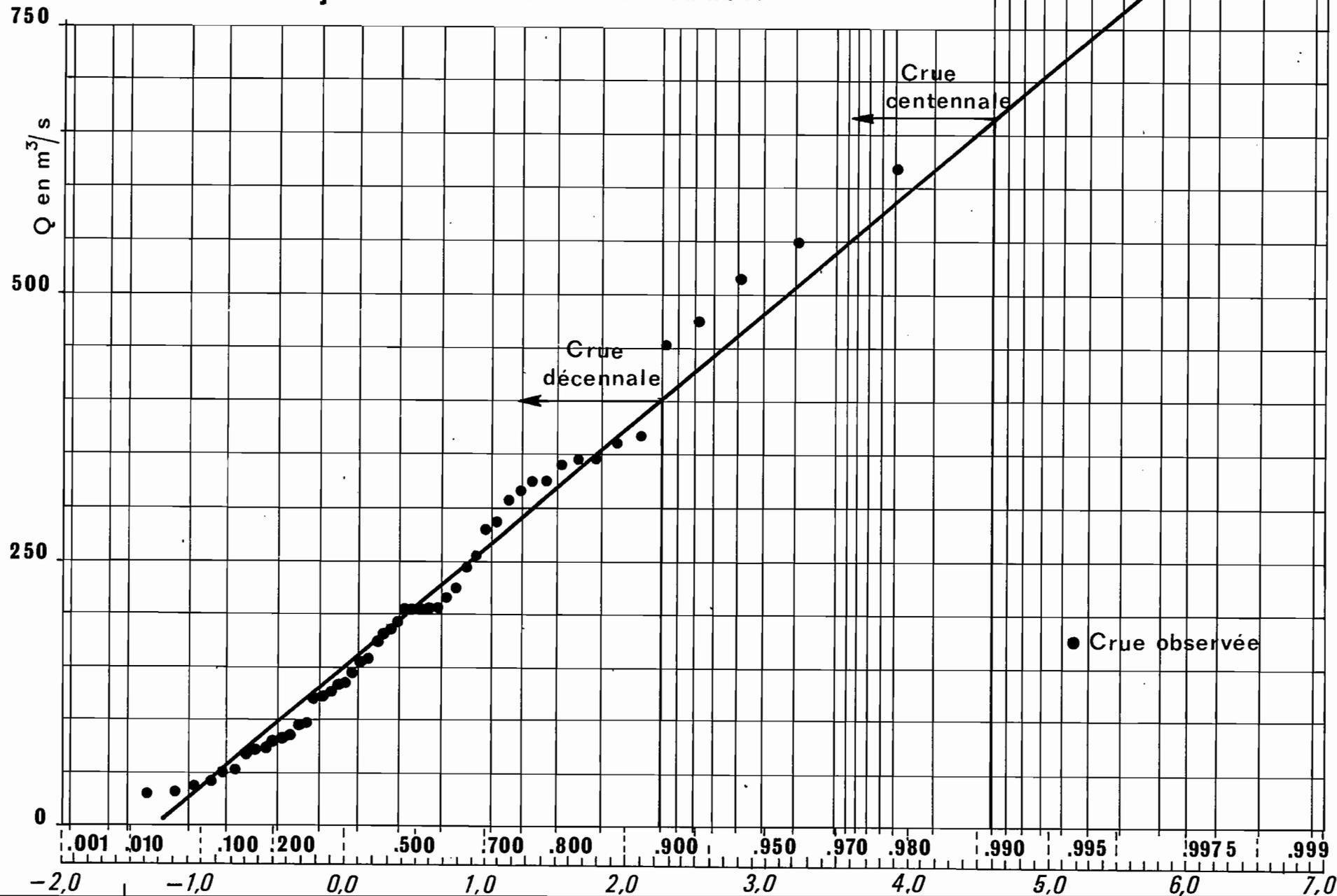
Le graphe 9 fournit la représentation de cet ajustement. Sa lecture appelle deux commentaires :

- la loi de PEARSON III est ici plus dissymétrique que celle de GUMBEL
- la loi de PEARSON III paraît plus adéquate pour représenter les valeurs extrêmes que la loi de GUMBEL semblait sous-estimer.

L'ILL à ERSTEIN

# DÉBITS JOURNALIERS DE CRUE

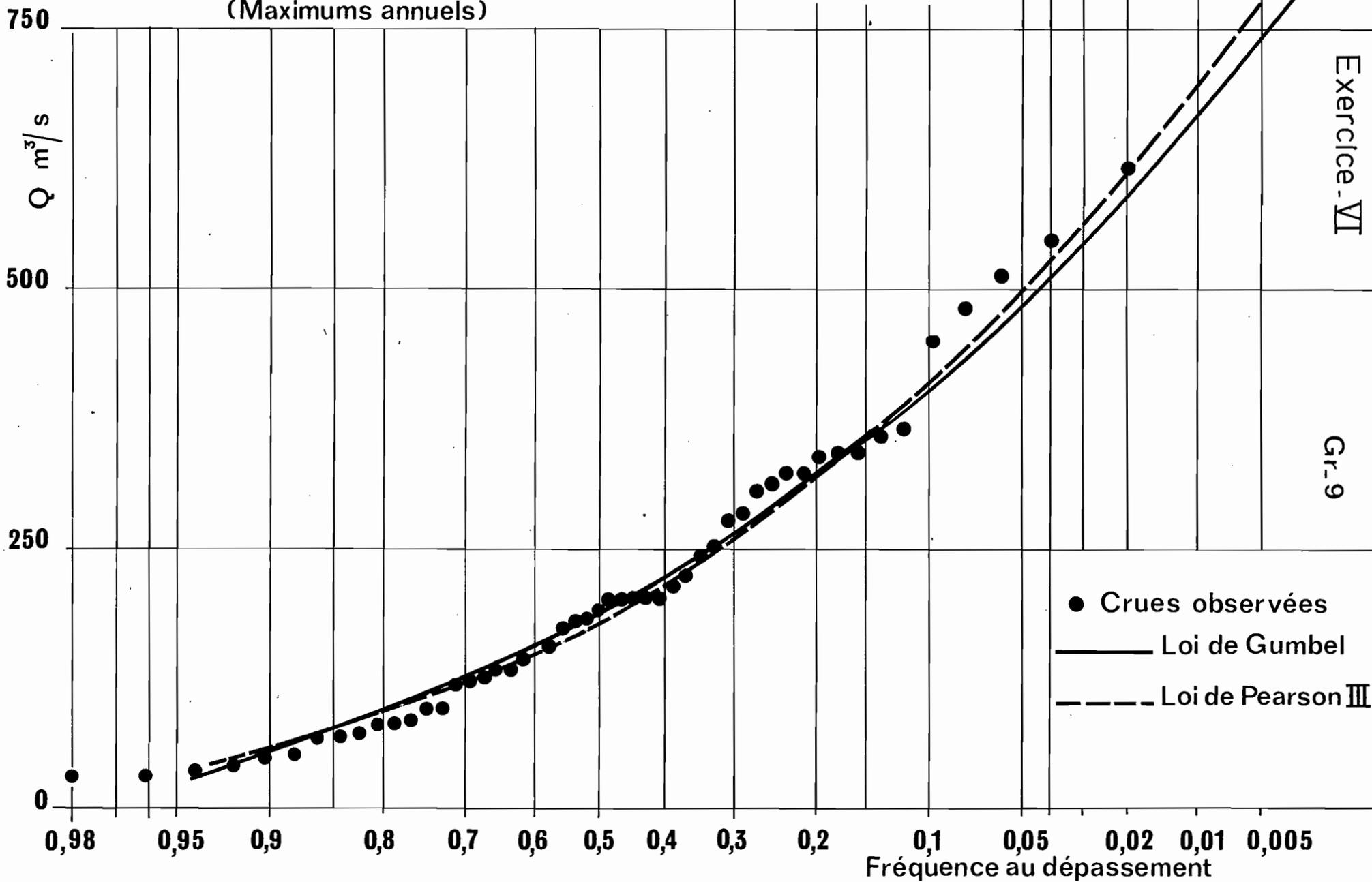
## Ajustement de la loi de Gumbel



# DÉBITS JOURNALIERS DE CRUE

(Maximums annuels)

L'ILL à ERSTEIN



Comme on va le voir plus loin, l'écart entre les deux ajustements est faible et reste inclus dans l'intervalle de confiance propre à chaque loi, ce qui sur le plan théorique n'autorise pas de préférer l'une à l'autre. Les crues exceptionnelles, déterminées sur les graphes, ont les valeurs suivantes en m<sup>3</sup>/s :

	Décennale	Centenaire
Loi de GUMBEL	405	670
Loi de PEARSON III	412	695

Ces résultats sont en concordance avec l'examen empirique de l'échantillon : sur 51 ans, on a 5 valeurs observées supérieures aux estimations de la crue décennale et la plus forte valeur d'entre elles (620 m<sup>3</sup>/s en 1955) reste inférieure aux estimations de la crue centennale.

La loi de GUMBEL donnerait 590 m<sup>3</sup>/s pour la crue cinquantenale tandis que celle de PEARSON III donnerait 615 m<sup>3</sup>/s, valeur plus proche du maximum de 620 m<sup>3</sup>/s observé en 52 ans.

Le calcul des intervalles de confiance, à l'aide du graphe 10 du chapitre VI, est résumé ci-dessous :

- Intervalles de confiance à 70 % des crues exceptionnelles estimées d'après la loi de GUMBEL :

$$\begin{aligned}
 \text{crue décennale} \quad 405 - 0,27 \cdot 143,2 < Q_{10} < 405 + 0,31 \cdot 143,2 \\
 & 366 < Q_{10} < 449 \\
 \text{crue centenaire} \quad 670 - 0,51 \cdot 143 < Q_{100} < 670 + 0,60 \cdot 143,2 \\
 & 598 < Q_{100} < 756
 \end{aligned}$$

Ces intervalles sont très larges et contiennent sans difficulté les estimations des mêmes quantiles selon la loi de PEARSON III ; donc ces deux systèmes d'estimation ne peuvent pas être considérés comme significativement différents.

Ces intervalles ne sont évidemment pas symétriques. Ils correspondent aux précisions relatives suivantes :

$$\begin{aligned}
 \text{crue décennale} \quad 405 \quad \pm \quad 10 \text{ à } 11 \% \\
 \text{crue centennale} \quad 670 \quad \pm \quad 11 \text{ à } 13 \%
 \end{aligned}$$

Il ne faut pas comparer brutalement ces gammes d'incertitudes apparemment peu étendues avec celles qui ont été obtenues dans les Exercices IV et V car celles-là correspondaient à des intervalles de confiance à 95 % et non à 70 %.

Ainsi les gammes d'incertitude sur les crues selon GUMBEL passent-elles à  $\pm 18$  à 29 % et à  $\pm 21$  à 30 % respectivement si l'on retient un intervalle à 95 % également.

L'échantillon de 52 ans étant plus grand que ceux de 45 ans de l'AVEYRON à RODEZ, les dites gammes s'en trouvent encore resserrées quelque peu. On se souvient que l'on avait  $\pm 23$  % pour le module décennal sec de l'AVEYRON. On voit donc que les intervalles de confiance sont comparables dans les deux ajustements.

EXERCICE VII - SELECTION DES CRUES UNITAIRES ET RECHERCHE DE  
L'HYDROGRAMME UNITAIRE MEDIAN DU BASSIN DE  
KOUNTKOUZOUT

1. Sélection des crues unitaires

Elle doit s'effectuer en suivant la méthodologie décrite dans le paragraphe 7.3.2. du texte du chapitre, méthodologie qui repose sur un processus d'élimination des événements qui ne sont manifestement pas unitaires. Ce travail s'effectue avec les éléments inscrits dans le tableau 13, c'est-à-dire sur les caractéristiques déduites des observations, en ayant présent à l'esprit que ce tableau ne contient que 15 événements sur un total de 150, et que par conséquent 135 événements ont déjà été éliminés pour l'un ou l'autre des motifs que l'on va invoquer.

L'événement 94 est à écarter, car la hauteur de précipitation en est nettement inférieure au seuil de 15 mm, en dessous duquel il n'y a pas de ruissellement généralisé (seuil déterminé par une analyse préalable de la réaction du bassin aux précipitations, analyse dite de la précipitation limite d'écoulement qui s'effectue en pointant sur un graphique en abscisses le temps séparant une pluie considérée de la précédente et en ordonnée la hauteur moyenne de cette pluie, le point étant signalé différemment selon que ladite pluie a été suivie ou non d'une réaction du bassin, réaction pouvant être un ruissellement généralisé et notable ou localisé et faible).

Toutes les averses présentant des pointes multiples d'intensités nettement séparées vont donner des crues complexes et ne peuvent être retenues : c'est le cas des événements 23, 26, 39, 70, 109 et 124.

Sur les événements restant en lice, tous formés à partir d'une averse à corps intense unique, on constate que les temps de montée se classent entre 35 et 64 minutes. Etant donné la superficie relativement modeste du bassin = 16,6 km<sup>2</sup> = on peut adopter comme critère de la durée limite maximale pour la pluie utile d'une averse unitaire un temps correspondant aux deux tiers du temps de montée de la crue supposée unitaire. Dans le cas analysé, cette durée limite serait d'environ 25 minutes, si l'on était strict, et l'on devrait écarter comme non unitaires les événements n° 4, 82, 110 et 112. Mais si l'on admet que cette règle des 2/3 s'applique au temps de montée de la crue observée, on peut ainsi réhabiliter les événements 82, 110 et 112.

Avant de trancher définitivement sur le caractère unitaire ou non unitaire des événements restant, à savoir les n° 58, 82, 100, 110, 112, 146 et 148 parmi lesquels les n° 82, 110 et 112 sont en litige, on doit examiner les caractéristiques des hydrogrammes de ruissellement.

On notera que la crue n° 4 a été incomplètement observée (limnigraphe emporté par les eaux, en décrue) et bien qu'étant très nettement la plus forte connue, elle ne peut être conservée pour la recherche des hydrogrammes unitaires.

Les temps de montée des événements restants sont en deux groupes, l'un entre 35 et 40 minutes (n° 58 et 100), l'autre autour de 60 minutes (n° 110, 112 et 148) avec quelques valeurs intermédiaires.

Les temps de base du ruissellement sont, aussi, assez disparates ; les uns valent 135 minutes (n° 100 et 146), les autres se situent surtout entre 180 et 200 minutes (n° 58, 82, 110, 112 et 148).

Le choix n'est pas évident et certaines options pourraient être prises, qui seraient en réalité trop rigides et erronées :

- on pourrait adopter comme unitaires les seuls événements à temps près de leurs limites inférieures - 35 et 100 minutes - mais il n'y aurait coïncidence que pour le seul événement n° 100
- on pourrait au contraire écarter comme dus à des écoulements localisés les crues courtes (n° 58, 100 et 146) et ne garder que les longues (n° 82, 110, 112 et 148), mais la répartition des précipitations - représentée par le rapport entre pluie maximale et pluie moyenne - n'est pas hétérogène à un point permettant cette option.

L'examen des débits maximaux de crue, ramenés à une lame de 1 mm, ne permet pas non plus de poursuivre l'élimination ; ces débits se placent entre 3,6 et 6,4 m<sup>3</sup>/s, sans clivage net.

Arrivé à ce stade, l'hydrologue doit envisager de poursuivre l'analyse sur les 7 événements conservés, en procédant à l'examen détaillé des courbes de décrue des hydrogrammes observés. En effet, les crues n'étant ni précédées, ni suivies d'écoulement permanent, il n'y a pas eu de séparation d'écoulement et les caractéristiques données dans le tableau 13 sont relatives à la totalité de l'écoulement provoqué par les pluies. Or, la forme de certains hydrogrammes - ceux des crues longues - et les observations de terrain laissent à penser qu'une part d'écoulement pourrait être due à du ruissellement retardé hypodermique (vidange ralentie de dépressions superficielles, ressuyage des couches superficielles de certains sols ... etc ...).

On notera avant de poursuivre dans ce sens, avec un lot limité à 7 événements, que les 8 événements éliminés pour un motif quelconque, l'auraient été en considérant d'autres motifs, ce qui confirme leur élimination : durée utile trop longue (n° 23, 26 et 124), temps de montée trop courts de crues localisées (n° 23 ou 94), temps de base trop long (n° 23, 39) ou trop court (n° 94), débit maximal trop faible (n° 23) ou trop élevé (n° 94) ... etc ...

.../...

2. Séparation du ruissellement pur et de l'écoulement hypodermique

Le travail doit en réalité être effectué sur les 7 crues retenues ; il montre d'ailleurs la véracité de l'hypothèse à savoir que les crues courtes n'ont pas eu d'écoulement hypodermique, à l'encontre des crues longues. La séparation entre ruissellements pur et retardé est opérée sur les crues n° 110 du 5.8.66 et n° 112 du 9.8.66, présentées sur le graphe 14 du chapitre VII.

Les débits de décrue, pris à partir d'un point proche du point d'inflexion de la courbe de décrue, sont reportés à intervalles réguliers, par exemple de 10 en 10 minutes, sur un papier semi-logarithmique en ordonnées log. tandis que les temps sont en abscisses (graphe n° 10).

Une cassure apparaît très nettement, aux alentours d'un débit de 7 m<sup>3</sup>/s dans le cas des exemples. Le point F de la cassure doit être reporté sur la décrue de l'hydrogramme pour permettre la séparation des ruissellements comme le montrait le graphe 12 du chapitre VII : les débits de ruissellement pur se calculent par soustraction entre les débits correspondants à l'hydrogramme observé et ceux de la droite reliant le début de la crue au point F.

Les résultats sont donnés sous forme numérique, dans le tableau ci-dessous dans lequel les temps ont pour origine le début de la crue.

Débits de ruissellement pur en m<sup>3</sup>/s des crues n° 110 et 112

Temps en minutes	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
Crue 110	0	13	33	54	71	83	71	48	27	15,4	6,9	3,1	0
Crue 112	0	12,6	27,5	41,5	56,5	68	63	52,5	38	26	14	7,4	0

Les caractéristiques de ruissellement pur de ces crues sont différentes de celles du tableau 13 (chapitre VII), relatives à l'écoulement global ; elles se déduisent de l'examen des hydrogrammes ainsi séparés en deux fractions ; voici leurs valeurs :

	Vr. 103m <sup>3</sup>	lr. mm	t <sub>0</sub> . min.
n° 110	256	15,4	120
n° 112	245	14,8	120

Le même travail effectué sur les cinq autres crues retenues a conduit au tableau n° 14 du chapitre VII contenant les hydrogrammes de ruissellement pur.

On constate avec satisfaction que les temps de base du ruissellement se sont homogénéisés et qu'ils se concentrent maintenant entre 120 et 140 minutes. Ceci confirme le bien-fondé de la sélection des sept événements pour servir à la détermination des hydrogrammes unitaires.

### 3. Détermination des hydrogrammes unitaires

Dans un premier stade, on donne le tableau des diagrammes de ruissellement unitaire à partir des cinq crues unitaires (tableau 14 du chapitre VII.4) et des crues n° 110 et 112 analysées précédemment.

Tous les débits sont ramenés proportionnellement à une lame ruisselée de 1 mm, c'est-à-dire que pour tous l'on effectue la division  $Q/lr$  déjà faite au niveau du maximum lors de l'établissement des caractéristiques de crue (dernière colonne du tableau 13, chapitre VII.4).

Par suite des corrections dues à la séparation entre ruissellements pur et hypodermique nécessaire pour certaines crues, on arrive à des résultats légèrement différents de ceux du tableau des caractéristiques de crue qui contenait les paramètres calculés pour le ruissellement global. Des sept crues unitaires retenues, seule celle du 8 juillet 1966 (n° 100) ne contient pas de ruissellement hypodermique notable.

Les résultats sont présentés dans le tableau intitulé "Diagrammes de distribution des crues unitaires et de l'hydrogramme médian à KOUNTKOUZOUT", dans lequel les temps sont organisés de part et d'autre du débit maximal pris comme origine.

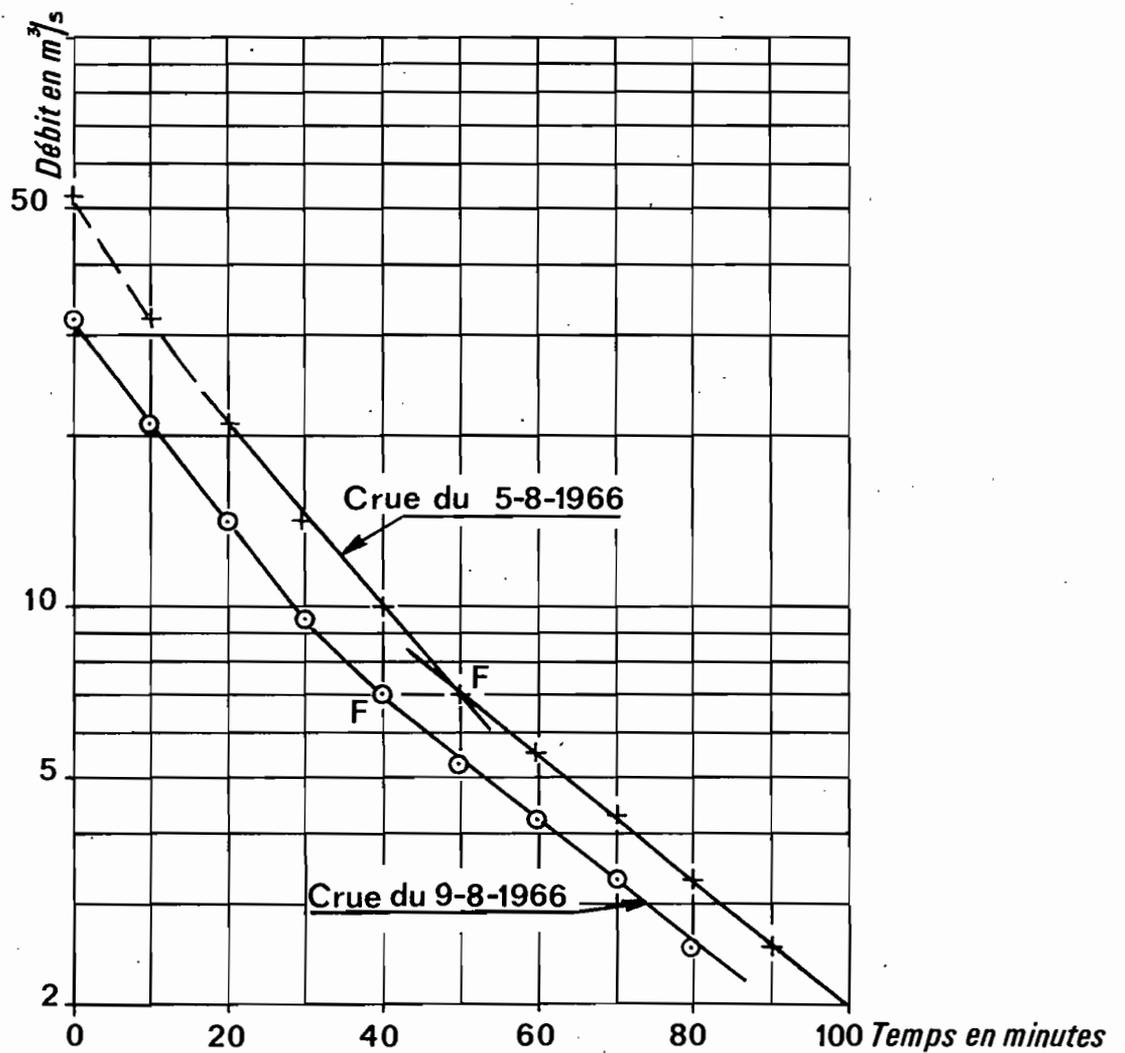
Une dispersion non négligeable se manifeste entre ces divers hydrogrammes, due essentiellement à deux raisons liées : les épices des précipitations ne coïncident pas et les différentes parties du bassin n'ont pas exactement la même aptitude au ruissellement.

On peut, à l'examen du tableau, écarter le diagramme de la crue n° 58 du 8.8.65 qui paraît beaucoup trop mou, par rapport aux autres, surtout en décrue et considérer que cette crue n'était peut-être pas unitaire (averse un peu faible de 17 mm n'ayant vraisemblablement pas pu entraîner un ruissellement généralisé).

Les autres diagrammes sont plus comparables. On ne fait pas leur moyenne, mais l'on choisit dans chaque intervalle de temps, un débit médian puis l'on trace l'hydrogramme ainsi obtenu sur graphique. Ce tracé permet de rectifier par lissage la forme de l'hydrogramme et de vérifier que le volume unitaire ( $16\ 600\text{m}^3$ ) est conservé.

Le tableau précédent montre ces débits médians et les valeurs finalement retenues après lissage et contrôle de volume pour l'hydrogramme médian type du bassin.

# Séparation des ruissellements purs et retardés



TABLEAU

DIAGRAMMES de DISTRIBUTION des CRUES UNITAIRES  
et de l'HYDROGRAMME MEDIAN à KOUNTKOUZOUT

$$V_r = 16\ 600\ m^3$$

$$L_r = 1\ mm$$

Dates	- 50	- 40	- 30	- 20	- 10	0	10	20	30	40	50	60	70	90
8-8-65	:0,06	:0,75	:2,00	:3,20	:3,75	:3,55	:3,25	:2,90	:2,45	:2,00	:1,45	:1,05	:0,40	:
26-5-66	:1,60	:2,60	:2,90	:3,60	:5,11	:4,45	:3,30	:2,50	:1,35	:0,60	:0,30	:0,15	:0	:
8-7	:0	:0,50	:2,60	:5,40	:6,38	:5,05	:3,20	:1,65	:1,00	:0,70	:0,45	:0,25	:0,05	:
5-8	:0,85	:2,20	:3,50	:4,60	:5,42	:4,60	:3,10	:1,75	:1,00	:0,45	:0,20	:0	:	:
9/10-8	:0,85	:1,85	:2,80	:3,80	:4,58	:4,25	:3,55	:2,55	:1,75	:0,95	:0,50	:0	:	:
23-7-67	:0,95	:3,00	:3,50	:4,25	:5,25	:4,20	:2,95	:1,55	:0,75	:0,35	:0,05	:0	:	:
24-7	:0,20	:1,15	:1,85	:3,10	:5,10	:5,95	:4,45	:2,40	:1,35	:0,80	:0,50	:0,25	:0,15	:0
Débits médians	:0	:0,85	:1,85	:2,85	:4,02	:5,18	:4,45	:3,15	:1,70	:1,00	:0,55	:0,25	:0,07	:0
Hydrogramme médian	:0	:0,85	:1,85	:2,90	:4,25	:5,25	:4,45	:3,20	:1,75	:1,00	:0,60	:0,30	:0,15	:0

Intervalles de temps donnés en minutes



EXERCICE VIII - RECONSTITUTION D'UNE CRUE COMPLEXE OBSERVEE SUR LE BASSIN DE KORHOGO EN UTILISANT LA METHODE DE COMPOSITION DES HYDROGRAMMES UNITAIRES

Le graphe n° 11 fournit une représentation du hyétogramme moyen de l'averse complexe, donné sous forme de tableau dans le chapitre VIII.3.

On observe une averse réellement complexe dont le corps cependant unique paraissant commencer vers 5 h 20' pour s'achever vers 7 h, dure environ 1 h 40' ; au cours de cette période très longue on remarque 4 pointes d'intensités élevées - supérieures à 20 mm/h - assez bien individualisées.

Il faut d'abord vérifier si ces 4 pointes du corps d'averse ont été réellement efficaces, c'est-à-dire si elles ont contribué à fournir du ruissellement. Elles sont approximativement centrées sur 5 h 35', 5 h 58', 6 h 23' et 6 h 55'.

En appliquant la loi de décroissance de la capacité moyenne d'absorption  $C_{am}$ , à partir de 5 h 5', moment du début de l'averse, on peut calculer les valeurs de  $C_{am}$  pour ces instants centrés sur chaque pointe, respectivement survenus 30, 53, 78 et 110 minutes après le début de l'averse.

L'application de l'équation  $\log C_{am} = 1,86 - 0,0052 (t + 10)$  donne respectivement les valeurs moyennes suivantes de  $C_{am}$  pour les instants centrés sur chaque pointe : 45, 34, 25 et 17 mm/h.

Ces valeurs confirment que les 4 pointes appartiennent à la pluie efficace. En supposant la capacité  $C_{am}$  constante durant chacune de ces pointes, on peut déjà constater que celles-ci sont toutes de durée unitaire puisque respectivement 10, 15, 5 et 10 minutes y ont dépassé les valeurs admises pour  $C_{am}$ .

En faisant légèrement varier ces valeurs de  $C_{am}$ , on peut arriver à décomposer exactement en 4 fractions unitaires la pluie nette totale de 7,86 mm.

Le tableau suivant montre la décomposition obtenue, en se limitant aux seules fractions efficaces des 4 pointes du corps d'averse (numérotées de 1 à 4 sur le graphe 11).

Heures, minutes	Intensité de pluie mm/h	Hauteur de pluie mm	$C_{am}$ mm/h	Lame observée mm	Pluie nette mm
5 h 30' - 5 h 35'	78	6,5	44	3,66	2,84
5 h 35' - 5 h 40'	56	4,68	44	3,66	1,02
5 h 50' - 5 h 55'	35	2,91	32	2,67	0,24
5 h 55' - 6 h	45	3,75	32	2,67	1,08
6 h - 6 h 05'	39	3,25	32	2,67	0,58
6 h 20' - 6 h 26'	36	3,60	25	2,50	1,10
6 h 50' - 7 h	22	3,77	16	2,67	1,00

En récapitulant, on a 4 fractions unitaires d'averse :

- 5 h 30'	- 5 h 40'	3,86	mm de pluie nette en 10 minutes		
- 5 h 50'	- 6 h 05'	1,90	"	15	"
- 6 h 20'	- 6 h 26'	1,10	"	6	"
- 6 h 50'	- 7 h	1,00	"	10	"

A titre de vérification, on peut noter que l'hydrogramme de crue enregistré un début net de montée après 5 h 30', début de la première fraction efficace de l'averse.

La reconstitution de la crue complexe s'effectue alors simplement en calculant (par multiplication de l'hydrogramme médian de KORHOGO pour 1 mm de pluie nette donné dans le tableau 12 du chapitre VII) les quatre hydrogrammes unitaires provoqués par les quatre pluies nettes précédentes.

On additionne ensuite ces hydrogrammes, dont le pas de temps de calcul est de 10 minutes, en les décalant de l'intervalle de temps séparant les débuts des pluies nettes entre elles ; le premier commence à 5 h 30' (ou au temps origine zéro), le second à 5 h 50' (ou au temps + 20 minutes), le troisième à 6 h 20' (ou au temps + 50 minutes), le dernier à 6 h 50' (ou au temps + 80 minutes).

Le tableau suivant intitulé "Composition des hydrogrammes unitaires pour la reconstitution d'une crue complexe à KORHOGO" contient les éléments numériques de cette opération.

Aux débits de ruissellement obtenus par sommation aux divers intervalles de temps, on doit ajouter le débit de base, sensé croître de 0,10 à 0,40 m<sup>3</sup>/s, pour avoir le débit total écoulé. L'hydrogramme calculé ainsi reconstitué figure sur le graphe 11 avec l'hydrogramme observé. On remarque une bonne coïncidence de la phase de montée, des instants du début, du maximum et de fin de crue.

Il y a quelques divergences entre les débits observés et calculés à partir du maximum et durant la décrue. L'écart absolu reste toujours inférieur à 0,40 m<sup>3</sup>/s, l'écart relatif approche de 20 % en décrue mais ne dépasse pas 10 % autour du maximum.

On peut considérer de tels écarts comme tout à fait admissibles étant donné que :

- le hyétogramme moyen n'est pas une fidèle et précise image de la pluie sur le bassin,
- la loi de variation de la capacité Gam d'absorption est une approximation sommaire.

COMPOSITION DES HYDROGRAMMES UNITAIRES (débits en m<sup>3</sup>/s)

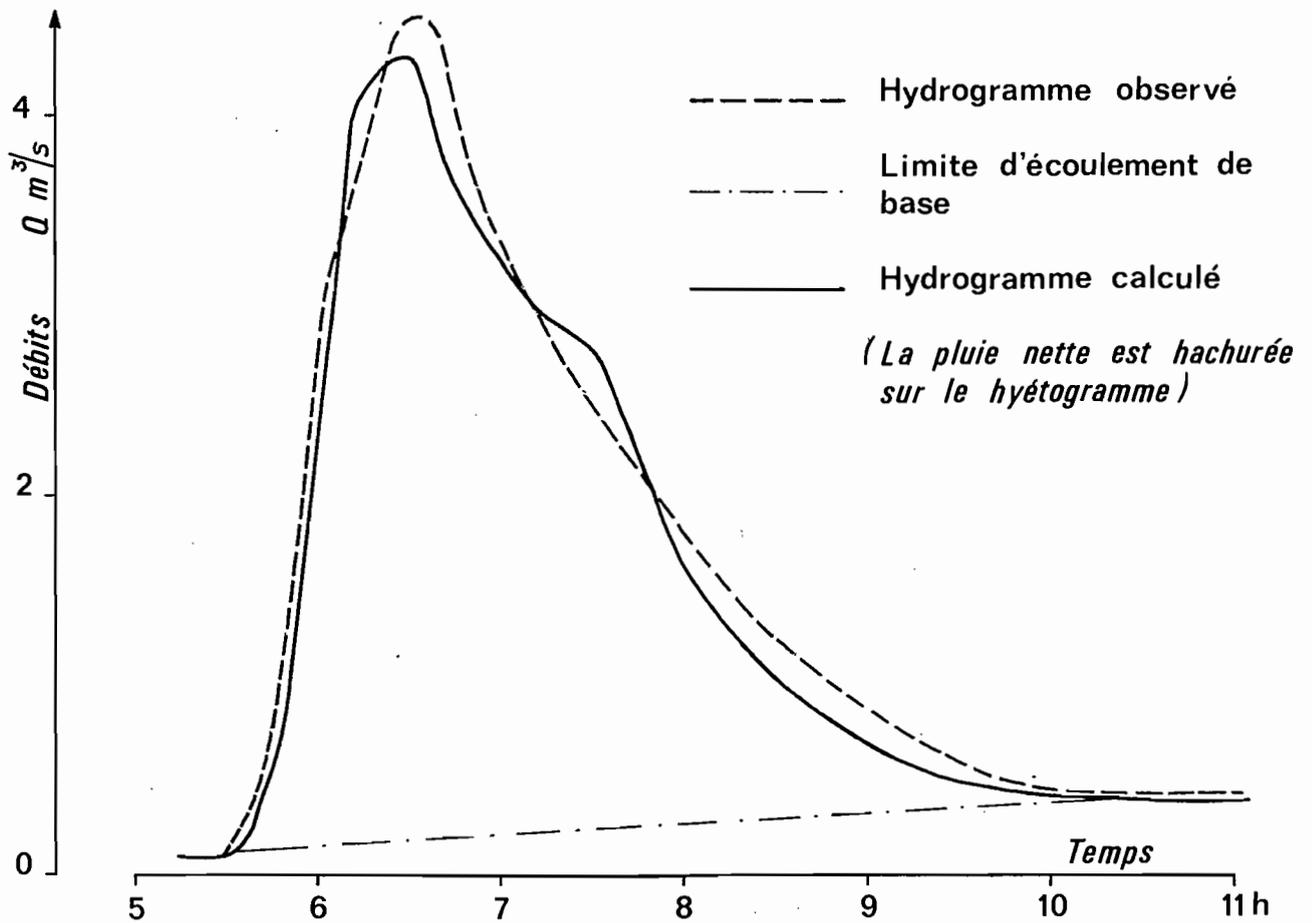
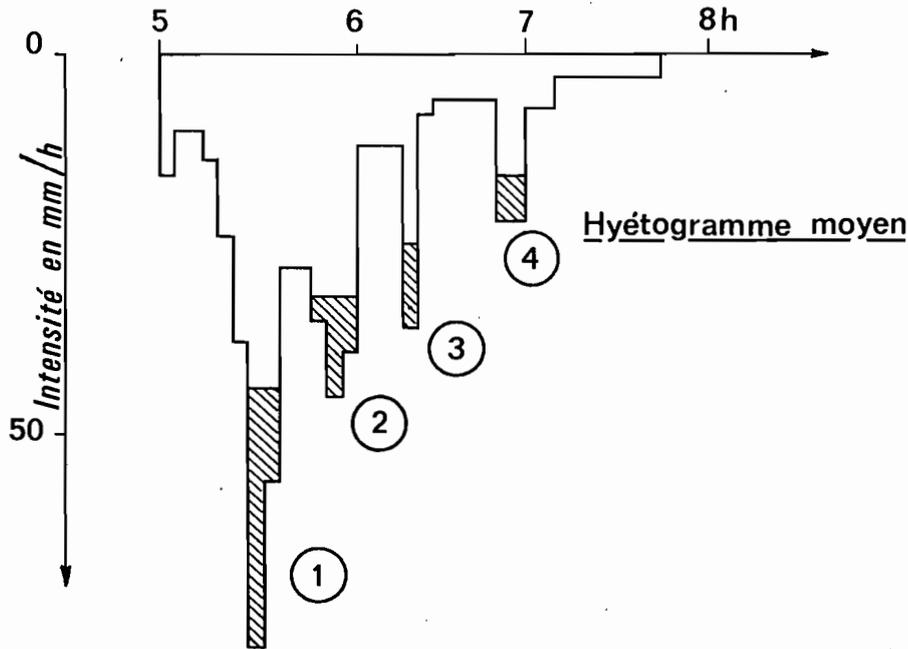
POUR LA RECONSTITUTION D'UNE CRUE COMPLEXE à KORHOGO

Temps (minutes)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160
H n° 1	0	0,19	0,77	2,12	3,40	2,97	2,13	1,93	1,47	1,20	1,00	0,85	0,66	0,53	0,46	0,39	0,31
H n° 2			0	0,09	0,38	1,05	1,67	1,47	1,20	0,95	0,72	0,59	0,50	0,42	0,32	0,26	0,23
H n° 3						0	0,06	0,22	0,60	0,97	0,85	0,69	0,55	0,42	0,34	0,29	0,24
H n° 4									0	0,05	0,20	0,55	0,88	0,77	0,63	0,50	0,38
Total ruisselé	0	0,19	0,77	2,21	3,78	4,02	4,16	3,62	3,27	3,17	2,77	2,68	2,59	2,14	1,75	1,44	1,16
Débit de base	0,10	0,10	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19	0,20	0,21	0,22	0,23	0,24	0,25
Débit global	0,10	0,29	0,88	2,33	3,91	4,16	4,31	3,78	3,44	3,35	2,96	2,88	2,80	2,36	1,98	1,68	1,41

Temps (minutes)	170	180	190	200	210	220	230	240	250	260	270	280	290	300	310	320
H n° 1	0,23	0,19	0,15	0,12	0,08	0,06	0,04	0								
H n° 2	0,19	0,15	0,11	0,10	0,08	0,06	0,04	0,03	0,02	0						
H n° 3	0,19	0,16	0,13	0,11	0,09	0,07	0,06	0,04	0,03	0,02	0,01	0,01	0			
H n° 4	0,31	0,26	0,22	0,17	0,14	0,12	0,10	0,08	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01	0,01	0
Total ruisselé	0,92	0,76	0,61	0,50	0,39	0,31	0,24	0,15	0,11	0,07	0,05	0,04	0,02	0,01	0,01	0
Débit de base	0,26	0,27	0,28	0,29	0,30	0,31	0,32	0,33	0,34	0,35	0,36	0,37	0,38	0,39	0,40	0,40
Débit global	1,18	1,03	0,89	0,79	0,69	0,62	0,56	0,48	0,45	0,42	0,41	0,41	0,40	0,40	0,41	0,40



# Reconstitution de la crue issue d'une averse complexe sur le bassin de KORHOGO



EXERCICE IX - ESTIMATION DE LA CRUE DECENNALE DE LA CRIQUE VIRGILE

La précipitation ponctuelle de récurrence décennale en 24 heures dans la région de la crique VIRGILE a été évaluée à 175 mm. La hauteur moyenne correspondante sur le bassin de 7,6 km<sup>2</sup> est ainsi égale à 175 x 0,95 soit 166 mm. La pluie utile ne représente que 93 % de cette pluie moyenne soit 154 mm.

Le schéma de répartition dans le temps de cette pluie utile, sur 8 heures, est le suivant :

13 %	durant les deux premières heures,	soit 20 mm
54,6 %	" " deux heures suivantes,	soit 84 mm
22,7 %	" " deux heures suivantes,	soit 35 mm
9,7 %	" " deux dernières heures,	soit 15 mm

Sachant que l'intensité, faute de mieux, a été supposée constante durant ces quatre tranches de deux heures, on peut dessiner le hyétogramme de la pluie utile (graphe 12) qui est précédé et suivi de phases à faibles intensités (d'un total de 171,5 - 154, soit 17,5 mm) de durée inconnue.

Sur ce hyétogramme de la pluie utile, on pourra procéder à la détermination de la pluie nette, après calcul de la capacité d'absorption Cam pour chaque tranche horaire : en supposant que la pluie utile coïncide avec la pluie efficace, on peut écrire :

$$P_u = P_n + Cam$$

L'origine du calcul de Cam est pris 60 minutes avant le début de la pluie utile ; le centre de la première tranche horaire est donc situé 90 minutes après ce temps origine  $t_0$ , le centre de la deuxième tranche horaire 150 minutes après ... etc ...

Avant de développer cette série de calcul, il faut déterminer les paramètres a et b de l'équation donnant Cam :

$$\log Cam = b + a \log (t + 60)$$

sachant que  $Cam = 20 \text{ mm/h}$  lorsque  $t = 0$

On a aussi  $b = \log 20 - a \log (60)$  [1]

Il faut maintenant se fixer par exemple une valeur inférieure de Cam en fin d'averse. Ce choix permettra de calculer a et b. Ensuite on déterminera pas à pas les valeurs de la pluie nette et l'on comparera le total correspondant à la lame ruisselée. Si le total de pluie nette est inférieur à la lame ruisselée, c'est que la décroissance de Cam est trop lente et que la valeur arbitrairement choisie est trop forte. Après quelques tâtonnements, on peut arriver à un résultat correct.

On commence par calculer la lame ruisselée  $l_r$ .

L'utilisation du graphe 21 du chapitre 9 (§ 3) permet de calculer la lame ruisselée totale. La première courbe donne pour  $P = 166$  mm une valeur de  $K_r = 65\%$  tandis que la seconde pour  $I_S = 34$  mm/j conseille un accroissement  $+ \Delta K_r$  égale à  $5\%$ . Au total donc le coefficient de ruissellement de la pluie décennale est de  $70\%$ ; cela nous donne une lame ruisselée globale de  $166 \times 0,70 = 116$  mm.

Les tâtonnements évoqués précédemment aboutissent à  $P_u = l_r = 116$  mm si l'on choisit  $C_{am}$  égal environ à  $2$  mm/h après  $8$  heures de pluie. On a dans ce cas :

$$\log 2 = b + a \log 540 \quad [2]$$

La résolution des équations [1] et [2] donne :

$$\log C_{am} = 3,16 - 1,05 \log (t + 60)$$

en ne gardant que trois chiffres significatifs le long des calculs, ce qui est largement suffisant ici.

Avec cette équation, on peut calculer  $C_{am}$  et  $P_u$  par tranches horaires, comme le montre le tableau ci-dessous :

$I_u$ (mm/h)	Intervalle depuis $t_0$ (min.)	$C_{am}$ (mm/h)	$P_u$ (mm)
10	90	12,9	-
10	150	8,1	1,9
42	210	5,2	36,8
42	270	4,1	37,9
17,5	330	3,3	14,2
17,5	390	2,8	14,7
7,5	450	2,4	5,1
7,5	510	2,1	5,4
154,-	mm		116,- mm

On constate ainsi que la pluie efficace ne dure que  $7$  heures, la première heure de la pluie utile ayant une intensité  $- 10$  mm/h - inférieure à la  $C_{am} = 12,9$  mm/h -

On a donc sept valeurs horaires de lames ruisselées qui vont se transformer en sept hydrogrammes unitaires à déduire de l'hydrogramme médian par proportionnalité (celui-ci est donné dans le texte 9.3. pour  $l_r = 10$  mm) entre lames ruisselées; les hydrogrammes unitaires sont ensuite composés, décalés de une heure entre eux.

Si l'on garde comme origine des temps  $t_0$ , c'est-à-dire un instant survenu une heure avant le début de la pluie utile, la pluie efficace et par conséquent l'hydrogramme de crue commencent deux heures après.

Le tableau joint intitulé "Composition de la crue décennale de la Crique VIRGILE" montre le détail du calcul et de la composition des sept hydrogrammes unitaires. Le graphe 12 représente également cette composition.

Pour aboutir au résultat final, il faut ajouter à l'hydrogramme de ruissellement ainsi calculé le débit de base sensé croître de 0,2 m<sup>3</sup>/s par heure à partir de 1 m<sup>3</sup>/s. Le pas de temps de calcul de l'hydrogramme étant de 1/2 heure, on a des incréments de 0,1 m<sup>3</sup>/s du débit de base et celui-ci passe de 1 à 3,9 m<sup>3</sup>/s en fin de crue.

La crue décennale dure 14 heures et demie et son maximum se produit quatre heures et demie après le début du ruissellement - 6 heures et demie après le temps  $t_0$  - en coïncidence avec le maximum du troisième hydrogramme unitaire - celui de la deuxième tranche horaire à 42 mm de pluie utile -

Le débit maximal global est de 46,2 m<sup>3</sup>/s

Dans la pratique, après ce calcul, il reste à l'hydrologue à vérifier que :

- un tel débit maximal est compatible avec des possibilités d'écoulement du thalweg principal (absence de débordements dans le lit majeur qui réduiraient la pointe de crue),
- une telle crue est en harmonie avec celles qui ont été observées et particulièrement les plus fortes parmi elles.

COMPOSITION DE LA CRUE DECENNALE DE LA CRIQUE VIRGILE

Temps (heures)	2	2 1/2	3	3 1/2	4	4 1/2	5	5 1/2	6	6 1/2	7	7 1/2	8	8 1/2	9	9 1/2
1° HU	0	0,11	0,34	0,68	0,93	1,05	0,97	0,88	0,74	0,61	0,49	0,38	0,27	0,19	0,13	0,07
2° HU			0	2,20	6,62	13,20	18,00	20,20	18,80	16,90	14,40	11,80	9,55	7,35	5,15	3,68
3° HU					0	2,27	6,83	13,60	18,60	20,80	19,30	17,40	14,80	12,10	9,85	7,59
4° HU						0	0,85		2,56	5,11	6,96	7,82	7,24	6,53	5,53	4,54
5° HU									0	0,88	2,65	5,30	7,21	8,10	7,50	6,76
6° HU											0	0,30	0,92	1,83	2,50	2,80
7° HU													0	0,32	0,97	1,94
Total (m3/s)	0	0,11	0,34	2,88	7,55	16,52	25,80	35,53	40,70	44,30	43,80	42,90	39,99	36,42	31,63	27,38
Débit de base	1	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50	1,60	1,70	1,80	1,90	2,00	2,10	2,20	2,30	2,40	2,50
Total écoulé	1	1,21	1,54	4,18	8,95	18,02	27,40	37,23	42,50	46,20	45,80	45,00	42,19	38,72	34,03	29,80

Temps (heures)	10	10 1/2	11	11 1/2	12	12 1/2	13	13 1/2	14	14 1/2	15	15 1/2	16	16 1/2
1° HU	0,04	0												
2° HU	2,58	1,47	0,74	0										
3° HU	5,31	3,79	2,65	1,52	0,53	0								
4° HU	3,69	2,84	1,99	1,42	0,99	0,57	0,28	0						
5° HU	5,73	4,71	3,82	2,94	2,06	1,47	1,03	0,59	0,29	0				
6° HU	2,60	2,34	1,99	1,63	1,32	1,02	0,71	0,51	0,36	0,20	0,10	0		
7° HU	2,64	2,97	2,75	2,48	2,10	1,72	1,40	1,08	0,76	0,54	0,38	0,22	0,11	0
Total (m3/s)	23,59	18,12	13,94	9,99	7,00	4,78	3,42	2,18	1,41	0,74	0,48	0,22	0,11	0
Débit de base	2,60	2,70	2,80	2,90	3,00	3,10	3,20	3,30	3,40	3,50	3,60	3,70	3,80	3,90
Total écoulé	26,19	20,82	16,74	12,89	10,00	7,88	6,62	5,48	4,81	4,24	4,08	3,92	3,91	3,90

0 5 10 Temps

Intensité mm/h  
(Cam)

Hyétogramme moyen estimé

# Composition de la crue décennale de la crique VIRGILE

--- Cam  
/// Pluie nette

40  
30  
20  
10  
0  
Débits  
m<sup>3</sup>/s

— Crue décennale (sans débit de base)  
— Hydrogrammes unitaires

1 6 11 Temps 16h

EXERCICE X - CALCUL DES PARAMETRES PHYSIQUES ET MORPHOMETRIQUES DU BASSIN DE BIDJIR (TCHAD)

Le graphique 13 représente le bassin de BIDJIR tel qu'il était dessiné sur le graphe 26 du chapitre X ; on y a ajouté le tracé du périmètre stylisé et la hiérarchisation en ordres des thalwegs du chevelu hydrographique.

1. Le bassin naturel ne présentait pas de limites très ondulées, aussi la stylisation du périmètre n'introduit-elle que peu de variation.

Le périmètre stylisé a une longueur de 34,2 km.

La superficie drainée étant de 74 km<sup>2</sup>, on a un indice de compacité

$$C = 0,28 \times 34,2 \times \frac{1}{\sqrt{74}} = 1,12$$

2. Cette valeur de l'indice de compacité correspond à la borne inférieure admise pour le calcul d'un rectangle équivalent, et dans ce cas le bassin est assimilable à un carré.

L'emploi du graphe 23 du chapitre X est inutile. La longueur du rectangle équivalent est dans ce cas égal à  $\sqrt{74}$ , soit à 8,6 km.

3. Pour calculer les indices de pente, on part de la répartition hypsométrique que l'on transforme pour avoir les termes  $a_i$  et  $d_i$  de l'équation (32) du chapitre X, à savoir la fraction  $a_i \%$  de la surface du bassin comprise entre deux courbes de niveau voisines distantes de  $d_i$ .

Le tableau suivant récapitule les calculs :

Altitudes (m)	Fraction $a_i$ %	Dénivelée $d_i$ (m)	$a_i \cdot d_i$	$(a_i d_i)^{1/2}$
475 - 480	0,0068	5	0,0340	0,18
480 - 490	0,0395	10	0,3950	0,63
490 - 500	0,0741	10	0,7410	0,86
500 - 510	0,0743	10	0,7430	0,86
510 - 520	0,0750	10	0,7500	0,87
520 - 530	0,1460	10	1,4600	1,21
530 - 540	0,2148	10	2,1480	1,46
540 - 550	0,1250	10	1,2500	1,12
550 - 560	0,1000	10	0,1000	1,00
560 - 570	0,0918	10	0,9180	0,95
570 - 580	0,0473	10	0,4730	0,69
580 - 590	0,0034	10	0,0340	0,18
590 - 600	0,0013	10	0,0130	0,11
600 - 760	<u>0,0007</u>	160	0,1120	<u>0,33</u>
TOTAL	<u>1,0000</u>			<u>10,45</u>

La formule (33) permet le calcul de l'indice de pente  $I_p$

$$I_p = L^{-1/2} \cdot \sum_1^n \sqrt{a_i d_i}, \text{ avec } L \text{ et } d_i \text{ en mètres}$$

$$I_p = \frac{1}{\sqrt{8600}} \times 10,45 = 0,113$$

L'indice global  $I_G$  s'obtient à partir de la dénivelée utile. Si l'on trace sur papier millimétré l'altitude en fonction de l'aire drainée, exprimée en % cumulées (fraction  $a_i$  % cumulée) on peut sur la courbe hypsométrique reliant tous les points, estimer les altitudes au-dessus et en dessous desquelles la surface drainée est de 5 % de l'aire totale A. Ces altitudes sont respectivement 572 m et 492 m. La dénivelée utile est donc de 80 m.

$$\text{L'indice global } I_G = \frac{80}{8,6} = 9,3 \text{ m/km}$$

4. Le classement des thalwegs selon SCHUMM est présenté sur le graphe 13. Le tableau suivant récapitule le décompte des thalwegs par ordre et le résultat de la mesure des longueurs au curvimètre.

Ordre x	Nombre $N_x$	Longueur $L_x$	Longueur moyenne $\bar{l}_x$
1	214	131,5	0,615
2	51	47,5	0,931
3	15	31,5	2,10
4	5	11,2	2,24
5	1	6	6

La longueur totale des thalwegs du bassin  $\sum_1^5 L_x$  égale 227,7 km

La densité de drainage est de  $Dd = 227,7 / 74 = 3,08$

On a reporté sur le graphe 14 les deux séries de couples de valeurs.

$N_x$  et x d'une part ;  $\bar{l}_x$  et x d'autre part

L'alignement des points  $N_x$ , x n'est pas mauvais, mais il n'est pas parfait. Si l'on trace la droite d'ajustement sur les points intermédiaires, soit en négligeant ceux des ordres extrêmes 1 et 5, on voit que cette droite passera en dessous du point  $N_1 = 214$ . Or il est anormal que le nombre des thalwegs d'ordre 1 soit surestimé. On doit donc s'appuyer sur ce point  $N_1$  qui s'aligne d'ailleurs avec les points  $N_2$  et  $N_3$ . Cet alignement laisse en dessous le point  $N_5$  (normal) et au dessus le point  $N_4$  ; il n'est pas absurde qu'étant donné la petitesse relative du cours du thalweg supérieur, le nombre observé de thalwegs d'ordre 4 soit un peu supérieur à la règle d'alignement. On peut donc retenir l'alignement  $N_1 - N_2 - N_3$ .

Il nous donne pour  $R_c$  sur deux modules logarithmiques (entre  $N = 100$  et  $N = 1$ ) une distance de 3,45 sur l'axe des  $x$  soit une valeur :

$$\log R_c = 2 / 3,45 = 0,58 . \text{ On en déduit que } R_c = 3,80$$

Pour les couples  $\bar{l}_x$ ,  $x$  l'alignement est évidemment moins bon.

On s'inspire des remarques faites lors du tracé de la droite du rapport de confluence : comme  $N_4$  est un peu excessif, la longueur moyenne  $\bar{l}_4$  sera un peu faible. On conseille donc un tracé au mieux au milieu des points en tenant plus compte des autres valeurs que de  $\bar{l}_4$ . Le tracé retenu donne alors :

$$\log R_1 = 2 / 8,4 = 0,238$$

Le rapport de longueur vaut ainsi 1,73.

Ces résultats sont ceux que nous avons calculé et estimé. Il est possible que d'autres opérateurs arrivent à des chiffres quelque peu différents. Les possibilités de dispersion sont relatives tout d'abord au périmètre stylisé et en conséquence aux valeurs qui en découlent directement ou non : indice de compacité, longueur du rectangle équivalent et indices de pente. Cette dispersion peut ne pas être faible ; l'indice de compacité étant proche de sa valeur minimale théorique 1,12, l'erreur sur la longueur  $L$  du rectangle équivalent tendra vers son maximum, soit  $\pm 23 \%$ . Seule cette erreur se répercute sur les valeurs des indices de pente puisque la répartition hypsométrique est donnée, cela conduit à  $\pm 23 \%$  également sur  $I_G$  et  $\pm 11,5 \%$  sur  $I_p$  (il dépend de  $\sqrt{L}$ ).

Les résultats obtenus seraient douteux s'ils sortaient des intervalles suivants :

$L$	$=$	8,6	$\pm$	23 %	soit	8,6	$\pm$	2 km
$I_p$	$=$	0,113	$\pm$	11,5 %	soit	0,113	$\pm$	0,013
$I_G$	$=$	9,3	$\pm$	23 %	soit	9,3	$\pm$	2,1m/km

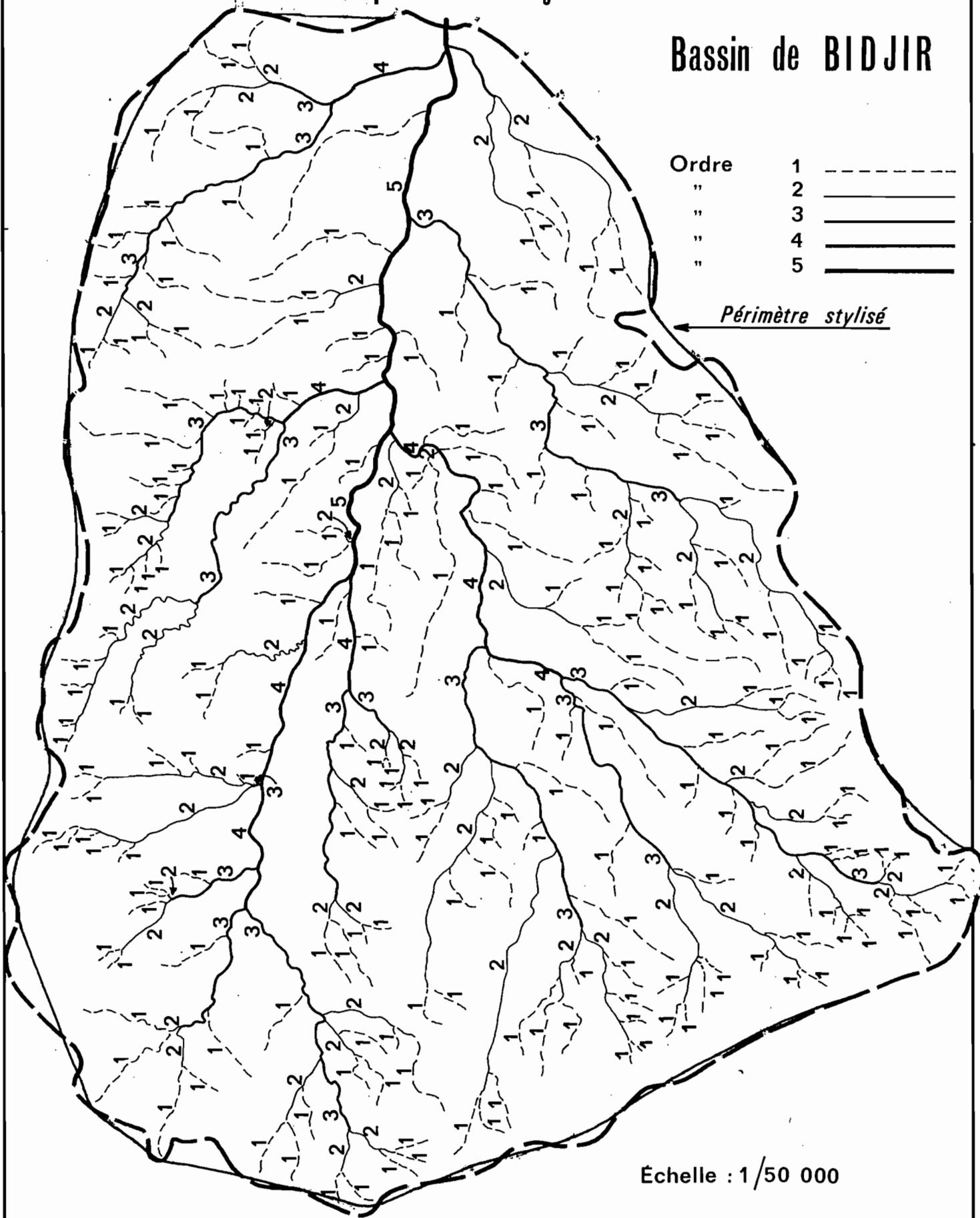
Une autre source de dispersion, plus grande, proviendrait d'une mesure différente des longueurs cumulées  $L_x$  des thalwegs. La densité de drainage et le rapport de longueur en  $x$  seraient altérés.

L'erreur sur la somme  $\sum_1^5 L_x$  est au maximum de 5 % ; c'est la même erreur qui est à craindre sur  $Dd$ , la surface  $A$  étant donnée, à savoir  $3,08 \pm 0,15$ .

Mis à part les incertitudes sur les alignements, il n'y a pas d'erreur à craindre sur le calcul du rapport de confluence ; sur le rapport de longueur  $R_1$  une erreur de  $\pm 10 \%$  est admissible, à savoir  $1,73 \pm 0,17$ .

# Chevelu hydrographique classé selon Schumm et perimètre stylisé

## Bassin de BIDJIR



Échelle : 1/50 000

# Calcul des indices morphométriques du bassin de BIDJIR

