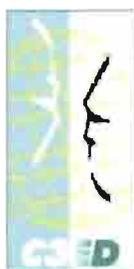


# **Critique de l'Indicateur de Pauvreté Humaine du PNUD et proposition d'un Indice Synthétique de la Pauvreté Humaine (ISPH)**

PAR

**JEAN-PAUL MINVIELLE\* & XAVIER BRY\*\***

**\*Economiste, C3ED/EGER (UMR No.63, IRD/UVSQ), \*\*Statisticien,**



*\*Centre d'Économie et d'Éthique pour l'Environnement et le Développement*

Adresse: C3ED, Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines  
47 boulevard Vauban, 78047 Guyancourt cedex France.  
Tel: +33 1 39 25 53 75 (C3ED Secrétariat) Fax: +33 1 39 25 53 00  
Email: [jeanpaul.minvielle@free.fr](mailto:jeanpaul.minvielle@free.fr) Website: <http://www.c3ed.uvsq.fr>

*\*\*Ecole Nationale d'Économie Appliquée*

Route de Ouakam, Dakar, SENEGAL

## **Résumé**

L'Indicateur de Pauvreté Humaine du PNUD a pour ambition de synthétiser dans un indicateur unique la complexité de la pauvreté humaine. Cependant on démontre que, dans les cas où certains de ses composants ont des valeurs nominales nettement plus élevées ou bien des intervalles de variation nettement plus importants que les autres, ils peuvent «absorber» l'essentiel de l'indicateur, qui perd alors de ses qualités de synthèse. A partir du cas du Sénégal, cet article démontre cette faiblesse de l'IPH et propose la formulation d'un Indice Synthétique de Pauvreté Humaine (ISPH) qui préserve, dans tous les cas de figure, les qualités requises de synthèse entre les différents composants. Un autre avantage de ce nouvel indicateur est qu'il est conçu comme un indice dont les variations se déterminent par rapport à une valeur de référence de 1.

**Mots-clés :** Pauvreté, pauvreté humaine, indicateur de pauvreté humaine, méthodes statistiques, indicateurs synthétiques, Sénégal, Afrique

## **Abstract**

The UNDP Human Poverty Index is built as a synthesis of different components of human poverty. Actually one can observe that, if one component has a nominal value or a variation interval much higher than the others, it then can "catch" the index. On the basis of data from Senegal, we analyse this constraint and propose a new index with a better synthesizing ability : the Synthetic Human Poverty Index. For an easier understanding, this index is built to vary around a reference value of 1.

**Keywords :** Poverty, human poverty, human poverty index, statistical methods, synthetics indexes, Senegal, Africa

<b><u>1</u></b>	<b><u>LA PAUVRETÉ AU SÉNÉGAL : MESURE PAR L'INDICATEUR DE PAUVRETÉ HUMAINE</u></b>	<b>4</b>
1.1	<u>FORMULE DE L'IPH</u>	4
1.2	<u>ANALYSE CRITIQUE DES RÉSULTATS OBTENUS AU SÉNÉGAL</u>	6
<b><u>2</u></b>	<b><u>CONSIDÉRATIONS MÉTHODOLOGIQUES POUR L'ÉLABORATION D'UN NOUVEL INDICE SYNTHÉTIQUE</u></b>	<b>9</b>
2.1	<u>CADRE GÉNÉRAL DE LA RÉFLEXION MÉTHODOLOGIQUE</u>	9
2.1.1	<u>Problème posé</u>	9
2.1.2	<u>Contraintes a priori</u>	10
2.1.3	<u>Normalisation préalable des composants</u>	10
2.2	<u>FORMULE D'AGRÉGATION GÉNÉRALE</u>	12
2.2.1	<u>Comportement selon les valeurs de a</u>	12
2.2.2	<u>Comportement général</u>	14
2.2.3	<u>Une nécessaire normalisation des composants</u>	15
<b><u>3</u></b>	<b><u>PROPOSITIONS D'INDICES SYNTHÉTIQUES ALTERNATIFS</u></b>	<b>16</b>
3.1	<u>L'INDICE SYNTHÉTIQUE DE PAUVRETÉ HUMAINE : ISPH</u>	16
3.1.1	<u>Formule</u>	16
3.1.2	<u>Comportement relativement à la situation de référence</u>	16
3.1.3	<u>Comportement aux bornes</u>	17
3.2	<u>L'INDICE SYNTHÉTIQUE DE PAUVRETÉ HUMAINE HIÉRARCHIQUE : ISP2H</u>	18
3.2.1	<u>Formule</u>	18
3.2.2	<u>Elasticité par rapport aux composants</u>	19
3.2.3	<u>Comportement relativement à la situation de référence</u>	19
3.2.4	<u>Comportement aux bornes</u>	20
<b><u>4</u></b>	<b><u>APPLICATION AU CAS DU SÉNÉGAL</u></b>	<b>21</b>
<b><u>5</u></b>	<b><u>CONCLUSION</u></b>	<b>23</b>

# 1. La pauvreté au Sénégal : mesure par l'Indicateur de Pauvreté Humaine

## 1.1 Formule de l'IPH

L'IPH intègre, dans sa composition, cinq variables relevant de trois domaines différents (PNUD, 1997) :

- Santé : Les déficiences en termes de santé sont évaluées par la probabilité de décéder avant l'âge de 40 ans, indicateur censé synthétiser les carences en ce domaine.
- Instruction : Les déficiences en termes d'instruction sont mesurées par le pourcentage de la population âgée de plus de 15 ans frappée par l'analphabétisme.
- Conditions de vie<sup>1</sup> : Les déficiences en termes de conditions de vie sont évaluées par le calcul d'un sous-indicateur synthétique intégrant trois facteurs représentant trois dimensions de la pauvreté :
  - l'accès à l'eau potable, évalué par le pourcentage de la population n'ayant pas accès à une source d'eau considérée comme potable ;
  - l'accès aux soins de santé, évalué par le pourcentage de la population n'ayant pas accès aux services de santé de base ;
  - la qualité de l'alimentation des enfants évaluée par le pourcentage d'enfants mal nourris.

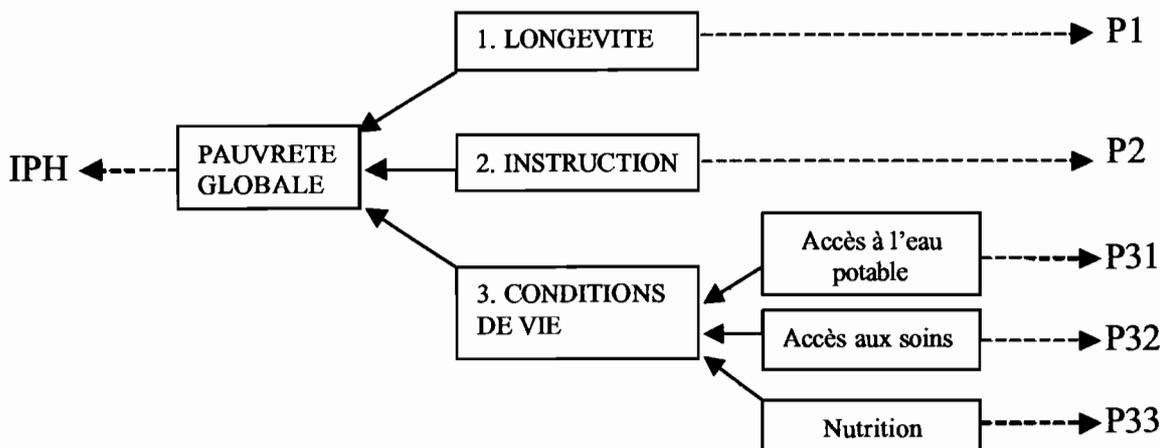
Du point de vue méthodologique l'Indicateur de Pauvreté Humaine, tel que défini par le PNUD, accorde théoriquement la même pondération aux trois dimensions de la pauvreté retenues.

---

<sup>1</sup> La dénomination « Dénouement économique » retenue par le PNUD pour ce composant ne nous paraissant pas particulièrement bien adaptée, nous lui avons préféré celle de « Conditions de vie » qui nous paraît plus proche des réalités prises en compte.

**Schéma récapitulatif des dimensions théoriques de l'IPH**

(les flèches en pointillé signifient : « est mesuré par », et les pleines : « contribue à »)



La formule de calcul de l'IPH est la suivante :  $IPH = \left(\frac{1}{3}(P1^3 + P2^3 + P3^3)\right)^{\frac{1}{3}}$ , où  $P3 = \frac{P31 + P32 + P33}{3}$ .

L'examen approfondi de l'IPH montre que son comportement par rapport aux valeurs relatives prises par chacun de ses composants n'est pas satisfaisant par rapport aux critères retenus pour sa signification.

En effet, si nous calculons l'élasticité de l'IPH par rapport à l'un des composants P1, P2 ou P3 :

$$\frac{\partial \text{Log} I}{\partial \text{Log} P_m} = P_m \frac{\partial \text{Log} I}{\partial P_m} = P_m \frac{1}{3} \frac{3 P_m^2}{\sum_n P_n^3} = \frac{P_m^3}{\sum_n P_n^3}$$

on remarque alors que l'élasticité de l'indice par rapport à chacun de ses composant est d'autant plus forte que celui-ci a une valeur relativement plus élevée par rapport aux autres. En d'autres termes, plus la valeur nominale d'un composant sera élevée par rapport aux autres, plus l'indicateur se comportera de manière identique à ce composant particulier. Cette caractéristique, qui résulte de la formulation mathématique actuelle de l'IPH, pose un problème grave car les différents composants retenus ont des niveaux et des intervalles de variation qui ne sont pas *a priori* comparables : le pourcentage d'analphabètes peut théoriquement varier de 0 à 100, ce qui n'est pas le cas de la probabilité de décéder avant l'âge de 40 ans.

## 1.2 Analyse critique des résultats obtenus au Sénégal

Tableau 1 : la pauvreté humaine par département au Sénégal

Départements	% d'individus risquant de mourir avant 40 ans (P <sub>1</sub> )	% d'analphabètes chez les adultes de 15 ans et plus (P <sub>2</sub> )	% d'individus privés d'accès à l'eau potable (P <sub>31</sub> )	% d'individus privés d'accès aux services de santé publics (P <sub>32</sub> )	% d'insuffisance pondérale chez les enfants de 0 à 5 ans (P <sub>33</sub> )	Déficit de conditions de vie (P <sub>3</sub> )	IPH
	[1]	[2]	[2]	[2]	[3]	[4]	[5]
Dakar	15,1	28,1	1,6	1,1	9,5	4,1	20,5
Pikine	17,6	43,4	9,8	1,2	10,3	7,1	30,8
Rufisque	17,9	37,3	0,9	3,1	14,6	6,2	26,9
Bignona	24,8	57,1	89,8	2,5	23,0	38,4	44,1
Oussouye	31,2	66,6	99,0	6,4	14,2	40,2	50,7
Ziguinchor	21,1	49,5	81,9	5,0	16,3	34,4	38,5
Bambey	25,0	65,9	75,9	0,3	34,9	37,1	49,0
Diourbel	23,3	64,3	52,0	2,8	24,1	26,3	46,2
Mbacké	23,8	71,1	24,5	0,0	20,2	14,9	50,1
Dagana	19,5	52,2	34,0	0,1	27,7	20,6	37,5
Matam	23,4	72,7	82,6	6,5	29,4	39,5	53,5
Podor	23,0	68,6	69,8	0,0	27,5	32,4	49,7
Bakel	23,8	63,1	58,1	8,6	26,8	31,2	46,1
Kédougou	34,2	57,3	80,7	20,3	29,8	43,6	47,0
Tambacounda	26,9	64,3	84,8	12,4	24,5	40,6	49,0
Kaffrine	28,7	55,1	69,7	16,1	28,5	38,1	43,4
Kaolack	24,8	49,5	40,6	5,6	20,2	22,1	36,7
Nioro	27,0	59,7	82,3	6,1	27,6	38,7	45,9
Mbour	19,0	64,8	49,7	1,8	26,9	26,1	46,2
Thies	18,9	52,5	33,8	2,5	20,7	19,0	37,5
Tivaouane	20,8	62,3	71,1	0,5	22,5	31,3	45,5
Kebemer	20,0	69,5	26,0	0,0	24,1	16,7	48,8
Linguere	23,9	75,6	45,9	0,0	23,7	23,2	53,4
Louga	19,5	59,7	40,6	0,5	24,9	22,0	42,5
Fatick	26,9	75,7	78,0	0,4	21,9	33,4	54,7
Foundiougne	26,9	52,4	90,1	0,6	20,6	37,1	41,5
Gossas	23,8	69,2	33,3	0,0	20,6	18,0	48,9
Kolda	30,0	56,5	96,2	5,8	40,4	47,5	47,2
Sédhiou	29,3	55,8	85,2	9,5	38,7	44,4	45,7
Vélingara	30,6	57,2	99,0	0,0	21,3	40,4	45,5
SENEGAL	22,3	54,7	49,8	3,5	22,7	25,3	40,0

[1] Source : PNUD 97 et ESP 92 (DPS) (estimé à partir des PIB (Produit Intérieur Brut), le taux de mortalité infantile et les dépenses évaluées en incluant l'autoconsommation).

[2] source ESP 92 (DPS).

[3] source EDS III (DPS).

[4] P<sub>3</sub> est la moyenne simple de P<sub>31</sub>, P<sub>32</sub> et P<sub>33</sub>.

[5] IPH = Indicateur de Pauvreté Humaine :  $IPH = [(P_1^3 + P_2^3 + P_3^3) / 3]^{1/3}$  (l'IPH global est différent de la moyenne des IPH partiels).

Nous n'entrerons pas ici dans le détail des modalités de calculs qui nous ont permis d'évaluer les différents composants de l'IPH au Sénégal au niveau départemental, en particulier pour ce qui concerne la longévité, mesurée par la probabilité de décéder avant l'âge de 40 ans, que nous avons dû elle-même estimer à partir de certaines hypothèses méthodologiques, et nous focaliserons notre attention sur les seuls résultats obtenus.

La transcription de ces résultats sous la forme d'une carte établie à partir d'une typologie calculée par classification hiérarchique ascendante fournit une image du pays dont certaines caractéristiques sont difficilement explicables pour qui possède une certaine connaissance du terrain (cf. carte à la fin). Par exemple la concentration dans le quart nord-est des départements les plus pauvres ou bien la situation du département de Kédougou, classé au 19<sup>ème</sup> rang par l'IPH alors que le département de Mbacké se retrouve au 27<sup>ème</sup>.

Ces résultats conduisent à s'interroger sur la validité de l'hypothèse suivant laquelle l'IPH du PNUD accorderait *effectivement* un poids identique à chacun de ses composants, compte tenu du fait que ces trois variables que sont la longévité, l'analphabétisme et les conditions de vie ne présentent pas les mêmes caractéristiques en termes de distributions statistiques :

- leurs valeurs moyennes sont très différentes ;
- leurs intervalles de variation également.

Ainsi, il résulte *de facto* des modalités de calcul de l'IPH que ces différentes variables n'ont pas la même incidence sur l'indicateur final. Par ailleurs, ces écarts génèrent un problème d'intelligibilité du fait que les valeurs très élevées de certains composants ne sont pas le marqueur d'une plus grande pauvreté que les valeurs relativement plus basses de certains autres.

Ainsi, si l'on prend les résultats que nous avons obtenus concernant le Sénégal dans son ensemble, on constate des différences importantes :

Tableau 2 : Intervalles de variation des variables composant l'IPH

Variables	Valeur min.	Valeur max.	Etendue (max-min)	Moyenne
P1 : % d'individus risquant de mourir avant 40 ans	15,17	31,21	16,04	22,37
P2 : % d'analphabètes chez les adultes de 15 ans et plus	28,14	75,70	47,56	54,72
P31 : % d'individus privés d'eau potable	0,95	100	99,05	49,77
P32 : % d'individus privés de services de santé	0	20,29	20,29	3,51
P33 : % d'enfants mal nourris	9,54	40,35	30,81	22,72
P3 : Déficit de conditions de vie	4,10	47,45	43,35	25,33

Il en résulte que les composants dont les valeurs moyennes sont les plus élevées se voient, de fait, attribuer un poids plus important que ceux dont les valeurs sont les plus faibles. Parallèlement, les composants à très fort intervalle de variation ont un plus fort impact discriminant entre les départements que ceux dont l'intervalle est réduit. Ceci explique, dans le cas du Sénégal, le rôle prépondérant joué par l'analphabétisme dans les résultats de l'IPH. En effet, cette variable possède à la fois la valeur moyenne la plus élevée (deux fois supérieure au composant suivant, le déficit de conditions de vie) et l'intervalle de variation également le plus important (à l'exception du pourcentage de la population privée d'eau potable, mais dont le poids est réduit du fait qu'il n'est lui-même qu'un sous-composant de P3).

Ceci est statistiquement vérifié si l'on prend en considération les différentes corrélations existant entre l'IPH et ses composants.

Tableau 3 : Corrélations entre l'IPH et ses composants

	Corrélations			Corrélations de rang des départements		
	P1	P2	P3	P1	P2	P3
IPH	0,57	<b>0,96</b>	0,61	0,44	<b>0,94</b>	0,36

P1 : Probabilité de décéder avant l'âge de 40 ans

P2 : Pourcentage d'adultes analphabètes

P3 : Sous-indicateur synthétique

- Pourcentage d'individus n'ayant pas accès à l'eau potable
- Pourcentage d'enfants malnutris
- Pourcentage d'individus n'ayant pas accès aux services de santé

Ainsi, on constate que l'indice de corrélation du pourcentage d'adultes analphabètes avec l'IPH est très élevé (0,96) par rapport à ceux que l'on peut relever pour les deux autres composants (0,61 et 0,57). De même, si l'on effectue un classement des départements suivant l'IPH, on constate également une forte corrélation de rangs (0,94) avec le classement effectué sur la base du pourcentage d'adultes analphabètes, ce qui n'est pas non plus le cas des autres composants (0,44 et 0,36). Il en résulte que les différentes typologies des départements (allant de trois à six classes) obtenues à partir de l'IPH s'avèrent quasiment identiques à celles obtenues à partir du classement sur la base de l'analphabétisme, ce qui conduit à s'interroger sur la nécessité de recourir à un indicateur synthétique tel l'IPH si, en raison de sa méthodologie de calcul, il présente le risque d'être phagocyté par un seul de ses composants.

Un autre constat vient conforter cette analyse : les corrélations entre les composants sont relativement faibles (coefficient de 0,35 entre P1 et P3, de 0,38 entre P3 et P2) à l'exception de la corrélation entre P3 et P1 qui apparaît particulièrement élevée (coefficient de 0,82). Ceci semblerait indiquer l'existence d'une dimension forte de la pauvreté de type « sanitaire » (rappelons que P1 et P3 se rapportent respectivement à la longévité et aux conditions de vie). Or cette dimension importante de la pauvreté est masquée par les caractéristiques statistiques de la composante analphabétisme (P2) dont on peut dire qu'elle « s'approprie », *de facto*, l'indicateur.

A la suite de ce constat, il convient dès lors de s'interroger sur la possibilité de concevoir un nouvel indicateur synthétique<sup>2</sup> respectant mieux cette condition d'égalité de poids des composants.

## **2. Considérations méthodologiques pour l'élaboration d'un nouvel indice synthétique**

### **2.1 Cadre général de la réflexion méthodologique**

#### **2.1.1 Problème posé**

On dispose de  $M$  variables  $P_1, \dots, P_m, \dots, P_M$  positives mesurant chacune un degré sur une dimension particulière d'un phénomène multidimensionnel, ici la pauvreté. Ces variables peuvent *a priori* être hétérogènes (non comparables, par exemple parce qu'elles possèdent des échelles de mesures

---

<sup>2</sup> Ou mieux : un indice, ce qui faciliterait les comparaisons par rapport à une situation prise comme situation de référence.

différentes). On imagine qu'il existe une variable latente qui puisse être interprétée comme un « degré global de pauvreté ». On désire ainsi calculer à partir de ces composants un indicateur synthétique  $I$  qui puisse prétendre à mesurer « correctement » le degré global de pauvreté .

### **2.1.2 Contraintes a priori**

Le raisonnement est bâti à partir de certaines hypothèses *a priori* sur les relations devant exister entre le degré global de pauvreté et chacun des composants, à savoir :

- le degré global de pauvreté croît avec chacune de ces composants ;
- la variation d'un composant peut *plus ou moins* compenser celle d'un autre composant dans la mesure finale globale ;
- l'importance de la variation du degré global de pauvreté du fait de la variation d'un seul de ses composants doit respecter certaines contraintes, telle que l'équité *a priori* entre composants.

Une telle information peut être utilisée comme contrainte permettant de dériver des formules particulières d'indice. Ici, on se contentera de l'utiliser comme critère d'évaluation et de comparaison entre, d'une part l'Indicateur de Pauvreté Humaine, tel qu'il a été formulé par le PNUD, d'autre part l'Indice Synthétique de Pauvreté Humaine tel que nous le proposons.

### **2.1.3 Normalisation préalable des composants**

La compensabilité d'un composant par un autre joue un rôle primordial dans l'évaluation du comportement d'un indicateur synthétique. Ceci implique deux contraintes : d'une part que intervalles de variation des composants amalgamés soient comparables, ce qui n'est pas le cas au départ quand les variables sont hétérogènes ; d'autre part que leurs niveaux (valeurs nominales) le soient également. Pour répondre à cette double contrainte, il est donc indispensable de normaliser les composants avant de les combiner afin de rendre leurs variations comparables.

Une telle normalisation peut être faite de multiples manières :

1- Chaque composant peut être remplacé par le rang de l'observation dans un classement par valeurs croissantes de la composante. Une telle normalisation est robuste par rapport au choix de l'échelle de mesure (invariance du rang par toute transformation strictement croissante de l'échelle). Toutefois, l'introduction d'une nouvelle observation remet en cause le calcul pour toutes les autres.

2- On peut imaginer une normalisation du type:  $P_m \longrightarrow \frac{P_m - R_m}{D_m}$ , où  $R_m$  et  $D_m$  sont respectivement un niveau et une dispersion de référence. Parmi les transformations de ce type, on notera :

- la transformation  $P \longrightarrow \frac{P - \text{Min}P}{\text{Max}P - \text{Min}P}$ , où  $\text{Min}P$  et  $\text{Max}P$  désignent respectivement les valeurs minimale et maximale de  $P$  sur l'ensemble des observations ou bien le minimum et le maximum théoriquement concevables. La composante normalisée a une valeur comprise entre 0 et 1, et ses variations sont exprimées en proportion de son étendue, réelle ou théorique. Si l'on utilise l'étendue réelle observée il peut être nécessaire, à l'introduction d'une nouvelle observation, de refaire les calculs pour toutes les autres.
- La transformation consistant à centrer (sur sa moyenne) et réduire (par son écart-type) chaque composante. Ici encore, l'introduction d'une nouvelle observation remet en cause le calcul pour toutes les autres.

Dans le cas général, on peut obtenir des valeurs négatives, ce qui pose des problèmes de calcul dans certaines des formules que l'on pourrait retenir. On peut toutefois imaginer prendre l'exponentielle de la variable centrée et réduite, mais alors les variations de la composante normalisée initiale deviennent les variations relatives de l'exponentielle, et il faut alors en tenir compte dans le comportement de l'indicateur synthétique.

3- On peut rapporter chaque composante  $P_m$  à un niveau de référence  $R_m$  :  $P_m \longrightarrow \frac{P_m}{R_m}$ . Une telle transformation a l'avantage de laisser inchangée la variation relative (en %) de la composante. Le niveau de référence peut être pris égal à la moyenne ou la médiane dans une optique de comparaison intra-échantillon, ou égal à une valeur étalon dans l'optique d'une comparaison universelle.

Le choix d'une méthode de normalisation sera effectué en fonction de la formule d'agrégation choisie pour le calcul de l'indicateur synthétique et de son comportement.

## 2.2 Formule d'agrégation générale

Considérons la formule suivante, dans laquelle  $a$  est un réel quelconque :

$$I_a = \left( \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (P_m)^a \right)^{\frac{1}{a}}$$

C'est la formule utilisée par l'IPH, sans normalisation préalable des composantes.

### 2.2.1 Comportement selon les valeurs de $a$

#### 2.2.1.1 Formules

Il est aisé de voir que :

- d'une part,  $I_a = \left( \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (P_m)^a \right)^{\frac{1}{a}} \underset{a \rightarrow -\infty}{\equiv} \left( \frac{1}{M} (\max_m P_m)^a \right)^{\frac{1}{a}} \xrightarrow{a \rightarrow -\infty} \max_m P_m$

- d'autre part,  $I_a = \left( \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (P_m)^a \right)^{\frac{1}{a}} \underset{a \rightarrow +\infty}{\equiv} \left( \frac{1}{M} (\min_m P_m)^a \right)^{\frac{1}{a}} \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} \min_m P_m$

- enfin, pour  $a = 1$  :  $I_a = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (P_m)$

#### 2.2.1.2 Interprétation

- $I = Max$  considère que le degré de pauvreté global est égal au degré de pauvreté partielle le plus élevé. Il correspond à une aversion maximale pour le risque : il suffit qu'un seul des composants affiche un mauvais résultat pour que l'on considère l'individu (au sens statistique du terme : personne, ménage, région, pays, etc.) comme pauvre.
- $I = Min$  considère que le degré de pauvreté global est égal au degré de pauvreté partielle le moins élevé. Contrairement au précédent, il suffit qu'un seul des composants affiche un bon résultat pour que l'on considère l'individu comme non pauvre.

- $I = \text{moyenne arithmétique}$  considère que le degré de pauvreté global est égal au degré de pauvreté partielle moyen.

Le comportement de ces indicateurs possède certaines particularités notables :

### 2.2.1.3 Compensabilité entre composants

Elle est nulle pour *Min* et *Max*. En effet, lorsque les composants ont des valeurs distinctes, et que l'on fait varier *infinitésimalement* l'un d'entre eux sans toucher aux autres (de sorte à ne pas modifier leur ordre), deux cas sont possibles :

- Ce composant n'était pas égal à  $I$ . Cette dernière valeur reste la même et l'ordre n'étant pas perturbé par la variation, l'indicateur reste inchangé.
- Ce composant était égal à  $I$ . L'indicateur subit donc exactement cette variation, mais elle n'est pas compensable par une variation infinitésimale d'un autre composant.

Elle est parfaite et constante pour la moyenne. En effet, la dérivée partielle de cette dernière par rapport à n'importe quelle composante est constante et égale à  $1/M$ .

### 2.2.1.4 Comportement aux bornes

➤ *Min* :

- *Min* est nul lorsque l'un des composants est nul = Propriété gênante.
- *Min* est infini lorsque tous les composants sont infinis = Propriété satisfaisante.

➤ *Max* :

- *Max* est nul lorsque tous les composants sont nuls = Propriété satisfaisante.
- *Max* est infini lorsque l'un au moins des composants est infini = Propriété acceptable.

➤ *Moyenne* :

- Elle est nulle si tous les composants partiels sont nuls = Propriété satisfaisante.
- Elle est infinie si un au moins des composants est infini = Propriété acceptable.

### 2.2.1.5 Puissance hiérarchique

Le problème posé par *Min* et *Max* est évidemment la non-compensabilité des composants, qui entraîne une grosse perte de pouvoir de hiérarchisation. Une même valeur de l'indicateur peut ainsi correspondre à des situations qui devraient pouvoir être hiérarchisées. On peut en donner des exemples pour trois composants (P1, P2, P3) :

- situation 1 : les deux triplets (P1, P2, P3) suivants ont le même *MinP* : (1, 1, 1) et (1, 9, 9). Pourtant, les situations décrites sont fondamentalement différentes et la situation du premier triplet est nettement préférable à celle du second.
- situation 2 : les deux triplets (P1, P2, P3) suivants ont le même *MaxP* : (1, 1, 9) et (9, 9, 9). Encore une fois, les situations décrites sont différentes et la situation du premier est préférable à celle du second.

Ces problèmes ne se posent pas dans le cas de la moyenne.

## 2.2.2 Comportement général

### 2.2.2.1 Dérivée partielle par rapport à un composant

On a :

$$\frac{\partial I}{\partial P_m} = \left( \frac{1}{M} \sum_n P_n^a \right)^{\frac{1}{a}} \frac{P_m^{a-1}}{\sum_n P_n^a}$$

Le résultat n'est pas simple, sauf lorsque  $a = 1$ , auquel cas on obtient  $1/M$  ( $I_1$  est la moyenne arithmétique).

On notera toutefois que si  $a$  n'est pas infini en valeur absolue,  $I$  est strictement croissant en fonction de chacun de ses composants. Il a donc une puissance hiérarchique entière.

### 2.2.2.2 Elasticité par rapport aux composants

$$\frac{\partial \text{Log} I}{\partial \text{Log} P_m} = P_m \frac{\partial \text{Log} I}{\partial P_m} = P_m \frac{1}{a} \frac{a P_m^{a-1}}{\sum_n P_n^a} = \frac{P_m^a}{\sum_n P_n^a}$$

L'élasticité de l'indicateur par rapport à un composant est égale à la part relative de ce composant (à l'exposant  $a$ ) dans la somme des composants (à l'exposant  $a$ ).

On note que lorsque  $a$  est positif (et plus il est élevé, plus le phénomène est accentué), l'élasticité de l'indice par rapport à son composant est d'autant plus importante que ce composant a une valeur élevée par rapport aux autres. Un tel comportement sera souhaité si l'on considère que la pauvreté globale doit être dominée, y compris sur le plan des variations, par son composant le plus fort (optique d'aversion maximale pour le risque).

Au contraire, lorsque  $a$  est négatif, et ce d'autant plus que sa valeur absolue est élevée, les variations de l'indice seront dominées par celles de son composant ayant la valeur la moins élevée.

### 2.2.3 Une nécessaire normalisation des composants

- La dépendance de l'élasticité au niveau du composant suppose impérativement que ces composants aient des niveaux qui puissent être comparés, ce qui implique une normalisation en niveau. De plus, si l'on veut conserver la même formule d'élasticité, il faut que la dérivée logarithmique du composant reste inchangée dans la normalisation. On choisira donc la formule 3 de normalisation :

$$P_m \longrightarrow P_m^* = \frac{P_m}{R_m}.$$

- Il n'est pas impossible d'utiliser une normalisation de type 1 (rangs) avec les inconvénients déjà cités (changement de référence implicite à l'introduction d'une nouvelle observation). Il n'est pas impossible non plus d'utiliser une normalisation de type 2, à condition de la compléter par une

exponentielle :  $P_m \longrightarrow P_m^* = e^{\frac{P_m - R_m}{D_m}}$ . Mais la formule de l'élasticité devient alors plus compliquée.

Les normalisations de types 1 et 2 ont un effet qui peut être considéré comme gênant sur la dépendance des variations de l'indice aux variations des composants. En effet, ces deux types de normalisations harmonisent les variabilités des composants et cette harmonisation peut aller jusqu'à

l'égalisation (la dispersion des rangs est constante, la variance d'un composant centrée réduite est toujours égale à 1). Or, les composants peuvent avoir des variabilités différentes, qui doivent avoir un impact proportionné sur les variations de l'indice. A la limite, si les variations d'un composant donné sont infinitésimales et sans importance (par exemple dues à une très légère imprécision dans la mesure), il n'y a pas de raison que ces variations comptent autant dans celle de l'indice que les fluctuations d'une composante très variable. De ce point de vue, la normalisation de type 3, qui respecte les variabilités relatives, s'avère préférable.

- Il est important de noter que, dans tous les cas où le composant normalisé vaut 1 lorsque  $P_m$  est égale à sa valeur de référence  $R_m$  (on dira qu'on est dans la situation de référence), l'indicateur synthétique vaut 1, et son élasticité par rapport à n'importe lequel de ses composants est égale à  $1/M$ . Elle est donc parfaitement équitable, au point de référence. Ce ne serait pas le cas si les composants n'étaient pas normalisés.

### 3. Propositions d'indices synthétiques alternatifs

#### 3.1 L'Indice Synthétique de Pauvreté Humaine : ISPH

Pour la construction de l'ISPH, nous avons utilisé la normalisation 3 de ses composants.

##### 3.1.1 Formule

$$I_a = \left( \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left( \frac{P_m}{R_m} \right)^a \right)^{\frac{1}{a}}$$

Nous appellerons cet indicateur **Indice Synthétique de Pauvreté Humaine : ISPH**.

##### 3.1.2 Comportement relativement à la situation de référence

- Si tous les composants sont égaux à leur valeur de référence, l'indice vaut 1.

- Plus généralement, si tous les composants valent  $k$  fois leur valeur de référence, l'indice vaut  $k$ . Ceci est une caractéristique facilitant son interprétation. En effet, dans une certaine mesure (sous réserve

que la compensabilité des composants traduise bien la réalité), le fait que l'indice ait une valeur  $k$  pourra être entendu comme : « l'entité évaluée est  $k$  fois plus pauvre que la situation de référence ». Cette caractéristique présente pour nous une qualité remarquable : **il s'agit bien là d'un véritable indice, et non plus d'un simple indicateur.**

### 3.1.3 Comportement aux bornes

#### ➤ $a < 0$ :

- Si tous les composants tendent vers 0 à la même vitesse, l'indice tend vers 0 à leur vitesse. Si tous tendent vers 0 mais que l'un d'entre eux le fait beaucoup moins vite que les autres, l'indice tendra vers 0 à sa vitesse. L'indice est donc principalement entraîné par la pauvreté partielle la moins forte.
- Si tous les composants normalisés tendent vers l'infini, l'indice tend vers l'infini.
- Si tous les composants normalisés tendent vers l'infini sauf un, l'indice tend vers une valeur *finie*. Il est donc entraîné par la pauvreté partielle la moins forte.

Ce comportement paraît assez mal adapté à la mesure de la pauvreté dans la mesure où il minimise l'impact des composants les plus forts.

#### ➤ $a > 0$ :

- Si tous les composants sont nuls, l'indice vaut 0.
- Si tous les composantes sont nuls, sauf un qui vaut  $p$  (valeur normalisée), l'indice vaudra  $\left(\frac{1}{M}\right)^{\frac{1}{a}} p$ . Il sera donc proportionnel au composant non nul. Le poids  $\left(\frac{1}{M}\right)^{\frac{1}{a}}$  de ce composant est d'autant plus proche de 1 que  $a$  est élevé.
- Si l'un des composants normalisés tend vers l'infini, l'indice tend vers l'infini.
- Si plusieurs des composants normalisés tendent vers l'infini, l'indice tend vers l'infini à la vitesse du composant le plus fort.

Ce comportement, dominé par celui de la pauvreté partielle la plus forte, semble mieux adapté à la mesure de la pauvreté dans la mesure où il attire l'attention sur ce à quoi il est urgent de remédier.

Toutefois, dans le cas extrême d'un composant infini, il peut être considéré comme gênant que la pauvreté globale soit considérée comme infinie dans la mesure où on ne peut plus faire la différence avec la situation dans laquelle plusieurs, voire tous les composants, sont infinis. Tout est affaire de point de vue. Mourir de faim sans rien dans les poches ou mourir de faim sur un tas d'or sont deux situations qui peuvent certes être considérées comme équivalentes. Mais être totalement analphabète et en bonne santé peut être préféré à être totalement analphabète et malade.

Nous allons donc envisager la normalisation du comportement à l'infini, afin de préserver une hiérarchisation possible entre les situations où un ou plusieurs composants croissent indéfiniment.

## 3.2 L'Indice Synthétique de Pauvreté Humaine Hiérarchique : ISP2H

On se propose ici de rendre l'ISPH totalement hiérarchique lorsque l'un de ses composants tend vers l'infini.

### 3.2.1 Formule

- Soit une fonction  $h$  strictement croissante de  $[0, +\infty[$  dans  $[0, 1[$ , avec  $h(0)=0$  et  $h(\infty)=1$ , et dont la dérivée soit finie partout. On suppose que les composants de l'indice sont normalisés, par exemple avec le procédé 3. On propose de calculer l'indicateur suivant :

$$J_a = h^{-1} \left( \left( \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (h(P_m^*))^a \right)^{\frac{1}{a}} \right)$$

Cet indicateur sera nommé **Indice Synthétique de Pauvreté Humaine Hiérarchique : ISP2H**

- On pourra par exemple utiliser les fonctions  $h$  suivantes :

$$h(x) = \left( \frac{1}{b} \right)^{\frac{1}{x}}, \text{ où } b > 1. \text{ On a alors : } h^{-1}(y) = \frac{-1}{\log_b y} ;$$

$$h(x) = 1 - b^{-x}, \text{ où } b > 1. \text{ On a alors : } h^{-1}(y) = -\log_b(1 - y)$$

### 3.2.2 Élasticité par rapport aux composants

On écrit :  $J = h^{-1}(I)$  avec  $I = I(\{h(P_m^*)\}_{m=1 \text{ à } M})$ .

$$\text{On a : } \frac{\partial \text{Log} J}{\partial \text{Log} P_m^*} = \frac{P_m^*}{J} \frac{dJ}{dI} \frac{\partial I}{\partial P_m^*} = \frac{P_m^*}{J} \frac{dJ}{dI} \frac{\partial I / I}{\partial h(P_m^*) / h(P_m^*)} \frac{I}{h(P_m^*)} \frac{\partial h(P_m^*)}{\partial P_m^*}$$

On montre alors sans difficulté que :

$$\frac{\partial \text{Log} J}{\partial \text{Log} P_m^*} = \frac{1}{J} \frac{h(J)}{h'(J)} \frac{(h(P_m^*))^a}{\sum_{n=1 \text{ à } M} (h(P_n^*))^a} \frac{P_m^* \cdot h'(P_m^*)}{h(P_m^*)}$$

On constate que la variation de l'élasticité avec le composant n'est plus aussi simple que pour l'ISPH *a priori*. Par exemple, lorsque  $a > 0$ , et à valeur de l'indicateur fixée, l'élasticité n'est plus nécessairement croissante avec la part relative de la composante dans l'ensemble des composants

(mesurée par  $\frac{(h(P_m^*))^a}{\sum_{n=1 \text{ à } M} (h(P_n^*))^a}$ ). En effet, le facteur  $\frac{P_m^* \cdot h'(P_m^*)}{h(P_m^*)}$  modifie l'évolution de l'élasticité. Une

étude plus précise est nécessaire selon la fonction  $h$  choisie.

### 3.2.3 Comportement relativement à la situation de référence

- Lorsque tous les composants sont égaux à leur valeur de référence, tous les  $P_m^*$  valent 1. Nous avons alors:  $J = h^{-1}(h(1)) = 1$

- Plus généralement, lorsque tous les composants sont égaux à  $k$  fois leur valeur de référence, tous les  $P_m^*$  valent  $k$ . Nous avons alors :  $J = h^{-1}(h(k)) = k$

On pourra donc, dans la mesure où la compensabilité des composants donnée par la formule est conforme à l'idée que l'on s'en fait dans la réalité, interpréter la valeur de  $J$  ainsi :  $J = k$  signifie que l'entité mesurée est  $k$  fois plus pauvre que la situation de référence.

- Dans la situation de référence, l'élasticité de l'indice par rapport à chacun de ses composants est équitable. En effet, dans ce cas, tous les  $P_m^*$  ainsi que  $J$  valent 1. La formule de l'élasticité se réduit donc ainsi :

$$\frac{\partial \text{Log} J}{\partial \text{Log} P_m^*} = \frac{\partial \text{Log} J}{\partial \text{Log} P_m^*} = \frac{h(1)}{1} \frac{1}{h'(1)} \frac{(h(1))^a}{\sum_{n=1}^M (h(1))^a} \frac{1 \cdot h'(1)}{h(1)} = \frac{(h(1))^a}{M(h(1))^a} = \frac{1}{M}$$

### 3.2.4 Comportement aux bornes

➤  $a < 0$  :

- Si tous les composants normalisés tendent vers 0 à la même vitesse, leur image par  $h$  en fait autant, et l'indice tend vers 0 à leur vitesse.
- Si tous tendent vers 0 mais que l'un d'entre eux le fait beaucoup plus vite que les autres, leurs images par  $h$  feront la même chose, et l'indice tendra vers 0 à sa vitesse. L'indice est donc entraîné par la pauvreté partielle la moins forte.

Cette propriété nous fera préférer le cas  $a > 0$ .

➤  $a > 0$  :

- Si tous les composants sont nuls, l'indice vaut 0.
- Si tous les composants normalisés sont nuls, sauf un qui vaut  $p$ , l'indice vaudra  $h^{-1}\left(\left(\frac{1}{M}\right)^{\frac{1}{a}} h(p)\right)$ . Plus la valeur de  $a$  est élevée, plus cette valeur est proche de  $p$ .

Quel que soit le signe de  $a$ , le comportement à l'infini est le même :

- Si tous les composants normalisés tendent vers l'infini, leur image par  $h$  tend vers 1.  $I$  tend donc vers 1, et  $J$  vers  $h^{-1}(1) = \infty$ .
- Si seule une partie des composants normalisés tendent vers l'infini, leurs images par  $h$  tendront vers 1, mais ceux des composants finis resteront strictement inférieurs à 1. On aura donc  $I < 1$ , et par conséquent  $J < \infty$ .

## 4. Application au cas du Sénégal

Nous avons regroupé dans le tableau 4 les résultats obtenus à partir de l'indicateur du PNUD (IPH) d'une part et de nos deux indices (ISPH et ISP2H) d'autre part. S'agissant d'un indicateur pour l'IPH et d'indices pour l'ISPH et l'ISP2H, les valeurs nominales ne peuvent pas être comparées. L'intérêt de ces approches ne réside pas dans ces valeurs nominales, mais dans les hiérarchies qu'elles établissent entre les différents départements. De ce point de vue, deux remarques essentielles peuvent être faites :

- Les classements obtenus à partir de l'ISPH et l'ISP2H sont très proches même si l'on constate des différences de rangs pour les départements de Mbacké, Bakel, Kaolack, Mbour, Linguère et Kébémér. En fait, ces différences sont généralement limitées à un seul rang (Bakel, Kaolack Mbour, Linguère et Kébémér) et à deux rangs dans le cas de Mbacké. Ces différences de rang résultent d'écartés très faibles (voire nul dans le cas de Bakel) dans les valeurs nominales des deux indicateurs. Le calcul du taux de corrélation de rangs entre l'ISPH et l'ISP2H donne d'ailleurs une valeur de 0,998.

- Par contre, les différences de hiérarchisation des départements entre l'IPH d'une part, l'ISPH et l'ISP2H d'autre part sont très importantes puisque, sur un effectif total de 30 départements, les écartés entre les classements établis par l'IPH et l'ISPH sont de 15 rangs pour Mbacké, 14 rangs pour Vélingara, 13 rangs pour Kébémér et Sédhiou, etc. Les coefficients de corrélation de rangs s'établissent ainsi à 0,58 entre l'IPH et l'ISPH, 0,56 entre l'IPH et l'ISP2H.

A la lumière de ces résultats, il apparaît que l'IPH d'une part, l'ISPH et l'ISP2H d'autre part dessinent deux images fondamentalement différentes de la pauvreté humaine au Sénégal.

Concernant les différences entre l'ISPH et l'ISP2H, elles sont suffisamment limitées pour nous permettre de ne retenir qu'une seule formulation.

**Compte tenu de sa plus grande simplicité de calcul et de la croissance de son élasticité avec la composante normalisée, nous ne retiendrons donc que l'ISPH.**

Tableau 4 : Comparaison des résultats obtenus par les différents indicateurs dans le cas des départements du Sénégal

Départements	Niveaux des indicateurs			Rangs des départements		
	IPH	ISPH	ISP2H	IPH	ISPH	ISP2H
Dakar	20,50	0,49	0,51	30	30	30
Pikine	30,84	0,64	0,64	28	28	28
Rufisque	26,88	0,61	0,61	29	29	29
Bignona	44,14	1,13	1,10	20	12	12
Oussouye	50,71	1,28	1,27	4	3	3
Ziguinchor	38,53	0,99	0,97	24	19	19
Bambey	48,99	1,15	1,14	7	11	11
Diourbel	46,22	0,99	0,99	13	18	18
Mbacke	50,08	0,98	0,92	5	20	22
Dagana	37,53	0,81	0,80	25	26	26
Matam	53,47	1,21	1,18	2	7	7
Podor	49,71	1,08	1,08	6	14	14
Bakel	46,15	1,04	1,04	15	16	15
Kedougou	47,00	1,34	1,29	12	1	1
Tamba	48,99	1,22	1,20	8	6	6
Kaffrine	43,44	1,16	1,14	21	10	10
Kaolack	36,65	0,89	0,88	27	24	23
Nioro du Rip	45,92	1,17	1,15	16	9	9
Mbour	46,22	0,94	0,93	14	22	21
Thies	37,53	0,79	0,78	26	27	27
Tivaouane	45,47	1,01	1,00	18	17	17
Kebemer	48,78	0,93	0,88	10	23	24
Linguere	53,43	1,06	1,02	3	15	16
Louga	42,50	0,87	0,86	22	25	25
Fatick	54,69	1,19	1,18	1	8	8
Foundiougne	41,50	1,11	1,09	23	13	13
Gossas	48,92	0,98	0,94	9	21	20
Kolda	47,16	1,33	1,27	11	2	2
Sedhiou	45,71	1,27	1,22	17	4	4
Velingara	45,46	1,23	1,21	19	5	5

Concernant les différences entre l'IPH et l'ISPH, se pose la question de la meilleure vraisemblance de l'une ou l'autre représentation de la pauvreté humaine au Sénégal. Cette vraisemblance peut être évaluée à partir de deux considérations :

- la comparaison des propriétés statistiques des deux indicateurs,
- la comparaison des deux représentations au regard de la connaissance que l'on peut avoir des réalités du pays.

Concernant les propriétés statistiques comparées de l'IPH et de l'ISPH, nous nous y sommes suffisamment étendus pour qu'il ne soit pas nécessaire d'y revenir, l'ISPH ayant été élaboré afin de pallier ce que nous considérons comme des insuffisances méthodologiques de l'IPH. Outre les propriétés déjà analysées, l'ISPH présente l'avantage de fonctionner comme un indice, ce qui facilite

d'autant son intelligibilité puisqu'il situe chaque département par rapport à la valeur de référence de 1,00 qui représente le degré de pauvreté associé à la valeur moyenne des différents composants.

Concernant la comparaison des deux représentations, la méthode empirique à la fois la plus simple et la plus parlante consiste à l'effectuer à partir des deux cartes de la pauvreté humaine au Sénégal dessinées par l'IPH et l'ISPH.

Au premier examen, les différences constatées apparaissent si importantes qu'il est difficile de croire qu'elles soient censées représenter le même phénomène.

Si l'on compare les deux représentations, il est flagrant que la carte dessinée par l'ISPH dessine une image a priori beaucoup plus conforme aux réalités du pays que ne le fait la carte de l'IPH. En effet, les départements classés comme ayant le plus grand déficit en termes de pauvreté humaine par l'IPH se situent principalement, à l'exception des départements de Tambacounda, Kolda et Oussouye, dans les parties nord-est et centre-ouest du pays, ce qui paraît peu vraisemblable, surtout pour ce qui concerne le centre-ouest qui regroupe le bassin arachidier. A l'inverse, l'ISPH situe les zones les plus défavorisées dans le sud et le sud-est du pays où se trouvent des départements, particulièrement celui de Kédougou, dont les déficits en infrastructures opérationnelles sont bien connus.

## 5. Conclusion

Parmi les différentes approches de la pauvreté, le calcul d'un indicateur synthétique tel l'IPH présente un grand intérêt dans la mesure où il peut prétendre synthétiser un certain nombre de caractéristiques du « bien-être » allant au delà de la seule approche monétaire. Cependant, nous l'avons vu, sa formulation classique ne permet pas de répondre de manière totalement satisfaisante à cette ambition. Du point de vue de ses propriétés mathématiques, l'indice synthétique que nous avons présenté ici permet de lever les réserves concernant l'inégalité *de fait* du poids des composants dans le calcul de l'IPH classique. Par ailleurs sa formulation sous la forme d'un indice, qui facilite le classement des individus par rapport à une situation de référence, nous paraît apporter un plus en intelligibilité par rapport à la formulation d'un simple indicateur. Enfin, l'application de ces différentes approches au cas du Sénégal et la mise en relation des résultats obtenus avec l'expérience du terrain montre que notre ISPH fournit une meilleure représentation de la réalité que l'IPH classique.

Au delà de ces considérations précises, tout n'est cependant pas dit concernant la formulation de l'IPH ou de l'ISPH. En particulier, on peut s'interroger sur la pertinence du choix de la variable « probabilité

de décéder avant l'âge de 40 ans » dans les pays en voie de développement lorsque l'on sait à quel point cette probabilité est difficile à évaluer dans le contexte de pauvreté et de fiabilité toute relative de l'information statistique qui y prévaut. C'est pourquoi il nous a paru utile de proposer, par ailleurs, la formulation d'un Indicateur de Pauvreté Humaine Adapté et Normalisé (IPHAN) dans lequel nous remplaçons ce composant par un autre, lui-même composite, censé représenter la « vulnérabilité de l'existence » et que nous supposons être une bonne approximation de la probabilité de décéder avant l'âge de 40 ans<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup> Cette proposition a été appliquée dans notre ouvrage *«La pauvreté au Sénégal»* (J.-P. Minvielle, A. Diop, A. Niang), actuellement en cours d'édition chez Karthala.



## **References**

PNUD (1997), *Rapport mondial sur le développement humain 1997* – Economica, Paris, 268p.