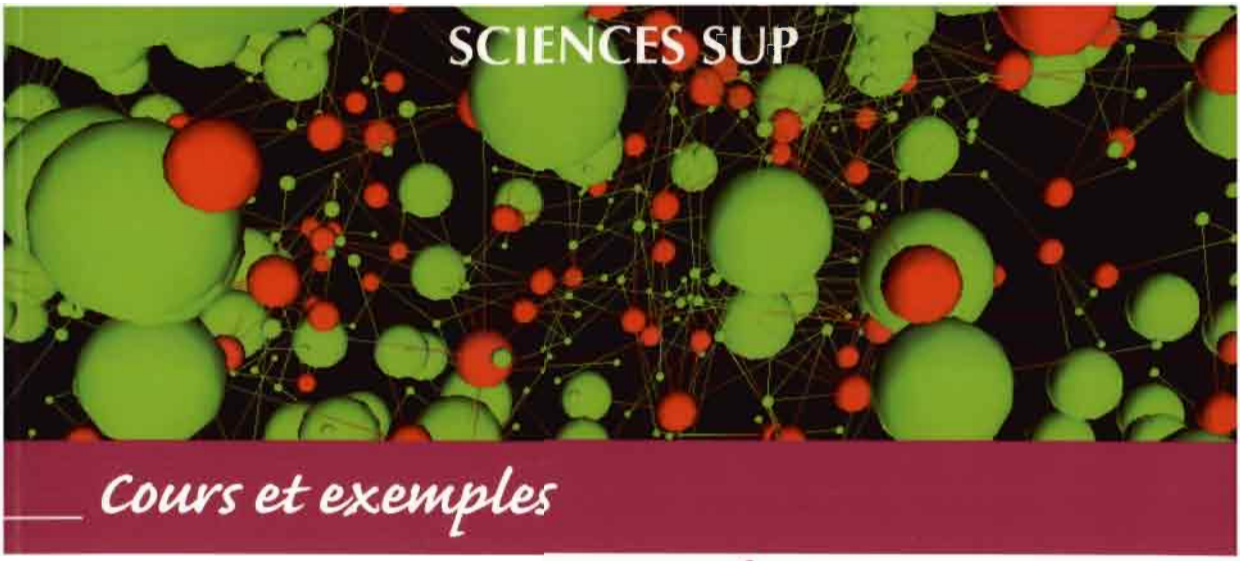


Master • Écoles d'ingénieurs

MODÉLISATION ET SIMULATION À BASE D'AGENTS

Exemples commentés, outils informatiques et questions théoriques

Préface de Paul Bourgine et Édith Perrier

Jean-Pierre Treuil
Alexis Drogoul
Jean-Daniel Zucker

IRD
Institut de recherche pour le développement

DUNOD

MODÉLISATION ET SIMULATION À BASE D'AGENTS

Consultez nos parutions sur dunod.com

MODÉLISATION ET SIMULATION À BASE D'AGENTS

Exemples commentés, outils informatiques et questions théoriques

Jean-Pierre Treuil
Membre honoraire de l'UR GEODES de l'IRD

Alexis Drogoul
Directeur de recherches à l'IRD

Jean-Daniel Zucker
Directeur de recherches à l'IRD

Préface de
Paul Bourgine et Édith Perrier

DUNOD

Toutes les marques citées dans cet ouvrage sont des marques déposées par leurs propriétaires respectifs.

Illustration de couverture : *Modèle à base d'agents du fonctionnement biologique des sols*
Source : Christophe Cambier

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.
Le Code de la propriété intellectuelle du 1er juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.
Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

© Dunod, Paris, 2008
ISBN 978-2-10-050216-5

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Préface

Oser modéliser des systèmes complexes, dont le comportement à une échelle donnée — dite macroscopique — est le produit des interactions entre un grand nombre d'entités à une échelle inférieure — dite microscopique —, c'est un défi de notre monde moderne. Prétendre, pour mieux comprendre, voire contrôler des systèmes dynamiques biologiques, naturels ou humains, intégrer de multiples niveaux d'organisation dans des reconstructions multi-échelles, et prendre en compte une multiplicité d'entités et de processus hétérogènes mis en jeu, c'est un pari audacieux ; surtout si l'on cherche à confronter de multiples sources d'informations sur le monde réel, des expérimentations informatiques et des théorisations mathématiques...

L'usage de la modélisation informatique à base d'agents se développe depuis une trentaine d'années : la complexité du monde réel est reproduite dans des expérimentations *in silico*, où l'on observe les dynamiques individuelles et collectives d'entités informatiques, des « abstractions manipulables » du monde réel, conçues par des chercheurs de toutes disciplines. Les simulations confirment l'apparition de phénomènes d'auto-organisation, d'émergence de dynamiques complexes du « tout » à partir de comportements simples des « parties ». Elles suggèrent des relations de cause à effet, permettent de tester des scénarios d'évolution, de formaliser des hypothèses et de concrétiser des échanges de points de vue multi-disciplinaires sur un même objet. Au-delà des analyses théoriques, ce livre met en lumière comment l'approche agents s'enracine dans la reproduction de cas concrets et valide ses modèles à partir de leurs capacités d'expression, en lien direct avec l'observation du monde réel.

Les approches à base d'agents sont utilisées par une communauté scientifique qui ne cesse de grandir. Cela s'explique par une simplicité relative de mise en œuvre, que les capacités de calcul des ordinateurs individuels, le développement de plates-formes dédiées, et des formations spécifiques, mettent désormais à portée du plus grand nombre. Mais comme pour toute querelle entre les Anciens et les Modernes, la démarche suscite à la fois enthousiasme et scepticisme. Les critiques parleront de jeux informatiques, jugés insuffisamment formels ou trop peu rigoureux, et d'une mode. Mais la mode ne passe pas. Et si les rapports et articles spécialisés abondent, peu d'ouvrages proposent une vue d'ensemble de l'état de l'art. En quoi consiste cette approche à base d'agents dont tout le monde parle ? Quels en sont ses principes de base ? Quels sont les techniques et outils disponibles ? Peut-on avoir des exemples scientifiquement convaincants ? Le lecteur trouvera dans le présent ouvrage

une réflexion issue du terrain, écrite par des chercheurs qui ont contribué pendant des années à l'émergence et à l'activité de la communauté française dans ce domaine. Un témoignage honnête, éclairant, riche en définitions, en exemples pratiques, en réflexions théoriques.

La première partie débute par des généralités fort intéressantes sur le rôle de la modélisation en science. Elle se focalise très vite sur la modélisation informatique en y resituant de façon très claire les concepts et les principes fondateurs de l'approche multi-agents. Sont ensuite décrits de façon didactique onze exemples très différents, mais analysés à travers une même grille de lecture. Ces analyses de cas non seulement éclairent le lecteur sur la méthode, les objectifs et les résultats, mais lui font entreprendre un voyage passionnant dans des études de phénomènes physiques, biologiques, comportementaux, que la modélisation, par nature « simplificatrice », nous fait découvrir ou re-découvrir. Deux chapitres sont enfin consacrés à la présentation des méthodes de conception et d'implémentation informatiques, et à la description des principales plates-formes disponibles pour faciliter le développement de simulateurs.

Les auteurs vont plus loin. Pour la première fois dans le même ouvrage, ils tentent la réconciliation entre deux « cultures » en matière de modélisation à base d'agents. Ils ouvrent en effet une discussion sur la complémentarité entre une vision informatique basée sur des expérimentations et une vision plus mathématique des systèmes d'entités en interaction. C'est l'objet de la deuxième partie et de plusieurs annexes. Que le lecteur non mathématicien ne s'inquiète pas outre mesure en feuilletant ces derniers chapitres. Qu'il prenne donc un moment pour suivre la démarche conceptuelle et même pour en détailler les développements. Il sera vite convaincu que la tâche est ardue mais qu'elle en vaut la peine, si l'on veut dépasser le stade de l'observation et des statistiques. L'informaticien et le modélisateur disposeront alors d'une description détaillée de techniques mathématiques qui devraient permettre de dépasser l'empirisme. Le mathématicien ou le physicien que la fascination pour les modèles à base d'agents intrigue y trouvera de son côté une synthèse des nombreux formalismes déjà développés pour à la fois définir des agents et leurs comportements, caractériser les états, l'organisation spatiale, les trajectoires des systèmes dont ils sont les composants, construire des « résumés », afin de réduire la complexité et tenter de faire le lien avec les modèles mathématiques traditionnels. Tout un chacun découvrira dans ce livre des pistes déjà ouvertes et d'autres originales pour essayer d'avancer sur cette question d'actualité pressante : serons-nous bientôt capables de concevoir une approche rigoureuse des interactions multi-entités et des organisations multi-échelles ? d'entrevoir des raisonnements et des preuves de notre foi dans l'apport potentiel de la science des systèmes complexes ? Toutes les méthodes d'intégration présentées, essentiellement sur un milieu et un temps continu, sont cependant compliquées. Quel formalisme, peut-être radicalement novateur, nous permettra de progresser en mathématiques discrètes, et donc d'analyser ces simulations informatiques qui reproduisent étrangement la réalité de tant de réseaux d'interactions multi-niveaux, y compris en biologie ou sciences humaines intégratives ?

Le livre est épais, le sujet encore plus vaste. Que le lecteur soit étudiant, chercheur professionnel de toute discipline, ou simplement chercheur amateur éclairé, curieux d'un des courants de recherche actuel, qu'il soit bien averti : ce n'est pas un livre de cours, mais c'est un ouvrage de référence à ne pas manquer.

Il fallait faire ce livre et ils l'ont fait. Qui sont-ils ? Jean-Pierre Treuil est l'ex-directeur du Laboratoire d'informatique appliquée (LIA) de l'IRD (Institut de recherche et de développement), où il a été le moteur d'échanges quotidiens entre chercheurs et étudiants de tous horizons. Polytechnicien, bilingue en informatique et mathématiques, il a inlassablement démontré l'importance de la méthode, de la rigueur, et de la complémentarité des points de vues dans toute démarche de modélisation. Alexis Drogoul, ex-professeur d'informatique à l'université Paris 6, où il a dirigé l'équipe MIRIAD, est maintenant directeur de recherches à l'IRD. Il a été l'un des pionniers, en France, de la recherche sur les modèles à base d'agents et leurs applications dans de nombreux domaines thématiques. Il est un défenseur convaincu de la collaboration entre chercheurs de toutes disciplines au bénéfice de la recherche en intelligence artificielle et en robotique. Jean-Daniel Zucker, ingénieur Sup'Aéro, ex-responsable de R&D aux USA, ex-chef du projet européen Esprit atelier de logiciel futur chez Thomson, est ensuite revenu à la recherche académique — universités Paris 6, Paris 13, INSERM, IRD. Spécialiste de bioinformatique et d'apprentissage automatique, il réalise régulièrement dans ces domaines la synthèse entre approches mathématiques et approches à base d'agents. Tous les trois passionnés par la recherche, ses applications pour le développement et les échanges transdisciplinaires, ils se sont retrouvés au sein d'une équipe originale de l'IRD, l'UR GEODES (Unité de recherches en mathématique et informatique appliquées à la modélisation des systèmes complexes), et ce livre est en grande partie le résultat de cette rencontre et de l'expérience de l'Unité.

Nous sommes heureux que ce livre ait été écrit, nous sommes heureux de l'avoir lu et nous avons le plaisir de le recommander à un large public. Bien sûr, écrit au début du XXI^e^ siècle, cet ouvrage sera un jour daté. Mais nous pensons que les recherches qu'il relate seront suivies de nouvelles applications qu'il aura inspirées et de découvertes dont il aura été le germe. Il deviendra alors un document d'histoire des idées, qui, nous en sommes sûrs, saura toujours enrichir notre réflexion.

Paul BOURGINE[1] et Édith PERRIER[2]
Institut des systèmes complexes de Paris Île de France
Février 2008

1. Directeur du CREA (Centre de recherches en épistémologie appliquée, UMR École Polytechnique CNRS), directeur du RNSC (Réseau national des systèmes complexes) et de l'ISC-PIF (Institut des systèmes complexes de Paris Île de France).

2. Directrice de recherches à l'IRD, HDR université Paris 6, ex-directrice de l'UR GEODES (2000-2005), éditrice en chef de Geoderma, Elsevier, secrétaire générale du RNSC et de l'ISC-PIF.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Table des matières

PRÉFACE v

AVANT-PROPOS xix

INTRODUCTION 1

I.1 La modélisation 1

I.2 La simulation 3

I.3 La simulation à base d'agents 13

CHAPITRE 1 • **MODÈLES PHYSIQUES** 17

1.1 GRANULAB : mécanique des milieux granulaires 17

1.1.1 La question scientifique 17

1.1.2 Les raisons avancées pour une approche agent 20

1.1.3 Échelles spatio-temporelles et granularité 21

1.1.4 Les agents, leurs attributs, leur organisation 21

1.1.5 Les comportements ou mécanismes 22

1.1.6 L'implémentation informatique 23

1.1.7 L'exploitation du modèle et l'apport au domaine 23

1.2 RIVAGE : hydrodynamique du ruissellement 24
1.2.1 La question scientifique 25
1.2.2 Les raisons avancées pour l'approche agent 26
1.2.3 Échelles spatio-temporelles et granularité 27
1.2.4 Les agents, leurs attributs 29
1.2.5 Les comportements ou mécanismes 29
1.2.6 L'implémentation informatique 31
1.2.7 L'exploitation du modèle et l'apport au domaine 31

CHAPITRE 2 • **MODÈLES BIOLOGIQUES** 33

2.1 BIOFILMS : modélisation à base d'agents de la formation et de l'évolution de BIOFILMS 33
2.1.1 La question scientifique 33
2.1.2 Les raisons avancées pour l'approche agent 35
2.1.3 Échelles spatio-temporelles et granularité 36
2.1.4 Les agents, leurs attributs 37
2.1.5 Les comportements ou mécanismes 37
2.1.6 L'implémentation informatique 39
2.1.7 L'exploitation des modèles et l'apport au domaine 39
2.2 SIMANCHOIS : modélisation d'un écosystème marin 41
2.2.1 La question scientifique 41
2.2.2 Les raisons avancées pour l'approche agent 43
2.2.3 Les échelles spatio-temporelles (et la granularité) 43
2.2.4 Les agents, leurs attributs (et leur organisation) 44
2.2.5 Les comportements ou mécanismes 45
2.2.6 L'implémentation informatique 45
2.2.7 L'exploitation du modèle et l'apport au domaine 46

CHAPITRE 3 • **MODÈLES COMPORTEMENTAUX** 49

3.1 MANTA : processus d'auto-organisation chez les fourmis 49
3.1.1 La question scientifique 49
3.1.2 Les raisons avancées pour l'approche agent 50
3.1.3 Échelles spatio-temporelles 50

3.1.4 Les agents et leurs attributs 51
3.1.5 Les comportements ou mécanismes 52
3.1.6 L'implémentation informatique du modèle 54
3.1.7 L'exploitation du modèle et l'apport au domaine 55

3.2 DOMWORLD : modélisation des hiérarchies de dominance chez les primates ... 57
3.2.1 La question scientifique 58
3.2.2 Les raisons avancées pour l'approche agent 59
3.2.3 Échelles spatio-temporelles et granularité 60
3.2.4 Les agents, leurs attributs 60
3.2.5 Les comportements ou mécanismes 61
3.2.6 L'implémentation informatique 62
3.2.7 L'exploitation des modèles et l'apport au domaine 63

3.3 ARCHISIM : modélisation de la dynamique du trafic routier 63
3.3.1 L'objectif de recherche 64
3.3.2 Les raisons avancées pour une approche agent 66
3.3.3 Échelles spatio-temporelles 66
3.3.4 Les agents, leurs attributs 67
3.3.5 Les comportements ou mécanismes 68
3.3.6 L'implémentation informatique 69
3.3.7 L'exploitation du modèle et l'apport au domaine 70

CHAPITRE 4 • **MODÈLES SOCIAUX** 73

4.1 CUBES : modélisation du comportement de consommateurs 73
4.1.1 La question scientifique 74
4.1.2 Les raisons avancées pour l'approche agent 75
4.1.3 Échelles spatio-temporelles et granularité 76
4.1.4 Les agents, leurs attributs, leur organisation 76
4.1.5 Les comportements ou mécanismes 79
4.1.6 L'implémentation informatique 80
4.1.7 L'exploitation du modèle et l'apport au domaine 81

4.2 SELFCORMAS : modélisation d'accompagnement des processus collectifs de concertation 82
4.2.1 La question scientifique 83

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

4.2.2 Les raisons avancées pour l'approche agent 84
4.2.3 Les échelles spatio-temporelles (et la granularité) 86
4.2.4 Les agents, leurs attributs (et leur organisation) 87
4.2.5 Les comportements ou mécanismes 88
4.2.6 L'implémentation informatique 88
4.2.7 L'exploitation du modèle et l'apport au domaine 89

4.3 SimPop : modéliser les « systèmes de villes » 91
4.3.1 La question scientifique 91
4.3.2 Les raisons avancées pour l'approche agent 91
4.3.3 Les échelles spatio-temporelles (et la granularité) 92
4.3.4 Les agents, leurs attributs (et leur organisation) 92
4.3.5 Les comportements ou mécanismes 92
4.3.6 L'implémentation informatique 94
4.3.7 L'exploitation du modèle et l'apport au domaine 95

4.4 DamasRescue : modélisation d'agents sauveteurs après une catastrophe naturelle 98
4.4.1 La question scientifique 98
4.4.2 Les raisons avancées pour l'approche agent 99
4.4.3 Échelles spatio-temporelles (et granularité) 99
4.4.4 Les agents, leurs attributs (et leur organisation) 99
4.4.5 Les comportements ou mécanismes 100
4.4.6 L'implémentation informatique 102
4.4.7 L'exploitation du modèle et l'apport au domaine 102

CHAPITRE 5 • **SYNTHÈSE DES EXEMPLES ET MÉTA-MODÈLE À BASE D'AGENTS** 103

5.1 Agents 103
5.1.1 Agents simples, agents complexes 104
5.1.2 Versatilité des modèles, diversité des agents 106

5.2 Comportements et décisions 109
5.2.1 Décision et comportements partagés 110
5.2.2 Décisions partagées et comportements individualisés 111
5.2.3 Décisions et comportements individualisés 111

5.3 Environnement 112
5.3.1 L'environnement comme ensemble de contraintes structurelles 112
5.3.2 L'environnement comme champ médiateur 113
5.3.3 L'environnement comme support de la perception 114
5.3.4 L'environnement comme contrôle de l'action 115
5.3.5 L'environnement comme médium de communication 115
5.3.6 L'environnement comme espace relationnel 116
5.3.7 L'environnement comme espace(s) multiple(s) 116
5.3.8 L'environnement comme entité(s) autonome(s) 117
5.4 Synthèse - Lacunes du méta-modèle 118

CHAPITRE 6 • **RÉALISATION INFORMATIQUE DES SIMULATIONS À BASE D'AGENTS** 129
6.1 Introduction 129
6.1.1 Gestion du temps 129
6.1.2 Ordonnancement des agents 131
6.1.3 Ordonnancement des actions 133
6.2 L'implémentation 135
6.2.1 Programmation spécifique ou plate-forme générique ? 135
6.2.2 Panorama des principales plates-formes 137
6.2.3 Comparaison 144

CHAPITRE 7 • **MATHÉMATIQUES ET MODÉLISATION AGENT** 145
7.1 Agents et niveaux de modélisation 145
7.2 Implication des mathématiques 146
7.2.1 Formuler mathématiquement les comportements individuels 147
7.2.2 Caractériser synthétiquement les systèmes d'agents 147
7.2.3 Modéliser un système d'agents à un niveau agrégé 148
7.2.4 Établir un lien analytique entre niveaux différents 148
7.3 Vocabulaire et notations 149
7.3.1 Agents, mécanismes, environnement 149
7.3.2 États individuels, états du système 150

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

7.3.3 Trajectoires 154
7.3.4 De la structure des calculs en simulation agents 155

CHAPITRE 8 • **EXPRIMER MATHÉMATIQUEMENT, AU NIVEAU DE L'AGENT, COMPORTEMENTS ET INTERACTIONS** 159

8.1 Métaphore des forces, métaphore des jeux 159

8.2 La métaphore des forces 160

8.3 Dynamiques d'agents et champs de potentiels 161
8.3.1 Un modèle minimal 162
8.3.2 Vers des modèles plus complexes 166
8.3.3 Mouvements amortis 166
8.3.4 Interactions plus ciblées 167
8.3.5 Influences non séparables 168

8.4 Dynamiques d'agrégation/répulsion 169
8.4.1 Un modèle minimal 169
8.4.2 Vers des modèles plus complexes 172
8.4.3 De la réaction à un stress local à la recherche d'un optimum global 173
8.4.4 Des potentiels aux perceptions 175

8.5 Dynamiques de polarisation 176
8.5.1 Un modèle minimal 176
8.5.2 Vers des modèles plus complexes 179
8.5.3 Modèles d'Ising et automates cellulaires 179
8.5.4 Des réactions différentes selon les sites 180

8.6 Dynamiques de reproduction/dissémination 181
8.6.1 Un modèle minimal 182
8.6.2 Vers des modèles plus complexes 185

8.7 Modèles proies/prédateurs 185
8.7.1 Un modèle minimal 186
8.7.2 Retour sur quelques difficultés de formulation 189

8.8 La métaphore des jeux 190
8.8.1 Jeux à N joueurs et apprentissage multi-agents 191
8.8.2 Un modèle minimal avec environnement évolutif 193

8.8.3 La notion d'objectif, individuel ou collectif 193
8.8.4 L'évaluation de l'action par les agents 195
8.8.5 L'amélioration de l'évaluation par apprentissage 196
8.9 Une grande diversité et des points communs 197

CHAPITRE 9 • **CARACTÉRISER LES DYNAMIQUES D'AGENTS** 199
9.1 Résumer les données d'un système d'agents 199
9.2 Caractériser des structures spatiales 201
9.2.1 L'approche empirique 201
9.2.2 L'approche théorique 203
9.3 Outils généraux de caractérisation des états 206
9.3.1 Dénombrements et résumés d'ordre 1 206
9.3.2 Dénombrements et résumés d'ordre *n* 211
9.3.3 Extensions à plusieurs catégories d'agents 213
9.3.4 Vers une typologie des résumés 214
9.4 Caractériser les dynamiques 216
9.4.1 Résumer une trajectoire 216
9.4.2 Caractériser le faisceau des trajectoires 217
9.4.3 Stationnarité, courants de probabilités, ergodicité 218
9.5 Caractériser les interactions 220
9.5.1 Un terme polysémique 220
9.5.2 Mesurer des corrélations au sein d'un système d'agents 221
9.5.3 Évaluer les conséquences d'une perturbation sur les états ultérieurs du système 222
9.6 Des configurations aux réseaux 223

CHAPITRE 10 • **MODÉLISER LES DYNAMIQUES D'AGENTS** 225
10.1 Réduction des modèles agents : pourquoi ? 226
10.1.1 Une compréhension plus « profonde » 227
10.1.2 La possibilité de développements analytiques 227
10.1.3 Des simulations moins coûteuses et mieux contrôlables 227

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

10.2 Réductions d'une dynamique de polarisation 228
10.2.1 Le modèle agent 228
10.2.2 Questions sur la dynamique du système 231
10.2.3 Reformulations des équations du modèle 232
10.2.4 Cas d'un grand nombre d'agents : réduction à un modèle EDP 235
10.2.5 Les enseignements du modèle EDP 238
10.2.6 Apports d'autres réductions 239
10.3 Réductions d'une dynamique de reproduction avec déplacement 242
10.3.1 Le modèle agent 242
10.3.2 Reformulation du processus de branchement 244
10.3.3 Combinaison du branchement et de la diffusion 246
10.3.4 Réductions vers une dynamique de densités 247
10.4 Réductions : diversité et difficultés rencontrées 250
10.4.1 Diversité des réductions : nature des équations 250
10.4.2 Diversité des réductions : nature des résumés 253
10.4.3 Réductions : nature des difficultés 256
10.5 En conclusion : de la possibilité des réductions 262

CONCLUSION 265

ANNEXE 269

A.1 Compléments du chapitre 8 269
A.1.1 Dynamiques d'agrégation-répulsion et fonction d'énergie (§ 8.4.3) 269
A.1.2 Dynamiques de polarisation et fonction d'énergie (§ 8.5.4) 276
A.1.3 Dynamiques de reproduction-dissémination et fonction d'énergie (§ 8.6.2) 279
A.2 Compléments du chapitre 9 280
A.2.1 Caractérisation empirique d'organisations spatiales : quelques indicateurs courants (§ 9.2.1) 280
A.2.2 Fonction de corrélation sur une configuration spatiale homogène : définition et calcul (§§ 9.2.1 (b) et 9.5.2) 285
A.3 Compléments du chapitre 10 290
A.3.1 Dynamique de polarisation : tropisme vers les orientations majoritaires et champ de potentiel (§ 10.2.1) 290

A.3.2 Processus stochastiques et formule d'Itô (§ 10.2.3) 293
A.3.3 Réduction d'une dynamique de polarisation : de la formule d'Itô au modèle EDP (§ 10.2.4) 299
A.3.4 Réduction d'une dynamique de polarisation : dynamique de la fonction d'énergie (§ 10.2.6) 301
A.3.5 Réduction d'une dynamique de polarisation : des équations différentielles stochastiques à l'équation de Fokker Planck (§ 10.2.6) 302
A.3.6 Générateur infinitésimal de la combinaison d'un processus de branchement et d'un processus de diffusion (§ 10.3.3 et références associées) 306

BIBLIOGRAPHIE 309

INDEX 319

Avant-propos

Modélisation et simulation : une émergence de pratiques

Depuis la fin des années 1970, se sont développées, dans différents domaines scientifiques, des pratiques de modélisation et de simulation qui possèdent en commun le fait de représenter de façon explicite des entités et leurs comportements sous une forme informatique et d'étudier, grâce à la puissance qu'offrent les ordinateurs actuels, les structures émergentes qui naissent, *in silico*, de leurs interactions virtuelles.

Toutes ces pratiques n'utilisent pas exactement le même vocabulaire. Elles se décrivent « à base d'agents » (Parunak, Savit et al. 1998), « orientées-objet » (Uhrmacher 1997), « particulaires » (Schweitzer 1997), « individu-centrées » (Grimm and Railsback 2005), « holoniques » (Koestler 1967) ou « multi-agents » (Drogoul, Vanbergue et al. 2003). Nous les regrouperons, pour le moment, sous le premier terme. Elles sont issues de champs aussi divers que l'intelligence artificielle, la physique statistique, la micro-simulation ou les automates cellulaires (Gilbert and Troitzsch 2005). Elles s'écrivent en C++, Java, SmallTalk, Mathematica, Pascal, FORTRAN, BASIC ou dans des langages informatiques spécialement conçus pour elles. Selon les domaines, certaines sont nées comme extensions naturelles de modèles théoriques existants alors que d'autres, au contraire, ont accompagné et parfois initié un changement significatif du raisonnement scientifique. Les deux facteurs qui ont contribué à leur succès sont cependant extérieurs (ou, selon le point de vue, transversaux) à toutes les disciplines qui les ont adoptées :

- Le premier est la montée en puissance et la disponibilité croissante des ordinateurs personnels qui ont permis à des chercheurs de toutes disciplines de disposer de ressources de calcul jusque-là l'apanage des seuls calculateurs.
- Le second est l'émergence, progressive, de ce que l'on peut appeler, faute de mieux, l'« approche systèmes complexes » (Waldrop 1992) dans les sciences de l'Homme, de la matière et de la nature.

Dans cette optique, il ne s'agit plus seulement de caractériser les propriétés globales d'un système à travers un petit nombre de variables macroscopiques, mais aussi de comprendre comment elles émergent du jeu des interactions entre ses composants. Les méthodes purement analytiques visant **à déduire mathématiquement** ces propriétés à partir des comportements élémentaires sous-jacents s'avèrent délicates à mettre en œuvre dans ce contexte. Elles sont souvent mal adaptées aux questions que

se posent les experts et aux données dont ils disposent, et le seul recours est alors la simulation.

Les techniques de modélisation et de simulation à base d'agents sont au cœur de cette approche : elles apportent des outils d'exploration de la relation entre niveaux de description d'un système, techniques plus souples et versatiles que les rares méthodes mathématiques développées auparavant (par exemple en physique ou en économie). Conséquences de la propagation des « idées complexes », elles en sont aussi le vecteur, ce qui explique sans doute leur adoption rapide dans un nombre croissant de disciplines.

Un exemple de domaine représentatif : les modèles de trafic routier

La modélisation du trafic routier est un sujet relativement ancien, puisque les premiers travaux sur le sujet remontent à 1935 (Greenshield 1935). Ces travaux ont été à l'origine menés essentiellement par des ingénieurs soucieux de mieux maîtriser et optimiser les flux de trafic s'écoulant sur les grands réseaux routiers, soucieux également de mieux dimensionner les infrastructures nouvelles par une meilleure prévision des flux et des capacités. Du point de vue opérationnel, les travaux menés en modélisation du trafic ont permis le développement d'outils de simulation qui sont aujourd'hui d'utilisation courante pour la planification des transports ainsi que pour l'exploitation de la route (régulation du trafic, aménagement de carrefours...).

L'approche « classique », explorée dès 1955 (Lighthill and Whitham 1955 ; Richards 1956), est basée sur une analogie entre *l'écoulement du trafic* et l'écoulement d'un fluide à l'intérieur d'un canal. Le flux de véhicules est alors caractérisé par un certain nombre de grandeurs macroscopiques, et leur comportement est abordé de manière moyenne. Le trafic est représenté par trois variables (fig. A.2) : le débit $Q(x,t)$, la densité $K(x,t)$ et la vitesse du flot $V(x,t)$. L'écoulement est supposé homogène et unidimensionnel suivant la variable x (son évolution temporelle étant représentée par la variable t). Q, K et V sont reliées entre elles par des lois d'écoulement, bâties sur le même principe que les lois de mécanique des fluides. À ce modèle originel ont été rajoutées, bien que difficilement, de nombreuses extensions (Leclercq 2002) permettant de prendre en compte les singularités que constituent certains aménagements routiers, des véhicules hétérogènes, ou des topologies complexes de réseaux.

L'intérêt de ces modèles réside dans leur compacité, leur généralité (moyennant un paramétrage adéquat) et surtout la possibilité de les résoudre de façon analytique : il est par exemple possible de calculer les rapports entre le débit et la densité qui donneront lieu à des congestions de trafic. Mais ceci n'est possible qu'au prix d'une simplification souvent excessive de la complexité d'un trafic réel, ce qui peut rendre les solutions obtenues peu réalistes et il n'est pas tenu compte, dans ces modèles, de l'hétérogénéité des usagers ni de leurs capacités adaptatives.

Dans le même temps, l'évolution des techniques de gestion de la circulation, et singulièrement celles liées à la communication avec l'usager (information routière, systèmes embarqués) et à son équipement (systèmes de freinage, amélioration de la

sécurité passive) ont provoqué un renouvellement des besoins en termes de modélisation. De même, la généralisation des plans de déplacements cherchant à limiter la part de l'automobile et à contenir les nuisances associées au trafic s'est traduite par une demande de nouveaux outils d'évaluation plus réalistes que les modèles globaux, prenant notamment en compte le comportement individuel des conducteurs.

Les besoins en modélisation ont donc progressivement évolué d'une nécessité de description du trafic global (pour évaluer ou optimiser les équipements et les flux) à une volonté de compréhension des causes de génération de ce trafic. En ne le considérant plus comme un flux moyenné, mais comme un phénomène émergeant des interactions entre des usagers représentés individuellement et un équipement modélisé de façon réaliste, de nombreux travaux ont permis d'explorer par la modélisation des situations inaccessibles aux modèles classiques : impact des comportements à risque, du placement des panneaux de signalisation, de l'hétérogénéité des véhicules, prise en compte de catégories nouvelles d'usagers (piétons, cyclistes). Dans ces différents modèles, les composants du trafic sont représentés par des « agents informatiques », dotés de mécanismes d'action et de perception et de règles de comportements dans un monde virtuel qui peut être défini avec tout le réalisme nécessaire (fig. A.1). Et, une fois ces « agents » mis en interaction par le biais de simulations, les données résultantes (vitesse moyenne du flux, formation d'embouteillages, densité moyenne) peuvent être mesurées comme elles le seraient dans la réalité.

Les modèles de trafic obtenus sont plus complexes et plus difficiles à maîtriser et à valider que les modèles mathématiques classiques. Ils n'offrent pas de solution

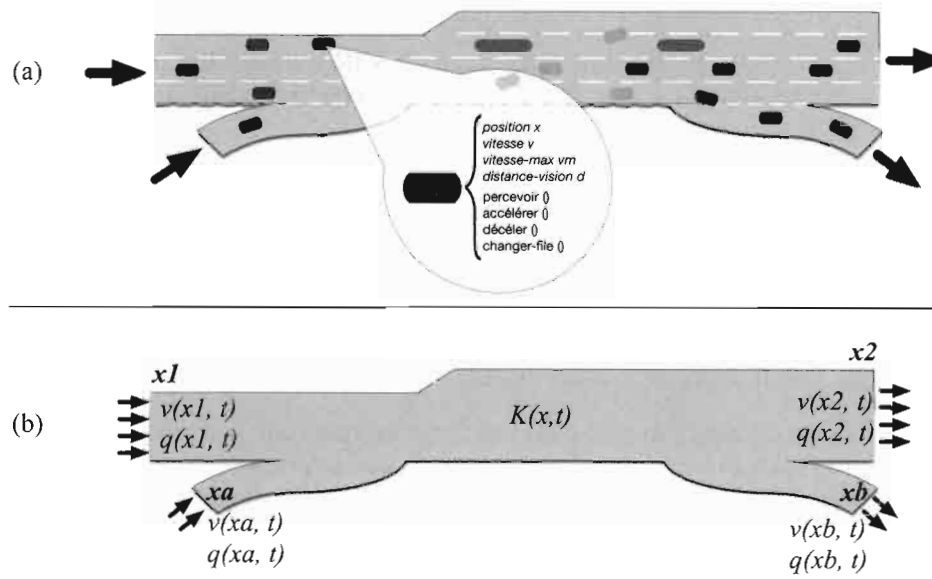


Figure A.1 Deux façons d'aborder la modélisation du trafic routier : (a) une modélisation microscopique à base d'agents ; (b) une modélisation macroscopique basée sur le modèle LWR.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

analytique et requièrent donc d'être explorés par voie de simulation. En revanche, ils autorisent une plus grande souplesse de représentation, permettent de prendre en compte des données issues d'autres disciplines que l'ingénierie des transports (comme par exemple la psychologie de la conduite), et donnent surtout à la modélisation la possibilité d'aborder des terrains nouveaux, comme par exemple l'entraînement de conducteurs dans un trafic simulé réaliste.

Ces modèles agents permettent également de comprendre, et pas simplement de décrire, comment un ensemble de comportements individuels peut générer des phénomènes collectifs complexes, ce qui ouvre la voie à de nouvelles formes d'intervention : au lieu de ne pouvoir jouer que sur la capacité des ouvrages ou la limitation du débit à l'entrée, on peut par exemple explorer les conséquences d'une modification du comportement des usagers sur la prévention de congestions.

Objectifs et organisation de l'ouvrage

À l'instar de cet exemple, de nombreuses disciplines (à commencer par l'écologie et les sciences sociales) ont ajouté ou sont en passe d'ajouter à leur panoplie d'outils méthodologiques les simulations à base d'agents et le nombre de travaux qui leur sont consacrés ne cesse de croître. Cependant, malgré la profusion des dispositifs existants, et sans doute en raison de leur nouveauté, il n'existe pas encore d'ouvrage accessible à un public non spécialiste qui fasse le point sur ces techniques. Par « public non spécialiste », nous entendons aussi bien des informaticiens ou modélisateurs qui souhaiteraient découvrir et se former à ces nouvelles techniques que des thématiciens à la recherche de concepts et d'outils de modélisation nouveaux. L'objectif de ce livre se décline donc en quatre points complémentaires :

- Présenter au lecteur un panorama des approches de modélisation et simulation à base d'agents sous la forme d'exemples représentatifs puisés dans différents domaines scientifiques et technologiques.
- Proposer un cadre commun de définitions et une ébauche de démarche de conception qui permettent de fournir, au-delà de leur diversité apparente, une base, sinon théorique, du moins pratique, de ces approches.
- Présenter ensuite les outils informatiques ou mathématiques existants pour concevoir, spécifier, programmer et exploiter ces modèles.
- Aborder, enfin, les questions de recherche soulevées par l'usage de ce nouveau paradigme dans le cadre de la modélisation des systèmes complexes.

L'organisation en chapitres suit dans une large mesure cette progression. Chaque chapitre a été conçu pour répondre aux questions que peuvent se poser les lecteurs qui découvrent ce nouveau paradigme ou à ceux qui le connaissent mais souhaitent aller plus loin. Elles sont au nombre de cinq :

- **Quelles sont les définitions de la modélisation et de la simulation à base d'agents ?** L'introduction répond à cette question en fournissant des définitions

générales des activités de modélisation et simulation, puis en les particularisant dans le cas de l'utilisation d'agents informatiques.

- **Quelles sont les applications existantes de la modélisation et simulation à base d'agents ?** La première partie de l'ouvrage (chapitres 1 à 4) présente un panorama constitué de onze modèles représentatifs à la fois de la diversité des champs d'application, des dispositifs mis en place, et des concepts communs. Tous les modèles sont présentés de façon similaire de façon à en faciliter la comparaison.
- **Quels sont les fondements informatiques et les préceptes méthodologiques de la simulation à base d'agents ?** La deuxième partie de l'ouvrage (chapitres 5 et 6) expose le modèle conceptuel commun à toutes les approches à base d'agents (en prenant appui sur celles qui sont présentées dans la première partie) et s'intéresse à son implémentation informatique, en passant notamment en revue certaines des plates-formes existantes et les stratégies de simulation associées.
- **Quelles sont les possibilités de spécification et de caractérisation formelles des approches à base d'agents ?** La troisième partie (chapitres 7 à 10) propose un certain nombre d'outils mathématiques permettant d'aborder de façon formelle la spécification et l'analyse des modèles à base d'agents, depuis les comportements individuels des agents jusqu'aux dynamiques collectives pouvant émerger de leurs interactions.
- **Quelles sont les perspectives offertes par cette approche et les questions encore ouvertes qu'elle soulève ?** La conclusion trace enfin quelques perspectives de la recherche actuelle sur les modèles à base d'agents, en particulier celles qui ont trait à la représentation multi-niveaux, au cœur des possibilités de compréhension, par la simulation, des systèmes complexes.

« Mathématiques et informatique »

Notre démarche privilégie un point de vue informatique, car c'est d'abord sur cette discipline que reposent les méthodes de conception et de réalisation de programmes de simulation fiables et partageables. Mais elle se garde d'oublier l'apport des mathématiques. Les mathématiques restent en effet le langage de l'expression formelle de nombreux comportements élémentaires, que ce soit au niveau des agents ou des systèmes artificiels qu'ils forment. Elles fournissent également la possibilité de construire à partir du même système — parfois au prix de simplifications — des modèles alternatifs qui permettent de contrôler la fiabilité des simulations et de mieux comprendre les déterminants fondamentaux des dynamiques simulées. La rencontre, sur ce terrain de la modélisation des systèmes complexes, des deux cultures disciplinaires informatique et mathématique n'est cependant pas sans poser quelques problèmes.

Le plus important est que la modélisation à base d'agents est une **modélisation** essentiellement **ascendante**, le système modélisé étant décrit comme une collection d'agents en interaction et sa dynamique globale comme le produit de ces interactions. Inversement, la modélisation mathématique propose habituellement une démarche où ne sont considérées que les propriétés globales de ce même système, sous la forme

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

d'agrégations ou de compositions des propriétés locales (ou attributs) de chacun de ses composants.

Sur la figure A.2 qui simplifie volontairement les deux visions de modélisation du trafic routier évoquées précédemment, on constate une apparente orthogonalité. Là où une démarche à base d'agents représente un système sous la forme d'un ensemble *m* d'agents, chacun porteurs de *n* attributs (en ligne sur la figure), une démarche mathématique le modélisera plutôt sous la forme d'un ensemble de variables agrégées, correspondant parfois à des compositions des attributs individuels (en colonne sur la figure). Il en est de même concernant la dynamique du système : dans un modèle à base d'agents, les fonctions d'évolution des attributs et constituants du modèle sont « portées » par les agents et par leur environnement ; dans les démarches mathématiques classiques, elles sont considérées comme « portées » par le système lui-même et s'appliquant globalement aux variables agrégées.

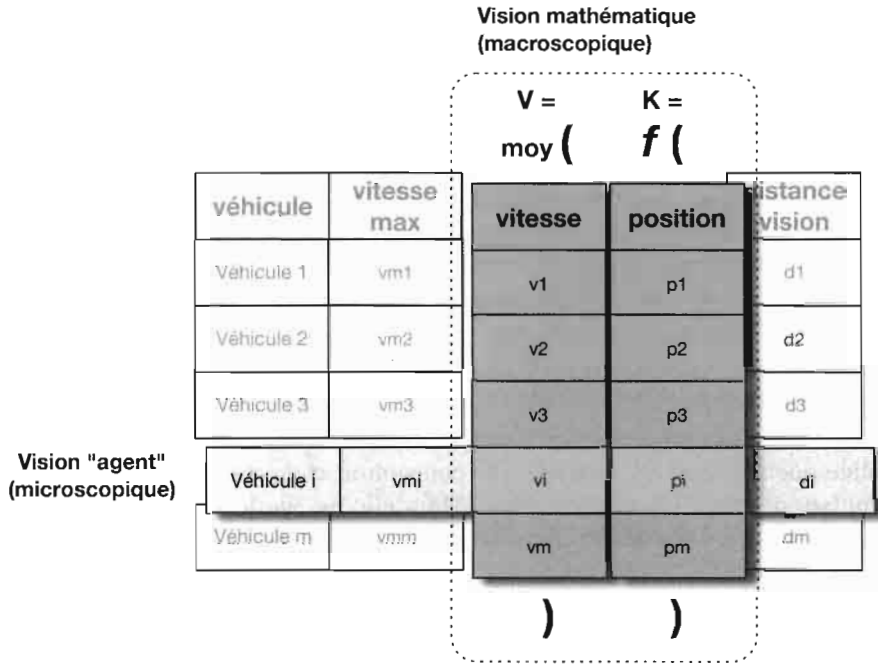


Figure A.2 Représentations mathématique (colonne) et agent (ligne) des véhicules composant un trafic routier.

Un autre problème provient du fait que les objectifs des scientifiques ne sont pas forcément les mêmes lorsqu'ils utilisent des approches à base d'agents et des approches mathématiques. En particulier, quand le but est d'« expliquer » une propriété du système modélisé, il n'est pas certain qu'ils se réfèrent au même type d'« explication » : une simulation à base d'agents trouvera systématiquement sa justification dans l'explication de l'apparition de propriétés au niveau global à partir de

propriétés locales (comme le trafic routier à partir des comportements individuels). Les simulations mathématiques, elles, sont souvent dédiées à une explication « horizontale », c'est-à-dire à l'explicitation des relations de causalité entre des propriétés globales (comme la relation entre le débit à l'entrée et la densité de véhicules).

Une des ambitions de ce livre est de réduire cet apparent fossé et de montrer qu'il existe une nécessaire complémentarité entre les deux approches. Les liens entre elles sont plus nombreux qu'on ne le croit. De nombreux travaux mathématiques s'intéressent à la représentation de niveaux d'organisation différents et beaucoup de formalismes ont été conçus pour décrire les comportements d'agents au sein de simulations. Inversement, les approches à base d'agents ont souvent besoin d'expliciter ou de spécifier des propriétés globales, par exemple celles qui sont « portées » par l'environnement dans lequel évoluent les agents ; de même, la compréhension et la validation de la dynamique d'une simulation à base d'agents peut nécessiter le recours à des instruments d'analyse macroscopiques parmi lesquels les mathématiques jouent un rôle essentiel.

C'est donc dans un esprit de dialogue entre les deux communautés qu'a été écrit cet ouvrage, car nous pensons que de cet échange sortiront des idées qui feront avancer considérablement notre compréhension des mécanismes de la complexité.

Introduction

I.1 LA MODÉLISATION

La modélisation est l'activité qui consiste à construire des modèles (Thompson 1884). C'est l'une des deux principales composantes, avec l'expérimentation, de la démarche scientifique. Les chercheurs passent en effet une bonne part de leur temps à construire, tester, comparer et réviser des modèles, et un nombre important de publications sont dédiées à la présentation, à l'application et à l'interprétation de modèles. Mais qu'est-ce qu'un **modèle**, et, dans le cas qui nous intéresse, **un modèle scientifique** ? La possibilité de définir ce terme de façon précise reste sujette à discussion car, en dépit du fait que tous les scientifiques en manient une vision intuitive, il en existe un nombre considérable d'interprétations selon la discipline, les objectifs et le point de vue épistémologique invoqué (Frigg et Hartmann 2005).

Il convient tout d'abord de séparer modèles « physiques » et modèles « abstraits ». Les premiers, qui regroupent les maquettes, les modèles réduits ou les modèles animaux, sont des dispositifs du monde réel conçus pour être soumis à expérimentation. Ils ne rentrent pas, à proprement parler, dans les objectifs de l'ouvrage, qui traite de modèles conçus pour être simulés sur ordinateur, même si la définition que nous donnons du terme peut recouvrir certaines de leurs propriétés. Cette distinction étant faite, nous pouvons proposer, dans l'encadré qui suit, une définition consensuelle, au regard de la littérature existante, de la notion de modèle scientifique.

Modèle — C'est une construction abstraite qui permet de comprendre le fonctionnement d'un *système de référence* en répondant à une *question* qui le concerne. *Représentation simplifiée* de ce système, un modèle s'appuie sur une *théorie générale* et il est exprimé dans un langage spécifique appelé *langage de modélisation*.

Dans cette acception, le *système de référence* représente une partie de la réalité circonscrite par les scientifiques. Cette partie de la réalité est connue d'eux *via* des mécanismes de mesure, d'observation ou d'expérimentations qui produisent des données. Ces données peuvent être de différentes natures (quantitatives ou qualitatives) et provenir de différents niveaux d'organisation du système. C'est usuellement la nécessité de donner du sens à ces données, en fonction d'objectifs précis, qui va donner

naissance à la *question* de modélisation : Quel sens leur donner ? Comment expliquer leurs relations ? Comment prévoir leur évolution ? Quand le modèle sert de support à des simulations, la question abordée par le modèle et celle abordée par la simulation sont habituellement les mêmes.

Comme nous l'avons dit précédemment, les modèles, à l'exception des modèles concrets, sont des *représentations simplifiées* abstraites d'un système de référence. Un modèle n'est donc pas le système qu'il décrit, mais une simplification délibérée de ce dernier, plus aisée à manipuler que le système lui-même, fondée sur des hypothèses qui ressortent, soit du domaine scientifique concerné, soit d'un choix assumé de limiter le niveau de complexité à prendre en compte. Cette simplification est exprimée dans un *langage de modélisation* dont le choix dépend d'une part des traditions du domaine scientifique considéré, d'autre part de considérations sur les propriétés souhaitées pour le modèle (généralisation, démonstration analytique, traduction en programme informatique, communication à une audience spécifique). Ces propriétés n'étant pas exclusives, un même modèle — que nous nommerons dans ce cas *modèle de référence* — peut être traduit dans différents langages en fonction de l'objectif des scientifiques. Enfin, un langage de modélisation n'est pas obligatoirement formel. Sa sémantique et sa syntaxe s'appuient sur des abstractions et des relations entre ces abstractions que nous nommerons par la suite *concepts de modélisation*.

Un modèle s'appuie généralement sur une *théorie*, mais n'en est pas une à proprement parler, même si la communauté scientifique est un peu inconsistante sur ce point (dans la pratique, les deux termes sont parfois utilisés de façon interchangeable). Le plus sûr est d'adopter ce que propose (Glennan 2005), qui est de comprendre la relation entre théories et modèles comme une relation entre le général et le particulier : là où une théorie a pour ambition de décrire le fonctionnement et l'évolution d'un ensemble de systèmes de référence, le modèle est une instanciation de cette théorie pour un système en particulier[3]. La notion de théorie est à prendre ici au sens large, couvrant tout l'éventail depuis le simple point de vue jusqu'à de véritables ensembles de lois scientifiques caractérisant les propriétés de et les relations d'entités physiques. La théorie exprime l'*a priori* du scientifique sur l'évolution ou l'état du système, et fournit les abstractions sous-jacentes au langage de modélisation ; elle peut aussi intervenir dans le choix des données à considérer ou à rechercher. À ce titre, nous considérerons qu'elle fournit l'ossature (ou l'une des ossatures) qui permettra la construction du modèle.

Dans la famille des modèles abstraits que nous considérons dans cet ouvrage, il est important d'opérer une distinction, qui nous intéressera particulièrement pour la suite, entre les *modèles statiques et dynamiques*.

3. Ce qui rend la distinction malaisée à effectuer est qu'il existe, dans la littérature, des modèles génériques applicables à de nombreux systèmes de référence, comme par exemple les modèles de population, dont l'ambition n'est pas loin d'en faire de véritables théories.

Modèles statiques et dynamiques — Un modèle est appelé *statique* quand il a pour propos la représentation de la *structure* d'un système de référence photographié *à un instant donné*, sans allusion à son évolution dans le temps. Inversement, un modèle sera appelé *dynamique* quand il inclura dans sa représentation des hypothèses ou des règles concernant l'évolution dans le temps du système de référence.

Outre le vocabulaire employé, ce qu'il faut retenir de ces définitions est qu'il n'existe pas de « modèle générique » d'un système de référence. Un même système peut générer plusieurs questions différentes et chacune de ces questions pourra ensuite donner lieu, selon la théorie choisie et les données disponibles, à différentes modélisations exprimées dans différents langages. Il n'existe donc pas, et il est important de le souligner, de « modèle générique » du trafic automobile, d'un écosystème, ou d'une colonie de fourmis. Il existe dans chacun des cas des modèles spécifiques permettant de répondre à une question posée : quelles sont les conditions pour qu'un ralentissement se forme, quelle est l'influence d'une exploitation forestière sur le devenir de la faune, comment se génère la division du travail entre les ouvrières d'une colonie ?

Inversement, il est également possible de concevoir une multiplicité de modèles, tous basés sur des théories différentes, exprimés dans des langages différents, afin de répondre à la même question posée au même système de référence. Ainsi, la prévision du trafic routier pourra, selon les données disponibles, être aussi bien traitée par des modèles microscopiques, où chaque véhicule est représenté explicitement, que par des modèles macroscopiques, où l'ensemble des véhicules est considéré comme un flux. Le choix du type de modèle à utiliser dépendra pour une large part, donc, de la facilité avec laquelle ce dernier permet de retranscrire la question posée au système de référence par le scientifique.

I.2 LA SIMULATION

Une expérimentation sur le modèle

Bien que la notion de « simulation » ait été utilisée en sciences avant que les premiers ordinateurs n'apparaissent (dans l'acception d'« imitation d'un processus par un autre »[4]), c'est avec la disponibilité de systèmes informatiques de plus en plus puissants que cette pratique est devenue partie intégrante de la panoplie de nombreuses disciplines scientifiques, à tel point que le terme même de *simulation* ne désigne plus maintenant que des simulations *informatiques*. Ce sera d'ailleurs le cas dans la suite de notre propos.

4. Citons par exemple l'illustration des théories électromagnétiques de James Maxwell grâce à des analogies physiques ou mécaniques, les modèles mécaniques du comportement animal de Konrad Lorenz, le modèle électrique des fonctions homéostatiques de William Ross Ashby, etc.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Si nous nous référons à la littérature contemporaine sur le sujet (voir par exemple (Simpson 2006)), un rapide parcours des nombreuses définitions proposées pour le terme de simulation fait apparaître que cette activité comporte au moins trois grandes acceptions :

- La première, populaire dans les sciences sociales (voir (Gilbert and Troitzsch 2005)), la confond presque intégralement avec l'activité de construction de modèles dynamiques, donc considère que la simulation est un sous-ensemble de l'activité de modélisation définie plus haut.
- La deuxième, plutôt portée par les sciences expérimentales comme la physique ou la biologie, fait de la simulation une activité à part qui, « partant d'un modèle [dynamique], se donne comme but de construire des dispositifs expérimentaux qui feront réagir le modèle de la même façon que le système réel sur des aspects importants » (Trick 1996).
- La troisième, enfin, considère que la simulation (Shannon 1998) est à un modèle dynamique ce que l'expérimentation est à un système réel[5]. Dans cette perspective, où le modèle représente une certaine forme de compréhension d'un système de référence, la simulation est un ensemble de tests grâce auxquels il est possible pour un scientifique de raffiner cette compréhension et d'en tirer des connaissances nouvelles.

De ces trois acceptions, qui ne sont d'ailleurs pas antinomiques, nous retiendrons la dernière, car elle seule offre de la simulation l'image d'une activité spécifique avec ses règles, ses méthodes, et surtout un rôle dans l'exploration scientifique. Elle nous paraît de plus clairement représentative des pratiques actuelles de simulation, comme celles que nous présenterons dans cet ouvrage, qui apparaissent non seulement distinctes de la modélisation telle que nous l'avons définie, mais également non cantonnées à la seule construction de dispositifs expérimentaux.

Si nous partons de cette base pour donner une définition de la *simulation*, il est nécessaire de s'entendre sur ce qu'est une *expérimentation*. Nous nous référerons pour cela à l'acceptation consensuelle suivante.

Expérimentation — Activité par laquelle, en fonction d'objectifs précis, et à l'aide d'un dispositif expérimental, on perturbe selon un protocole déterminé un système réel pour en comprendre le fonctionnement.

En se calquant dessus, nous pouvons donner une première définition de la simulation, en prenant soin de préciser que seuls les modèles dynamiques sont susceptibles d'être soumis à ce processus : un modèle statique, par définition, ne peut pas être perturbé ni soumis à une quelconque évolution.

5. « *The process of designing a model of a real system and conducting experiments with this model for the purpose of understanding the behavior of the system and/or evaluating various strategies for the operation of the system.* »

Simulation *(première définition)* — Activité par laquelle, en fonction d'objectifs précis, et à l'aide d'un dispositif expérimental informatique (appelé *simulateur*), on perturbe selon un protocole déterminé un modèle *dynamique*.

Objectifs et usages de la simulation

Cette première définition a l'avantage, comme on peut le constater, de rester neutre quant aux objectifs assignés à la simulation. À la question « *pourquoi fait-on des simulations ?* », les réponses sont en effet multiples et il n'est pas toujours facile, dans le discours de ceux qui les pratiquent, de démêler ce qui ressort de la contrainte — « il n'est pas possible de faire autrement » — ou de la stratégie de recherche — « explorer le plus grand nombre de scénarios possibles » —, les deux étant souvent intimement mêlées. Or, la diversité des définitions constatées dans la section précédente provient pour une large part de celle des emplois de la simulation dans les différentes communautés scientifiques.

Nous allons présenter cette diversité d'objectifs et d'usage dans les paragraphes qui suivent, afin de mieux comprendre à quoi sert la simulation et en quoi elle constitue une activité spécifique qu'il convient de bien délimiter. Comme nous le verrons dans la section suivante, il est en effet possible d'en proposer une définition unique qui s'applique à ces différents cas de figure, en particulier dans le cas de la simulation par agents, où les concepts, préceptes méthodologiques, choix d'outils et méthodes de formalisation sont communs à tous les objectifs.

En premier lieu, nous allons classer les objectifs finaux habituellement assignés à la démarche de simulation par les scientifiques eux-mêmes (voir par exemple (Simpson 2006)). Ces objectifs sont subdivisés dans le tableau I.1 qui suit en cinq catégories.

Tableau I.1 Objectifs finaux de la simulation

La simulation peut être utilisée à des fins de ...	
Validation, Évaluation, Vérification	La simulation a comme objectif de tester une hypothèse du modèle du système de référence, de le vérifier ou d'accréditer la théorie qui a servi à le construire.
Communication, Formation, Visualisation	La simulation a comme objectif de « montrer » et de partager le modèle de la dynamique du système de référence.
Compréhension, Exploration, Explicitation	La simulation sert à comprendre le fonctionnement du système de référence, en considérant le modèle comme une réplique miniature qui pourra être étudiée plus facilement.
Contrôle, Action, Pilotage	La simulation a comme objectif de servir de support à une prise de décision ou à un contrôle qui influera sur l'état (réel) du système de référence.
Prévision, Prédiction, Anticipation	La simulation sert à prévoir les évolutions possibles du système de référence en fonction d'évolutions ou de perturbations spécifiques.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Ces objectifs peuvent évidemment être joints (on peut ainsi vouloir valider un modèle par simulation afin de pouvoir l'utiliser pour anticiper l'évolution de son système de référence). Ils se combinent aussi à différents usages qui concernent à la fois l'objet (le système de référence, le modèle de ce système, la théorie qui a servi à le construire) sur lequel les connaissances sont à acquérir par simulation et la façon dont celle-ci est utilisée en relation avec cet objet. Ces usages peuvent être classés en quatre grandes catégories, les deux premières étant plutôt liées à des démarches théoriques, les deux suivantes à des démarches expérimentales de recherche (tab. I.2).

Ces différents usages et objectifs assignés à la simulation ne sont évidemment pas sans conséquences sur la façon dont sont constitués les modèles. Ils vont par exemple influer sur le choix des hypothèses de simplification, sur le niveau de représentation du système de référence, sur le degré de fidélité que le modèle devra posséder à son égard, ou sur la façon dont il pourra être validé. Cependant, en plus d'influer sur le contenu du modèle, ils peuvent être déterminants quant au choix des techniques de modélisation et de simulation qui seront utilisées.

Simulateur et structure des modèles

À première vue, la définition de la simulation donnée à la section I.2.1 n'impose aucune contrainte particulière sur la structure des modèles dynamiques que l'on peut vouloir simuler, pas plus qu'elle ne donne d'objectifs particuliers au processus de simulation. Mais la nécessité d'utiliser un **simulateur**, dispositif informatique qui n'appartient ni au modèle ni au système de référence, va forcer à respecter certaines contraintes. Celles-ci sont de deux ordres :

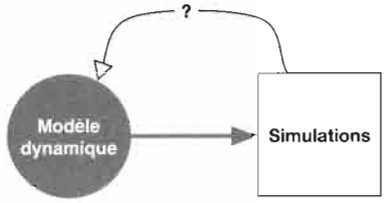
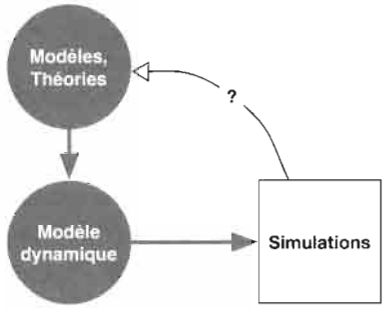
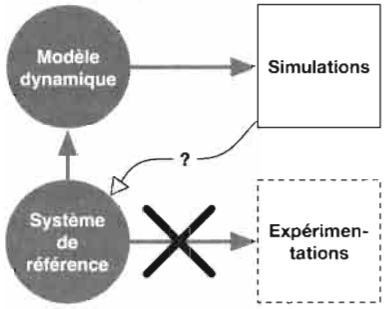
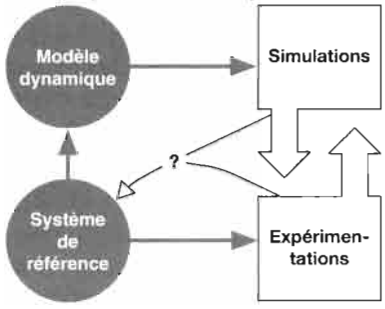
- **Des contraintes structurelles** définies par le simulateur, qui vont imposer une certaine forme de description et de formalisation du modèle.
- **Des contraintes d'accès** qui spécifient ce qu'implique le fait pour le modèle de pouvoir être « perturbé » et qui vont également prescrire une certaine forme de description.

Commençons par les premières, pour lesquelles une description plus précise de ce que nous entendons par « simulateur » est nécessaire ;

Simulateur — Programme (ou plate-forme) informatique capable d'interpréter des modèles dynamiques, et utilisé(e) pour produire les perturbations désirées sur ces modèles.

L'une des conséquences de cette définition est qu'il faut que le modèle dynamique puisse être interprété par le simulateur ou, en d'autres termes, que le simulateur puisse « comprendre » le modèle afin de pouvoir le perturber. Ceci implique, d'une part, que le langage dans lequel est exprimé le modèle soit formalisé (et traduisible, éventuellement à terme, en langage informatique) et, d'autre part, que les concepts de modélisation employés soient communs au modèle et au simulateur (sans quoi l'idée même d'interprétation n'a pas de sens). Un modèle dynamique devant être simulé dans un

Tableau I.2 Les différents usages

La simulation peut être utilisée en tant que...	
Technique de modélisation 	La simulation sert ici à explorer en détail la dynamique d'un modèle. Par exemple, elle permet de vérifier qu'il reste cohérent, en terme de dynamique, jusque dans certaines limites de valeurs ou de paramètres. C'est un usage à vocation « interne », sans connexion véritable avec le système de référence du modèle.
Démarche heuristique de recherche 	La simulation est utilisée pour développer des hypothèses, d'autres modèles, ou pour affiner leurs théories sous-jacentes. Il s'agit d'un mode exploratoire qui sert par exemple de support aux expériences de pensée (courantes en sciences (Dennett 1991)). Aucun retour n'est *a priori* prévu sur le système de référence du modèle (s'il existe ; en effet, cet usage de la simulation est particulièrement développé concernant les modèles généraux liés à des théories, qui n'ont pas de lien avec un système réel).
Substitut à l'expérimentation 	Quand aucune expérimentation ne peut être menée sur le système de référence, pour des raisons éthiques, légales (présence d'humains, d'animaux), pratiques (durée, faisabilité) ou économiques, la simulation est utilisée pour mener des expérimentations « par procuration » sur un modèle qui se substitue à ce système. Il s'agit d'un usage répandu de la simulation, qui peut d'ailleurs être volontaire, et c'est souvent le plus critiqué dans la mesure où le lien d'inférence réalisé suppose que le modèle est une représentation fidèle du système.
Accompagnement de l'expérimentation 	De façon moins radicale que dans l'usage précédent, la simulation est ici utilisée comme support ou comme complément à des expérimentations sur le système de référence, en accompagnant la démarche expérimentale « réelle », et parfois même en la pilotant. Cet usage permet par exemple d'anticiper sur des résultats, de préconiser des mesures, ou encore de quantifier la distance entre modèle et système de référence.

simulateur particulier doit donc respecter ces deux types de contraintes structurelles. Celles-ci sont habituellement formalisées dans ce que l'on appelle un *méta-modèle*, dont nous donnons une définition ci-dessous dans le cadre de la simulation.

Méta-modèle — Un méta-modèle est le modèle du langage de modélisation dans lequel sont exprimés les modèles dynamiques qu'un simulateur est censé pouvoir interpréter. Le méta-modèle définit des concepts de modélisation, leurs propriétés et les relations existant entre ces concepts indépendamment des techniques d'implémentation informatique utilisées par le simulateur.

L'utilisation d'un simulateur en particulier va donc imposer l'usage d'un méta-modèle spécifique pour décrire le modèle dynamique. Chaque technique de simulation (à base d'agents, mathématique, à base de processus, à base d'automates cellulaires, etc.) va ainsi définir un méta-modèle propre (voire plusieurs). Il est à noter que ces méta-modèles doivent être compris comme donnant les grandes lignes de description du modèle, mais pas comme des spécifications détaillées. Ils sont en particulier indépendants des techniques d'implémentation (langages, plates-formes, matériels) des simulateurs qui les partagent et ne règlent donc pas le problème d'obtenir un programme informatique qui fonctionne correctement.

De plus, si le méta-modèle définit la syntaxe du modèle, il reste également indépendant de l'objectif de la simulation, c'est-à-dire de ce que l'on souhaite perturber et observer en réponse à cette perturbation. Cet objectif va définir le deuxième type de contraintes auquel l'écriture du modèle sera soumise, les contraintes d'accès.

Un modèle dynamique renferme en effet deux composants distincts : une représentation de la structure du système de référence (exprimée dans le langage du méta-modèle), et une représentation des lois régissant sa dynamique. Ces deux représentations sont habituellement pourvues de données ou d'éléments d'information souvent numériques (le minimum pour un modèle dynamique étant d'être pourvu d'un élément représentant le temps) appelés **paramètres**. La « perturbation » d'un modèle par simulation va donc signifier la modification contrôlée de la valeur de certains de ces paramètres, que l'on appellera **entrées** du modèle. Inversement, ce que l'on pourra mesurer dans une simulation sera décrit sous la forme d'autres paramètres qui seront appelés **sorties**.

Entrées et sorties — Les *entrées* d'un modèle dynamique sont des paramètres dont la valeur est définie en dehors du modèle et qui représentent ce que le simulateur peut perturber. Les *sorties* d'un modèle dynamique sont également des paramètres qui expriment ce que l'on cherche à mesurer en réponse à ces perturbations.

Ainsi, par exemple, un modèle simple décrivant l'évolution d'une population pourra avoir comme entrées un stock initial, un taux d'accroissement, un échéancier d'observation, et sa sortie mesurable sera l'effectif de la population pour chaque

période de temps. Réaliser une expérimentation sur ce type de modèle, donc une simulation, va tout simplement consister à faire varier les entrées en fonction d'un certain nombre d'hypothèses, et à mesurer les sorties correspondantes. La description structurelle du modèle restant constante, on obtiendra un certain nombre de résultats sous hypothèses qui représenteront les résultats de la simulation. Dans tous les cas, et c'est bien pour cela que l'on peut parler d'« expérimentation », les modélisateurs se donnent donc des hypothèses de modification ou de perturbation du modèle et les moyens de mesurer sa réaction.

Face à ces perturbations, on distingue classiquement deux grandes familles de modèles dynamiques : les modèles déterministes et les modèles stochastiques.

Modèles déterministes et stochastiques — Un modèle dynamique *déterministe* ne contient aucun paramètre dépendant du hasard. Inversement, un modèle *stochastique* disposera d'une ou plusieurs entrées ayant des valeurs comportant une part d'aléatoire.

Un modèle déterministe produira donc toujours la même réponse si on lui fournit les mêmes entrées initiales. Une simulation sur un modèle stochastique, par contre, pourra générer des sorties différentes à chaque expérimentation (ce dont le processus expérimental devra tenir compte).

Pour résumer, il est possible, à l'aide des éléments que nous avons passé en revue, de préciser la définition de simulation donnée précédemment.

Simulation (*définition complète*) — La simulation est l'activité au cours de laquelle, selon un protocole et avec un objectif précis, on utilise un simulateur pour faire évoluer les entrées d'un modèle dynamique, l'exécuter, et en recueillir les sorties. Tout modèle écrit en respectant le méta-modèle associé au simulateur et comportant au moins un paramètre d'entrée peut se prêter à ce processus de simulation.

Cependant, comme nous allons le voir, il ne suffit pas pour un modèle de respecter ces deux conditions pour pouvoir être immédiatement simulé. Se pose en effet la question de l'exécution du modèle par le simulateur.

Conception de simulations

La simulation est une expérimentation qui utilise un programme informatique comme dispositif expérimental. Le modèle à simuler doit donc, d'une façon ou d'une autre, être écrit lui-même sous la forme d'un programme[6]. Quand c'est le cas, il est appelé *modèle opérationnel.*

6. Ou bien d'une description formelle et non ambiguë dont la syntaxe est comprise par un simulateur, ce qui revient au même.

Modèle opérationnel : Modèle dynamique spécifié dans un langage qui respecte le méta-modèle associé à un simulateur, et qui peut être directement interprété ou exécuté par ce simulateur.

Le simple respect d'un méta-modèle dans la modélisation d'un système de référence, puisqu'il ne fait que permettre de choisir les entités et les relations qu'il faudra décrire, ne permet pas d'obtenir un programme exécutable, donc un modèle opérationnel.

Toutes proportions gardées, une analogie peut être réalisée avec l'usage d'UML (*Universal Modeling Language*, ou « langage universel de modélisation »), en génie logiciel, qui permet de constituer le modèle d'un (futur) programme informatique (Fannader 1999). UML définit en effet un méta-modèle (à base de classes dotées d'attributs et de relations entre ces classes), mais les modèles d'application décrits de cette façon doivent ensuite être traduits dans des langages informatiques (Java, C++, Smalltalk, etc.) et adaptés à des plates-formes spécifiques pour pouvoir être exécutés.

Là où UML a réussi à harmoniser, peu à peu, les notations et les concepts utilisés en génie logiciel, il n'en est pas de même dans le cas de la simulation.

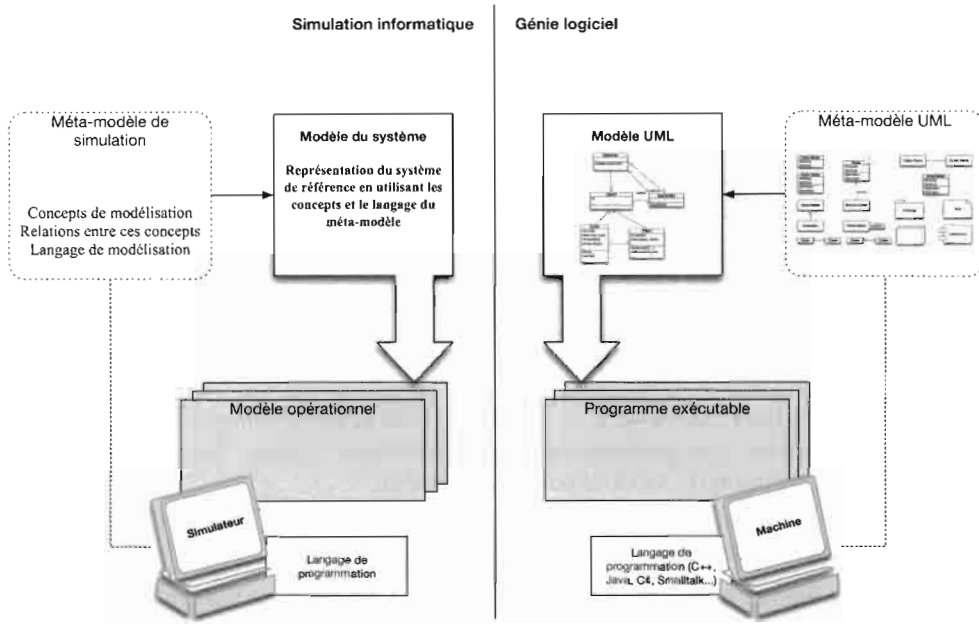


Figure I.1 Parallèle entre l'usage du méta-modèle UML en génie logiciel et celui qui en est fait en simulation.

Le modèle initial obtenu par application du méta-modèle du simulateur au système de référence, qui n'est donc pas exécutable tel quel par ce simulateur, sera appelé *modèle de référence*. En tant que tel, il n'est lié qu'au méta-modèle et pourrait tout à fait être exécuté par un autre simulateur spécifiant ce même méta-modèle.

La figure I.2 propose, sous une forme volontairement « idéalisée », la démarche qui permet d'aboutir, à partir de ce modèle de référence, à un *modèle opérationnel,* c'est-à-dire un programme exécutable. Elle est « idéale » dans le sens où elle est présentée comme linéaire, ce qui est rarement le cas dans la réalité, où des parcours multiples et itératifs sont plutôt la norme. Ce schéma n'a donc pas vocation à être interprété à la lettre, mais plutôt à fournir un cadre permettant de fixer certaines notions que nous utiliserons par la suite.

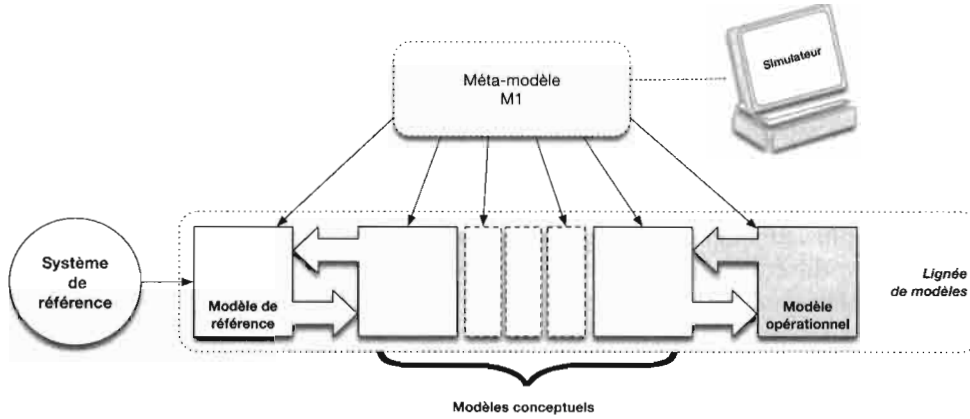


Figure I.2 Séquence conduisant d'un modèle de référence à un modèle opérationnel.

Le passage du modèle de référence au modèle opérationnel va être basé sur la réalisation successive d'un ou plusieurs *modèle(s) conceptuel(s)*, que nous pouvons définir de la façon suivante.

Modèle conceptuel — Raffinement ou reformulation du modèle de référence, dans le cadre du méta-modèle imposé par le simulateur, qui tend vers un programme informatique exécutable sur le simulateur.

Cette étape, ou cette succession d'étapes entre lesquelles de multiples allers-retours sont permis, sert à décrire plus finement la logique interne et certaines propriétés du modèle de référence et à analyser les connaissances manquantes ou impossibles à représenter avec les concepts choisis. Tout comme le modèle de référence, le modèle conceptuel est rarement implémentable tel quel sur machine même s'il commence à intégrer des notions qui ressortent de l'implémentation plutôt que de la modélisation. Comme pour les modèles mathématiques qui imposent une représentation régie par ce qu'il est possible ou impossible d'écrire sous formes d'équations, la simulation informatique exige de se poser des questions *informatiques* pour pouvoir produire un programme qui soit tout à la fois exécutable sur machine et fidèle au cadre défini par le modèle de référence. Seront ainsi progressivement intégrés dans ces spécialisations du modèle de référence, des mécanismes que nous verrons plus en détail dans la suite de l'ouvrage : gestion du temps, gestion du parallélisme, gestion du déploiement, choix de techniques particulières d'exécution, etc.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Le produit de la dernière étape est le *modèle opérationnel*, qui est donc le programme exécutable par le simulateur choisi. Celui-ci est écrit dans le langage d'implémentation défini par le simulateur, et s'insère dans la ou les plates-formes sur lesquelles le modèle est porté, choix qui tous auront des conséquences non négligeables (bien que souvent sous-estimées) sur les résultats des simulations et leur fidélité aux modèles précédents. Dans le modèle opérationnel sont aussi décrites certaines des caractéristiques de l'exécution de la simulation : interface utilisateur, liaison avec des bases de données (par exemple géographiques), outils d'automatisation des expérimentations, etc. Toutes ces connaissances qui n'ont *a priori* pas leur place dans le modèle de référence et les différents modèles conceptuels, mais qui, pour certaines, sont essentielles à la mise en œuvre d'une simulation informatique, se retrouvent donc dans ce modèle.

La succession de modèles, depuis le modèle de référence jusqu'au modèle opérationnel, est appelée *lignée de modèles*. Il peut exister, pour un même modèle de référence, plusieurs lignées de modèles aboutissant à des modèles opérationnels exécutables par différents simulateurs (à condition que ceux-ci, bien entendu, spécifient le même méta-modèle). La séparation entre les différentes lignées peut se produire à n'importe quel moment, soit dès la mise en place des premiers modèles conceptuels (voir figure I.3), soit plus tard, par exemple lors du choix d'un simulateur précis. Cette notion de lignée de modèle est essentielle, dans la mesure où une simulation

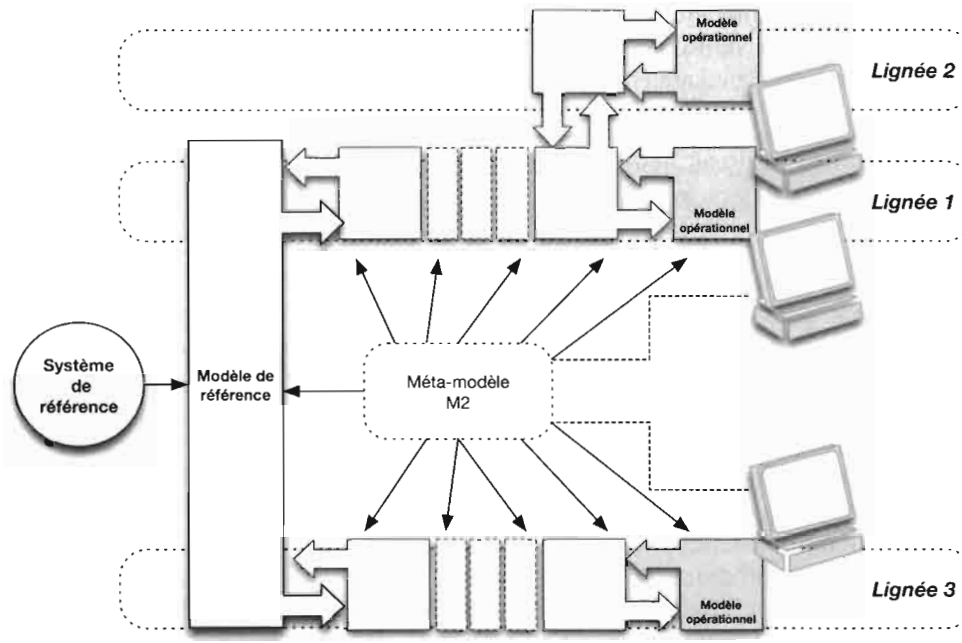


Figure I.3 Trois lignées de modèles issues du même modèle de référence.

sera toujours réalisée sur le modèle opérationnel, et que seule une lignée correctement construite pourra garantir que celui-ci est conforme à ce qui est défini dans le modèle de référence.

Toutes ces lignées constituent une *famille de modèles,* qui est donc organisée autour d'un méta-modèle commun. Dans le domaine de la modélisation, il sera ainsi possible d'identifier des familles spécifiques et, selon la précision du méta-modèle employé, des sous-familles au sein de chacune d'entre elles.

I.3 LA SIMULATION À BASE D'AGENTS

Le présent ouvrage ne va s'intéresser qu'aux lignées de modèles donnant naissance à des modèles opérationnels *à base d'agents* : au méta-modèle qu'ils partagent, à la façon de les construire, aux simulateurs existants. Une comparaison sera cependant réalisée à certains endroits entre ces modèles et d'autres choix possibles de modélisation.

Les méta-modèles que partagent les approches de simulation à base d'agents proviennent du domaine de l'intelligence artificielle, et plus précisément de celui des systèmes multi-agents (SMA) (Ferber 1995). Malgré de nombreux travaux en ce sens (Bauer, Müller et al. 2001), cette discipline encore jeune n'offre pas encore de formalisation standard des abstractions qu'elle propose au modélisateur, et nous verrons dans la suite du livre qu'elles peuvent être de plus soumises à de multiples interprétations. Il n'existe donc pas « un » méta-modèle à base d'agents (comme il existe par exemple « un » méta-modèle orienté objet), mais une multitude de méta-modèles qui se distinguent les uns des autres par des spécifications plus ou moins poussées de certains de leurs composants ou par leur degré de dépendance ou d'indépendance vis-à-vis des simulateurs existants.

Il est, bien entendu, possible de distinguer ce qui constitue le noyau commun à tous ces méta-modèles et qui fonde, justement, ce que l'on appelle l'« approche à base d'agents » de la simulation. Nous en proposons une présentation intuitive et générique ci-après, sur laquelle nous reviendrons plus en détail dans la deuxième partie de l'ouvrage.

Modèle à base d'agents — Tout modèle à base d'agent est un système composé d'entités multiples ou *agents* qui évoluent dans un *environnement*, conçu comme une entité particulière, dans lequel ils sont localisés. Ces agents sont dotés d'*attributs*, de *comportements*, et de capacités de *perception* et de *communication*. L'ensemble des valeurs des attributs d'une entité à un instant donné constitue l'*état* de cette entité, et la réunion de l'ensemble des états des entités forme l'*état microscopique* ou — dit plus simplement — l'*état du système*. Les capacités de perception des entités leur permettent de consulter un sous-ensemble de cet état microscopique, habituellement de façon localisée dans l'environnement. Les comportements sont des règles contrôlant à chaque instant l'évolution de cet état, en intervenant sur les états des entités qui les portent ou sur leur existence même

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

(création et destruction), ainsi que sur les états et existences des autres entités intervenant dans les éventuelles *actions, communications* ou *interactions* décrites dans les comportements.

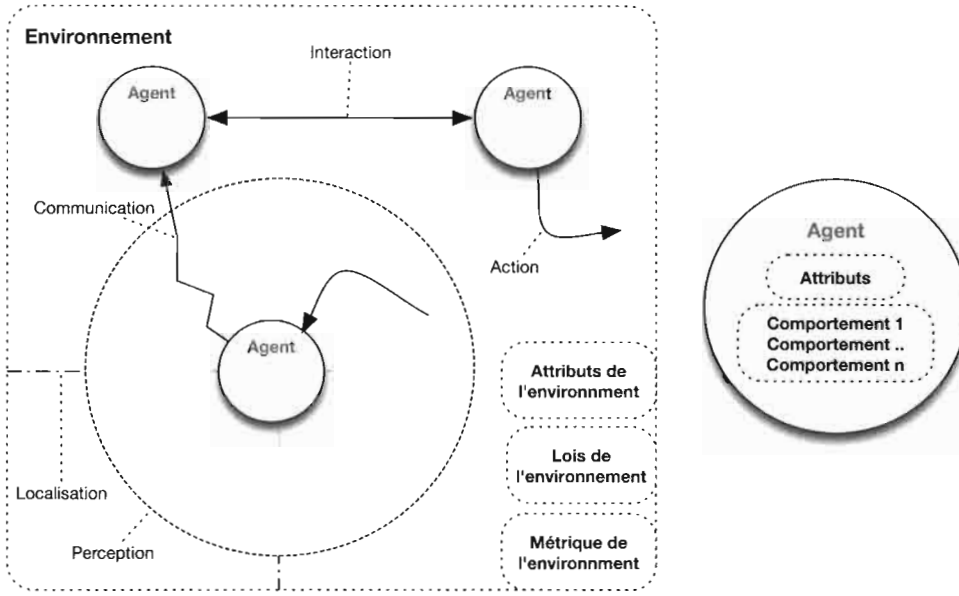


Figure I.4 Une représentation simplifiée d'un modèle à base d'agents.

Comme on peut le constater, cette présentation informelle (figure I.4), si elle fixe un certain vocabulaire, n'impose cependant aucune contrainte particulière sur la structure des entités et des comportements pas plus qu'elle ne fournit d'indications sur une « agentification » particulière. De nombreux méta-modèles « agents » ont ainsi été proposés dans la littérature : communication entre agents (FIPA 2007), mécanismes d'exécution des comportements (Wooldridge, Jennings et al. 2004), réification des groupes d'agents (Ferber, Gutknecht et al. 2004), interaction avec l'environnement (Marilleau 2006), etc. Ils restent tous, cependant, à de rares exceptions près, indépendants du domaine auquel ils s'appliquent et des outils logiciels qui les implémentent. C'est d'ailleurs cette généricité (qui permet d'appréhender des systèmes de référence très différents, et qui autorise l'emploi de multiples techniques de simulation) qui constitue la force actuelle des approches à base d'agents. Tous les systèmes étudiés, pour peu que cela ait un sens par rapport à la question de modélisation, peuvent en effet être décrits sous cette forme, qui n'est pas sans rappeler certaines des définitions de base de la systémique. Malheureusement, c'est aussi ce qui en constitue la principale faiblesse, la diversité des travaux regroupés sous cette bannière rendant difficiles la définition d'un véritable cadre méthodologique commun ainsi que la réutilisation des travaux existants.

Cet ouvrage est organisé en prenant cette diversité comme point de départ d'une réflexion plus approfondie sur l'unicité de ces différentes pratiques : la première partie, sous formes d'exemples piochés dans différentes disciplines, permettra de se rendre compte de la richesse de cette approche, cependant que les deuxième et troisième parties se préoccuperont de définir l'ossature informatique, méthodologique et mathématique qui permettra de mieux comprendre ses potentialités et ses limites.

Chapitre 1

Modèles physiques

1.1 GranuLab : mécanique des milieux granulaires

Comprendre la formation d'états d'équilibre dans les empilements de grain (par exemple, la formation d'arches dans les silos à blé) et sous l'influence de quels facteurs ces équilibres peuvent se rompre en entraînant des conséquences parfois catastrophiques est l'un des enjeux de la physique des matériaux granulaires.

GranuLab[1] est un modèle à base d'agents dont les agents représentent les grains d'un matériau granulaire. Leurs interactions expriment d'une part les forces que les grains exercent mutuellement les uns sur les autres et d'autre part le cas échéant les forces de contact avec les parois du silo.

L'objectif des simulations menées à partir de ce modèle est de calculer des états d'équilibre de l'empilement et de faire apparaître les lignes de force qui les structurent (fig. 1.1). On peut alors mesurer diverses propriétés statistiques, importantes pour la compréhension des phénomènes étudiés, comme l'histogramme de distribution des forces s'exerçant sur les grains, la répartition spatiale des forces sur les parois du réservoir ou la transmission d'une surcharge appliquée en un point.

1.1.1 La question scientifique

La question scientifique sous-jacente à GranuLab, pour ce qui concerne la physique, a pour contexte les problèmes rencontrés dans la caractérisation et la compréhension du comportement des matériaux granulaires, et plus spécifiquement le

1. Ce modèle a été réalisé par Laurent Breton, Éric Clément et Jean-Daniel Zucker dans le cadre d'une collaboration entre le LIP6 et le LMDH (laboratoires respectivement d'informatique et de physique des granulaires). Le travail s'est déroulé entre 1998 et 2001. Les principales références utiles à la compréhension du modèle sont la thèse de Laurent Breton soutenue au LIP6 ainsi que des articles publiés dans *Europhysic Letter* et des conférences d'IA (Intelligence artificielle) : (Breton, Zucker et al. 1999 ; Breton, Zucker et al. 2000 ; Breton, Zucker et al. 2000 ; Breton 2002 ; Breton, Claudin et al. 2002).

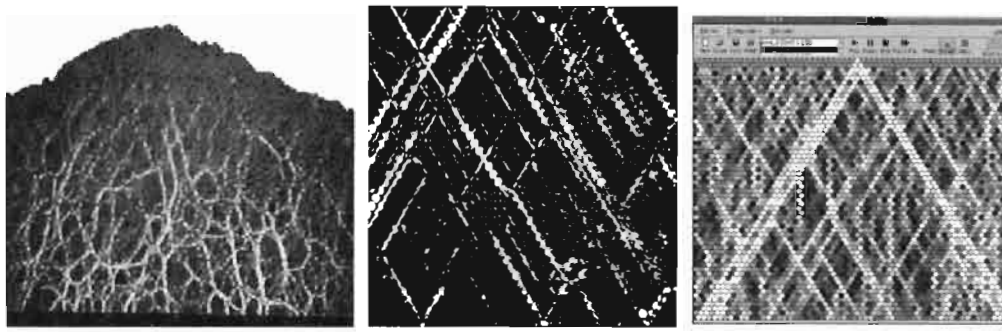


Figure 1.1 Lignes de forces : a) d'un tas supportant son propre poids ; b) d'un tas confiné sous pression ; c) telles qu'émergeant dans le modèle multi-agents GRANULAB.

comportement des empilements de grains. Difficultés expérimentales et théoriques se conjuguent pour freiner l'établissement de consensus sur les lois empiriques et sur leurs explications à partir des principes fondamentaux de la mécanique des solides.

Prenons comme exemple la recherche d'une loi empirique décrivant la distribution des forces s'exerçant entre les grains et avec les parois du réservoir contenant le matériau granulaire. Un des enjeux de cette loi est l'évaluation du risque qu'une partie des grains soit soumise à des forces incompatibles avec leur intégrité physique, circonstance pouvant entraîner des conséquences majeures sur l'ensemble du système. Le rythme avec lequel décroît la probabilité d'observer des forces supérieures à une valeur donnée est évidemment important à connaître de ce point de vue. Il en est de même pour le comportement de cette loi de probabilité au voisinage de forces nulles, la question étant de savoir s'il y a une proportion non négligeable de grains soumis à des forces très faibles, indiquant ainsi une répartition très hétérogène de la charge. Des formules ont été proposées pour de telles lois, mais leur validation expérimentale, leur justification théorique, leur dépendance par rapport aux paramètres et propriétés du matériau et à la manière dont a été réalisé l'empilement, l'existence de transitions dans les formes de ces lois lorsque l'on s'approche de cas limites — par exemple, frottements nuls entres les grains — font encore débat.

Les lois de distribution en discussion ci-dessus sont par essence globales. Une analyse spatialisée de la structure mécanique de l'empilement s'avère également importante. Prenons par exemple la loi gouvernant la répartition spatiale de la charge sur le fond du réservoir : à quel endroit cette charge est maximale, comment varie-t-elle du centre vers les parois, et la manière dont l'empilement granulaire va transmettre dans sa masse et sur les différentes parois, un supplément de charge appliqué sur l'un des points de la surface. En descendant vers encore plus de détail, c'est aux matrices de toutes ces lois — c'est-à-dire aux réseaux des forces régnant dans les empilements — que l'on va s'intéresser. Il s'agira en particulier d'étudier dans quelle mesure les lois globales de distribution et leur variantes spatialisées (niveau macro et mésoscopique) sont sensibles à la structure détaillée de ces réseaux (niveau microscopique).

Empilement de grains et réseaux de forces : une approche statistique

Un empilement de grains peut être modélisé par un graphe dont les nœuds sont les grains et les arêtes les contacts entre les grains. Nœuds et arêtes sont associés à des informations complétant la description géométrique et consignant la structure mécanique de l'empilement :

Concernant la géométrie,

pour chaque grain i la position G_i de son centre de gravité ;

pour chaque contact ij entre deux grains adjacents i et j, la position C_{ij}du centre de la zone de contact, la direction D_{ij} de la droite normale à la surface de contact.

Concernant la mécanique,

pour chaque grain son poids P_i ;

pour chaque contact les deux vecteurs F_{ij} et F_{ji} représentant respectivement la force exercée par le grain i sur le grain j et celle exercée par le grain j sur le grain i. En vertu du principe d'égalité entre l'action et la réaction, ces deux vecteurs sont deux vecteurs opposés. Le réseau de forces structurant la mécanique de l'empilement s'identifie au champ de vecteurs dont les points d'application sont les positions des points de contact et les valeurs les forces de contact $F_{ij} = -F_{ji}$correspondantes. Quelques techniques permettent de le visualiser, l'œil y perçoit alors des lignes de forces que des algorithmes permettent de reconstruire.

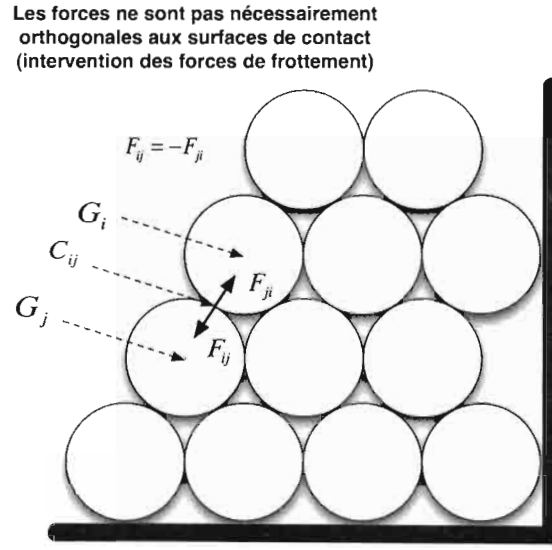


Figure 1.2 Description géométrique et mécanique des grains

L'étude d'un empilement réel de grains ayant atteint un état d'équilibre statique reste pour GRANULAB dans le domaine de la physique classique : on considère qu'entre deux grains s'exerce une force parfaitement fixée, même si cette force est difficile à mesurer sans perturber l'empilement. Le réseau des forces présentes ne fait

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

conceptuellement l'objet d'aucune indétermination. Mais, à l'instar de ce qui se passe pour les positions et les vitesses des molécules d'un gaz à un instant donné, le calcul de ce réseau des forces est en pratique hors d'atteinte : les incertitudes sur la rugosité exacte des grains, leur déformabilité, l'orientation exacte des points de contacts sont trop grandes pour qu'un modèle complètement déterministe ait un sens. On ne peut que poser, au niveau de chaque grain et chaque contact, certaines contraintes. Ces contraintes comportent des équations (l'équilibre des forces, l'équilibre des moments) et des inéquations (liées à l'existence des forces de frottement), en nombre insuffisant par rapport à celui des grandeurs à calculer. Leur combinaison pour tous les grains détermine non pas un seul réseau, mais une distribution de réseaux possibles, distribution dont on pourra donner la moyenne et mesurer l'étendue. En résumé, on ne peut donc avoir d'un empilement qu'une approche statistique donnant au mieux la probabilité que le réseau des forces ait telle ou telle configuration.

1.1.2 Les raisons avancées pour une approche agent

L'approche proposée peut être classée d'emblée dans les approches particulaires, puisqu'elle part de l'hypothèse de la nécessité de s'appuyer sur une représentation explicite des grains. Elle est d'ailleurs mise en comparaison avec d'autres méthodes particulaires basées sur le même postulat, opérant sur les mêmes représentations granulaires avec le même modèle mécanique d'équilibre. On peut dès lors se demander ce que la qualification d'approche agent apporte de spécifique. La raison de la référence aux agents prend racine dans la manière dont est conçu et programmé l'algorithme de calcul des réseaux de forces à l'équilibre. Deux plans apparaissent :

- La représentation informatique du grain, basée sur l'emboîtement de couches, rôles ou niveaux regroupant des informations et procédures de calculs qui leur sont propres. La désignation de ces niveaux s'inspire, comme il est fréquent dans les systèmes d'agents, d'une métaphore sociale, et l'on parle ainsi d'un premier niveau individuel, d'un second niveau relationnel ou topologique et enfin d'un niveau social.
- L'organisation de la succession des calculs entre les grains. Cette succession s'effectue selon une procédure dite d'éco-résolution, s'inspirant de la manière dont des individus peuvent se pousser itérativement les uns les autres jusqu'à trouver une situation suffisamment favorable pour chacun.

Dans l'approche proposée comme dans les autres méthodes, il est admis que le nombre de grains considérés doit être important pour que les simulations entreprises puissent rendre compte des propriétés des systèmes réels. Les questions de performance sont donc cruciales, d'autant que l'étude d'un système passe par la description de la variété des solutions d'équilibre possibles, et donc nécessairement par un grand nombre de simulations du même empilement. Aussi la première justification de la méthode est la performance, l'algorithme proposé permettant de prendre en compte des tailles d'empilement bien supérieures à celui de la méthode prise comme base de comparaison. Les équilibres d'empilements d'un million de grains ont pu ainsi

être calculés. Vient aussi un argument de facilité d'adaptation à une complexité plus grande des empilements, telles qu'une hétérogénéité de taille des grains et du nombre de points de contacts. Vient enfin la capacité de la notion d'agent à représenter des objets de granularité moins fine, tels que les différentes couches de l'empilement, voire les lignes de forces elles-mêmes, et de pouvoir prendre en compte et utiliser des modèles et connaissances spécifiques à de tels groupements.

Dans ces questions de comparaison, un point important est de savoir si l'ensemble des solutions d'équilibre que l'algorithme peut produire correspond bien à la variété des solutions possibles, en fait si cet ensemble est au moins aussi représentatif que celui produit par la méthode prise par comparaison. Une meilleure performance ne signifierait rien si ce n'était pas le cas.

1.1.3 Échelles spatio-temporelles et granularité

L'objectif étant le calcul d'un équilibre statique, la dimension temporelle du temps simulé n'intervient pas explicitement dans GRANULAB. Concernant la dimension spatiale, la littérature citée et relatant des protocoles expérimentaux fait état de tailles de grains de l'ordre du millimètre. Le nombre de grains donne la vraie dimension des modèles concernés. Dans les simulations faites pour comparaison avec d'autres méthodes, ce nombre varie de 100 grains à quelques 120 000 grains en empilements plans de 10*10 jusqu'à 350*350. Mais des simulations sur un million de grains ont pu être conduites dans des temps de calcul raisonnables.

Vient ensuite la plage de variation d'un paramètre mécanique essentiel, celui du coefficient de frottement des grains les uns sur les autres, qui peut varier d'un ordre de grandeur, en couvrant l'étendue des valeurs possibles pour les matériaux étudiés.

1.1.4 Les agents, leurs attributs, leur organisation

Un premier agent est le grain, avec trois niveaux hiérarchisés de description :

- **niveau individuel** avec la masse, le rayon, la position du centre ;
- **niveau relationnel**, avec les données géométriques et mécaniques sur les points de contact et la connaissance de l'identité des grains voisins correspondants ;
- **niveau social**, avec les autres informations mises en jeu dans son « dialogue » avec les grains voisins au cours de la recherche itérative de l'équilibre.

Une hiérarchie fixe entre les grains est introduite de la manière suivante. Les points de contacts de chaque grain sont répartis en trois catégories : les contacts entrées (ou points de contacts supérieurs), les contacts sorties (ou points de contacts inférieurs) et les contacts neutres (ou points de contacts latéraux). Un contact entrée pour un grain est un contact sortie pour le grain voisin correspondant. Un contact neutre pour un grain est également neutre pour son voisin. Comme deux grains voisins n'ont qu'un seul contact, la classification précédente introduit une relation entre les grains : un grain i est une entrée, une sortie, un grain neutre, pour un grain j si leur (unique)

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

point de contact *ij* est respectivement un contact entrée, un contact sortie, un contact neutre pour le grain *i*. Dans les cas étudiés, cette relation est un ordre partiel, excluant toute boucle dans le réseau des entrées sorties.

1.1.5 Les comportements ou mécanismes

Le calcul d'un réseau des forces assurant l'équilibre mécanique de l'empilement est une suite d'opérations élémentaires faites au niveau des grains, Ces opérations sont désignées sous le terme de résolution « individuelle » : il s'agit, pour un grain, à partir de la donnée des forces auxquelles il est soumis sur ses entrées et des équations et inéquations exprimant l'équilibre, de calculer les forces qu'il va appliquer sur ses sorties. Au cours de ce calcul, des échecs peuvent se produire, traduisant l'impossibilité de trouver un jeu de forces de sorties compatibles avec les forces d'entrées prises en compte. Des retours en arrière sont donc nécessaires, et un grain donné pourra être amené à exécuter plusieurs fois cette résolution individuelle. La performance de l'algorithme se mesure au nombre de résolutions individuelles permettant — en moyenne sur plusieurs simulations — l'obtention d'un équilibre.

Chaque résolution individuelle change l'état du système pour la suite du calcul, dont le mode opératoire peut donc être qualifié d'asynchrone. L'originalité de l'algorithme proposé, par rapport à ceux d'autres méthodes, réside dans la façon d'organiser l'ordonnancement des résolutions individuelles. À chaque instant du calcul, dans son principe, les grains sont répartis en trois catégories :

- **les grains « résolus »** qui à partir de forces d'entrées connues ont pu déterminer un jeu de forces à appliquer à leur sorties assurant l'équilibre ;
- **les grains « à résoudre »** dont les forces d'entrées sont connues mais qui n'ont pas encore de forces de sorties vérifiées compatibles ;
- **les grains « en attente »** pour lesquels au moins une des forces d'entrée est inconnue.

Plusieurs aspects de l'algorithme doivent être soulignés :

- La possibilité pour un grain en échec — donc un grain « à résoudre » — de demander à l'une de ses entrées — donc un grain résolu — de recalculer éventuellement plusieurs fois son jeu de forces de sorties, afin d'explorer la possibilité de sortir de l'échec avec la nouvelle configuration de forces d'entrée résultante.
- La possibilité de choisir entre plusieurs heuristiques pour déterminer à chaque étape du calcul, le grain prioritaire dans la liste des grains à résoudre. Les performances de l'algorithme sont très sensibles à l'heuristique mise en œuvre, une heuristique pouvant s'avérer adéquate ou inadéquate selon les contraintes géométriques et mécaniques globales imposées à l'empilement, par exemple selon la présence ou non de l'action de la pesanteur.
- Le caractère stochastique du résultat du calcul au niveau de chaque grain. Conformément aux modèles théoriques, chaque grain reporte la charge totale qu'il reçoit

en entrée en la répartissant d'une manière aléatoire sur ses sorties, dans la fourchette des valeurs permises. Chaque exécution de l'algorithme sur le même empilement conduit donc à un réseau de forces différent.

1.1.6 L'implémentation informatique

L'implémentation informatique mise en œuvre dans GRANULAB comporte de multiples aspects. L'implémentation d'une approche particulaire du problème à l'aide d'une idée algorithmique, de métaphores et de concepts issus des systèmes d'agents n'est pas le seul point à retenir. On notera ici :

- La spécification d'un laboratoire virtuel comme ensemble (de types) d'objets d'études et d'opérateurs calculant sur ces objets. Par exemple, un empilement est un objet d'étude, la création d'un empilement par lâchage de grains « en pluie » est un opérateur. Un ensemble d'empilements résolus est un objet d'étude, le calcul à partir de cet ensemble du réseau moyen des forces est un opérateur. L'établissement de la liste des types d'objets d'études et celles des opérateurs constitue le cadre dans lequel les physiciens et informaticiens vont dialoguer pour construire le laboratoire virtuel. Ce dernier peut alors se schématiser comme un hypergraphe dont les nœuds sont les types d'objets et les arêtes les opérateurs.
- Le choix systématique du langage XML pour représenter les objets d'études. On dispose ainsi d'un mode de représentation pivot, permettant d'importer et d'exporter les données décrivant ces objets vers d'autres applications, et servant de norme d'entrée et de sortie à la programmation des opérateurs.
- Le choix de programmer les opérateurs comme un assemblage de composants logiciels en nombre limité, basés sur un modèle générique de composant opérant sur des canaux d'entrée et de sortie spécifiés. Ce choix permet de changer un algorithme de traitement, sans avoir à reconsidérer l'architecture de l'opérateur ni celle des objets d'étude concernés.

1.1.7 L'exploitation du modèle et l'apport au domaine

GRANULAB se présente comme un laboratoire virtuel sur les empilements de matériaux granulaires. Une première démarche s'est attachée à établir la confiance dans les résultats des expérimentations virtuelles pouvant être conduites avec un tel outil. Elle a donc cherché donc à montrer, sur des cas contrôlés, que l'on retrouvait les résultats obtenus sur des expériences réelles ou encore déduits de modèles théoriques. Une des lois sur laquelle cette démarche de mise en confiance s'est ainsi appuyée est celle régissant la manière dont la masse de l'empilement transmet une surcharge appliquée en surface, pour différentes valeurs de paramètres de frottement inter-grains. Cette loi est déduite analytiquement d'hypothèses sur la manière dont la surcharge se transmet de grains en grains. Elle se présente comme une fonction donnant la répartition de la surcharge selon la distance à l'axe de l'empilement sur une couche donnée. Les hypothèses laissant une part de hasard, cette fonction est la moyenne d'une distribution théorique dont la variance elle-même peut faire l'objet de calculs analytiques. La

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

confrontation de GRANULAB avec cette loi nécessite donc un nombre d'exécutions sur le même empilement suffisant pour être assuré de la représentativité statistique des réseaux de forces obtenus. Cette comparaison a permis de s'assurer que les simulations donnaient bien les résultats attendus.

GRANULAB s'est donné une double ambition :
– fournir, dans le cadre d'une approche particulaire des matériaux granulaires, un algorithme de calcul des réseaux de forces qui soit nettement plus performant que ceux utilisés jusqu'alors ;
– fournir un environnement d'expérimentation virtuelle utile aux physiciens concernés.
Il appartient bien sûr à ces derniers d'apprécier cette réalisation sur ces deux plans. Mais il apparaît bien que les expérimentations menées ont montré des modalités de la réponse de l'empilement à un stress appliqué en surface qui n'avaient pas été mises en évidence jusqu'alors (allures des fonctions reliant la distance à l'axe de l'empilement du pic d'intensité d'une part, et la largeur de ce pic d'autre part, à la profondeur z d'observation de ces données, pour différentes valeurs du coefficient de frottement). L'un des points clefs ayant permis de rendre crédibles ces conclusions inférées à partir de simulations est que leurs variabilités étaient bien en $1/\sqrt{N}$, conformes aux attentes des physiciens. Ces résultats ont nécessité l'analyse automatique de milliers de simulations (pour différentes valeurs du paramètre de frottement et d'initialisation) sur des tas de sables où N était égal à plusieurs dizaines de milliers de grains.
Du point de vue informatique, il nous paraît utile de souligner le lien entre les performances réalisées et les métaphores — s'investissant dans la structure des agents et l'éco-résolution — ayant inspiré les méthodes de calcul mises en œuvre.

1.2 RIVAGE : HYDRODYNAMIQUE DU RUISSELLEMENT

Comprendre comment l'eau s'écoule sur un sol hétérogène et de quelle façon cet écoulement est modifié par l'action d'autres dynamiques (endogènes, comme l'érosion, ou exogènes, comme les pratiques agricoles, les aménagements, ou la dynamique du couvert végétal) est l'un des enjeux de l'hydrologie des sols cultivés.

RIVAGE[2] est un modèle à base d'agents dont les agents sont des paquets ou boules d'eau mobiles représentant de manière discrète le fluide en mouvement. Leurs interactions sont des forces de répulsion fonction des distances. L'objectif des simulations

2. Ce modèle a été réalisé par David Servat, Édith Perrier et Christophe Cambier dans le cadre d'une collaboration entre le LIP6 et GEODES. Le travail s'est déroulé entre 1997 et 2000. Les principales références utiles à la compréhension du modèle sont la thèse de David Servat (Servat 2000) et différents articles (Servat 1998 ; Servat 2000).

est de reproduire les écoulements observés dans des conditions où les méthodes habituelles rencontrent des difficultés (complexité du terrain, modifications morphologiques se situant dans le temps du phénomène étudié). On peut alors analyser diverses propriétés globales telles la dynamique de l'écoulement à l'exutoire, les quantités de matière érodée ou l'histogramme des temps de transfert.

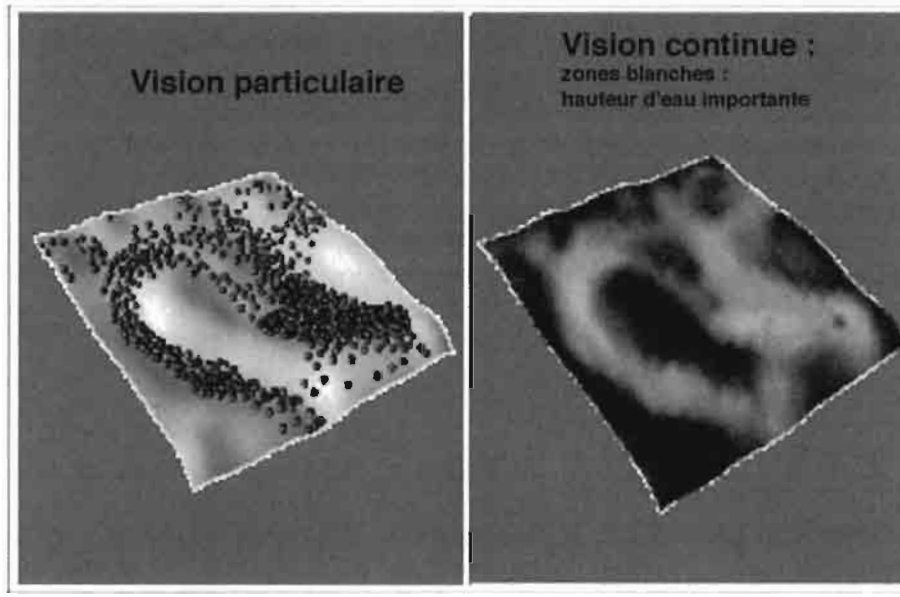


Figure 1.3 RIVAGE : dynamique de paquets d'eau modélisant un ruissellement.

1.2.1 La question scientifique

RIVAGE est emblématique d'un travail exploratoire sur l'applicabilité et l'intérêt d'une technique de modélisation — en l'occurrence une approche particulaire du ruissellement. À l'origine, il n'y a pas une question scientifique précisément formulée dans le domaine d'application, mais simplement la constatation de difficultés rencontrées par les techniques de modélisation habituelles et celle de l'existence, dans la communauté concernée, de recherches de méthodes alternatives.

Le domaine d'application est l'étude de l'écoulement des eaux de surface, à différentes échelles ou niveaux de granularité : échelles d'études expérimentales sur l'infiltration et l'érosion (du m^2 à quelques dizaines de m^2) échelles des parcelles agricoles, échelles de petits bassins versants. La modélisation des débits en sortie d'une parcelle expérimentale pose déjà questions (Leonard, Perrier et al. 2001). *A fortiori*, plusieurs travaux montrent que pour comprendre ou prévoir la dynamique de débits à une échelle large, par exemple à l'exutoire d'un bassin versant, la prise en compte d'une décomposition fine de l'espace, reconnaissant par exemple comme « cellule spatiale » élémentaire les parcelles agricoles, peut être nécessaire (Moussa,

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Voltz et al. 2002). Les difficultés de ce « transfert d'échelle » — c'est-à-dire du calcul du résultat global à partir des données spatialisées à une échelle fine et de la connaissance des divers mécanismes en jeu — tiennent à de nombreux éléments : hétérogénéité spatiale (différences géomorphologiques, pédologiques, agronomiques, ou relatives au couvert végétal, entre cellules spatiales), interactions entre les dynamiques hydrologiques de chaque cellule, modifications que le ruissellement et l'érosion apportent à la morphologie du terrain.

1.2.2 Les raisons avancées pour l'approche agent

C'est en conscience de ces difficultés que des chercheurs sur les systèmes d'agents ont proposé une approche particulaire du problème. Cette approche est basée non pas sur une discrétisation de l'espace conduisant à sa décomposition en cellules spatiales, mais sur une discrétisation de l'élément dynamique lui-même, l'eau. En utilisant le vocabulaire de la mécanique des fluides, on passe ainsi d'un point de vue « eulérien » centré sur ce qui se passe en chaque point de l'espace, à un point de vue « lagrangien » centré sur le destin de chaque particule du fluide. Ce n'est pas là une idée nouvelle dans le contexte agronomique ou hydrologique. Ainsi François Bousquet et Olivier Barreteau modélisent le fonctionnement de réseaux d'irrigation en considérant des quantités discrètes ou « mains d'eau ». Plusieurs chercheurs (Darboux, Davy et al. 2002) ont également abordés la modélisation du ruissellement dans un contexte agronomique par la mise en œuvre de règles sur le déplacement de paquets d'eau. A de multiples échelles, allant de la modélisation des crues à la circulation des fluides dans les milieux poreux, on a pu également s'inspirer d'approches lagrangiennes. Par ailleurs, des approches particulaires sont utilisées en mécanique des fluides dans différents contextes et notamment en astrophysique. Une de ces approches, dite SPH[3], a donné à RIVAGE un formalisme mathématique qui s'est avéré utile.

Le premier argument invoqué pour justifier une approche particulaire discrétisant le continuum du fluide en individualisant des paquets ou « boules d'eau » est un argument de simplicité : simplicité de la formulation des règles de déplacement de ces paquets, souplesse dans la prise en compte des propriétés locales du substrat spatial dans lequel ils se déplacent et des modifications de ces propriétés au cours du temps. À chaque instant, chaque paquet individualisé va suivre ce que déterminent ses règles de déplacement, appliquées dans la situation exacte où il se trouve à cet instant : morphologie du terrain et autres caractéristiques concernées par les mécanismes du ruissellement, quantité d'eau présente et vitesse moyenne du courant au même endroit estimées à partir de la position et de la vitesse des paquets voisins. Ainsi l'hétérogénéité du substrat et sa dynamique même ne paraissent plus être un obstacle à une bonne modélisation.

Au-delà de la prise en compte de l'hétérogénéité du terrain, un second argument met en avant la facilité de prise en compte des trajectoires suivies par les éléments

3. Pour *Smoothed Particle Hydrodynamics* (Monaghan 1992 ; Liu and Liu 2003).

du fluide. Cette prise en compte, et à sa suite toutes sortes d'analyses et de construction d'indicateurs longitudinaux (statistiques de temps de parcours, couplages origines/aboutissements) se font de façon « native », de par la nature lagrangienne de la modélisation.

1.2.3 Échelles spatio-temporelles et granularité

RIVAGE ne précise aucune échelle spatiale particulière. Ses échelles sont celles des modèles eulériens équivalents. Ces derniers — les modèles basés sur les équations de Saint Venant —, sont valides dans les situations où l'on peut négliger les variations des paramètres de l'écoulement dans une des directions spatiales. Typiquement la dynamique bidimensionnelle d'une lame d'eau de faible épaisseur par rapport à son étendue, ou encore la dynamique monodimensionnelle d'un canal ou d'une rivière de faible profondeur par rapport à sa longueur. Du point de vue temporel, les échelles de temps de RIVAGE sont de court terme, en rapport avec les écoulements étudiés.

Dans les exemples présentés, on trouve ainsi des hauteurs de lame d'eau de l'ordre du centimètre ou du millimètre sur des surfaces de l'ordre du mètre carré, avec des irrégularités de l'ordre de la dizaine de centimètres. S'y développent des courants de l'ordre du centimètre par seconde, analysés avec une résolution temporelle de l'ordre du dixième de seconde sur une durée de plusieurs minutes, des paquets d'eau de volume unitaire s'exprimant en millimètres cubes, en nombre de l'ordre de plusieurs centaines.

Équations d'écoulement et approches particulaires SPH

Les équations de Saint Venant sont une intégration des équations de Navier Stokes modélisant l'écoulement d'une masse d'eau sur un support solide, lorsque la profondeur reste négligeable par rapport à la surface libre. Un cas classique en une dimension est celui d'un bief de section constante, dont on ouvre une extrémité.

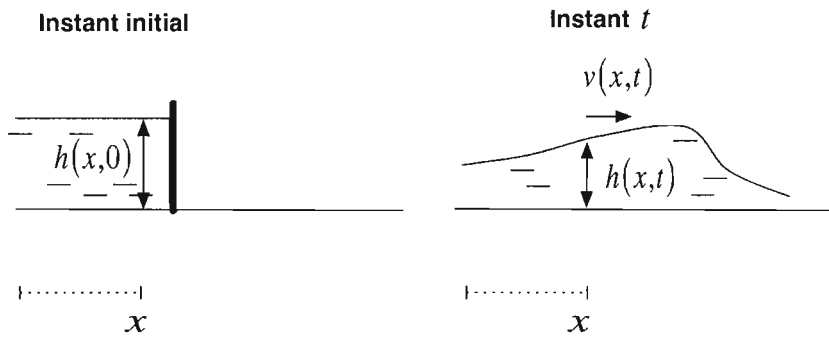


Figure 1.4 Dynamique d'une masse d'eau modélisable par les équations de Saint Venant en 1D.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

$h(x,t)$ et $v(x,t)$ étant respectivement la hauteur d'eau et la vitesse du courant sur la position x à l'instant t, les équations de la dynamique s'écrivent, en négligeant les forces de frottement :

$$\frac{\partial}{\partial t}h(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}(h(x,t)\,v(x,t))$$
$$\frac{\partial}{\partial t}v(x,t) = -v\frac{\partial}{\partial x}v(x,t) - g\frac{\partial}{\partial x}h(x,t)$$

L'approche SPH appliquée dans ce contexte substitue à la représentation directe de la masse liquide par un champ de hauteur d'eau, une représentation discrète par paquets d'eau. Elle propose une loi régissant le déplacement de ces paquets permettant de reconstituer avec une bonne approximation la dynamique « réelle » du liquide.

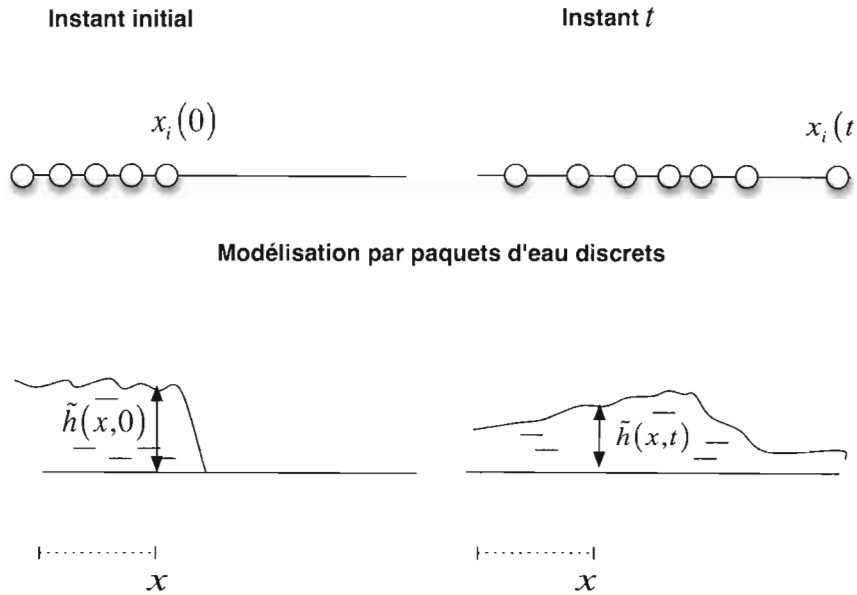


Figure 1.5 Modélisation de la dynamique de la masse liquide par une loi contrôlant le déplacement de paquets d'eau.

La formule donnant l'estimation $\widetilde{h}(x,t)$ de la hauteur d'eau sur la position x à l'instant t à partir de la répartition spatiale des paquets d'eau[4] est :

$$\widetilde{h}(x,t) = \sum_i w(x - x_i(t))$$

4. Supposés ici de masse unité.

où w est une fonction « noyau » accordant aux différents paquets d'eau une contribution décroissant avec leur distance à la position x.

La loi de déplacement des paquets d'eau — maintenant $\widetilde{h}(x,t) \approx h(x,t)$ — est donnée par le système newtonien :

$$\ddot{x}_i(t) = -g \sum_j w'\left(x_i(t) - x_j(t)\right)$$

1.2.4 Les agents, leurs attributs

Trois catégories d'agents sont mises en œuvre :

- La première ne concerne qu'un seul agent, le **terrain** substrat du ruissellement : un attribut en est la fonction donnant l'altitude en chaque point. D'autres attributs du même type (des fonctions sur l'espace) caractérisent éventuellement d'autres propriétés influençant l'écoulement, telle l'infiltrabilité. Ces fonctions sont selon les cas présentées analytiquement ou sous forme de données discrètes servant de base au calcul de leurs valeurs sur les positions des paquets d'eau.
- La deuxième est celle des **paquets d'eau** : un paquet d'eau est décrit à chaque instant par sa masse, sa position et sa vitesse. S'y ajoute dans certaines applications un attribut donnant sous forme de liste de positions la trajectoire suivie, depuis l'apparition du paquet dans la simulation jusqu'à sa disparition.
- La troisième est celle d'objets réifiant des structures macroscopiques, identifiables comme objets d'intérêt, pouvant apparaître en cours de simulation et être reconnues par algorithme : ce sont les **mares et les ravines**, des ensembles ou « groupes » identifiés de paquets d'eau, présentant une certaine permanence et pouvant donc faire l'objet d'un suivi dans le temps. Une mare ou une ravine est donc décrite par un identifiant qu'elle conserve au cours de son existence, et, à chaque instant, par la liste des paquets membres. D'autres attributs consignent des informations telles que l'évolution des effectifs du groupe depuis son apparition, ou, pour une ravine, sa progression spatiale.

1.2.5 Les comportements ou mécanismes

Plusieurs mécanismes sont mis en œuvre dans RIVAGE : un premier mécanisme concerne le déplacement des paquets d'eau ; viennent ensuite les mécanismes de formation et d'évolution des mares et des ravines.

a) Le déplacement des paquets d'eau

Le problème à résoudre est de donner aux paquets d'eau des règles de déplacement conduisant à une représentation de l'écoulement suffisamment proche d'un écoulement de référence, écoulement observé ou encore écoulement simulé par une autre méthode. Initialement, la solution avait été recherchée en considérant que les paquets d'eau étaient des sortes de billes pouvant s'empiler les unes sur les autres. Puis,

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

devant les difficultés, à la fois pratiques et théoriques, la réflexion s'est dirigée vers des considérations plus abstraites. D'autres conceptions, inspirées des modèles de dynamiques de foules ou de bancs de poissons, pouvaient être des points de départ intéressants. Finalement un examen de la littérature sur les approches particulaires utilisées en mécanique des fluides a fourni la solution adoptée. Le principe en est le suivant :

- On associe mathématiquement à la configuration $x(t)$ des positions de tous les paquets d'eau à l'instant t un champ continu de hauteurs d'eau estimées $h(t)$. La valeur de ce champ, ainsi que son gradient sont calculables en chaque point du terrain.
- On déplace chaque paquet d'eau dans la direction du gradient du champ $h(t)$ au point où se trouve ce paquet, selon une vitesse croissant avec la valeur du gradient.

Les deux fonctions mathématiques, d'une part celle reliant la configuration des paquets d'eau au champ des hauteurs, d'autre part celle reliant la vitesse du paquet d'eau à la valeur du gradient, peuvent être choisies de diverses manières, plus ou moins empiriques ou justifiées théoriquement. Les choix ont été guidés en ce qui concerne la première par les approches SPH et en ce qui concerne la seconde par la formule de Darcy-Weisbach utilisée pour les fluides en écoulement uniforme.

On est ainsi passé au cours des travaux d'interactions explicites entre paquets d'eau en interactions par l'intermédiaire d'un champ. Néanmoins l'interaction entre deux paquets d'eau reste identifiable, car le champ est additif : il est possible d'isoler la contribution individuelle de chaque paquet d'eau au gradient sur la position d'un autre paquet, et en l'occurrence, la contribution réciproque est en valeur absolue la même. On peut donc quantifier à chaque instant l'intensité de l'interaction entre deux paquets d'eau.

b) Les mécanismes de formation et d'évolution des mares et des ravines

Ces regroupements se font sur la base de deux indicateurs de sinuosité de trajectoires, calculés et actualisés à chaque instant, pour chaque paquet d'eau, sur une certaine fenêtre temporelle glissante. Le premier indicateur caractérise la sinuosité de la propre trajectoire du paquet d'eau, et le second la sinuosité moyenne des paquets d'eau dans son voisinage.

La détection, la réification et le suivi des groupes s'appuie dans son principe sur trois éléments : une **définition instantanée** de ces groupes, permettant de les reconnaître à chaque instant, l'existence d'un **critère de permanence** permettant la reconnaissance d'une même identité à travers le temps, enfin une **règle de gestion des identités** en cas de fusion.

La définition instantanée d'un groupe se fonde dans RIVAGE sur un couplage entre une similitude de propriétés et un voisinage physique : un paquet d'eau est caractérisé à chaque instant par une « position abstraite » (ici la valeur des deux indicateurs de sinuosité) dans un « espace d'états interne ». Deux régions de cet espace sont

définies comme régions d'intérêt — l'une correspond aux mares, l'autre aux ravines. Un groupe est alors défini comme un ensemble de paquets d'eau :

- appartenant tous à la même région d'intérêt de l'espace d'états interne ;
- en connexion de voisinage dans l'espace physique.

Le critère de permanence est basé sur l'existence d'au moins un paquet d'eau commun au groupe entre deux instants successifs.

La règle de gestion des identités en cas de fusion est basée sur l'ancienneté : le groupe le plus ancien absorbe le plus récent.

1.2.6 L'implémentation informatique

L'implémentation informatique de RIVAGE illustre bien la distance qui peut parfois exister entre le modèle conceptuel initial et sa traduction informatique. La recherche d'une implémentation optimale est passée par plusieurs étapes : étude des possibilités de plusieurs plates-formes, réalisation d'une première maquette en langage Java. Pour finir, la nécessité de faire se déplacer virtuellement un grand nombre d'objets dans un espace continu et l'utilité de disposer d'outils de visualisation graphique souples et performants, ont dirigé les auteurs vers le langage C et l'environnement de programmation OpenDX. Si le modèle conceptuel de RIVAGE met bien en œuvre des agents, ce n'est pas le cas du programme final. Ce dernier, utilisant les types de données d'OpenDX, mobilise ce que cet environnement appelle des champs (*fields*), ensemble de positions associées à différentes valeurs, structures de données passées de modules en modules lors des traitements.

1.2.7 L'exploitation du modèle et l'apport au domaine

Les principes de RIVAGE ont été appliqués à divers cas d'études : écoulement pur, couplage écoulement/infiltration/érosion. Il s'agissait d'abord de tester la validité d'une approche de modélisation. Une comparaison complète a été menée pour l'écoulement avec les résultats d'une simulation numérique à partir des équations de Saint Venant, sur un modèle de terrain d'une parcelle réelle. Différents critères de distance entre les deux simulations ont été utilisés : écarts entre les deux courbes de débits à l'exutoire, écarts entre les hauteurs d'eau mesurées sur une grille de points de la surface. Les résultats sont très proches en ce qui concerne les débits à l'exutoire. En ce qui concerne les champs de hauteur d'eau, les résultats montrent une stabilisation de l'écart relatif autour d'une valeur de 20 %. Cette valeur est suffisamment faible pour que la comparaison qualitative (à l'œil) des images des champs de hauteurs d'eau reste satisfaisante tout au long de la simulation.

À côté des courbes de débits à l'exutoire, RIVAGE étudie d'autres points de vue macroscopiques, liés à sa capacité de suivre les trajectoires des paquets d'eau et le destin des groupes : histogrammes des temps de transferts, courbes d'évolution des effectifs, donc des volumes d'eau, des mares et ravines.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

L'objectif de RIVAGE a d'abord été d'explorer ce que pouvait donner la modélisation à base d'agents dans un domaine physique, en l'occurrence l'hydrologie du ruissellement. Cet objectif, suggéré par des chercheurs en informatique, a rencontré divers travaux autour de modèles de ruissellement s'éloignant du cadre strict des équations de la mécanique des fluides, pour proposer des modèles simplifiés, ce notamment dans le cadre de la recherche agronomique. L'hypothèse sous-jacente est que sur des substrats de structures complexes, de tels modèles simplifiés, dès lors qu'ils respectent certaines contraintes physiques, peuvent donner des résultats satisfaisants dans la réponse à certaines questions, alors que la mise en œuvre exacte de modèles rigoureux s'avère difficile. Dans la mise au point de leur méthode, les auteurs ont été ainsi conduits à asseoir le comportement des agents « paquets d'eau » sur la base des lois mécaniques. La convergence avec les approches particulaires utilisées depuis plusieurs années en hydrodynamique est à cet égard significative. Puis ils ont validé leurs idées en montrant l'équivalence avec les résultats fournis par des modèles classiques à base d'équations aux dérivées partielles. Partant de cette constatation satisfaisante d'équivalence, la question du « plus » de l'approche proposée est posée. Du strict point de vue de la modélisation hydrologique, c'est dans un contexte dépassant le seul processus de ruissellement sur une surface relativement régulière que l'avantage de RIVAGE doit être évalué. Un pas a été fait dans ce sens, avec l'introduction de processus d'infiltration et d'érosion. Mais l'apport des travaux menés dans RIVAGE se situe également dans une perspective méthodologique pouvant concerner d'autres disciplines :

1) En montrant comment des structures spatialement continues peuvent être représentées sous forme de champs de densité d'ensembles discrets d'agents, et comment la dynamique de ces structures continues peut être modélisée par des interactions entre ces agents leur conférant un certain mouvement.
2) En donnant des pistes pour caractériser les trajectoires individuelles de chaque agent, pour les comparer, pour évaluer leur conformité à certaines configurations type, et ouvrir par là la *possibilité de changer dynamiquement de niveau de description des phénomènes* en cours de simulation.

Chapitre 2

Modèles biologiques

2.1 BioFilms : modélisation à base d'agents de la formation et de l'évolution de Biofilms

Comprendre la dynamique des communautés bactériennes constituant les biofilms, comprendre la manière dont ces biofilms se développent et se structurent en fonction des conditions qui leur sont imposées, sont des objectifs d'un domaine de recherche très actif en biologie, débouchant sur de multiples applications. Les biofilms dont il est question ici sont ceux utilisés dans des réacteurs biologiques, où les bactéries assurent par leur métabolisme un certain nombre de transformations chimiques industrielles. Les travaux présentés ont été menés par des équipes différentes, mais se situent tous dans une même approche méthodologique, celle d'une approche à base d'agents du développement de la biomasse bactérienne. La littérature concernée montre que cette approche s'est développée depuis la fin des années 1990 jusqu'à nos jours, sur la base de principes communs peu à peu affinés. Nous nous sommes appuyés sur plusieurs références, regroupées ici sous l'expression générique de « modèles BioFilms ». La première référence est un travail réalisé au sein du CIRAD[1]. Les autres références[2] concernent des travaux plus récents menés conjointement et en collaboration à l'université de Delft, département d'ingénierie biochimique, et à l'université de Bonn, département de biologie théorique.

2.1.1 La question scientifique

Les biofilms sont des systèmes microbiens se développant sur des supports (tissus vivants ou matériaux inertes) et baignant dans un environnement aqueux dont ils tirent leurs nutriments. Ils sont constitués de cellules bactériennes liées par une matrice constituée de polymères extracellulaires excrétés par les bactéries.

1. Cette référence (Lardon 2001), un rapport de stage DAA (Diplômes Approfondis en Agronomie) de quatre-vingts pages, est une bonne introduction au domaine.
2. (Kreft, Picioreanu et al. 2001), (Picioreanu, Kreft et al. 2004), (Xavier, Picioreanu et al. 2005).

Les biofilms sont très courants dans la nature et présentent une grande diversité de composition, de structures et de fonctions. De nombreuses espèces de bactéries peuvent ainsi coexister au sein du même biofilm, et entretenir entre elles et avec le substrat — l'eau et les solutés de l'environnement aqueux, le support et la matrice — des interactions métaboliques et mécaniques complexes. Ce sont de véritables écosystèmes à l'échelle micrométrique.

Les biofilms constituent un important domaine de recherches en microbiologie, motivées notamment par de forts enjeux sanitaires, environnementaux ou industriels. C'est dans ce dernier contexte que se situe le travail présenté ici : les biofilms concernés sont ceux qui fonctionnent dans les « réacteurs biologiques » utilisés dans la dépollution des eaux usées. Tapissant les filtres installés dans ces réacteurs, ces biofilms activent les réactions chimiques transformant les macro-molécules organiques présentes dans les solutions injectées en produits finaux (production de « biogaz », tels que du gaz carbonique ou du méthane). Le contrôle de ces réacteurs de façon à en optimiser l'utilisation est évidemment une question importante et a été la source de nombreuses investigations. Des méthodes d'observation fine des structures internes aux biofilms ont été ainsi développées, ainsi que des modèles visant à représenter et prédire la dynamique du système biofilm/solution. Il s'agit de comprendre comment un biofilm se forme et évolue au cours du temps, comment il réagit aux conditions auxquelles il est soumis dans l'utilisation du réacteur ainsi qu'aux variations éventuelles de ces conditions, et pour finir comment on doit moduler ces paramètres d'utilisation pour obtenir le meilleur rendement.

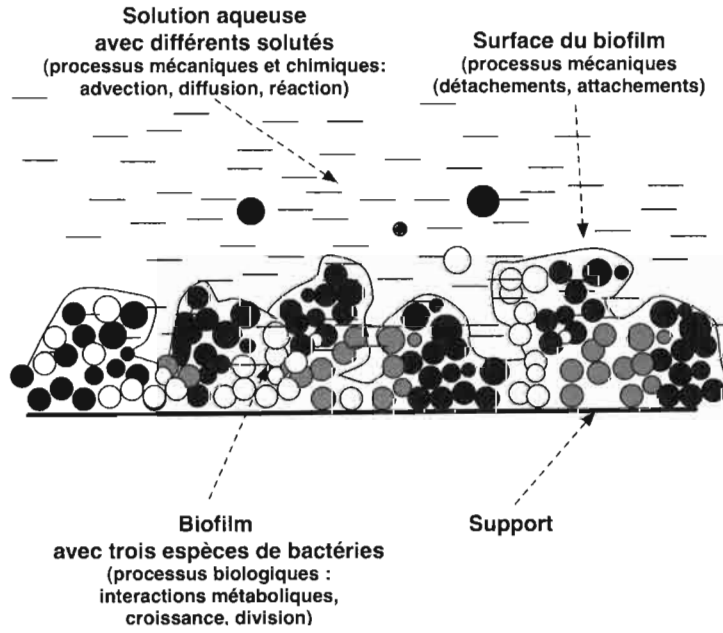


Figure 2.1 Modèles BIOFILMS, représentation schématique.

2.1.2 Les raisons avancées pour l'approche agent

Les observations ont montré que loin d'être un milieu homogène, les biofilms présentent de fortes hétérogénéités spatiales. La nécessité de quantifier ces hétérogénéités, d'identifier leurs déterminants, d'en mesurer l'impact sur la dynamique globale du système et sur les caractéristiques de l'état stationnaire s'établissant dans le réacteur, sous-tend tout un ensemble de travaux de modélisation depuis plusieurs années. Ces travaux visent à intégrer cet aspect morphologique à la complexité des mécanismes biologiques et chimiques : prise en compte de plusieurs espèces ayant chacune un rôle dans la chaîne des réactions chimiques, prise en compte de l'effet spatial des processus de croissance, de division et de migration des cellules bactériennes, prise en compte de processus d'advection/diffusion des solutés à l'intérieur même du biofilm, prise en compte des propriétés de la matrice extra-cellulaire.

On est ainsi passé de modèles mathématiques différentiels simples en une dimension (selon la perpendiculaire à la surface du support) à des modèles multispécifiques en deux dimensions puis en trois dimensions. Ces modèles couplent une représentation spatialisée de la dynamique de la biomasse bactérienne et un système d'équations d'advection-diffusion-réaction pour les transformations chimiques de la solution. La différence entre les temps caractéristiques des processus biologiques et chimiques (lents pour les premiers, rapides pour les seconds) facilite l'analyse de ces couplages et leurs simulations.

La représentation de la dynamique de la biomasse est un point clef. Deux grandes catégories de modèles se rencontrent dans la littérature :

- Dans la première catégorie on trouve différents types de modèles continus : la biomasse est considérée comme une phase fortement visqueuse et sa dynamique est décrite par un système d'équations s'appuyant sur la mécanique des fluides ou des solides déformables.
- Dans la seconde catégorie sont mises en œuvre différents types de discrétisation : discrétisation de l'espace et discrétisation de la biomasse elle-même en une multitude d'entités distinctes, les deux approches pouvant être combinées. Ont été ainsi proposés des modèles à base d'automates cellulaires[3], des modèles individus-centrés dans lesquels les entités sont les bactéries elles-mêmes[4], enfin des modèles qualifiés de modèles agents ou d'approches particulaires[5], dans lesquelles les entités ne sont plus les bactéries mais des groupes de bactéries, constitués selon un critère de proximité spatiale et de fonctionnement métabolique.

Les raisons invoquées pour l'adoption de représentations discrètes de la biomasse au sein de modèles à base d'agents sont de plusieurs ordres. On trouve avant tout la facilité avec laquelle on peut complexifier ces modèles en y intégrant des

3. (Picioreanu, van Loosdrecht et al. 1998).
4. (Kreft, Booth et al. 1998 ; Kreft, Picioreanu et al. 2001).
5. (Lardon 2001 ; Picioreanu, Kreft et al. 2004 ; Xavier, Picioreanu et al. 2005).

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

connaissances de plus en plus fines sur les mécanismes en jeu, prenant en compte à la fois l'espace dans ses trois dimensions et la collaboration de multiples espèces bactériennes. Dans le même sens, la sensibilité à l'histoire passée du biofilm dans ses réactions aux modifications du milieu (mobilisation d'effets de mémoire) ou encore la variabilité génétique à l'intérieur d'une même population bactérienne, sont avancées comme militant en faveur des approches agents.

La phase initiale de développement d'un biofilm peut démarrer à partir de colonies bactériennes disjointes, et donc appeler une approche agent dans laquelle les entités seraient ces colonies. Mais ces dernières finissent par se rejoindre et perdre toute individualité. Dans les travaux cités en référence, la discrétisation en groupes de bactéries est plutôt une discrétisation en unités abstraites ou « particules de biomasse » rappelant celles mise en œuvre dans RIVAGE. Ces unités conventionnelles, localisées et homogènes du point de vue du comportement biologique et chimique, évitent les inconvénients d'entités trop fines — des entités-bactéries, idéales d'un point de vue conceptuel mais difficiles à exploiter dans des simulations informatiques à grande échelle — tout en conservant les facilités des approches particulaires. Selon les modèles, ces unités se positionnent et se meuvent dans un espace discret ou continu. Ce dernier cas de figure est avancé comme préférable, car il permet d'éviter l'anisotropie, c'est-à-dire les effets artificiels de direction préférentielle liés aux espaces discrets.

2.1.3 Échelles spatio-temporelles et granularité

Les échelles de temps des modèles BIOFILMS en référence sont celles des réacteurs biochimiques concernés et de leur régime de fonctionnement.

Sur le plan temporel, sont ainsi présentées des simulations s'étendant sur plusieurs centaines d'heures, allant par exemple jusqu'à 1 000 voire 1 500 heures, soit deux mois de temps simulé. Le pas de temps est de l'ordre de quelques minutes.

Sur le plan spatial, les épaisseurs des biofilms sont à l'échelle de mesure des bactéries, le micromètre. Ces épaisseurs débutent à quelques μm lors de l'initialisation des processus pour atteindre des valeurs maximales de quelques centaines de μm. Dans l'une des références mentionnées les volumes simulés — représentant dans le réacteur une partie seulement du support, du biofilm qui s'y trouve attaché et de la solution environnante — ont des dimensions latérales de l'ordre de deux fois cette épaisseur maximale. La distribution des concentrations de solutés sur ces volumes est discrétisée sur une grille tridimensionnelle dont la résolution linéaire est de l'ordre de la dizaine de μm, et comportant donc un nombre de cellules spatiales dépassant la centaine de milliers.

Les entités de biomasses, les agents, représentent des regroupements dont l'ordre de grandeur est le millier de bactéries. Le nombre d'agents mis en jeu sur les volumes simulés est de quelques milliers à l'initialisation des processus. En fonctionnement, il peut monter à quelques dizaines de milliers.

2.1.4 Les agents, leurs attributs

Les agents des modèles BIOFILMS sont les paquets de bactéries discrétisant la biomasse, et les cellules spatiales discrétisant l'espace pour la représentation des concentrations. Il est pratique de considérer également le réacteur comme un agent dont les attributs représentent les conditions globales de fonctionnement du système.

a) Les agents biomasse

Dans les modèles BIOFILMS référencés, un agent biomasse est souvent associé à une seule espèce bactérienne. Outre la référence à cette espèce, ses attributs sont :

- Sa masse, parfois décomposée en deux éléments : une masse active et une masse inerte représentant une fraction de la matrice extracellulaire.
- Son volume, considéré comme sphérique dans la version en trois dimensions.
- Sa position dans un référentiel spatial continu.

D'autres grandeurs intervenant dans les différents comportements sont identiques pour les agents rattachés à une même espèce bactérienne.

b) Les cellules spatiales

Elles sont décrites par la position qu'elles occupent et par le vecteur des concentrations locales des différents solutés potentiellement présents. Un paramètre de diffusivité variant d'une cellule à un autre en fonction de la présence de biomasse peut également leur être associé.

c) Le réacteur

Doté d'un volume utile, il est alimenté par un certain débit. Son fonctionnement est caractérisé par trois vecteurs concernant les solutés : les vecteurs des flux entrants et sortants, et le vecteur des quantités présentes à chaque instant dans la phase aqueuse en dehors du biofilm. En effet, les concentrations de solutés dans cette phase sont considérées comme spatialement homogènes.

2.1.5 Les comportements ou mécanismes

Au cours du temps plusieurs mécanismes entrent en jeu : ceux concernant la biomasse et faisant évoluer le nombre, la masse, le volume et la position des agents ; ceux concernant la solution et faisant évoluer les concentrations.

a) Au sein du biofilm

- **Croissance de la biomasse** : à chaque instant la masse active et la masse inerte d'un agent croissent selon des rythmes différents. Ces rythmes sont fonction de la masse active de l'agent et des valeurs de concentrations des solutés présents dans son voisinage. Ils dépendent aussi de l'espèce bactérienne représentée et de son métabolisme plus ou moins spécialisé sur la transformation de tels ou tels solutés.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

La croissance de la biomasse entraîne une augmentation corrélative du volume de l'agent.

- **Division** : les agents biomasses sont considérés comme ne pouvant dépasser une certaine masse maximale, au-delà de laquelle ils se divisent nécessairement. L'agent supplémentaire généré reçoit une part de la masse de son géniteur, prise aléatoirement dans une certaine fourchette, et se place à côté de lui dans une direction également aléatoire. Ce caractère aléatoire permet d'éviter, dans les premiers temps des simulations, une synchronisation artificielle des divisions.
- **Expansion volumique** : la croissance et la division des bactéries génèrent un champ de pression entraînant leurs déplacements. Dans les modèles BIOFILMS ce champ de pression n'est pas modélisé ; l'expansion volumique et la division des agents biomasses, au cours du pas de temps, ont pour conséquence des recouvrements qui sont résorbés (ou du moins minimisés) par un algorithme purement géométrique d'expansion.
- **Arrachements et autres pertes de biomasse** : une prise en compte correcte des effets de ces mécanismes de pertes est très importante car ce sont eux qui finissent par compenser la croissance et aboutir à un état stationnaire du biofilm. La mortalité bactérienne peut être aisément incluse dans l'expression des rythmes de croissance en parlant de croissance nette. L'arrachement est le mécanisme par lequel des bactéries se détachent du biofilm sous l'effet des forces d'abrasion exercée par la solution. C'est une fonction complexe des paramètres globaux de fonctionnement du réacteur (débit, volume) et de conditions locales (position, activité des bactéries, morphologie de la surface du biofilm, importance de la matrice extracellulaire). Compte tenu de l'enjeu — la compréhension de la dynamique morphologique du biofilm — plusieurs approches de ce mécanisme ont été imaginées.

b) Dans la solution

Au sein du biofilm, le métabolisme des bactéries modifie les concentrations locales des solutés : telle espèce de bactérie diminue par exemple par sa consommation la concentration de tel soluté et augmente par sa production la concentration de tel autre. Le bilan de ses actions se traduit pour chaque soluté en chaque point par un taux net d'accumulation, négatif ou positif, dépendant des densités de bactéries actives en ce point à cet instant. Cette modification des concentrations due aux activités métaboliques est dans le même temps affectée par un second processus d'advection-diffusion, suite notamment au brassage de la solution ayant lieu en permanence dans le réacteur.

Mais les mécanismes concernant la biomasse et ceux concernant la solution ne s'effectuent pas au même rythme : le temps nécessaire à la génération d'une évolution de la distribution spatiale de la biomasse, significative du point de vue de ses effets sur les concentrations, est nettement plus long que le temps nécessaire à la diffusion dans l'ensemble de la solution des conséquences des réactions métaboliques. On est en présence du cas fréquent d'une dynamique lente — celle de la biomasse — laissant

à une dynamique rapide — celle des concentrations — le temps de parvenir à l'équilibre avant que les paramètres de la première aient notablement changé. Aussi l'évolution des concentrations peut-elle être considérée comme une suite d'états d'équilibre, états qu'il s'agit de calculer pour chaque pas de temps de l'évolution de la biomasse. À chaque pas de ce temps « lent » l'algorithme effectue donc successivement les deux opérations suivantes :

- Mise à jour, sur la base des concentrations courantes de solutés, de la nouvelle structure du biofilm.
- Mise à jour, sur la base de cette structure et des mêmes concentrations de solutés, des quantités globales de solutés qui vont résulter des réactions métaboliques pendant ce pas de temps. Ces quantités donnent alors les conditions aux limites permettant de calculer le nouvel équilibre diffusif et donc les concentrations du pas de temps suivant. Ce dernier calcul est pris en charge par un algorithme spécialisé.

2.1.6 L'implémentation informatique

Dans (Lardon 2001), le simulateur est implémenté en Smalltalk sur la plate-forme Cormas. Son architecture, les différentes entités utilisées, leurs attributs, méthodes et liens font l'objet d'une présentation en diagrammes UML. Le calcul de l'équilibre diffusif est pris en charge par MatLab. Pour ce faire, une passerelle d'échange de données entre Smalltalk et MatLab, de type « client-serveur » a été mise en place et elle est activée à chaque pas du temps lent. Des couplages avec des modules écrits en C++ ont été également envisagés.

Dans d'autres références citées, le simulateur est écrit en C++. Le calcul à chaque pas de temps lent de l'équilibre diffusif est effectué par différents algorithmes de résolution numérique adaptés au contexte tri-dimensionnel.

Dans une dernière référence (Xavier, Picioreanu et al. 2005), le simulateur devient une plate-forme de simulation dédiée à l'étude des biofilms. Cette plate-forme est écrite en langage Java, sous l'environnement de développement Eclipse, et une version de démonstration est accessible sur la Toile. Elle est largement paramétrable et documentée. Elle dispose de modules d'exportation de données de sortie exploitables sous MatLab. Les principes algorithmiques restent inchangés, en particulier en ce qui concerne la résolution de l'équation de réaction-diffusion. Une modification introduit cependant *un pas de temps variable* pour la dynamique lente. Cette flexibilité garantit le respect de contraintes imposées aux variations d'un certain nombre de grandeurs lors de chaque itération : à l'échelle des agents, la variation de leur masse ; à l'échelle du biofilm, la variation de son volume ; à l'échelle de la solution, la variation globale de la masse des solutés. De telles contraintes permettent de mieux assurer la stabilité de la détermination de la distribution spatiale des concentrations.

2.1.7 L'exploitation des modèles et l'apport au domaine

L'exploitation des simulations est conforme aux questions qui ont motivé l'approche agent. Elle se focalise sur les distributions spatiales et spécifiques de la biomasse et

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

des solutés, ainsi que sur la dynamique d'ensemble du système et sa caractérisation en différentes phases.

Sont ainsi produites des cartes donnant les gradients de concentrations dans le biofilm et au voisinage de sa surface. Il s'agit en particulier de savoir si la prise en compte de plus d'une dimension spatiale est vraiment nécessaire. Les résultats montrent clairement l'existence de gradients tridimensionnels pour certains solutés, alors que d'autres solutés ne présentent une variation de leur concentration que dans la seule direction perpendiculaire au support. Le fait qu'un soluté soit uniquement consommé, ou au contraire à la fois consommé et produit par le système bactérien dans une forme de coopération entre espèces, joue un rôle dans cette différentiation. De telles configurations de gradients sont mises en relation avec les caractéristiques de la distribution de la biomasse : la surface du biofilm présente de fortes irrégularités et instabilités et les différents espèces ne sont pas uniformément mélangées.

Différentes mesures de la morphologie des biofilms sont proposées. Sont mentionnées ainsi des mesures de recouvrement du support, de rugosité, de porosité, d'hétérogénéité, de contraste. Mais la construction d'indicateurs de structure des biofilms qui soient pertinentes vis-à-vis de l'analyse des dynamiques apparaît bien un problème ouvert, qui n'est pas sans rappeler ceux concernant d'autres types d'écosystèmes.

Parmi les grandeurs globales, l'évolution de la biomasse totale, celle des épaisseurs moyennes et maximales du biofilm, celle du taux global d'arrachement, celle des densités moyennes de chaque espèce bactérienne et celle des concentrations des différents solutés dans le réacteur sont évidemment étudiées.

Les modèles BIOFILMS fournissent une approche pertinente pour faire le pont entre une formulation fine des mécanismes physico-chimiques en œuvre et le comportement des réacteurs. Ils semblent s'avérer particulièrement adaptés à la phase intermédiaire précédant l'installation du régime stationnaire, alors que la structure spatiale et spécifique de la biomasse et celle des gradients de solutés est particulièrement complexe et en évolution rapide. Il serait cependant intéressant de comparer, lors de cette phase intermédiaire, l'allure de la dynamique de certaines grandeurs globales — la biomasse totale de chaque espèce, les concentrations moyennes des différents solutés — donnée par les modèles BIOFILMS et celle donnée par d'autres modèles n'explicitant pas des entités individuelles (modèles spatiaux EDP ou encore modèles différentiels prenant en compte plusieurs espèces de bactéries). Nous n'avons pas pu faire cette comparaison à partir de la littérature consultée.

2.2 SIMANCHOIS : MODÉLISATION D'UN ÉCOSYSTÈME MARIN

L'étude des écosystèmes[6] est un champ privilégié de la modélisation individu-centré. Dans la modélisation SIMANCHOIS, il s'agit d'étudier les comportements de ponte des anchois (Engraulis capensis) dans le sud du Benguela en Afrique du Sud, près du cap de Bonne Espérance. L'une des originalités de l'approche a été d'associer un modèle hydrodynamique 3D avec un modèle individu-centré pour représenter les effets évolutifs du couplage entre la stratégie de reproduction des adultes et le transport passif lors des jeunes stades (œufs et larves). Les auteurs se sont intéressés à l'apparition au niveau de la population de **régularités** (dit « *motifs spatiaux-temporels* ») dans les lieux et mois de ponte régulées par un processus de sélection dans lequel des contraintes s'exercent au niveau individuel pendant plusieurs générations. Plusieurs sous-populations, correspondant à ces motifs, peuvent être identifiées et associées à différentes séries de contraintes évolutives. Il se dégage tout d'abord des simulations que les motifs de ponte simulés s'accordent mieux avec le motif de ponte observé lorsque deux contraintes sélectives de l'environnement sont associées : un seuil de température de 14 °C et l'évitement des courants au large. D'autre part, les motifs de recrutement[7] obtenus par simulation sont encore plus réalistes si l'on tient compte de la nécessité d'atteindre la zone nourricière. Une telle expérience de modélisation aide à identifier dans le temps et l'espace les facteurs environnementaux les plus importants pour le recrutement et à les hiérarchiser. Ce modèle a été réalisé par Christian Mullon, Philippe Cury et Pierrick Penven dans le cadre d'une collaboration entre les laboratoires de l'IRD (IDYLE) l'université de Cap Town, le Marine and Coastal Management[8] et l'unité GEODES de l'IRD[9].

2.2.1 La question scientifique

L'un des enjeux cruciaux de l'étude des écosystèmes marins est lié à la gestion des pêches et la réglementation des ressources halieutiques aux moyens de quotas et de permis. Modéliser la dynamique spatio-temporelle des recrutements (c'est-à-dire l'entrée des poissons juvéniles dans la population adulte mature et exploitable)

6. Ensemble de tous les organismes d'un milieu défini et leurs relations et interactions entre eux et avec le milieu. Les processus qui déterminent les caractéristiques d'un écosystème particulier sont la naissance, la croissance, la reproduction et la mort des organismes vivants (biote) au fil des saisons, des années et des siècles. Les interactions des espèces entre elles et avec le milieu physique et géologique déterminent les échanges de matière et d'énergie à l'intérieur du système.

7. Accroissement de la ressource par l'apport naturel des jeunes poissons devenant adultes et rejoignant donc le stock (la sous-population localisée dans une zone géographique déterminée n'entretenant aucun échange avec les stocks voisins de la même espèce.)

8. Department of Environmental Affairs and Tourism, South Africa

9. Les principales références utiles à la compréhension du modèle sont : (Mullon, Cury et al. 2002 ; Huggett, Freon et al. 2003 ; Lett, Roy et al. 2006). D'autres références sur les écosystèmes marins : http://www.mpl.ird.fr/suds-en-ligne/ecosys/savoirplus.html.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

et interpréter la localisation et la répartition des sous-populations autosuffisantes de poissons est à ce titre un problème scientifique important.

Or, dans certains écosystèmes — comme celui de l'anchois dans le sud du Benguela — il existe une très grande variabilité d'une année sur l'autre dans le taux de recrutement. Les données recueillies au sud du Benguela entre 1992 et 2000 font état de variations allant de 0 à plus de 600 % du taux de recrutement d'une année sur l'autre. Par ailleurs, les pontes n'ont lieu que dans des zones limitées dans l'espace (fig. 2.2) et dans le temps (de novembre à décembre). Ces motifs correspondent à des sous-populations autosuffisantes et indépendantes dont l'étude de la survie est un enjeu environnemental clef.

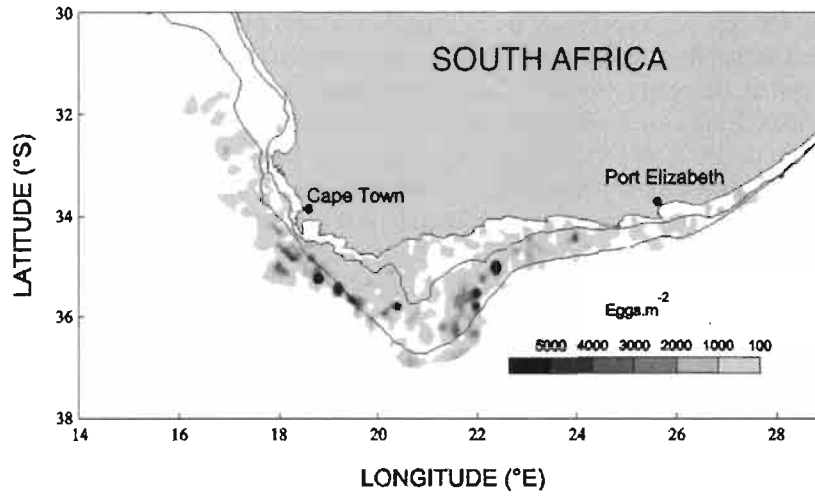


Figure 2.2 Distribution spatiale des pontes selon des relevés entre 1983 et 2000 (Mullon Cury Penven 2002).

Les scientifiques ont identifié un certain nombre de paramètres qui peuvent affecter la survie des anchois dans les lieux de ponte, de transport et de croissance. Deux sont cruciaux[10] : le **vent** (sa direction, intensité et fréquence sont liés notamment au transport) et la **température de l'eau** (liée à la biomasse[11], à l'intensité de la

10. On sait notamment que la température optimale pour la ponte est entre 16°C et 19°C et que d'autre part des vents très importants peuvent dérouter les larves des côtes et diminuer de manière drastique le recrutement.

11. C'est la masse totale d'une espèce (végétal ou animal) ou d'un groupe d'espèces dans une région donnée, à un temps donné, rapportée par unité de surface ou de volume. Dans le domaine des pêcheries, la région est définie en fonction d'un stock particulier qui s'y trouve et la biomasse est mesurée en tonnes métriques par stock. La biomasse reproductrice est la portion de la population de poisson arrivée à maturité sexuelle et prête à se reproduire. Chez certaines espèces (p. ex., l'aiglefin ou la morue), les adultes se rassemblent en un groupe distinct.

ponte, au développement et à la croissance des larves et au niveau de nourriture disponible). La question posée est donc de mieux comprendre comment le vent et la température influencent la dynamique de ponte et expliquent **les variations majeures d'une année sur l'autre du recrutement.** Plus concrètement, les questions posées sont : Que se passe-t-il en l'absence de contrainte environnementale ? Où les anchois devraient-ils pondre pour éviter d'être envoyés au large et/ou pour rejoindre une zone nourricière et/ou pour éviter les eaux froides (< 14 °C) et/ou pour rester entre 16 °C et 19 °C ?

2.2.2 Les raisons avancées pour l'approche agent

Les entités du modèle SIMANCHOIS sont appelées des particules ou des individus et les auteurs ne discutent pas de la possibilité d'une alternative au modèle individu-centré dans la modélisation de la population de poissons, œufs et larves. Dans l'argumentation développée, c'est justement pour dépasser la modélisation macroscopique (taux de recrutement global et localisation des zones de pontes) que se justifie l'usage d'un modèle individu-centré. Chaque individu étant localisé, il aura une sensibilité différente au courant, à la température et à la distance à la zone de nourriture. Trois types d'entité sont modélisés : les œufs, les larves et les poissons. Quand elles survivent, ces entités se comportent comme suit : les œufs se transforment en larves, les larves en poissons et les poissons pondent des œufs. L'un des aspects remarquables de la modélisation SIMANCHOIS est qu'un modèle numérique en trois dimensions de l'hydrodynamique est utilisé pour générer « hors ligne » de manière réaliste l'environnement dans lequel évoluent les agents. L'évolution de la configuration des courants ainsi construite est un élément crucial pour le transport et la rétention de l'anchois. Le second aspect remarquable de la modélisation est le choix de représenter l'évolution des différentes générations d'individus sous la forme d'un *algorithme évolutionniste*[12]. L'idée clef est que dans cet algorithme, l'adéquation (*fitness* en anglais) de la population à la génération G est définie en fonction de la survie des poissons issus de cette génération. C'est là l'une des justifications du modèle individu-centré, les entités naissent, grandissent et meurent, chacune ayant une histoire différente. Seules celles ayant la meilleure stratégie de reproduction (période de l'année et lieu) survivront. Ce sont les contraintes environnementales qui vont « façonner » les motifs spatio-temporels des populations après plusieurs générations.

2.2.3 Les échelles spatio-temporelles (et la granularité)

La génération hors ligne de l'environnement dans lequel évoluent les trois types d'agents (œufs, larves et poissons) s'effectue par résolution numérique sur un

12. « *This Darwinian way of looking at the "imprinting" mechanism provides, at the individual level, a basic mechanism for coupling adult fish reproductive strategy to the surrounding environment (Le Page and Cury 1997). Using the concept of "extended homing", Cury (1994) generalized this reproductive strategy for marine fish species (in particular pelagic fish) and its importance for the viability of self-sustaining populations* ».

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

maillage 3D d'un système d'équations aux dérivées partielles (EDP)[13]. Vingt niveaux de profondeur sont considérés afin d'avoir une résolution fine près de la surface. Ce système a été intégré sur dix ans en utilisant les données climatologiques (vents, températures) observées sur la zone et, après deux ans, les données simulées obtenues (les courants) sont stockées en une série temporelle échantillonée tous les deux jours. En résumé, l'environnement est donc un maillage 3D d'un volume d'eau s'étendant le long de la côte sud-africaine depuis l'est du cap de Bonne-Espérance jusqu'à la baie de Sainte Hélène et dont les données évoluent tous les deux jours, représentant les températures et les courants qui vont porter les larves et les œufs. La durée d'une simulation est de 60 jours.

2.2.4 Les agents, leurs attributs (et leur organisation)

La représentation agent est particulièrement simple. Il y a trois types d'agents, des œufs, des larves et les anchois adulte. Ces agents ont tous deux attributs qui encodent leur stratégie de ponte (c'est leur génotype) la date et la localisation de la naissance. Le contexte de chaque entité est la température et le vent surfacique lié à la cellule qu'il occupe dans le maillage de l'océan représenté par l'environnement.

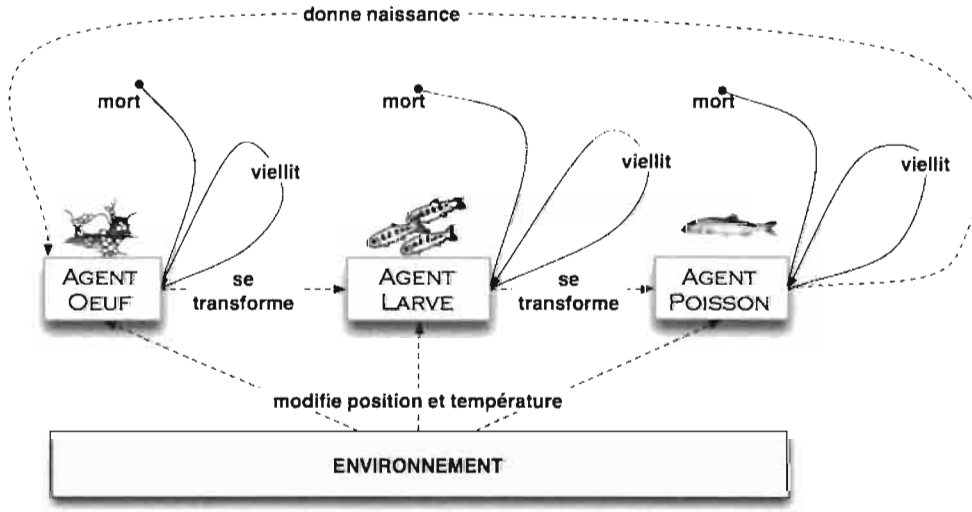


Figure 2.3 Les différents agents dans SIMANCHOIS et leur cycle de vie.

13. Ce modèle est basé sur le *Regional Ocean Modeling System* (ROMS), http://www.brest.ird.fr/Roms_tools, qui couvre une surface entre deux secteurs de cercle l'un à 9 km correspondant à la côte, et l'autre à 16 km correspondant à la pleine mer.

2.2.5 Les comportements ou mécanismes

On suppose que les larves et les œufs ne bougent pas par eux-mêmes et flottent donc dans l'eau de manière passive (ce qu'on appelle en anglais « particle tracking without diffusion »). On suppose enfin dans ce modèle que les poissons vont pondre dans une sphère d'eau centrée sur leur lieu de naissance. À chaque itération, les agents vont se déplacer sous l'influence du courant. Voici le pseudo-code du mécanisme de naissance et déplacement des entités :

- (*i*) Choix de contraintes environnementales de survie : courant, sensibilité à la température, atteinte de la zone de recrutement, etc.
- (*ii*) Création de N individus ayant des stratégies de ponte aléatoires.
- (*iii*) Répéter pendant p générations $g = 1, ..., p$
  - (*a*) Choix d'une année parmi les sept du modèle hydrodynamique 3D
  - (*b*) Laisser les individus dériver dans les courants pendant 60 jours
  - (*c*) Observer les S individus qui respectent les contraintes environnementales
  - (*d*) Autoriser ces derniers à pondre et créer une nouvelle population de N individus à $\pm d$ kilomètres de leur lieu de naissance et $\pm n$ jours de leur date de naissance.
  - (e) visualiser les motifs à chaque génération
- (*iv*) Visualiser les localisations des pontes à la génération p.

Le mécanisme des naissances est assez original en ce sens que les individus qui ont survécu donnent naissance à des larves proches de leur lieu de naissance et non pas là où ils se trouvent eux-mêmes au moment de la ponte. Ce mécanisme permet de renforcer la probabilité de naissance des larves dans les zones dont proviennent les individus qui survivent[14].

2.2.6 L'implémentation informatique

La mise en œuvre informatique est peu décrite dans les articles initiaux du fait de la très grande simplicité du modèle. Une implémentation en Java avait alors été réalisée. Aujourd'hui un outil baptisé ICHTHOP est disponible au téléchargement (http://www.eco-up.ird.fr/projects/IBM.htm). Il permet d'étudier comment les paramètres physiques (courants et température de l'eau) et biologiques (flottabilité des œufs et croissance des larves) affectent la dynamique des œufs et larves de poissons. Les données de l'environnement sont toujours générées grâce aux modèles numériques (modèles ROMS — *Regional Oceanic Modelling System* — ou MARS — *Model for Applications at Regional Scale*) et stockées sous forme de série temporelle de relevés de température et de courant dans chaque cellule du maillage de l'océan réalisé. Pendant 60 jours, les agents sont simplement déplacés dans le courant comme

14. De ce fait cet algorithme s'apparente à un algorithme d'apprentissage par renforcement (Sutton 1992) où la récompense serait la survie des individus.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

modélisés. L'algorithme décrit dans la section comportement est mis en œuvre tel quel. Trois sources de variations interviennent dans le modèle : la distribution spatiale initiale des individus, le choix pour chaque génération d'une des sept années engendrées par le modèle hydrodynamique représentant l'environnement dans lequel évoluent les entités, la proximité du lieu de naissance de la zone de ponte.

2.2.7 L'exploitation du modèle et l'apport au domaine

La question scientifique à l'origine de cette modélisation est liée à l'impact de différentes contraintes environnementales sur les variabilités de recrutement. L'approche choisie par les auteurs pour expérimenter le modèle est de faire en sorte que les simulations puissent être visualisables, comparables (une simulation de référence où aucune contrainte environnementale n'est définie), testable (en se basant sur les motifs observés), et crédible (en ayant un protocole simple). Les motifs observés à la fin de la simulation sont analysés à la fois du point de vue spatial (des zones particulières le long de la côte et en mer) et temporel (à certaines périodes de l'année). Les six simulations étudiées sont basées respectivement sur les six règles suivantes de la forme : « les œufs et larves meurent aléatoirement si S_i »

- S_1 : aucune condition (il n'y a pas de contrainte).
- S_2 : elles sont advectées vers le large.
- S_3 : S_2 et si elles n'ont pas atteint la zone nourricière entre 30 et 60 jours.
- S_4 : S_2 et si elles traversent des zones de température < 14 °C
- S_5 : S_3 et S_4
- S_6 : S_3 et traversent des zones de température hors de [16 °C, 19 °C]

Aucune d'elles ne donne un accord parfait avec les motifs spatio-temporels observés dans la réalité, mais le degré de cet accord permet de hiérarchiser l'impact des contraintes. Le fait que ces simulations conduisent à plusieurs sous-populations suggère la coexistence probable dans la nature de plusieurs sous-populations de poissons pélagiques (qui vivent en pleine mer près de la surface) et l'intérêt qu'il y aurait à considérer celles-ci dans les études sur le recrutement.

En regard des questions scientifiques posées initialement, les simulations ont permis d'illustrer l'importance des contraintes environnementales sur les motifs de ponte. Les résultats et en particulier ceux de la simulation S6 permettent de conclure qu'il faut d'abord éviter l'advection au large et les eaux froides pour que les anchois survivent et qu'ensuite le taux de recrutement dépend essentiellement du succès du transport vers les zones nourricières.

L'un des apports de l'approche à base d'agents est ici de pouvoir exprimer de manière très naturelle les contraintes au niveau individuel et d'analyser les résultats comme des motifs émergents de cet ensemble d'interactions individuelles avec l'environnement. L'intérêt est aussi de pouvoir dissocier ce qui peut être

modélisé hors-ligne (le modèle hydrodynamique) et la simulation des agents proprement dite. Les auteurs considèrent que la modélisation proposée est un véritable cadre pour mieux comprendre les effets des stratégies de reproduction sur les taux de recrutement des anchois.

Depuis 2002, les travaux sur la modélisation se sont poursuivis. Récemment, les auteurs ont proposé une extension du modèle prenant en compte d'une part le réseau trophique[15]et identifiant différents compartiments clefs (cf. fig. 2.4) et d'autre part l'effet de la pêche. Une analyse dans le cadre de la théorie de la viabilité a aussi été proposée (C. Mullon, P. Curry et L. Shannon Viability model of trophic interactions in marine ecosystems. Natural Resource Modeling, 17:27-58, 2004).

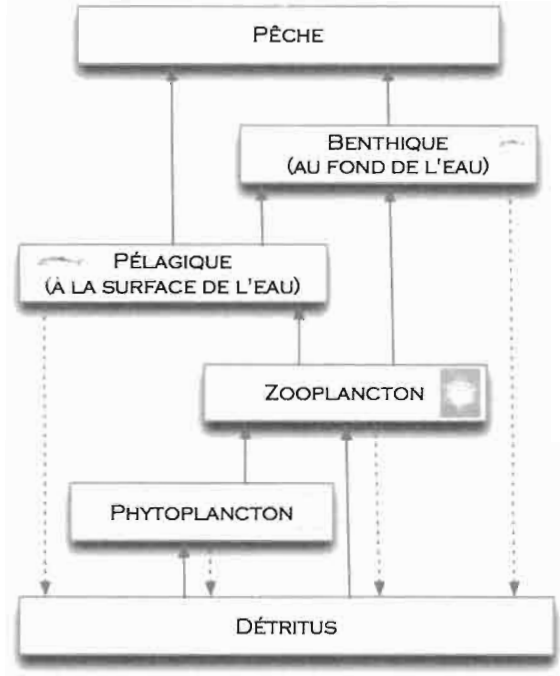


Figure 2.4 Différents compartiments envisagés dans une suite donnée au modèle SIMANCHOIS.

15. *Réseau trophique* : ensemble des relations entre les diverses chaînes alimentaires dans un endroit donné. Les chaînes alimentaires apparaissent rarement comme linéaires. Elles présentent au contraire des bifurcations et s'entrecoupent entre elles, formant un véritable réseau trophique car chaque prédateur consomme plusieurs types de proies alors que chaque proie a plusieurs prédateurs.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Chapitre 3

Modèles comportementaux

3.1 MANTA : PROCESSUS D'AUTO-ORGANISATION CHEZ LES FOURMIS

Comprendre la formation des colonies de fourmis (sociogenèse) et de leurs structures sociales (hiérarchies, division du travail, polyéthisme d'âge) et comment des comportements individuels simples peuvent donner naissance à des formes collectives reproductibles et adaptatives est l'un des enjeux de l'éthologie des insectes sociaux.

MANTA[1] est un modèle multi-agents dont les agents représentent les individus d'une colonie de fourmis : reine, ouvrières, œufs, larves et cocons. Leurs interactions se déroulent via la propagation de signaux équivalents à des signaux chimiques dans l'environnement simulé, qui influencent et orientent leurs comportements. L'objectif des simulations menées à partir de ce modèle est de parvenir à reproduire la genèse complète de colonies de fourmis afin de valider les hypothèses comportementales ébauchées par les éthologues. Cette validation s'effectue sur un plan aussi bien démographique que « social », en particulier par le biais d'expérimentations parallèles à celles menées en laboratoire.

3.1.1 La question scientifique

La question scientifique à la base des travaux sur MANTA concernait la compréhension des mécanismes d'auto-organisation à l'œuvre dans les colonies de fourmis. Plus spécifiquement, l'objectif de ce projet était de concevoir un modèle complet d'une colonie afin de proposer une validation des hypothèses des éthologues sur la façon dont se mettaient en place quatre des mécanismes existant dans toutes les

1. Ce modèle a été réalisé par Alexis Drogoul, Bruno Corbara, Dominique Fresneau, Steffen Lalande et Guillaume Hutzler dans le cadre d'une collaboration entre les laboratoires LAFORIA (université Paris 6) et LEEC (université Paris 13), entre 1991 et 1997. Les principales références utiles à la compréhension du modèle se situent dans la thèse d'Alexis Drogoul ((Drogoul 1993)).

colonies naturelles : sociogenèse (génération d'une société complète à partir de sa fondation), création de hiérarchies, création d'une division du travail répartissant les individus en groupes fonctionnels homogènes et polyéthisme d'âge (division du travail en fonction de l'âge). Ces hypothèses étaient au nombre de trois : l'importance de la communication chimique (via la propagation de phéromones dans l'environnement) dans le recrutement des fourmis pour les différentes tâches à effectuer dans le nid ; l'influence de cette même communication chimique sur la spécialisation spatiale des individus recrutés ; et enfin l'influence conjointe de cette spécialisation spatiale et d'une réaction différentielle des individus aux signaux chimiques dans la genèse de la structure sociale, des hiérarchies et de la division du travail. Il est important de souligner que ces hypothèses minimalistes ne recueillaient pas l'aval de tous les spécialistes au moment où le projet a été lancé, et qu'il était nécessaire de pouvoir les valider : si la plupart des mécanismes biologiques, pris individuellement, étaient bien documentés, leur rôle exact dans l'organisation globale de la colonie était difficile à explorer expérimentalement.

3.1.2 Les raisons avancées pour l'approche agent

Les entités du modèle MANTA sont appelées « agents » et plusieurs des articles écrits sur le projet défendent une approche orientée agent. Ce qui était en effet en jeu dans ce modèle était la représentation explicite des comportements individuels observés chez les fourmis et de leurs interactions, par opposition à une modélisation globale de la fourmilière qui ne permettrait pas d'expliquer l'émergence des formes sociales étudiées. L'idée de base était donc de fournir un support pour retranscrire le plus fidèlement possible les modèles décrits par les éthologues, en particulier par le biais d'un langage de description des comportements qui manipule des concepts qui leur sont naturels : mécanisme inné de déclenchement, patterns d'actions fixes, seuils de réaction, etc. (Lorenz 1984). D'autre part, l'hypothèse selon laquelle les individus considérés (reine, ouvrières, couvain) étaient dotés d'un mécanisme d'adaptation qui viendrait modifier leur profil individuel de réaction aux stimuli environnementaux (l'une des hypothèses prises par les éthologues pour expliquer la formation de la division du travail) nécessitait une représentation explicite de ces mêmes individus dans le modèle.

3.1.3 Échelles spatio-temporelles

MANTA utilise comme espace la représentation d'un nid en plâtre utilisé dans les laboratoires, d'une trentaine de centimètres de côté. Il est divisé en une grille discrète de cases (d'environ 1 cm de côté) qui peuvent représenter soit un obstacle, soit un espace libre et contenir, dans ce dernier cas, un nombre quelconque d'agents. Les cases servent également de support à la propagation de stimuli. L'échelle de temps considérée est celle de la vie d'une reine dans la réalité, soit de quelques jours à quelques mois. Celle-ci est subdivisée en unités temporelles discrètes correspondant au temps moyen de déplacement d'une fourmi d'une case à une autre, soit environ 7 secondes.

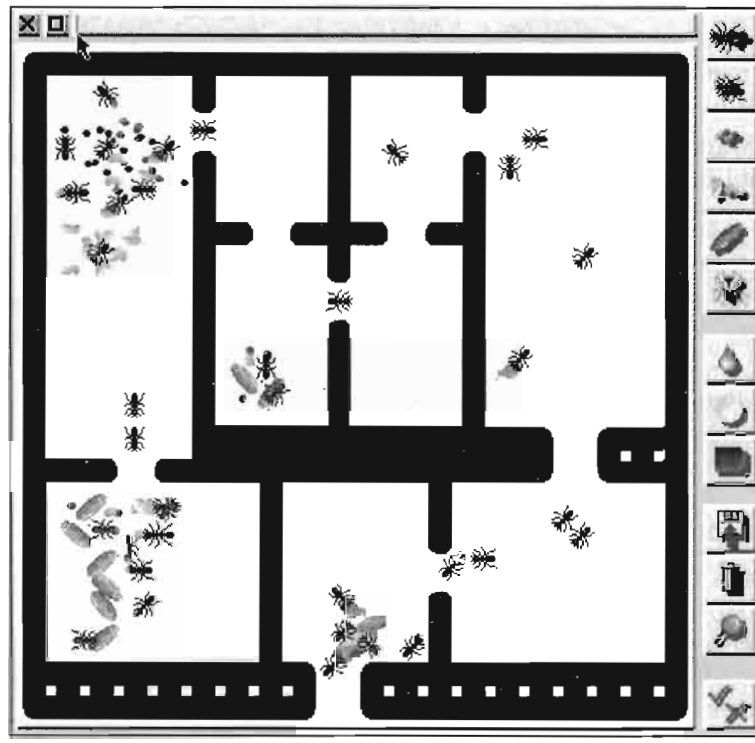


Figure 3.1 Interface graphique du projet MANTA (version de 1993).

3.1.4 Les agents et leurs attributs

Chacune des entités peuplant une colonie de fourmis est explicitement représentée sous la forme d'un agent dans le modèle. Il en existe cinq types : les reines, les ouvrières, les œufs, les larves (les trois stades larvaires sont condensés en un seul) et les cocons. À ceux-ci viennent s'ajouter des agents qualifiés d'« environnementaux » : la nourriture déposée dans le nid, l'humidité et la lumière, qui ne jouent pas vraiment de rôle dans le modèle autre que celui de marqueurs dans l'environnement et ne seront donc pas décrits ici. Les agents sont dotés d'attributs en nombre variable selon leur type :

- Tous possèdent un ensemble de stimuli représentant les signaux chimiques (phéromones) qu'ils émettent dans l'environnement (stimuli externes) ou qui leur tiennent lieu de « motivations » (stimuli internes, assimilables, quoique de façon un peu abusive, à des hormones). Ces stimuli sont nommés et possèdent une valeur réelle, recalculée en permanence, et non bornée *a priori*.
- Tous possèdent également des attributs qualifiés de « biologiques » dans le modèle : âge, durée de vie maximale, niveau de faim, niveau de soins, quantité de nourriture en laquelle l'agent peut être converti s'il meurt. Certaines de ces variables servent dans le calcul des valeurs des stimuli.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

- Les agents capables de se déplacer (ouvrières et reines) possèdent en outre une variable représentant le nombre maximal d'agents qu'ils sont capables de porter à la fois. Ils n'ont pas de vitesse différenciée.
- Enfin, les agents capables de se reproduire (les reines) sont dotés d'une variable indiquant l'intervalle moyen entre deux pontes d'œufs.

À tous ces attributs, il convient d'ajouter, bien que les agents ne les « possèdent » pas véritablement en propre, les paramètres des comportements dont ils sont dotés (appelés « tâches » dans le modèle) : le poids, le seuil de déclenchement et le taux de renforcement de chacun d'entre eux.

Au total, les agents de MANTA sont donc des entités relativement complexes, dont le nombre d'attributs varie de 7 pour les agents les plus simples (les œufs) à près de 50 pour les agents les plus complexes (les reines). La précision de description a un prix !

3.1.5 Les comportements ou mécanismes

Deux mécanismes fondamentaux sont au cœur du modèle. Le premier est le mécanisme (global) de propagation des stimuli, qui va permettre aux agents de s'influencer mutuellement en diffusant, à partir de leur localisation dans l'environnement, certains de leurs stimuli. Le schéma général d'« influence » entre les agents est fourni sur la figure suivante :

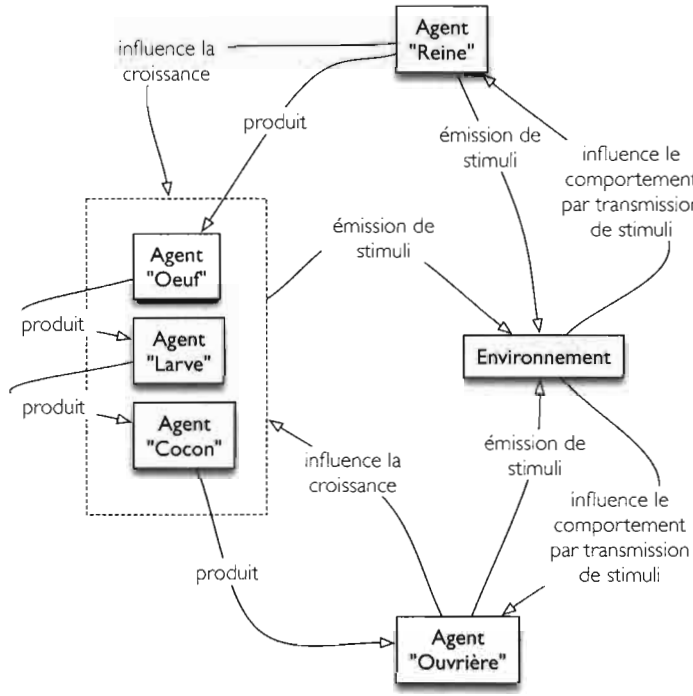


Figure 3.2 Schéma général des influences entre agents de MANTA.

La propagation, par chaque agent, de l'ensemble des stimuli dont il est porteur suit une règle relativement simple de diffusion décroissante sur la grille régulière du nid (dont certaines cases, identifiés à des « murs » constituent des obstacles imperméables). Le voisinage retenu est celui dit « de Moore » (les huit cases voisines d'une case).

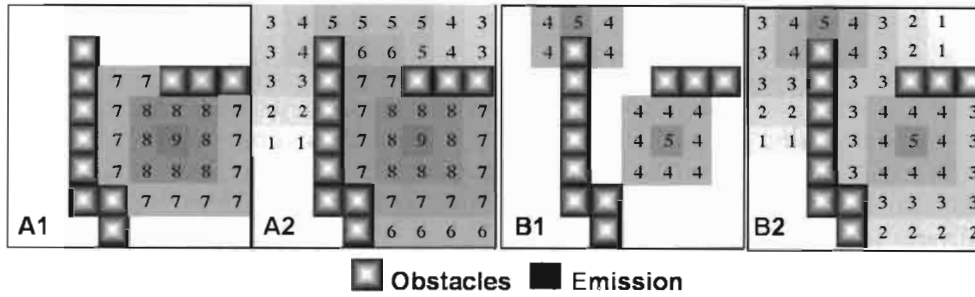


Figure 3.3 Diffusion des stimuli selon le voisinage de Moore et la règle du maximum.

Un stimulus porté par un agent est un couple {étiquette, force}. Chaque agent, selon son type, sera doté d'une liste fixe de ces stimuli, certains étant diffusables dans l'environnement et d'autres uniquement internes. La **force** d'un stimulus représente à la fois son « urgence » et la distance maximale, en nombre de cases, à laquelle il pourra être diffusé.

À chaque pas de temps, chaque case sur laquelle se trouvent des agents « diffuseurs » reçoit ainsi de chacun d'entre eux une liste de couples {étiquette, force} qu'elle propage ensuite à ses voisines en diminuant le second paramètre. Une fois la propagation terminée, chaque case est ainsi porteuse d'une liste de stimuli qui peuvent être lus par les agents qu'elle contient (la « règle du maximum » s'appliquant ici, c'est-à-dire que la case ne retient, pour chaque étiquette, que le stimulus ayant la force la plus grande).

Le second mécanisme est le mécanisme (individuel) de sélection et d'activation des comportements dont sont dotés les agents, qui est influencé aussi bien par les attributs des agents que par les stimuli lus sur les cases. Ce mécanisme est une combinaison de deux modèles théoriques développés par Konrad Lorenz en éthologie (Lorenz 1981) : celui de « *fixed action pattern* » qui exprime le comportement sous la forme d'un enchaînement fixe d'actions primitives déclenchées par un ou plusieurs stimuli, et celui de « *innate release mechanism* » qui exprime comment ce déclenchement s'opère en la présence ou en l'absence des stimuli déclencheurs.

Il est implanté dans MANTA de la façon suivante : soit $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ l'ensemble des agents présents dans le modèle. Chaque agent a peut être représenté par le quadruplet $a = \{V_a, S_a, S_p, T_a\}$, où V_a représente ses attributs, S_a les stimuli dont il est porteur, S_p les stimuli qu'il lit sur sa case et T_a ses comportements (les « tâches »). Une tâche t est une fonction informatique quelconque dotée d'un poids *poids* (t) (équivalent à une priorité), d'un seuil de déclenchement *seuil* (t) et d'un taux de renforcement de son poids *renforcement* (t).

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

À chaque pas de temps de la simulation, l'ensemble $S = S_a \cup S_p$ des m stimuli perçus par un agent est calculé et l'agent va alors calculer le *niveau d'activation* de chacune de ses tâches (équivalent à sa « priorité à être déclenchée ») par la formule :

$$activation(t) = \begin{cases} \text{si } \exists s \in S \mid nom(s) = nom(t), \\ \qquad force(s) \times poids(t) \\ \text{sinon } 0 \end{cases}$$

L'ensemble Te des tâches exécutables par l'agent est défini par la formule : $Te = \{t \in T \mid activation(t) > seuil(t)\}$, et contient donc toutes les tâches dont le niveau d'activation est supérieur à leur seuil. Si l'agent n'a pas de tâche en cours, celle possédant le plus fort niveau d'activation sera choisie et exécutée. Elle est alors dotée d'un attribut supplémentaire appelé **niveau d'activité**, défini par la formule suivante (où τ_0 représente le pas de temps auquel elle a été déclenchée) :

$$\begin{cases} activité(t, \tau_0) = activation(t) \\ activité(t, \tau_{i+1}) = activité(t, \tau_i) - 1 \end{cases}$$

S'il est déjà en train d'exécuter une tâche, il ne l'interrompra (et ne déclenchera la nouvelle) que si le niveau d'activation de cette dernière est supérieur au niveau d'activité de la tâche en cours.

Une fois une tâche interrompue, elle est alors renforcée en appliquant la règle suivante :

$$poids(t+1) = poids(t) + renforcement(t) \times \frac{activité(t, \tau_i)}{activation(t)}$$

où $\tau_i$représente le pas de temps auquel elle a été interrompue. La diminution du niveau d'activité étant linéaire par rapport au temps, une tâche sera donc renforcée au prorata de sa durée effective comparée à sa durée « théorique » donnée par le niveau d'activation initial. Un renforcement négatif permet de modéliser des phénomènes d'habituation (où une tâche perd de son importance au fur et à mesure qu'elle est exécutée). S'il est nul, le poids de la tâche reste fixe tout au long de la simulation.

Comme la présentation ci-dessus le laisse supposer, MANTA s'intéresse à la fois à représenter finement les mécanismes individuels de comportement (avec une forte dimension éthologique) et à permettre d'étudier les mécanismes d'émergence collective de formes (sociales comme topologiques). Les deux ne sont d'ailleurs jamais dissociés dans les différents articles consacrés au modèle, ce qui constitue en soi une originalité de ce modèle par rapport à d'autres (comme celui de (Théraulaz 1991), dans lequel les comportements individuels sont simplifiés à l'extrême).

3.1.6 L'implémentation informatique du modèle

MANTA a été originellement écrit en Smalltalk-80 en 1991. Une version en Object-Works 4.5 a vu le jour en 1993, en même temps qu'une version en Turbo-Pascal 7, sur laquelle la plupart des expérimentations décrites dans les sections suivantes ont été réalisées. De 1995 à 1999, trois versions successives, écrites en Delphi, ont été

développées et rendues disponibles sur Internet. Le simulateur a également connu des déclinaisons en C++, en particulier pour l'étude des mécanismes de fourragement (Drogoul and Fresneau 1998). Toutes ces différentes versions implémentent un interprète du même langage de modélisation, EMF (*EthoModelling Framework*), utilisé depuis la première version pour décrire le comportement des agents indépendamment du langage informatique choisi. À noter que ce langage est maintenant implémenté dans la plate-forme GAMA (voir chapitre 6) avec une vocation plus généraliste puisqu'il permet de décrire d'autres « espèces » d'agents que des agents-fourmis.

3.1.7 L'exploitation du modèle et l'apport au domaine

L'organisation d'une colonie d'insectes sociaux et la répartition du travail entre les différents individus ne cesse pas d'être un phénomène surprenant. Si l'on abandonne les notions en partie dépassées qui tendent à idéaliser les colonies, soit comme des modèles miniatures des sociétés humaines, soit en des termes vagues comme celui de « super-organisme » (notion introduite en 1911 par William Wheeler, cité dans (Jaisson 1993)), dont la valeur explicative reste floue, on est confronté à une forme d'organisation très fluide, faite d'une combinaison dynamique de coopérations et de compétitions entre des individus aux comportements apparemment rigides, qui parvient à se montrer incroyablement adaptative sur le plan écologique (les fourmis colonisent à peu près tous les biotopes de la planète à l'exception des océans et des environnements trop froids). Les expérimentations réalisées dans le cadre du projet MANTA laissent cependant de côté l'intérêt fonctionnel et le « pourquoi » phylogénétique des formes de socialité apparues chez ces insectes, pour s'attaquer à la question du « comment » : quels sont les mécanismes individuels qui permettent, par interactions, coopérations et compétitions entre individus simples, de générer la structure sociale stable et reproductible que l'on observe aussi bien chez les fourmis que chez d'autres espèces d'hyménoptères ? En d'autres termes, par quel jeu subtil s'opère le passage entre le niveau individuel et le niveau social, sachant que les individus concernés n'ont *a priori* pas les capacités psychiques de penser ni de planifier leur organisation sociale ?

Pour répondre à cette question, trois grands ensembles d'expérimentation ont été réalisés avec MANTA, tous caractérisés par une volonté assez marquée de réalisme et de possibilité de validation croisée avec les expérimentations menées par des éthologues sur des colonies de fourmis réelles. Ces expérimentations ont porté, dans un ordre logique, sur : (1) la sociogenèse, c'est-à-dire la génération d'une colonie entière à partir de sa fondation par une reine ; (2) l'apparition progressive d'une organisation sociale dans la colonie au fur et à mesure de la naissance de nouvelles ouvrières et la division du travail (polyéthisme) à laquelle cette évolution aboutit quand la société devient « adulte » et, enfin, (3) les conditions d'émergence de hiérarchies dans le cas des sociétés polygynes[2] et sur leur rôle fonctionnel dans la survie de la colonie.

2. Sociétés dans lesquelles le mâle s'accouple avec plusieurs femelles

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Nous n'avons pas la place de développer ici les protocoles expérimentaux qui ont été mis en œuvre (ceux-ci sont intégralement présentés dans (Drogoul 1993)), mais il est important de signaler que l'usage d'une approche à base d'agents a permis de réaliser en parallèle et avec les mêmes protocoles des expériences en laboratoire et sur simulateur (sur des échelles de temps cependant différentes, puisque les expérimentations artificielles parvenaient à simuler une année de développement d'une colonie en un peu moins de deux jours). Environ 400 colonies artificielles ont été ainsi simulées, et les résultats obtenus ont été pour la plupart très proches de ceux mesurés dans la réalité.

La proximité statistique de ces résultats a permis de corroborer, sinon de valider, les hypothèses scientifiques (représentées dans le modèle par les deux mécanismes de déclenchement et de renforcement des tâches et de propagation des stimuli) avancées par les éthologues sur la génération des formes sociales dans les colonies de fourmis. Elle a en particulier mis en lumière le jeu subtil qui s'opère entre l'historique comportemental des individus (spécialisation, due au renforcement sur certaines tâches, conduisant progressivement à une sensibilité différentielle aux stimuli présents dans le nid) et la structuration spatiale de l'ensemble de la colonie (résultant de la compétition de ces mêmes individus pour l'exécution des tâches), jeu qui permet d'obtenir une organisation sociale de division du travail adaptative sans qu'il soit nécessaire de recourir à des explications plus complexes. La compétition entre les différents agents et leur spécialisation individuelle ont pu être également présentées comme étant un puissant catalyseur pour la génération de groupes fonctionnels stables tout au long de la vie de la colonie, en générant, de manière globale, des phénomènes d'exclusion mutuelle répartis et donc un phénomène général de différenciation des formes comportementales.

MANTA a permis de vérifier la très grande souplesse des modèles à base d'agents en termes de « modélisation prospective » puisque des hypothèses impossibles à tester dans la réalité (comme l'introduction d'un comportement de compétition entre reines dans des sociétés polygynes) ont pu être ajoutées au sein des agents qui constituent les colonies artificielles, et leurs conséquences analysées afin de comprendre comment elles modifiaient le comportement global des sociétés simulées. Ces expériences d'« éthologie synthétique » sont depuis devenues relativement communes dans le domaine d'étude des insectes sociaux et constituent l'une des sources de validation des modèles développés par les éthologues.

MANTA n'a pas été le seul projet à s'intéresser à la modélisation des comportements des insectes sociaux, d'autant plus que ceux-ci ont assez vite de servi de base à de nombreuses études théoriques sur l'auto-organisation, en particulier dans le cadre de la *Vie Artificielle* (Langton 1995). Cependant, peu de modèles ont proposé une correspondance aussi complète entre les concepts théoriques manipulés par les éthologues et les possibilités de représentation offertes par la simulation. Les seuls travaux relativement similaires, bien qu'ils ne s'intègrent pas

directement dans une problématique à base d'agents, sont ceux de Pauline Hogeweg et Bernard Hesper sur le système de simulation MIRROR (Hogeweg 1988). Ces travaux ont clairement servi de référence à MANTA, en particulier dans la dimension de la prise en compte de la richesse du répertoire comportemental des individus et de l'attention portée à la modélisation de leur environnement spatial.

En comparaison, les autres modèles à base d'agents consacrés aux insectes sociaux apparaissent un peu moins ambitieux. La plupart ont en effet été dédiés à l'étude de certaines fonctionnalités précises (*e.g.* construction du nid, fourragement, etc.), ou, quand il s'agissait d'analyser la structuration sociale, aux interactions entre des individus extrêmement simplifiés. Les plus importants ont été réalisés par l'équipe de Jean-Louis Deneubourg à Bruxelles : construction des ruches, stratégies de fourragement des fourmis, méthodes de recrutement, capacités d'agrégation/ségrégation du couvain, appelées « tri collectif », etc. Ces travaux ont été repris depuis et considérablement étendus par Guy Théraulaz et Éric Bonabeau dont le livre « Intelligene Collective » ((Bonabeau and Théraulaz 1994)) constitue, pour le lecteur intéressé, une excellente introduction aux mécanismes d'auto-organisation chez les insectes sociaux.

3.2 DOMWORLD : MODÉLISATION DES HIÉRARCHIES DE DOMINANCE CHEZ LES PRIMATES

Apprécier la réalité de rapports de dominance au sein de sociétés animales, pouvoir comparer de ce point de vue différentes populations, comprendre comment ces rapports de dominance se forment et se stabilisent, estimer leur valeur fonctionnelle ou adaptative sont des questions centrales en éthologie.

DOMWORLD désigne ici un ensemble de modèles multi-agents dédiés à l'étude de ces phénomènes de dominance au sein de groupes de primates. Les agents y représentent les différents individus d'un groupe. Leurs interactions traduisent les rencontres plus ou moins agressives au cours desquelles deux individus s'évaluent et éventuellement se combattent, l'issue du combat venant renforcer, atténuer, voire renverser leurs rapports de dominance préexistants. Les objectifs des simulations menées à partir de ce modèle général sont de tester des hypothèses minimales permettant de reproduire la diversité des situations rencontrées et de rendre compte des liens entre l'intensité des hiérarchies de dominance et d'autres caractéristiques des groupes étudiés. Il peut s'agir aussi de comparer l'exactitude de différentes méthodes de mesures visant à établir le graphe de dominance au sein d'un groupe à partir de l'observation des interactions.

Les travaux présentés ont été réalisés par Charlotte K. Hemelrijk et ses collaborateurs, dans le cadre de divers instituts de l'Université de Zurich et de Groningen. Les principales références utilisées sont un ensemble d'articles parus entre 1995 et 2005[3].

3. Par exemple (Hemelrijk 2000 ; Hemelrijk 2002 ; Hemelrijk, Wantia et al. 2004).

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

3.2.1 La question scientifique

Les problèmes abordés dans les travaux présentés ici concernent la réalité des rapports de dominance au sein de groupes de primates, leur évaluation quantitative, la compréhension de leur genèse et de leur stabilisation, la compréhension des relations entre la configuration de ces hiérarchies et d'autres caractéristiques des groupes concernés. Les questions sur le rôle fonctionnel ou la valeur adaptative de ces aspects de la vie des groupes constituent quant à elles un arrière-plan évident, mais se situent pour une grande part en dehors du champ de la modélisation.

Parler d'une hiérarchie de dominance dans un groupe d'individus implique des hypothèses sur la manière dont les individus du groupe règlent leurs rapports mutuels dans différentes circonstances de la vie sociale : accès à la nourriture, accès aux partenaires sexuels, accès aux meilleures conditions de protection contre la prédation et les dangers de l'environnement. Ces hypothèses supposent d'abord certaines invariances dans les interactions. Deux individus identifiés par un observateur, lors de leurs rencontres dans un contexte de nature définie, vont se comporter mutuellement d'une manière similaire, ou statistiquement similaire, d'une rencontre à l'autre. Elles supposent ensuite que ces comportements présentent une certaine asymétrie, asymétrie ayant une tendance plus ou moins prononcée à se reproduire dans le même sens, d'une rencontre à l'autre, en qualifiant de « dominant » l'un des individus et de « dominé » son partenaire dans la rencontre. L'assemblage de ces relations asymétriques forme alors un graphe, plus exactement un graphe valué : la valeur d'une arête reliant un dominant à un dominé est fonction de la fréquence (par construction supérieure à 50 %) avec laquelle les interactions entre ces deux individus se conforment aux deux rôles ainsi attribués.

À partir de ce schéma conceptuel plusieurs questions peuvent alors être formulées. Des questions ressortant d'une modélisation statique : quelle est la structure du graphe de dominance, par exemple montre-t-il un ordre total, ou seulement un ordre partiel ; peut-il au contraire comporter des cycles ? Peut-on le calculer à partir de propriétés attribuables aux individus à tel instant de leur vie, par exemple à partir d'indices observables de l'extérieur, ou bien au contraire faut-il supposer l'existence de relations sociales intériorisées, établies à partir du résultat d'interactions passées et liées à une capacité des individus à se reconnaître mutuellement. Quelles relations les graphes de dominance ont-ils avec la structure spatiale des positions relatives des individus ? Des questions ressortant d'une modélisation dynamique : compte tenu des changements que le temps introduit constamment dans le groupe — vieillissement des individus, renouvellement de la composition, comment le graphe évolue-t-il et se reproduit-il d'une génération à l'autre ? Comment le rapport de dominance entre deux individus se met-il en place et se modifie-t-il au cours de leur existence : a-t-il sa source dans un asymétrie présente au départ, ou bien résulte-t-il du hasard des interactions et d'un processus cumulatif ? Des questions ressortant d'approches comparatives : peut-on rendre compte, à partir de mécanismes communs mais différemment paramétrés, de la variabilité des structures rencontrées dans ces sociétés animales ? Enfin, des questions relevant de la recherche de méthodes de mesures :

quelles sont les méthodes les plus pertinentes pour passer de l'observation des interactions au dessin du graphe de dominance et à sa quantification ?

Dans cette problématique générale, les modèles et simulations par agents ont pour objectif principal de tester un corps d'hypothèses précises sur les processus en œuvre dans la dynamique des rapports de dominance. Il s'agit de voir si ces hypothèses peuvent fournir des alternatives, plus simples et donc plus puissantes, à d'autres hypothèses avancées pour expliquer les motifs observés et leur diversité, en privilégiant les mécanismes d'auto-organisation. Un des patterns observés est par exemple la tendance à la structuration spatiale du groupe autour d'un centre plus dense, où se retrouvent les individus dominants. Une des explications qui a pu être avancée est l'hypothèse du « troupeau égoïste » d'après laquelle chaque individu cherche instinctivement à être « au centre » pour se protéger de la prédation. Dans les modèles agents proposés, c'est au contraire le même mécanisme qui va rendre compte à la fois de la dynamique de l'évolution et de la stabilisation des rapports de dominance et de l'émergence d'une centralité. Aucun mécanisme supplémentaire n'est convoqué.

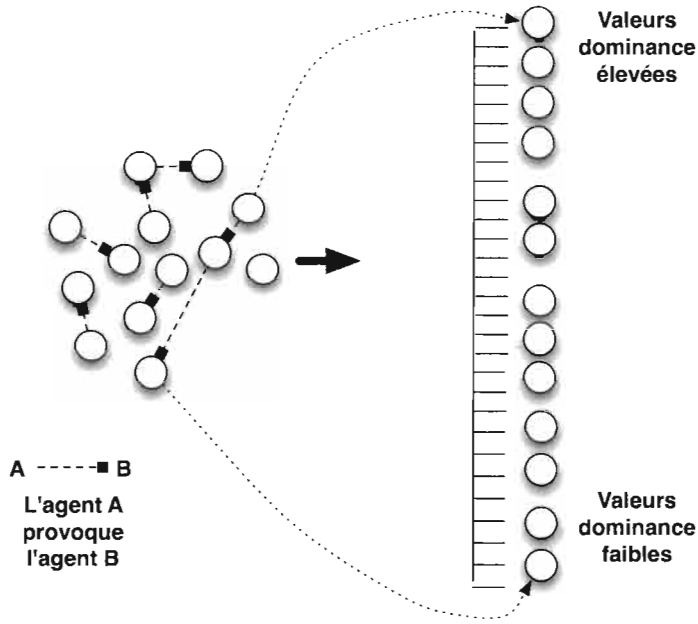


Figure 3.4 DOMWORLD, représentation schématique : (Darboux, Davy et al. 2002). De l'issue d'un ensemble de combats à la mise en place d'un ordre stable de dominance.

3.2.2 Les raisons avancées pour l'approche agent

Les modèles DOMWORLD sont qualifiés par leurs auteurs d'« individus-centrés », ou encore positionnés dans le champ de la « vie artificielle ». Dans les articles référencés, toutefois, les auteurs ne s'attardent pas spécialement à justifier a priori ces

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

approches et à les argumenter pour elles-mêmes. Leur pertinence est plutôt illustrée par leur apport spécifique aux débats de la discipline, ici l'éthologie, c'est-à-dire par leur capacité à fournir des points de vue complémentaires ou des explications alternatives à celles qui sous-tendent d'autres modèles. Les échelles concernées — celle du nombre d'individus de l'espace et du temps — rendent cependant l'approche à base d'agents très naturelle.

3.2.3 Échelles spatio-temporelles et granularité

Les échelles de temps et d'espace sont celles de l'apprentissage d'un individu ajustant ses relations avec d'autres individus au sein de groupes de petites tailles, de l'ordre de la dizaine d'individus. Aucune dynamique démographique n'est prise en considération. Il est assez difficile de donner des valeurs absolues, car les papiers référencés donnent des statistiques d'évolution en terme d'unités de temps et d'espace abstraites. Cette « a-dimensionnalisation » permet aux modèles de se calibrer aisément sur plusieurs contextes. Ce sont donc les valeurs relatives des paramètres temporels et spatiaux qui sont ici à noter. Ainsi l'unité de temps est-elle calée sur un intervalle permettant 20 interactions par individu, soit donc 200 interactions en moyenne par unité de temps pour un groupe de 10 individus. Les dynamiques sont alors suivies sur plus de 250 unités de temps et mettent donc en œuvre plusieurs dizaines de milliers d'interactions ; les unités d'espace sont calées sur les déplacements effectués par les individus suite à une interaction : déplacement de « conquête » du vainqueur (une unité), déplacement de fuite du vaincu (deux unités, lui évitant une nouvelle rencontre immédiate). L'espace disponible est de plusieurs dizaines de milliers d'unités carrées (typiquement 200*200), et possède une structure toroïdale pour éviter les effets de bord. La distance maximale de perception est de 50 unités.

3.2.4 Les agents, leurs attributs

Les entités sont les individus des sociétés animales étudiées. Chacun de ces agents est décrit à chaque instant par son identifiant, sa position dans l'espace d'évolution du groupe, la direction dans laquelle il porte son regard. La prise en compte des rapports de dominance s'effectue de deux manières différentes, traduisant deux modes distincts d'appréciation par un individu de la dominance exercée sur lui par un autre individu : un mode d'appréciation directe, basée uniquement sur la perception immédiate d'une attitude, et la perception indirecte, médiatisée par l'expérience, et supposant une capacité de mémoire et de reconnaissance mutuelle.

Dans les modèles mettant en œuvre l'appréciation directe, un nombre indiquant une « valeur de dominance » est attribué à chaque agent, valeur qui le positionne au sein du groupe dans une hiérarchie de dominance de spectre plus ou moins étendu.

Dans les modèles mettant en œuvre l'appréciation médiatisée par l'expérience, chaque agent possède à chaque instant une estimation de la valeur de dominance de chacun des membres du groupe, lui-même compris. L'attribut est alors un vecteur de valeurs de dominance dont la dimension est la taille du groupe.

À côté de ces attributs de position, de direction et de dominance, interviennent comme paramètres comportementaux d'autres valeurs — étendue du champ de vision (mesurée par un angle), distances et intensités de réactions. Ces valeurs sont identiques d'un individu à l'autre.

3.2.5 Les comportements ou mécanismes

La dynamique du groupe est le résultat de la combinaison de deux processus : un processus de regroupement, rapprochant les agents les uns des autres, et un processus inverse tendant à maintenir entre eux une distance minimale. Ce dernier processus est le résultat d'« interactions de dominance » au cours desquelles deux individus s'évaluent, éventuellement s'affrontent, le sort de l'affrontement décidant de celui qui va occuper la place et de celui qui doit la quitter. L'étendue du champ de vision et trois distances paramètrent la balance entre ces deux processus et déterminent quatre zones spatiales autour d'un agent, associées à quatre types de comportement :

- Le comportement de déplacement aléatoire d'un agent n'ayant aucun autre agent dans son champ de vision.
- Le comportement de déplacement dirigé d'un agent cherchant à rejoindre d'autres agents.
- Le comportement « neutre » d'un agent indifférent aux autres agents qu'il perçoit.
- Le comportement d'interaction de dominance. C'est ce dernier comportement qui constitue la spécificité des modèles DOMWORLD.

Une interaction de dominance est initiée par un agent envers un autre agent situé dans la plus restreinte des quatre zones précédentes. Elle comporte lorsqu'elle est menée à son terme, trois phases : une phase d'**évaluation**, une phase d'**affrontement** et une phase finale de **déplacement** résultant de l'interaction. Des règles précises contrôlent le déclenchement, l'exécution et les conséquences de chacune de ces phases. De ce point de vue, six classes de modèles différents sont développées, croisant les deux modes d'appréciation directe et indirecte et trois stratégies de déclenchement d'une interaction. Dans la stratégie d'« affrontement obligé », il n'y a pas à proprement parler de phase d'évaluation, l'affrontement à lieu dès lors que les conditions spatiales sont réunies. Dans la stratégie d'« affrontement sensible au risque », l'agent évalue le risque de perdre et renonce à l'affrontement si celui-ci est trop grand. Enfin dans la stratégie de « différenciation » l'agent prend le risque de l'affrontement si l'écart de dominance vis-à-vis de l'autre agent, quel qu'en soit le sens, paraît insuffisant.

L'évaluation et l'affrontement prennent pour base des calculs la dominance relative de l'agent initiant l'interaction sur son adversaire. Cette valeur mesure dans les deux cas une même grandeur : le risque de perdre, ou la probabilité de l'emporter. Sa mise en rapport avec des nombres tirés au sort, pour laisser la place aux « hasards du combat », détermine l'issue de l'évaluation, lorsqu'elle a lieu, comme le sort de l'affrontement. L'évaluation est en effet conçue comme un premier affrontement simulé, un pré affrontement « virtuel » mis en œuvre par l'agent initiateur.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Les conséquences des trois phases se mesurent à leurs effets sur le plan « subjectif » des attributs de dominance et sur le plan « objectif » des positions et des directions, tant pour l'initiateur de l'interaction que pour son partenaire.

- **L'évaluation** en elle-même n'a aucun effet sur le partenaire. Elle en a sur l'initiateur dans le cas de l'appréciation indirecte basée sur l'expérience. Dans ce cas, une défaite dans l'affrontement virtuel va entraîner une diminution de l'estimation que l'initiateur a de sa propre valeur de dominance, et une augmentation de son estimation de la valeur de dominance de son adversaire. Une victoire dans l'affrontement virtuel produira un effet inverse.
- **L'affrontement**, lorsqu'il a lieu, va toucher les deux acteurs de l'interaction, en modifiant simultanément — de deux valeurs opposées — leurs attributs de dominance. Ces modifications sont différentes selon que la victoire a lieu chez l'agent qui avait ou non la plus forte dominance. Une prime est ainsi donnée aux victoires moins attendues, bénéficiant au partenaire qui avait avant l'interaction la valeur de dominance la plus faible, et qui malgré cela l'a emporté. L'ampleur des modifications est par ailleurs paramétrée par une intensité — identique pour tous les agents — positionnant les affrontements sur une gamme d'agressivité plus ou moins forte et donc de conséquences plus ou moins marquées.
- **Les déplacements** touchent à la fois le vainqueur et le vaincu. Le premier se dirige vers la position du vaincu en se déplaçant d'une unité spatiale, tandis que le dernier s'enfuit de deux unités spatiales. Une fois ces mouvements effectués, les deux agents modifient leur direction, aléatoirement en tournant à droite ou à gauche d'un angle prédéterminé.

3.2.6 L'implémentation informatique

La nature des articles référencés, centrés sur les débats de l'éthologie des primates, fournit peu d'informations sur l'implémentation informatique des modèles DOMWORLD. Les programmes sont écrits en langage « Pascal Objet ». À côté des agents représentant les individus du mode simulé, figurent des modules également appelés agents, chargés pour certains d'enregistrer les trajectoires individuelles et pour d'autres, de dresser des statistiques à partir des éléments collectés.

Une mention particulière doit être faite concernant le déroulement du temps simulé. La dynamique du modèle est « dirigée par les événements ». Chaque agent se voit attribuer un temps d'attente pris dans une distribution uniforme, qui le place aléatoirement le long d'un échéancier. L'agent en tête de l'échéancier est activé, et les autres à sa suite. L'ordre de l'échéancier est toutefois légèrement modifié lorsqu'une interaction de dominance intervient. Cette dernière joue le rôle d'une perturbation qui en quelque sorte réveille les agents spatialement proches : ceux-ci voient leurs temps d'attente diminués. Cet effet perturbant a été mis en place pour simuler des phénomènes observés d'activation locale.

3.2.7 L'exploitation des modèles et l'apport au domaine

Les modèles explorent plusieurs questions concernant les hiérarchies de dominance et la relation de ces hiérarchies avec d'autres aspects de la vie sociale. Citons ici par exemple la question des rapports entre les sexes (Hemelrijk 2002). Nous ne détaillons qu'un seul thème, celui de l'émergence de la hiérarchie et sa relation avec la formation d'une structure spatiale (Hemelrijk 2002).

Dans l'étude autour de ce thème, douze scénarios différents sont explorés, ils croisent :

- les trois stratégies d'évaluation ;
- les deux modes d'appréciation de la dominance ;
- une valeur forte et une valeur faible de l'intensité d'agression. Pour chaque scénario, dix simulations sont effectuées, soit 120 au total.

Plusieurs points de vue macroscopiques sont développés. Sont étudiées notamment à chaque pas de temps, et donc en évolution :

- La différenciation du groupe — plus ou moins hiérarchisé ou plus ou moins égalitaire — et la stabilité de cette différenciation. Le niveau de différenciation est mesuré par le coefficient de variation de la distribution des valeurs de dominance ; sa stabilité est estimée par un indicateur de corrélation entre la distribution des valeurs observée à l'instant $t$et celle observée à l'instant $t - 2$. Les calculs sont évidemment modulés selon que le modèle utilise le mode d'appréciation directe ou basée sur l'expérience.
- Le lien entre dominance et « centralité », autrement dit la corrélation entre les valeurs de dominance et les positions — plus ou moins centrales — occupées par les agents
- Les caractéristiques des interactions observées, tels leur nombre par unité de temps, l'écart séparant les dominances des deux agents parties prenantes, le caractère plus ou moins unidirectionnel, — plus ou moins symétrique — des affrontements.

3.3 ARCHISIM : MODÉLISATION DE LA DYNAMIQUE DU TRAFIC ROUTIER

De nouvelles possibilités de régulation de trafic, ainsi que de nouveaux équipements, sont régulièrement introduits afin de rendre la circulation automobile aussi sûre et confortable que possible. Les modèles de simulation permettent de tester et d'évaluer plusieurs variantes sans avoir recours à des tests grandeur nature, souvent coûteux et difficiles à mettre en œuvre ou tout simplement impossibles à réaliser. Ils constituent à ce titre un outil de prévision et de gestion du trafic utilisé depuis longtemps, notamment par les collectivités locales.

La particularité du trafic automobile est que l'infrastructure routière est conçue selon une demande projetée à l'instant t pour répondre à un optimum collectif alors

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

que chaque individu réalise son déplacement en cherchant à atteindre son optimum individuel. Cette particularité rend ce phénomène difficile à comprendre, à analyser et à optimiser, et ses caractéristiques font qu'il est difficile à modéliser. Il est de plus rare que de tels modèles prennent en compte explicitement la dimension comportementale de la conduite individuelle au même titre que la topologie des infrastructures ou les règles de contrôle des équipements de régulation. L'hétérogénéité des comportements des usagers, celle de leurs interactions ou de leurs mécanismes de prise de décision constitue pourtant un facteur essentiel dans la compréhension de certains phénomènes complexes qui caractérisent le trafic routier actuel. La prise en compte de cet aspect, qui n'est souvent représenté dans les modèles que sous une forme probabiliste, quand il n'est pas tout simplement moyenné, est l'une des originalités, parmi d'autres, du modèle ARCHISIM, développé par des chercheurs de l'INRETS[4], en particulier Stéphane Espié, depuis 1997.

3.3.1 L'objectif de recherche

ARCHISIM a pour ambition de simuler un trafic routier à la fois « globalement réaliste » sur des portions complètes de voies et « individuellement crédible » quant aux comportements des véhicules (et des conducteurs) artificiels qui les empruntent. La poursuite de ces deux objectifs simultanés a d'abord pour origine la gamme étendue d'applications envisagées pour le modèle. Citons par exemple, sans pour autant être exhaustif :

- la mesure de l'impact des aménagements de l'infrastructure d'une voie sur la fluidité de son trafic ;
- l'évaluation de l'incidence de ces aménagements sur le comportement des usagers de la route ;
- l'évaluation des modifications de comportements induites par l'adjonction de dispositifs de sécurité aux véhicules (comme l'ABS) ;
- la mesure de l'incidence de ces modifications sur le trafic global en fonction du nombre de véhicules équipés, etc.

Au-delà de ces besoins applicatifs, une des hypothèses de base d'ARCHISIM est que le comportement des usagers, souvent considéré globalement et de façon moyennée par de nombreux modèles, est par essence hétérogène (il suffit simplement de songer aux différents types de véhicules présents dans un trafic normal : véhicules particuliers, poids lourds, deux-roues, etc.) et que cette hétérogénéité d'action ou d'interaction avec l'infrastructure ou les autres usagers peut être à l'origine de l'émergence des phénomènes collectifs que les simulateurs tentent d'anticiper, comme par exemple les ralentissements. Enfin, ARCHISIM part du constat que le comportement individuel des conducteurs est très mal connu : s'il peut être simplifié sur des infrastructures simples, il est en revanche pratiquement inconnu dès lors que le contexte

4. Institut National de Recherche sur les Transports et leur Sécurité

routier devient complexe (intersections compliquées, situations de démarrage, etc.) ou que différents dispositifs d'assistance rentrent en jeu.

ARCHISIM s'intéresse donc à au moins deux niveaux de modélisation du trafic. Le niveau macroscopique (les voies et leur trafic), qui est mesurable (densité, vitesse moyenne, etc.) et modifiable (ajout ou retrait d'infrastructures comme des ronds-points, changement de la configuration des voies, etc.). Le niveau microscopique (les conducteurs et leur véhicule), lui aussi mesurable (temps de réaction, vitesse, délai de freinage, etc.) et modifiable (profil de conducteur, caractéristiques du véhicule, équipement, etc.). Ces deux niveaux sont étroitement interdépendants : des décisions individuelles des conducteurs prises au sein d'une infrastructure routière donnée naît un trafic qui rétroagit immédiatement (en fonction de sa vélocité et de sa fluidité) sur leur prise de décisions. Ce choix de représenter le trafic comme une conséquence d'interactions locales entre des usagers, une réglementation et une infrastructure fait d'ARCHISIM un modèle très original dans le paysage des simulateurs routiers. De plus, l'architecture informatique du modèle est conçue pour permettre à un simulateur piloté (par un humain) de participer à la simulation réalisée et ainsi d'interagir avec divers « scénarios routiers » par l'intermédiaire d'une interface réaliste en trois dimensions.

Figure 3.5 L'interface offerte par le simulateur à un pilote humain.

Le but est de permettre de mesurer l'impact, sur des conducteurs « réels », d'infrastructures « virtuelles » ou d'équipements nouveaux (airbags, etc.), afin d'étudier leurs réactions. Le scénario de trafic produit par ARCHISIM doit par conséquent fournir à un opérateur humain l'illusion d'un scénario routier réel, ce qui représente un défi considérable. Outre l'étude de problématiques qui ne concernent pas cet ouvrage, comme la représentation graphique en trois dimensions ou le retour d'efforts sur les commandes, il faut donc que les conducteurs virtuels qui peuplent les tronçons

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

routiers soient « crédibles » et ne provoquent pas de situations inconcevables dans un vrai trafic. À cette fin, ARCHISIM s'appuie, pour modéliser les conducteurs, sur des modèles de comportement élaborés par des psychologues de la conduite à partir d'études en situation (dans lesquelles sont répertoriés et mesurés les mécanismes de perception, d'action, les règles de décision, les temps de réponse et les capacités d'anticipation de sujets humains aux commandes de véhicules).

3.3.2 Les raisons avancées pour une approche agent

La première raison provient de la nature même du phénomène étudié : le trafic routier est par définition distribué et en règle général exempt de tout contrôle central.

La deuxième raison tient à l'extrême diversité de ses participants : les conducteurs sont hétérogènes (débutants ou expérimentés), et utilisent des véhicules aux caractéristiques variées (poids lourds et véhicules légers, par exemple). Les conditions météorologiques sont également un facteur supplémentaire d'hétérogénéité de leurs comportements, en particulier par rapport à leurs capacités de vision ou d'anticipation. Ils n'ont enfin pas tous les mêmes objectifs, ni de trajet, ni de « confort » sur la route, pas plus qu'ils ne partagent la même évaluation du risque.

La troisième raison, enfin, imposée par les objectifs applicatifs d'ARCHISIM, est qu'il semble difficile d'obtenir des éléments animés au comportement réaliste sans disposer d'un modèle centré sur la production, par chaque individu de la simulation, d'un comportement qui lui est propre.

Dans ARCHISIM, une situation routière est donc considérée comme étant le fruit d'interactions entre des agents relativement hétéroclites : véhicules, infrastructure, contrôleur à feux, panneau à messages variables, etc. (cf. fig. 3.6). Chaque agent est une entité autonome dotée de ses propres caractéristiques, connaissances, buts et stratégies, qui effectue les tâches pour lesquelles il a été conçu et résout les conflits éventuels qu'il peut avoir avec les autres agents.

3.3.3 Échelles spatio-temporelles

La modélisation du trafic routier a ceci de particulier qu'il n'existe pas réellement de tronçons de voies qui soient « autonomes » par rapport à d'autres, y compris sur des distances importantes (compte tenu, bien entendu, du décalage temporel entre les situations distantes). La simulation d'une situation localisée doit donc prendre en compte le trafic global autour de cette situation, qui se traduit par exemple par un flux plus ou moins important de véhicules entrants et sortants. Comme il n'est pas vraiment réaliste de vouloir simuler l'intégralité de la circulation routière française pour étudier un rond-point en un endroit précis, cette prise en compte est réalisée dans ARCHISIM selon un emboîtement de trois modèles représentant trois échelles spatiales différentes. Un modèle macroscopique génère un flux global selon l'heure de la journée et à une échelle de plusieurs kilomètres. Ce flux est ensuite « traduit » en un ensemble de « véhicules » entrant dans un modèle microscopique (où les lois restent globales mais s'appliquent sur des attributs des véhicules individualisés), ces derniers ne devenant des agents dotés de comportements individuels que dans un

rayon de quelques centaines de mètres autour de la situation étudiée (qui peut inclure le véhicule piloté par le simulateur de conduite).

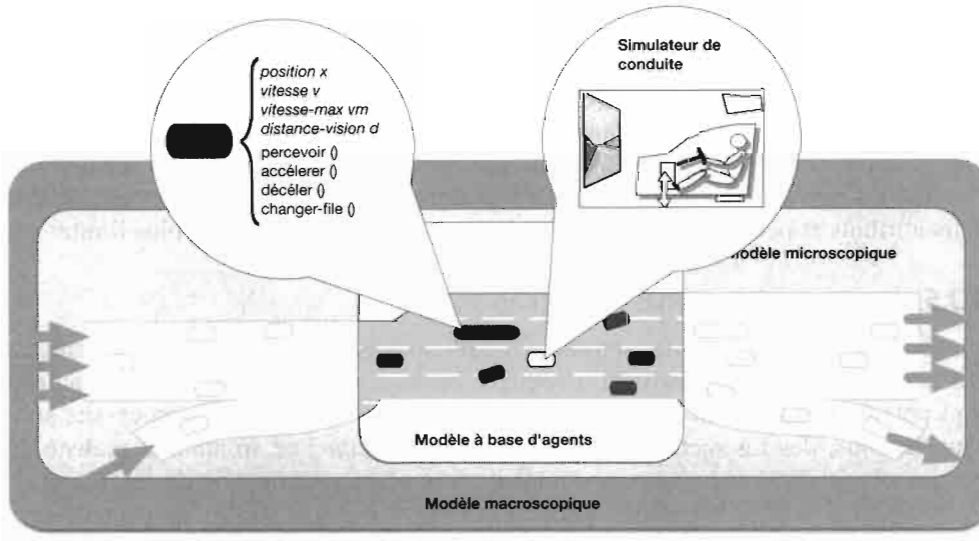


Figure 3.6 Architecture générale d'ARCHISIM et des trois modèles de trafic emboîtés.

Cette architecture originale (détaillée dans (Espié 2005)) est rendue possible parce qu'il existe une « monnaie d'échange » entre les trois modèles sous la forme de véhicules. Elle permet de proposer un des rares modèles opérationnels capables de manipuler ainsi plusieurs échelles de façon dynamique.

Concernant l'échelle temporelle, il est important de souligner que l'objectif principal d'ARCHISIM est de pouvoir faire fonctionner une simulation quasiment en temps réel. Le temps est discrétisé en pas de temps qui font environ 100 ms, ce qui semble être satisfaisant dans les expérimentations faisant intervenir le simulateur piloté. La durée des expérimentations est très variable.

3.3.4 Les agents, leurs attributs

Les principaux agents d'ARCHISIM sont bien entendu les conducteurs (il est à noter que conducteur et véhicule sont confondus). Chaque conducteur simulé est un agent autonome, caractérisé par les attributs suivants :

- Un but, qui consiste usuellement à suivre un itinéraire donné qui lui est propre.
- Un champ de perception, caractérisé par quatre distances de vision maximales, vers l'avant, l'arrière et sur les routes latérales.
- Ses accointances : ce sont les agents qui se trouvent dans son champ de perception et avec qui il peut communiquer (la communication, dans ce modèle, représentant simplement la « mise à disposition » d'attributs).
- Une mémoire locale comprenant d'une part les attributs pouvant être consultés par les autres agents : sa vitesse, sa position kilométrique, son accélération, ses

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

indices visuels (clignotants, feu de stop) et son type du véhicule ; d'autre part, des informations qui lui sont propres : le type de conducteur (humain ou virtuel), son expérience, sa vitesse préférentielle, son temps de réaction, sa stratégie, sa distance de suivi préférentielle, sa direction actuelle, etc.

Tous les autres éléments d'ARCHISIM sont aussi représentés par des agents : les contrôleurs de feux, les équipements statiques, les équipements routiers dynamiques (panneaux de signalisation avec capteurs, par exemple), les routes, leurs intersections. Comme les agents-véhicules, ils mettent à disposition des autres agents certains de leurs attributs et peuvent en lire certains, mais leur rôle est beaucoup plus limité.

3.3.5 Les comportements ou mécanismes

Un conducteur réel subit un ensemble d'interactions générées par les comportements des autres usagers, l'infrastructure routière ou la réglementation. Ces interactions sont potentiellement source de conflits. La résolution de ces conflits nécessite souvent, de plus, des interactions supplémentaires. Obtenir une simulation réaliste du comportement des conducteurs revient donc à implanter un modèle de résolution de conflits pertinent dans le contexte particulier imposé par ARCHISIM, donc un modèle qui permet à la fois d'implanter et de valider les modèles proposés par les psychologues de la conduite et d'assurer un fonctionnement en temps réel. Ceci a conduit les concepteurs à poser deux hypothèses fortes sur le comportement modélisé.

La première est que tous les contextes d'interactions routières peuvent être représentées par trois types de tâches paradigmatiques, classées par ordre croissant de complexité :

- La tâche de conduite en file (par exemple la conduite sur autoroute).
- La tâche d'insertion (par exemple lors de l'utilisation d'une bretelle d'entrée).
- La tâche d'intersection (quand les trajectoires des véhicules se croisent à un carrefour).

La seconde est qu'il est possible de définir un modèle de comportement pour chacune de ces situations en se basant sur les deux postulats suivants :

- Toute action entreprise par le conducteur a pour objectif de minimiser ses interactions (et donc ses conflits potentiels) avec son environnement ;
- Le conducteur anticipe en partie l'évolution de son environnement et ne réagit pas uniquement à des variations instantanées.

Une fois ces hypothèses posées, les concepteurs d'ARCHISIM se sont basés sur les travaux du Laboratoire de psychologie de la conduite (LPC) (El Hadouaj 2004) pour en proposer une formalisation à base de règles. Le comportement d'un agent conducteur peut ainsi être résumé de la façon suivante : à chaque pas de temps, il met à jour sa perception locale par le biais d'un échange d'informations avec son environnement. Cette perception est discrétisée en un ensemble de zones (fig. 3.7), dont chacune est caractérisée par un ensemble d'indices visuels dépendant de la tâche

(1, 2 ou 3). Par exemple, les indices visuels importants pour la tâche de conduite en file sont la vitesse moyenne d'une zone et l'écart type de ces vitesses. Sont bien sûr inclus dans ces indices les états des autres agents de la simulation, en particulier les feux, panneaux indicateurs, etc.

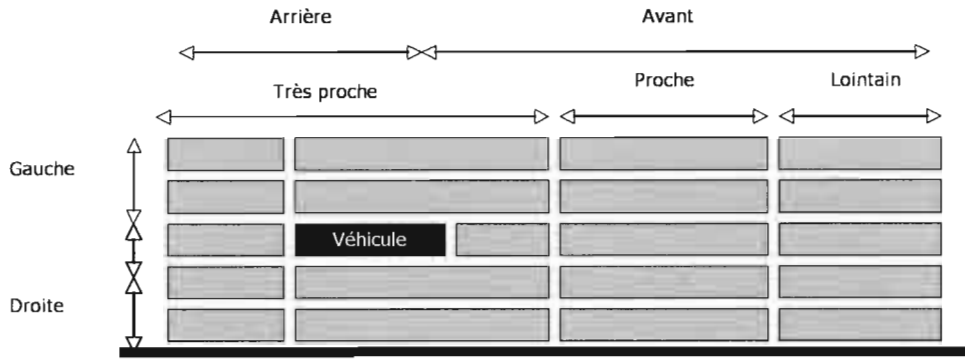


Figure 3.7 Zones de perception d'un agent conducteur dans ARCHISIM.

À cet ensemble ordonné d'indices vont correspondre des règles de comportement selon un principe simple : des règles SI-ALORS prenant en entrée des indices et en sortie les actions élémentaires disponibles (accélérer, freiner, changer de file) sont établies pour chaque zone, puis classées par ordre de priorité et la plus prioritaire est déclenchée. Il n'est pas évident, dans la faible littérature consacrée au projet, de comprendre comment est calculée cette priorité (en fonction des zones ? en fonction des indices ?) et surtout comment sont réglés les conflits entre règles. Un travail minutieux et manuel de réglage des paramètres par simulation semble avoir été effectué pour chacune des tâches.

Les autres agents de la simulation (contrôleur de feux, etc.) ont un comportement similaire (ils prélèvent l'information en utilisant des « pseudo-capteurs » placées le long des voies) quand il n'est pas totalement rigide.

3.3.6 L'implémentation informatique

Le simulateur actuel a été réalisé en C++. Il est couplé à de nombreux autres systèmes comme un rendu visuel en 3D, l'adjonction d'un simulateur piloté, ce dernier imposant notamment une obligation de fonctionnement en temps réel. Contrairement à d'autres projets de simulation, où les concepts du méta-modèle agent se retrouvent jusque dans le code du simulateur (souvent sous une forme orientée-objet), ARCHISIM semble avoir appliqué un certain nombre d'optimisations en tout genre, par exemple dans le calcul des « perceptions individuelles » des agents. Celles-ci sont en effet réalisées de façon centralisée par un serveur d'environnement qui calcule, pour chaque véhicule, sa « perception » en fonction de sa position et de sa vitesse. Les choix techniques de synchronisation et d'ordonnancement des agents ne sont pas disponibles dans la littérature.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

3.3.7 L'exploitation du modèle et l'apport au domaine

ARCHISIM est un bon exemple de simulateur à vocation généraliste. Il permet d'aborder aussi bien :

- des simulations à relativement large échelle du trafic routier sur une zone,
- des expérimentations sur l'incidence de l'équipement des voies sur les comportements collectifs,
- des expérimentations sur l'incidence de l'équipement des véhicules sur les comportements individuels,
- des simulations mêlant des usagers hétérogènes (poids lourds, deux-roues, voitures, voire piétons).

Il n'y a donc pas de point de vue privilégié dans l'usage de ce simulateur, hormis le fait, important, que l'essentiel de la simulation repose sur la validité des comportements individuels.

ARCHISIM étant à vocation généraliste, de très nombreuses, et très diverses, expérimentations ont été réalisées. Chacune des trois tâches (conduite en file, insertion, intersection) a ainsi été validée unitairement sur des scénarios « réalistes » (une topologie existante de voies, et un simulateur de trafic global fournissant une densité correcte).

Dans la mesure où il semble assez difficile de disposer de données fiables portant sur de longues durées, les validations au niveau global se sont faites en grande partie par comparaison avec des lois d'écoulement du trafic connues. Leur rôle principal a été de montrer que le trafic global résultant d'une modélisation individuelle du conducteur ne s'écartait pas trop des modèles théoriques. La plupart des expérimentations réalisées semblent montrer que, sur un ensemble statistiquement significatif de simulations, ARCHISIM reproduit correctement ces lois.

Certaines validations du simulateur ont cependant été réalisées à partir de données réelles : les expérimentations permettant de juger du réalisme du comportement d'insertion, par exemple, ont été confrontées à des données issues de l'état réel du trafic sur des tronçons d'autoroute (qui décrivent la variation du débit et de la vitesse sur les autoroutes elles-mêmes, mais aussi sur les bretelles d'accès) (El Hadouaj 2004). Dans tous les cas de figure, ARCHISIM semble être capable de reproduire des situations de trafic complexes, ce qui autorise à penser que les comportements fournis aux agents conducteurs sont assez fidèles à ceux mis en œuvre par les vrais conducteurs.

Un autre angle de validation de ce modèle individuel, beaucoup plus délicat à décrire, est celui réalisé « à dire d'acteurs », en particulier par les pilotes du simulateur physique. Ce travail semble avoir été réalisé à de nombreuses reprises, mais il ne nous a pas été possible de savoir s'il l'avait été de façon formelle.

ARCHISIM a apporté la preuve qu'il était possible de réaliser une simulation fidèle d'un trafic global en partant de la modélisation de ses composantes individuelles, à savoir des conducteurs en interaction avec un environnement et les autres usagers.

Si l'intérêt d'un modèle de ce type ne fait guère de doute pour tout ce qui touche aux expérimentations virtuelles (par exemple, modification des équipements, changement de réglementation, etc.), ou à la validation des lois de trafic, deux questions restent posées par son usage dans un cadre plus général, en particulier celui de la prévision de trafic. La première question a trait au nombre important de paramètres qui caractérise chaque simulation : à partir du moment où tous les agents sont définis individuellement, ce nombre est gigantesque et le simulateur perd alors de sa généralité, chaque nouveau jeu de paramètres pouvant remettre en cause les expérimentations précédentes. La seconde question concerne ses possibilités de passage à l'échelle, non pas conceptuelles, mais informatiques : la puissance de calcul nécessaire à la simulation de plusieurs centaines de milliers de conducteurs n'est sans doute pas encore disponible. Et il est difficile de savoir si le traitement particulier de la perception, par exemple, dans le modèle, peut ou non autoriser un fonctionnement en parallèle de son simulateur.

Enfin, sur un autre plan, ARCHISIM est sans doute le seul exemple fonctionnel d'un simulateur à base d'agents maniant explicitement plusieurs échelles spatiales de façon simultanée, ce qui est en soi une belle réussite, même si le domaine d'application (et l'important travail de modélisation réalisé depuis les années 1950) s'y prête relativement bien.

Chapitre 4

Modèles sociaux

4.1 CUBES : MODÉLISATION DU COMPORTEMENT DE CONSOMMATEURS

Pouvoir comprendre et prédire les comportements des consommateurs dans un marché hautement concurrentiel, anticiper leurs réactions face aux stratégies marketing des différents marques et mieux concevoir ces stratégies, sont des enjeux majeurs. CUBES [1] est un modèle dont les agents représentent les consommateurs du produit objet de concurrence et les firmes concernées. Leurs interactions sont d'une part les divers stimuli résultant des stratégies des firmes et des influences exercées par les consommateurs les uns sur les autres, d'autre part l'évolution des achats et des parts de marché. L'ambition est de fournir un outil dépassant les limites des modèles de comportements habituellement utilisés en marketing : pouvoir simuler une population de consommateurs de plusieurs milliers d'individus, représentative dans ses composantes socio-démographiques de la population réelle présente sur la marché, puis analyser de façon fine diverses dynamiques telles que l'évolution des opinions, des parts de marché, ou encore des caractéristiques des consommateurs ayant adopté les différentes marques.

1. Ce modèle a été réalisé par Lamjed Ben Said dans le cadre d'une collaboration entre l'École nationale d'informatique de Tunis, le LIP6 et le laboratoire Traitement d'informations et de connaissance (TIC) de France Telecom recherche et développement. Le travail s'est déroulé entre 1999 et 2003. Les principales références utiles à la compréhension du modèle sont la thèse de Lamjed Ben Said (Ben Said 2003) et les articles publiés qui ont suivi.

4.1.1 La question scientifique

CUBES se donne pour objectif de comprendre les déterminants de l'évolution d'une population de consommateurs face aux pressions exercées par plusieurs marques concurrentes proposant des produits de même nature : évolution des appréciations portées sur chaque marque, des décisions d'achat et consécutivement de la répartition des parts de marché. Sur un plan opérationnel, il s'agit d'anticiper les réactions des consommateurs à la stratégie mise en œuvre par une marque, compte tenu de l'état du marché et des stratégies possibles des autres marques, et donc de déterminer les bonnes stratégies dans un contexte donné. La recherche de réponses à ces enjeux, majeurs pour les firmes concernées, met en œuvre des connaissances et théories relevant de plusieurs disciplines (sociologie, psychologie, socio-psychologie, économie) intégrées dans la perspective des études de marketing. Cette recherche suppose une appréhension adéquate de la réalité sur plusieurs plans :

- sur le **plan individuel** : appréhension de la psychologie du consommateur et de sa variabilité ;
- sur le **plan collectif** : appréhension de la structure des canaux de transmission de l'information et de l'effet, notamment, des réseaux d'influence ;
- sur le **plan temporel** : appréhension de la manière dont ces éléments individuels et collectifs évoluent en fonction des décisions d'achat, de la saturation du marché, et des interactions entre les différents acteurs.

Une des difficultés était d'intégrer dans un modèle formalisé l'apport des différentes disciplines afin de pouvoir répondre à ces questions.

Dans un premier temps ont été identifiées des hypothèses structurantes caractérisant les comportements des consommateurs dans le contexte étudié et permettant d'en simplifier la description. La première est que ces comportements ne sont pas uniquement basés sur des calculs rationnels liés explicitement aux prix. La seconde que l'influence spécifique des situations concrètes d'achat — lieu, instant, modalité — peut être négligée. Et la troisième, enfin, que les facteurs essentiels résident dans des attitudes comportementales générales, non spécifiques aux décisions d'achats, modulées par les caractéristiques personnelles des individus et par leurs interactions avec l'environnement.

La démarche suivie a ensuite été de sélectionner, à partir de la littérature des études en marketing et de discussions avec des spécialistes, les concepts nécessaires à la construction du modèle, puis de les organiser dans un schéma simplifié de définitions et de liens. C'est ce que l'auteur appelle *la construction d'un cadre théorique intégratif.* Ont été par exemple retenus des concepts psychologiques tels que l'implication, l'attitude, la perception, la motivation ; les concepts de besoin et de décision, à cheval entre la psychologie et l'économie ; des concepts de socio-psychologie comme ceux de communication, de leader d'opinion, d'imitation, d'apprentissage ; des concepts sociologiques, enfin, comme ceux de classe sociale, de groupe d'amis, de famille. Il s'est agi enfin de traduire hypothèses et concepts dans un ensemble de variables et de règles d'évolution attachées aux entités du modèle.

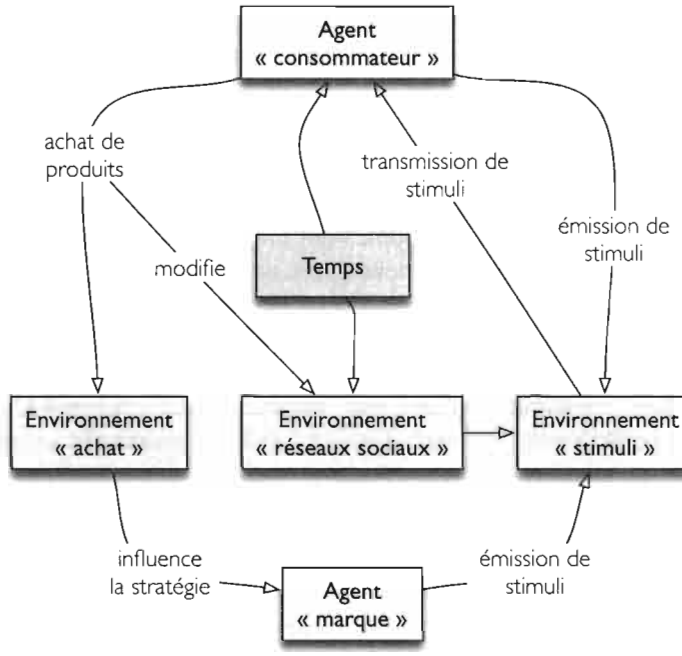


Figure 4.1 Mécanismes de CUBES.

4.1.2 Les raisons avancées pour l'approche agent

Tout phénomène économique ou social met indéniablement en œuvre des actes individuels. Mais la compréhension de la dynamique de ces phénomènes n'implique pas nécessairement que les concepts et les modèles mis en œuvre soient « individu-centrés », comme le rappellent les nombreux débats autour de l'individualisme méthodologique. Il en est de même lorsque l'on recherche simplement à prédire ou à contrôler.

Le choix d'une approche agent pour l'étude et l'anticipation de la réaction d'une population de consommateurs à différentes stratégies marketing est donc fortement lié aux questions posées, et justifié par les auteurs à l'aide de deux arguments principaux :

- En premier lieu, la complexité constatée des liens entre ces stratégies et la réaction de la population, autrement dit *la complexité de la relation « micro-macro »* dans le contexte étudié. Cette complexité rend malaisée la construction de modèles macroscopiques capables d'en rendre compte. Il serait difficile en effet de préserver dans de tels modèles la diversité des profils de consommateurs, ou encore d'y représenter la multiplicité des réseaux d'influence entre les individus et d'en comprendre l'impact. Au contraire, selon les auteurs, un modèle agent paraît pouvoir intégrer très naturellement ces différents éléments.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

- En second lieu, un tel modèle oblige par nature à *une réflexion précise sur les comportements individuels et leur formalisation*, ce qui ne peut être que bénéfique lorsque l'on pose que c'est à ce niveau individuel que réside l'explication en profondeur des phénomènes en jeu.

Les auteurs complètent leurs considérations par des observations sur les limites effectives des autres modèles, en particulier les modèles statistiques issus de l'exploitation des bases de données clients. Ces modèles ont une visée d'abord prédictive, et fournissent des résultats très utiles. Mais leur durée de validité est courte et leur pouvoir explicatif réduit. Ces limites encouragent la recherche de nouvelles approches.

La démarche adoptée par CUBES est de proposer un modèle explicitant les caractéristiques individuelles d'ordre socio-psychologique et l'organisation des réseaux d'influence entre consommateurs, afin, par simulation, de comprendre l'apparition et l'évolution des caractères émergents au niveau global, comme par exemple la dynamique des parts de marché.

4.1.3 Échelles spatio-temporelles et granularité

Les phénomènes étudiés dans CUBES sont des évolutions à moyen terme, contrairement au court terme des modèles prédictifs auquel il a été fait référence. La durée de ces phénomènes s'étale sur plusieurs années, typiquement cinq. La résolution temporelle est le mois, si bien que le nombre de pas de temps d'une simulation peut atteindre plusieurs dizaines.

Il n'y a pas à proprement parler dans CUBES d'espace physique sur lequel se répartiraient géographiquement les consommateurs. On trouve en revanche un « espace social », support de proximités entre consommateurs, et qui contraint leurs interactions. La topologie de cet espace est celle d'un plan, plus exactement d'une grille régulière dont chaque cellule porte un consommateur. La représentation à chaque instant de l'état du système s'en trouve évidemment facilitée.

Le nombre de consommateurs répartis ainsi sur cette grille figurant l'espace social s'évalue à plusieurs milliers d'individus. Si l'on veut considérer ce nombre comme représentatif d'un groupe réaliste de consommateurs, on peut penser à une petite ville. Ce n'est évidemment pas l'échelle réelle du marché considéré implicitement par CUBES, qui s'apprécie en millions de personnes.

Le nombre de marques concurrentes ne dépasse pas quant à lui quelques unités. Nombre de simulations sont ainsi menées avec trois marques présentes sur le marché.

4.1.4 Les agents, leurs attributs, leur organisation

Les entités de CUBES sont de deux types : les consommateurs d'une part, les marques ou firmes d'autre part. Ils sont insérés dans des réseaux.

a) Les agents consommateurs

Ils ont une structure simple, combinaison d'automates à seuils réagissant à des stimuli ou des influences externes. CUBES manifeste ainsi un net parti pris d'abstraction dans sa démarche de modélisation, et privilégie, alors même qu'il s'agit d'acteurs humains, une modélisation mécaniste des comportements. La plupart des grandeurs et seuils mis en œuvre dans cette structure sont des nombres réels normalisés pour s'inscrire sur l'intervalle [0,1].

- Un premier attribut est ainsi le *vecteur des opinions* de l'agent vis-à-vis des différentes marques en présence. Une opinion s'évalue par son intensité, exprimant une appréciation plus ou moins favorable de la marque concernée.

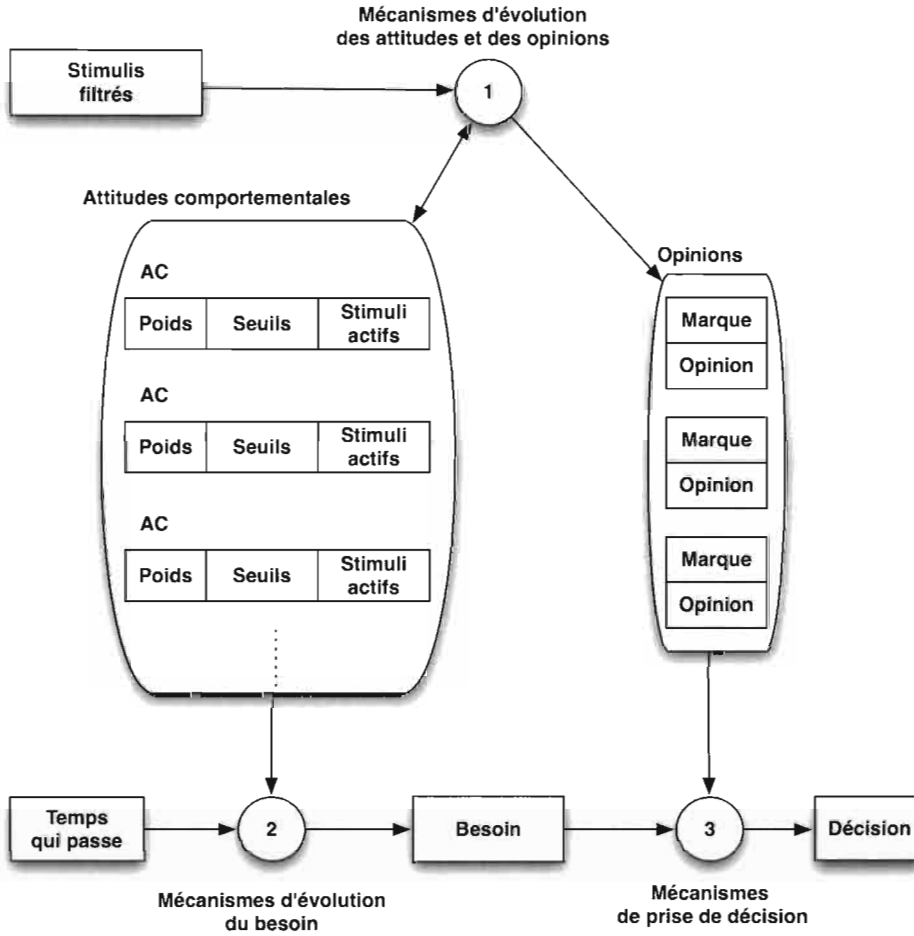


Figure 4.2 Agent consommateur dans CUBES : représentation schématique.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

- Le deuxième attribut est le *profil socio-psychologique*, représenté par un vecteur d'attitudes comportementales (AC). Ces AC traduisent des traits socio-psychologiques non spécifiques aux comportements d'achat, présents chez un individu d'une façon plus ou moins prégnante. L'AC *d'imitation* exprime la propension plus ou moins importante de l'individu à imiter son entourage. L'AC *de conditionnement* exprime la propension de l'individu à réagir de façon réflexe aux stimuli qui lui parviennent. L'AC *d'innovativité* exprime l'attrait plus ou moins fort de l'individu pour tout ce qui est nouveau. L'AC *de méfiance* exprime la plus ou moins grande réticence a priori de l'individu à l'égard d'une proposition quelconque. Enfin l'AC *d'opportunisme* exprime la tendance plus ou moins forte de l'individu à changer d'opinion et à saisir les occasions du moment. Les cinq attitudes répondent au même schéma. Elles se caractérisent toutes par :
  - Une intensité, poids avec lequel l'AC concernée intervient dans le profil comportemental de l'individu.
  - Trois seuils contrôlant la manière dont l'AC se trouve affectée par les stimuli et l'existence ou non d'impacts sur les opinions.
  - La nature des stimuli auxquels l'AC réagit positivement ou négativement.
- Le troisième attribut est le *profil socio-démographique du consommateur*, réunissant trois composantes : l'âge, le niveau éducationnel et le niveau professionnel.
- Le quatrième attribut est une *mesure du besoin*, c'est-à-dire l'état de tension conduisant le consommateur à agir, c'est-à-dire à prendre une décision. Ce besoin s'évalue lui aussi par une intensité qui s'exprime sous forme d'un nombre réel.

b) Les agents marques

Chaque marque est caractérisée à un instant donné par une stratégie. Celle-ci est un vecteur à quatre composantes indiquant la nature — ou l'objectif — des actions entreprises : une composante *fidélisation*, une composante *promotion*, une composante *image de marque* et une composante *innovation*. Chaque composante est à un instant donné, quantifiée par une intensité.

c) Les réseaux

Plusieurs relations viennent structurer dans CUBES l'ensemble des agents. Entre les consommateurs existent deux types de liens binaires, qui génèrent deux réseaux distincts, canaux de transmission des influences exercées par les individus les uns sur les autres :

- Le premier type de réseau définit pour chaque consommateur un voisinage de proximité immédiate correspondant à son *groupe familial* ou, d'une façon moins restrictive, à son *groupe d'amis*. Ce réseau est représenté par une grille 2D dont les cellules sont les consommateurs, concrétisant visuellement l'espace social.

- Le second type de réseau définit un *voisinage social élargi*, exprimant les liens que possède chaque consommateur avec d'autres sur le plan de leurs attributs. On peut ainsi avoir un réseau regroupant, par exemple, des consommateurs de même classe sociale.

Les liens existants dans ces deux réseaux sont valués : ils sont notamment porteurs à chaque instant de *probabilités d'interaction* qui contrôlent la transmission des stimuli entre les consommateurs concernés.

Enfin, il n'existe pas de relations prédéfinies entre les agents marques et les agents consommateurs : toutes les marques peuvent adresser des stimuli à tous les consommateurs, et, réciproquement, tous les consommateurs peuvent *a priori* se fixer sur toutes les marques.

4.1.5 Les comportements ou mécanismes

Dans le modèle, tout est susceptible d'évoluer sous l'effet des interactions entre agents, des décisions d'achat de consommateurs, et du temps : le choix des marques, les besoins des consommateurs, leurs opinions, leurs attitudes comportementales, l'impact du voisinage de proximité immédiate et des voisinages sociaux élargis, les stratégies des marques. L'imbrication des mécanismes régissant ces évolutions produit une dynamique difficilement prévisible sur le moyen terme sans simulation.

Les vecteurs porteurs des influences entre agents sont les « stimuli », qu'on peut voir comme des particules d'interactions, pour employer une métaphore physique, ou encore des messages, en utilisant un vocabulaire plus proche du domaine concerné. Ces stimuli se caractérisent tous par les mêmes attributs : une *intensité*, un *type*, une *couleur,* et des informations décrivant l'émetteur du stimulus. *L'intensité* détermine, avec d'autres facteurs, la force de l'impact, positif ou négatif, sur les attitudes comportementales sensibles. *Le type* précise la nature du stimulus : stimuli émis par les marques et représentant l'effet d'une publicité, d'une promotion, du caractère nouveau d'un produit, ou d'une opération de fidélisation ; stimuli émis par d'autres consommateurs, de type recommandation, rumeur, disqualification. *La couleur* fait référence à la marque concernée. Les informations décrivant l'émetteur du stimulus sont renseignées lorsque ce dernier est un consommateur. Elles permettent de moduler l'impact du stimulus en fonction de la position de l'émetteur — s'il s'agit ou non d'un leader d'opinion — et de sa proximité sociale avec le récepteur.

Les principaux mécanismes sont les suivants :

- **Évolution des intensités des attitudes comportementales** : sous l'effet des stimuli qui parviennent aux consommateurs, ces intensités se modifient. Du fait de l'intervention des seuils, l'impact est non linéaire : si l'intensité de l'AC est trop faible par exemple, un stimulus externe positif, même très fort, n'aura aucun impact. L'émetteur du stimulus n'est pas pris en compte.
- **Évolution des intensités des opinions** : lorsqu'une AC est affectée par un stimulus, et lorsque son intensité dépasse un seuil déclencheur, l'opinion de l'agent sur

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

la marque désignée par la couleur du stimulus va être modifiée à son tour. Interviennent l'intensité du stimulus et les positions sociales comparées de l'émetteur et du récepteur. *Les opinions se modifient également sous l'effet du temps*, par un processus non linéaire d'oubli graduel affecté par l'âge, l'intensité de l'attitude comportementale spéciale de conditionnement et enfin des seuils d'oublis.

- **Évolution des besoins** : l'intensité du besoin ressenti par un consommateur augmente avec le temps selon une loi qui dépend de sa possession ou non du produit et de sa durée de vie. Cette loi ne fait intervenir ni les opinions, ni les attitudes comportementales, ni les stimuli.
- **Prise de décision** : le « passage à l'acte », c'est-à-dire l'achat d'un produit par un consommateur, est déterminé par une règle dont les seuls paramètres sont les intensités des opinions et les intensités des besoins à l'égard de ces produits.
- **Dynamique des stimuli** : un ensemble de règles régissent l'émission des stimuli, tant de la part des marques que de celle des consommateurs, ainsi que leur diffusion dans les réseaux de proximité immédiate et de voisinage social. Ces règles ont pour objectif de définir :
  - à quel moment une marque ou un consommateur émet un stimulus,
  - quel stimulus cet agent émet-il alors,
  - qui reçoit ce stimulus et avec quelle intensité à la réception, sachant que cette intensité peut diminuer lors de la diffusion sur les réseaux.
- **Dynamique des réseaux** : les probabilités d'interactions portées par les liens de voisinage ont leur propre dynamique, reliée de façon non linéaire à l'état du système : les préférences qu'elles expriment diminuent avec le temps qui passe ; elles augmentent si les décisions d'achat des consommateurs concernés se sont avérées similaires.
- **Dynamique des stratégies des marques** : cette dynamique, pour une marque donnée, semble être fixée une fois pour toutes lors d'une simulation. Elle détermine la variation dans le temps des intensités de chaque composante d'action, alternant par exemple une forte intensité de la composante *innovation* et une forte intensité de la composante *fidélisation*. Il ne paraît pas y avoir d'interactions entre marques au sujet de leurs stratégies, dont les évolutions ne sont pas modifiées en cours de simulation. Tout se passe donc comme si les marques décidaient « au début du jeu » d'une certaine « politique » (cf. section 8.8.4) et n'en observait les résultats qu'*in fine*. Notons toutefois que l'utilisateur du modèle peut intervenir en cours de jeu et provoquer certaines évolutions.

4.1.6 L'implémentation informatique

CUBES a été implémenté sur la plate-forme Swarm, dans sa version initiale (cf. section 6.2.2) en langage *Objective-C*. On trouve dans la thèse de l'auteur une description sommaire de l'architecture de CUBES sous forme de schéma UML reliant les différentes classes d'agents, les classes mères de la bibliothèque de Swarm dont elles

dérivent ainsi que le nom des principales méthodes associées. Le fait que la présentation de CUBES porte essentiellement sur le modèle conceptuel et ses résultats, et non sur son implémentation, relève d'une pratique assez courante, comme on a pu le voir dans les autres exemples, et sans doute significatif de la place prépondérante, dans l'esprit des auteurs, du domaine scientifique d'application par rapport aux techniques informatiques utilisées.

4.1.7 L'exploitation du modèle et l'apport au domaine

a) Initialisation et calibrage

Le système, à l'échelle macroscopique des réseaux d'influence entre agents, et à l'échelle microscopique des attributs comportementaux, est complexe. Or, une utilisation opérationnelle de CUBES impliquerait idéalement d'être à même de pouvoir initialiser ce système à partir de données réelles. Mais, d'une part, ces données ne sont pas disponibles sous une forme individuelle et quand bien même elles le seraient, elles ne représenteraient qu'un petit échantillon de la population globale. De plus, ces données portent souvent sur une dynamique constatée plutôt que sur une photographie instantanée, ou se situent à plusieurs niveaux de description différents.

Le problème de l'initialisation et plus généralement du calibrage du modèle a donc été pour CUBES un problème important, auquel ses auteurs se sont efforcés de trouver des solutions. À titre d'exemple, les informations disponibles sur la population globale concernent son taux d'équipement, les différentes parts de marché détenues par les trois marques ou sa structure par âge. On peut par ailleurs déterminer empiriquement le nombre moyen de relations qu'un individu possède dans son entourage proche, ainsi que la proportion globale de ceux que l'on peut considérer comme des leaders d'opinion. On connaît encore les tendances comportementales des différents groupes d'âge, et on peut même évaluer leurs poids relatifs. Et on possède enfin quelques données sur la fréquence et la portée des rumeurs. Diverses études marketing, économiques, sociologiques ont pu apporter d'autres informations comme une vitesse de croissance ou un niveau de saturation. La génération d'une population virtuelle de 10 000 agents respectant cette image composite, autrement dit *calibrée* sur ces données, met en œuvre des techniques d'algorithmes génétiques. On y voit se succéder plusieurs générations de populations (depuis un premier tirage semi-aléatoire) soumises à simulation, jusqu'à ce qu'elles présentent une adéquation suffisante avec les données observées.

b) Points de vue macroscopiques étudiés et critères de validation

L'analyse est en rapport avec les objectifs de CUBES. Elle porte sur les facteurs explicatifs, la structure de la population des consommateurs et l'évolution des stratégies des marques, et ce que ces facteurs sont censés expliquer : l'évolution des parts de marché. Mathématiquement il s'agit de rendre compte de la dynamique de la distribution des consommateurs dans un espace multidimensionnel : le produit de l'espace sociodémographique (âge, niveau d'éducation et niveau professionnel,

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

3 dimensions), de l'espace social (où s'inscrivent les réseaux de proximité, 2 dimensions), de l'espace des AC (5 dimensions), de l'espace des opinions (5 dimensions) et de l'espace des choix (3 marques donc 3 dimensions). On utilise bien sûr différentes projections sur cet espace, exprimant différents points de vue et focalisations sur les phénomènes d'intérêt.

À chaque instant d'une simulation sont ainsi présentées des courbes d'évolution, des histogrammes, et enfin des cartes. Les courbes montrent l'évolution des intensités moyennes de chaque attitude comportementale et des opinions sur chaque marque ; l'évolution des stratégies, l'évolution du pourcentage d'individus ayant adopté un nouveau produit et l'évolution des parts de marché. Un histogramme montre la distribution des âges des clients de chaque marque. Les cartes sont de deux types. Les premières sont des cartes montrant les consommateurs — ou une sélection d'entre eux — dans leur espace social. Chaque « pixel » de ces cartes représente un consommateur, associé à une couleur visualisant le produit adopté. On peut suivre sur de telles cartes la diffusion d'une innovation et l'apparition éventuelle d'une segmentation sociale de la population. Les secondes sont des cartes comportementales croisant attitudes et choix de marques : elles permettent de visualiser les liens entre les attitudes comportementales dominantes des consommateurs et leurs choix.

Pour chacun des points de vue sont définis des critères permettant de comparer les observations issues des simulations et celles qui ont pu être faites sur le monde réel. Ces critères sont utilisés aussi bien pour le calibrage que pour la validation. Ils peuvent être quantitatifs ou qualitatifs. Par exemple, concernant l'adoption d'un nouveau produit, un des critères est l'allure de la courbe d'adoption, et plus quantitativement la vitesse d'adoption en son point d'inflexion.

4.2 SelfCormas : modélisation d'accompagnement des processus collectifs de concertation

Des conflits (parfois violents) entre agriculture et élevage liés à l'usage des terres et à l'accès aux ressources surviennent de temps à autre au sein des villages de la vallée du fleuve Sénégal. En 2000, dans le cadre de la mise en œuvre d'un plan d'occupation et d'aménagement des sols de la vallée, une équipe de recherche a proposé aux conseils ruraux d'organiser dans les villages des ateliers au cours desquels la technique du jeu de rôles serait utilisée comme un outil de co-conception d'un modèle. L'objectif était d'aboutir à une représentation partagée des interactions entre agriculture et élevage. Ce type d'ateliers s'inscrit dans une démarche baptisée ComMod[2] (*companion modelling*), originellement développée au CIRAD par François Bousquet, où la modélisation et la simulation à base d'agents, couplées à des techniques participatives, sont utilisées pour accompagner des processus de gestion de conflits, de concertation ou de négociation sur l'usage collectif de ressources partagées (comme l'eau,

2. http://www.commod.org

les terres, les semences). De très nombreux modèles ont ainsi été développés[3], mais SELFCORMAS occupe une place spécifique au sein de ces recherches, dans la mesure où il représente un cas presque unique d'auto-modélisation : le modèle opérationnel des simulations y est en effet co-construit par les modélisateurs et les acteurs eux-mêmes, sous la forme d'un ensemble d'agents au comportement individualisé interagissant dans un environnement construit à partir de données réelles. SELFCORMAS a été élaboré par Patrick d'Aquino et ses collègues entre 1999 et 2001, et expérimenté sur quatre sites au Sénégal. Les principales références sont les publications produites par cette équipe, en particulier l'habilitation à diriger des recherches de d'Aquino (d'Aquino 2002), ainsi que le site web du réseau ComMod, où de nombreuses autres publications sont disponibles sur les différents ateliers et modèles produits depuis.

4.2.1 La question scientifique

La question à l'origine de SELFCORMAS est la possibilité de construire des outils d'aide à la décision collective dans lesquels les points de vue de tous les acteurs (individuels, institutionnels, experts) d'un conflit ou d'une négociation sont représentés et visibles. Partant de l'hypothèse que, dans toute communauté en proie à des conflits d'intérêts (quand ceux-ci, bien entendu, ne sont pas réglés de façon hiérarchique), les mécanismes décisionnels collectifs sont des processus continus, itératifs et incrémentaux, l'enjeu est de comprendre comment développer des outils d'aide à la décision ou à la médiation qui ne sont pas destinés à produire **la bonne solution**, mais à permettre aux acteurs d'orienter ces processus, par la construction d'une représentation commune, vers la prise de décisions **moins imparfaites**.

Pour ce faire, SELFCORMAS s'appuie sur une méthodologie participative organisée en trois temps : un premier temps de discussion et de construction collective d'une carte (physique) permet d'identifier et de caractériser selon les dires des acteurs les ressources et l'espace autour du village, les différents types d'usage pratiqués (agriculture, élevage), les critères de satisfaction pour chaque type d'usage retenu, et enfin les règles comportementales auxquelles ils se réfèrent pour prendre leurs décisions.

Le deuxième temps est dévolu à un jeu de rôles dans lequel les acteurs jouent leur propre rôle. Une carte schématisant le territoire autour du village est placée de façon à être visible de tous. L'animateur invite tour à tour chaque joueur à venir placer sur cette carte un post-it symbolisant son activité (fig. 4.3). Il vérifie que ces choix sont en concordance avec les règles collectivement définies lors du premier temps. Le cas échéant, il interpelle directement le joueur qui produirait une action remettant en cause une de ces règles. Selon un principe de validation adaptative et collective, une règle peut être modifiée, supprimée ou ajoutée au cours du jeu, si l'ensemble des joueurs s'accorde pour valider cette modification, suppression ou ajout.

Enfin, le troisième temps fait intervenir un modèle, puis des simulations, qui sont construits par traduction directe du jeu précédent (avec sa représentation de l'espace

3. Une liste se trouve à l'adresse : http://cormas.cirad.fr/ComMod/fr/caseStudies/alpha.htm

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

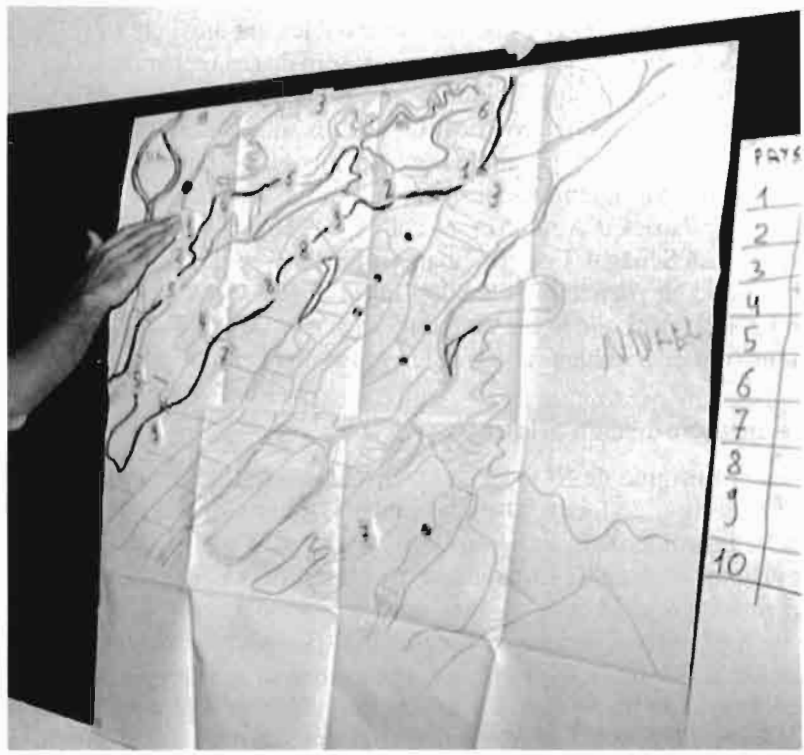


Figure 4.3 L'environnement du jeu de rôles pour l'atelier de Ndiaye (d'Aquino 2002).

et ses comportements). Les simulations sont exécutées selon différents scénarios et soumises à l'appréciation des acteurs. Le modèle est alors progressivement raffiné en fonction de leurs remarques ou propositions. C'est ce que d'Aquino appelle l'**auto-modélisation** (ou auto-conception) : elle suggère que l'outil développé le plus maîtrisable par et le plus adapté à un acteur sera celui qu'il aura conçu lui-même, avec le moins d'intervention possible des experts ou de l'animateur du jeu. La modélisation incrémentale réalisée de cette façon par chacun des participants participe de l'appropriation de l'outil par ces derniers.

4.2.2 Les raisons avancées pour l'approche agent

Franchissant un pas dans la formalisation et la conceptualisation des phénomènes étudiés, n'imposant pas une représentation *a priori* des interactions entre éléments, les modèles à base d'agents sont décrits par les concepteurs de SELFCORMAS comme des outils bien adaptés à la gestion territoriale décentralisée. Pour eux, ils combinent en effet quatre caractéristiques intéressantes.

Tout d'abord, il y a une *similarité de concepts* entre un modèle à base d'agents et un jeu de rôles : il est possible d'établir une correspondance presque complète entre,

Figure 4.4 Atelier de Gnith : l'ordinateur avec la plate-forme SELFCORMAS et les participants qui discutent à partir des résultats d'une simulation (d'Aquino 2002).

d'une part, le plateau de jeu, les acteurs, leurs comportements et leurs échanges, et, d'autre part, l'environnement, les agents, leurs comportements et leurs interactions (Barreteau, d'Aquino et al. 2001). La « traduction » du jeu de rôles en un modèle à base d'agents, dans le cadre de la méthodologie décrite par ComMod, se fait donc de façon naturelle, en particulier pour les acteurs eux-mêmes.

Ensuite, selon d'Aquino, ces modèles n'obligent pas forcément à reproduire le réel mais permettent de *tester des idées* sur la représentation qu'a l'expérimentateur d'un « monde » et des relations qui s'y jouent, que ce soit un environnement, un espace, un territoire ou autre. Cela permet d'aborder une situation complexe et de s'approcher par itérations successives de ses dynamiques les plus essentielles. Ainsi, l'un des produits des simulations à base d'agents n'est pas obligatoirement le résultat final, qualitatif ou quantitatif, mais une certaine formalisation du comportement des différents éléments (y compris leurs formes d'interactions) au cours de la simulation.

Le troisième intérêt des modèles à base d'agents, toujours selon d'Aquino, réside dans la *capacité* de ces outils *à prendre en compte n'importe quelle représentation du monde* (donc de l'espace), pourvue qu'elle s'organise sous forme d'entités individualisées ayant des relations entre elles, qu'elles soient qualitatives ou quantitatives, subjectives ou objectives. Cela leur confère, pour lui, un avantage intéressant pour la mise à disposition de la modélisation auprès de n'importe quel acteur, quelle que

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

soit sa représentation d'une question et du « monde », ce que ne permettait pas par exemple un système d'information géographique, fixé dans le cadre de l'espace cartésien.

Enfin, il précise qu'un modèle à base d'agents offre la possibilité d'un *apprentissage graduel et itératif* de la complexité d'un environnement donné, la simulation pouvant initialement être conçue avec quelques règles formalisées, puis régulièrement enrichie au vu des comportements des précédentes simulations. L'expérimentateur garde ainsi la possibilité de restreindre au maximum ses *a priori* sur sa représentation du monde étudié, la simulation pouvant être réalisée à partir de quelques simples règles initiales, puis enrichie ou amendée progressivement jusqu'à une complexité efficace.

4.2.3 Les échelles spatio-temporelles (et la granularité)

La représentation de l'espace est l'un des points clefs de SELFCORMAS, et une attention toute particulière a été apportée par ses concepteurs à ce qu'elle soit à la fois facilement appréhendable par les participants et en même temps réaliste par rapport aux données de terrain disponibles (organisées dans un système d'information géographique). Les quatre zones couvertes par les ateliers organisés au Sénégal avaient une taille variant de 200 à 700 km^2.

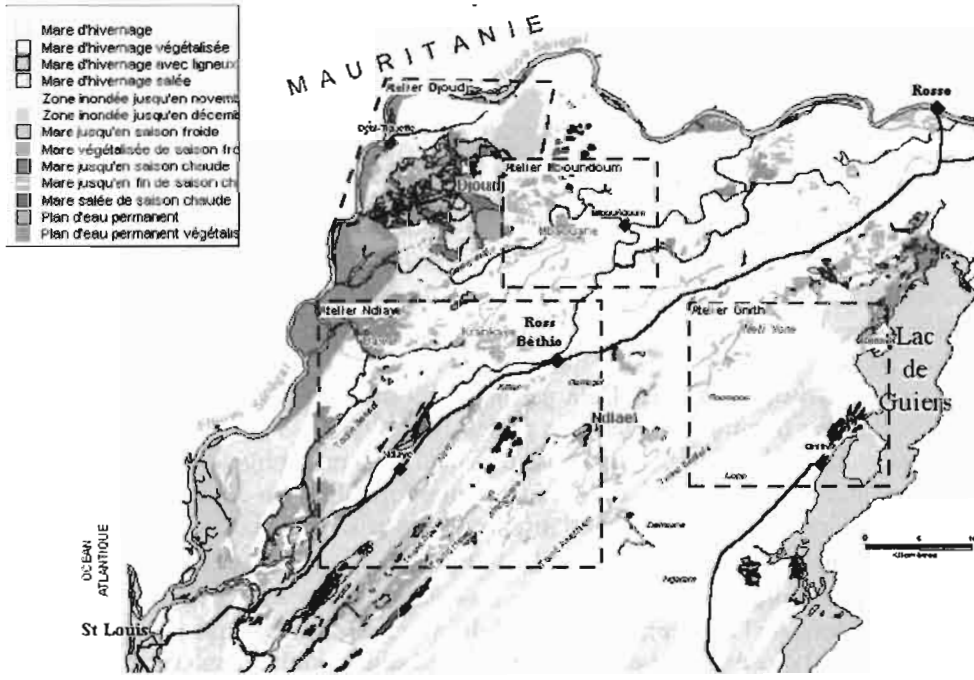


Figure 4.5 Les différents sites d'expérimentation de SELFCORMAS.

Le passage de la représentation cartographique à une représentation comprise par tous et utilisable comme environnement dans la simulation s'est effectuée de façon assez similaire dans les quatre cas : formation des acteurs à la lecture de cartes, classification collective des différents terrains selon leurs caractéristiques (sols de qualité variable pour l'agriculture, zones irriguées, zones de pâturages, distance par rapport à l'eau, zone protégée, etc.), puis discrétisation de la carte en un ensemble de cases pourvue de ces caractéristiques et implémentation de cette grille dans le simulateur (fig. 4.6).

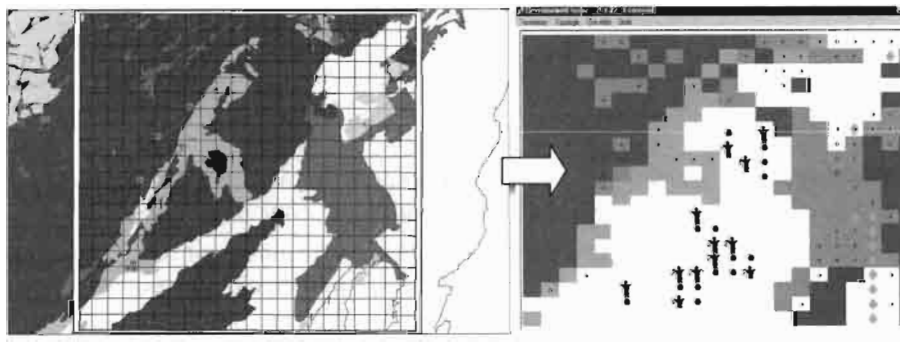


Figure 4.6 Atelier de Gnith : passage de la carte à une représentation discrétisée dans le simulateur.

Concernant les échelles de temps, les jeux de rôle effectués au Sénégal, comme les modèles qui en ont résulté, se basaient sur la représentation d'un cycle complet d'une année séparé en 13 périodes correspondant au placement initial des agents et à 12 pas de temps d'un mois chacun.

4.2.4 Les agents, leurs attributs (et leur organisation)

Dans le jeu de rôles, et selon les sites choisis, les participants avaient le choix entre quatre rôles différents, symbolisés sur la carte par des dessins (fig. 4.7) : agriculteur, éleveur, pêcheur et oiseaux migrateurs.

Figure 4.7 Rôles retenus pour les expérimentations de SELFCORMAS.

Dans les simulations, qui concernaient essentiellement les difficultés de cohabitation entre agriculture et élevage, seuls les deux premiers rôles ont été conservés (les

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

individus représentés pouvant passer de l'un à l'autre selon les saisons et la disponibilité des terres). Tous les modèles utilisés dans SELFCORMAS ont donc utilisé deux types d'agents : les agents-agriculteurs et les agents-éleveurs (ou bien un seul type, mais doté des deux comportements).

Il est cependant difficile, dans la littérature produite sur ce projet, de savoir avec exactitude quels attributs possédaient les agents et comment leurs comportements ont été implémentés. La plupart des descriptions détaillées concernent en effet les jeux de rôles, ou bien la représentation de l'espace dans les modèles, mais au final peu d'informations ont été rapportées sur le modèle conceptuel des agents de SELFCORMAS. Ce que l'on peut en déduire synthétiquement se résume aux données suivantes :

- Chaque agent est doté d'un *ensemble de préférences* quant au choix de la zone spatiale à exploiter (pour l'agriculture ou l'élevage), d'un indice de satisfaction sur son activité présente et de besoins à satisfaire.
- Chaque agent a une perception globale de son environnement pour ce qui concerne le choix de la zone à exploiter, et locale pour ce qui concerne l'exploitation.
- L'exploitation consiste à modifier localement l'environnement (en changeant certaines de ses caractéristiques, comme sa disponibilité en eau, ses potentialités pour des activités futures, etc.) et à en tirer un gain, modulé par la richesse des ressources exploitées, qui viendra (ou non) combler les besoins.
- Chaque agent peut cultiver deux champs pendant la saison des pluies puis devient éleveur et s'occupe de déplacer ses troupeaux en fonction des ressources disponibles.
- Une « amende » est distribuée à la fin de chaque cycle annuel aux agents qui ne seront pas parvenus à satisfaire leurs besoins.

4.2.5 Les comportements ou mécanismes

L'environnement a lui aussi sa propre dynamique, représentée soit par des contraintes (un champ ne dure pas plus de six mois), soit par des mécanismes de renouvellement ou d'apparition de certaines ressources (une pluviométrie basique semble être employée dans les modèles).

À partir de ces différentes informations, ce qui va différencier les modèles utilisés est le comportement des agents ou, plus précisément, leur mécanisme de décision concernant la parcelle à choisir et les critères de ce choix. Ces mécanismes et critères varient d'une expérimentation à l'autre, ce qui est assez logique si l'on considère qu'ils sont en grande partie issu des jeux de rôles préalablement mené avec les participants.

4.2.6 L'implémentation informatique

SELFCORMAS a été implémenté sur la plate-forme Cormas, développée au CIRAD. Le choix de cet outil a été particulièrement judicieux : le noyau de simulation à base d'agents de Cormas repose en effet sur le langage Smalltalk, parfaitement adapté à

une programmation « à la volée », qui a, semble-t-il, été de mise pendant les expérimentations (les modélisateurs modifiant les modèles en temps réel en fonction des comportements des joueurs pendant les jeux de rôle). Cormas possède de plus un module de visualisation très versatile, qui a permis de multiplier les représentations graphiques du modèle, ce qui s'est avéré d'une aide précieuse pour les participants (notamment en autorisant l'affichage de certains « points de vue » des agents sur la simulation, un agriculteur n'étant en effet pas sensible aux mêmes caractéristiques de l'environnement qu'un éleveur).

4.2.7 L'exploitation du modèle et l'apport au domaine

Contrairement à d'autres exemples où l'analyse du modèle est réalisée en tenant compte de ses « résultats » et de l'exploitation qu'en font les modélisateurs, il n'est pas possible de séparer ici le modèle du processus dans lequel il a été construit. En un sens, la seule exploitation (ou analyse) qui ait un sens est celle qui a été réalisée par les participants eux-mêmes, et il semble difficile de pouvoir imaginer avoir une validation autrement qu'à dire d'acteurs.

Le processus d'exploitation *in situ* est en tout cas bien décrit dans (d'Aquino 2002), qui montre les boucles successives d'expérimentation, de proposition de nouveaux scénarios, de tests de ces scénarios, et comment elles finissent par être parfaitement intégrées par les participants.

En termes de résultats scientifiques, SELFCORMAS a eu un impact considérable sur le développement de la modélisation d'accompagnement, et sur l'usage de modèles à base d'agents dans les démarches participatives. L'usage de simulations à base d'agents a permis en effet d'aller beaucoup plus loin que le jeu de rôle. Il aurait sans doute été matériellement impossible, sans l'informatisation, de « jouer » sur des pas de temps suffisamment longs les différentes évolutions sélectionnées par les acteurs et d'observer leurs impacts multiples. De plus, une plate-forme de modélisation suffisamment souple offre beaucoup plus de possibilités de modifications de règles à la demande que de lourdes séances de jeu de rôles. Enfin, la création collective d'un monde artificiel commun permet d'abord de créer une représentation partagée, puis d'envisager les différentes évolutions auxquelles le collectif accorde explicitement de la valeur, y compris en ce qui concerne les hypothèses sur lesquelles se basent ces simulations.

Les simulations, en mettant les gens en situation, font apparaître les incohérences, les contradictions et les antagonismes qui resteraient cachés avec des diagnostics participatifs ou externes. Ce processus provoque ainsi des discussions de fond entre les acteurs qui alimentent le processus de négociation concertée. La simulation n'est donc pas utilisée ici dans son objet le plus habituel, la reproduction d'un phénomène ou d'un processus réel, mais comme support prospectif pour se concerter sur les directions possibles que pourrait choisir le collectif, dans une situation complexe où la représentation du réel est trop ambitieuse. Cependant, comme le note d'Aquino, le passage à la simulation n'efface pas certaines difficultés intrinsèques du jeu, comme

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

l'identification précise d'un rythme d'interaction entre joueurs (pas de temps) et d'un horizon temporel (temps de jeu) pertinents.

L'ensemble des conclusions auxquelles les concepteurs de SELFCORMAS sont arrivés sur ce point ont alimenté de façon extrêmement riche la réflexion sur la modélisation d'accompagnement, sans pour autant que toutes leurs propositions soient reprises dans les projets ultérieurs du réseau ComMod. Ainsi, il a fallu attendre les expériences menées au Vietnam en 2005 par François Sempé et Stanislas Boissau sur le « Jeu des amis » pour voir ressurgir le concept pourtant assez novateur d'auto-modélisation, certes difficile à mettre en œuvre sur le terrain et sans l'appui de programmeurs expérimentés (Boisseau). Ce concept est en tout cas prometteur et il ne fait pas de doute qu'il viendra s'insérer, à terme, de façon assez naturelle, dans la panoplie des modélisateurs s'attaquant à la simulation de phénomènes sociaux (justifiant, du même coup, l'usage croissant des simulations à base d'agents dans ce domaine, dans la mesure où il exige une individualisation des comportements des entités du modèle).

Concernant les résultats obtenus sur les quatre site sénégalais, d'Aquino note (d'Aquino 2002) que « *les quatre expériences ont toutes permis aux participants de s'engager dans une nouvelle négociation concertée sur l'aménagement et la réglementation, dont ils ont mis d'eux-mêmes en place les lourdes réalisations un an après les ateliers, sans aucun appui matériel de l'équipe d'animation. Ainsi, les participants, très satisfaits des déblocages opérés entre les acteurs durant ces ateliers, ont même sollicité les services régionaux d'encadrement et les collectivités locales pour qu'elles réalisent le même type de concertation dans les autres terroirs conflictuels de la région. Dans une zone où les outils d'information et de suivi-évaluation sont pourtant déjà bien présents, la présence d'un outil d'aide à la décision conçu sur une représentation interne du problème plutôt que sur une description analytique de situation, qu'elle soit exogène ou participative, a permis une avancée significative du processus de décision et d'action sur le territoire. Enfin, l'enjeu était aussi de modifier le comportement des acteurs-décideurs vis-à-vis de l'expertise technique. En effet, dans cette démarche, le recours à l'expertise technique est l'étape qui suit, et non celle qui précède, le choix collectif des évolutions envisageables « raisonnablement » par la collectivité. Ainsi, pour le projet lui-même, l'une des grandes réussites de cette expérimentation est d'avoir renversé les relations entre les représentants des populations et leur encadrement technique, les premiers pilotant le processus de décision et d'action collectives sur le territoire, avec ou sans la participation de l'encadrement technique.* » Il s'agit donc là d'une réussite particulièrement remarquable, dont il n'est pas certain qu'elle ait pu avoir lieu sans l'apport essentiel de la modélisation à base d'agents.

4.3 SIMPOP : MODÉLISER LES « SYSTÈMES DE VILLES »

Comprendre comment et pourquoi se sont générés les « systèmes de villes »[4] qu'il est possible d'identifier partout dans le monde, en fonction de caractéristiques géographiques et sociales, est un enjeu majeur de la géographie contemporaine. Le but de SIMPOP est de permettre aux géographes de matérialiser et de raisonner à l'aide de simulations informatiques sur les hypothèses et les connaissances ayant trait à ces systèmes. Les systèmes de villes évoluent lentement (plusieurs siècles pour l'Europe ou l'Asie), tant dans leur structure que dans l'organisation interne des villes. La temporalité de ces évolutions est très différente de celle des individus qui y vivent. Le parti pris a été de les considérer comme des systèmes complexes dont les villes sont les composants principaux. Le projet SIMPOP a débuté en 1996 avec une première version (Guérin-Pace, Mathian et al. 1996). Il se poursuit à l'heure actuelle, sous le nom de SIMPOP2[5], sous la forme d'un projet conjoint entre l'équipe PARIS de Géographie-Cités (UMR 8504) et le laboratoire LIP6 (université Paris 6).

4.3.1 La question scientifique

La question sous-jacente à SIMPOP est la compréhension et l'explicitation des déterminants géographiques et humains qui président à l'apparition de systèmes de villes organisés à la fois dans l'espace géographique et dans l'espace des spécialisations fonctionnelles supportées par les villes (fonctions économiques, culturelles, politiques, administratives, etc.). Cette compréhension se base sur un volet théorique important qui privilégie l'étude de l'auto-organisation de ces systèmes, mais aussi sur un travail de comparaison entre les systèmes de villes apparus dans différents pays ou continents (Europe, Amérique du Nord, Inde, Afrique du Sud).

4.3.2 Les raisons avancées pour l'approche agent

Le recours au paradigme de la modélisation à base d'agents est pertinent par rapport aux hypothèses avancées par les géographes concernant les systèmes de villes. Ceux ci sont vus comme des ensembles auto-organisés d'entités autonomes localisées, pourvues de fonctions individuelles, et capables d'interagir par l'intermédiaire de réseaux d'échange. Dans cette vision, les villes co-évoluent, guidées par la compétition et les synergies qu'elles entretiennent avec les autres villes. L'équipe PARIS, à l'origine du projet, ainsi que d'autres équipes dans le monde, défend une théorie urbaine selon laquelle la présence continuelle d'innovations au sein du système de villes permet de le créer, de le structurer et de le maintenir dans le temps. Toutefois, cette transformation s'effectue sous plusieurs contraintes, locales comme globales :

4. On désigne par « système de villes » ou « réseau urbain » un ensemble organisé, souvent hiérarchisé, de villes qui maintiennent des liens dynamiques d'interdépendance administratifs, politiques, culturels ou commerciaux.

5. Pour en savoir plus : http://www.parisgeo.cnrs.fr/simpop/

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

- **Contraintes spatiales** : la géolocalisation et ses ressources de site, les vitesses de transport à l'époque considérée, les territoires et leurs notions d'état et de frontière jouent un rôle fondamental, surtout dans la structuration initiale du système.
- **Contraintes historiques** : plusieurs événements marquants de l'histoire ont impacté les villes (guerres, découpage des frontières, etc.) et donc les réseaux qu'elles forment.
- **Contraintes systémiques** : les villes ont une inertie importante (au niveau du système de villes) mais elles exhibent aussi des capacités d'adaptation au contexte social et économique de leur époque.

Selon les géographes, seule une modélisation à base d'agents permettait de prendre en compte la localité des villes et leur « perception » et pouvait rendre compte simultanément de ces trois types de contraintes. Les villes sont donc considérées dans le modèle comme des acteurs à part entière, susceptibles d'influencer leurs voisines selon différentes modalités (et d'être, en retour, influencées par elles). Contrairement aux autres exemples, ces agents ne se « déplacent » pas dans l'espace géographique qu'ils occupent (même si, comme nous le verrons, ils peuvent se « déplacer » dans l'espace des réseaux qu'ils génèrent).

4.3.3 Les échelles spatio-temporelles (et la granularité)

Les échelles de temps et d'espace de SIMPOP sont très différentes de celles présentées jusqu'à présent dans les précédents exemples. S'intéressant à des entités de la taille d'une ville, les déclinaisons du modèle impliquent des espaces géographiques de plusieurs centaines de kilomètres, et il se base sur une représentation explicitement réaliste de l'espace géographique (notamment en termes de ressources des sites, d'obstacles et de voies de communication naturels).

L'unité temporelle minimale est l'année, de façon à ce que les fonctions supportées par la ville puissent manifester leurs effets.

4.3.4 Les agents, leurs attributs (et leur organisation)

L'entité principale de SIMPOP est bien entendu la ville. Ce type d'agent offre une représentation un peu plus « éclatée » que celle qui prédomine dans les autres exemples. Les agents-villes (en grisé sur la fig. 4.8) ne sont en réalité qu'un support localisé dans l'espace (et dans un pays) pour un ensemble de fonctions, une gouvernance (qui représente un mécanisme de décision), deux attributs (richesse et population) et une place d'échange, qui matérialise l'ancrage de l'agent dans les réseaux qu'il va pouvoir tisser avec d'autres agents-villes.

4.3.5 Les comportements ou mécanismes

SIMPOP est gouverné par l'idée qu'il existe un nombre fini de fonctions que peuvent assumer les villes, qu'elles ne les assument pas toutes, et qu'elles ne peuvent les acquérir qu'après avoir atteint une taille critique (en termes de population et de

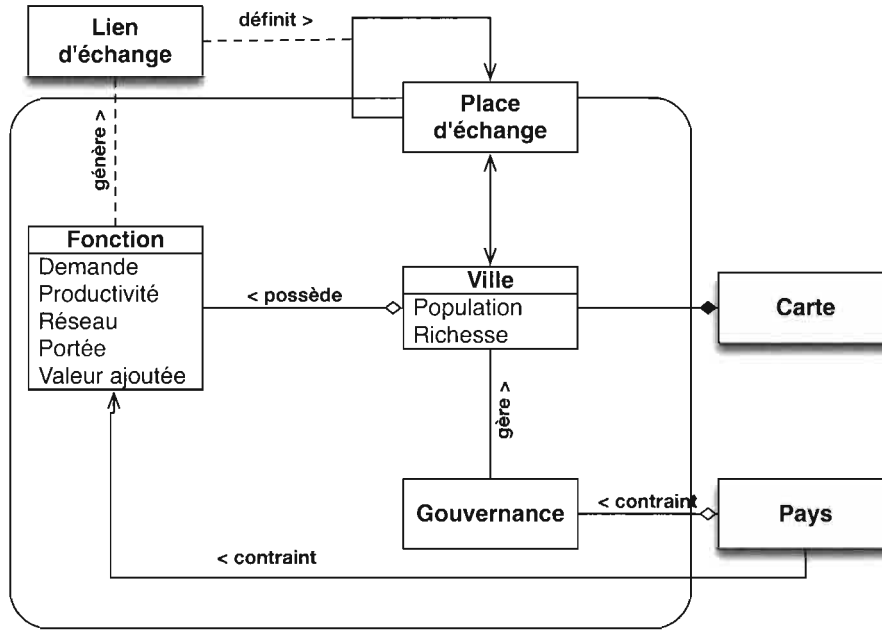


Figure 4.8 Représentation en UML d'un agent-ville dans SIMPOP.

richesses). De plus, pour certaines fonctions, il est nécessaire qu'aucune autre ville du « voisinage » ne les possède.

Une fonction est une entité à part entière définie par : une spécialisation (par exemple, industrie, commerce, culture, administration), une portée (quel voisinage considérer pour chaque fonction ?), un besoin en main d'œuvre et une production de richesse. À partir de l'instant où elle est supportée par une ville, une fonction intègre (ou crée) un réseau d'échanges au sein duquel, par l'intermédiaire des places d'échange, vont s'échanger offres et demandes en rapport avec elle. Les fonctions sont décomposées en trois types, chacun d'entre eux définissant un principe de mise en réseau différent (fig. 4.9).

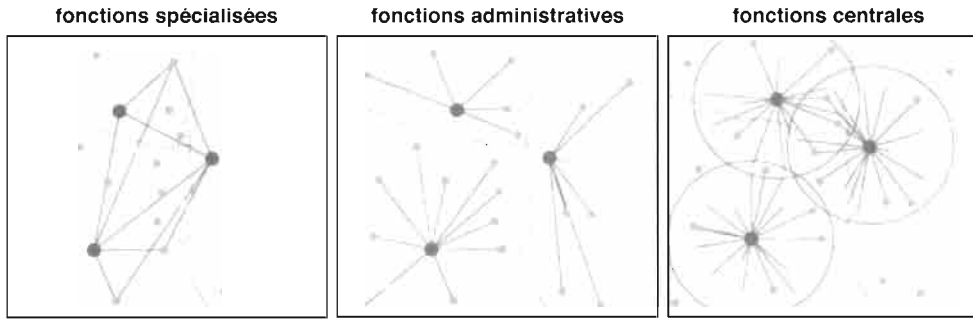


Figure 4.9 Réseaux utilisés par chacun des types de fonctions.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Un pas de temps dans SIMPOP est au minimum d'une année. Il se déroule comme indiqué sur la figure 4.10.

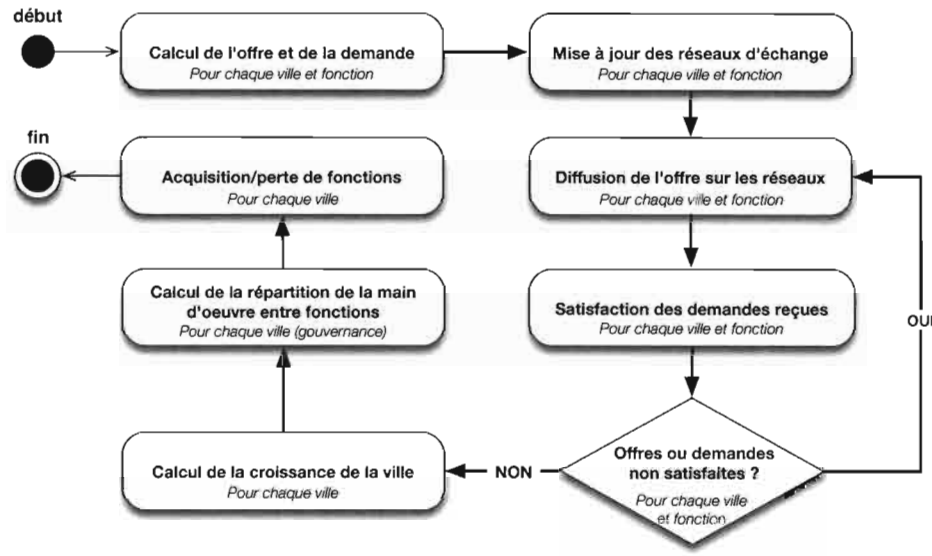


Figure 4.10 Déroulement d'un pas de temps dans SIMPOP.

Dans ce pas de temps, deux mécanismes essentiels, qui vont modifier le comportement des agents, se déroulent en fin de cycle : le calcul de la répartition de la main d'œuvre entre les fonctions, et l'acquisition ou la perte de fonctions. La *répartition* est effectuée par la gouvernance, qui, en fonction des offres et demandes constatées, de la croissance démographique, mais aussi de choix « politiques », va affecter des stocks de population aux fonctions. Ceci affectera directement l'offre et la demande de chaque fonction au tour suivant. *L'acquisition ou la perte d'une fonction*, quant à elle, est décidée à un niveau plus global, à la fois en fonction de la population et de la richesse de la ville, mais aussi en tenant compte de sa position géographique et des fonctions supportées par les villes proches, ainsi que de facteurs historiques, comme les innovations scientifiques (révolution industrielle, évolution des moyens de transport, etc.).

Sous l'influence de ces deux mécanismes (et à partir d'une répartition initiale dans l'espace qui peut ou non s'appuyer sur des données historiques), les villes vont graduellement se différencier, structurellement (taille et constitution des réseaux) comme fonctionnellement (spécialisation de certaines).

4.3.6 L'implémentation informatique

La première version de SIMPOP avait été implémentée en Smalltalk en 1996, mais s'était trouvée, pour des raisons liées aux capacités de calcul des ordinateurs de

l'époque, cantonnée à des exemples peu complexes et principalement théoriques. La seconde version, SIMPOP2, a été implémentée à partir de 2002 sur la plate-forme Swarm (voir chapitre 6) et a d'emblée été conçue pour servir de matrice à différentes applications et pouvoir supporter des simulations géographiquement réalistes. L'architecture de SIMPOP2 est de type client-serveur : le simulateur fonctionne sur un serveur central et plusieurs clients (de visualisation, d'analyse, d'interprétation ou d'initialisation) peuvent lui être reliés. Ceci autorise donc des « simulations par lot », c'est-à-dire le lancement successif de simulations dont les paramètres d'entrée vont automatiquement varier entre des bornes prédéfinies par le modélisateur et dont les résultats seront archivés.

4.3.7 L'exploitation du modèle et l'apport au domaine

Pour l'instant, et dans le cadre d'un protocole expérimental particulièrement rigoureux, SIMPOP2 a été exploité sur quatre modèles distincts :

- **Europe 1300-2000** : réalisé dans le cadre du projet européen ISCOM[6], ce modèle simule la genèse d'un système urbain en Europe (fig. 4.11) par la reconstruction des réseaux d'échange entre les villes. Un des objectifs est de valider la théorie sous-jacente à SIMPOP et de tester des hypothèses sur le rôle des innovations (technologiques, culturelles) et la vitesse de communication entre villes dans l'émergence des systèmes de villes hiérarchiques que nous connaissons maintenant. L'une des leçons de ce modèle a été de montrer l'importance, dans la différenciation des villes, et ce dès le XIV^{e} siècle, des réseaux d'échange internationaux.
- **Europe 1950-2050 (EuroSim)** : réalisé dans le cadre du projet européen Tigress[7], ce modèle simule l'évolution des villes européennes de 1950 à 2050. Il cherche à identifier les causes principales du changement urbain, et, dans un but prédictif, à tester des scénarios d'évolution de ces systèmes de villes (jusqu'en 2050) prenant en compte différentes hypothèses démographiques et politiques (notamment, l'ouverture ou la fermeture des frontières). En raison de la complexité du modèle, seules les villes de plus de 10 000 habitants ont été considérées dans les simulations (les autres servant de « voisinage captif » dans un schéma hiérarchique classique), et, parmi celles-ci, seules celles de plus 200 000 habitants ont été dotées de l'ensemble des fonctions et d'une gouvernance (voir fig. 4.12, où elles apparaissent sous la forme de disques de plus grande taille).
- **États-Unis (1650-2000) et Afrique du Sud (1650-2000)** : le but de ces modèles est d'explorer, à partir de situations en apparence similaires (colonisation par les européens de deux territoires pratiquement vierges en termes d'urbanisation) l'évolution différentielle des systèmes de villes apparus dans ces deux pays, et d'en explorer les causes possibles (fig. 4.13).

6. http://www.iscom.unimo.it/
7. http://www.tigress.ac/

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

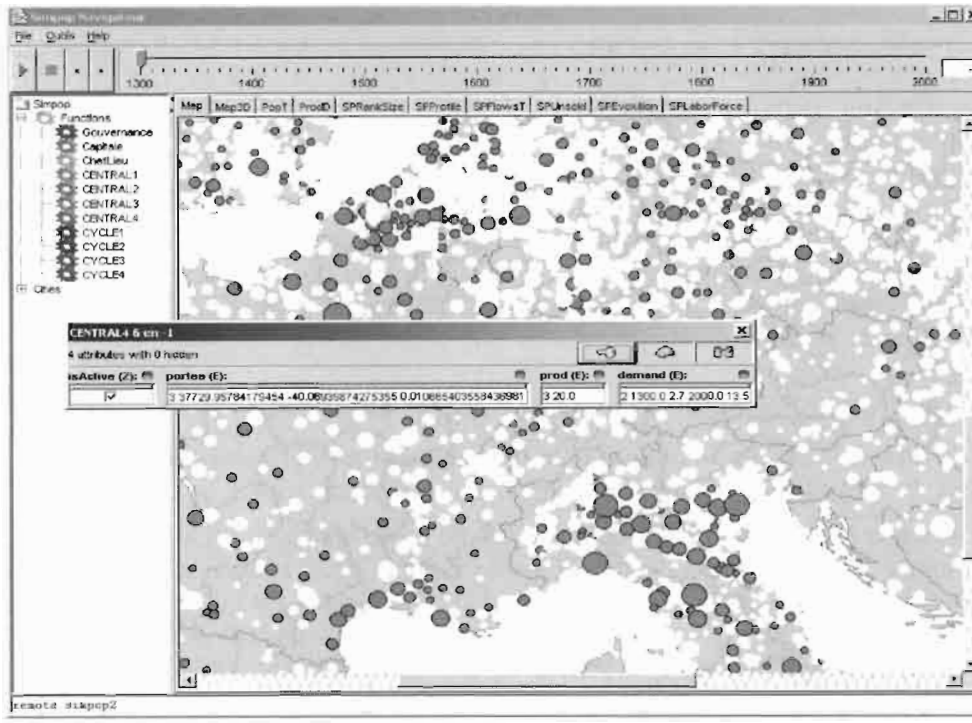


Figure 4.11 Différenciation, en taille et fonction, des villes du continent européen dans le modèle Europe 1300-2000.

Pour chacune de ces séries d'expérimentations, le protocole de validation s'appuie sur la perspective multi-échelles que permet d'envisager un modèle à base d'agents : les données obtenues sur chacune des villes (population, taille, fonctions, richesses) sont ainsi comparées aux données historiques disponibles, de même que les données sur les réseaux d'échanges (commerciaux, administratifs) et les données disponibles pays par pays en termes de statistiques globales (commerce intérieur et extérieur, démographie). Une modélisation plus macroscopique n'aurait pas permis de descendre à ce niveau de détail et d'analyse. Ce modèle permet également de tester des conditions ou des scénarios extrêmement précis, comme par exemple la fermeture des frontières d'un seul pays en Europe, ou au contraire l'établissement de relations privilégiées entre des blocs de pays (par exemple les pays de la zone euro).

SimPop2 constitue donc un cas d'école particulièrement intéressant en ce qu'il permet au géographe de réaliser de véritables expérimentations sur des échelles d'espace et de temps arbitraires, à la fois pour tester des hypothèses ou des théories sur l'évolution passée des systèmes de ville, mais aussi pour explorer, avec toute la richesse de représentation voulue, des scénarios prédictifs.

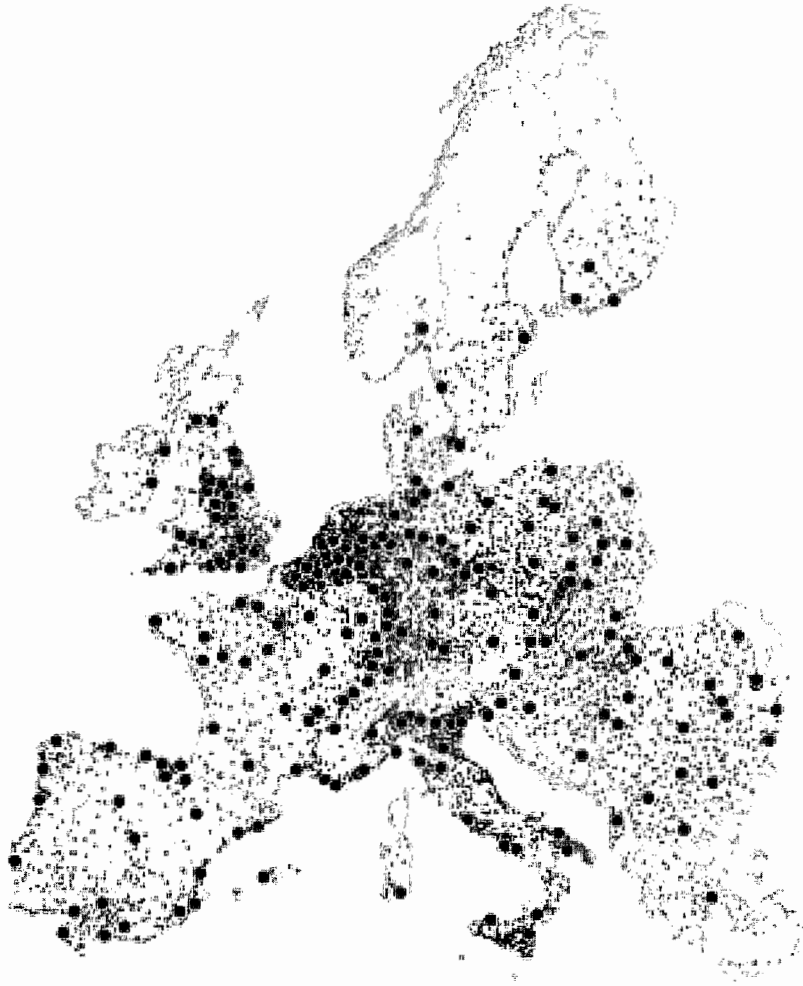


Figure 4.12 Les 5 000 villes retenues pour les expérimentations sur le modèle EuroSim.

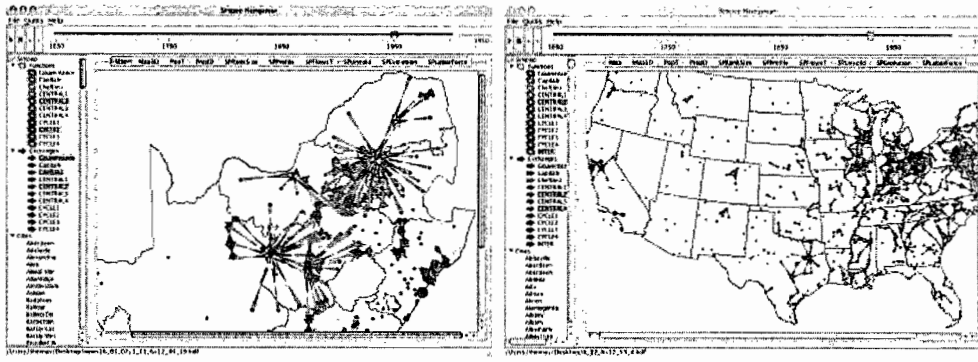


Figure 4.13 SimPop2 appliqué à l'Afrique du Sud (à gauche) et aux États-Unis (à droite).

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

4.4 DAMASRESCUE : MODÉLISATION D'AGENTS SAUVETEURS APRÈS UNE CATASTROPHE NATURELLE

Le modèle agent DAMASRESCUE a pour objectif de préparer la mise en place d'équipes de robots autonomes qui auront pour but de sauver des vies lors de catastrophes de première ampleur. Ce modèle a été développé dans le cadre du projet *RoboCup Rescue*, projet dérivé de la RoboCup, dans lequel des agents simulés évoluent dans une ville après un tremblement de terre[8]. Il existe aujourd'hui une seconde compétition (infrastructure compétitions) utilisant de vrais robots. Le simulateur de Robocop Rescue est un simulateur temps réel distribué particulièrement réaliste de toutes les destructions consécutives à un tremblement de terre (incendies, dommages, individus bloqués...) et leurs évolutions temporelles (propagation des incendies, effondrement de bâtiments, décès d'individus). Le but des agents sauveteurs (représentant des pompiers, des policiers et des ambulanciers à la fois mobiles ou dans des centres opérationnels) est de s'organiser au mieux afin de minimiser les dommages tels que les agents civils ensevelis, les bâtiments en feu et les routes bloquées. La qualité des différentes équipes participant à la compétition annuelle est mesurée après une certaine durée. Le modèle DAMASRESCUE est l'un des modèles développé dans le cadre de cette compétition par l'équipe du laboratoire DAMAS (Dialogues, apprentissage, multi-agents) de l'université de Laval au Québec (Canada). Il s'appuie notamment sur des techniques d'apprentissage pour programmer le comportement des agents sauveteurs. Ce modèle a été réalisé par Stéphane Ross, Sébastien Paquet, Ludovic Tobin et Brahim Chaib-draa[9].

4.4.1 La question scientifique

Les grandes catastrophes naturelles récentes comme le séisme de Kobé au Japon le 17 janvier 1995 (qui à causé la mort immédiate de près de 6 000 personnes) ou de Sumatra en Indonésie le 26 décembre 2004 au large de l'île indonésienne de Sumatra (qui a causé la mort de 230 000 personnes) ont révélé de graves dysfonctionnement dans la mise en œuvre des secours et de la transmission de l'information en situations d'urgence. Le but de la *RoboCup Rescue* est de promouvoir la recherche robotique et logicielle de solutions permettant d'améliorer les secours. Un environnement de simulation très réaliste sert de banc de test pour évaluer la qualité des équipes d'agent dans leur tentative de minimiser les dégâts consécutifs à un tremblement de terre dans une ville. Le noyau de la plate-forme de simulation du serveur *RoboCup Rescue* intègre trois simulateurs distincts :

---

8. *H. Kitano. Robocup rescue : A grand challenge for multi-agent systems. In Proceedings of ICMAS 2000, Boston, MA, 2000, RoboCup rescue : A grand challenge for multi-agent and intelligent systems. Kitano, H ; Tadokoro, S AI MAG. Vol. 22, no. 1, pp. 39-52. 2001.*

9. Les principales références concernant ce modèle sont : (Paquet 2004 ; Paquet, Bernier et al. 2004 ; Paquet, Tobin et al. 2005). D'autres références sur le sujet peuvent être trouvées sur la page de Robocop Rescue (http://robocuprescue.org) et sur celle du simulateur (http://sourceforge.net/projects/roborescue/).

- **Un simulateur de trafic** — qui simule les embouteillages et contrôle le déplacement des agents sur les routes (vitesse et direction) ainsi que le respect des capacités et directions des routes.
- **Un simulateur d'incendies** — qui simule la propagation du feu en fonction des propriétés des immeubles, de la direction du vent et des points d'eau.
- **Un simulateur de civils** — qui simule le comportement des citadins bloqués dans les immeubles ou en circulation.

Il s'agit donc de répondre à la question suivante : comment construire des programmes robustes décentralisés qui dotent les agents d'une capacité collective de choisir en temps réel un plan qui minimise les pertes humaines ?

4.4.2 Les raisons avancées pour l'approche agent

Le choix d'une approche agent est quasiment incontournable du fait de la complexité de l'environnement et du fait même que le simulateur du monde dans lequel il s'agit d'intervenir est déjà à base d'agents. Ce qui est plus intéressant pour notre propos et dans le cadre de cet ouvrage, c'est que l'on a ici un exemple de modélisation où le monde est virtuel. Il s'agit donc de construire un modèle à base d'agents vu comme une extension à un modèle existant.

4.4.3 Échelles spatio-temporelles (et granularité)

L'espace géographique dans lequel prend place, cette simulation est celui d'une ville telle que Kobé après un tremblement de terre. Différentes cartes sont disponibles : le centre de Foligno (Italie), la ville de Kobé (Japon) et des cartes virtuelles. Au départ il y a 5 refuges et de 2 à 8 points d'incendie. Une simulation correspond à 300 étapes (représentant une minute de temps réelle). C'est-à-dire les cinq premières heures car l'on sait qu'après les chances de survies diminuent drastiquement. La surface de simulation avoisine 1,5 km^2. Il y a 800 routes coupées ou non, quelques 700 immeubles en feu ou non et 30 à 40 agents qui peuvent être sur l'une des routes. Ceci constitue un espace d'états très vaste de plus de $2^{800} \times 2^{700} \times 800^{40}$ états.

Au départ il y a entre 70 et 90 civils. Les policiers peuvent varier de 0 à 15 ; les pompiers de 0 à 15 ; les ambulanciers de 0 à 8 ; on trouve encore un agent par centre de commandement des policiers, des pompiers et des ambulanciers[10]. La visibilité des agents est de 10 mètres et leur voix porte à 30 mètres.

4.4.4 Les agents, leurs attributs (et leur organisation)

Les agents du modèle sont de sept types différents : ambulancier mobile, ambulancier du centre de commande, pompier mobile, pompier du centre de commandement, policier mobile, policier du centre de commandement, et civil.

10. D'après le « *RoboCup 2006 Rescue Simulation League Rules* » du 23 mai 2006.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

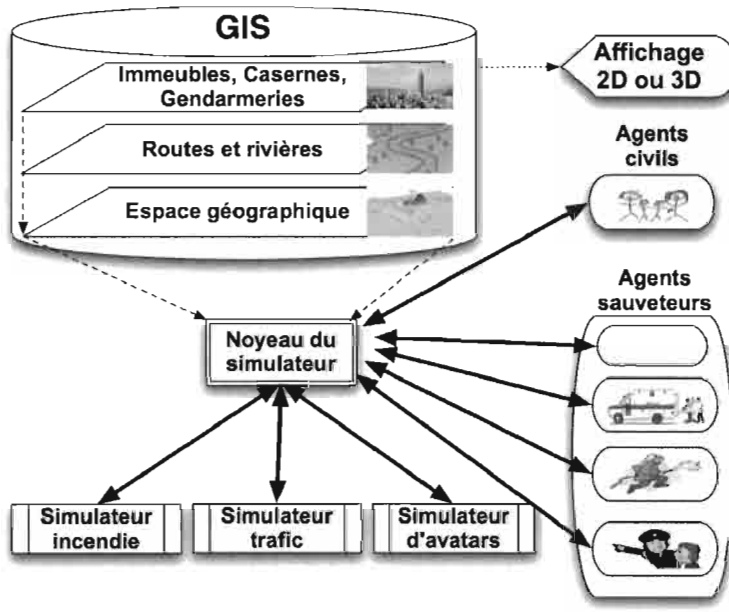


Figure 4.14 Schéma du simulateur *RoboCup Rescue*.

Les agents possèdent tous une force initialisée à 10 000 et qui décroît en fonction des blessures. Quand cette valeur vaut 0, l'agent est décédé. Cette valeur joue un rôle crucial dans l'évaluation globale d'une simulation.

En effet, la qualité d'une simulation est calculée par :

$$V = \left(P + \frac{S}{S_{\text{int}}}\right)\sqrt{\frac{B}{B_{\text{int}}}}$$

où P est le nombre d'agents vivants, S_{int} le total des forces de tous les agents au départ, S le total des forces des agents restants, B_{int} la surface des zones non détruite au départ et B la surface des immeubles restants calculée en fonction de l'état de chacun (indemne, en feu, partiellement éteint, etc.).

4.4.5 Les comportements ou mécanismes

Les agents sauveteurs sont soit aux postes de commandement soit sur le terrain. Les agents sur le terrain ont chacun des missions précises. Les policiers doivent dégager les routes, les ambulanciers évacuer les blessés et les pompiers éteindre les incendies. Les agents sur le terrain n'ayant qu'une visibilité partielle, ils communiquent avec l'agent au poste de commandement qui leur assigne des zones d'action et qui dispose lui d'une vue globale des dommages. Sans entrer dans les détails du simulateur de trafic, d'incendies et d'avatars, il est clair que les immeubles doivent être éteints pour tenter de sauver les blessés et les routes déblayées pour que les sauveteurs puissent transporter les rescapés.

L'originalité du modèle de l'équipe DAMAS tient donc comme ceux des autres équipes aux comportements qui sont donnés aux différents agents. Dans cette modélisation, les pompiers choisissent le feu à éteindre en fonction de l'utilité du bâtiment en feu et de leur capacité à l'éteindre. Cette capacité est apprise par l'agent grâce à une « perception sélective » de l'environnement qui lui permet d'abstraire le niveau de représentation le plus utile. Les ambulanciers sauvent toujours le même civil en se basant sur le message reçu par l'agent du centre des ambulances qui utilise un algorithme d'ordonnancement. Cet algorithme permet de trouver l'ordre permettant de sauver le maximum d'individus. Les policiers utilisent eux un algorithme (appelé RTBSS) qui modélise l'environnement comme un processus markovien partiellement observable (POMDP) pour choisir la meilleure route à dégager et ce à chaque étape (Paquet, Tobin et al. 2005).

Chaque agent pompier utilise un arbre de décision pour choisir un bâtiment à éteindre ou une zone à atteindre. Cette décision repose sur des propriétés du feu à éteindre : le nombre de pompiers nécessaires pour l'éteindre, l'intensité du feu (trois valeurs), la taille du bâtiment (trois valeurs), la composition du bâtiment (trois valeurs), l'état du bâtiment (trois valeurs) et le nombre de bâtiments voisins en feu (un entier). Cet arbre de décision est mis à jour par une technique d'apprentissage par renforcement au cours de simulations faites hors ligne. L'intérêt de l'approche vient de ce que la taille de l'arbre croît lentement car des nœuds sont ajoutés à l'arbre que s'ils sont nécessaires pour distinguer des états dont l'estimation de réponse cumulée est significativement différente.

C'est l'agent pompier du centre de commande qui permet de diriger le nombre de pompiers nécessaires vers une zone.

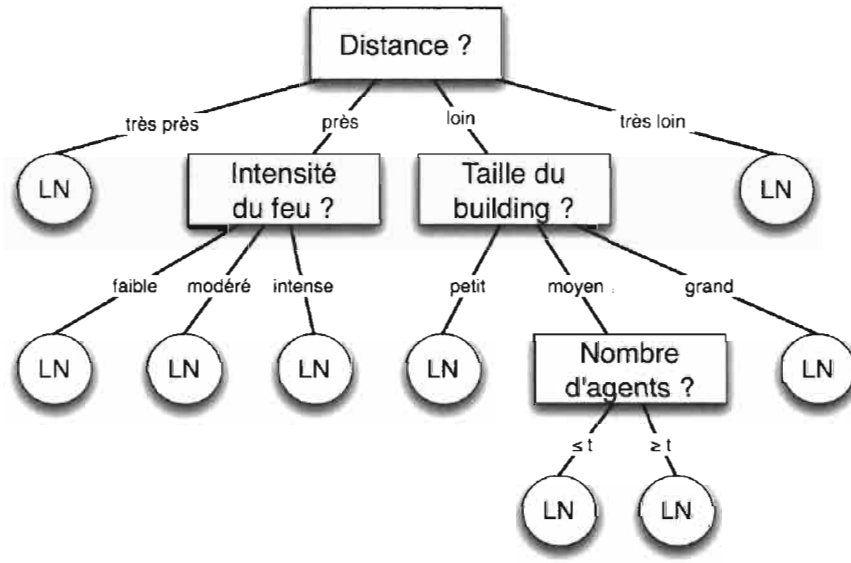


Figure 4.15 Arbre de décision pour choisir un bâtiment à éteindre ou une zone à atteindre.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

4.4.6 L'implémentation informatique

La première version des agents de l'équipe DAMAS a été développée en utilisant le langage JACK Intelligent Agent programming language[11]. En ce qui concerne le simulateur, il est en code libre de droit : `http://sourceforge.net/projects/roborescue/`. La version complète de la plate-forme Rescue v0.49.9 inclut les simulateurs, la plate-forme de développement des agents, et le générateur aléatoire de cartes.

4.4.7 L'exploitation du modèle et l'apport au domaine

En regard des questions scientifiques posées initialement, les simulations sont rarement présentées autrement que vis-à-vis de leur performances calculées par l'indice mentionné plus haut. Il est aujourd'hui trop tôt pour affirmer que des progrès ont été réalisés pour résoudre le problème scientifique réel. Nous n'avons pas trouvé de synthèse sur les résultats des compétitions.

En revanche, ces travaux sont très représentatifs d'un type de modélisation agent où de nouvelles stratégies des acteurs du monde réel peuvent être simulées et leurs résultats analysés. Ces modèles peuvent enfin être utilisés à des fins pédagogiques dans la formation des acteurs (sauveteurs, ambulanciers, etc.) devant intervenir dans des contextes de sauvetage après des catastrophes naturelles.

Les suites données au modèle

Depuis 2004, les travaux sur la modélisation se sont poursuivis. Récemment les auteurs ont proposé une extension du modèle en 2006. Aujourd'hui on peut aussi construire des simulations participatives où des êtres humains jouent le rôle d'agent. DICE : *Disaster Information & Communication Environment.*

11. Nick Howden, Ralph Rnnquist, A.H., Lucas, A. : Jack intelligent agents summary of an agent infrastructure. In : Second International Workshop on Infrastructure for Agents, MAS, and Scalable MAS, Montréal, Canada (2001).

Chapitre 5

Synthèse des exemples et méta-modèle à base d'agents

L'objectif de ce chapitre est de revisiter, à la lumière des exemples présentés dans les chapitres 1 à 4, les notions présentées dans l'introduction comme constitutives du méta-modèle à base d'agents. Nous allons ainsi analyser séparément — bien que tout soit lié — la notion d'agent elle-même, les notions liées aux aspects dynamiques tels que mécanismes, comportements, actions, interactions, pour terminer par les notions de perception et d'environnement. Nous rassemblerons ensuite ces éléments dans une proposition de schéma conceptuel qui permettra, d'une part, de donner un cadre commun à tous les exemples, et, d'autre part, de proposer un méta-modèle plus spécifique qui identifiera les points clefs à prendre en compte pour réaliser un modèle à base d'agents.

5.1 AGENTS

Si nous souhaitons réaliser une synthèse et tirer des leçons des exemples présentés, une première constatation s'impose : les agents manipulés se caractérisent par une très grande diversité, structurelle comme comportementale. Depuis les « agents grains de sable » de GRANULAB (chapitre 1), définis par un petit nombre d'attributs et de lois élémentaires, jusqu'aux « agents consommateurs » de CUBES (chapitre 4), qui possèdent mémoire et structures de décision, le terme « agent » sert à qualifier des entités semblant posséder des degrés de complexité très variables. Cette versatilité peut également être de mise au sein d'un même modèle, où peuvent coexister des agents aux caractéristiques différentes (par exemple les agents feux rouges et les agents conducteurs d'ARCHISIM).

5.1.1 Agents simples, agents complexes

Parler de la complexité d'un agent en soi est un peu un abus de langage. Comme le montrent bien les différents exemples, l'« agent » est soit un concept (dans le modèle de référence ou dans le modèle conceptuel), soit une structure informatique (dans le modèle opérationnel) temporaire ou permanente, qui sert à regrouper et à individualiser un ensemble d'attributs, de mécanismes et de relations à d'autres entités du modèle. C'est l'intrication et la dynamique d'interaction entre ces composants qui amène, en définitive, à considérer un agent (indépendamment de ce qu'il y a dans le modèle) comme complexe ou simple. Dans la mesure où les modèles à base d'agents sont implantés informatiquement, il serait théoriquement possible de mesurer leurs complexités relatives en termes algorithmiques ou computationnels, mais rares sont les travaux qui mentionnent cet aspect. Nous nous sommes donc contentés, dans l'organisation des exemples, d'une mesure intuitive de la complexité, largement suffisante pour exprimer la progressivité des approches, depuis les modèles manipulant des agents « simples » jusqu'aux modèles manipulant des agents « complexes ». Cette mesure intuitive repose donc sur la multiplicité et la diversité des concepts (pour le modèle conceptuel) et des composants (pour le modèle opérationnel) nécessaires à la représentation complète de ces agents. Un agent dont le comportement repose en partie sur une mémorisation de ses comportements passés sera ainsi considéré comme plus « complexe » qu'un agent ne faisant que réagir à son environnement immédiat, tout simplement parce qu'il aura fallu que le modélisateur fasse un choix de représentation de cette capacité de mémorisation.

Le lecteur attentif aura cependant noté que les intitulés des quatre chapitres d'exemples (Modèles « physiques », « biologiques », puis « comportementaux » et enfin « sociaux ») ne font pas référence à cette complexité mais au domaine scientifique principal pour lequel le modèle a été développé initialement. Est-ce à dire qu'il y a isomorphisme entre la complexité individuelle des objets d'étude de ces domaines et la complexité des agents qu'ils représentent dans leurs modèles ? Dans une certaine mesure, oui, mais ce n'est évidemment pas aussi simple et nous allons voir pourquoi.

Si l'on prête attention aux motivations exprimées par les modélisateurs des différents exemples, trois facteurs peuvent être vus comme présidant aux choix des agents utilisés : le contexte scientifique, les choix théoriques, et la question à l'origine de la modélisation.

a) Contexte scientifique

La discipline scientifique dominante dans laquelle prend place l'activité de modélisation exerce une influence considérable sur la complexité des agents. Il est ainsi relativement « dans l'ordre des choses » qu'un agent grain de sable de GRANULAB, formalisé par les physiciens, soit moins complexe (de par ses attributs, son comportement, ou ses capacités de perception) qu'un agent fourmi de MANTA, spécifié par des éthologues, lui-même moins complexe qu'un agent pompier de DAMASRESCUE, dans lequel sont simulées des capacités humaines de décision et de planification.

Le fait que ces trois disciplines puissent s'appuyer sur les mêmes concepts de modélisation tout en en proposant des instances aussi différentes montre bien, *a posteriori*, la richesse de représentation qu'offre la modélisation à base d'agents.

b) Choix théoriques

Cependant, l'influence des domaines scientifiques n'explique pas tout :ils sont loin d'être homogènes. Par exemple, si le système de référence d'ARCHISIM et de CUBES est bien un système social dans lequel interagissent des humains, on constate que les capacités des agents qui les représentent sont aux antipodes les unes des autres. Les premiers, élaborés avec l'aide de psychologues comportementalistes, n'ont qu'une vision à très court terme de leur environnement immédiat, une mémoire inexistante et un mécanisme de décision totalement réactif. Les seconds, qui s'appuient sur différentes théories de la décision, entretiennent un réseau « social », conservent et communiquent des informations relatives à leur environnement, et voient leur décision influencée par de multiples mécanismes (de goût, de choix, etc.). Comme nous l'avons déjà précisé dans l'Introduction, et comme on l'a constaté dans les exemples, il n'existe donc pas de modèle universel d'« agent humain » (pas plus que d'« agent fourmi » ou d'« agent poisson »), tout simplement parce que le concept d'« être humain » n'est pas appréhendé de la même façon par toutes les sciences sociales. Les choix théoriques préexistants des modélisateurs lors de la constitution du modèle de référence vont ainsi peser fortement sur la complexité des agents utilisés. C'est d'autant plus vrai que beaucoup de modèles sont conçus pour valider en partie ces différentes théories.

c) Question de modélisation

Enfin, le dernier point, propre à l'activité de modélisation, et sans doute le plus crucial pour ce qui nous intéresse, réside dans la question qui a présidé à la constitution du modèle par les modélisateurs, car c'est elle, en grande partie, qui va conditionner le type, mais aussi la simplification (ou la complexification), des agents utilisés. Si les agents primates de DOMWORLD n'ont pas d'autres activités que « sociales », c'est parce que seule la question de la génération et du maintien de la structure sociale de leurs groupes intéressait les primatologues à l'origine de ce travail et qu'ils ont construit le modèle sur l'hypothèse que les autres dimensions (comportementales, cognitives ou biologiques) n'intervenaient que marginalement dans cette génération. Ces agents primates, comme les agents conducteurs d'ARCHISIM, les agents consommateurs de CUBES, les agents fourmis de MANTA ou les agents poissons de SIMANCHOIS, sont délibérément amputés, dans leur conception, d'attributs ou de fonctions que possèdent les entités réelles du système de référence concerné, et cette simplification est guidée par l'objectif assigné au modèle. Inversement, il est possible d'observer une complexification, au moins métaphorique, dans certains exemples. La capacité qu'ont les boules d'eau de RIVAGE de décider collectivement de la création d'entités de plus haut niveau (comme les mares ou les cours d'eau) n'existe évidemment pas en tant que tel dans un système hydrologique réel. Dans ce cas, les concepts

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

de perception et de décision, « ajoutés » aux entités du système de référence, sont employés comme des représentations métaphoriques de processus physiques réels, toujours dans le souci de répondre correctement aux objectifs assignés au modèle.

Le croisement de ces trois critères (contexte scientifique, choix théoriques, et question de modélisation) permet ainsi de comprendre la diversité des agents utilisés dans les différents exemples, sans pour autant impliquer automatiquement de gradation concernant leurs complexités respectives. Le classement que nous avons effectué s'est tout de même efforcé de concilier ces deux points de vue : présenter les modèles par ordre croissant de complexité de leurs agents tout en maintenant une certaine cohérence thématique.

Ainsi, les deux modèles du chapitre 1, GRANULAB et RIVAGE, choisissent comme agents des entités — grains de sable, paquets d'eau — qui ne sont douées ni d'intentionnalité ni de mémoire et qui sont soumises à des règles qu'elles ne peuvent ni choisir ni modifier. Leur variabilité individuelle est exprimée par un état, qui correspond aux valeurs de leurs attributs et à leur position dans l'environnement, suivant en cela une vision corpusculaire classique en physique.

Abordant la représentation d'entités biologiques, les modèles du chapitre 2 sont composés d'agents légèrement plus complexes. Ils sont de prime abord dotés d'attributs (autres que la position) qui peuvent évoluer au cours du temps, sous leur impulsion ou celle d'autres entités du système. Ils sont également les objets (ou sujets) de processus démographiques : mort, naissance, reproduction. Enfin, ils peuvent agir en modifiant un environnement qui existe en dehors d'eux (et pas simplement modifier leurs propres attributs).

Les agents des modèles comportementaux du chapitre 3 ajoutent des capacités de perception, de communication et de représentation des autres. Leur comportement n'est donc plus uniquement dicté par leur état interne ou des lois immuables qui leur seraient imposées, mais aussi par ce qu'ils peuvent percevoir comme informations, éventuellement de façon active, dans leur entourage tant physique que « social » (les autres agents).

Enfin, les modèles sociaux du chapitre 4 formalisent plus avant les relations entre agents en matérialisant des notions (extérieures aux agents) comme celles de réseaux ou de communication et en en faisant un déterminant central des comportements. L'agent n'est plus conçu comme isolé, mais comme étroitement dépendant d'une structure plus large qu'il conditionne tout en étant conditionné par elle.

5.1.2 Versatilité des modèles, diversité des agents

Ces travaux illustrent bien la principale raison de la popularité actuelle des modèles à base d'agents : leur extrême versatilité. Celle-ci se traduit, comme on peut le constater, par la possibilité de pouvoir représenter sous forme d'agents artificiels, au sein d'un modèle, n'importe quel objet d'étude d'un système de référence. Soit que cet objet possède une réalité tangible dans ce système (comme les fourmis de MANTA ou les consommateurs de CUBES) ou qu'il soit une construction plus abstraite (comme les paquets d'eau de RIVAGE). En n'imposant aucune contrainte a priori sur les types

d'attributs ou de mécanismes dont les agents sont porteurs, la modélisation à base d'agents parvient ainsi à s'adapter sans souci conceptuel majeur aux langages, théories ou méthodes existantes des modélisateurs.

a) Relations micro-macro

Cependant, comme nous l'avons souligné dans l'Introduction, le choix d'une modélisation à base d'agents ne se fonde pas uniquement sur sa richesse de représentation. Elle trouve souvent son origine dans la volonté, au sein d'un système de référence, de comprendre les relations entre des niveaux d'abstraction différents et les interrelations qui les unissent. Ceci se traduit par des modèles pourvus d'un niveau « micro », que représentent les agents, et de différents niveaux « macro », qui n'ont souvent d'existence que par le biais de mesures plus ou moins localement agrégées sur la population des agents, ou encore par l'apparition de structures « émergentes » c'est-à-dire reconnaissables et identifiables de par leur relative permanence. Tous les exemples présentés suivent peu ou prou ce schéma : paquets d'eau au niveau micro, flux à l'exutoire (mesures de débit), mares ou ravines (structures émergentes) au niveau macro dans RIVAGE ; grains de sable au niveau micro, distribution des forces (mesures) ou lignes de force (structures) au niveau macro dans GRANULAB ; fourmis au niveau micro et structures sociales au niveau macro dans MANTA, véhicules au niveau micro, densité du trafic routier (mesure) et formations d'embouteillages (structures) au niveau macro dans ARCHISIM. Tous ces exemples démontrent clairement l'intérêt que représente la modélisation à base d'agents dans l'exploration des mécanismes d'émergence de dynamiques et de formes à partir de mécanismes locaux. Il convient de noter que, de tous les exemples, RIVAGE est le seul à proposer de réifier explicitement les structures macroscopiques, les autres préférant s'en remettre à leur caractérisation par des mesures globales.

b) Différenciation des agents

Enfin, une troisième raison est souvent mise en avant par les concepteurs de modèles pour motiver une approche à base d'agents : la possibilité de représenter des systèmes de référence composés d'entités différenciées, soit par la valeur de leurs attributs, soit par leurs attributs ou leurs comportements eux-mêmes. En effet, contrairement aux approches agrégées, le méta-modèle à base d'agents présenté dans l'Introduction permet d'« individualiser » les mécanismes ou les connaissances utilisées dans un modèle et peut donc tout à fait convenir à la représentation, au sein d'un même modèle, d'agents structurellement différents (c'est-à-dire pourvus d'attributs et de comportements différents).

Tous les exemples, à différents titres, s'appuient sur cette capacité de différenciation, dans la mesure où, bien entendu, la question scientifique qui les sous-tend l'exige.

GRANULAB, DOMWORLD et SIMPOP ne manipulent qu'une seule sorte d'agents (respectivement des grains de sable, des primates et des villes), tous issus d'une même matrice : il n'y a pas de différences structurelles entre eux, ils possèdent les

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

mêmes attributs et sont soumis aux mêmes mécanismes que les autres. La distinction entre agents n'est donc pas inscrite dans le modèle, mais elle s'opère lors des simulations par individualisation des valeurs de leurs attributs (et, dans le cas de SIMPOP, par modification progressive des fonctions dont ils peuvent être porteurs). Ces modèles sont représentatifs d'une approche courante dans la littérature (en écologie, physique ou sciences sociales). Une approche dans laquelle les chercheurs se servent du modèle à base d'agents pour représenter la différenciation « naturelle » qui s'opère lorsque des entités identiques se retrouvent soumises à des influences différentes, par exemple parce qu'elles sont localisées à des emplacements différents dans leur environnement commun, ou parce que certaines de leurs caractéristiques évoluent de façon non déterministe. Dans ces trois modèles, la question à l'origine de la modélisation délimite un système de référence dans lequel n'existe qu'une sorte d'entité.

Inversement, les autres travaux présentés tirent parti de la possibilité de créer des agents structurellement différents au sein d'un même modèle, mais, encore une fois, n'ont pas tous besoin, du fait de leur objectif, de l'exploiter de la même manière.

SIMANCHOIS, BIOFILMS, CUBES et ARCHISIM, dans lesquels coexistent différentes « espèces » d'agents, sont en réalité clairement centrés sur un type d'agent « principal » (le poisson, la biomasse, le consommateur ou le conducteur) sur lequel a porté l'effort de représentation (souvent en accord avec la question de modélisation). Les autres « font partie du décor » (ou parfois, comme on le verra, de l'environnement). Si l'on examine plus en détail leurs comportements, on s'aperçoit qu'ils sont effectivement très simples : les agents firmes de CUBES se contentent d'émettre à intervalles réguliers des signaux à destination des consommateurs et ne sont, en cela, guère différents des agents panneaux routiers ou feux rouges d'ARCHISIM, régis par de simples automates. L'agent solution des BIOFILMS agit comme un environnement pour la biomasse (en modifiant des attributs comme la répartition spatiale des concentrations). Quant aux agents œufs et larves de SIMANCHOIS, ils n'ont pas véritablement de comportements propres. Ces quatre modèles sont représentatifs d'une approche assez commune dans la littérature, qui consiste à exploiter au maximum la représentation à base d'agents, y compris dans des modèles où la question de modélisation ne porte pas sur les effets de la coexistence entre entités différentes.

Celle-ci est par contre prédominante dans RIVAGE, MANTA, SELFCORMAS et DAMASRESCUE et constitue même, selon leurs concepteurs, la raison principale du choix d'un modèle à base d'agents. Dans ces quatre modèles, des agents différents (par leurs attributs, leur mécanisme de décision, leur comportement) sont mis en interaction dans un même environnement. L'approche à base d'agents offre là une richesse de représentation qui n'a pas véritablement d'équivalent au sein des autres méthodes de simulation et qui peut être exploitée de façon très fructueuse, que ce soit pour exprimer la diversité des entités du système de référence (SELFCORMAS ou DAMASRESCUE), pour expliciter des dynamiques différentielles d'interaction et d'occupation de l'espace (MANTA) ou pour représenter simultanément différents niveaux d'abstraction (RIVAGE).

Le méta-modèle présenté dans l'Introduction, qui constitue une vue très générique de la modélisation à base d'agents, ne prend pas réellement en compte la nécessité de pouvoir formaliser cette diversité. Bien que rien ne laisse présupposer que les agents qu'il propose sont semblables, il n'offre aucun support à une description de leurs ressemblances ou de leurs différences, alors même que cet aspect joue un rôle crucial dans l'adoption des techniques de modélisation à base d'agents par les modélisateurs. Une proposition de méta-modèle qui puisse spécifier plus en détail les modèles opérationnels devra tenir compte de cette nécessité.

5.2 COMPORTEMENTS ET DÉCISIONS

Dans ce même méta-modèle, les comportements sont considérés comme « portés » par les agents. Si cette façon de concevoir la relation entre l'agent et ses comportements convient bien à une présentation informelle, voire à un discours à portée conceptuelle, elle ne donne en revanche que peu d'informations sur sa nature exacte dans le modèle opérationnel.

Les différents exemples (sauf peut-être RIVAGE) montrent clairement qu'il convient d'opérer une distinction entre, d'une part, les *comportements* des agents et, d'autre part, leurs *mécanismes de décision*. Les *comportements* consistent en un ensemble de fonctions ou de règles capables de faire évoluer l'état de l'agent et l'état des autres entités du modèle avec lesquelles il est en relation. Ils sont l'équivalent de l'ensemble des méthodes d'un objet en informatique ou du répertoire comportemental d'un animal pour l'éthologie, et représentent *ce que l'agent est capable de réaliser*, mais non *ce qu'il réalise* à chaque instant. En effet, les comportements que possède un agent ne sont habituellement pas tous actifs en même temps : certains vont dépendre de conditions sur l'état de l'agent, d'autres de l'exécution simultanée ou séquentielle d'autres comportements ou encore de l'absence ou de la présence d'un percept. Il est donc nécessaire, et c'est le cas dans tous les exemples, que les agents disposent, en plus, d'une capacité à pouvoir décider du comportement à tenir en toutes circonstances. Cette fonction est habituellement assurée par la représentation d'un (ou de plusieurs) *mécanisme(s) de décision* dont l'objectif est d'arbitrer, en permanence, entre les comportements existants, de régler leurs éventuels conflits, et de choisir celui qui paraît le mieux adapté au contexte et à l'état de l'agent.

Le couple *comportements/mécanismes de décision* constitue la partie dynamique des agents et, comme pour leurs architectures, force est de constater que les modèles existants se caractérisent par une très grande diversité d'options, essentiellement du fait de la trop grande généricité des méta-modèles utilisés, mais aussi de besoins de représentations extrêmement variés.

Les exemples des chapitres 1 à 4 fournissent une bonne illustration de cette diversité et sont représentatifs des trois grandes catégories que l'on peut observer à l'heure actuelle dans le panorama des modèles à base d'agents :

- décisions et comportements partagés,

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

- décisions partagées et comportements individualisés,
- décisions et comportements individualisés.

Il ne faut pas prendre cette classification trop au pied de la lettre : les frontières entre les trois catégories sont très largement poreuses et un même modèle, suite à l'ajout ou au retrait d'un comportement, peut très bien passer de l'une à l'autre. Néanmoins, elle permet de montrer que la question de savoir où placer la dynamique de ces modèles (et cette question est fondamentale pour la constitution du modèle opérationnel) n'a pas toujours de réponse évidente.

5.2.1 Décision et comportements partagés

Cette catégorie regroupe les modèles à base d'agents dans lesquels aussi bien la décision que les comportements sont identiques chez tous les agents, qui ne se distinguent plus, alors, que par leurs attributs ou leurs capacités de perception. Il ne s'agit pas d'une centralisation de la dynamique du modèle, contraire à l'esprit de la modélisation à base d'agents : dans le modèle conceptuel comme dans le modèle opérationnel, les agents restent des entités différenciées. Simplement, dans cette catégorie, le fait de présenter les comportements comme « portés » par les agents reste valable au niveau métaphorique dans le modèle conceptuel, mais plus dans le modèle opérationnel où une seule fonction (ou un même ensemble de méthodes s'il s'agit d'une implémentation orientée objet) est partagée par l'ensemble des agents.

GRANULAB entre pleinement dans cette catégorie, dans la mesure où il n'utilise qu'une seule sorte d'agents et que ceux-ci n'ont pas de comportements différenciés. RIVAGE, SIMANCHOIS, BIOFILMS et ARCHISIM en font aussi partie même si, dans leur cas, il existe autant de couples comportements/mécanismes de décision que de sortes d'agents (y compris pour les agents de second plan).

Dans les trois premiers exemples, les agents ne sont dotés d'aucun mécanisme de décision tout simplement parce qu'ils ne possèdent réellement qu'un seul comportement. Celui-ci est donc appliqué en permanence à chaque agent. À noter que dans le cas de GRANULAB, les agents ne sont pas activés dans n'importe quel ordre : une fonction délocalisée, qui s'apparente à un mécanisme de décision au niveau global, établit un ordre partiel entre les agents grains. De même, dans SIMANCHOIS, le processus de sélection génétique qui intervient revient, de fait, à influencer localement l'exécution du comportement partagé par tous les agents, et peut être ainsi vu comme un mécanisme de décision centralisé.

Dans ARCHISIM et BIOFILMS, en revanche, le mécanisme de décision qui va, en fonction des attributs des agents, les faire accélérer, décélérer ou changer de file (pour ARCHISIM) ou croître, se diviser ou se détacher de la matrice (pour BIOFILMS) est clairement défini dans le modèle. Dans le premier exemple, il en constitue même l'un des fondements conceptuels.

De façon plus générale, cette catégorie concerne la majorité des modèles à base d'agents existant à l'heure actuelle. Tous les modèles prototypiques tels que Sugarscape (Epstein et Axtell 1996) ou les modèles de ségrégation (Gilbert et Troitzsch

2005) et leur importante descendance en font par exemple partie. Cela peut se comprendre historiquement comme méthodologiquement. Historiquement, cette catégorie de modèles est dans la droite lignée des modèles de micro-simulation utilisés en sciences sociales (auxquels ils ajoutent des information de localisation et un environnement extérieur aux agents) (Gilbert et Troitzsch 2005), des modèles individus-centrés utilisés en écologie (Grimm et Railsback 2005) et des modèles particulaires utilisés en physique (Schweitzer 1997) (auxquels ils ajoutent si nécessaire des mécanismes de décision et la possibilité d'utiliser d'autres langages que les mathématiques pour décrire les comportements). Méthodologiquement, en particulier parce que l'implémentation informatique du modèle opérationnel est souvent plus simple, cette catégorie a l'avantage certain (quand la question posée au modèle ne nécessite pas que chaque agent soit comportementalement individualisé) de faciliter quelque peu la génération et l'analyse systématique des simulations.

5.2.2 Décisions partagées et comportements individualisés

Dans cette catégorie, le mécanisme de décision est identique pour tous les agents et s'applique de la même manière à tous. Mais les fonctions comportementales entre lesquelles ce mécanisme va arbitrer sont « portées » par les agents et peuvent donc être individualisées et différentes d'un agent à l'autre. Nous retrouvons dans cette catégorie deux des trois modèles « comportementaux » du chapitre 3, MANTA et DOMWORLD, ainsi que SIMPOP.

Dans le premier, le mécanisme de décision repose sur les théories de Konrad Lorenz (Lorenz 1984) concernant les mécanismes innés de déclenchement, et les comportements des agents reproduisent le plus fidèlement possible les observations des éthologues. Dans le second, ce sont les travaux des primatologues qui ont inspiré le mécanisme de décision, les comportements étant réduits à de simples déplacements dans un espace simplifié.

SIMPOP constitue un cas particulier, dans la mesure où les comportements dont sont dotés les agents villes changent au cours du temps en fonction de leurs changements de statuts, ou en fonction d'événements historiques qui introduisent de nouvelles possibilités techniques. Mais le mécanisme de décision (appelé dans ce modèle la « gouvernance »), qui va permettre d'arbitrer entre eux, est identique pour tous les agents villes.

5.2.3 Décisions et comportements individualisés

La dernière catégorie comprend les modèles dans lesquels les agents sont dotés de mécanismes de décision et de comportements différenciés. Cette différenciation peut être individuelle, comme dans le cas de SELFCORMAS, où comportements et mécanisme de décision sont élaborés, agent par agent, par les acteurs humains qu'ils sont censés représenter. Elle peut aussi concerner des « profils » d'agents, comme dans le cas de CUBES, où le mécanisme de décision est lui-même paramétré par certains des attributs de l'agent et peut évoluer dans le temps selon une dynamique qui lui est propre. Elle peut enfin se situer au niveau des « classes » d'agents, comme dans le cas

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

de DAMASRESCUE, où les divers types de sauveteurs vont appliquer des mécanismes de décision totalement différents.

Ces différentes catégories permettent de constater que la place du comportement *dans* l'agent, telle qu'elle est exprimée dans le méta-modèle générique de l'Introduction, relève d'un discours essentiellement métaphorique qui peut recouvrir des choix de modélisation et d'opérationnalisation très différents. Du point de vue du modèle conceptuel, cela n'a pas une grande importance mais, dans la mesure où ce dernier constitue une étape dans la construction de modèles opérationnels, il peut être utile, dans certains cas, de pouvoir clarifier cette relation dès les premières étapes de modélisation, et surtout de pouvoir disposer d'un langage de modélisation qui en offre une représentation explicite.

5.3 ENVIRONNEMENT

Dans les modèles à base d'agents, l'environnement peut être défini comme l'ensemble des informations non portées par les agents. Cette définition, éventuellement acceptable au niveau opérationnel, laisse au niveau conceptuel la place à une large indétermination. Existe-t-il, à ce niveau, matière à une définition plus consistante de l'environnement ? C'est la question, abordée dans la présentation des exemples, que nous allons examiner de façon plus approfondie.

Dans le cas de robots réels se déployant dans le monde réel, l'environnement n'a pas à être modélisé car il existe, tout simplement. C'est la somme de tout ce que les robots expérimentent dans leur déploiement. Seules, éventuellement, des représentations formalisées de cet environnement devront être conçues dans les programmes contrôlant ces robots, afin qu'ils opèrent correctement. Il n'en est pas de même dans le contexte qui nous occupe ici, celui des *modèles* à base d'agents, où tout doit être modélisé : les agents, leur environnement, et la représentation qu'ils en possèdent. Notons alors d'emblée les termes exacts dans lesquels la question doit être posée, afin d'éliminer certaines ambiguïtés. Tels que nous les avons définis au premier abord, les modèles à base d'agents mettent en mouvement une collection dynamique de multiples entités dotées d'attributs. Parler d'environnement ne modifie en rien ce schéma général. La question porte davantage sur le contenu : il s'agit de cerner les informations qui seront plus spécifiquement portées par des entités regroupées sous le vocable *d'environnement*, ainsi que la forme sous laquelle elles y seront inscrites, afin de comprendre s'il est possible d'en faire des parties intégrantes d'un méta-modèle à base d'agents à vocation générique.

5.3.1 L'environnement comme ensemble de contraintes structurelles

Dans le premier exemple, GRANULAB, les attributs individuels dont sont dotés les agents grains sont une masse, un rayon et une position. Les valeurs que peuvent prendre ces trois attributs appartiennent à des ensembles sur lesquels le modélisateur dispose d'un corpus de connaissances. Il sait par exemple que la masse comme le rayon ne peuvent être négatifs, qu'une masse peut être jugée plus petite ou plus

grande qu'une autre masse, que l'on peut définir des distances entre les positions. La valeur d'un attribut met donc de fait l'agent grain en relation avec une entité certes abstraite, mais dotée de qualités parfaitement repérées posant certaines contraintes et donnant un sens à certains calculs. Le caractère abstrait s'atténue d'ailleurs dans le cas de la position, habitués que nous sommes à nous déplacer dans l'espace et à voir dans ce dernier une entité concrète. De fait, ce dernier attribut — la position — présente une contrainte supplémentaire, car si deux grains peuvent avoir la même masse ou le même rayon, ils ne peuvent avoir la même position.

Au niveau relationnel, on trouve les informations identifiant les grains avec lesquels un grain donné est en contact, ainsi que les caractéristiques géométriques et mécaniques de ces contacts. On peut voir les caractéristiques de contacts comme un attribut complexe spécifiable sans référence aux grains voisins. Par exemple comme une fonction — en l'occurrence discrète — définie dans l'ensemble des points de la surface du grain et prenant ses valeurs dans un espace de forces. Mais il faut alors nécessairement inclure dans le modèle conceptuel la co-occurrence spatiale des contacts et, éventuellement, le principe d'égalité entre l'action et la réaction. On peut aussi, à côté des agents grains associés aux seuls attributs de masse, position et rayon, considérer des agents contacts porteurs des caractéristiques géométriques — position et orientation — et mécaniques. Ici le modèle conceptuel doit inclure les propriétés, cette fois-ci purement géométriques, liant les positions et orientations des contacts, les positions des centres et les rayons. Derrière cette diversité — car il existe encore d'autres manières de concevoir —, transparaît la nécessité de prendre en compte des contraintes sur les valeurs que doivent prendre les attributs des agents cette fois-ci *les unes par rapport aux autres*.

Ces contraintes d'intégrité manifestent, dans GRANULAB comme dans d'autres exemples, l'existence d'un réseau de relations, de dépendances données *a priori*, autrement dit *l'existence d'une organisation* indépendante des agents et qui vient limiter le jeu des valeurs de leurs différents attributs. Cette organisation est la manifestation la plus commune, dans les modèles à base d'agents, de la notion *d'environnement,* que cette dernière soit explicitement matérialisée sous la forme d'une entité du modèle ou présente de façon diffuse dans les comportements attribués aux agents.

5.3.2 L'environnement comme champ médiateur

Dans RIVAGE, aucune contrainte organisationnelle inter-agents n'apparaît aussi clairement. Les paquets d'eau sont caractérisés à chaque instant par leurs masses, positions et vitesses. Les valeurs de ces attributs sont soumises aux contraintes de leurs espaces respectifs, mais au-delà, aucune dépendance ne vient *a priori* limiter les configurations de valeurs possibles. De fait, n'importe quelle condition initiale peut être ainsi imaginée. La dépendance entre les valeurs n'apparaît qu'*a posteriori* par la loi du mécanisme de déplacement. Cependant l'examen du calcul mis en œuvre dans cette loi montre l'intervention à chaque instant t d'une fonction H_t définie sur l'espace des positions. Cette fonction donne sur chaque position possible un nombre s'interprétant comme la hauteur en cet endroit de la lame d'eau représentée de façon

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

discrète par les paquets d'eau. Dans la loi de déplacement, elle agit comme un potentiel, en permettant de calculer par le biais de son gradient la force exercée sur un paquet. Il peut paraître arbitraire de considérer ce « champ » H_t comme une composante de l'environnement. Il n'a en effet aucune autonomie, dépendant strictement et instantanément des positions des paquets à l'instant t. Il n'est qu'un intermédiaire de calcul, et un instrument de visualisation réaliste du phénomène simulé. Dans BIOFILMS, on retrouve également, dans la répartition spatiale des concentrations, cette notion de champ médiateur des interactions. Dans ce cas, il est doté d'une autonomie issue d'une dynamique qui lui est propre[1].

En considérant RIVAGE et BIOFILMS d'une manière plus abstraite, on constate dans les deux cas la présence d'un attribut, la position, dont l'ensemble des valeurs possibles, non seulement possède une structure bien définie et exploitée — celle d'un espace métrique — mais se trouve être aussi *le support de fonctions* jouant un rôle dans la spécification des mécanismes d'évolution du système. Notons bien que ces fonctions, au moins conceptuellement, sont définies sur l'ensemble des positions possibles *indépendamment du fait que ces positions soient occupées ou non par des agents*. Elles se comportent donc comme des attributs associés à l'ensemble des valeurs de positions prises en tant que tel, comme des propriétés de l'espace à un instant donné. Parler à leur propos de composantes d'environnement paraît donc assez logique.

Ces deux exemples amènent d'autres éléments. Dans RIVAGE, le calcul du champ mobilise la connaissance de *toutes* les positions et masses des paquets d'eau. Il s'agit là d'une information complexe et d'un calcul qui paraissent bien à leur place comme attributs d'une entité environnement, en l'occurrence encore une fois l'espace déjà porteur du champ H_t. Une situation similaire se retrouve dans BIOFILMS, où la réévaluation à chaque instant du « temps lent » des conditions initiales de la dynamique autonome des concentrations mobilise la connaissance de *tous les lieux* de production et de consommation des différentes substances, et des quantités produites ou consommées.

Le rôle de l'environnement ne se résume donc pas uniquement à un ensemble de contraintes globales. Dans les deux exemples qui viennent d'être mentionnés, il participe clairement à la dynamique générale en assumant de façon indépendante des agents un calcul, en l'occurrence celui de champ médiateur. Plus généralement, et notamment dans les autres exemples, il est vu comme une entité capable d'offrir des *services*, c'est-à-dire capable d'effectuer des calculs en réponse à une demande des agents.

5.3.3 L'environnement comme support de la perception

Tels sont les services de perception, qui donnent la possibilité à un agent de consulter un sous-ensemble (souvent localisé) de l'état macroscopique du système. Un agent peut ainsi, comme dans MANTA, DOMWORLD, ou DAMASRESCUE, accéder aux

1. En l'occurrence, les processus de transport, de réaction et de diffusion modifiant les concentrations.

agents proches dotés de certaines caractéristiques, ou, comme dans SELFCORMAS ou SIMPOP, connaître l'état de certains attributs (type d'espace géographique, nature des cultures) portés par l'environnement. Dans ARCHISIM, il va même jusqu'à jouer un rôle tout à fait primordial, en étant capable de fournir des informations différentes selon l'état de l'agent qui les lui demande (par exemple, un conducteur ne percevra pas de la même façon son environnement immédiat selon qu'il roule vite ou lentement).

5.3.4 L'environnement comme contrôle de l'action

L'autre grand ensemble de services offerts par les environnements définis dans les exemples est lié aux différentes actions que peuvent entreprendre les agents. Hormis quand l'agent n'« agit » que sur lui (par exemple en modifiant ses propres attributs — et encore s'il ne s'agit pas d'attributs dont la valeur est contrainte par l'environnement), toutes ses actions sont susceptibles d'être contrôlées, modifiées, voire refusées par l'environnement. On retrouve ici les notions de contrôle d'intégrité déjà évoquées, mais sous une forme plus « active ».

Le cas le plus emblématique est celui du déplacement lequel, dans bien des cas, n'est pas une simple opération de modification de la position de l'agent dans son environnement. Dans les exemples où les agents sont susceptibles de se déplacer (c'est-à-dire tous sauf SIMPOP), l'environnement joue un rôle essentiel en ce qu'il est le seul à connaître certaines contraintes (exclusivité des emplacements, présence ou absence d'obstacles, lois physiques du monde qu'il représente, etc.). Il peut proposer des emplacements aux agents en fonction de certaines caractéristiques (comme dans MANTA, DOMWORLD, SIMANCHOIS ou SELFCORMAS). Il peut interdire à un agent d'atteindre un emplacement (si les emplacements sont exclusifs, comme dans RIVAGE, ou si l'environnement gère des obstacles, comme dans MANTA ou DAMASRESCUE). Il peut modifier l'action de déplacement voulue par l'agent pour la faire correspondre à ses propres lois (adaptation de la vitesse souhaitée par l'agent-conducteur dans ARCHISIM), ou bien déplacer de lui-même l'agent (comme les « environnements » mares ou ravines de RIVAGE).

5.3.5 L'environnement comme médium de communication

CUBES, comme d'ailleurs MANTA, introduit une notion intéressante, celle de *stimulus*. Ainsi, dans CUBES, l'ensemble des stimuli présents à chaque instant constitue une sorte de milieu, alimenté par les marques, mais aussi les consommateurs, émetteurs de stimuli, et agissant sur les consommateurs, récepteurs de ces stimuli. De tels stimuli matérialisent des *messages*. Notons bien qu'il ne s'agit pas ici des messages dont on parle à propos des langages objets au niveau de l'implémentation. Ce sont bien des entités à part entière, modélisant au niveau conceptuel des messages réels, qui peuvent être chimiques (dans le cas de MANTA) ou langagiers (dans le cas de CUBES). Ces entités portent des attributs codant l'identification de l'émetteur, son intention lors de l'émission du message et divers éléments de contenu. Elles se caractérisent par de courtes durées de vie : leur collection constitue à chaque instant une

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

composante d'environnement médiatrice des influences exercées par les agents les uns sur les autres. Le rôle de cet ensemble discret de messages s'apparente donc, la diversité en plus, à celui du champ de hauteur d'eau dans RIVAGE et de la distribution des solutés dans BIOFILMS. Sa dynamique, quant à elle, s'apparente à celle d'un stock en renouvellement permanent, rapide par rapport au temps des décisions des agents et de la vie du système entier.

L'adjonction au méta-modèle à base d'agents du concept de stimulus et, plus généralement, de toute abstraction matérialisant la communication entre les agents, fait de l'environnement une entité qui n'est plus seulement chargée d'imposer des contraintes aux agents, ou de répondre à leurs demandes. L'environnement doit aussi gérer, de façon éventuellement dynamique (altération au cours du temps du message chimique, par exemple, ou production autonome de stimuli), la génération et le devenir d'autres entités constituantes du modèle.

5.3.6 L'environnement comme espace relationnel

Dans CUBES, SIMPOP et DAMASRESCUE, est utilisé encore un autre concept qui n'apparaît pas dans le méta-modèle du chapitre 1 : celui de réseau. Dans ces trois modèles, en effet, les agents, en plus d'être localisés dans un environnement représentant l'espace physique du système de référence, font partie intégrante d'un ensemble de réseaux qui définissent des relations de voisinage, de proximité, de connectivité et qui vont servir de support à des interactions non forcément médiatisées par l'environnement physique. Dans CUBES, il s'agit de réseaux sociaux (familiaux, amicaux, professionnels, etc.) ; dans SIMPOP, de réseaux de commerce, d'échange et de services entre villes, qui dépendent des fonctions dont elles sont dotées ; dans DAMASRESCUE, des réseaux de communication entre agents. Cette notion apparaît également en filigrane dans DOMWORLD (sous la forme d'un graphe intériorisé par chacun des agents qui représente le réseau de dominance entre individus), sans être cependant explicitement une entité du modèle.

L'intervention de cet élément permet aux modélisateurs de définir des relations entre agents qui ne se ramènent pas (comme dans les modèles biologiques ou physiques) à des contraintes de type spatial, fixées entre des positions d'un espace continu ou des nœuds d'un espace réticulé existant indépendamment d'eux. L'ensemble de ces relations forment des structures évolutives, non exclusives les unes des autres, et qui possèdent leur propre dynamique : ainsi, dans SIMPOP, les réseaux vont-ils s'agrandir ou se rétrécir au gré des événements historiques qui affectent le modèle, comme des conflits entre nations, ou bien l'introduction de nouveaux moyens de transport ou de communication.

5.3.7 L'environnement comme espace(s) multiple(s)

Ces réseaux sont bien des environnements au sens où nous avons commencé à les passer en revue, dans la mesure où ils offrent des services de communication, de perception et d'action spécifiques, définissent une topologie, ainsi que des lois et des contraintes s'appliquant aux agents et à leurs attributs. Leur prise en compte ajoute

donc une dimension nouvelle aux modèles à base d'agents : celle de l'éventuelle multiplicité des environnements dans lesquels sont plongés les agents. Superposer, comme le fait SIMPOP, un environnement géographique à des environnements sous forme de réseau suppose que les agents sont capables d'agir, d'interagir et de percevoir simultanément dans ces différents environnements. Cela entraîne aussi inévitablement la nécessité de pouvoir maintenir la cohérence entre ces différents environnements : le changement de localisation dans l'un des environnements peut avoir des incidences sur la place de l'agent dans les autres. Ainsi, un changement de position dans l'espace géographique (par exemple, un déménagement d'un quartier à un autre dans CUBES) peut modifier la position d'un agent dans un réseau amical (sans affecter les autres réseaux auxquels il participe, comme les réseaux familiaux ou professionnels).

Prendre en compte la possibilité d'environnements multiples dans un modèle à base d'agents permet de régler de nombreux problèmes de modélisation en évitant d'accumuler trop de connaissances disparates au sein d'une unique entité environnementale. De même, les différents rôles attribués à l'environnement dans les sections précédentes peuvent être pris en charge par des environnements différents, synchronisés entre eux (ou non, selon les besoins). Par exemple, l'un, représentant un réseau de télécommunications, pourra servir de médium entre agents en s'affranchissant des contraintes liées à la distance, cependant qu'un autre, représentant un monde « physique », n'offrira que des services de perceptions liés à la proximité. Les possibilités sont infinies et séduisantes, mais entraînent la nécessité de définir ces environnements en tant qu'entités à part entière des modèles. Le concept d'environnement doit donc être spécifié de façon beaucoup plus détaillée dans un méta-modèle à base d'agents qui se voudrait générique.

5.3.8 L'environnement comme entité(s) autonome(s)

Ainsi, à partir de l'instant où le concept d'environnement est décrit comme disposant de ses propres attributs et contraintes (indépendants des agents), et où il est concevable de disposer de plusieurs environnements dans un même modèle, il apparaît nécessaire de pouvoir le définir plus précisément afin de passer d'un discours un peu flou au niveau conceptuel à la spécification précise d'une implémentation dans le modèle opérationnel.

Dans de nombreux exemples, l'environnement dispose de comportements régis par des mécanismes de décision qui ne sont pas sans rappeler ceux des agents. Évolution des cultures dans SELFCORMAS, gestion de la concentration dans BIOFILMS, introduction d'événements historiques dans SIMPOP, modification de la topologie dans DAMASRESCUE, adaptation de la perception dans ARCHISIM, tous ces aspects dynamiques ne dépendent pas seulement de lois ou de contraintes cantonnées au monde physique ou chimique ; ils supposent, de la part de l'environnement, des capacités de perception et d'action qu'il faut pouvoir spécifier proprement dans un modèle.

Cette impression est renforcée par l'ambiguïté du statut conceptuel de nombreux agents dans les exemples. Prenons par exemple le cas des agents mares et ravines dans

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

RIVAGE. Conceptuellement, ce sont des agents dotés de leurs propres mécanismes et déclarés comme tels dans le modèle, mais aussi, simultanément, des environnements imbriqués dans l'environnement global et définissant des contraintes spécifiques (de vitesse, de position) applicables aux agents paquets d'eau qui les ont créés. Cette double filiation est contradictoire avec les termes du méta-modèle de l'Introduction, qui introduit une séparation claire entre agents et environnement. Elle est résolue dans RIVAGE au niveau du modèle opérationnel et de l'implémentation, en faisant purement et simplement « disparaître » les agents paquets d'eau capturés par les mares ou les ravines et en donnant à ces dernières la possibilité de « créer » des agents paquets d'eau à leur exutoire, afin de les reverser dans l'environnement global. Mais de telles pratiques sont-elles toujours réalisables ? Comment gérer la contradiction si ce modèle représentait des agents doués d'autonomie capables de « décider » de quitter de leur propre chef ces « super-agents » ? (que l'on songe simplement à la modélisation d'une foule d'individus dans laquelle se forment des attroupements ou des files d'attente douées, pour le modélisateur, de leurs propres caractéristiques).

Une solution est de considérer qu'un environnement n'est ni plus ni moins qu'une sorte d'agent, pourvu comme tout agent de comportements (exprimant des lois, des contraintes, ou des dynamiques globales), de mécanismes de décisions, de perception, et éventuellement situé lui-même dans un ou plusieurs environnements. Cela règle la contradiction au niveau conceptuel, permet de prendre en compte simultanément la définition de plusieurs environnements et celle de leurs éventuelles interactions, et apporte également des perspectives au niveau opérationnel, en offrant un cadre pour une définition plus précise du (ou des) environnement(s) considéré(s) dans le modèle.

5.4 SYNTHÈSE - LACUNES DU MÉTA-MODÈLE

Au travers de l'analyse des points communs et des différences entre les exemples des chapitres 1 à 4, nous avons appris, à vrai dire sans surprises, que la modélisation à base d'agents semble pouvoir s'appliquer à tous les domaines d'application. Cette versatilité est la conséquence, positive, de la généricité du méta-modèle présenté en Introduction. Cependant, une autre conséquence, plus problématique, concerne l'apparent manque de cohérence entre les différents modèles et, au sein de chacun, le flou de certaines définitions (qui n'est souvent levé qu'au moment de l'implémentation sur un simulateur). L'un des aspects les plus emblématiques de cette conséquence (et ce pourquoi nous y avons consacré tant de pages) se trouve dans la représentation de l'environnement : peu ou mal documenté dans les modèles, il finit par ressembler, d'exemple en exemple, à un fourre-tout un peu hétéroclite dans lequel sont pourtant inscrites des dynamiques indispensables à la réalisation des simulations. L'absence d'une définition précise de ce concept est alors susceptible de jeter un doute sur toute la démarche : d'une part, elle ne permet pas de juger de son influence réelle sur les résultats de la simulation, car la dynamique de l'environnement est souvent

« enfouie » dans le code du modèle opérationnel ; d'autre part, elle compromet son éventuelle réutilisation dans d'autres modèles.

Historiquement, cette absence de formalisme contraignant a sans doute favorisé l'adoption des modèles à base d'agents dans des domaines rétifs à l'approche par simulation, comme par exemple la sociologie ou l'éthologie. Mais l'environnement n'est qu'un exemple parmi d'autres d'aspects qui, lorsqu'ils ne sont pas clarifiés dès le départ, peuvent rendre très délicates la compréhension et la comparaison de ces modèles. Et ces deux exercices sont cruciaux pour une approche maintenant arrivée à une certaine maturité.

Si nous reprenons en effet le méta-modèle de l'Introduction et le traduisons en UML, nous obtenons la figure 5.1. Il est composé de deux classes principales, Agent et Environnement, ainsi que classes annexes qui, quand elles sont définies, spécifient les rapports (Action, Interaction, Communication, Perception) que leurs instances pourront entreprendre.

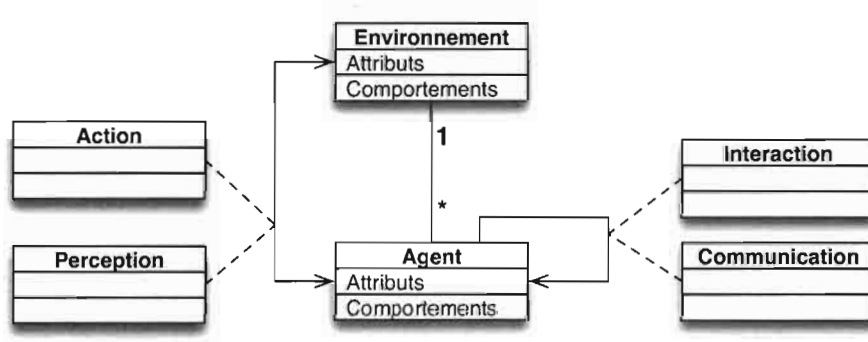


Figure 5.1 Méta-modèle à base d'agents traduit en UML.

À la lumière des exemples et de la synthèse que nous en avons faite, il est facile de voir les lacunes de ce méta-modèle :

- Il n'offre pas de support pour la représentation, dans les modèles, de la diversité structurelle et comportementale des types d'agents employés, pourtant essentielle dans de nombreux travaux.
- Il ne fournit aucune distinction entre *comportement* et *mécanismes de décision.*
- Il ne permet pas facilement de décrire des agents possédant des comportements individualisés.
- Il ne fournit aucun guide pour décrire la structure de l'environnement qui est libre (comme l'est, d'ailleurs, celle des agents).
- Il n'offre pas la possibilité de décrire des modèles comprenant plusieurs environnements, ni au niveau structurel, ni au niveau de leurs inter-relations.
- Il n'offre pas non plus, conséquemment, de repères pour permettre à des agents de gérer plusieurs environnements simultanément.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

a) Un exemple de synthèse

Comme on a pu le constater à la lecture des exemples, ces lacunes n'empêchent évidemment pas les modélisateurs de construire des modèles possédant certaines de ces propriétés. Cependant, ces développements sont soit spécifiques au domaine de modélisation, soit extrêmement liés à une implémentation particulière, ce qui rend problématique leur réutilisabilité ultérieure ou leur comparaison. Il est donc temps pour nous de proposer des enrichissements à ce méta-modèle, ou tout au moins d'en gommer les principales lacunes, afin de donner au lecteur une image plus précise de ce sur quoi repose réellement la modélisation à base d'agents, et afin d'aborder plus sereinement, au chapitre suivant, la question de l'implémentation des modèles qui en sont issus. Dans la définition qui suit, nous avons opté pour l'usage d'un vocabulaire très métaphorique, et privilégié une présentation qui tente de conserver le caractère intuitif de la définition précédente.

Modèle à base d'agents (deuxième définition). Un modèle à base d'agents est un *monde* composé d'*agents* (spécifiés par différentes *espèces*) évoluant sur les *places* d'un ou plusieurs *environnements*.

Le *monde*, les *environnements* et leurs *places* sont des agents.

Tout agent peut être doté d'un *corps*, d'*attributs*, d'un mécanisme de *contrôle* et d'un ensemble de *comportements*. Les environnements possèdent en plus un ensemble de *places* qui peuvent contenir les corps d'autres agents et définissent les relations topologiques entre ces places.

L'ensemble des valeurs des attributs d'un agent et de ses composants à un instant donné constitue l'*état* de cet agent. Le *corps* d'un agent rend visible aux places sur lesquelles il est situé un sous-ensemble de cet état (appelé *état observable*). Les capacités de *perception* des corps des agents permettent à ces derniers de consulter les états observables des agents avec lesquels ils sont en relation via les *places* qui les contiennent.

Les *comportements* sont des règles, sélectionnées par le mécanisme de *contrôle*, qui régissent à chaque instant l'évolution de l'état de l'agent, ainsi que les états et l'existence des agents impliqués dans les *actions, communications* ou *interactions* décrites dans les comportements et effectuées par le *corps*.

Traduite en UML, cette définition donne la proposition suivante (fig. 5.2).

Une définition un peu plus précise des concepts définis dans ce méta-modèle, et de la raison pour laquelle ils sont introduits est fournie ici :

- *Monde* : il s'agit d'un agent « global », qui a la connaissance de tous les agents (et donc de tous les environnements), et dont le rôle (quand il existe) est de maintenir la cohérence de l'ensemble. C'est en particulier l'entité qui est chargée de la création et de la suppression des autres agents.

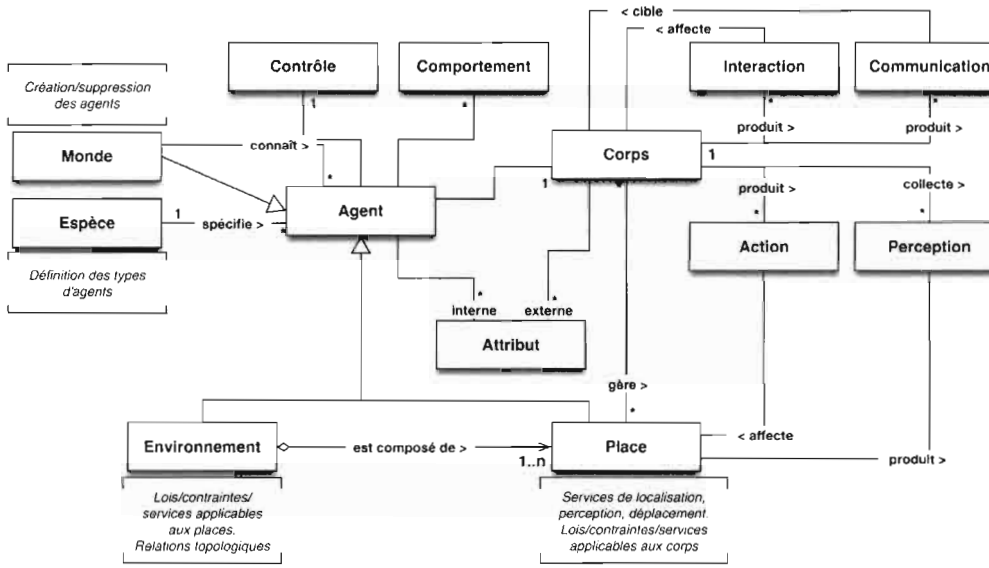


Figure 5.2 Schéma UML d'un exemple de méta-modèle générique à base d'agents.

- *Espèce* : l'introduction de ce concept permet d'inciter le modélisateur à spécifier ou à documenter, sous quelque forme que ce soit, la diversité structurelle et comportementale des agents qui composeront le système. Son rôle est d'imposer une structure particulière aux agents dont elle est le prototype (par exemple, un mécanisme de contrôle, un répertoire comportemental précis, une liste d'attributs, etc.).
- *Agent* : dans cette proposition de méta-modèle, l'agent est une entité qui sert surtout à mettre en relation un mécanisme de contrôle, des attributs, des comportements, et un corps. L'idée sous-jacente à cet « éclatement » de l'agent est d'inciter le modélisateur à porter son effort de modélisation sur ces différents composants plutôt que sur un agent « monolithique » et souvent un peu fourre-tout.
- *Contrôle* : c'est la partie de l'agent (éventuellement partagée par d'autres) qui est chargée de sélectionner les comportements à effectuer en fonction du contexte. Ce contexte est composé des attributs de l'agent, mais également de son corps (provenant des perceptions).
- *Comportement* : chaque comportement est censé décrire un ensemble organisé d'actions, d'interactions ou de communications, qui seront effectuées par le corps, et qui pourront donner lieu à une sélection de la part du contrôle.
- *Corps* : ce concept (inspiré en partie de la robotique) représente la façon dont le modèle envisage l'interface entre un agent et son (ses) environnement(s). Le corps a trois rôles : le premier concerne la définition des actions et perceptions dont sont capables les agents ; le second, la gestion et la synchronisation des places avec lesquelles il est en relation (par exemple, si l'agent se déplace, dans quels autres environnements doit-il aussi se déplacer ?) ; le troisième, enfin, la définition de ce qui sera observable par les autres corps.

- *Environnement* : il peut y en avoir plusieurs dans un modèle. Ce sont des agents : Ils peuvent donc être dotés de comportements, de mécanismes de décision, d'attributs, comme n'importe quel autre agent, de même que de capacités d'interactions ou de communication avec les autres environnements. Leur rôle sera habituellement de décrire des lois ou des contraintes globales s'appliquant à leurs places et aux corps (d'agents) qui s'y trouvent, ainsi que de décrire et de maintenir l'organisation topologique (relations de distances, de voisinage, etc.) de ces places.
- *Place* : ce type d'agent représente une « portion » d'environnement qui est capable d'accueillir et d'interagir avec des corps d'agents. Une place est d'abord censée pouvoir fournir des services aux corps, comme la perception, la recherche d'informations dans son voisinage (si cela a un sens pour elle), ou le déplacement sur une autre place. Elle peut également jouer un rôle de filtre sur les actions souhaitées par les agents, en les autorisant ou en les altérant en fonction de contraintes qui lui sont propres (ou qui sont propres à son environnement).
- *Action, Interaction, Communication et Perception* : ces concepts matérialisent les échanges (via le Corps) entre un agent et son « extérieur » : des places ou d'autres corps avec lesquels son corps est en relation. Ces objets peuvent également être manipulés ou consultés par les autres composants de l'agent : le contrôle peut ainsi avoir besoin de consulter les perceptions, le comportement de pouvoir constituer une palette d'actions possible. Ils ne sont, volontairement, pas trop détaillés dans le méta-modèle, car ce découpage en quatre classes distinctes n'est pas forcément adapté à toutes les modélisations du comportement. Posons qu'ils sont là à titre informatif, afin d'inciter le modélisateur à documenter sérieusement l'aspect dynamique de son modèle.

Il convient de garder à l'esprit que ce méta-modèle n'est de toutes façons qu'un exemple. Il a dans notre esprit au sein d'une démarche de modélisation, non pas un caractère prescriptif, mais un rôle indicatif pour la génération de modèles à base d'agents. Ainsi, par exemple, le fait que l'environnement y soit décrit comme une sorte d'agent ne signifie pas qu'il *faut à tout prix doter tous les environnements de comportements* ; l'objectif est plutôt d'inciter le modélisateur à se poser la pertinence de cette question à un moment de son parcours de modélisation, libre ensuite à lui de leur en fournir ou non selon ses besoins de modélisation.

Il en est de même pour ce qui concerne le couple Environnement-Place : son objectif n'est pas d'obliger les modélisateurs à utiliser des environnements discrets, ce que pourrait laisser supposer le découpage entre les deux classes. En réalité, le méta-modèle peut parfaitement s'accommoder de modèles dont l'environnement, continu, ne possède, en tout et pour tout, qu'une seule place sur laquelle se trouvent tous les agents. Cependant, même dans ce cas, il permet de bien séparer, lors de la modélisation, la réflexion sur les lois ou contraintes globales (les « comportements » de l'environnement) de celle sur les mécanismes locaux qui serviront de support aux actions ou perceptions des agents (les « services » des places). Il convient également de noter que pratiquement tous les environnements classiques des modèles à base d'agents (continus, réseaux, grilles, graphes, etc.) peuvent être décrits sous cette forme ce qui

permet d'envisager une réutilisabilité satisfaisante des conceptions antérieures dans différents modèles, tant au niveau conceptuel qu'au niveau opérationnel. Enfin, point important, le fait de considérer les environnements et les places comme des agents offre un support pour décrire des structures hiérarchiques d'environnements emboîtés les uns dans les autres (*via* leurs corps respectifs).

Quant au tryptique Décision/Corps/Comportement, lui non plus n'impose au final aucune architecture particulière aux agents. Il se contente de décomposer les questions à se poser lors de la création d'un modèle, selon un schéma perception-décision-action assez classique. Ce dernier présente le mérite, d'une part, de bien sérier les problèmes à résoudre pour modéliser un agent et, d'autre part, de pouvoir s'appuyer sur des implémentations existantes. Chacun de ces concepts peut d'ailleurs être lui-même décomposé plus finement si nécessaire, de même qu'il peut leur être adjoint, dans un modèle, des capacités spécifiques (par exemple, l'accès à une mémoire, à des possibilités d'adaptation). Dans le schéma de la figure 5.2, Action, Interaction, Communication et Perception sont des exemples de capacités supplémentaires manipulées par ces trois mécanismes (elles sont cependant si communes dans les approches à base d'agents que nous avons choisi de les inclure dans le méta-modèle).

Cet exemple de méta-modèle générique comble donc les lacunes du précédent de façon plutôt satisfaisante :

- Il offre un support, avec le concept *d'espèce*, pour une description des types d'agent existant dans un modèle, y compris les environnements.
- Il fournit une distinction nette entre *comportements* et *mécanismes de décision.*
- Chaque agent peut maintenant bénéficier, dans un modèle, de comportements totalement individualisés (ou, au contraire, des mêmes comportements que ses congénères).
- La structure de l'environnement est plus claire et permet de séparer ce qui relève de l'environnement global (avec sa topologie, sa structure, ses lois) et ce qui est du ressort de l'« environnement de chaque agent » (matérialisé par les places), chargé d'offrir un support et un cadre aux corps des agents.
- *Plusieurs environnements* peuvent coexister dans un même modèle, et leur interrelations peuvent être décrites de la même façon que sont décrites les interactions entre agents.
- Le concept de *corps* offre au modélisateur un moyen d'exprimer comment les agents peuvent évoluer dans plusieurs environnements simultanément et permet également d'exprimer des structures d'environnements hiérarchisées.

De plus, comme on le verra au chapitre suivant, il facilite, avec moins d'incertitude que le précédent, la traduction informatique des concepts qu'il convoque, car ces derniers sont décrits non seulement de façon structurelle, mais aussi par leur rôle ou l'ensemble des services qu'ils sont censés rendre.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

b) Méta-modèle à base d'agents et instanciation des exemples

Reste à voir, maintenant, s'il est possible de réexprimer certains des exemples présentés en utilisant ce méta-modèle, afin de donner au lecteur une vision plus concrète de la façon dont peut s'envisager la création d'un modèle conceptuel (ou d'un modèle de référence) à partir d'un méta-modèle tel que celui-ci. Commençons par MANTA (chapitre 3).

Le modèle de cet exemple s'exprime, comme tous les autres, d'ailleurs, sous la forme de classes qui viendront « hériter » des propriétés du méta-modèle (fig. 5.3). Nous avons choisi, pour être plus clair, de représenter les deux simultanément sur la même figure, le méta-modèle en gris-clair, le modèle en noir. Les relations entre les concepts du méta-modèle sont bien entendu héritées elles aussi par les classes du modèle. Il s'agit là d'une représentation de la structure du modèle et de ses principales entités : la dynamique n'y est pas représentée (elle est équivalente, *a priori*, à celle de l'exemple).

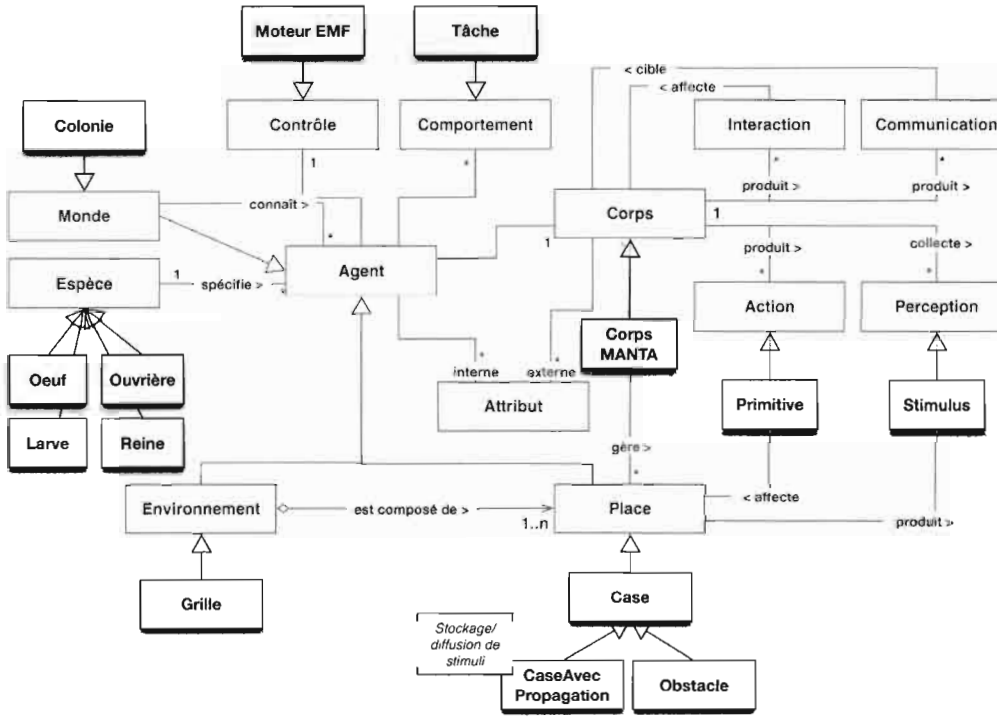


Figure 5.3 Instanciation du méta-modèle dans le cas du modèle de MANTA.

Dans le cas de MANTA, l'instanciation se fait sans réelle difficulté, car il s'agit d'un modèle à la structure très « classique » dans le domaine des agents et donc proche de ce que propose le méta-modèle. Les agents sont des instances de quatre espèces différentes. L'environnement est une grille composée de cases (sous-classes de Place).

L'architecture comportementale définie avec les éthologues se décompose très directement en comportements (les tâches) et mécanismes de décisions (le « moteur » EMF). Le corps des agents est responsable de l'exécution des primitives de comportement, de la transmission et de la collecte des stimuli (auprès des Places). Ces derniers sont simplement une forme de perception, et matérialisent (avec les primitives) les relations dynamiques qui existent entre le corps et les cases. Quant aux contraintes de déplacement, elles sont représentées par une Case particulière (Obstacle), qui refuse toute interaction avec un corps. C'est la grille qui possède le plan de la colonie (et donc initialise la topologie du nid, c'est-à-dire les relations de voisinage entre cases).

RIVAGE (chapitre 1) ajoute *a priori* une difficulté en ce que cet exemple comprend des agents (mares et ravines) qui sont aussi des environnements : ils peuvent « capturer » et « relâcher » des paquets d'eau, et prendre le contrôle de ceux qu'ils ont « capturés ». La figure 5.4 décrit une instanciation possible de ce modèle à partir du nouveau méta-modèle. Mares et ravines sont deux environnements possibles pour les paquets d'eau, aux côtés, bien entendu, de l'espace global dans lequel ils évoluent. Ces trois types d'environnement ne contiennent, chacun, qu'une seule place, qui localise de façon continue les agents paquets d'eau, et qui effectue les calculs nécessaires

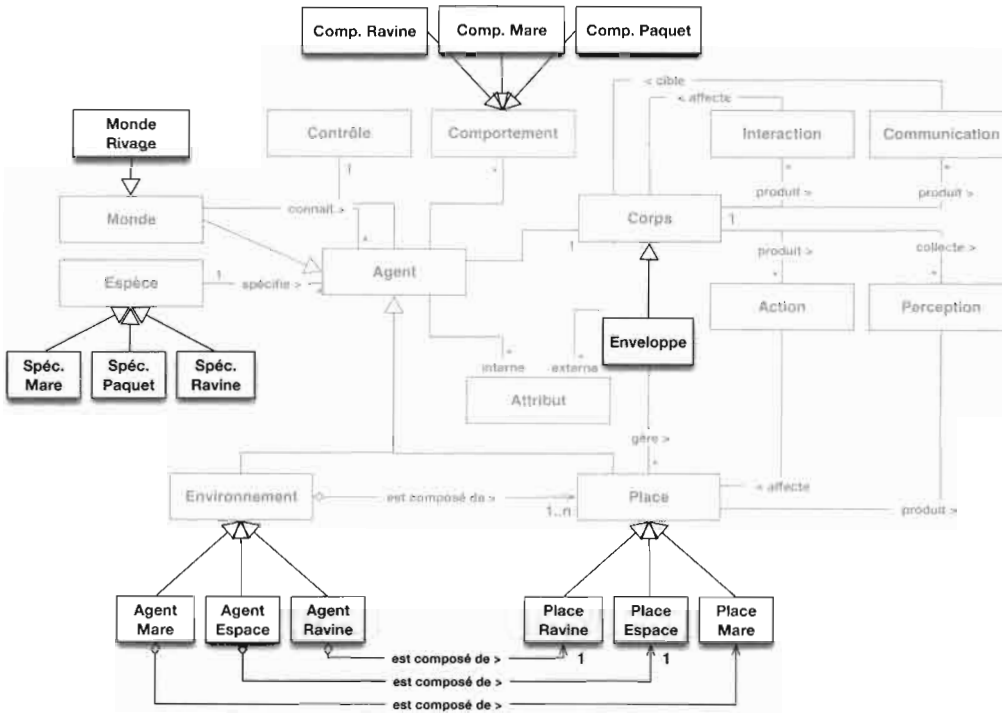


Figure 5.4 Instanciation du méta-modèle dans le cas de RIVAGE.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

(hauteur d'eau en chaque point, proximité à l'exutoire, etc.). Cependant, ce sont aussi des agents : ils seront donc décrits par une « espèce » et posséderont une enveloppe (un corps) et un comportement. Ainsi, un agent mare, qui servira d'environnement à des agents paquets d'eau, aura son propre corps plongé dans l'espace global et ses comportements consisteront à imposer (via la place qu'il définit) des contraintes à « ses » agents paquets d'eau. Dans cet exemple, la partie de contrôle n'est pas utilisée, car les agents appliquent toujours le même comportement (identique entre tous les agents d'une même espèce et suffisamment simple pour qu'il ne soit pas nécessaire, non plus, de représenter explicitement leurs perceptions et actions).

Le dernier exemple que nous avons souhaité instancier de cette façon est SIMPOP (chapitre 4). Son intérêt est qu'il décrit des agents (villes) qui sont localisés simultanément dans un espace géographique et dans des réseaux de villes (générés par certaines de leurs fonctions). Ces deux types d'environnement sont donc représentés, ainsi que les places qu'ils définissent. Le corps des agents villes est ensuite défini comme pouvant être localisé sur une (et une seule) position spatiale et sur plusieurs nœuds (un sur chaque réseau, *a priori*). La gouvernance des villes est partagée entre tous les agents villes, et chaque agent ville peut posséder plusieurs fonctions (qui

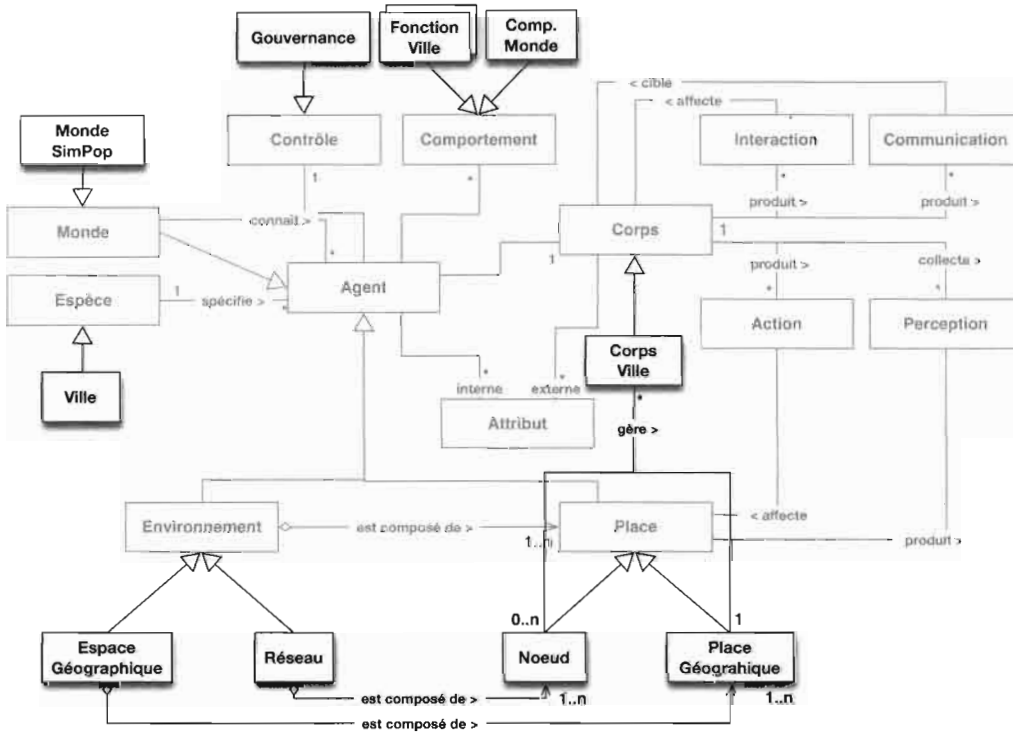


Figure 5.5 Instanciation du méta-modèle dans le cas de SIMPOP.

créeront des réseaux si besoin). Les actions et perceptions utilisées par ces fonctions ne sont pas décrites sur le schéma pour ne pas l'alourdir. Enfin, l'agent monde est doté d'un comportement spécifique (gestion des événements historiques et introduction de nouvelles fonctions dans les agents villes).

Comme on peut le constater, et uniquement, dans ce chapitre, d'un point de vue structurel, définir un méta-modèle un peu plus précis permet de retrouver une certaine unité entre les modèles à base d'agents et de se rendre compte qu'au-delà de la diversité des domaines qu'ils abordent, il est possible de définir une structure conceptuelle commune. Il nous reste maintenant à voir de quelle façon une démarche de modélisation qui s'appuierait sur cette structure peut se traduire en termes informatiques et si cette unité conceptuelle peut être maintenue au niveau opérationnel. C'est là l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 6

Réalisation informatique des simulations à base d'agents

6.1 INTRODUCTION

L'objectif de ce chapitre est d'explorer quelques-unes des spécificités du passage entre le modèle conceptuel (construit à partir du méta-modèle du chapitre précédent) et le modèle opérationnel, qui permettra à un simulateur d'exécuter le modèle. Nous nous appuierons, d'une part, sur les exemples présentés dans la Partie 1 pour voir de quelle façon leurs concepteurs ont résolu les problèmes de gestion du temps et d'ordonnancement, et, d'autre part, sur les outils existants de programmation dédiés à la simulation à base d'agents et sur leurs qualités et défauts respectifs.

6.1.1 Gestion du temps

Le méta-modèle présenté au chapitre 5 est statique, c'est-à-dire qu'il présente l'organisation des concepts permettant de réaliser une modélisation à base d'agents d'un système de référence, mais il n'aborde pas l'aspect dynamique des modèles ainsi obtenus. Cet aspect est pourtant indispensable à modéliser : les exemples présentés dans la Partie 1 seraient difficiles à comprendre si leur comportement dynamique n'était pas mentionné. De plus, comme nous l'avons précisé dans l'Introduction, la simulation est « (...) l'activité au cours de laquelle, selon un protocole et avec un objectif précis, on utilise un simulateur pour faire évoluer les entrées d'un modèle dynamique, l'exécuter, et en recueillir les sorties. ». L'évolution des entrées, de même que l'évolution endogène du modèle, se traduira par des changements d'états (microscopiques ou macroscopiques) des entités présentes dans le modèle et la finalité du simulateur sera donc de reproduire ces changements d'états à des instants précis de la façon la plus cohérente possible avec la dynamique décrite, même informellement, dans le modèle conceptuel ou dans le modèle de référence (Meurisse 2004). La nature

des changements d'états ainsi que leurs dates d'occurrences doivent donc être spécifiées dans le modèle opérationnel afin d'être exploitées par le simulateur sur lequel il s'exécutera. Les choix relatifs à la gestion du temps au sein des outils de simulation sont donc cruciaux, car ils déterminent (au moins partiellement) la cohérence entre le modèle de référence et le modèle opérationnel.

Par la nature même de la définition du temps, nous savons que modéliser le concept de temporalité est un problème difficile. Il existe aujourd'hui deux grandes techniques de gestion du temps dans une simulation : celles qui sont dirigées par les événements et celles qui sont dirigées par une horloge. Ces dernières proposent de discrétiser le temps, c'est-à-dire de le segmenter en un ensemble de pas de temps de même durée. Les changements d'états ne s'opèrent que lors du passage d'une date à une autre. Nous pouvons dire que le temps est indépendant de l'entité : lors de la transition d'une date à une autre de ce *temps discret*, il faut « réveiller » toutes les entités afin de procéder aux changements d'états spécifiés. Par opposition, dans une simulation avec une gestion du temps orientée par les événements, le système propose un échéancier commun, sur un *temps* pouvant être conceptuellement *continu,* dans lequel les entités peuvent inscrire la date à laquelle leurs changements d'états surviendront. Le temps va donc progresser d'une date d'occurrence d'événement à une autre. Cette approche permet de générer des simulations dans lesquelles l'espacement des dates d'occurrence des événements peut être très inégal. Par exemple, dans le cas de longues périodes d'inactivité, le simulateur passe directement au prochain événement sans s'attarder à scruter les entités pour savoir si elles nécessitent d'être modifiées ou non.

De nombreuses contributions cherchent à clarifier les avantages et inconvénients des deux approches, mais chacune a ses difficultés propres. Dans une gestion du temps dirigée par une horloge, choisir le « bon » pas de temps est délicat : s'il est trop grand, la gestion d'événements compétitifs peut se révéler très problématique et l'influence d'événements à occurrence rapide peut devenir négligeable ; inversement, s'il est trop petit, cela peut poser des problèmes de modélisation de comportements non forcément découpables en événements exécutables dans ce pas de temps réduit. Dans une approche dirigée par les événements, gérer la simultanéité d'événements est complexe, et il est nécessaire d'expliciter les dépendances entre les différents événements. (Qin and Baer 1995) ont, par exemple, étudié différents aspects : comment les événements simultanés peuvent être traités, l'influence de ce traitement sur les résultats de simulation, les difficultés de modélisation, les performances, etc.

De manière générale, il est difficile de prétendre que l'une des approches est meilleure que l'autre. Cependant, selon (Galler and University of Canberra National Centre for Social and Economic 1997), dans une simulation dans laquelle les dépendances entre entités sont fortes (ce qui est le cas de la plupart des modèles à base d'agents), il vaut mieux utiliser une approche à temps discret qui simplifie considérablement le développement de simulations, ainsi que la compréhension, par les modélisateurs, de son déroulement, tout en prenant garde de spécifier la granularité de temps la plus fine possible. Si l'on passe en revue les choix réalisés par

les concepteurs des exemples, on s'aperçoit d'ailleurs qu'ils ont tous choisi cette solution, la finesse de la granularité (c'est-à-dire la durée du pas de temps) dépendant alors du système de référence modélisé : elle est par exemple d'une année dans SIMPOP, d'un mois dans SELFCORMAS et dans CUBES, de deux jours dans SIMANCHOIS, de quelques minutes dans BIOFILMS, d'une minute dans DAMASRESCUE, et d'un dixième de seconde dans RIVAGE et ARCHISIM. Elle peut aussi être atemporelle, en ce sens qu'elle correspond à la durée (elle-même non forcément spécifiée) d'un événement ou d'un comportement interne au modèle. C'est le cas dans GRANULAB, où le pas de temps n'est pas précisément mesuré, mais correspond au temps de résolution, par un grain, de ses interactions avec ses voisins, dans MANTA, où l'unité temporelle correspond au temps moyen de déplacement d'un agent-fourmi d'une case à une autre (elle est alors liée à la résolution spatiale employée), et dans DOMWORLD, où elle est calée sur un intervalle permettant 20 interactions par individu.

Fixer ainsi la temporalité de la simulation (durée du pas de temps, puis nombre maximal de pas de temps séquentiels) permet d'obtenir un cadre satisfaisant la plupart des besoins des modèles. Il est à noter, cependant, que nous ne traitons pas ici des simulations distribuées physiquement (par exemple sur un réseau de machines), dans lesquelles l'horloge utilisée n'est pas forcément unique. Si celles-ci ne remettent pas en cause, généralement, l'échelle de temps utilisée dans le modèle, elles induisent des contraintes particulières sur les spécifications du modèle de référence, puisqu'il faut alors traiter explicitement de la synchronisation de ces différentes horloges (ou de la synchronisation des agents entre eux).

6.1.2 Ordonnancement des agents

Dans les modèles à base d'agents, à chacune des entités composant la simulation est associé un ensemble de comportements. Par exemple, dans le cas de MANTA, les comportements élémentaires associés aux agents fourmis incluent l'évaluation de leurs besoins, se déplacer, se nourrir, émettre et capter des phéromones, etc. Il est également possible de définir des comportements plus complexes, qui sont représentés par l'association de comportements élémentaires (par exemple la recherche de nourriture peut se faire par une séquence de perception des phéromones, de déplacement, puis d'émission d'autres phéromones). Du point de vue opérationnel, le modélisateur implémente ces comportements, en y associant les contraintes de temporalité de la simulation (choix temps discret/continu), comme un ensemble de changements d'états et/ou d'interactions entre entités dans le cas des comportements élémentaires, et d'une composition de comportements dans le cas de comportements plus complexes.

Se pose alors un premier problème, celui de l'ordonnancement des agents, c'est-à-dire le choix de l'ordre dans lequel ils sont activés. C'est un problème qui n'apparaît pas dans le système de référence et auquel, donc, les modélisateurs ne prêtent guère attention, mais qui peut avoir des conséquences profondes sur les résultats que fourniront les simulations. En effet, dans le système de référence, sauf cas particulier, les entités (qui seront modélisées plus tard sous la forme d'agents) fonctionnent en

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

parallèle et n'ont nul besoin d'être « exécutées » par un quelconque mécanisme pour dérouler leur comportement. Il n'en va évidemment pas de même dans le modèle opérationnel, où ces agents se retrouveront sous la forme d'une liste ou d'un vecteur, qu'il faudra que le simulateur parcoure pour les activer à tour de rôle.

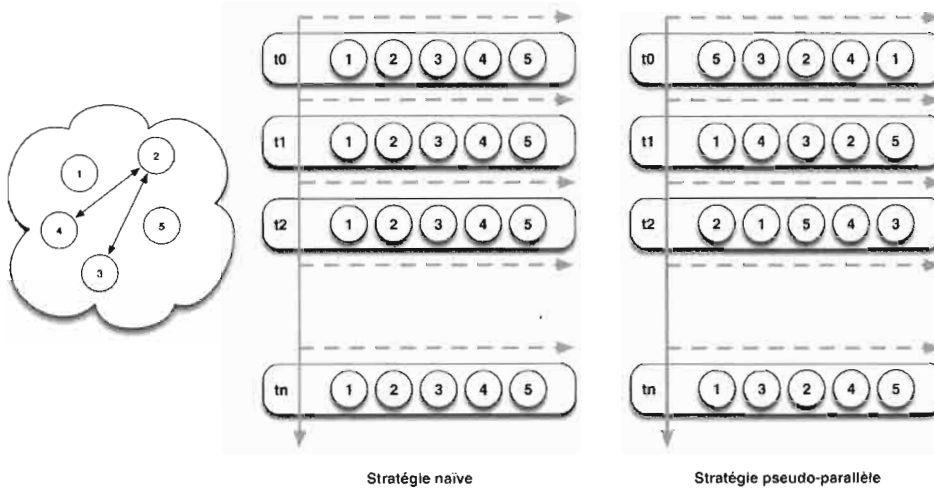


Figure 6.1 Stratégies d'ordonnancement (d'après (Meurisse 2004)).

Soit donc une simulation contenant n agents. Une solution naïve d'implémentation, à supposer que l'ensemble des agents soit stocké dans un vecteur, est de parcourir la liste des agents et de les activer successivement (fig. 6.1). L'algorithme est on ne peut plus simple (par exemple en Java, une boucle sur l'ensemble des pas de temps, qui appelle à son tour une boucle sur l'ensemble des agents) :

```
for (int i=0; i < tempsMaximum; i += pasDeTemps)
    {for (Agent a~: listeAgents) {a.executer();}
}
```

Cette solution est correcte du point de vue de la fonctionnalité (tous les agents sont activés à chaque pas de temps) mais difficilement acceptable en termes de validation si le modèle suppose une certaine équité entre les différents agents. Dans notre cas, l'ordre dans lequel les agents s'exécutent est toujours le même : le premier agent s'exécutera toujours avant le deuxième, qui s'exécutera toujours avant le troisième, etc. Ce déterminisme dans l'ordre d'exécution a de grandes chances de produire ce que l'on appelle un **artefact de simulation** : un phénomène indésirable, non décrit dans le modèle mais néanmoins produit par le simulateur. Par exemple, la simulation d'un modèle dans lequel des agents se répartissent des ressources limitées générerait immanquablement un ordre implicite qui favoriserait les premiers agents de la liste au détriment des derniers. Pour éviter ce type d'artefact, une solution est de choisir

l'agent à exécuter selon un tirage aléatoire dans la liste, ou bien de mélanger la liste des agents à chaque pas de temps. Dans ce dernier cas, le code serait alors :

```
for (int i=0; i < tempsMaximum; i += pasDeTemps)
    {for (Agent a~: listeAgents) {a.executer();}
    listeAgents.mélangerAléatoirement();
}
```

Dans cette solution, l'ordre d'exécution des agents change à chaque pas de temps, ce qui, au bout d'un certain nombre d'itérations, finit par effacer l'aspect « séquentiel » de l'exécution au profit de ce que l'on pourrait appeler un pseudo-parallélisme acceptable (surtout si le pas de temps est fin). Il est aussi possible d'utiliser une solution à peu près équivalente sans la programmer explicitement, en passant par les mécanismes de *threads* des langages comme Java. Dans cette solution, chaque agent est un processus qui possède sa propre boucle (il n'y a plus de boucle globale) et l'exécute en continu. C'est le système d'exploitation (ou la machine virtuelle) qui donne la main à chacun de ces processus et lui permet d'exécuter une partie de son code. L'intérêt de « laisser la main » à la machine est que sa gestion est souvent plus efficace. Les deux principaux inconvénients sont, d'une part, une plus grande difficulté de déverminage, et d'autre part la nécessité de gérer les accès concurrents aux ressources (si un agent essaye par exemple de modifier une ressource qu'un autre agent est déjà en train de modifier).

Le choix d'une stratégie d'ordonnancement, qui n'apparaît réellement qu'au moment de construire ou de choisir le simulateur, peut donc avoir une influence non négligeable sur les résultats de la simulation (et, partant, sur la validation ou non du modèle conceptuel). Il n'est cependant pas le seul.

6.1.3 Ordonnancement des actions

Tant que les agents, à chaque pas de temps, ne peuvent exécuter qu'un seul comportement élémentaire à la fois (ce qui est par exemple le cas dans MANTA ou dans ARCHISIM), on observe une filiation presque directe entre le modèle conceptuel et le modèle opérationnel. Mais que se passe-t-il quand, au cours d'un pas de temps de la simulation, chaque agent peut effectuer plusieurs comportements à la suite ?

Nous avons vu dans la section précédente que l'ordre d'activation des différents agents composant une simulation pouvait être facilement rendu non déterministe, garantissant ainsi une forme de pseudo-parallélisme. Toutefois, cette technique peut ne pas se révéler suffisante pour garantir l'équité de traitement entre agents lorsqu'ils sont susceptibles d'exécuter plusieurs comportements au cours du même pas de temps, et que le modèle conceptuel ne précisait pas d'ordre particulier entre eux. Des problèmes peuvent en particulier se poser lorsque leurs comportements ne sont pas indépendants et peuvent influer les uns sur les autres. Prenons un cas simple (tiré de (Meurisse and Vanbergue 2001)) où trois agents disposant des mêmes comportements c_1, c_2 et c_3 sont exécutés par le simulateur et que le modèle conceptuel ne précise aucune séquence particulière entre ces trois comportements (il se contente par

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

exemple de décrire qu'un agent, lors d'un pas de temps, peut se déplacer, consommer une ressource et se reproduire, mais sans détailler l'ordre dans lequel il doit le faire). Dans le cas où une stratégie d'ordonnancement naïve est adoptée, nous obtiendrons la trace d'exécution suivante :

$$\underbrace{c_1^1 \rightarrow c_2^1 \rightarrow c_3^1}_{agent\ 1} \rightarrow \underbrace{c_1^2 \rightarrow c_2^2 \rightarrow c_3^2}_{agent\ 2} \rightarrow \underbrace{c_1^3 \rightarrow c_2^3 \rightarrow c_3^3}_{agent\ 3}$$

Si une stratégie pseudo-parallèle est utilisée, elle peut générer la trace suivante :

$$\underbrace{c_1^2 \rightarrow c_2^2 \rightarrow c_3^2}_{agent\ 2} \rightarrow \underbrace{c_1^3 \rightarrow c_2^3 \rightarrow c_3^3}_{agent\ 3} \rightarrow \underbrace{c_1^1 \rightarrow c_2^1 \rightarrow c_3^1}_{agent\ 1}$$

Dans l'un et l'autre, cependant, l'ordre d'exécution de c_1, c_2 et c_3 est immuable au sein de chaque agent. Maintenant, si le simulateur applique le même raisonnement que précédemment, mais cette fois sur les comportements internes à un agent (i.e. en introduisant de l'aléatoire lors du choix d'activation d'un comportement), il devient possible d'obtenir la trace suivante :

$$\underbrace{c_2^2 \rightarrow c_1^2 \rightarrow c_3^2}_{agent\ 2} \rightarrow \underbrace{c_1^3 \rightarrow c_3^3 \rightarrow c_2^3}_{agent\ 3} \rightarrow \underbrace{c_3^1 \rightarrow c_1^1 \rightarrow c_2^1}_{agent\ 1}$$

Ces modifications, qui semblent anodines, peuvent avoir des répercussions considérables sur les résultats obtenus en fin de simulation. Meurisse a par exemple montré dans le cas de SUGARSCAPE ((Meurisse 2004)) que, quand le modèle conceptuel ne précisait pas de séquence particulière, une modification de l'ordre d'exécution de ces comportements lors des simulations pouvait entraîner des résultats différents, ce qui veut dire que le modèle conceptuel pouvait se voir validé ou invalidé, non pas à cause de sa structure propre, mais à cause de la stratégie d'ordonnancement inter ou intra-agent choisie par le simulateur.

En conclusion, il est important de souligner que le passage du modèle conceptuel au modèle opérationnel (et à son exécution par un simulateur) n'est absolument pas automatique et nécessite de prêter attention à des notions qui relèvent plus de l'informatique que de la modélisation à base d'agents. Il n'existe pas de solution toute faite qui permette de garantir que l'interprétation d'un modèle opérationnel par un simulateur exécute bien le « même modèle » que celui décrit dans le modèle de référence et dans le modèle conceptuel. Les choix concernant la gestion du temps, l'ordonnancement inter-agents et le contrôle intra-agent doivent être explicités dans le modèle opérationnel (ou dans le modèle conceptuel) et leurs alternatives doivent pouvoir être explorées dans le cadre de l'activité de modélisation afin de se garantir contre l'apparition d'artefacts susceptibles d'induire des interprétations fausses du modèle. Ceci suppose, entre autres choses, que les outils de développement utilisés le permettent.

6.2 L'IMPLÉMENTATION

6.2.1 Programmation spécifique ou plate-forme générique ?

Lors du démarrage d'un projet de modélisation à base d'agents, il peut être tentant de vouloir construire dans la foulée son propre simulateur, en osmose la plus parfaite possible avec le modèle et offrant, en théorie, un contrôle plus fin de son ancrage informatique. Parmi les exemples présentés, plus de la moitié a choisi cette voie : RIVAGE, GRANULAB, SIMANCHOIS, MANTA, DOMWORLD, et ARCHISIM. Les autres se sont appuyés sur des outils existants, comme Swarm pour CUBES et SIMPOP, Cormas pour SELFCORMAS et BIOFILMS, et Robocup Rescue pour DAMASRESCUE. Cependant, si l'on regarde les circonstances qui ont présidé aux choix des concepteurs des exemples de la première liste, elles se classent en trois catégories : (1) pas de plate-forme disponible : MANTA, DOMWORLD et ARCHISIM ont été conçus à une époque, le début des années 1990, où aucune plate-forme de simulation à base d'agents n'était réellement disponible ; (2) volonté de proposer une plate-forme : MANTA, ARCHISIM, GRANULAB ont servi de modèle « de référence » au développement d'un simulateur qui ambitionnait de devenir lui-même une plate-forme plus générique ; (3) performances : RIVAGE, de par le nombre d'agents qu'il manipule, n'a pas pu être développé sur les plates-formes existantes. Seul dans la liste, donc, SIMANCHOIS semble avoir été développé indépendamment de toute plate-forme sans raison particulière. À l'heure actuelle, maintenant que de nombreux outils ont été suffisamment testés et améliorés, tout plaide en effet pour l'utilisation d'une plate-forme parmi celles qui sont disponibles, souvent de façon gratuite et open source, plutôt que pour des développements indépendants.

La première raison, et sans doute la plus importante du point de vue de la logique de modélisation, réside dans le fait que, si le simulateur existe déjà, le modèle opérationnel sera bien une traduction du modèle conceptuel dans le « langage » (en terme de méta-modèle imposé) de la plate-forme. Il restera donc un modèle et ne sera pas un objet hybride à mi-chemin entre modèle et simulateur, comme cela arrive souvent dans le cas contraire. En particulier, les contraintes liées au passage à l'implémentation, comme celles que nous avons listées plus haut, seront alors explicites, ce qui permettra, du même coup, de pouvoir les isoler ou de les faire varier facilement lors des tests de validation des simulations.

La deuxième raison tient au fait que si chaque modèle est unique, ils partagent néanmoins tous (sauf cas particulier) de nombreuses composantes de leur méta-modèle commun qui peuvent être décrites et implémentées de façon générique et réutilisées par chacun au prix d'un minimum d'efforts (et avec la certitude, de plus, que ces composantes auront été vérifiées dans d'autres réalisations, ce qui peut éliminer beaucoup de causes d'erreurs lors de l'implémentation). Ainsi, par exemple, si l'on considère les différents types d'environnements manipulés dans les modèles à base d'agents, on s'aperçoit qu'ils sont en nombre fini : des grilles, carrées ou hexagonales, des environnements continus, en deux ou trois dimensions, et des graphes. Si ces types d'environnements sont déjà développés et offrent suffisamment

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

de paramétrages pour être facilement adaptables à de nouveaux modèles conceptuels (par exemple en terme de taille, de topologie, de services), il n'y a aucune raison de ne pas les adopter.

La troisième raison tient à tous les services « périphériques » que peut proposer une plate-forme, et qui constitueront à terme l'environnement d'expérimentation du modèle. Pour explorer sa dynamique, il peut être en effet nécessaire de pouvoir réaliser du traitement par lot (lancement parallèle ou en séquence de séries de simulations avec des paramètres différents), de disposer d'outils d'analyse statistique, ou bien d'outils de visualisation qui permettent d'obtenir en temps réel différents points de vue sur son exécution : interface graphique de suivi du « monde virtuel » dans son intégralité, sondes permettant de tracer l'exécution de certains agents, graphes suivant l'évolution de certaines variables clefs, voire possibilités pour l'utilisateur d'intervenir directement dans le déroulement de la simulation en modifiant certaines caractéristiques des agents ou de l'environnement. Il est rare, en sciences expérimentales, que l'on reconstruise un laboratoire entier pour chaque nouvelle expérience et il en va de même pour la simulation (même si les équipements expérimentaux, dans ce cas, sont virtuels).

La quatrième raison est qu'une plate-forme sur laquelle de nombreux modèles ont déjà été développés constitue une source d'inspiration appréciable pour des modélisateurs qui ne seraient pas informaticiens de formation. Pouvoir réutiliser des mécanismes mis en place dans des modèles précédents offre beaucoup d'avantages pratiques, et permet aussi, parfois, de faire d'heureuses rencontres scientifiques (quand des mécanismes similaires apparaissent dans des modèles appliqués à des domaines scientifiques différents, par exemple).

Enfin, la cinquième et dernière raison est que l'implémentation d'un simulateur et l'implémentation d'un modèle opérationnel requièrent des compétences différentes en informatique. Dans ce domaine où les techniques de base changent relativement vite, maintenir un simulateur (surtout s'il propose des outils comme ceux que nous avons passé en revue) peut rapidement devenir une activité à part entière, et il n'est pas certain que cela soit du goût ou à la portée de tous les modélisateurs. Inversement, quand un simulateur est proposé en tant que plate-forme, ses concepteurs s'engagent implicitement à le faire évoluer de telle manière qu'il épousera les évolutions technologiques de l'informatique tout en maintenant un « environnement interne » qui restera compatible avec les modèles déjà développés.

Tous ces points plaident clairement en faveur de l'utilisation d'une plate-forme existante quand cela est possible. Encore faut-il, bien entendu, qu'elle soit correctement choisie, ce qui n'est pas toujours évident à faire. Au-delà des besoins spécifiques que peut nécessiter un modèle, voici les caractéristiques à prendre en compte pour choisir une plate-forme :

- Existence d'un méta-modèle (ou d'un cadre abstrait) suffisamment documenté (de façon à pouvoir en hériter), et mise à disposition de bibliothèques d'objets réutilisables (comme les environnements, par exemple) s'appuyant sur ce méta-modèle.

- Mise à disposition d'une gamme suffisante d'outils « périphériques », comme les outils d'expérimentation et de visualisation mentionnés ci-dessus. La lecture et l'écriture dans des bases de données peuvent faire partie de ce type d'outils.
- Existence d'une communauté suffisamment nombreuse de modélisateurs (ou développement d'un nombre suffisamment important de modèles couvrant différents domaines scientifiques).
- Assurances que le développement de la plate-forme n'est pas le fait d'un seul individu, et qu'il existe une équipe, voire d'une institution ou d'une entreprise.

Cette liste n'est bien sûr pas exhaustive, car le choix de la plate-forme peut dépendre de beaucoup d'autres considérations contextuelles (existence de personnes-ressources dans l'entourage des modélisateurs, etc.), mais elle représente néanmoins une sorte d'ensemble minimal des critères que doit remplir une plate-forme pour pouvoir être considérée comme digne d'intérêt.

6.2.2 Panorama des principales plates-formes

La liste des plates-formes de simulation à base d'agents disponibles à l'heure actuelle est à première vue très longue. Selon nos propres estimations, en 2007, une recherche sur Internet faisait apparaître qu'environ 400 simulateurs prétendant pouvoir jouer le rôle de plates-formes étaient à la disposition des modélisateurs ! Cependant, après avoir éliminé ceux qui n'étaient présentés que dans des articles scientifiques (et pas réellement disponibles), ceux qui n'étaient plus maintenus depuis quelques années (mais toujours disponibles sur Internet), ceux qui étaient dédiés à un domaine scientifique très précis (par exemple GRANULAB et MANTA dans notre liste d'exemples), ceux qui ne présentaient pas toutes les garanties nécessaires en termes de développements ultérieurs, et ceux qui n'étaient, en réalité, que des déclinaisons (ou des habillages) d'autres plates-formes, nous sommes retombés sur le chiffre beaucoup plus rassurant de ...5. Ces solutions sont présentées rapidement dans les sections suivantes.

a) NetLogo

La plate-forme NetLogo[1], développée depuis environ dix ans (d'abord sous le nom de StarLogoT, puis depuis cinq ans en Java sous le nom de NetLogo), est l'héritière d'une longue tradition d'outils pédagogiques commencée avec Logo dans les années 1970 (pour l'apprentissage de la programmation et de l'algorithmique), puis StarLogo dans les années 1990 (apprentissage de la programmation parallèle, puis évolution vers les modèles à base d'agents). Son premier objectif est clairement la facilité d'utilisation. Elle inclut un langage de programmation dédié qui permet de manipuler des structures de haut niveau et des primitives qui réduisent considérablement l'effort de programmation demandé aux modélisateurs. Une documentation importante est de plus fournie avec la plate-forme et l'environnement d'expérimentation proposé est un modèle du genre.

1. http://ccl.northwestern.edu/netlogo/

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

NetLogo est particulièrement bien adaptée à un type de modèles en particulier : ceux composés d'agents mobiles qui évoluent en parallèle dans un environnement de type grille en deux dimensions, et dont le comportement est basé sur des interactions courtes. Mais elle n'est pas limitée à ce type de modèles et les dernières versions de la plate-forme permettent de créer des modèles en trois dimensions.

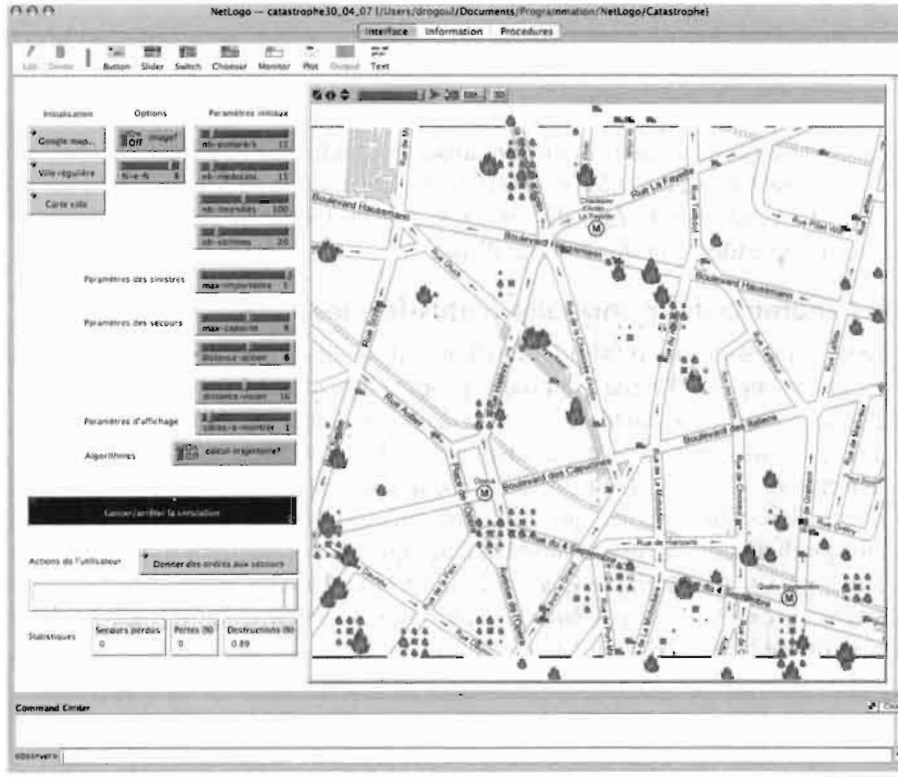


Figure 6.2 Fenêtre principale de NetLogo.

Ces versions proposent par ailleurs, en plus des abstractions standard comme les places et les agents (appelées ici *patch* et *turtle*), celle de « lien » (*link*), offrent un système complet de simulation mathématique, autorisent l'usage de bibliothèques développées dans d'autres langages et s'ouvrent aux simulations par lots (module *BehaviorSpace*) et à la simulation distribuée et participative (module *HubNet*).

NetLogo est structurée autour d'un méta-modèle très simple, qui comprend un *Observer* (l'équivalent d'une fusion du *Monde* et de l'*Environnement*), un ensemble de *Patch* (l'équivalent des *Places*) et de *Turtle* (l'équivalent des *Agents*) spécifiés par des *Breed* (l'équivalent d'*Espèces*).

L'adéquation au méta-modèle présenté au chapitre 5 est donc bonne sans être excellente. En particulier, il est impossible de pouvoir représenter des modèles comprenant plusieurs environnements. De plus, il semble difficile de pouvoir implanter

facilement cette possibilité, car le langage de NetLogo n'est pas un langage orienté objet, ce qui signifie qu'il est impossible (sauf à passer par des extensions en Java) de créer des abstractions réutilisables d'un modèle à l'autre et qu'il n'existe aucune notion d'encapsulation (toutes les données de toutes les entités sont en permanence accessibles par tous). Il s'agit cependant d'une excellente plate-forme de prototypage, qui permet par exemple de tester un modèle (pour peu qu'on en simplifie un peu le modèle conceptuel) en à peine quelques heures de programmation et qui se montre d'une vélocité particulièrement remarquable, y compris avec plusieurs milliers d'agents. Enfin, dernier atout : NetLogo est disponible pour tous les systèmes d'exploitation et les modèles s'exécutent de façon identique dessus.

b) Swarm

Swarm[2], développée depuis le milieu des années 1990 en Objective-C (et, depuis peu, dans une version Java), s'est positionnée dès le début comme un environnement de développement et une boîte à outils générale pour les modèles à base d'agents.

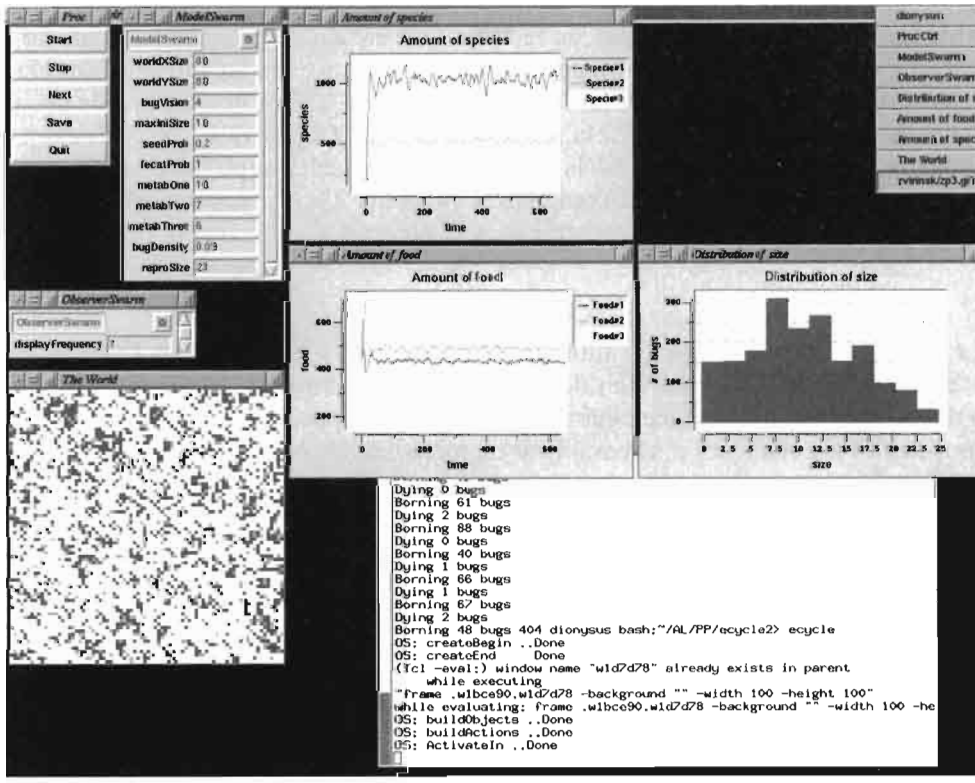


Figure 6.3 Fenêtre principale de Swarm.

2. http://www.swarm.org

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Première plate-forme à avoir clairement séparé l'implémentation du modèle de celle d'un « laboratoire virtuel » permettant l'observation et la conduite d'expérimentations sur le modèle, Swarm ne se contente cependant pas que de fournir des outils. Elle repose en effet sur un méta-modèle très original, qui spécifie un modèle comme une hiérarchie de « *swarms* » (essaims). Un *swarm* est un groupe d'objets et un ensemble d'actions (doté de son propre ordonnancement) exécuté par ces objets. Tout *swarm* peut contenir d'autres *swarms*, et ceci jusqu'au *swarm* principal constitué par l'observateur (l'environnement d'expérimentation). Ce méta-modèle, très général, permet sans aucun problème (et cela a été réalisé à de nombreuses reprises) de représenter les méta-modèles à base d'agents, la récursivité implicite des *swarms* facilitant même grandement la représentation des environnements comme agents à part entière. Enfin, le concept de *probes* (sondes) permet d'obtenir des informations très précises sur le déroulement d'une simulation et cela quel que soit le modèle exécuté.

Swarm, contrairement à NetLogo, ne se laisse cependant pas maîtriser facilement, surtout par des modélisateurs non spécialisés en informatique. Il requiert en effet des compétences certaines en programmation et si des tentatives (comme le langage MAML) ont été entreprises pour en faciliter l'accès, aucune n'a vraiment abouti à quelque chose de probant jusqu'à présent. Enfin, dans un contexte informatique clairement dominé aujourd'hui par les langages Java et C++, Swarm nécessite de passer (pour des modèles complexes) à la programmation en Objective-C, ce qui n'est pas toujours évident, et limite de plus la portabilité des modèles implémentés. Des ponts existent avec Java et C++ (*via* le compilateur Objective-C++), mais cela ajoute encore une couche de complexité à un environnement qui n'en a pas vraiment besoin.

c) Repast

Le développement de Repast[3], initié au début des années 2000, a été motivé par plusieurs objectifs : le premier était de réimplémenter Swarm en Java, mais cette voie a rapidement été abandonnée pour privilégier le développement d'un outil dédié aux modèles à base d'agents et se basant sur un méta-modèle équivalent à celui présenté en Introduction. Le second était de procurer un environnement de simulation adéquat pour les sciences humaines (depuis la géographie humaine jusqu'à la sociologie ou l'économie) en proposant outils et abstractions spécialisés pour ces domaines. Le troisième, enfin, était de faciliter l'accès à la modélisation pour les non-informaticiens en proposant un squelette de modèle facilement réutilisable et la programmation d'agents par l'intermédiaire du langage Python, plus simple à maîtriser que Java.

L'ensemble de ces objectifs, tous plus ou moins atteints, fait de Repast aujourd'hui une impressionnante boîte à outils plutôt qu'une plate-forme. Elle n'impose aucun modèle particulier, mais propose des facilités dont aucune autre plate-forme

3. http://repast.sourceforge.net/

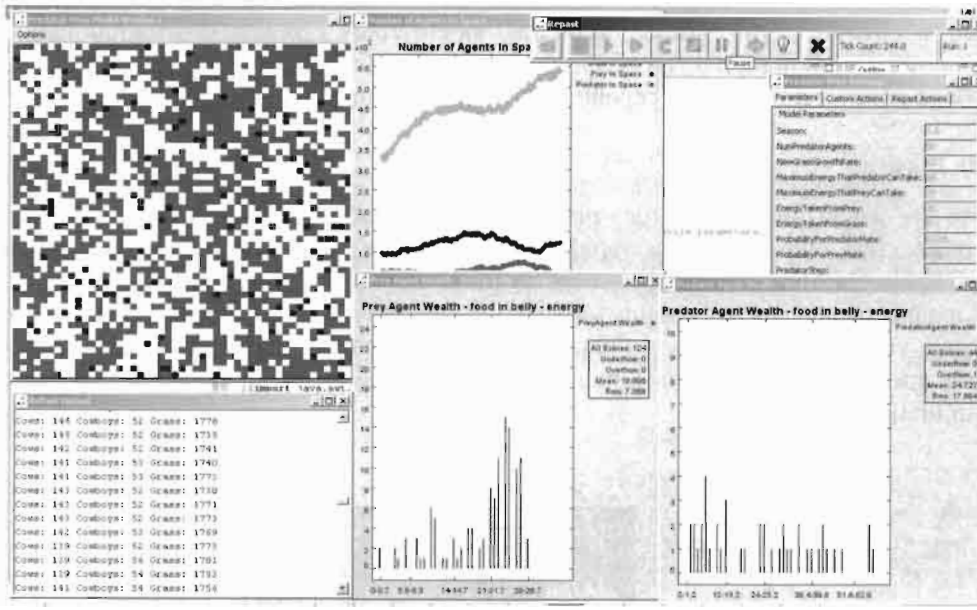


Figure 6.4 Fenêtre principale de Repast.

ne dispose, comme par exemple le couplage avec des systèmes d'information géographiques (via la bibliothèque *OpenMap*), la possibilité de générer des statistiques en temps réel (via le langage *R*), la possibilité de gérer des modèles comprenant plusieurs types d'environnement simultanément (*via* un méta-modèle proche de celui que nous présentons dans cet ouvrage), la possibilité de contrôler et de paramétrer des simulations par lot ou encore celle de spécifier très précisément le type d'ordonnancement souhaité pour les agents. Grâce à cette ouverture (qui peut, au départ, impressionner les non-informaticiens) il est assez facile de construire, au-dessus de Repast, le méta-modèle voulu en piochant dans les bibliothèques proposées. C'est par exemple la voie choisie par la plate-forme GAMA[4], développée par l'un des auteurs de cet ouvrage, dont le méta-modèle reprend peu ou prou celui présenté au chapitre 5 et qui propose de plus, dans une veine proche de celle de NetLogo, un langage de programmation permettant de construire facilement des simulations à base d'agents ainsi qu'une interface graphique plus simple à utiliser que celle de Repast (dont elle reprend, néanmoins, toutes les possibilités).

Il est à noter qu'une nouvelle version de Repast, baptisée Repast Simphony, a été dévoilée en décembre 2007. Elle inclut de nombreuses extensions, en particulier du point de vue de la description de l'environnement et de sa topologie. Si la philosophie de l'application reste la même (proposer une boîte à outils complète plutôt qu'un méta-modèle trop contraignant), de nombreux efforts ont été réalisés pour la rendre

4. http://gama-platform.sourceforge.net/

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

plus accessible au plus grand nombre de modélisateurs : langage de programmation graphique, compilation de modèles développés dans le langage de NetLogo, etc. Une bonne maîtrise de Java reste cependant obligatoire pour tirer parti de toute sa richesse.

d) Mason

Mason[5] est la plus récente des plates-formes évoquées ici. Elle a été développée comme une alternative plus rapide (et plus légère) à Repast, dont elle reprend quelques caractéristiques (en termes de modélisation de l'environnement ou d'ordonnancement). Ses trois points forts sont sa rapidité d'exécution, son indépendance totale vis-à-vis des systèmes d'exploitation et sa capacité à gérer des modèles physiquement réalistes en trois dimensions (par l'inclusion de moteurs physiques de simulation).

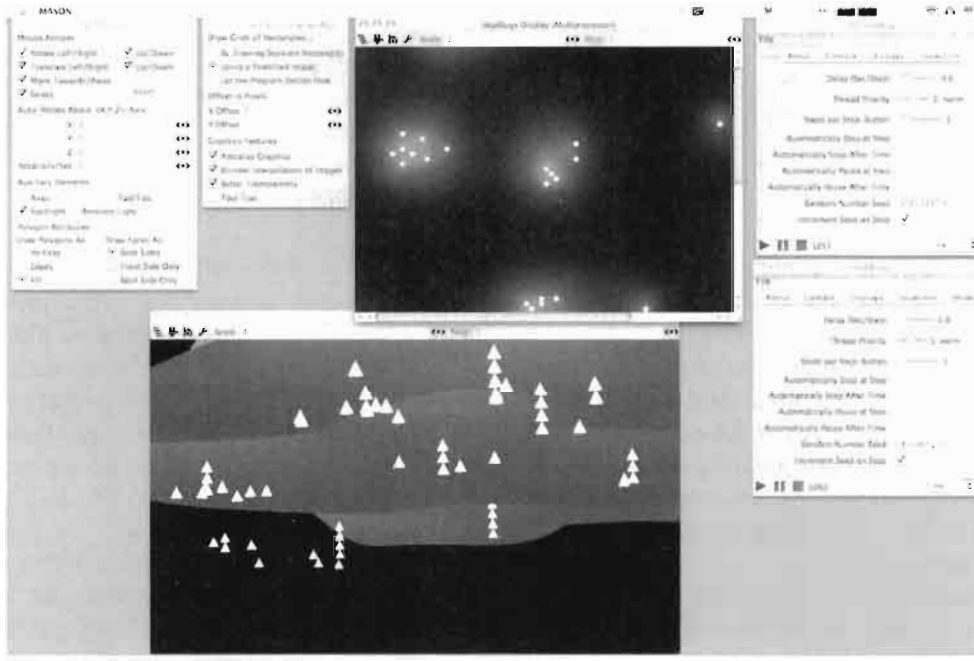


Figure 6.5 Fenêtre principale de Mason.

En termes de fonctionnalités, Mason n'arrive cependant pas à égaler ce qu'offrent Swarm ou Repast, et la communauté de modélisateurs qui l'utilisent semble réduite. Mais il peut être intéressant de l'utiliser pour des modèles très spécifiques, par exemple ceux comportant un très grand nombre d'agents ou imposant une description réaliste d'un environnement physique.

5. http://cs.gmu.edu/~eclab/projects/mason/

Du fait qu'elle n'impose aucun modèle particulier d'agent (à l'instar de Repast), il est tout à fait envisageable d'implémenter le méta-modèle du chapitre 5 dans Mason. Néanmoins, si rien ne s'y oppose, certains choix d'implémentation de la plate-forme rendent cette tâche assez complexe : de nombreuses optimisations conçues pour accélérer l'exécution des modèles limitent la réutilisabilité de certaines de ses classes. Une autre faiblesse réside dans ce que Mason n'inclut que peu d'outils d'analyse et de suivi comme ceux développés pour Repast, ce qui implique de s'en remettre à des solutions extérieures pour tout traitement statistique. Enfin, il ne semble pas que la plate-forme ait significativement évolué depuis 2005.

e) Cormas

Cormas[6] est une plate-forme développée par le CIRAD au milieu des années 1990, avec pour ambition de modéliser et de simuler les rapports entre acteurs et ressources naturelles renouvelables. Elle a depuis évolué pour devenir très complète, disposant d'outils d'inspection, de liaison avec les bases de données, de visualisation et de programmation qui en font un choix très intéressant (bien que limité par la taille restreinte de la communauté, essentiellement francophone, qui l'utilise et le fait que les développements nouveaux semblent arrêtés).

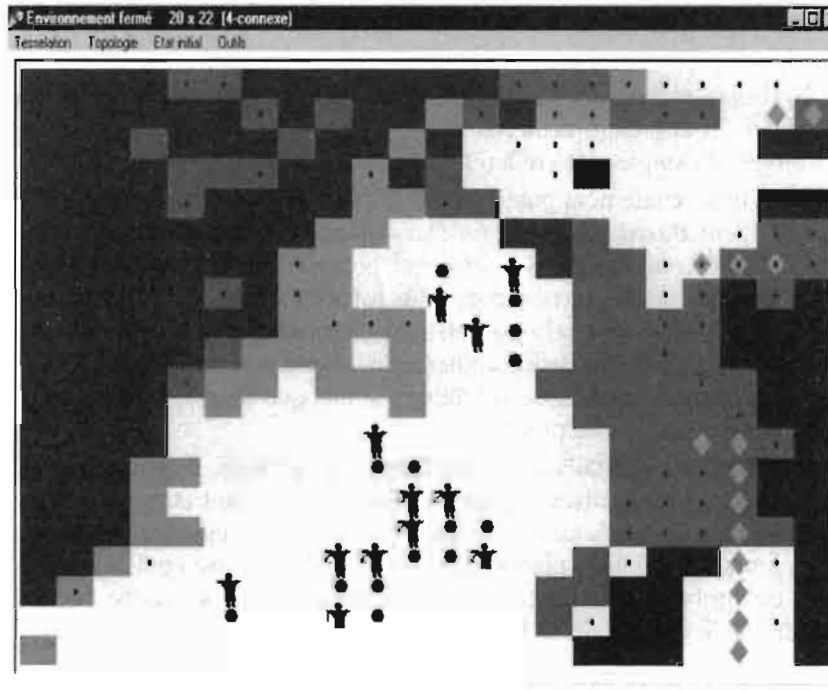


Figure 6.6 Aperçu d'une fenêtre de Cormas (modèle SELFCORMAS).

6. http://cormas.cirad.fr

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Cormas propose de base un méta-modèle qui n'est pas sans rappeler celui de NetLogo, et qui permet, en très peu de temps, de construire des modèles de complexité moyenne. En effet, une des grandes forces de Cormas est de s'appuyer sur le langage Smalltalk, qui reste inégalé en termes de facilité de programmation et de conception, et qui permet surtout de réutiliser extrêmement facilement les nombreuses extensions déjà développées pour d'autres modèles (ce qui est plus compliqué dans NetLogo). L'usage de Smalltalk est aussi, malheureusement, une de ses faiblesses, car ce langage (à l'instar d'Objective-C pour Swarm) dispose de peu d'environnements de développement.

De très nombreux modèles ont été développés dans Cormas, et il n'est pas difficile d'y implanter le méta-modèle du chapitre 5, d'autant que beaucoup de ses concepts sont déjà implantés dans le méta-modèle fourni avec la plate-forme.

6.2.3 Comparaison

Réaliser une évaluation et des comparaisons entre ces différentes plates-formes n'est pas chose aisée, tant leurs objectifs, leurs philosophies de conception et leurs capacités diffèrent. C'est pourquoi il faut saluer l'initiative de Railsback, Lytinen et Jackson (Railsback, Lytinen et al. 2006) qui, suite à un premier article intitulé « *Agent-based Simulation Platforms : Review and Development Recommendations* » publié en 2006, ont mis à la disposition des modélisateurs[7] 16 versions différentes d'un modèle, qualifié par eux-mêmes de *StupidModel,* sur quatre plates-formes différentes (Repast, Swarm, NetLogo, et Mason). Cormas propose également sa propre implémentation de ce modèle[8]. Tout lecteur désireux de se forger sa propre opinion sur ces plates-formes trouvera-là ample matière à réflexion (et à expérimentation).

Un autre article, également publié en 2006 par Castle et Crooks, « *Principles and Concepts of Agent-Based Modelling for Developing Geospatial Simulations* » (Castle and Crooks 2006), va, malgré son titre qui pourrait laisser penser qu'il est limité aux simulations géospatiales, beaucoup plus loin dans la comparaison entre Swarm, Mason, Repast, StarLogo, NetLogo, OBEUS, AgentSheets and AnyLogic (ces trois dernières étant des plates-formes commerciales) et s'intéresse de près à leurs capacités en termes de calibration et de validation, sujets que nous avons choisi de ne pas traiter ici pour des raisons de place.

Sans rentrer dans les détails des comparaisons effectuées, il est intéressant de voir que ces comparaisons, réalisées indépendamment l'une de l'autre, concluent toutes deux par une même appréciation sur Repast, considérée comme la plate-forme de simulation à base d'agents la plus aboutie actuellement. C'est également notre sentiment, et il est probable que la communauté importante qui s'occupe de son devenir lui permettra de le rester dans le futur.

7. http://condor.depaul.edu/~slytinen/abm/StupidModel/

8. http://cormas.cirad.fr/en/outil/classroom/example/StupidModel/index.htm

Chapitre 7

Mathématiques et modélisation agent

7.1 AGENTS ET NIVEAUX DE MODÉLISATION

La modélisation à base d'agents procède nous l'avons vu précédemment d'un parti pris informatique : il s'agit d'une forme de modélisation conçue d'emblée comme destinée à être exploitée par simulation sur ordinateur. Cette forme de modélisation met en œuvre une représentation informatique d'entités concrètes identifiées à une échelle fine — les agents — couplée à une représentation informatique des interactions entre ces entités. Elle oriente la modélisation des phénomènes vers une conception calculatoire cherchant à éviter aux spécialistes des domaines scientifiques concernés un trop grand travail d'abstraction[1].

Conception calculatoire et abstraction — La modélisation à base d'agents substitue en effet du **calcul** au processus intellectuel d'abstraction conduisant aux modèles mathématiques habituels. Contrairement aux simulations numériques de résolution d'équations, elle ne requiert pas cette abstraction préalable, du moins au même degré.

Calcul, abstraction et compréhension — Ce que l'on gagne, par la puissance du calcul, en possibilités d'expérimentation, compense-t-il ce que l'on perd, par absence d'abstraction, en possibilités de compréhension ? N'est-on pas obligé, après coup, de réintroduire une part d'abstraction pour comprendre la dynamique du système réel étudié ?

Mais calculer — ici *reproduire* virtuellement le phénomène dans ses détails et sa trajectoire — n'est pas nécessairement comprendre. C'est là sans doute une des sources des critiques adressées aux approches agents par différents chercheurs. Il faut pouvoir caractériser ce qui émerge, aux différentes échelles d'intérêt, et pouvoir

1. Pour une discussion sur les notions d'abstraction et de reformulation dans les modèles, voir notamment (Zucker 2001).

établir les liens entre ces dynamiques émergentes et les processus représentés à l'échelle fine. En nous inspirant d'un propos d'Annick Lesne (Lesne 2003), nous avançons ici le postulat suivant : « *comprendre en profondeur un phénomène, c'est pour une part mettre en rapport plusieurs niveaux de description, chaque niveau comportant son lot de variables d'intérêt, d'observations, d'hypothèses, éventuellement de théories et de modèles spécifiques.* »

Ces niveaux seront qualifiés de « microscopiques » ou individuels, « mésoscopiques » ou intermédiaires, « macroscopiques » ou globaux, selon le degré de finesse des échelles d'espace, de temps, et de taille des entités mises en jeu. Cette recherche d'une compréhension profonde passe souvent par « l'attention portée aux niveaux intermédiaires »[2]. Il s'agit alors de caractériser les structures se manifestant à de tels niveaux et de trouver les modèles minimaux qui en rendent compte.

Selon notre postulat, une modélisation à base d'agents, pour exprimer toutes ses potentialités explicatives, gagne donc à être complétée par des modélisations faites à des niveaux plus agrégés de description, intermédiaires ou globaux, et par leur mise en rapport. Les modèles ainsi produits aident à comprendre le fonctionnement du système à base d'agents, et par là même, le comportement de la réalité modélisée. Ici intervient le second parti pris de cet ouvrage, qui motive les quatre prochains chapitres : « *les mathématiques, en tant qu'instrument d'abstraction, sont le langage naturel de ces modélisations complémentaires et de leur exploitation.* »

Modèle et système — « Systèmes d'agents » ou encore « le système des agents » est dans la suite du chapitre l'expression désignant le système formé par les entités et processus spécifiés dans un modèle à base d'agents, système dont on observe le fonctionnement sur l'ordinateur. La compréhension du fonctionnement de ce système et la capacité d'en généraliser les résultats constituent un des apports de l'intervention des mathématiques.

7.2 IMPLICATION DES MATHÉMATIQUES

Les mathématiques interviennent dans les modèles à base d'agents à plusieurs niveaux (Lerman, Galstyan et al. 2001) (Treuil, Lobry et al. 2007) :

- dans l'expression formelle des règles de comportement des agents ;
- dans la caractérisation du système et de sa dynamique ;
- dans la modélisation directe d'une dynamique plus ou moins « agrégée » sous forme d'équations portant sur des variables où les agents ne sont plus explicitement représentés ;
- dans la recherche de techniques permettant de passer des formulations mathématiques des règles individuelles aux équations de dynamique agrégée, et donc de faire le lien entre niveaux de modélisation d'échelle et de granularité différentes.

2. Attention évoquée en conclusion de l'ouvrage de U. Dieckmann (Dieckmann, Law et al. 2000).

7.2.1 Formuler mathématiquement les comportements individuels

Il n'est sans doute pas un modèle agent qui ne fasse appel, pour un mécanisme ou pour un autre, à une formulation de type mathématique. Mais l'utilisation du langage mathématique n'est pas seulement une commodité pour résoudre quelques difficultés ponctuelles de communication. Nous pensons que la tentative de présenter l'ensemble des mécanismes d'un modèle agents sous une forme mathématique cohérente est productive pour la démarche même de modélisation. Elle force à une certaine rigueur, freine la tendance à une trop grande sophistication, permet d'identifier certaines généralisations, et évite de se poser prématurément certains problèmes à la frontière de la modélisation conceptuelle et de la modélisation opérationnelle tirant du côté de l'implémentation sur ordinateur. Elle évite par exemple de se demander à quel type d'entités, agents ou Environnement, reviendra la charge d'effectuer tel ou tel calcul : l'écriture des équations n'exige pas en effet de trancher cette question.

> Une formulation mathématique d'ensemble est par ailleurs exigée si l'on prétend ensuite vouloir déduire analytiquement des propriétés émergentes ou démontrer l'équivalence avec un modèle agrégé.

7.2.2 Caractériser synthétiquement les systèmes d'agents

Un modèle à base d'agents comporte un grand nombre de degrés de liberté. Il produit, à chaque pas de temps, une quantité de données considérable. L'exploitation des simulations requiert donc des méthodes pour résumer cette information, en extraire l'essentiel du point de vue de l'observateur. Il faut pouvoir notamment bien caractériser les structures spatio-temporelles du système des agents, l'organisation de leur réseau d'interactions, la forme de leurs trajectoires et la manière dont ces trajectoires sont corrélées entre elles. Il faut pouvoir reconnaître sur tous ces éléments des « patrons » spécifiques. Un tel travail utilise souvent de simples indicateurs — moyennes, écarts types — relevant de la statistique élémentaire. Il peut également faire appel à des notions mathématiques élaborées relevant de la géostatistique, la géométrie stochastique, la théorie des graphes, la morphologie mathématique, et la théorie du signal. C'est ainsi que la caractérisation de la distribution spatiale des semis de points (processus ponctuels), ou d'autres objets géométriques, la caractérisation de la complexité des réseaux ont pu donner lieu à des travaux théoriques importants.

D'une façon plus large la formalisation des états du système, et non plus seulement celle des états individuels, est le moyen de l'articulation entre modèles agents et modèles agrégés. Cette formalisation vise à donner une expression mathématique précise et manipulable de ces états sans perdre la richesse des informations incluses. Elle n'est pas simple. Lorsque les modèles font intervenir un nombre fixe d'agents de nature identique, comme les automates cellulaires, l'espace des états possibles du système se définit aisément. Mais on l'a vu, la nature informatique des modèles agents permet aisément de faire intervenir des agents de nature différente, pouvant

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

apparaître ou disparaître du monde simulé, dotés de structures internes complexes et entretenant entre eux des « relations sociales » variables. Certains ont pu envisager des modèles agents où le nombre et la nature des attributs d'un même agent pouvaient évoluer au cours du temps (Alain Cardon, com. pers.). Comme on le verra cependant dans les deux dernières sections de ce chapitre, les mathématiques ne laissent pas le modélisateur démuni devant ces difficultés.

7.2.3 Modéliser un système d'agents à un niveau agrégé

La recherche d'une modélisation mathématique directe de la dynamique d'un modèle à base d'agents prise à un niveau dit « agrégé », où toute référence explicite aux agents a disparu, peut avoir deux objectifs concrets :

- Déterminer analytiquement les propriétés de cette dynamique (par exemple l'existence d'un état stationnaire stable), de manière à avoir des certitudes, et non de simples présomptions induites des simulations.
- Simuler cette dynamique, quel que soit le nombre d'agents, sans passer par l'explicitation de leurs comportements au niveau individuel.

Bien sûr une question se pose : si l'on peut construire un modèle agrégé qui donne des résultats équivalents au modèle à base d'agents, quelle est l'utilité de ce dernier, ou du moins quelle est l'utilité d'une double modélisation ? Nous essayerons au chapitre 10 de répondre à cette question. Tenter de construire un modèle agrégé force à réfléchir aux hypothèses qu'il faut poser pour assurer l'équivalence, et à examiner si ces hypothèses sont vérifiées dans la réalité. Cette réflexion contribue à la connaissance en profondeur du fonctionnement du système étudié : quelle est par exemple l'influence réelle des hétérogénéités de l'environnement ou du comportement des agents ? Elle est par là même un garde-fou contre une tentation constamment présente dans la pratique des modélisations agents, celle de l'exhaustivité qui conduit à un trop grand réalisme et donc à une trop grande complexité.

7.2.4 Établir un lien analytique entre niveaux différents

L'intérêt porte ici sur les voies mathématiques permettant de dériver, à partir de l'expression formelle des règles de comportement individuel, un système d'équations portant sur des variables agrégées. On retrouve le problème général de la *réduction de la complexité* des modèles, décliné dans ce cas par le passage entre niveau « micro » et niveau « macro ». Ces techniques sont donc dans leur esprit et leur objectif à rapprocher des méthodes d'« agrégation de variables » (Auger et Bravo de la Parra 2000). Ces dernières s'appliquent lorsque deux processus sont en œuvre dont l'un est beaucoup plus rapide que l'autre, par exemple une migration rapide combinée à une infection ou un processus de reproduction lent. On fait l'hypothèse que le processus rapide l'est suffisamment pour amener à chaque instant le système dans un état proche de l'équilibre qui existerait si le processus lent s'interrompait en laissant les variables qu'il contrôle à leurs valeurs observées à cet instant. L'évolution

est alors une succession d'équilibres, générée par le processus lent et décrite par le modèle agrégé.

La possibilité de passage d'un modèle à base d'agents vers un modèle agrégé implique que la dynamique du système finisse par suivre un certain cours. Au-delà d'une phase initiale, les trajectoires du système complet dans l'espace de ses états possibles doivent se restreindre à demeurer dans une certaine région de cet espace ; on dit alors que le système perd ses degrés de liberté théoriques (la totalité de l'espace possible) pour ne garder que ses degrés de liberté effectifs (la dimension de la région finale) (Dieckmann et Law 2000). Cette perte de degré de liberté, liée aux attracteurs du système, signe une propriété du modèle agent lui-même.

Mais, en pratique, la possibilité réelle de passer d'un modèle agent à une formulation mathématique agrégée est liée à un certain nombre d'hypothèses simplificatrices rarement réunies. De plus, ces hypothèses simplificatrices, par exemple une homogénéité spatiale du système considéré à une certaine échelle, peuvent se trouver vérifiées au cours d'une certaine période de la vie du système et devenir invalides au cours d'une autre période. Le passage d'une période à l'autre manifeste un « changement de phase » du système ; à un instant donné le système peut être décrit par un modèle agrégé, alors qu'à un instant ultérieur cela devient impossible. Ces réserves étant faites plusieurs approches liées les unes aux autres peuvent être envisagées. Elles feront l'objet du dernier chapitre de la présente partie.

7.3 VOCABULAIRE ET NOTATIONS

Il existe bien, comme l'Introduction de l'ouvrage l'a souligné, deux manières de penser une même réalité faite d'entités interagissant au sein d'un environnement : celle, qualifiée d'horizontale, procédant d'avantage de l'informatique, centrée sur chaque entité prise individuellement, celle, qualifiée de verticale, centrée sur la distribution des valeurs de certaines variables au sein de la population de ces entités, et procédant davantage des mathématiques.

La présente section a pour objet une reformulation du modèle conceptuel agent, intégrant une terminologie et des notations mathématiques générales pour les états individuels, les états du système et leurs dynamiques. Cette terminologie et ces notations seront utilisées dans l'ensemble de cette partie[3].

7.3.1 Agents, mécanismes, environnement

Le modèle conceptuel est dans son noyau le plus général le même que celui décrit dans l'approche informatique.

3. La conception de la structure statique d'un modèle « individu-centré » comme matrice croisant identifiants et attributs, celle des mécanismes du modèle comme opérateurs sur cette matrice, a été proposée par Tanya Kostova (Kostova, Carlsen et al. 2004). Elle est reprise ici dans son principe.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Un **agent** est une entité identifiée, ayant une certaine permanence temporelle, coexistant au sein du système avec d'autres agents et interagissant avec eux.

Selon la complexité du système, ces agents relèvent d'une ou de plusieurs **catégories**. Ces catégories spécifient les **attributs** décrivant les agents qu'elles regroupent. Ces attributs ont des **valeurs**. Ces valeurs sont des éléments **d'ensembles de valeurs observables** ou **co-domaines**[4] des attributs correspondants.

Un **processus** ou **mécanisme** est un déterminant de l'évolution du système qui, en concurrence ou en coopération avec d'autres mécanismes, contribue à la dynamique effectivement observée.

La contribution d'un processus donné est la résultante d'une succession d'opérations modifiant des valeurs d'attributs selon des règles, qui constituent le comportement des agents, et qui sont ici mathématiquement spécifiées. Ces opérations peuvent procéder par *transitions* discrètes, définies souvent en probabilité sur un temps discret. Mais, puisque nous sommes ici dans le domaine des mathématiques, les opérations peuvent également procéder par transitions discrètes sur un temps continu, voire procéder par sauts infinitésimaux — processus continus représentés par des équations différentielles.

L'environnement est un ensemble de catégories particulières d'agents, distinguées par le modélisateur des autres agents du système par la nature de leurs attributs et par leurs rôles spécifiques, et porteuses d'informations partagées.

7.3.2 États individuels, états du système

Le croisement de l'approche « verticale » des systèmes d'agents, au sens du schéma présenté en Introduction de l'ouvrage, privilégiant l'entrée par les descripteurs, et de l'approche « horizontale » privilégiant l'entrée par les objets décrits, conduit à préciser certaines expressions.

a) Attributs, points de vue

Un **attribut** est l'association d'un nom[5], faisant sens pour le modélisateur, et d'une structure mathématique, désignée comme ensemble des **valeurs observables** de l'attribut. **Un attribut est attaché à une catégorie d'agents.**

4. Ce terme est emprunté à une vision fonctionnelle de la notion d'attribut, conçu comme une fonction appliquant un ensemble d'agents dans un ensemble de valeurs, co-domaine de la fonction.

5. Comme il est habituel en mathématiques comme en informatique dans l'usage des symboles de variables, ce nom est utilisé de deux manières : pour nommer l'attribut concerné, et pour représenter symboliquement, dans les équations la valeur générique qu'il peut prendre. Le contexte permet en général de lever l'ambiguïté.

Nous appelons **point de vue** un ensemble d'attributs — les composants du point de vue — relatifs à une même facette des dynamiques étudiées, que le modélisateur juge utile de rassembler sous une étiquette commune.

Un point de vue définit sur chaque catégorie d'agents un ensemble de valeurs observables, produit cartésien des ensembles de valeurs observables des composants attachés à la catégorie. L'ensemble des valeurs observables du point de vue sur une catégorie donnée peut être vide, si aucun composant n'est attaché à cette catégorie.

Un point de vue généralise la notion d'attribut. Un attribut est une unité élémentaire d'information liée spécifiquement à une catégorie d'agents. Un point de vue est un ensemble de telles unités, ensemble pouvant être réparti sur plusieurs catégories. Par exemple, un **attribut** « position d'un prédateur » décrit la situation d'un agent de la catégorie « prédateur » dans l'espace physique. Un **point de vue** « positions » regroupe cet attribut avec l'attribut homologue « position d'une proie ». Un autre point de vue regroupe les attributs masse, position et vitesse attachés à la catégorie « prédateur » pour constituer un point de vue « attributs physiques d'un prédateur ».

Principes de notations pour les attributs et les points de vue

c, symbole générique d'une catégorie d'agents.

a, symbole générique d'attribut.

A, ensemble des valeurs observables de l'attribut a.

u, symbole générique d'un point de vue réunissant des attributs répartis sur une seule ou plusieurs catégories.

u_c, restriction du point de vue u aux seuls attributs liés à la catégorie c.

U_c, ou U en l'absence d'ambiguïté, ensemble des valeurs observables du point de vue u sur la catégorie c.

s, symbole désignant le point de vue exhaustif réunissant tous les attributs.

s_c, restriction du point de vue s aux seuls attributs liés à la catégorie c.

S_c, ou S en l'absence d'ambiguïté, ensemble des valeurs observables du point de vue s sur la catégorie c.

Le point de vue exhaustif s rassemble tous les attributs utilisés pour décrire les agents, *mis à part*, nous y revenons plus loin, *ceux participant à leur identification*. Nous y incluons également les paramètres des différents mécanismes, qui, par défaut, sont affectés à l'environnement.

b) Observations, états et configurations

Nous appelons **observation** l'association de l'identifiant d'un agent, du nom d'un attribut et d'une valeur de cet attribut.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Nous postulons la possibilité d'appréhender le système de manière instantanée en produisant un ensemble d'observations le décrivant complètement. Cette hypothèse permet :

- de parler de *l'état* à l'instant t (d'un agent, d'un groupe d'agents, du système) en tant qu'ensemble d'observations constatées à cet instant.
- de parler également d'état observable (d'un agent, d'un groupe d'agents, du système), en tant qu'ensemble d'observations censées pouvoir être constatées simultanément à un instant indéterminé de la vie du système.

> **L'état d'un agent relativement à un point de vue**, est l'ensemble de toutes les observations concernant à la fois cet agent et l'un des attributs composant ce point de vue, attachées à un même instant de la vie du système.
>
> **L'état d'un groupe d'agents relativement à un point de vue**, ou, vision duale, **la configuration de ce point de vue sur ce groupe d'agents**, est l'ensemble de toutes les observations concernant à la fois l'un des agents du groupe et l'un des attributs composant ce point de vue, attachées à un même instant de la vie du système.
>
> **L'état du système relativement à un point de vue**, ou, vision duale, **la configuration de ce point de vue sur le système** est enfin l'ensemble des observations concernant à la fois l'un quelconque des agents et l'un des attributs composant le point de vue, *attachées à un même instant de la vie du système.*

L'intérêt de rapporter explicitement les états ou configurations au point de vue, à l'agent ou au groupe d'agents considérés, nous a conduit à adopter un principe de notations explicité dans les encadrés reportés en fin de chapitre. État et configuration sont deux termes désignant la même chose, à savoir la description d'un ensemble d'agents. L'un ou l'autre de ces termes sont employés dans la suite de l'ouvrage, selon qu'on privilégie, avec l'emploi du terme état, les objets mesurés (les agents) ou, avec l'emploi du terme configuration, les valeurs des mesures et la « figure » qu'elles forment.

Exemples de notations des états

x symbole attribut position ;v symbole attribut vitesse.

$u = \{x \cup v\}$ symbole point de vue « état cinétique » regroupant x et v.

x_i^t position de l'agent i à l'instant t v_i^t vitesse de l'agent i à l'instant t.

$u_i^t = \left[x_i^t, v_i^t\right]$ état cinétique de l'agent i à l'instant t.

$\{x_i\}^t$ configuration des positions à l'instant t sur l'ensemble des agents existants.

$\{v_i\}^t$ configuration des vitesses à l'instant t sur l'ensemble des agents.

$\{u_i\}^t$ état cinétique du système (configuration des états cinétiques) à l'instant t.

${}^{\omega}\{u_i\}^t$ état cinétique du système en t sur une réalisation ω explicitement désignée d'une vie possible du système.

---

c) De la nature des identifiants

L'identifiant de l'agent est ce qui permet de le distinguer de tous ceux qui ont été présents, sont présents ou seront présents dans le système et de le suivre dans le temps. Un **identifiant** est une part de la description de l'agent, donc une valeur d'un point de vue identificateur i, valeur que cet agent sera le seul à prendre pendant toute la vie du système. *Par définition la valeur d'un attribut participant du point de vue identificateur ne peut être modifiée pendant le temps de présence de cet agent dans le système.*

L'état d'un agent relatif à un point de vue u, défini comme ensemble d'observations, équivaut, non pas à une valeur de ce point de vue, mais au **couple** formé par cette valeur et la valeur de l'identifiant ; ou encore, de façon équivalente, à une valeur du point de vue $u \cup i$ regroupant les attributs impliqués dans u et dans i.

De même l'état d'un groupe d'agents relevant d'une catégorie c, relatif à un point de vue u, n'est pas un « semis d'éléments » dans l'ensemble U_c. C'est un semis d'éléments dans l'ensemble $U_c \times I_c$ des valeurs observables sur la catégorie c du point de vue $u \cup i$. C'est à cette condition que l'état de ce groupe d'agents constitue bien l'ensemble de l'information disponible sur ce groupe analysé selon ce point de vue.

C'est cette convention qui conduit, pour éviter des redondances inutiles, à exclure du point de vue exhaustif s les attributs participant à l'identification des agents : l'état d'un agent d'une catégorie c analysé selon le point de vue s ainsi défini, couple de valeurs dans $S_c \times I_c$, suffit en effet pour fournir l'intégralité de l'information disponible sur cet agent.

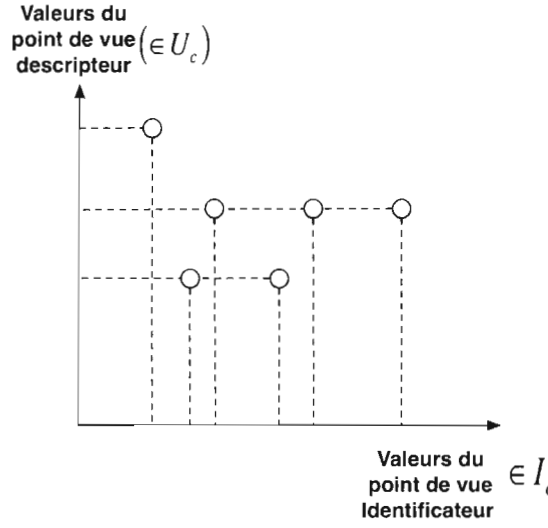


Figure 7.1 État d'un groupe d'agents relevant de la catégorie c.

Dans certains cas il est utile de distinguer sans ambiguïté la valeur prise par le point de vue u pour un agent de l'état de cet agent analysé selon le même point de

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

vue. Autrement dit de distinguer un élément de $U_c \times I_c$ de sa *projection* sur l'ensemble U_c. Nous ferons dans ce cas précéder la notation de l'état par le symbole π_U.

Principes de notation des identifiants

I ensemble des identifiants attribuables aux agents.

I_c ensemble des identifiants attribuables aux agents de la catégorie c.

I^t ensemble des identifiants des agents existant à l'instant t.

I_c^t ensemble des identifiants des agents de la catégorie c existant à l'instant t.

$i, j, k, l, \ldots$ symboles d'identifiants d'agents.

$c(i)$ notation abrégée pour $i \in I_c$: i identifie un agent de la catégorie c.

7.3.3 Trajectoires

La dynamique d'un système d'agents, préparé dans un état initial donné, se décrit par la caractérisation de toutes les **trajectoires** *possibles* à partir de cet état initial[6].

La **trajectoire** — d'un agent i, d'une catégorie d'agents c, du système pris globalement — relative à un point de vue u est une fonction définie dans l'ensemble T des instants t et prenant ses valeurs dans les ensembles d'états correspondants. Ces valeurs sont les états — **de l'agent, de** la catégorie d'agents ou du système — observés successivement sur une même **réalisation** de la vie du système.

a) Trajectoires continues et trajectoires discontinues

Le temps T est totalement ordonné ; il peut être continu ou discret, régulier ou non. Les ensembles d'états peuvent être également continus ou discrets. Lorsqu'à la fois le temps et les ensembles d'états sont continus[7], les trajectoires peuvent être elles-mêmes continues ou discontinues. Dans ce dernier cas, la survenue d'un **événement** vient provoquer à un instant t un saut sur la trajectoire, interrompant la continuité. Il faut pouvoir alors distinguer l'état — d'un agent d'un groupe d'agent, du système — juste avant l'événement, du même état juste après cet événement, supposé instantané. Nous le ferons selon une convention établie, en référant par t_- le temps précédent immédiatement l'événement survenant au temps t.

b) Dynamiques déterministes et dynamiques stochastiques

Qu'elles s'expriment par des trajectoires continues ou discontinues, les dynamiques des systèmes d'agents peuvent être déterministes ou stochastiques. Une même trajectoire se déployant dans un espace continu peut être ainsi le résultat conjoint d'un mécanisme en temps continu de type **marche aléatoire** conservant la continuité mais

6. Et observables en pratique lors de différentes simulations.

7. Ou, pour ces derniers, continus au moins sur certaines de leurs composantes.

supprimant la dérivabilité de la trajectoire, et un mécanisme événementiel introduisant des discontinuités à des instants aléatoires discrets. **La théorie des processus stochastiques en temps continu** fournit les instruments mathématiques nécessaires pour traiter rigoureusement de telles dynamiques.

Le principe adopté pour noter les trajectoires est également présenté dans les encadrés de la fin du chapitre. Il est illustré dans les exemples suivants.

Exemples de notations de trajectoires

$x_i^{t,\tau}$, trajectoire (de la position) de l'agent i sur l'intervalle de temps $[t, \tau]$

$\{x_i\}^{t,\tau}$, trajectoire de l'état du système (à travers la configuration des positions), sur l'intervalle de temps $[t, \tau]$

${}^{\omega}x_i^{\tau,t}$, trajectoire (de la position) de l'agent i sur l'intervalle de temps$[t, \tau]$, suivie sur une réalisation ω explicitement désignée d'une vie possible du système.

${}^{\omega}\{x_i\}^{t,\tau}$, trajectoire de l'état du système (à travers la configuration des positions), sur l'intervalle de temps$[t, \tau]$, suivie sur une réalisation ω explicitement désignée de la vie du système

$x_i^{t,\tau-}$, $\{x_i\}^{t,\tau-}$, ..., trajectoire (de la position) de l'agent, de l'état du système, etc., sur l'intervalle de temps ouvert à droite$[t, \tau[$

$x_i^{\tau-}$, $\{x_i\}^{\tau-}$, ..., limite de l'état x_i^t de l'agent, de l'état $\{x_i\}^t$ du système, lorsque t tend vers τ par valeurs croissantes.

Dans la suite, nous désignerons par Ω, conformément à un certain usage, l'ensemble des réalisations ω, c'est-à-dire des vies possibles du système.

7.3.4 De la structure des calculs en simulation agents

Spécifier la dynamique d'un système d'agents, c'est décrire les contraintes limitant l'ensemble des trajectoires possibles du système et donc de ses différentes composantes. L'expression des contraintes peut prendre différentes formes mathématiques, dépendantes du caractère continu ou discontinu du temps et de la structure des ensembles d'états. Un tel ensemble de contraintes se différencie en général en plusieurs sous-ensembles, chacun d'eux correspondant à un **mécanisme** particulier d'évolution identifié par le modélisateur, la dynamique étant la résultante conjointe de tous les mécanismes. Il faut bien sûr qu'il existe des solutions à cet ensemble de contraintes, que l'ensemble des trajectoires possibles ne soit pas vide.

Résoudre numériquement le modèle agent c'est construire une suite ..., $\{s_i\}^{t_k}$, $\{s_i\}^{t_{k+1}}$, ... d'états du système satisfaisant les contraintes énoncées, ainsi que celles présidant à la condition initiale ; c'est-à-dire une suite pouvant être considérée comme la projection aux différents instants t_k d'une trajectoire $\{s_i\}^{t_0,\infty}$. L'adéquation de la suite comme représentation d'une trajectoire possible du **système réel étudié** relève de la **validation** du modèle. Son adéquation aux contraintes énoncées relève des concepts et techniques de **l'analyse numérique**.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Le calcul de telles suites met généralement en œuvre une succession d'itérations. Ces itérations peuvent exprimer[8] une progression dans le temps, chaque état $\{s_i\}^{t_{k+1}}$ se trouvant calculé à partir des états antérieurs sans réévaluation de ces derniers. Le terme de simulation, en un des sens évoqués dans l'introduction générale, s'applique plus particulièrement à ce mode de résolution, où la progression du calcul représente par elle-même la progression du temps dans la réalité modélisée. C'est ce mode qui est pour ainsi dire le mode natif des modèles informatiques à base d'agents.

Les calculs déterminant la **transition** faisant passer de l'état $\{s_i\}^{t_k}$ à l'état $\{s_i\}^{t_{k+1}}$ s'organisent en une séquence **d'opérations** successives[9]. Chacune de ces opérations implique un mécanisme, un point de vue, et enfin un agent ou un groupe d'agents identifiés, dont elle traduit le *comportement* au sein du mécanisme.

Remarque. Il est souvent d'usage, dans la pratique de la modélisation agent, de lier une opération à l'un des agents impliqués, considéré comme son initiateur ou son moteur. Cet usage peut avoir ses racines au niveau conceptuel, dans la représentation que le modélisateur se fait de la réalité elle-même, ou recevoir sa justification au niveau opérationnel de l'organisation des calculs et de leur implémentation informatique. Mais il est difficile de formuler des règles universelles en ce domaine, relevant plutôt du « style » de chaque modélisateur. Par ailleurs les formulations mathématiques des comportements n'impliquent pas vraiment de choix sur ces questions.

L'ordonnancement des opérations est une question délicate, car il peut influer grandement sur la suite finalement produite. Comme le chapitre précédent l'a évoqué, les exemples de telles divergences abondent. On retrouve dans la variété des ordonnancements possibles — la variété des **modes opératoires** — (Robert 1995) les deux grandes approches horizontales et verticales évoquées dans l'introduction : un ordonnancement de tendance « asynchrone » privilégie un regroupement des opérations par agent et séquence l'activation des agents dans un ordre aléatoire ; un ordonnancement de tendance « synchrone » privilégie un regroupement des opérations par mécanisme ou par point de vue[10]. Une telle division ne s'applique pas toujours aussi clairement. On trouve une discussion théorique de la question dans l'ouvrage de François Robert précédemment cité.

Une formulation condensée, non ambiguë et cependant simple, du mode de construction de la suite $..., \{s_i\}^{t_k}, \{s_i\}^{t_{k+1}}, ...$ est une étape indispensable d'une approche mathématique globale de la dynamique du système.

---

8. Mais ce n'est pas toujours strictement le cas ; voir par exemple la notion de schéma implicite en analyse numérique, où le calcul de valeurs à l'instant t_k prend en compte des contraintes posées sur l'instant t_{k+1}.

9. Nous laissons de côté dans ce chapitre les considérations liées au calcul parallèle.

10. D'autres termes sont également employés pour désigner les différents modes opératoires : modes « série », mode « parallèle », modes mixtes « série parallèle » (Robert 1995).

Principes de notations des états ou configurations et des trajectoires

a_i^t : Observation relative à l'attribut a, relative à l'agent i à l'instant t ; élément de l'ensemble $A \times I_c$, où A est l'ensemble des valeurs observables attaché à l'attribut, et I_c ensemble des identifiants attaché à la catégorie de l'agent.

$u_i^t = \{a_i^t\}_{a \in u}$: État de l'agent i relatif au point de vue u, observé à l'instant t

$\{u_i\}_{g(i)}^t$: État du *groupe* formé par les agents existant à l'instant t et satisfaisant à la condition $g(i)$, relatif au point de vue u, observé à l'instant t. La manière dont est définie la condition $g(i)$ est quelconque. La notation est la notation simplifiée pour $\{u_i\}_{i \in I^t \wedge g(i)}^t$

$\{u_i\}^t$: État du *système* analysé selon le point de vue u, attaché à l'instant t. Vaut par défaut pour $\{u_i\}_{i \in I^t}^t$

Dans ces notations l'exposant t peut être omis : Les notations désignent alors les états — d'un agent, d'un groupe, du système entier — observables à un instant indéterminé.

${}^{\omega}u_i^t, {}^{\omega}\{u_i\}_{g(i)}^t, {}^{\omega}\{u_i\}^t$, état — d'un agent, d'un groupe, du système entier sur le point de vue u — observé à l'instant t sur une réalisation explicitement désignée ω d'une vie possible du système.

$u_i^{t,\tau}, \{u_i\}_{g(i)}^{t,\tau}, \{u_i\}^{t,\tau}$ trajectoire — d'un agent, d'un groupe, du système entier sur le point de vue u —, observée sur l'intervalle de temps$[t, \tau]$.

${}^{\omega}u_i^{t,\tau}, {}^{\omega}\{u_i\}_{g(i)}^{t,\tau}, {}^{\omega}\{u_i\}^{t,\tau}$ trajectoire — d'un agent, d'un groupe, du système entier sur le point de vue u—, observée sur l'intervalle de temps $[t, \tau]$ pour une réalisation ω explicitement désignée de la vie du système.

Dans ces notations l'exposant ω identifiant une réalisation particulière de la vie du système est souvent implicite, et donc omis.

$\pi_A a_i^t$: valeur de l'observation, après perte de l'information identifiant l'agent : sa projection sur l'ensemble A.

$\pi_U u_i^t = \{\pi_A a_i^t\}_{a \in u}$: valeur du point de vue$u$ prise sur l'agent i à l'instant t : la projection de l'état de l'agent sur l'ensemble des observables U_c attaché à sa catégorie.

$\{\pi_U u_i^t\}$: *collection* (donc pouvant admettre des doublons) des valeurs prises à l'instant t par le point de vue u par les différents agents du système.

En l'absence d'ambiguïté, a_i^t, u_i^t, $\{u_i^t\}$ vaudront également pour $\pi_A a_i^t$, $\pi_U u_i^t$, $\{\pi_U u_i^t\}$. Le symbole de projection ne sera alors pas utilisé.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Chapitre **8**

Exprimer mathématiquement, au niveau de l'agent, comportements et interactions

8.1 MÉTAPHORE DES FORCES, MÉTAPHORE DES JEUX

Ce chapitre introduit — à travers la présentation d'exemples élargis — un ensemble de modèles spécifiant de manière mathématique, au niveau individuel, des comportements et des mécanismes d'interactions. Ces modèles sont génériques, car ils s'appliquent à des domaines variés et constituent la matrice de multiples spécialisations. Ce sont des modèles mathématiques, car ils s'appuient sur les langages et notations de cette discipline et ne font pas référence première à une implémentation informatique. Enfin ces modèles, malgré cette orientation, sont bien pour nous des modèles agents : les variables, équations ou règles qu'ils mettent en œuvre, font explicitement référence aux agents, en tant qu'entités individualisées, et à leur environnement.

L'objectif est de présenter aux lecteurs une palette de formalismes auxquels ils pourront se référer, et dont ils pourront s'inspirer, y compris en les combinant, pour développer leurs propres constructions. *Apprendre à formuler mathématiquement des comportements d'agents,* tel est ici le propos.

Sont discutées en premier lieu cinq familles de modèles qui, par les formulations que nous en donnons, sont regroupées sous une métaphore mécanique, la **métaphore des forces**. Ces cinq familles sont :

- Les dynamiques d'agents en interaction avec des champs de potentiels ;
- Les dynamiques d'agrégation-répulsion ;
- Les dynamiques de polarisation ;

- Les dynamiques de reproduction-dissémination ;
- Les dynamiques proies-prédateurs.

À chaque fois, nous illustrons la famille par un modèle simple dit **modèle minimal**, construit pour les besoins de l'exposition, puis nous élargissons à des variantes d'intérêt. Une discussion relevant d'une métaphore sociale désignée par **métaphore des jeux** nous permet ensuite de sortir d'une approche strictement mécanique pour examiner plus brièvement la formalisation des notions d'objectifs individuels et collectifs, d'incertitude, d'adaptation des comportements et d'apprentissage, au croisement des modèles à base d'agents et des théories de la décision. Enfin nous terminons, dans une brève conclusion, par un essai de synthèse où nous tenterons de dégager une certaine unité au sein de cette diversité.

8.2 LA MÉTAPHORE DES FORCES

Les modèles génériques considérés dans les prochaines sections sont construits sur une métaphore mécanique de champs de forces. Ce champ de forces se déploie sur les positions d'un « espace », et agit sur les agents présents sur ces positions.

Un tel contexte s'exprime ici de la manière suivante : un certain attribut ou point de vue x [1] possède un co-domaine X doté d'une topologie. La valeur du point de vue pour chaque agent est ainsi assimilée à une « position » dans l'espace X. On peut donc identifier *les agents situés à l'instant t au voisinage d'une valeur* $x \in X$ donnée : ceux pour lesquels la position x_i^t est proche de x. Le système dans son état $\{s_l\}^t$ exerce une influence ou force $F\left(x, \{s_l\}^t\right)$ sur tout agent i au voisinage de x. Cette force provoque chez ces agents des évolutions modifiant leur état individuel. Dans des modèles mettant en œuvre des processus démographiques, la force $F\left(x, \{s_l\}^t\right)$ peut contrôler l'apparition de nouveaux agents, qui intègrent alors le système avec des positions x_i^t proches de x.

Champ de forces et représentation des interactions — Il n'est pas étonnant que la mécanique et la physique soient la source de métaphores pour penser les interactions au sein des systèmes d'agents. De fait, nombre de travaux parlent de **forces sociales** exercées par la collectivité des agents sur chacun d'entre eux. Que ces forces soient de réelles contraintes physiques ou des signaux auxquels les agents réagissent importe peu, les mécanismes en jeu s'exprimant formellement de la même façon. Ces métaphores combinent deux idées :

1) Chaque agent réagit à une influence exercée par le système. Cette influence *se résume en une grandeur scalaire ou en un vecteur de faible dimension.*

2) Chaque agent contribue à cette influence du système, mais sa part individuelle se « dissout », se fusionne avec celle des autres dans cette grandeur simple.

1. Le symbole x est utilisé dans la suite du chapitre pour désigner un point de vue exprimant une position dans un espace métrique ou topologique.

Cette expression de l'influence est calculable pour chaque valeur possible de l'état individuel des agents pouvant la subir, indépendamment de la présence ou de l'absence d'agents dans ces états. L'influence, ainsi calculée en chaque « point » de l'espace des états individuels, est une influence potentielle, qui ne s'actualise qu'en présence d'un agent en ce point. L'inspiration mécanique est bien sûr renforcée lorsque l'espace X sur lequel se déploie le champ de forces est celui des positions physiques des agents, et que l'effet de ces forces est un déplacement.

> Plusieurs des exemples donnés en première partie se rattachent au moins partiellement à ce schéma général. Ainsi en est-il des modèles BIOFILMS. On y trouve en effet un champ se déployant dans un espace continu, le champ des concentrations des différents solutés, qui possède une dynamique autonome d'advection/réaction/diffusion. On y trouve également des agents situés, qui à la fois agissent sur ce champ et en subissent l'influence, dans la dynamique de leurs biomasses et de leurs positions. On y trouve enfin un aspect démographique — reproduction et mortalité — également contrôlé par le champ des concentrations. Ainsi en est-il également du modèle SIMANCHOIS. L'action ne s'exerce cette fois-ci que dans un seul sens : action de l'environnement — le champ des courants marins — sur la trajectoire de chaque agent. Dans RIVAGE, le champ environnemental — l'altitude du sol et l'épaisseur de la lame d'eau — génère des forces déterminant le mouvement des paquets d'eau. Mais il est déterminé lui-même à chaque instant par la configuration des positions de ces paquets et n'a pas de dynamique propre.

Un tel schéma laisse ainsi la place à une grande diversité de modèles. Ces modèles se distinguent par la complexité de l'interaction entre les agents et le champ de forces et le degré d'autonomie de ce dernier. Nous étudions d'abord une famille générale de modèles inspirée des travaux de Frank Schweitzer[2]. Dans cette famille de modèles, le champ de forces dérive d'un potentiel et possède une dynamique qui lui est propre. Nous analysons ensuite deux familles particulières, celle des « modèles d'agrégation/répulsion » et celle des « modèles de polarisation ». Dans ces deux familles, le champ de forces n'a pas vraiment d'existence autonome, il n'est qu'un intermédiaire de calcul, du moins peut-on le prendre comme tel. Nous présentons enfin deux dernières familles de modèles comportant des dynamiques démographiques, répertoriées comme « dynamiques de reproduction/dissémination » et « dynamiques prédateurs/proies ». Des champs de forces contrôlent toujours tout ou partie du destin du système. Mais ils n'agissent plus alors seulement sur l'état individuel des agents, mais également sur leur apparition et leur disparition.

8.3 DYNAMIQUES D'AGENTS ET CHAMPS DE POTENTIELS

La classe de modèles ainsi référencée se caractérise par les traits suivants :

- un champ de forces dérivant d'un champ de potentiel ;
- une dynamique autonome de ce champ de potentiel, lequel possède une existence propre, partiellement indépendante des agents sur lequel il agit et qui en retour le modifient.

2. (Schweitzer 2003)

Champ de potentiel et champ de forces — Un champ de potentiel attribue à chaque position x une valeur qui est un simple nombre. La métaphore usuelle de représentation d'un tel champ est un « paysage », la valeur du champ étant l'altitude. Le champ de forces associé est un champ de vecteurs, chaque vecteur donnant en son point d'attache la direction et l'intensité de **la plus grande pente** — à savoir l'opposé du **vecteur gradient** du champ en ce point.

Nous illustrons d'abord cette classe dans une version simple (Schweitzer 1997), prise comme modèle minimal, représentée par les figures 10.1.et 10.2. Dans un second temps, nous élargissons cette première version à différentes variantes sur un axe allant du plus simple au plus complexe.

> Pour mieux interpréter ce modèle, il est utile de garder à l'esprit au moins deux exemples différents. Le premier met en œuvre des agents produisant autour d'eux une substance qui attire les autres agents ou les repousse, substance dont la concentration est affectée par des mécanismes de dégradation et de diffusion. Le second met en œuvre une ressource ayant sa propre dynamique de croissance et d'expansion spatiale, recherchée et consommée par des agents.

8.3.1 Un modèle minimal

Deux catégories d'agents sont mises en œuvre. La première catégorie ne comprend qu'un seul agent, l'Environnement[3], qui matérialise l'espace physique. La seconde catégorie est celle des agents qui évoluent dans cet environnement, ou « agents situés ».

Les attributs des **agents situés** sont la position physique x, la vitesse v, auxquels s'ajoutent un état interne θ, une capacité d'influence sur le potentiel λ, une sensibilité au potentiel α. Les valeurs de ces deux derniers attributs sont des fonctions[4] de l'état interne. S'ajoute enfin une réactivité interne η à différents facteurs.

Les attributs de l'**Environnement** sont des **champs,** leurs valeurs sont des fonctions réelles définies sur l'ensemble X des positions physiques. Dans le cas qui nous occupe plusieurs champs scalaires sont utilisés ; les trois premiers champs contrôlent les mouvements physiques des agents : ils spécifient respectivement sur chaque position x un *potentiel* $V^t(x)$, le seul à pouvoir varier dans le temps, un coefficient de **résistance au mouvement** $\gamma(x)$, enfin un paramètre **d'agitation aléatoire** $\sigma(x)$. Les deux derniers champs contrôlent la dynamique du potentiel : ils spécifient sur chaque position x un taux $k(x)$ — s'interprétant selon son signe comme un taux de dégradation ou un taux de croissance — et un coefficient de diffusion $D(x)$.

---

3. Considérer l'environnement comme un agent est conforme au parti pris adopté en début de chapitre. Ce parti pris est de considérer comme agent toute entité porteuse d'une information nécessaire à la spécification des mécanismes contrôlant la dynamique du système.

4. Considérer que les valeurs d'un attribut puissent être des fonctions est également conforme à la conception des attributs et des points de vue introduite en début de chapitre. La seule condition posée est que l'on puisse rattacher les co-domaines de ces attributs et points de vue à des structures mathématiques identifiées, ici des ensembles de fonctions.

Trois mécanismes, dans cet exemple minimal, sont à l'œuvre :

- celui déterminant les mouvements des agents dans l'espace physique X ;
- celui déterminant l'évolution des champs :
- celui déterminant l'évolution des agents dans l'espace des états internes.

a) Équations des mouvements

Les équations du mouvement expriment l'effet des trois forces auxquelles chaque agent situé est soumis sur sa position à chaque instant. La première force est colinéaire au gradient du potentiel et donc à la ligne de plus grande pente. Dirigée dans le sens opposé du gradient, elle entraîne l'agent vers une région de l'espace physique où le potentiel est plus faible. Dirigée dans le même sens, elle entraîne les agents vers des potentiels plus importants. La seconde force oppose au mouvement une résistance dépendant linéairement de la vitesse[5]. La troisième est une force « purement » aléatoire : sa loi de probabilité sur une position donnée à un instant donné est une gaussienne de moyenne nulle et d'écart type fixé. Il n'y a aucune corrélation entre les valeurs que prend cette force, ni dans le temps, ni dans l'espace. L'addition de ces trois forces donne l'accélération. En complétant par la relation liant l'évolution de la position à la vitesse, on est conduit à écrire, *pour chaque agent i*, le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \frac{dx_i^t}{dt} &= v_i^t \\ \frac{dv_i^t}{dt} &= -\alpha_i\left(\theta_i^t\right)\frac{\partial}{\partial x}V^t\left(x_i^t\right) - \gamma\left(x_i^t\right)v_i^t + \sigma\left(x_i^t\right)\xi_i^t \end{aligned} \tag{8.1}$$

où ξ_i^t est un tirage au sort — effectué indépendamment à chaque instant et pour chaque agent — dans une loi de probabilité gaussienne de moyenne nulle et d'écart type 1.

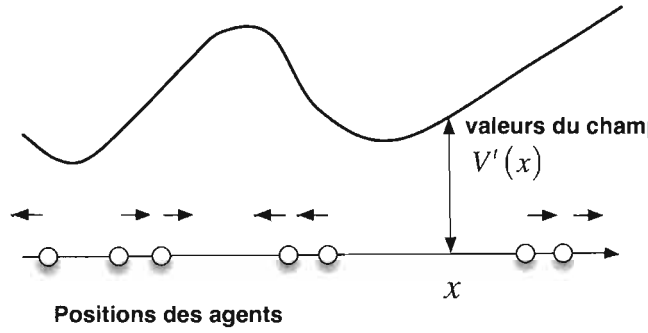


Figure 8.1 Influence du champ sur le mouvement des agents ;
(ici $\alpha_i(\theta) < 0$: les agents se déplacent vers des potentiels plus importants,
cas attraction vers une ressource ou vers une substance d'appel).

5. Plus la vitesse est grande, plus la résistance est forte. La linéarité de la relation résulte de la transposition dans le modèle d'une relation empirique observée en mécanique, valide dans plusieurs contextes.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Les équations intègrent par l'intervention de $\alpha_i(\theta)$ le fait que la sensibilité des agents à l'influence du potentiel peut varier d'un agent à l'autre et que, pour le même agent, elle varie en fonction de son état interne. Ainsi un agent réagira-t-il différemment selon son état, et deux agents dans le même état pourront réagir de façon différente. Elles intègrent également une hétérogénéité spatiale de l'environnement quant à la résistance aux mouvements, à travers $\gamma(x)$, et quant à l'écart type de la part aléatoire, à travers $\sigma(x)$.

Du fait de la présence du terme aléatoire $\sigma\left(x_i^t\right)\xi_i^t$, l'accélération d'un agent est continuellement changeante. C'est une fonction discontinue du temps. La vitesse d'un agent est au contraire une fonction continue du temps, **mais elle n'est pas dérivable**. On ne peut en effet assigner de limite au rapport

$$\frac{v_i^{t+\Delta t} - v_i^t}{\Delta t}$$

lorsque $\Delta t \to 0$. Dans la théorie des **équations différentielles stochastiques**, les équations (8.1) s'écrivent plus couramment sous la forme :

$$\begin{aligned} dx_i^t &= v_i^t dt \\ dv_i^t &= -\alpha_i\left(\theta_i^t\right)\frac{\partial}{\partial x}V^t\left(x_i^t\right)dt - \gamma\left(x_i^t\right)v_i^t dt + \sigma\left(x_i^t\right)dW_i^t \end{aligned} \tag{8.2}$$

forme[6] que nous adopterons désormais.

b) Équation d'évolution du potentiel

Dans le modèle minimal choisi comme exemple, la dynamique du potentiel est la résultante de trois mécanismes. En premier lieu un mécanisme autonome de dégradation ou de régénération, modifiant positivement ou négativement le potentiel avec une vitesse dépendant de la position ; un mécanisme de diffusion, qui tend à gommer son hétérogénéité spatiale ; enfin un mécanisme de production ou de consommation dues à l'action des agents.

La dynamique de la valeur du potentiel en chaque point x est ainsi donnée par l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}V^t(x) = -k(x)V^t(x) + \frac{\partial}{\partial x}\left(D(x)\frac{\partial}{\partial x}V^t(x)\right) + \sum_i \lambda_i\left(\theta_i^t, |x - x_i^t|\right) \tag{8.3}$$

Dans cette équation, la dynamique du potentiel en un point x est bien la somme de trois termes. Dans l'ordre de l'apparition dans le second membre de l'équation, nous reconnaissons :

6. dW_i est le symbole différentiel d'un processus stochastique dit « de Wiener » dont la définition et les propriétés sont celles d'une marche purement aléatoire dans un espace et un temps continus (Cf. Annexe (§ 10.2))

- Le terme de variation autonome, en l'occurrence exponentiel, signifiant par exemple si $k(x) > 0$ la dégradation d'une substance, l'évaporation d'une trace, l'effacement progressif d'une information : Plus $k(x)$ est grand, plus la diminution de la valeur du potentiel prise en ce point x est rapide, si aucun phénomène compensatoire n'a lieu.
- Le terme de diffusion, permettant au potentiel de s'étaler et donc à une perturbation affectant sa valeur en un point de se propager avec une vitesse fonction de la valeur $D(x)$ de la diffusion en ce point.
- Le terme exprimant la somme des contributions — négatives ou positives de chaque agent à l'existence du potentiel et son évolution dans le temps. Ces contributions sont supposées agir localement, dans la position occupée par l'agent à chaque instant ou dans un voisinage immédiat.

La valeur de la fonction $\lambda_i\left(\theta_i^t, |x - x_i^t|\right)$ exprime l'influence exercée par l'agent i sur la dynamique de la valeur du champ sur une position x quelconque. Cette influence est censée être négligeable dès que la distance entre la position x_i de l'agent et la position x est supérieure à un certain seuil, qui peut par ailleurs dépendre de l'état interne θ_i de l'agent. Dans la généralité de ce modèle minimal, les capacités d'influences des agents peuvent varier selon leur état interne, et elles peuvent être différentes d'un agent à l'autre pour une même valeur de cet état.

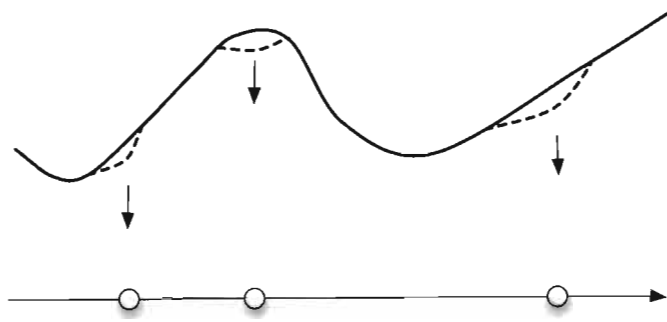


Figure 8.2 Influence locale des agents sur le potentiel ;
(ici $\lambda_i\left(\theta_i, |x - x_i|\right) \leqslant 0$: tendance à diminuer le potentiel au voisinage immédiat de l'agent, cas de la consommation d'une ressource).

Dans l'exemple schématisé dans la figure 8.2, la quantité $\lambda_i\left(\theta_i^t, |x - x_i^t|\right) dt$ mesure l'effet, sur la densité de ressource disponible en x, de la consommation de l'agent i pendant le petit intervalle de temps dt. L'intégrale $\left(\int \lambda_i(\theta_i^t, |x - x_i^t|)dx\right)dt$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

est alors la quantité totale de ressource consommée[7] par l'agent pendant cet intervalle de temps. D'une manière générale, on conçoit que l'influence d'un agent sur le champ soit très localisée[8].

c) Équations des états internes

La dynamique des états internes peut résulter de processus très divers. Pour reprendre l'interprétation du modèle minimal en terme de consommation d'une ressource, l'état interne θ_i^t d'un agent sera par exemple la valeur d'une biomasse ou d'une énergie accumulée. Une équation reliant l'évolution de cette biomasse à la consommation C_i^t pourra avoir la forme différentielle :

$$\frac{d\theta_i^t}{dt} = \eta_i\left(\theta_i^t, C_i^t\right) \quad \text{avec} \quad C_i^t = \int \lambda_i\left(\theta_i^t, |x - x_i^t|\right) dx$$

L'état interne peut être au contraire une valeur discrète, par exemple une opinion, une attitude, une disponibilité, un engagement dans telle ou telle activité. Sa dynamique propre sera alors exprimée par l'expression des probabilités des transitions possibles. Par exemple la probabilité $P\left(-\theta_i \,|\theta_i\right)$ de changer d'opinion dans un ensemble d'opinions binaires, dépendant de la valeur du potentiel dans la position actuelle de l'agent.

8.3.2 Vers des modèles plus complexes

Par nature, le cadre général illustré par notre modèle minimal se prête à de nombreuses adaptations. Trois d'entre elles nous paraissent devoir être mentionnées ici :

- La première, pour sa fréquence d'usage.
- La deuxième, pour sa portée conceptuelle : introduction de métaphores de communication et de réseaux sociaux.
- La troisième, car elle souligne *a contrario* le caractère particulier du schéma d'interactions envisagé jusqu'à présent.

8.3.3 Mouvements amortis

La première adaptation est une simplification des équations de mouvements, résultant d'un amortissement des accélérations lorsque les coefficients $\gamma(x)$ de résistance de l'environnement au mouvement des agents sont suffisamment élevés. Si la réactivité

7. Pour que ce modèle soit acceptable, il faut supposer cependant que la densité de ressource n'est pas facteur limitant et que l'agent peut consommer selon ses besoins. Dans le cas contraire, il faudrait multiplier λ_i par la valeur du potentiel, pour un prélèvement relatif et non plus absolu.

8. Dans (Schweitzer 1997) déjà cité, cette influence est purement ponctuelle et est exprimée *par une fonction de Dirac*. L'expression faisant intervenir des fonctions λ_i est une généralisation naturelle.

des agents au gradient du potentiel reste forte[9], la quantité :

$$\frac{1}{\gamma\left(x_i^t\right)}\frac{dv_i^t}{dt}$$

devient et reste constamment négligeable devant les autres termes obtenus en divisant la deuxième équation du système (8.2) par $\gamma\left(x_i^t\right)$. La constitution et le maintien d'un équilibre entre forces de résistance et action du potentiel permettent d'écrire pour chaque agent i :

$$dx_i^t = -\frac{\alpha_i\left(\theta_i^t\right)}{\gamma\left(x_i^t\right)}\frac{\partial}{\partial x}V^t\left(x_i^t\right)dt + \frac{\sigma\left(x_i^t\right)}{\gamma\left(x_i^t\right)}dW_i^t \tag{8.4}$$

En supposant les coefficients de résistance spatialement uniformes et l'unité de distance prise de manière à ce que leur valeur commune soit égale à 1, cette équation se réécrit sous la forme très fréquemment rencontrée :

$$dx_i^t = -\alpha_i\left(\theta_i^t\right)\frac{\partial}{\partial x}V^t\left(x_i^t\right)dt + \sigma\left(x_i^t\right)dW_i^t \tag{8.5}$$

8.3.4 Interactions plus ciblées

La seconde adaptation[10] consiste à considérer un champ de potentiel non plus scalaire mais multidimensionnel, fonction de x mais aussi de θ. Chaque composante $V^t(\theta, x)$du champ, pour θ donné, est liée à l'un des états internes possibles. *Seuls les agents se trouvant dans cet état interne contribuent à cette composante et y sont sensibles*. Cette adaptation met donc en place une influence spécifique entre agents se trouvant dans le même état.

On peut par extension imaginer une version intermédiaire entre ces interactions très spécifiques — imposant pour avoir lieu l'identité des états individuels — et les interactions indifférenciées médiatisées par le potentiel scalaire. Dans une telle version, l'ensemble des états possède une topologie. Les contributions des agents portent, non pas sur les seules composantes correspondant à leur état interne exact, mais aussi sur des composantes associées à des états voisins. De même pour les sensibilités.

9. Conditions de *limite visqueuse*, s'appliquant par exemple à la chute d'un corps dans l'air. Dans le cadre de la théorie du mouvement brownien et des phénomènes de diffusion, l'approximation réalisée en passant de (8.1) à (8.4) est appelée approximation de *Einstein-Smoluchowski.*

10. (Schweitzer and Zimmermann 2001)

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Dans cette extension, la prise en compte d'écarts $|\theta - \theta_i|$ dans les capacités d'influence et dans les sensibilités permet de *modéliser des interactions « sociales » entre agents dont les états internes sont proches*, à travers des équations de la forme :

$$\begin{aligned} dx_i^t &= -dt \int_\theta \alpha_i \left(\theta_i^t, |\theta - \theta_i^t|\right) \frac{\partial}{\partial x} V^t \left(\theta, x_i^t\right) d\theta + \sigma \left(x_i^t\right) dW_i^t \\ \frac{\partial}{\partial t} V^t (\theta, x) &= -k (\theta, x) V^t (\theta, x) + \frac{\partial}{\partial x} \left(D (\theta, x) \frac{\partial}{\partial x} V^t (\theta, x) \right) \\ &\quad + \int_\theta \sum_i \lambda_i \left(\theta_i^t, |x - x_i^t|, |\theta - \theta_i^t|\right) d\theta \end{aligned} \tag{8.6}$$

transposées des équations (8.2) — pour les équations de mouvement — et (8.3) — pour l'équation d'évolution du potentiel.

8.3.5 Influences non séparables

La troisième adaptation porte son attention sur les contributions des agents à la dynamique du champ. Dans l'équation de champ, chaque agent apporte une contribution individuelle qui ne dépend que de son état interne et de la distance séparant sa propre position de la position x où la variation du champ est évaluée. La contribution totale est la somme de ces contributions individuelles. C'est le schéma d'interactions le plus courant, dans lequel chaque agent exerce une influence séparée, indépendante du reste de l'état du système. Nous l'appellerons schéma binaire, dans la mesure où il mobilise une somme de termes faisant intervenir deux positions seulement.

Rien n'oblige bien sûr à ce qu'il en soit ainsi. On peut imaginer par exemple un schéma ternaire[11], mobilisant des termes de la forme $\lambda_i \left(\theta_i, x, x_i, x_j\right)$: l'influence particulière d'un agent i est alors modulée par la localisation des autres agents pris l'un après l'autre, et s'exprime par $\lambda_i \left(\theta_i, |x - x_i|\right) + \sum_{j \neq i} \lambda_i \left(\theta_i, x, x_i, x_j\right)$. La combinaison de l'influence des agents peut être plus complexe encore. L'écriture de la dépendance entre l'évolution du champ sur chaque position et l'état du système $\{s_l\}^t$, généralisant l'équation (8.3) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} V^t (x) = -k (x) V^t (x) + \frac{\partial}{\partial x} \left(D (x) \frac{\partial}{\partial x} V^t (x) \right) + f \left(x, \{s_l\}^t\right) \tag{8.7}$$

où la fonction f est un attribut de l'environnement.

11. Non pairwise interactions. Pour une courte discussion sur de telles interactions on se référera à l'article de Mogliner (Mogilner et al., 2003) cité plus loin. Cette discussion concerne les dynamiques d'agrégation/répulsion, mais elle peut être étendue au cas présent.

8.4 DYNAMIQUES D'AGRÉGATION/RÉPULSION

Les comportements agrégatifs sont courants dans la nature et à toutes les échelles. Déjà présents au niveau physico-chimique, ils sont très prégnants dans le monde du vivant. Il semble bien que vivre en groupe soit utile pour se protéger des prédateurs, rechercher plus efficacement sa nourriture, se reproduire. Encore faut-il que chaque être dispose de l'espace minimal sans lequel on ne pourrait lui attribuer une quelconque autonomie. D'où l'association fréquente de processus de répulsion, intervenant à courtes distances lorsque les unités deviennent trop proches.

De fait, les comportements d'agrégation/répulsion font l'objet de très nombreux travaux, au niveau de l'observation, de la caractérisation des dynamiques observées, de la modélisation des mécanismes en jeu, de la réflexion sur leur rôle fonctionnel et sur les conditions de leur émergence au cours de l'évolution. On se référera notamment à l'ouvrage collectif édité par J.K. Parrish et W.M. Hammer (Parrish and Hammer 1997) qui aborde tous ces points. Concernant spécifiquement la modélisation de leurs mécanismes, sujet qui nous occupe ici, la littérature, en éthologie par exemple, montre une forte prégnance d'approches inspirées de la mécanique, comme en témoignent parfois les titres même des articles (Niwa 1996) (Mogilner, Edelstein-Keshet et al. 2003). C'est à partir de ce point de vue qu'est introduite ici la classe des modèles d'attraction/répulsion.

8.4.1 Un modèle minimal

Des agents situés créent un potentiel en chaque point de l'espace physique dans lequel ils se meuvent, et réagissent à ce potentiel. Ce potentiel est essentiellement attractif, en ce sens qu'il induit chez les agents un mouvement qui tend à les rapprocher les uns des autres, jusqu'à une distance limite en deçà de laquelle une force de répulsion se manifeste, qui leur permet de s'éviter. Le mécanisme d'attraction/répulsion entre en compétition avec un mécanisme de résistance au mouvement et un mécanisme de déplacement aléatoire.

a) Équations du mouvement

Dans le modèle minimal choisi ici, les équations de mouvement reprennent les formes (8.1) et (8.5) de la section précédente, soit :

$$\begin{aligned} dx_i^t &= v_i^t dt \\ dv_i^t &= -\alpha_i \frac{\partial}{\partial x} V^t\left(x_i^t\right) dt - \gamma\left(x_i^t\right) v_i^t dt + \sigma\left(x_i^t\right) dW_i^t \end{aligned} \tag{8.8}$$

ou encore, dans la forme « amortie »,

$$dx_i^t = -\alpha_i \frac{\partial}{\partial x} V^t\left(x_i^t\right) dt + \sigma\left(x_i^t\right) dW_i^t \tag{8.9}$$

Ce modèle minimal ne mobilise pas d'état interne θ modulant la réaction de chaque agent au gradient du potentiel. Mais c'est l'expression de V^t qui marque la différence

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

d'avec le cas où ce potentiel possède une dynamique autonome : le champ V^t *est maintenant donné directement* et non par l'intermédiaire d'une équation d'évolution. Son expression traduit sa dépendance par rapport à l'état $\{s_l\}^t$ du système *au même instant* :

$$V^t(x) = U\left(x, \{s_l\}^t\right) \tag{8.10}$$

Le potentiel n'a pas d'autonomie propre. C'est une variable intermédiaire. Son caractère attractif s'inscrit dans les propriétés de la fonction U ; les réactivités α_i étant considérées comme positives, la valeur de U devra décroître lorsque la position x se rapproche du « gros » des positions des agents. Son caractère répulsif à courte distance se marquera par la tendance à croître, au contraire, lorsque x devient trop proche de la position d'un agent particulier.

Contrairement aux potentiels de la section précédente, le potentiel considéré ici traduit une action « à distance », *immédiate*, des agents les uns sur les autres[12]. Le délai de la transmission du signal, supposé être le média de cette action, est considéré comme négligeable et ne devant donc pas être pris ne compte. C'est cette suppression de la distance qui amène à qualifier les modèles considérés de « non locaux » (Lee, Hoopes et al. 2001).

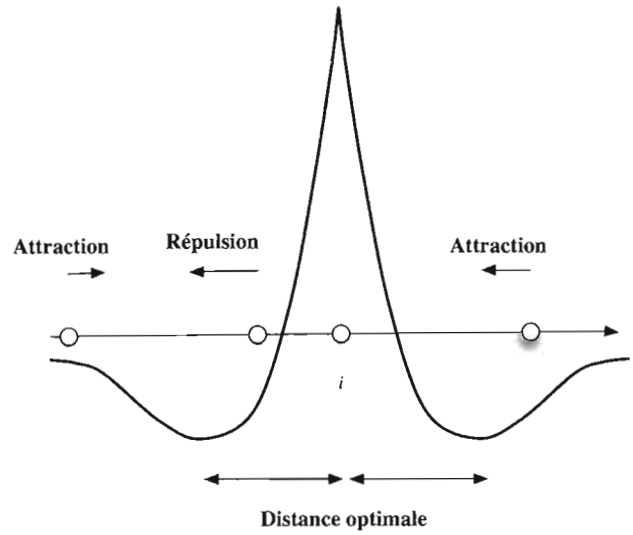


Figure 8.3 Potentiel d'attraction, répulsion autour de l'agent i, lorsque $\alpha_i > 0$.

12. Dans certaines conditions, il peut être considéré comme une limite d'un potentiel possédant une dynamique autonome, lorsque cette dernière est suffisamment rapide par rapport au mouvement des agents, pour qu'à tout moment ce potentiel atteigne le voisinage d'une solution d'équilibre stable avant que les positions des agents aient sensiblement changées.

b) Formes du potentiel

Dans les versions les plus simples $U\left(x, \{s_l\}^t\right)$ne dépend, en dehors de paramètres communs, que des positions des agents. En particulier les identifiants des agents n'interviennent pas — en tant que valeurs — dans la détermination du potentiel. Dans les conventions de notations présentées au chapitre 7, l'influence de l'état $\{s_l\}$ du système ne s'effectue que par le biais des projections $\{\pi_X x_l\}$constituant la configuration des seules valeurs de position. *Aucun agent ne possède de par son identité, une place particulière dans la collectivité*, et l'ordre dans lequel ils apparaissent dans l'expression analytique de la fonction U n'a aucune conséquence quant à la dynamique du système. D'autres invariances sont souvent présentes, telle l'invariance par déplacement euclidien, exprimant le fait que *seules comptent les positions relatives* des agents les uns par rapport aux autres et par rapport au point où leur influence collective est évaluée, et non les positions absolues dans l'espace. Il est enfin très généralement supposé que *l'influence d'un agent est indépendante de celle des autres agents* — les interactions sont binaires — et que ces influences s'additionnent. L'ensemble de ces propriétés donne alors pour le potentiel des expressions ayant la forme générale[13] :

$$U(x, \{s_l\}) = \sum_i U_i\left(|x - x_i|\right)$$

Exemples de potentiels d'attraction/répulsion

Formule de Breder[14] : donne l'influence exercée en x par un agent situé en x_i.

$$U_i\left(|x - x_i|\right) = a\,|x - x_i| + \frac{b}{|x - x_i|}$$

avec $a > 0, b > 0$

Potentiels de type « Lennard-Jones »[15], généralisation des précédents sous la forme :

$$U_i\left(|x - x_i|\right) = \left(-\frac{a}{|x - x_i|^m} + \frac{b}{|x - x_i|^n}\right)$$

avec $a > 0, b > 0, n > m$

13. Dans les expressions des potentiels comme dans celles des fonctions d'énergie ci-après, une attention particulière doit être portée sur les conditions de dérivabilités nécessaires aux développements analytiques. Ce point est ici négligé ; la question est reconsidérée au dernier chapitre de la présente partie.

14. La formule donnée ici est celle du potentiel, et non de la force qui en dérive.

15. Cette formule avait également été imaginée par Breder. Le cas $n = 12$ $m = 6$, celui de Lennard-Jones a été particulièrement étudié et utilisé en physique pour modéliser les forces d'interactions entre atomes ou molécules.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Autres formules [Ogata & Tanemura][16]

$$U_i\left(|x - x_i|\right) = -\ln\left(1 + \left(a\,|x - x_i| - 1\right) e^{-b|x-x_i|^2}\right)$$
$$U_i\left(|x - x_i|\right) = -\ln\left(1 + ae^{-b|x-x_i|^2}\right)$$

avec $a > 0, b > 0$

Pour tous ces potentiels, la forme de l'influence exercée est la même pour tous les agents. Elle varie de façon continue avec la distance $|x - x_i|$. Elle est bien répulsive à courte distance, attractive à longue distance, en passant par une valeur nulle. Les valeurs limites de cette influence, lorsque $|x - x_i| \to 0$ et $|x - x_i| \to \infty$ varient selon les formules considérées et leurs paramètres.

Potentiels en escalier :

$$U_i\left(|x - x_i|\right) = \infty \quad \text{si } |x - x_i| \leqslant h$$
$$U_i\left(|x - x_i|\right) = -b \quad \text{si } h < |x - x_i| \leqslant R$$
$$U_i\left(|x - x_i|\right) = 0 \quad \text{si } |x - x_i| > R$$

8.4.2 Vers des modèles plus complexes

La diversité des fonctions potentielles mise en évidence dans l'encadré n'est qu'un aspect de la diversité des modèles d'agrégation/répulsion que l'on rencontre dans la littérature qui leur est consacrée. Si l'inspiration mécanique reste souvent présente, de nombreuses variantes ont cours, visant à tenir compte de la spécificité des domaines étudiés. Dans plusieurs modèles par exemple, les agents prennent également en compte les vitesses et les orientations des autres agents — et non leurs seules positions — dans la détermination de leur comportement. La dynamique combine alors les mécanismes d'agrégation/répulsion avec des mécanismes d'alignement ou de **polarisation**.

Il nous a paru ici utile de relever deux types de variantes :

- Le premier ouvre une discussion sur les rapports entre deux approches des comportements individuels : comportements individuels modélisés comme réaction à un stress local, visant à diminuer ce stress pour l'agent qui y est soumis ; comportements individuels modélisés comme recherche d'un optimum pour le système dans sa globalité.
- Le second s'éloigne d'un schéma purement mécanique d'influences subies, pour introduire chez les agents un contrôle de leurs interactions plus élaboré.

16. Ces formules sont extraites de (Stoyan et al., 1995, p. 174). On peut aussi se référer à l'article de Mogilner (Mogilner et al., 2003) déjà cité.

8.4.3 De la réaction à un stress local à la recherche d'un optimum global

Dans un système mécanique de particules s'attirant ou se repoussant les unes les autres selon leurs distances mutuelles, mais sans échange avec l'extérieur ou avec un substrat, il y a conservation de l'énergie globale.

On observe alors une dynamique complexe, au cours de laquelle cette énergie est constamment transférée de sa forme potentielle (fonction des distances) vers sa forme cinétique (fonction des vitesses). Il n'en est plus de même, dès que l'on fait intervenir des résistances par lesquelles le système cède peu à peu son énergie à l'extérieur, jusqu'à parvenir à un état d'énergie cinétique nulle et d'énergie potentielle minimale. L'existence d'un bruit constitue au contraire un apport d'énergie.

La perte d'énergie due à la résistance du milieu et l'apport dû à l'agitation thermique peuvent finir par se compenser et conduire le système à se stabiliser dans un état d'équilibre stochastique. Le niveau moyen de l'énergie dans cet état est alors supérieur au niveau d'énergie minimale du système.

Ces considérations issues de la mécanique et de la physique statistique peuvent aider à interpréter les dynamiques des modèles d'attraction/répulsion à base d'agents et à imaginer de nouvelles manières de spécifier de tels modèles.

Dans les formulations données précédemment, le comportement d'un agent est déterminé par une combinaison locale des influences exercées par les autres agents. Les équations traduisent la tendance de l'agent à diminuer par son déplacement le stress auquel il est soumis en se rapprochant des autres agents lorsqu'il en est trop éloigné, et en s'en éloignant lorsqu'il en est trop proche. Mais on peut concevoir des modèles dans lesquels les agents cherchent à optimiser, non pas leur situation propre, mais celle du système qu'ils forment.

Considérons donc un modèle d'agents dans lequel les mouvements des agents sont contrôlés par les équations[17] :

$$dx_i^l = -\frac{\partial}{\partial x_i} H\left(\{s_l\}^t\right) dt$$

où $H\left(\{s_l\}^t\right)$ est une fonction de l'état du système, dite fonction d'énergie, dont les valeurs sont grandes lorsque les agents sont très éloignés les uns des autres, diminuent lorsque les distances entre agents deviennent plus faibles, pour croître à nouveau si l'une de ces distances passe en dessous d'un certain seuil.

17. Dans notre convention d'écriture, la dérivée partielle se rapporte à la variation de la position (attribut x) de l'agent i, composante de l'état s_i^l de cet agent, elle-même élément de l'état du système $\{s_l\}^t$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Supposons que les seules variations susceptibles de modifier la valeur de H, à travers l'évolution de l'état du système, soient les positions des agents. Un calcul simple montre que la variation de la fonction H lors d'un petit intervalle de temps dt de la vie du système s'écrit[18] :

$$dH\left(\{s_l\}^t\right) = -\sum_i \left[\frac{\partial}{\partial x_i} H\left(\{s_l\}^t\right)\right]^2 dt$$

Le système évolue donc *dans le sens d'une diminution constante de la valeur de H au cours du temps*[19], jusqu'à ce qu'il atteigne éventuellement un état d'équilibre correspondant à une valeur minimale et ce, d'autant plus rapidement que les réactivités sont grandes. Les propriétés attribuées à la fonction H quant à sa relation aux distances entre agents conduisent, au moins au départ, à une contraction spatiale de l'ensemble des agents. *Le modèle rend donc bien compte d'une dynamique d'agrégation.*

Une telle version d'un modèle d'agrégation/répulsion peut à son tour intégrer un mécanisme aléatoire. Les équations de mouvements deviennent :

$$dx_i^t = -\frac{\partial}{\partial x_i} H\left(\{x_l\}^t\right) dt + \sigma\left(x_i^t\right) dW_i^t$$

Exemple d'une fonction H

En s'inspirant de la formule de Breder, on peut prendre :

$$H\left(\{s_l\}\right) = \frac{1}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} \left(a\,|x_i - x_j| + \frac{b}{|x_i - x_j|}\right)$$

la somme étant faite sur toutes les paires d'agents distincts. Si le coefficient b est nul, la contraction se poursuit jusqu'à ce que tous les agents soient rassemblés.

On peut se demander dans quelles conditions les deux versions — réactions à des influences locales et optimisation globale — sont équivalentes. Autrement dit dans quelles conditions le comportement individuel des agents réagissant à un stress local, contrôlé par un potentiel $U\left(x, \{s_l\}\right)$ conduit à une optimisation du système. Pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire qu'existe une fonction H réalisant :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} H\left(\{s_l\}\right) = \alpha_i \frac{\partial}{\partial x} U\left(x_i, \{s_l\}\right)$$

18. Comme dans la section précédente, les équations sont écrites dans un espace d'une seule dimension — droite réelle. Le lecteur transposera à d'autres espaces en utilisant la notation habituelle du gradient.

19. Il n'en serait par exemple pas ainsi si H dépendait des vitesses des agents, et non uniquement de leurs positions. Une telle fonction de l'état du système qui évolue ainsi nécessairement vers ses propres minima au cours du temps, et permet donc de repérer d'éventuels points d'équilibre de la dynamique, est pour ce système une *fonction de Lyapunov.*

Un calcul simple[20] montre que *la présence de symétries entre les actions*, l'absence d'action d'un agent sur lui-même et enfin *l'invariance géométrique de U par translation* suffisent à assurer l'existence d'une telle fonction H, dont l'expression est alors :

$$H\left(\{s_l\}\right) = \frac{1}{2}\sum_j \alpha_j U\left(x_j, \{s_l\}\right)$$

C'est-à-dire une combinaison linéaire des valeurs des potentiels pris sur les positions de chaque agent.

8.4.4 Des potentiels aux perceptions

Jusqu'à présent l'influence attractive ou répulsive subie par chaque agent, les positions des autres agents étant données, est fonction de sa seule position. Certes l'intervention des réactivités α_i peut moduler l'effet de cette influence, deux agents différents sur la même position pourront réagir différemment. Mais il s'agit d'une simple modulation multiplicative d'un résultat indépendant de l'agent i. Le calcul de ce résultat exprimé par la fonction $U\left(x, \{s_l\}\right)$ est de ce fait naturellement attribué à l'Environnement.

Il n'en est pas de même si l'on reporte sur les agents eux-mêmes la charge de calculer l'influence qu'ils subissent. On considère alors que ce calcul leur est propre, qu'il dépend de leur perception particulière de l'environnement. *Il n'y a plus un potentiel universel calculable indépendamment de l'agent, mais des fonctions de perception attachées à chaque agent.* Les expressions les plus simples de ces fonctions de perception auront la forme générale $F_i\left(x, \{s_l\}_{-i}\right)$ à valeur scalaire où x est cette fois-ci la position de l'agent, et non une position quelconque de l'espace physique, et $\{s_l\}_{-i}$ est l'état du système considéré sans l'agent i. Pour modéliser le mécanisme d'attraction/répulsion, l'intensité de la perception pourra être faible lorsque l'agent se trouve loin de ses partenaires, ou, au contraire, trop proche de l'un d'entre eux, et élevée lorsque l'agent se trouve bien intégré au groupe. Les équations de mouvement traduiront la tendance au déplacement vers de plus fortes valeurs de l'intensité des perceptions :

$$dx_i^t = \alpha_i \frac{\partial}{\partial x} F_i\left(x_i^t, \{s_l\}_{-i}^t\right) dt + \sigma\left(x_i^t\right) dW_i^t \qquad (8.11)$$

avec toujours l'intervention d'une réactivité venant moduler la prise en compte de la perception et d'une agitation aléatoire considérée comme ayant son origine dans l'Environnement.

Les fonctions F_i peuvent, au-delà de la position, s'enrichir d'autres attributs de l'agent venant moduler ses capacités perceptives. Ainsi la vitesse et son orientation déterminent-elles classiquement un angle de vision limitant le champ perceptif de l'agent.

20. Le calcul est détaillé dans l'Annexe (§ 8.1).

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

8.5 DYNAMIQUES DE POLARISATION

Dans les modèles précédents, une part essentielle de la dynamique consistait en des déplacements dans un espace physique, venant modifier à chaque instant l'intensité des interactions en œuvre sur chaque couple d'agents. La dynamique des états internes apparaissait comme exerçant un rôle secondaire de contrôle de la dynamique principale de nature spatiale. Nous abordons maintenant une classe de modèles où les agents sont spatialement fixes. *Des modèles dans lesquels* — c'est la caractéristique importante — *chaque agent interagit toujours avec les mêmes partenaires « voisins » et avec la même intensité au sein d'un réseau immuable.* La dynamique des états internes devient alors la première, voire la seule composante de la dynamique du système entier.

> Dans les exemples présentés en première partie, les plus proches de ce schéma sont le modèle GRANULAB et les modèles de dynamiques d'opinion. Le modèle d'Ising sert de référence à un grand nombre de modèles concernant des *dynamiques de contact,* dans lesquelles des éléments — espèces végétales ou animales, maladies, opinions — se propagent de proche en proche en se faisant concurrence sur les sites d'un même espace ou les nœuds d'un même réseau.

La démarche suivie est toujours d'illustrer la classe de modèles à partir d'une version simple, bien identifiée et étudiée théoriquement, et de tracer ensuite quelques variantes. Cette version est celle des « modèles d'Ising » ayant leur origine dans l'étude des phénomènes physiques du ferromagnétisme ou de l'antiferromagnétisme.

8.5.1 Un modèle minimal

Les modèles d'Ising mettent en œuvre des systèmes composés d'éléments magnétiques disposés en réseau et s'orientant en fonction de leurs voisins immédiats. Ils font l'objet d'une abondante littérature en physique statistique. De ce contexte nous retenons les éléments suivants : des agents situés de nature identique, appelés des *sites*, sont disposés de façon fixe dans un réseau géométrique régulier dans un espace à d dimensions.

Les attributs des **sites** sont la position dans le réseau ; de valeur fixe, elle sert d'identifiant et détermine le voisinage immédiat v de chaque site[21] ; l'orientation θ, variable[22]. Les valeurs observables des positions, donc des identifiants i des sites, sont dans $\mathbb{Z}^d$. Les valeurs observables des orientations θ_i sont deux modalités discrètes représentées conventionnellement par 1 et –1.

Les attributs de **l'Environnement** : l'énergie de liaison J et la température T. L'énergie de liaison est un réel, la température un réel positif ou nul.

Deux mécanismes entrent en jeu :

- un processus de mise en cohérence des orientations des différents sites ;

21. Les quatre sites nord, sud, est, ouest pour un réseau planaire. *Le site central i est exclu.*

22. L'orientation est assimilée à l'état interne des sections précédentes ; d'où la reprise de la notation θ.

- un mécanisme contrariant la tendance à la cohérence, ayant pour effet des changements aléatoires d'orientation.

Chacun des deux mécanismes est paramétré : le premier par l'énergie de liaison J, le second par la température T.

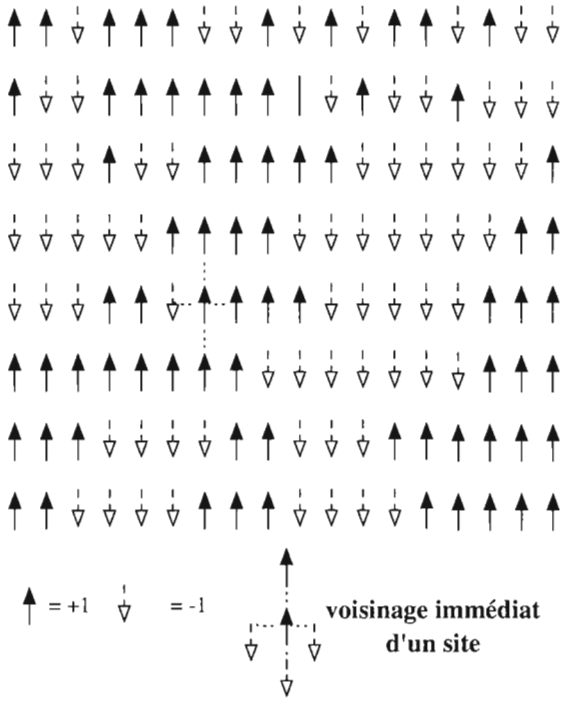


Figure 8.4 Réseau régulier planaire de sites orientés illustrant le modèle d'Ising.

a) Équations des transitions.

Le mécanisme de mise en cohérence est la tendance à adopter l'orientation majoritaire du voisinage, lorsque la constante de couplage est positive, et à adopter au contraire l'orientation minoritaire — voire totalement absente du voisinage — lorsque cette constante est négative. L'expression de ce mécanisme met en jeu le calcul d'un potentiel. Chaque site i est soumis à un potentiel local U_i. Chacun des sites appartenant au voisinage immédiat v_i du site i contribue à ce potentiel en fonction de son orientation θ_j et de la valeur de la constante J. La valeur du potentiel, somme de toutes ces contributions, est :

$$U_i = \sum_{j \in v_i} J\theta_j$$

Le signe — positif ou négatif — de U_i représente *dans tous les cas le signe de l'orientation que devrait avoir le site i* en l'absence de décohérence aléatoire : signe de

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

l'orientation majoritaire pour $J > 0$, signe de l'orientation minoritaire pour $J < 0$. Le signe du produit $\theta_i U_i$ signale donc la conformité ($\theta_i U_i > 0$) ou la non-conformité ($\theta_i U_i < 0$) de l'orientation actuelle du site à l'orientation attendue dans son environnement. La probabilité de changer d'orientation doit bien sûr être plus forte en cas de non-conformité, donc lorsque $\theta_i U_i < 0$.

Le délai $\Delta\tau$ s'écoulant entre un instant quelconque t et une transition sur un site i donné, *la configuration des autres sites restant inchangée*, est contrôlé par une loi exponentielle $\lambda_i e^{-\lambda_i \Delta\tau}$, le paramètre λ_i valant :

$$\lambda_i = a\frac{e^{-u_i^t}}{e^{u_i^t} + e^{-u_i^t}}, \text{ avec } u_i^t = \frac{\theta_i^t U_i^t}{bT} \tag{8.12}$$

où les coefficients a et b dépendent des unités de temps d'énergie et de température choisies.

Lorsque la température est nulle, la mise en cohérence d'une orientation initialement non conforme s'effectue instantanément, alors que la transition inverse ne se produit jamais. Lorsque la température augmente, le délai moyen d'une mise en cohérence augmente, alors que celui d'une décohérence diminue. Lorsque la température est infinie, les deux délais sont égaux[23], aucune transition et donc aucune orientation n'est alors privilégiée.

On peut donner de la forme (8.12) une interprétation anthropomorphique en terme de satisfaction ou de bénéfice pour l'agent i d'être en situation conforme ou non conforme. Considérons respectivement les deux quantités :

$$e^{u_i^t} \quad \text{et} \quad e^{-u_i^t}$$

comme les « satisfactions » retirées par l'agent i d'avoir l'orientation actuelle ou l'orientation opposée, ce, compte tenu de l'état du reste du système. La formule (8.12) indique que le *délai moyen d'une transition est inversement proportionnel à l'intérêt du changement d'orientation.*

Algorithmes

Pour simuler de telles transitions, la littérature présente plusieurs algorithmes dont on montre qu'ils sont équivalents du point de vue de la dynamique de l'ensemble du système et conformes aux attendus de la physique statistique.

Deux de ces algorithmes sont particulièrement cités : l'algorithme de Métropolis et celui de Glauber[24]. Ils consistent tous les deux *à choisir aléatoirement, à chaque pas de temps élémentaire conventionnellement considéré égal à 1, un des sites, puis à décider d'un éventuel changement d'orientation du site choisi.*

L'algorithme de Métropolis sépare explicitement le mécanisme de mise en cohérence du mécanisme aléatoire : lorsque l'orientation du site n'est pas celle attendue, le

23. Leur valeur commune étant liée à celle du seul coefficient *a*.

24. *Continuous Time Single Spin Flip Dynamic*.(Buonsante, Burioni et al. 2002).

changement d'orientation s'effectue obligatoirement. Dans le cas contraire (conformité), un changement d'orientation s'effectue avec une probabilité proportionnelle à $e^{-2u_i^t}$.

L'algorithme de Glauber donne directement à partir de (8.12) la probabilité de changement d'orientation, quelle que soit la situation, conforme ou non conforme, de l'orientation actuelle.

8.5.2 Vers des modèles plus complexes

À partir du schéma présenté, de nombreuses variantes peuvent être envisagées. Ces variantes concernent la structure du réseau, la nature des états individuels de chaque agent, les formules mathématiques déterminant les transitions, leur caractère déterministe ou stochastique, la structure continue ou discrète du temps et l'existence de transitions simultanées.

Concernant la nature des états individuels, il faut mentionner les systèmes où ces états prennent des *valeurs non binaires*, *voire continues*. Les dynamiques d'alignement — agissant sur les orientations des agents dans l'espace — en œuvre en physique et dans le monde du vivant en constituent des exemples nombreux ; On se reportera pour une présentation de ces dynamiques à (Mogilner et Edelstein-Keshet 1996). Une dynamique d'alignement dans le plan constitue par ailleurs un des exemples discutés au dernier chapitre de cette partie.

Nous allons revenir brièvement sur deux types de variantes :

- Le premier est celui, très spécifique, des automates cellulaires.
- Le second est au contraire une extension qui suit la même démarche que dans la section précédente, lorsqu'ont été évoquées la prise en compte d'influences individuelles non séparables et le passage d'une fonction de potentiel à des fonctions de perceptions. Cette démarche repose dans le contexte des dynamiques de polarisation la question de l'équivalence entre une réaction à une influence locale et la minimisation d'une fonction globale.

8.5.3 Modèles d'Ising et automates cellulaires

Les *automates cellulaires* partagent avec les modèles d'Ising le caractère régulier du réseau, le caractère discret de l'ensemble des états internes, l'identité de nature et de comportement des sites, le caractère purement local des transitions, qui ne modifient chacune qu'un seul site. Ils en diffèrent sur deux points importants : la structure du temps et l'intervention du hasard dans la dynamique du système.

Dans notre modèle minimal, le temps est continu et les transitions sont stochastiques. Le taux d'occurrence des transitions par unité de temps étant borné, la probabilité d'occurrence de deux transitions opérant au même instant sur des sites voisins est nulle : deux transitions peuvent bien avoir lieu sur des sites voisins dans un intervalle de temps $]t, t + \Delta t]$, mais elles se succéderont nécessairement l'une l'autre. Les transitions simultanées n'ont pas à être considérées.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Dans les automates cellulaires, le temps est discret[25] et la dynamique déterministe. L'état du système $\{\theta_l\}^{t+\Delta t}$ observé à l'instant $t+\Delta t$ est une fonction de celui observé à l'instant t ne laissant aucune place au hasard, pas même celle qui résulterait d'un ordre aléatoire dans la succession des transitions. Deux modes opératoires différents mais pouvant être combinés satisfont ces contraintes. Soit on se donne un ordre fixe sur l'ensemble des sites, forçant la succession des transitions. Soit on considère des transitions simultanées, construisant progressivement la configuration $\{\theta_l\}^{t+\Delta t}$ à partir de la configuration $\{\theta_l\}^t$ restant inchangée. C'est ce dernier mode opératoire, le mode synchrone, qui est adopté dans la version standard des automates cellulaires.

8.5.4 Des réactions différentes selon les sites

Du modèle minimal conservons la nature binaire des états individuels, la fixité du réseau d'interaction, le caractère stochastique des transitions. Mais abandonnons la régularité du réseau et la forme particulière des influences exercées sur chaque site. Les systèmes ainsi obtenus font partie de la classe des *réseaux booléens.* Ces derniers[26] ont été très tôt étudiés, tant dans leurs versions déterministes que stochastiques. En témoignent les *NK modèles* de Stuart A. Kauffman (Kauffman 1989 ; Kauffman 1989) et les nombreuses références que l'on peut extraire sur ces mots clefs.

L'influence exercée par le système sur un site i donné est maintenant une fonction de *forme quelconque* $U_i\left(\{\theta_l\}\right)$, au lieu d'être une simple combinaison linéaire, et identique d'un site à l'autre, des orientations du voisinage immédiat. Cette influence agit toujours différemment selon que l'orientation θ_i est celle attendue, ou son opposé : par analogie avec le modèle minimal, le signe du produit $\theta_i U_i\left(\{\theta_l\}\right)$ est encore la mesure de cette conformité, et le délai d'apparition d'une transition sur un site est contrôlé par la loi exponentielle de paramètre[27] :

$$\lambda_i = a\frac{e^{-u_i^t}}{e^{u_i^t}+e^{-u_i^t}},\ \text{avec}\ u_i^t = \frac{\theta_i^t U_i\left(\{\theta_l\}^t\right)}{bT} \tag{8.13}$$

Un tel mécanisme met en place une réaction à un *stress local* exercé sur eux par les autres sites, réaction dépendante de l'état du système *et particulière à chaque site.*

Comme dans les modèles d'attraction/répulsion, on peut se demander dans quelles conditions de tels comportements individuels équivalent à la recherche de l'optimisation d'une fonction de l'état du système ou fonction d'énergie. Des calculs simples[28] montrent qu'il peut bien en être ainsi. C'est en particulier le cas pour des fonctions

25. Ou du moins l'observation du système s'effectue sur un temps discret.
26. Les réseaux de neurones formels en sont un exemple.
27. Les réseaux de neurones formels adoptent souvent de telles fonctions de transition.
28. Ces calculs sont détaillés dans l'Annexe (§ 8.2)

$U_i\left(\{\theta_l\}\right)$ de la forme :

$$U_i\left(\{\theta_l\}\right) = \sum_{j \neq i} w_{ij}\theta_j, \text{ avec } w_{ii} = 0 \text{ et } w_{ij} = w_{ji}$$

forme satisfaite d'ailleurs par le modèle d'Ising présenté ci-avant. La fonction $H\left(\{\theta_l\}\right)$ optimisée vaut alors :

$$H\left(\{\theta_l\}\right) = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} w_{ij}\theta_i\theta_j$$

On peut étendre la recherche de ces conditions aux cas où les fonctions U_i ne sont plus des combinaisons linéaires mais des produits d'orientations de plusieurs sites distincts, sortant donc des limites des schémas binaires d'interactions.

8.6 DYNAMIQUES DE REPRODUCTION/DISSÉMINATION

Dans les modèles présentés jusqu'ici le nombre d'agents a toujours été considéré constant. Sont étudiées maintenant, toujours dans une optique de mécanismes médiatisés par des forces, des dynamiques démographiques. Des agents disparaissent et de nouveaux agents apparaissent tout au long de la vie du système.

> Parmi les exemples du chapitre 2, une minorité seulement présente une dynamique dans laquelle le nombre d'agents varie. Citons les modèles BIOFILMS, relatifs au développement des écosystèmes bactériens dans les bioréacteurs, le modèle MANTA de croissance et de structuration d'une fourmilière, et enfin d'une certaine manière, le modèle SIMANCHOIS mettant en œuvre un processus de sélection naturelle. Cette relative rareté vient de ce que les phénomènes modélisés sont souvent « de court terme » : les durées sur lesquelles ils sont étudiés sont largement inférieures à celle de l'existence des agents qu'ils concernent. Le passage à des durées dépassant celle de l'existence individuelle des agents manifeste un changement d'échelle temporel important. Ce changement peut exiger le choix d'hypothèses et la spécification de mécanismes qui n'ont pas lieu d'être effectués pour le court terme — hypothèses d'évolution de l'environnement, voire hypothèses et mécanismes d'évolution des comportements —, et rend donc la conception des modèles plus difficile.

Parmi les dynamiques démographiques susceptibles d'être étudiées à travers des modèles à base d'agents, celles regroupées ici sous le vocable reproduction/dissémination[29] ont fait l'objet de nombreux travaux.

Comme dans les sections précédentes, nous illustrons cette classe de modèles par une version très simple, puis nous évoquons différentes extensions. Les références utilisées sont essentiellement le chapitre 21 de l'ouvrage de U. Dieckman et le chapitre 5 de celui de D. Stoyan déjà cités.

29. Nous interprétons ainsi l'expression anglo-saxonne « *birth-death processes* » en y introduisant explicitement une connotation spatialisée.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

8.6.1 Un modèle minimal

Dans notre modèle minimal de reproduction/dissémination, les agents dont la population varie au cours du temps sont tous de même nature. Leurs attributs sont la position x et la date de naissance τ. Le point de vue composé sur ces deux attributs, soit $x \cup \tau$, peut servir d'identifiant.

Deux mécanismes entrent en jeu :

- un mécanisme tendant à faire apparaître de nouveaux agents ou mécanisme de naissance ;
- un mécanisme tendant à en faire disparaître ou mécanisme de mortalité.

Ces deux mécanismes s'expriment sous la forme de probabilités : probabilité de tel événement (naissance ou mort) dans un lieu donné, et dans un petit intervalle de temps autour d'un instant donné. Ces probabilités mobilisent l'état du système à travers la configuration des positions $\{x_l\}$.

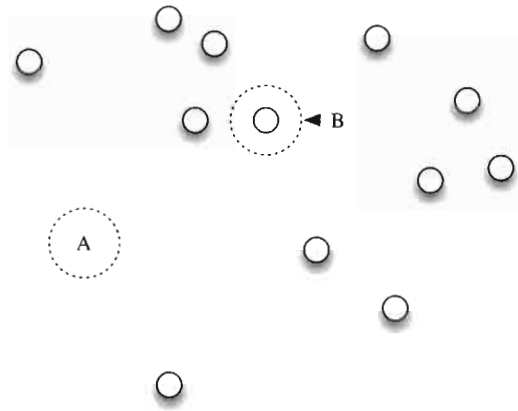


Figure 8.5 Dynamique de reproduction/dissémination : probabilité d'apparition d'un nouvel agent en A ? Probabilité de disparition de l'agent situé en B ?

a) Équations d'apparition et de disparition des agents

L'apparition d'un nouvel agent dans une partie $A \subset X$ quelconque de l'espace physique, **aucun autre changement n'ayant lieu**, est contrôlée par une loi exponentielle de paramètre[30]

$$b_A = \int_A b\left(x, \{x_l\}'\right) dx.$$

30. Les symboles utilisés pour les taux font référence à l'usage anglo-saxon, pour *birth* et *death* dans la littérature sur les *birth-death processes*.

La fonction des **taux de naissances** $b\left(x,\{x_l\}\right)$ définit un champ scalaire, une sorte de « champ de pression » tendant à faire apparaître de nouveaux agents, d'une façon plus ou moins pressante selon le lieu. Elle donne au voisinage de chaque position potentielle et pour chaque état possible du système, la probabilité par **unité de surface** et par unité de temps de la naissance d'un nouvel agent.

Si l'événement se réalise, la nouvelle configuration sera $\{x_l\}+x_i$, où $x_i \in A$ est la position du nouvel agent apparu.

De même, la disparition d'un agent i constituant avec les autres agents une configuration $\{x_l\}+x_i$ est contrôlée en l'absence d'autre changement par une loi exponentielle de paramètre $d\left(x_i,\{x_l\}\right)$

La fonction des **taux de mortalité** $d\left(x,\{x_l\}\right)$[31] définit également un champ scalaire, un « champ de forces » spatialisées, tendant à faire disparaître les agents situés sur les positions où elles s'appliquent. Contrairement au cas des naissances, la configuration $\{x_l\}$ est celle d'*après l'événement,* une fois la disparition réalisée.

b) Expression des taux spatialisés de naissance et de mortalité

Comme dans le cas des potentiels d'attraction/répulsion, les fonctions $b\left(x,\{x_l\}\right)$ et $d\left(x,\{x_l\}\right)$ peuvent être contraintes à satisfaire certaines propriétés : invariance géométrique par translation (générant des dynamiques dites spatialement stationnaires) et rotation (dynamiques isotropes), la réunion des deux propriétés traduisant une invariance pour tout déplacement euclidien. L'environnement sur lequel se déploie la population des agents a les mêmes propriétés en chaque position ; *aucune région n'est alors privilégiée ou défavorisée* ; les hétérogénéités spatiales d'implantation des agents résulteront uniquement de leurs interactions. On peut supposer également l'invariance de b par permutation des positions de deux agents dans $\{x_l\}$: la date de naissance, part de l'identifiant des agents, n'intervient pas dans la dynamique du système[32].

Pour la fonction de naissance, une forme générale rencontrée (Dieckmann and Law 2000) est fondée sur trois idées :

- L'apparition d'un nouvel agent correspond bien à la reproduction d'un agent « géniteur » identifié.
- Les autres agents interagissent sur la probabilité de l'événement d'une manière dépendant de leur éloignement — reproduction densité dépendante.
- La position du nouvel agent est déterminée par un mécanisme de dissémination — ou dispersion — le plaçant à une certaine distance de son géniteur.

31. Dans un modèle plus réaliste, il faudrait faire intervenir l'âge des agents, et donc en faire un attribut. L'expression générale de la mortalité serait alors $\{x_l\}$.

32. Ce qui est évidemment peu réaliste, mais, il s'agit d'un modèle minimal...

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Vont donc intervenir dans l'expression de la fonction des naissances, un taux intrinsèque de reproduction b, un taux de reproduction densité dépendante b', un noyau[33] de compétition ou de coopération Uet un noyau de dispersion V. L'expression de la fonction de naissances est alors :

$$b\left(x,\{x_l\}\right)=\sum_i\left(b+b'\sum_{j,j\neq i}U\left(|x_j-x_i|\right)\right)V\left(|x-x_i|\right) \tag{8.14}$$

Elle apparaît, pour une position x donnée, comme somme sur tous les géniteurs potentiels i d'un produit de deux termes. Le premier terme est l'espérance de reproduction par unité de temps, densité dépendante de par l'intervention de la fonction U. Le second est un noyau de dispersion — fonction V— contrôlant la distance séparant le nouvel agent de son géniteur. Si $b'=0$, la fonction de naissances n'est plus que la somme des contributions indépendantes de chaque agent à la probabilité d'une naissance au voisinage d'un lieu donné : il n'y a dans ce cas pas d'interactions entre agents.

Pour la fonction de mortalité, on fait également l'hypothèse d'un taux de mortalité intrinsèque et d'une densité dépendance faisant intervenir, par le biais d'un noyau de compétition, la distance séparant l'agent considéré des autres agents. L'expression de la fonction de mortalité est alors, pour un agent existant situé au voisinage la position x :

$$d\left(x,\{x_l\}\right)=d+d'\sum_{j,r_j\neq r}W\left(|x-x_j|\right) \tag{8.15}$$

Si $d'=0$ le taux de mortalité est le même pour toutes les positions.

Noyaux de compétition et de dispersion

Un noyau désigne une fonction de deux positions $F\left(x,x'\right)$, dont l'une est prise comme position de référence — par exemple x'— et dont la valeur ne dépend que de la distance : $F\left(x,x'\right)=F\left(|x-x'|\right)$ et s'annulant à l'infini. Ils sont parfois normés, de façon que leur somme sur x vaut l'unité. Noyaux de compétition — ou de coopération — et de dispersion ici expriment une intensité de compétition, de coopération, de dispersion, qui décroît avec la distance à une source ou un centre. Si pour les besoins des simulations les supports de ces noyaux sont bornés — valeur nulle au-delà d'un certain rayon, il n'en est pas nécessairement de même lorsqu'on vise une analyse mathématique. Par ailleurs les microprocessus à la base de la variation de l'intensité de la compétition ou de la dispersion peuvent orienter le choix de telle ou telle forme. On peut également utiliser des noyaux qui n'ont pas nécessairement leur valeur maximale en leur centre, mais à une certaine distance de ce dernier.

---

33. Un noyau désigne une fonction de la distance à une position centrale donnée.

8.6.2 Vers des modèles plus complexes

Dans le modèle minimal ci-dessus, les agents restent dans la même position de leur naissance à leur mort. Par ailleurs aucun état interne, même pas l'âge, ne vient moduler la capacité de reproduction de ces agents ni leur mortalité. Aussi est-on conduit à plus de réalisme, même dans les champs d'application les plus proches de ce modèle minimal, en écologie forestière par exemple.

Plusieurs modèles en biologie[34] et en écologie[35] se structurent par ailleurs sur un couplage. Un premier modèle prend en charge la dynamique d'un champ environnemental et les interactions des agents avec cet environnement. Un second modèle gère la reproduction et la mortalité des agents d'une façon dépendante de leurs positions et des autres composantes de leurs états individuels. Le champ environnemental représente une ressource assurant l'existence des agents, ressource qu'ils recherchent et consomment et dont la dynamique conditionne donc également les taux b et d dont l'expression devient plus complexe.

Le modèle minimal garde cependant un intérêt théorique : sa simplicité permet d'étudier la question de la nature et des conditions des équilibres possibles dans ce type général de dynamique. Quelles relations doivent satisfaire les fonctions $b\left(x, \{x_l\}\right)$ et $d\left(x, \{x_l\}\right)$ pour que la dynamique converge vers un équilibre stochastique ? Peut-on, comme dans les modèles d'agrégation/répulsion et de polarisation, assimiler dans certains cas cet équilibre à l'optimum d'une fonction d'énergie ? Autrement dit, peut-il parfois exister une fonction dont l'évolution — et la distribution des valeurs dans l'équilibre stochastique — reflète la dynamique du système ? La littérature, dans le cadre de la théorie des processus de Gibbs[36], montre que la réponse est positive. Les conditions que doivent alors remplir les taux de naissances et de mortalité s'interprètent comme des propriétés garantissant que *l'ordre dans lequel apparaissent — ou disparaissent — les agents* entre deux états donnés du système *n'intervient pas* dans le calcul de la variation de la fonction[37].

8.7 MODÈLES PROIES/PRÉDATEURS

On sait l'importance des modèles prédateurs/proies dans la littérature écologique. Des approches individus-centrés, cherchant à mieux prendre en compte l'impact de la structure spatiale des populations, ainsi que la complexité des comportements de recherche, de poursuite et de partage des proies, ont été ainsi développées et mis en rapport avec des modèles mathématiques globaux.

34. C'est le cas des modèles BIOFILMS.
35. (Kostova, Carlsen et al. 2004)
36. (Stoyan, Kendall et al. 1995)
37. Cf. Annexe (§ 8.3).

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Dans certains modèles proies/prédateurs, seuls les prédateurs sont représentés comme des agents. Un attribut environnemental, en l'occurrence une fonction, représente la répartition spatiale de la densité des proies en tant que ressource consommée. Dans d'autres modèles proies/prédateurs, les proies sont elles-mêmes représentées par des agents situés et mobiles, et non par un champ de densité. Les interactions entre les prédateurs et les proies, au moins dans une première phase de recherche des proies, sont prises en charge par des modèles du type agrégation/répulsion généralisés mettant en jeu des perceptions sélectives. Mais le caractère discret des proies, joint à la nécessité d'une efficacité du processus de prédation, exige un comportement plus élaboré. Le prédateur doit manifester une certaine constance dans la poursuite de la proie pour espérer pouvoir la capturer. S'il en est ainsi, s'installe au moins pour une certaine durée une interaction entre un prédateur et une proie bien identifiés. L'observateur du système peut alors observer trois catégories d'objets ayant une certaine permanence : les prédateurs, les proies, et certains couples prédateurs/proies représentant des *interactions individualisées* de poursuite ou de capture. Il existe en quelque sorte une démographie supplémentaire se superposant à celle des prédateurs et des proies, la démographie contrôlant l'apparition et la disparition de ces interactions.

Dans les schémas des sections précédentes, de telles interactions individualisées étaient absentes. Dans les dynamiques médiatisées par un champ de potentiel scalaire par exemple, l'influence subie par un agent est une grandeur où l'individuation des influences exercées par les autres agents n'est pas possible. Dans les dynamiques d'agrégation/répulsion sous leur forme élémentaire, un agent subit bien l'action individuelle des autres agents, mais sous la forme d'une résultante globale — une somme — sur laquelle une permutation des identités n'a aucun impact. Mais la possibilité d'un tel schéma est latente : on peut imaginer un champ potentiel multidimensionnel suffisamment différencié — par le biais d'états internes incluant les identifiants — pour que chacune de ses composantes soit le canal de transmission de l'influence d'un seul agent. De même, pour les dynamiques agrégatives, peut-on concevoir que l'angle et le rayon de perception évoluent en fonction de ce qui est perçu pour se focaliser sur un objet unique.

8.7.1 Un modèle minimal

Attachons-nous pour un système proies/prédateurs, dans lequel les deux types d'agents sont mobiles, à formaliser un modèle simple de mécanisme contrôlant la démographie des interactions. Le modèle mobilise donc deux catégories d'agents, les *prédateurs* p et les *proies* n. Aux deux catégories d'agents viennent s'ajouter deux catégories d'interactions individualisées, les interactions de poursuites ou d'*attaques* a, et les interactions de *captures* c.

Les attributs des **agents** (prédateurs et proies) sont la **position** x et la **vitesse** v. Les attributs **des interactions** (attaques et captures) sont p et n, consignant respectivement l'identifiant du prédateur et celui de la proie impliqués dans l'interaction. $\{p_l\}^t_{a(l)}$ et $\{n_l\}^t_{a(l)}$ désignent alors respectivement les configurations d'identifiants de

prédateurs et de proies engagés à l'instant t dans une attaque, et $\{p_l\}^t_{c(l)}$ et $\{n_l\}^t_{c(l)}$ les configurations d'identifiants de prédateurs et de proies engagés dans une capture. Les mécanismes contrôlent le déclenchement des attaques et le déclenchement des captures.

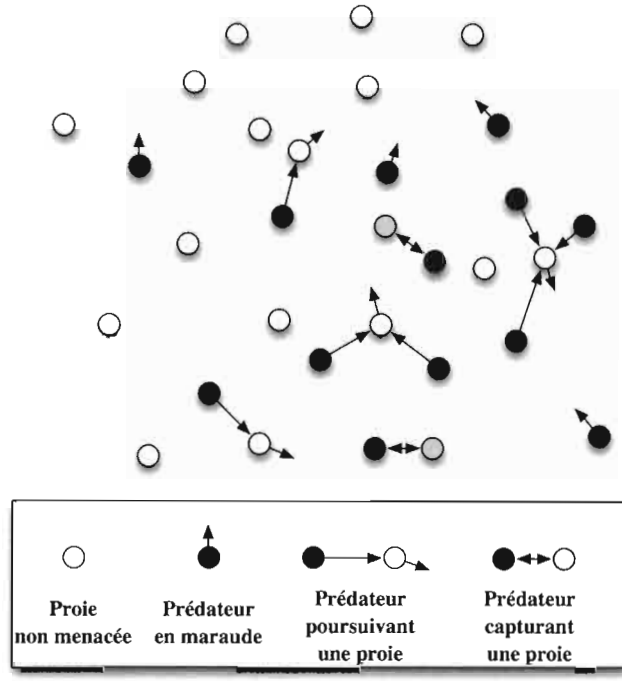


Figure 8.6 Proies/prédateurs : une triple démographie ; celle des proies, celle des prédateurs et celle des interactions individualisées de poursuite et de capture.

a) Déclenchement des attaques

Une manière simple de spécifier mathématiquement l'apparition d'une interaction d'attaque entre un prédateur i et une proie j est d'écrire que le délai de déclenchement est contrôlé par une loi exponentielle de paramètre $b^t_a\left(i, j, \{s_l\}^t\right)$.[38]

Dans le modèle minimal choisi ici, le taux $b^t_a\left(i, j, \{s_l\}^t\right)$ s'établit à partir des hypothèses comportementales suivantes :

- le prédateur i n'est engagé dans aucune interaction : $i \notin \{p_l\}^t_{a(l)} \cup \{p_l\}^t_{c(l)}$
- la proie j n'est pas en train d'être capturée : $j \notin \{n_l\}^t_{c(l)}$

38. Il en était de même, rappelons-le, pour le délai de déclenchement d'une transition dans le modèle minimal de polarisation. La loi exponentielle est une manière classique de modéliser simplement la survenance d'événements discrets.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

- la probabilité de l'apparition de l'interaction, lorsque les conditions précédentes sont réunies, dépend des positions et vitesses à la fois du prédateur et de la proie, par le biais d'une fonction $\lambda_a\left(x_i, v_i, x_j, v_j\right)$. Cette fonction exprimera la dépendance de l'engagement d'une attaque par rapport à la position relative de la proie dans le champ de perception du prédateur et son accessibilité dans un temps donné.

Les conditions de non interactions préalables étant remplies, nous avons :

$$b_a^t\left(i, j, \{s_l\}^t\right) = \lambda_a\left(x_i^t, v_i^t, x_j^t, v_j^t\right) \tag{8.16}$$

Ce modèle d'engagement d'une attaque n'intègre pas une possible évaluation par le prédateur du risque de parvenir trop tard au but recherché, ou, plus largement, du risque entraîné par la confrontation possible avec ses semblables lors de la capture de la proie. À l'inverse, il n'intègre pas non plus l'appréciation du bénéfice éventuel d'une attaque à plusieurs. On touche du doigt la gamme de complexité des comportements envisageables. L'appréciation de la concurrence pourrait par exemple s'inscrire dans une expression modifiée de la probabilité d'engagement d'attaque donnée par :

$$b_a^t\left(i, j, \{s_l\}^t\right) = \frac{\lambda_a\left(x_i^t, v_i^t, x_j^t, v_j^t\right)}{\max_{k|C(k,i,j)} \lambda_a\left(x_k^t, v_k^t, x_j^t, v_j^t\right)} \lambda_a\left(x_i^t, v_i^t, x_j^t, v_j^t\right)$$

avec la condition $C(k, i, j)$ définie par

$$C(k, i, j) = \left([k, j] \in \{s_l\}_{a(l)}^t\right) \cup k = i$$

Égale à la probabilité précédente dans le cas où le prédateur i est le mieux placé, elle devient faible lorsque d'autres prédateurs sont avantagés.

b) Déclenchement des captures

L'expression du mécanisme engendrant les interactions de capture est également donnée, dans la généralité de ce modèle minimal, par une loi de probabilité exponentielle contrôlant l'instant où la capture intervient. Dans les conditions où cette transition n'est affaire que de distance entre les positions du prédateur et de la proie, le paramètre $b_c^t\left(i, j, \{s_l\}^t\right)$ de cette loi s'écrira :

$$b_c^t\left(i, j, \{s_l\}^t\right) = \lambda_c\left(\left|x_i^t - x_j^t\right|\right)$$

La capture de la proie j soustrayant par là même cette proie aux autres prédateurs qui la poursuivaient, l'événement entraîne simultanément une modification de la configuration des poursuites qui s'exprime par

$$\{s_l\}_{a(l)}^t = \{s_l\}_{a(l)}^{t-} - \bigcup_k \left\{[k, j] \in \{s_l\}_{a(l)}^{t-}\right\}.$$

8.7.2 Retour sur quelques difficultés de formulation

Dans le modèle minimal présenté, plusieurs difficultés liées à l'intervention d'événements discrets et l'existence d'interactions individualisées méritent une certaine attention de par leur fréquence dans les modèles d'agents.

a) Des formulations logiques aux formulations fonctionnelles

La spécification du paramètre de l'engagement d'une attaque, ou celui des conséquences d'une capture, n'a pas été entièrement exprimée par une formule mathématique au sens habituel, écrite en termes fonctionnels. Les conditions pour que l'engagement ait lieu sont bien formulées sans ambiguïté dans un langage ensembliste, mais elles ne sont pas intégrées dans l'équation (8.16). Cette particularité ne présente aucun inconvénient en ce qui concerne l'implémentation informatique et la conduite des simulations. Elle en a davantage si on se place dans une démarche analytique. Les notations mathématiques ne sont pas cependant impuissantes, dans le cas d'espèce, pour substituer une formulation fonctionnelle à une formulation logique.

Formulation fonctionnelle du déclenchement des attaques

La notion de fonction caractéristique $1_X(x)$ d'un ensemble, donnant la valeur pour un élément x appartenant à un ensemble, 0 pour un élément ne lui appartenant pas, permet de surmonter la difficulté. L'équation complète donnant $b_a^t\left(i, j, \{s_l\}^t\right)$ s'écrit ainsi, en utilisant les fonctions caractéristiques des configurations d'interactions $\{p_l\}_{a(l)}^t$ et $\{p_l\}_{c(l)}^t$:

$$b_a^t\left(i, j, \{s_l\}^t\right) = \lambda_a\left(x_i^t, v_i^t, x_j^t, v_j^t\right)(1 - A(i))(1 - B(j))$$

avec :

$$A(i) = 1_{\{p_l\}_{a(l)}^t \cup \{p_l\}_{c(l)}^t}(i) = \max\left(1_{\{p_l\}_{a(l)}^t}, 1_{\{p_l\}_{a(l)}^t}\right) B(j) = 1_{\{n_l\}_{c(l)}^t}(j)$$

b) Résolution de la présence simultanée de plusieurs options possibles

Lorsqu'un prédateur est en présence de plusieurs proies proches, on peut s'interroger sur la règle qui détermine la proie sur laquelle il va porter l'attaque. Contrairement à ce qu'on peut penser au premier abord, *il n'y a pas ici nécessité d'un mécanisme supplémentaire*. Chacune des options d'attaque offerte au prédateur a sa propre loi de déclenchement, *ici indépendante des autres*. C'est la première à se déclencher qui prévaut, et qui, du même coup, annihile les autres options, puisque nous supposons que le prédateur ne peut attaquer simultanément plusieurs proies.

c) Représentation des interactions individualisées

Le choix de considérer une interaction individualisée est fondée par l'existence d'une relation entre tel prédateur et telle proie et son caractère relativement durable, permettant son repérage par un observateur. La logique d'un tel choix peut conduire

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

à modéliser conceptuellement ces interactions par des agents ayant leur existence propre ; des agents composés ou groupes, formés d'agents élémentaires ayant chacun leur rôle au sein du groupe : ici des groupes binaires avec le rôle « prédateur » et le rôle « proie ». D'autres logiques considèrent que de tels « agents interactions » n'ont pas lieu d'être, que c'est au sein des attributs du prédateur et de la proie, séparément et de façon partiellement redondante, que les informations caractérisant la poursuite ou la capture doivent être stockées. Mais ces différentes variantes du modèle sont davantage du ressort de l'implémentation que du modèle conceptuel, du moins quand on en reste au niveau de son expression mathématique.

8.8 LA MÉTAPHORE DES JEUX

Considérons le mécanisme ajustant la direction prise par un agent au gradient d'un champ environnemental, par exemple le mécanisme contrôlant les mouvements d'une bactérie dans un champ de concentration. Dans la vision mécanique, on considère que la bactérie se comporte comme une particule subissant une force la contraignant à se déplacer dans la direction de la plus grande variation de concentration. Il existe évidemment une autre manière de parler de la même équation : c'est de dire que la bactérie *recherche* une concentration plus favorable et se dirige en conséquence dans la direction qui lui apporte cette meilleure concentration au moindre coût. Prises au sérieux, les deux interprétations manifestent deux conceptions des déterminismes pouvant faire émerger le comportement exprimé par l'équation. Elles ne s'excluent pas nécessairement l'une l'autre et peuvent être vues comme complémentaires[39]. Elles amènent toutes deux à formuler des interrogations telles que : quels sont les mécanismes à la base de la rétroaction des différences de concentration sur le mouvement de la bactérie ? comment la bactérie fait-elle pour connaître la direction du gradient, afin de pouvoir ensuite en suivre le chemin ?

> De fait, certains modèles attribuent à la bactérie une certaine capacité de mémorisation. Cette capacité de mémorisation associée à des phases d'exploration sur de courts laps de temps, exploration basée sur des changements aléatoires de direction[40], lui permet de dresser une carte d'une évaluation des directions qu'elle peut prendre au regard des différentiels de concentration. Elle peut alors « choisir »[41] au vu de cette évaluation la direction la plus favorable. Les paramètres de cette procédure de choix (nombre de déplacements aléatoires au cours d'une phase d'exploration, fréquence des phases...), évidemment imparfaite, en conditionnent l'efficacité.

Ce passage de modèles, où les agents subissent des forces, à des modèles où ils disposent de *procédures de choix* approchant l'optimalité sans nécessairement y atteindre, manifeste un changement de perspective. Par ailleurs, dans l'exemple cité

39. (Drogoul and Collinot 1997)

40. (Grünbaum 1998)

41. *...from the fact that bacteria sense changes... by means of a temporal comparison that has short term memory... the cell estimates... measures the (temporal) derivative* (Mazzag, Zhulin et al. 2003).

ci-dessus, les comportements des bactéries interfèrent les uns avec les autres dans les résultats recherchés, si l'on tient compte de la consommation de la substance dissoute. Il en est de même pour les choix que doivent effectuer des prédateurs en présence de plusieurs et mêmes proies : il est clair que dans certaines situations, les choix pris par les uns et par les autres produiront des conséquences sur le résultat obtenu par chacun d'eux. Qu'est-ce alors qu'un choix optimal ? Existe-t-il une procédure de calcul faite au niveau de chaque agent qui y conduise ? Comment une telle procédure peut-elle être apprise ou sélectionnée ?

Pour aborder de telles questions, la métaphore des jeux et ses développements constituent une référence importante.

8.8.1 Jeux à *N* joueurs et apprentissage multi-agents

Plusieurs auteurs ont souligné les liens entre la théorie des jeux et les systèmes d'agents[42] : les modèles de jeux à *N* joueurs apparaissent bien comme des modèles à base d'agents particuliers. Le terme d'agent est d'ailleurs fréquemment utilisé notamment dans les applications à l'économie.

De fait, les éléments premiers de la théorie des jeux s'expriment dans un modèle générique mettant en œuvre deux catégories d'agents : des **joueurs** face à un **environnement**. Les attributs des joueurs sont : *l'ensemble des stratégies*[43] *que chacun peut pratiquer ; la stratégie choisie ; le gain obtenu.* L'unique attribut de l'environnement est une *fonction de réponse* appliquant l'ensemble des configurations de stratégies observables dans l'ensemble des configurations de gains.

Le rapprochement opéré doit cependant être évalué, dans le cadre de cette section, par rapport aux formalismes d'interactions entre agents que la théorie des jeux est susceptible de fournir. Or cette dernière se fixe plusieurs objectifs :

- Un premier objectif est de *catégoriser différents types de jeux*. La théorie remplit cet objectif en identifiant différentes propriétés possibles pour la fonction de réponse, et différents types de règles imposables aux joueurs.
- Un second objectif est de *définir*, d'une façon générique, *certaines propriétés* pouvant être satisfaites, ou non, par les configurations de stratégies et leurs résultats, puis de rechercher et démontrer l'existence, dans tel type de jeux, de configurations vérifiant ces propriétés. Une de ces propriétés, à laquelle les théoriciens des jeux se sont fortement intéressés, est celle portant le nom *d'équilibre de Nash.*
- Un troisième objectif a trait à la *réalisation effective*, par un groupe de joueurs donné, de ces configurations jugées intéressantes. Les théoriciens des jeux ont pu

42. (Bousquet, Lifran et al. 2001)

43. Stratégie est le terme traditionnel utilisé dans la littérature sur les jeux. On rencontre aussi le terme d'action. La terminologie peut également varier selon le contexte d'application. Notons qu'on aurait tendance à identifier une stratégie à une procédure de décision, plutôt qu'à son résultat qui est la décision elle-même. Le transfert de sens s'explique par le fait que le « vrai » résultat de la procédure est *in fine* le gain, et non la décision qui y a conduit.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

ainsi s'attacher à définir les connaissances, raisonnements et principes de choix que les joueurs doivent mettre en œuvre pour effectuer, sans échange avec les autres joueurs, les choix qui constituent les configurations attendues. Ils ont pu aussi chercher à décrire des processus itérant sur plusieurs étapes application de procédures de choix, observations mutuelles des stratégies choisies et des gains obtenus en conséquence, ajustement progressif des procédures de choix par apprentissage. L'idée est bien sûr que de tels processus amènent les configurations successives à converger vers l'une des configurations recherchées, qui pourra alors être qualifiée légitimement de configuration d'équilibre.

Le propos, qui est ici l'utilisation de modèles agents dans une perspective de modélisation et de simulation d'une réalité dynamique, oriente bien sûr vers les travaux menés dans le cadre du troisième objectif. Il faut observer cependant que les concepts et résultats produit par la théorie des jeux suscitent de vifs débats par rapport à leur pertinence dans les disciplines et domaines d'investigation théorique où ils sont censés s'appliquer.

Par ailleurs on assiste depuis plusieurs années à un essor important de recherches sur la notion et les algorithmes d'apprentissage dans les systèmes d'agents et leurs liens avec les théories de la décision. Pour la partie qui nous concerne ici, l'apprentissage est vu comme l'acquisition progressive de la capacité de prendre de bonnes décisions, eu égard aux buts individuels ou collectifs poursuivis. L'apprentissage mono-agent met en œuvre l'acquisition de cette capacité chez un seul agent face à un environnement dont les lois restent fixes. Les techniques utilisables dans ce contexte, notamment les techniques d'apprentissage par renforcement, ont été beaucoup développées[44]. Le fait qu'il y ait plusieurs agents et qu'ils apprennent tous *simultanément* pose des problèmes conceptuels et algorithmiques nouveaux et difficiles[45]. Notamment les équilibres éventuels de cette co-évolution ne sont pas du tout évidents à caractériser *a priori*. Aussi ces recherches ont-elles encore avivé le débat déjà engagé, comme en témoignent plusieurs références (Shoham, Powers et al. 2003) (Thomas 2005).

Il est donc pertinent de s'intéresser à l'ensemble de ces travaux en tant qu'ils tentent d'apporter des formalisations sur les connaissances et raisonnements que les agents peuvent utiliser pour prendre leurs décisions dans un monde incertain, sur la formalisation des apprentissages les conduisant à faire les bons choix, individuellement ou collectivement, à partir des expériences effectuées. Cet intérêt doit notamment porter sur les points suivants :

- Les notions d'objectif individuel, d'objectif collectif et leurs rapports.
- L'évaluation des actions par rapport aux objectifs à atteindre.
- L'amélioration de cette évaluation par apprentissage.

44. (Sutton and Barto 1998 ; Garcia 2001 ; Garcia 2001)

45. (Bernstein, Givan et al. 2002 ; Goldman and Zilberstein 2004)

Nous allons passer brièvement en revue ces trois points, en renvoyant pour un tableau complet à l'abondante littérature concernée. Pour ce faire, un modèle minimal prenant en compte une dynamique environnementale et l'existence de buts individuels et collectifs sur le long terme nous servira d'arrière-plan.

8.8.2 Un modèle minimal avec environnement évolutif

Le modèle minimal choisi est un modèle très simple, appartenant à la classe désignée dans la littérature par la classe des *Decentralized Markov Decision Processes*[46]. Il met en œuvre des agents de même nature en interaction avec un environnement. Cette interaction est structurée en cycles successifs, chaque cycle élémentaire — actions des agents, réponse de l'environnement — se déroule sur un intervalle de temps $]t, t+\Delta t]$. La réponse de l'environnement aux actions des agents consiste d'une part dans une évolution de son propre état, d'autre part dans un ensemble de conséquences individualisées au niveau des agents.

Un point clef de ce modèle est qu'à chaque cycle *la réponse environnementale — renvoyant à chaque agent i un résultat immédiat* r_i^t *— n'est actée et donc connue qu'une fois toutes les actions achevées.* La détermination du nouvel état de l'environnement et des conséquences qui en résultent pour les agents ne s'effectue donc qu'à la fin du cycle. Le fait que les actions soient effectuées simultanément ou réparties sur la durée du cycle n'a pas d'importance ; *chaque agent prend sa décision en l'absence d'information sur celles qu'ont déjà prises ou que vont prendre, dans le même cycle, les autres agents. Les agents ne communiquent pas entre eux et donc ne se concertent pas à ce sujet.*

8.8.3 La notion d'objectif, individuel ou collectif

Un objectif peut être celui d'un agent, d'un groupe d'agents ou celui du système dans son ensemble. Formellement les définitions ne sont pas différentes. Il n'y a lieu de les distinguer que pour examiner les rapports qu'ils peuvent entretenir les uns avec les autres.

a) Objectifs et fonction d'utilité

Un **objectif individuel ou collectif**, attaché à un instant t à un agent donné i ou à un groupe d'agents g, est associé à un critère fondant un ordre de préférences *rationnelles* sur l'ensemble des trajectoires possibles du système à partir de cet instant. Ce critère s'identifie à la mesure d'un degré de satisfaction ou d'une utilité. Notons $R_i^t = R_i\left(\{s_l\}^{t,\infty}\right)$ ou encore $R_g^t = R_g\left(\{s_l\}^{t,\infty}\right)$ la valeur ainsi attribuée par l'agent i ou le groupe g à la trajectoire particulière $\{s_l\}^{t,\infty}$, valeur situant cette trajectoire dans l'échelle de l'utilité.

46. Connus sous l'abréviation DEC-MDP.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Exemples

De telles fonctions d'utilité sont évidemment très diverses, cette diversité étant liée à celle des manières de caractériser une trajectoire. Ce peut être pour un agent, la valeur de tel attribut — par exemple la valeur d'un revenu dans un modèle économique — à tel instant τ postérieur à t, le cumul ou la valeur moyenne de cet attribut, ou encore sa valeur minimale ou maximale, entre t et un horizon temporel $t + \tau$. Ce peut être un nombre de rencontres, un nombre de proies dévorées ou une quantité de ressources consommées. Pour un groupe, ce peut être un résumé quelconque de la distribution des valeurs d'un attribut au sein du groupe, à un instant défini ou moyenné sur une période de temps postérieure à t. Mais un agent comme un groupe peut être attentif également aux valeurs d'un attribut prises chez d'autres agents, voire à la distribution de ces valeurs au sein du système entier.

La fonction d'utilité d'un *objectif permanent* aura une expression dont le mode de calcul n'est pas dépendant de la date t. Par exemple un cumul du résultat sur un horizon glissant constitué d'un nombre de période fixé :

$$R_i\left(\{s_l\}^{t,\infty}\right) = \sum_{k=0}^{k=k\,\max} r_i^{t+k\Delta t}$$

ou, sur un horizon infini, un résultat moyen, voire un cumul dégressif, de la forme

$$R_i\left(\{s_l\}^{t,\infty}\right) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \gamma^k r_i^{t+\Delta t} \tag{8.17}$$

avec $0 \leqslant \gamma < 1$ pour assurer la convergence de la série.

b) Objectifs et appréciation des comportements

Spécifier un objectif, c'est également définir un critère d'appréciation du comportement de l'agent ou du groupe d'agents pour lequel cet objectif est défini. La valeur d'utilité constatée après coup, sur *une* trajectoire effective, peut ne pas constituer pas un critère d'appréciation complètement satisfaisant, du moins pour un observateur extérieur du système. Cette valeur est un élément sur lequel l'agent — ou le groupe d'agents — n'a pas un contrôle total et il faut se demander si elle ne résulte pas, sur la trajectoire observée, d'un sort trop favorable ou défavorable.

Aussi l'observateur peut-il être tenté d'apprécier la valeur d'un comportement dans la perspective de l'objectif défini, *en tenant compte des aléas du système*, et donc en définissant un ordre de préférence ordonnant les unes par rapport aux autres des « fourchettes » de valeur d'utilités. Considérons le cas des objectifs individuels, les objectifs de groupe pouvant faire l'objet de développements similaires. L'appréciation du comportement de l'agent i se base alors sur la loi $\mathfrak{R}_i^t$ de distribution des valeurs de l'utilité sur l'ensemble des trajectoires possibles du système intégrant ce comportement. Toutes caractéristiques quantitatives de cette loi, telles que son utilité

minimale, sa moyenne, son écart type, ou encore la probabilité que l'utilité soit comprise dans tel intervalle, sont alors autant de grandeurs pouvant constituer un *critère « objectif »* d'appréciation.

c) Objectifs individuels, objectifs collectifs

La fonction de satisfaction associée à l'objectif d'un groupe n'est pas nécessairement définie par composition de fonctions de satisfaction individuelle des membres du groupe. S'il en est ainsi, la composition doit remplir une condition de cohérence : tout accroissement de l'une ou de plusieurs satisfactions individuelles induit un accroissement de la satisfaction du groupe, comme dans la composition additive $R_g\left(\{s_l\}^{l,\infty}\right) = \sum_{i \in g} R_i\left(\{s_l\}^{l,\infty}\right)$. Mais la valeur de satisfaction collective peut être définie directement. Elle sera éventuellement projetée sur les agents sous la forme d'une configuration de résultats individualisés par une fonction de « credit assignement »[47]. Pour qu'une telle projection soit utile dans la recherche « décentralisée » de la satisfaction collective, il est nécessaire qu'une augmentation des résultats individualisés se traduise le plus souvent, heuristiquement, par celle du groupe. Le problème sous-jacent à ces variantes concerne la perception par les agents du résultat obtenu par la collectivité et de l'utilisation que ces agents peuvent en faire pour guider leur action[48]. Plusieurs travaux ont été conduits sur cette question. On se référera notamment à ceux de Wolpert (Wolpert and Turner 2006).

8.8.4 L'évaluation de l'action par les agents

La métaphore des jeux met en avant *l'autonomie de chaque agent qui choisit son action* en fonction d'une évaluation des actions possibles par rapport à l'objectif recherché. Dans la littérature concernée, cette évaluation met classiquement en jeu les notions de *fonction de préférence* — portant non plus sur les trajectoires du système mais bien sur les actions possibles de chaque agent dans une situation donnée —, et de *politique*.

a) Fonction de préférence

Choisir une action suppose de disposer d'un ensemble d'options et d'un ordre de préférence[49] sur cet ensemble. En toute généralité, la palette des options n'est pas nécessairement la même pour chaque agent, ni fixée une fois pour toutes, elle peut varier selon la nature de l'agent, son expérience passée, l'état du système. Les versions les plus simples des modèles DEC-MDP proposent un ensemble d'options d'actions

47. Qui peut être une répartition égalitaire.

48. Un principe de localité souvent invoqué (Thomas) voudrait qu'un agent ne puisse percevoir une valeur caractérisant, du point de vue d'un observateur extérieur, le système dans sa totalité. Dans l'optique de modélisation qui est la nôtre, un tel principe peut être relativisé.

49. Cet ordre de préférence porte ici sur les actions immédiates d'un agent, et non sur les trajectoires du système comme dans le paragraphe consacré à la notion d'objectif.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

unique et fixe, attaché à la catégorie d'agents considérée. L'ordre de préférence varie par contre d'un agent à l'autre, d'un moment à l'autre, et d'un état du système à l'autre. Cet ordre de préférence est supposé rationnel : il s'exprime donc par une fonction.

b) Fonction de préférence et politique de choix

Disposer d'un ordre de préférence ne suffit pas pour fixer son choix, encore faut-il l'exploiter, c'est-à-dire déterminer ce qui est appelé dans la littérature concernée *une politique*, une probabilité de choix pour chaque action. Plusieurs heuristiques peuvent être appliquées : une heuristique évidente est de donner une probabilité uniforme non nulle aux actions maximisant la fonction de préférence et une probabilité nulle aux autres. Mais cette heuristique limite l'exploration des actions possibles, et donc l'expérience que l'agent peut acquérir du fonctionnement du système. Aussi d'autres heuristiques chercheront-elles un meilleur compromis entre optimisation immédiate et exploration[50].

8.8.5 L'amélioration de l'évaluation par apprentissage

Dans ce schéma où le choix de l'action passe par la détermination préalable d'une politique, un modèle intégrant la recherche de la satisfaction d'objectifs individuels ou collectifs comporte presque nécessairement un mécanisme d'ajustement des politiques ou « apprentissage » faisant évoluer les politiques en fonction des résultats constatés. Il s'agit là d'un domaine de recherche très actif, visant à pallier à l'impossibilité, pour chaque agent comme pour l'observateur du système, de calculer à l'avance — voire même de définir — les politiques optimales dans un environnement complexe.

Un mécanisme d'ajustement très présent dans la littérature est le *Q-learning*, dont l'exemple DAMASRESCUE donné en première partie constitue une application. Les contextes où cette heuristique trouve son champ d'application naturel sont caractérisés par :

- Des objectifs permanents. Il s'agit en effet d'une technique d'apprentissage « on-line » s'effectuant au cours du temps de la vie du système.
- Une fonction d'utilité basée sur un cumul dégressif de résultats immédiats comme dans la formule (8.17).
- Une appréciation des résultats potentiels basée sur l'espérance mathématique de la valeur de l'utilité.

Le *Q-learning* appartient à la catégorie des apprentissages par renforcement. Il a été développé dans le cadre des processus de décisions markoviens mettant en présence un environnement et *un seul* agent, lequel apprend les décisions qui, dans un état

50. Notamment exploration « de Boltzman » rappelant les mécanismes de type physique décrits dans les modèles de polarisation.

environnemental donné, optimise l'espérance de l'utilité. Sa généralisation aux systèmes d'agents emprunte plusieurs approches qui se distinguent par la manière dont les agents utilisent les connaissances qu'ils peuvent avoir acquises sur le comportement des autres agents et de l'environnement[51].

8.9 UNE GRANDE DIVERSITÉ ET DES POINTS COMMUNS

Dans ce chapitre, nous n'avons pas cherché à décrire la variété des modèles agents pour lesquels les comportements et les interactions peuvent s'exprimer mathématiquement. Nous avons privilégié certaines classes de modèles, choisies eu égard à leur simplicité et la diversité de leurs applications.

Les deux métaphores ayant servi à organiser la présentation se rattachent toutes deux au schéma influence/réaction, élaboré pour préciser la notion d'interaction dans les systèmes d'agents. Elles se distinguent par leur caractère symétrique. *Dans la première métaphore, c'est l'environnement qui est le principal acteur de la dynamique*, en tant que médiateur auprès de chaque agent de l'état du système. Il détermine, en fonction de cet état, les forces qui s'exercent sur les agents pris individuellement et qui conduisent ces derniers à modifier « mécaniquement » leur état. *Dans la seconde métaphore, les agents posent des choix d'actions en rapport avec des objectifs.* L'environnement réagit à ces choix d'actions en actualisant son propre état, et retourne aux agents — en termes d'actualisation des perceptions et de bénéfices divers —, le résultat immédiat des choix qu'ils ont effectués.

Un point commun à tous les modèles est par ailleurs l'absence d'interactions couplant les agents en présence par l'intermédiaire d'événements ou de messages. Dans nos modèles, les interactions ne sont jamais médiatisées par de tels objets d'interactions[52] temporaires, transportant l'information de l'agent « influenceur » à l'agent influencé avant de disparaître du système. La raison ayant conduit à mettre de côté les modèles qui, au niveau conceptuel[53], mettent en œuvre des communications explicites entre agents est simple : il est assez rare dans la pratique des modèles à base d'agents de phénomènes naturels ou même sociaux, que ces derniers se placent à ce niveau très fin de description des processus, sauf lorsque le phénomène étudié est le processus de communication lui-même. Et même lorsqu'ils le font, comme dans CUBES, une reformulation mathématique chercherait plutôt à représenter les effets des communications en termes de changements d'états des locuteurs en faisant abstraction du processus d'échange de messages. Un tel choix n'exclut pas, comme nous l'avons vu, l'intervention dans les modèles présentés d'objets d'interactions dotés d'une certaine durabilité — champs, interactions individualisées —, exerçant leur rôle médiateur pendant des durées non négligeables de la vie du système.

51. On pourra se référer notamment à (Claus and Boutilier 1998 ; Garcia 2001).

52. (Gouaich, Guiraud et al. 2003).

53. Ce qui n'exclut pas l'intervention de la notion de message au niveau de l'implémentation, dans les langages informatiques utilisés dans la programmation du modèle.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Une autre particularité des modèles présentés concerne la dynamique des comportements. Dans les modèles minimaux présentés sous l'étiquette de la métaphore des forces, les paramètres, plus généralement les fonctions mobilisées dans les mécanismes en jeu sont des constantes. Aucune dynamique, même lente, ne se manifeste à leur niveau. La métaphore des jeux, au contraire, amène la superposition, au sein des agents de deux dynamiques de niveaux différents :

- Une dynamique rapide, celle des actions choisies à chaque instant en fonction de l'état environnemental, en application de « politiques » préétablies.
- Une dynamique plus lente modifiant progressivement ces politiques pour les ajuster à la satisfaction des objectifs.

Les agents changent donc de comportement au cours de la vie du système, dans une forme d'apprentissage. *Ce qui reste fixe, c'est le mécanisme d'apprentissage lui-même.*

La non-fixité des comportements peut également apparaître à une échelle de temps plus large, en se manifestant non pas, ou pas seulement, au cours de la vie des agents, *mais sur la durée de la vie du système*. C'est le cas de systèmes d'agents associant mécanismes démographiques de renouvellement de la population des agents et mécanismes de pression sélective éliminant certains comportements et en favorisant d'autres. Cette possibilité « génétique » de l'adaptation des comportements n'a pas été abordée ici. Elle entre, avec l'apprentissage, dans un schéma de mécanismes agissant de façon hiérarchisée au sein des modèles d'agents, avec des mécanismes de base de réaction immédiate, modulés par des mécanismes de niveaux supérieurs agissant à des échelles de temps de plus en plus grandes. Peut-être une approche mathématique un peu générale de ce schéma serait-elle possible et utile.

Chapitre 9

Caractériser les dynamiques d'agents

9.1 RÉSUMER LES DONNÉES D'UN SYSTÈME D'AGENTS

Le chapitre précédent a été consacré à l'expression mathématique des comportements et des interactions, faite au niveau de chaque agent. Celui-ci aborde au contraire l'intervention des mathématiques pour simplifier, sans perdre les propriétés auxquelles on s'intéresse, la description de l'état du système.

L'état — ou encore, terme équivalent, la configuration — à l'instant t d'un système d'agents, noté $\{s_l\}^t$ dans les définitions et notations introduites au chapitre 7[1], représente l'information complète disponible sur le système à l'instant considéré. Il est constitué d'un très grand nombre d'*observations,* associant chacune la valeur prise par un attribut chez un agent à l'identifiant de ce dernier. Il s'agit d'une information très riche, le problème est d'en extraire une synthèse pertinente. Le même souci se pose à propos des configurations relatives à tout point de vue plus restreint $u \subset s$.

Nous appelons **caractérisation** d'une configuration la mise en œuvre d'un calcul la projetant sur un ensemble de dimension plus réduite, calcul induisant donc une perte d'information mais aidant cependant à en souligner des traits importants.

Nous appelons **résumé** de la configuration le résultat de ce calcul.

La nécessité d'une synthèse pertinente se fait également sentir pour la trajectoire suivie par le système, et pour le faisceau des trajectoires possibles à partir d'une même situation initiale. Nous parlerons donc aussi de caractérisations de trajectoires

1. Rappelons que dans cette notation, le symbole s désigne le point de vue regroupant la totalité des attributs utilisés pour décrire les agents.

et de faisceaux de trajectoires et des résumés constituant les résultats de ces opérations.

Toutes les techniques de statistiques descriptives, pour lesquelles ce problème est très familier, sont les bienvenues. Il ne peut être question ici de les présenter, s'agissant d'un domaine amplement balisé. Il existe cependant des formalismes et des outils qu'il est utile de rappeler pour plusieurs raisons. En premier lieu, bien que très employés dans certains domaines, ces outils ne sont pas toujours connus de la communauté des modélisateurs de formation informatique. En second lieu, ils sont liés, plus intimement que les outils généraux de la statistique descriptive, à l'analyse des interactions entre agents. Enfin ils s'intègrent dans les méthodes mathématiques abordées dans le prochain chapitre, visant à passer des modèles agents à des modèles agrégés.

Caractériser les états d'un système et leurs trajectoires ne peut se faire qu'en connaissance de la structure des ensembles d'états individuels relatifs aux différentes catégories d'agents mobilisés. Du moins dès que l'on ne se limite pas à des indicateurs globaux et que l'on souhaite analyser les rapports — de similarité, de dissemblance, de proximité, de distance — existant entre les agents et venant moduler leurs interactions. Toute technique de caractérisation pose inévitablement des hypothèses, plus ou moins restrictives, sur ces structures[2].

Aussi introduisons-nous la question par un cas particulier, celui des modèles dont les agents sont situés dans un espace physique X, et où les positions respectives x des agents dans cet espace sont des déterminants importants de la nature et de la force de leurs interactions. *Il s'agit alors* de *caractériser l'organisation spatiale* des agents, avec comme arrière-plan l'objectif de rendre compte de propriétés du réseau d'interactions. Les techniques présentées sont celles développées dans le cadre de la *théorie des processus ponctuels.*

En prenant appui sur une présentation rapide de ces techniques, renvoyant pour plus de développements dans l'Annexe (§ 9.1) et aux ouvrages spécialisés, nous développons dans une seconde section une approche plus générale, valable pour les configurations associées à un point de vue quelconque u n'ayant pas nécessairement la structure d'une position. Cette approche introduit le formalisme de *la théorie mathématique de la mesure*, dans la perspective de son application aux modèles agents. Enfin, en prenant appui sur cette approche, nous revenons sur la notion d'interaction et la manière de caractériser les interactions entre agents au cours de la vie du système.

2. Un exemple trivial de dépendance entre la construction d'un résumé d'une configuration et la topologie de l'espace support : la nécessité de tenir compte *des effets de bord* lorsque le domaine est limité par une frontière, et la disparition du problème lorsque le domaine devient illimité, par exemple sphérique ou torique.

9.2 CARACTÉRISER DES STRUCTURES SPATIALES

Les configurations $\{x_l\}$ considérées dans cette section se développent sur des ensembles d'observables X possédant une structure d'espace métrique, par exemple la structure de $\mathbb{R}^p$ doté de la distance euclidienne. Les valeurs observées du point de vue x sont des points de cet espace, concrètement ou métaphoriquement des positions. Les configurations $\{x_l\}$ se projettent[3] dans X sur des *semis de points*.

L'étude des semis de points — appelés pour des raisons historiques[4] des *processus ponctuels* — dans des espaces euclidiens $\mathbb{R}^p$ fait l'objet depuis longtemps d'une abondante littérature. Elle est présentée dans de nombreux ouvrages parus ces dernières années. Nous nous sommes appuyés ici plus spécialement sur l'ouvrage de Dietrich Stoyan (Stoyan, Kendall et al. 1995) et sur le cours donné au Cemagref par François Goreaud (Goreaud and Couteron 2006). L'objet de cette littérature a été notamment de définir ce qu'est une répartition spatiale totalement aléatoire des points dans l'espace, de construire des indicateurs permettant d'apprécier quantitativement l'écart entre une répartition observée et une répartition aléatoire, de qualifier enfin cet écart dans le sens d'une plus grande uniformité ou d'une plus grande irrégularité. Il s'est agi plus largement d'identifier quelques autres lois types de répartition spatiale, d'en étudier les propriétés et de donner des règles de décisions quant au rattachement de telle ou telle répartition observée à ces lois types. On retrouve, comme il est classique en statistiques, deux approches parallèles s'étayant mutuellement : *une approche de caractérisation empirique*, cherchant à définir indicateurs et procédures de calcul applicables à un semis de points donné pour en construire un résumé ; *une approche théorique*, consistant à définir des propriétés caractérisant des classes de semis de points et des algorithmes pour générer des réalisations de cette classe. L'approche empirique vise la description, l'approche théorique vise à formaliser les indicateurs empiriques dans le cadre de la théorie des probabilités et à passer ainsi de la description à la décision. Pour nous conformer à l'objet de cet ouvrage, nous laisserons de côté les termes habituellement employés de points et de semis de points, en leur substituant les termes de valeurs observées, d'agents et de configurations.

9.2.1 L'approche empirique

L'approche empirique s'attache d'abord à décrire pour différentes résolutions spatiales l'irrégularité — en fait le caractère plus ou moins spatialement agrégé — des configurations. Une première catégorie de méthodes consiste à diviser l'espace en une grille régulière de « cellules », de résolution plus ou moins fine, puis à étudier la répartition des effectifs dans ces cellules. Il s'agit là d'une procédure fréquemment

3. En laissant de coté la composante « identifiant de l'agent » des observations et en ne conservant donc que les valeurs observées. On se référera aux considérations développées au chapitre 7, notamment autour de la figure 7.2.

4. L'utilisation du terme de processus vient de ce que les applications ont d'abord concerné la structure d'un ensemble d'événements sur l'axe du temps (Stoyan et al, 1995, p. 100).

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

et spontanément utilisée, mais dont le résultat est conditionné par la résolution de la grille. Au-delà de ces statistiques sur des grilles régulières, même de résolutions variables, ce sont les méthodes utilisant des ensembles de « boules »[5] de rayon donné et celles basées sur l'analyse de la distribution des distances qui fournissent la batterie d'indicateurs la plus riche. La raison en est que les boules sont la figure la plus simple pour décrire mathématiquement le voisinage d'un point dans un espace métrique, et que l'approche théorique en fait largement usage.

Parmi les descripteurs empiriques les plus courants on trouve des indicateurs scalaires, quantifiant donc par un seul nombre un aspect global de l'organisation spatiale, et des fonctions, analysant la structure spatiale à différentes résolutions. On retiendra ici parmi bien d'autres :

- La densité globale ou *intensité* λ, ou nombre d'agents par unité de volume de l'espace des positions.
- La moyenne $\bar{r}$ des distances au plus proche voisin.
- L'indice de Clark Evans, égal à $2\bar{r}\sqrt{\lambda}$ (en espace de dimension 2). Est une mesure du degré d'agrégation des agents, égale à 1 dans le cas d'une répartition au hasard, une valeur inférieure à 1 marquant une tendance au regroupement.
- Les caractéristiques de moyenne et de variance de la distribution des nombres N_k d'agents sur les cellules $k = 1, ..., m$ d'une grille régulière de résolution donnée. Le rapport de la variance sur la moyenne est également un indicateur d'agrégation : égal à 0 dans le cas d'une répartition uniforme, à 1 dans une répartition approximativement aléatoire, une valeur supérieure à 1 marquant une tendance au regroupement.
- La distribution $D(r)$ des distances au plus proche voisin, fréquence avec laquelle le plus proche voisin d'un agent choisi au hasard est à une distance de ce dernier inférieure à r.
- La distribution $N(r)$ des distances entre agents, donnant en moyenne sur tous les agents, le nombre de voisins situés à une distance inférieure à r.
- La fonction de Ripley $K(r) = N(r)/\lambda$ normalisant $N(r)$ par la densité. Croît comme le volume d'une boule de rayon r en cas de répartition aléatoire. La L-fonction $L(r)$, construite à partir de la fonction de Ripley est constante et de valeur nulle dans le cas d'une répartition aléatoire des agents, ce qui la rend très pratique à utiliser pour l'évaluation de ce caractère aléatoire.
- La fonction de corrélation par paire $g(r)$ répond au souci de mesurer la corrélation de la présence d'agents dans deux régions disjointes séparées par une distance donnée.

5. Conformément à un certain usage, ce terme est ici employé de préférence à celui de cercle ou de sphère, dont la dimension spatiale est connotée. Une boule désigne dans un espace métrique, l'ensemble des points dont la distance à un point donné est inférieure — boule ouverte — ou bien inférieure ou égale — boule fermée, à un rayon r fixé.

- La fonction de distribution du premier contact $H_s(r)$ caractérise la distribution de la distance *d'un point quelconque de l'espace* à l'agent le plus proche.

On se pourra se reporter à l'Annexe (§ 9.1) pour des développements plus complets autour de ces différents descripteurs.

9.2.2 L'approche théorique

Les modèles théoriques spécifient des classes de configurations. Ces spécifications peuvent être faites de plusieurs façons : *d'une manière constructive*, en donnant des procédures algorithmiques permettant de dériver les configurations de la nouvelle classe à partir des configurations d'une classe déjà définie ; en donnant les lois d'un système dynamique stochastique dont les états d'équilibre seront les configurations de la classe recherchée ; *d'une manière intensive*, en spécifiant les propriétés que les configurations de la classe doivent satisfaire. Dans tous les cas, les configurations sont considérées comme des *réalisations aléatoires* obéissant à une *loi de probabilité* liée à la classe. Un modèle à base d'agents dont les règles font intervenir le hasard[6] et dont les ensembles de valeurs observables X sont inclus dans $\mathbb{R}^p$ génère à chaque instant des configurations $\{x_l\}^t$ dont on conçoit qu'il puisse être intéressant de les comparer à celles de classes connues.

L'approche théorique s'appuie donc sur les piliers mathématiques que représentent les théories des probabilités et de la mesure. Chaque classe de configuration est identifiée par une loi donnant pour toute région $B \subset X \subset \mathbb{R}^p$ et tout nombre n, la probabilité, notée ici $P\left[\{x_l\}(B) = n\right]$, qu'une configuration $\{x_l\}$ *prise aléatoirement dans cette classe*, place n agents dans la région B.

Cette formalisation des processus ponctuels (Stoyan et al. 1995, p. 100 et suivantes) permet de définir de façon rigoureuse tout un ensemble de notions annexes et de proposer dans plusieurs cas des tests de décisions. Les descripteurs empiriques deviennent des variables aléatoires dont on peut espérer caractériser les distributions sur l'ensemble des réalisations.

a) Configurations spatialement homogènes, configurations totalement aléatoires

Une classe de configurations est dite **spatialement homogène (ou uniforme)** si l'égalité des probabilités $P\left[\{x_l\}(B) = n\right] = P\left[\{x_l\}(DB) = n\right]$ est vérifiée pour toute région B, tout nombre n et tout opérateur de déplacement euclidien[7] D : ces probabilités sont invariantes dans de tels déplacements.

6. Nous aborderons plus loin (*Modéliser les dynamiques*) le passage du déterminisme au stochastique dans le cadre des modèles à base d'agents.

7. Combinaison de translations et de rotations. La littérature réserve le terme de *processus stationnaire* pour les classes de semis de points dont les probabilités sont invariantes par translation, et de *processus isotrope* pour l'invariance par rotation.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Une classe de configurations est dite **totalement aléatoire**, ou encore **de Poisson**[8] **uniforme** si elle satisfait les propriétés suivantes :

- L'espérance mathématique du nombre d'agents dans toute région B donnée est proportionnelle au volume $\nu_p(B)$ de cette région : $E\{x_l\}(B) = \lambda \nu_p(B)$
- Les nombres d'agents observés dans des régions quelconques $B_1, ..., B_k$ disjointes sont des variables aléatoires indépendantes. Il n'y a en particulier aucune corrélation, d'une réalisation à une autre, entre les nombres d'agents observés dans deux régions, dès lors qu'elles sont disjointes.

C'est la seconde propriété qui est en fait la marque du totalement aléatoire. On montre que l'association des deux propriétés implique l'homogénéité. On reconnaît dans λ un terme exprimant la densité de la configuration introduite au niveau empirique, ici densité moyenne prise sur l'ensemble des réalisations. Les deux propriétés permettent également de donner explicitement les probabilités d'observer dans la même configuration n_1 agents dans la région B_1, ...n_k agents dans la région B_k. Une modification de ces formules permet ensuite de définir des classes de configurations ayant la propriété d'être *de Poisson*, cette fois-ci *non uniforme.*

b) Classes de configurations fréquemment mentionnées

Parmi les classes de configurations, autres que totalement aléatoires, identifiées dans la littérature, il est utile de rappeler ici, notamment pour leur usage en écologie, les classes suivantes :

- **Processus de Cox** : différentes classes de configurations apparentées aux configurations totalement aléatoires, mais dans lesquelles la densité λ n'est pas uniforme mais varie aléatoirement.
- **Processus de Neyman Scott** : différentes classes de configurations générées à partir de configurations totalement aléatoires, mais dans lesquelles on remplace chaque agent par plusieurs agents répartis dans le voisinage immédiat. De telles configurations sont plus agrégées que les configurations totalement aléatoires.
- **Processus « Hard Core » :** configurations générées à partir de configurations données par élimination de certains agents pour respecter une distance minimale imposée.
- **Processus de Gibbs** : configurations correspondant aux états d'équilibre de systèmes d'agents interagissant par potentiel d'attraction-répulsion, ou de compétition pour la naissance et la survie (*birth death processes*) tels ceux étudiés au chapitre précédent dans le cadre de la métaphore des forces.

8. Processus stationnaire de Poisson dans le langage habituel de la théorie des processus ponctuels. Le terme « stationnaire » doit être pris ici au sens spatial.

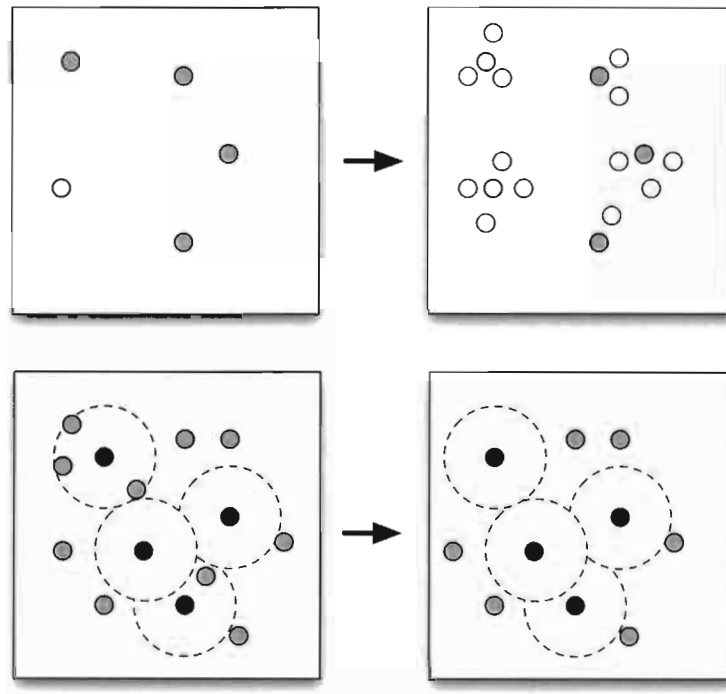


Figure 9.1 Construction de nouvelles classes de configurations : Processus de Neyman Scott (en haut) ; Processus « Hard Core » (en bas).

c) Des descripteurs empiriques à leurs équivalents théoriques

Les divers indicateurs et fonctions introduits empiriquement — c'est-à-dire par un calcul sur une configuration $\{x_l\}$ *donnée* — reçoivent pour des *classes de configurations homogènes* des définitions sous forme d'*espérance* sur l'ensemble des réalisations. L'encart ci-après donne leurs formules explicites pour la classe des configurations totalement aléatoires.

Un contexte classique en statistiques conduit à une situation où, face à une configuration $\{x_l\}$ *donnée* et considérée par hypothèse comme relevant d'une classe connue, on doit *estimer* les descripteurs théoriques sous-jacents. Par exemple on doit estimer la fonction de Ripley, ou encore la fonction de corrélation par paires, pour différentes valeurs de r. Par le fait que l'on ne dispose que d'une fenêtre spatiale limitée, le calcul brut de la densité globale λ — et à sa suite le calcul « brut » des descripteurs empiriques tels que définis plus haut — peuvent ne pas convenir, car certains *effets de bords* peuvent introduire des biais. La littérature donne pour chaque descripteur théorique des *estimateurs* laissant espérer la correction de tels biais[9]. On peut avoir

9. (Stoyan, Kendall et al. 1995 ; Goreaud et Couteron 2006)

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

intérêt dans la pratique de l'analyse des simulations d'un modèle agent à substituer de tels estimateurs aux calculs « naïfs » conformes aux premières définitions.

Les formules données ci-après montrent que dans une configuration totalement aléatoire la vision qu'un agent a de son environnement, représenté par son plus proche voisin — fonction $D(r)$ —, est la même que celle que l'on peut avoir d'une position quelconque — fonction $H_s(r)$. On retrouve aussi, par l'expression de la fonction $g(r)$, l'absence de corrélation à une distance quelconque.

Des formules exactes ou approchées des mêmes indicateurs sont développées dans la littérature pour d'autres classes de configurations, telles celles mentionnées au paragraphe *b)*.

Descripteurs pour les configurations totalement aléatoires sur $\mathbb{R}^p$

Distribution des distances au plus proche voisin	$D(r) = 1 - e^{-\lambda b_p r^p}$
Indice de Clark Evans	$CE = 1$
Distribution des distances entre agents	$N(r) = \lambda b_p r^p$
Fonction de Ripley	$K(r) = b_p r^p$
L-Fonction	$L(r) = 0$
Probabilité de présence simultanée à une distance	$r\gamma(r) = \lambda^2$
Fonction de corrélation par paire	$g(r) = 1$
Distribution des distances à l'agent le plus proche	$H_s(r) = 1 - e^{-\lambda b_p r^p}$

avec b_p boule de rayon 1 dans $\mathbb{R}^p$ (π pour $p = 2$; $(4/3)\,\pi$ pour $p = 3$)

9.3 OUTILS GÉNÉRAUX DE CARACTÉRISATION DES ÉTATS

Considérons, pour traiter cette question, une seule catégorie d'agents, avant d'élargir à plusieurs catégories. Soit $\{u_l\}$ une configuration prise à un instant quelconque, ensemble des observations relatives au point de vue u faites sur chacun des N agents existant à cet instant. Examinons dans sa généralité le problème de la caractérisation de cette configuration, en faisant le minimum d'hypothèses sur l'ensemble U des valeurs observables.

9.3.1 Dénombrements et résumés d'ordre 1

a) Dénombrement sur une partition

Une manière courante de résumer l'information portée par la configuration $\{u_l\}$ est d'opérer à partir d'une partition de l'ensemble des observables et d'effectuer un dénombrement. Soit une partition Π de l'ensemble U, constituée de sous-ensembles disjoints ou « parties » $B_1, .., B_k, .., B_m$. La donnée du vecteur $N_1, ..., N_k, ..., N_m$, où chaque N_k est le nombre *des observations* — donc des agents — dont les valeurs

appartiennent à B_k, résume la configuration avec une précision liée à la finesse de la partition. Toute statistique sur ce vecteur, calculant une grandeur $Q(\Pi)$ — mesurant par exemple la plus ou moins grande uniformité de la répartition des effectifs entre les parties[10] — constitue un résumé utilisable. On peut se donner aussi avec profit, dans un esprit de caractérisation à plusieurs niveaux de précision, une suite de partitions emboîtées — donc de plus en plus fines $\Pi_0 \ldots, \Pi_n \ldots$, — et étudier le comportement de la suite $Q(\Pi_n)$ pour les différentes valeurs croissantes de n.

La démarche ci-dessus, choix d'une partition et statistiques sur la répartition des effectifs dans cette partition, extension éventuelle à une suite de partitions emboîtées, est à la source de plusieurs méthodes visant à caractériser la structure d'une configuration. Les statistiques sur les grilles régulières, mentionnées précédemment, en sont un exemple d'application.

b) Dénombrement sur une σ-algèbre

Compter les agents peut s'effectuer sur des ensembles quelconques de parties, ces dernières n'étant pas nécessairement disjointes. Cette idée est à la base de l'interprétation des configurations comme mesures de dénombrement sur des *σ-algèbres.*

Une σ-algèbre est un ensemble de parties d'un ensemble, fermé par les opérations de complémentation et d'union[11]. Considérons une σ-algèbre $\mathcal{U}$ construite sur l'ensemble U des valeurs observables. Un élément B de $\mathcal{U}$ représente une partie de U, notée par le même symbole ; $B \in \mathcal{U}$ implique donc $B \subset U$. Une configuration donnée $\{u_l\}$ permet d'associer un nombre à tout élément $B \in \mathcal{U}$, par dénombrement des observations dont les valeurs lui appartiennent.

Une telle application d'une σ-algèbre dans l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls est appelée en mathématiques une **mesure**.[12] Elle est bien une sorte de résumé de la configuration.

La perte d'information se situe sur deux plans :

- **Un plan lié à la finesse de la σ-algèbre :** la σ-algèbre la plus « grossière », celle qui ne contient que l'ensemble vide et l'ensemble U, ne pourra fournir comme information que l'effectif total des agents existant à l'instant considéré.
- **Un plan lié à la perte d'identité des agents** : la σ-algèbre la plus fine, celle construite à partir des valeurs observables elles-mêmes[13] ne permet pas de distinguer deux agents ayant strictement les mêmes valeurs observées.

10. Par un calcul d'écart type sur les effectifs, ou encore un calcul d'entropie $-\sum_k \frac{N_k}{N} \log \frac{N_k}{N}$.

11. (Bronshtein, Semendyayev et al. 2003)

12. Pour être une mesure, cette application doit satisfaire certaines propriétés : positivité, valeur nulle pour l'ensemble vide, additivité sur des ensembles disjoints (σ-additivité).

13. Ou plus rigoureusement des singletons, sous-ensembles de U réduits chacun à un seul élément.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

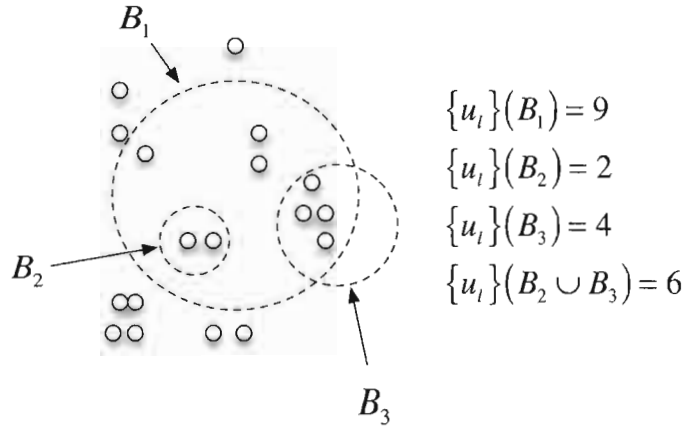


Figure 9.2 Configuration d'agents vue comme une mesure de dénombrement.

Cette dernière perte d'information n'a cependant pas lieu si le point de vue u est complété par les attributs servant à l'identification des agents. Aussi paraît-il souhaitable d'interpréter la configuration comme une mesure dénombrant les observations sur une σ-algèbre définie non pas sur U, mais sur le produit cartésien de U avec l'ensemble des identifiants I[14]. Un dénombrement porte alors sur le nombre d'observations dont les valeurs appartiennent à tel sous-ensemble de U *et* dont les identifiants des agents concernés satisfont telle propriété.

Dans la suite du chapitre, nous utilisons cette dernière interprétation, appliquée sauf indication contraire à la σ-algèbre la plus fine sur $U \times I$. Une configuration $\{u_l\}$ induit alors une mesure de dénombrement, tant sur cette σ-algèbre que sur les σ algèbres projetées sur I et U, la mesure de dénombrement restreinte à U étant la plus fréquemment utilisée[15]. Cela légitime l'écriture $\{u_l\}(B)$ aussi bien avec $B \subset U \times I$ qu'avec $B \subset U$ ou $B \subset I$.

On interprétera de la même façon comme une mesure les configurations $\{u_l\}_{g(l)}$ restreintes à un groupe d'agents : la mesure dénombrant dans tout ensemble les agents appartenant à ce groupe.

Une formule relie explicitement l'expression de la mesure aux valeurs observées sur les agents. Elle fait intervenir les *mesures de Dirac*.

Mesure associée à une configuration et mesure de Dirac

Soit $B \subset U \times I$

La mesure de Dirac centrée sur un couple $[u, i] \in U \times I$, notée $\delta_{[u,i]}$, est définie par : $\delta_{[u,i]}(B) = 1$ si $[u, i] \in B$, $\delta_{[u,i]}(B) = 0$ si $[u, i] \notin B$

---

14. Cf. Chapitre 7.

15. Il arrive en effet souvent que la dynamique d'un système d'agents ne soit pas influencée par les valeurs des identifiants, et ne dépende que des valeurs des attributs exprimant des propriétés « contingentes ».

Il est clair que la mesure $\{u_l\}_{l=i}$, associée à la configuration formée d'une seule observation portant sur l'agent i, est une mesure de Dirac : nous avons en effet[16]

$$\{u_l\}_{l=i}(B) = 1 \text{ si } [u_i, i] \in B \; \{u_l\}_{l=i}(B) = 0 \text{ si } [u_i, i] \notin B$$

Il est clair aussi que :

$$\{u_l\}(B) = \sum_i \{u_l\}_{l=i}(B)$$

La mesure $\{u_l\}$ est une somme de mesures de Dirac et il est légitime d'écrire

$$\{u_l\} = \sum_i \{u_l\}_{l=i} \text{ et plus généralement } \{u_l\}_{g(l)} = \sum_{i \in g} \{u_l\}_{l=i}$$

Toute partition génère une σ-algèbre, et réciproquement, on peut associer une partition génératrice à toute σ-algèbre construite sur un ensemble *fini* de parties. Une caractérisation opérationnelle se devant d'être finie, la référence aux σ-algèbres et à la théorie de la mesure pour les modèles agents peut paraître comme une sophistication inutile de l'idée banale du dénombrement sur des partitions. Cette référence a cependant un intérêt conceptuel général, qui ne se limite pas à la fourniture d'une représentation et d'un vocabulaire alternatifs. L'essence de cet intérêt est de permettre d'unifier le caractère discret des modèles agents et le caractère continu des modèles en densité. Nous verrons dans le prochain chapitre que la théorie de la mesure, les notations et concepts qu'elle fournit sous-tendent les méthodes mathématiques du passage entre les niveaux microscopiques de description des systèmes et les niveaux macroscopiques. Plusieurs travaux concernant des approches mathématiques des systèmes de particules — avec notamment des applications aux approches agents en dynamique de populations — montrent qu'il s'agit là d'un domaine de recherche actif.

La conception d'une configuration comme mesure présente un autre avantage : elle permet de noter sans ambiguïté l'état, à un instant t, d'un groupe identifié d'agents ou même d'un agent *qui n'est pas encore, ou qui n'est plus présent dans le système.* Les configurations $\{u_l\}^t_{g(l)}$ ou $\{u_l\}^t_{l=i}$ induisent alors des mesures nulles, traduisant naturellement le fait qu'on ne trouve nulle part dans $U \times I$ — et donc également dans U les agents ayant les identifiants spécifiés.

c) Résumés d'ordre 1

Décompter les agents dans une partie B de U revient à calculer la somme des valeurs $f(u_i)$ où f est la *fonction caractéristique* de l'ensemble B, valant 1 si $u_i \in B$ et 0 dans le cas contraire. Mais donner à chaque agent le même poids unité n'est pas

16. L'assimilation courante de l'observation u_i à la valeur observée $\pi_U u_i$(Chapitre 7) pourrait être ici gênante si l'on n'y prêtait pas attention. Nous devrions, dans la formule en référence, noter en toute rigueur $[\pi_U u_i, i]$ et non $[u_i, i]$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

la seule possibilité. Une généralisation consiste à choisir une fonction f quelconque, définie sur l'ensemble des valeurs observables, ayant ses valeurs dans $\mathbb{R}$ ou plus généralement dans un espace vectoriel de dimension réduite $\mathbb{R}^p$, et de considérer ensuite le cumul ou la moyenne des valeurs $f(u_i)$ observées sur chacun des agents.

Le modélisateur choisit la fonction f en lien avec les régions de l'ensemble des valeurs observables qu'il estime être des régions d'intérêt. S'il porte par exemple cet intérêt sur la présence ou l'absence des agents dans une certaine région B, il choisira une fonction ayant des valeurs élevées dans cette région. D'une façon générale, une valeur élevée de la moyenne ainsi calculée signifiera une corrélation positive entre la présence des agents dans une région et les valeurs qu'y prend la fonction.

Les cumuls ou les moyennes ainsi définis sont entièrement déterminés par la configuration $\{u_l\}$ et le choix de f. Aussi est-il naturel de chercher une notation qui exprime cette double dépendance. La théorie de la mesure permet d'assimiler sommes discrètes et intégrales. Elle légitime, dans des conditions précises, les écritures

$$\sum_i f(u_i) = \int f(u)\,\{u_l\}\,(\delta u)$$

L'intégrale s'interprète comme la somme, sur un grand nombre de petites parties δu centrées sur les différentes valeurs observables u, des valeurs qu'y prend la fonction, affectées d'un poids correspondant à la mesure de ces parties et donc au nombre d'agents qui y figurent. Un usage courant dans la littérature concernée abrège une telle intégrale par $\langle \mu, f \rangle$ où μ est la mesure impliquée. Le cumul des valeurs de la fonction se note donc dans cette convention :

$$\langle \{u_l\}, f \rangle \text{ ou } \langle \{u_l\}, f(u) \rangle$$

Nous qualifions[17], la quantité $\langle \{u_l\}, f \rangle$ — ou toute fonction de cette quantité — **de résumé d'ordre** 1 de la configuration.

Exemple

Si x est un point de vue position dans un espace physique et V un potentiel[18] interprété comme la densité locale d'une ressource, il n'est pas indifférent de regarder si les agents se positionnent à un instant donné sur des lieux où cette ressource est abondante. La quantité notée $(1/N)\langle \{x_l\}, V \rangle$ est alors la densité moyenne de la ressource *telle qu'elle est perçue à cet instant par la population des agents* ; elle sera en général différente de la densité moyenne de la même ressource sur la totalité de l'espace ouvert, la différence exprimant la plus ou moins grande concentration des agents dans les régions d'abondance.

---

17. En nous inspirant de (Bolker et al. 2000, p 389). Ces auteurs parlent de « *first order models* », « *in the sense that they track only the expected mean densities of the populations* » et de « *second order models* » to « *go beyond first moments by retaining information about population variances... but still ignore third and higher moments* ».

18. Cf modèles présentés au début du chapitre précédent.

Par ailleurs la position moyenne des agents s'écrit $(1/N)\langle\{x_l\}, x\rangle$, l'effectif N des agents s'exprimant lui-même par $\langle\{x_l\}, 1_X(x)\rangle$[19]

9.3.2 Dénombrements et résumés d'ordre *n*

La simple donnée du cumul ou de la moyenne d'une fonction arbitraire ne peut épuiser la richesse de l'information contenue dans une configuration. L'approche ci-dessus ne fournit aucune méthode pour une analyse qui porterait, par exemple, son attention sur *la présence simultanée d'agents dans plusieurs régions* choisies à l'avance.

Une voie pour ce faire, généralisant la précédente, est de considérer des fonctions f de plusieurs variables, $f(u^1 ..., u^k ..., u^n)$, définies sur le produit cartésien U^n, puis d'étudier le cumul — ou la moyenne — de ces valeurs *lorsque ces variables s'identifient aux valeurs observées sur les agents*, soit :

$$\sum_{i_1 ..., i_k ... i_n} f(u_{i_1} ..., u_{i_k} ..., u_{i_n})$$

Le choix des fonctions est au gré du modélisateur et des aspects dont il recherche la présence ou l'absence dans les structures des configurations. Les fonctions à deux variables, donc avec $n = 2$, sont les plus utilisées. Elles concrétisent dans certains cas l'attention portée par le modélisateur sur la présence simultanée d'agents dans des paires (B_1, B_2) de régions particulières ; par exemple en prenant une fonction $f(u^1, u^2)$ ayant des valeurs élevées lorsque $u^1 \in B_1$ *et* $u^2 \in B_2$. La fonction peut aussi quantifier une relation de proximité entre deux agents quelconques i_1 et i_2, *ou encore l'intensité de leur interaction binaire*. Cette quantification est effectuée sur la base d'une comparaison des valeurs du point de vue u observées respectivement chez chacun d'eux. Une moyenne élevée pour la fonction f signifiera que deux agents choisis au hasard, parmi ceux présents au même instant, auront toute chance d'être proches ou en forte interaction.

Ici encore la théorie de la mesure et ses notations légitiment l'écriture

$$\sum_{i_1 ..., i_k ... i_n} f(u_{i_1} ..., u_{i_k} ..., u_{i_n}) = \int ..., \int f(u^1 ..., u^n) \{u_l\}(\delta u^1) ..., \{u_l\}(\delta u^n)$$

Nous noterons en conséquence le cumul des valeurs de f de façon compressée par l'expression

$$\langle \otimes^n \{u_l\}, f\rangle \text{ ou } \langle \otimes^n \{u_l\}, f(u^1, ..., u^n)\rangle$$

où $\otimes^n \{u_l\}$ désigne la mesure qui retourne pour tout n – *uplet* de parties $(B_1 \subset U, ..., B_n \subset U)$ le *produit des nombres d'agents* qui y sont respectivement présents :

$$\otimes^n \{u_l\}(B_1, ..., B_n) = \{u_l\}(B_1) \times ... \times \{u_l\}(B_n)$$

19. 1_X est classiquement le symbole de la fonction valant 1 sur tout l'espace X.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

$\otimes^n \{u_l\}$ est bien une mesure de dénombrement : elle compte sur le produit cartésien $(B_1 \times ... \times B_n) \subset U^n$ le nombre de $n-uplets$ ***ordonnés***[20] $u_{i_1}, ..., u_{i_n}$ que l'on peut former en respectant la contrainte $u_{i_k} \in B_k$

La mesure $\otimes^n \{u_l\}$ est appelée **moment empirique**[21] **d'ordre** n associé à la configuration $\{u_l\}$. Nous qualifions dans le même esprit la quantité $\langle \otimes^n \{u_l\}, f \rangle$— ou toute fonction de cette quantité — de **résumé d'ordre** n de la configuration.

Il s'avère souvent utile de restreindre ce décompte et donc la prise de moyenne des valeurs f aux seuls $n-uplets$ $(i_1, ..., i_k, ..., i_n)$ *dont les agents sont tous distincts les uns des autres*. Cette idée conduit à une nouvelle mesure de dénombrement appelée *moment factoriel*[22] ou *moment corrigé*[23] d'ordre n. *Nous noterons ici* $\otimes^n_{\neq} \{u_l\}$ *une telle mesure.*

Exemples

Reprenons l'exemple des modèles d'attraction/répulsion dans le cas où dans la force exercée par l'agent j sur l'agent i vaut :

$$-\frac{\partial}{\partial x} V\left(|x - x_j|\right)_{|x=x_i}$$

Le résumé du second ordre :

$$\frac{1}{2}\left\langle \otimes^2 \{x_l\}, \left| \frac{\partial}{\partial x^1} V\left(|x^1 - x^2|\right) \right| \right\rangle$$

mesure, en sommant l'intensité des forces mutuelles qu'exercent les agents les uns sur les autres, le degré de tension existant à un instant donné dans le système. L'énergie du système, une caractérisation plus classique de son état macroscopique est elle-même donnée par le résumé du second ordre :

$$\frac{1}{2}\left\langle \otimes^2 \{x_l\}, V\left(|x^1 - x^2|\right) \right\rangle$$

Les diverses caractérisations de la structure spatiale des agents à cet instant, présentées dans la section précédente, se construisent également à partir de résumés du second ordre. Ainsi le nombre de paires ordonnées d'agents distincts séparés d'une

---

20. Deux ordres différents des mêmes identifiants conduisant à deux $n-uplets$ distincts.

21. Il s'agit d'une mesure, et non d'un moment scalaire ; le terme employé par (Stoyan et al 2005) est *moment measure*. Il s'agit d'une mesure associée à une configuration donnée, et non à l'ensemble des réalisations d'une classe, d'où le qualificatif d'empirique.

22. *Factorial moment measure*.

23. Cf. (Dieckmann et al. 2000, p 430) *Corrected correlation densities*.

distance inférieure ou égale à r, à partir duquel s'exprime la fonction $N(r)$, est-il égal à [24] :

$$\frac{1}{2}\left\langle \otimes_{\neq}^{n} \{x_l\}, \left(x^1, x^2\right) \mathrm{H}\left(r - \left|x^1 - x^2\right|\right)\right\rangle$$

où H est la fonction de Heaviside.

9.3.3 Extensions à plusieurs catégories d'agents

Les approches présentées plus haut s'étendent aux systèmes formés de plusieurs catégories d'agents c. Une configuration $\{u_l\}$ est cette fois associée au vecteur $\left\{\ldots, \{u_l\}_{c(l)}, \ldots\right\}$ des mesures formées des différentes configurations composantes, chacune d'elles relative à une catégorie. La formation d'un résumé d'ordre 1 exige le choix pour chaque catégorie d'une fonction f_c définie sur U_c et prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}^p$. Le résumé d'ordre 1 embrassant toutes les catégories est le vecteur à q composantes :

$$\left\{\ldots, \left\langle \{u_l\}_{c(l)}, f_c \right\rangle, \ldots\right\}$$

chacune des composantes étant elle-même un point dans l'espace $\mathbb{R}^p$.

Exemple

Dans un système prédateurs/proies, u étant un point de vue incluant les attributs biomasse, $\left\{\left\langle \{u_l\}_{N(l)}, f_N \right\rangle, \left\langle \{u_l\}_{P(l)}, f_P \right\rangle\right\}$ est le vecteur des biomasses totales de chaque espèce, lorsque f_N et f_P sont respectivement les fonctions retournant la valeur de la biomasse d'un agent dans chacune des catégories.

Pour les résumés d'ordre supérieur, la combinatoire est évidemment plus complexe. Une première approche définit une fonction f_c de n_c variables pour chacune des catégories d'agents auxquelles on s'intéresse, puis prend pour résumé le vecteur :

$$\left\{\ldots, \left\langle \otimes^{n_c} \{u_l\}_{c(l)}, f_c \right\rangle, \ldots\right\}$$

Mais dans ce vecteur les catégories sont considérées séparément les unes des autres : *les corrélations entre catégories ne sont pas prises en compte.* Pour intégrer dans les résumés de telles corrélations, traduisant des interactions entre agents de catégories différentes, il faut considérer, éventuellement pour chaque catégorie, des fonctions pour lesquelles certaines des variables sont destinées à porter des valeurs du point de vue u concernant des agents d'autres catégories.

24. Il est utile de préciser parfois — c'est le cas ici — les variables des fonctions f sur lesquelles portent les sommes effectuées, notamment quand la fonction est paramétrée. L'équation référencée applique *la convention que nous adoptons dans la suite, inspirée du λ-calcul : $(u)\ f\ (u, v)$ où u et v sont deux suites de symboles vérifiant $u \subset v$ désigne une fonction dont les variables sont désignées par les symboles de la suite u et les paramètres sont désignés par les symboles de la suite $v - u$.*
$(y)\ f\ (x, y)$ sera ainsi interprétée comme fonction de la variable y paramétrée par x.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Exemple

Dans un système prédateurs/proies, une telle approche résume par exemple l'aspect spatial de l'état du système avec un couple de deux distances — la moyenne des distances entre prédateurs, et la moyenne des distances entre proies — *mais aucune indication ne sera fournie, quant à la distance moyenne entre proies et prédateurs.* De même, l'association des deux fonctions de Ripley ne peut-elle remplacer la fonction notée $K_{12}(r)$[25], relative aux distances mesurées sur les paires prédateurs/proies.

De même, peut-on s'intéresser à la corrélation entre la proximité de deux prédateurs et *la présence d'une proie dans leur environnement immédiat.* Cette question amène à considérer une fonction $f_1\left(x_P^1, x_P^2, x_N\right)$ définie sur trois positions : x_P^1 (position d'un premier prédateur), x_P^2 (position d'un second prédateur) et x_N (position d'une proie). La fonction est construite de manière à représenter la corrélation, par exemple en prenant :

$$f_P\left(x_P^1, x_P^2, x_N\right) = \exp\left(-\frac{1}{d}\left[\left|x_P^1 - x_P^2\right| + \left|x_P^1 - x_N\right| + \left|x_P^2 - x_N\right|\right]\right)$$

La fonction ne prend des valeurs notables que si les trois distances en jeu sont petites devant d. On étudiera alors la distribution des valeurs prises sur tous les triplets (prédateur, prédateur, proie). On pourra notamment suivre la moyenne de cette distribution. Celle ci sera calculée à partir du cumul noté, dans la lignée des conventions précédentes :

$$\left\langle \{x_l\}_{P(l)} \otimes \{x_l\}_{P(l)} \otimes \{x_l\}_{N(l)}, f_P \right\rangle$$

$\{x_l\}_{P(l)}$ et $\{x_l\}_{N(l)}$ désignant respectivement les mesures de dénombrement associées aux configurations de positions des prédateurs et des proies.

9.3.4 Vers une typologie des résumés

Les exemples donnés montrent que les techniques évoquées peuvent être appliquées de multiples manières. Leur utilisation se déploie sur plusieurs dimensions.

a) La dimension de la granularité

Le modélisateur peut utiliser les techniques décrites sur le *système des N agents pris globalement,* en résumant ce système par *un* point dans l'espace $\mathbb{R}^p$. Mais il peut aussi, à chaque instant, considérer le système comme se décomposant en différents groupes. La configuration $\{u_l\}$ de départ est alors résumée non plus par un seul point, *mais par une configuration de valeurs calculées au niveau des groupes.* Les procédures permettant la décomposition du système en groupes sont évidemment multiples :

25. Dite fonction de Ripley intertype (Goreaud and Couteron 2006)

- Elles peuvent ainsi s'appuyer sur une partition spatiale, plus généralement sur *une partition fixe* de l'ensemble des observables d'un certain point de vue : les agents changent de groupe dès lors qu'ils passent d'une région de la partition à une autre. De telles décompositions sont ici qualifiées d'eulériennes.
- Elles peuvent aussi s'appuyer sur une partition de l'ensemble des identifiants, chaque agent restant alors dans le même groupe au cours de son existence. De telles décompositions sont ici qualifiées de lagrangiennes[26].
- Elles peuvent enfin être liées à des algorithmes de reconnaissance dynamique de groupes apparaissant et disparaissant au cours de la vie du système.

b) La dimension de l'ordre des résumés

Le modélisateur n'est pas contraint de choisir une valeur unique pour l'ordre des résumés. Il peut compléter un résumé d'ordre 1 — un effectif, une moyenne — par un résumé d'ordre 2 mettant en évidence des fréquences particulières de couples de valeurs observées satisfaisant certaines propriétés. Pour être pertinentes, les valeurs des ordres choisies doivent être en rapport avec les lois contrôlant la dynamique du système. Dans le cas d'un système où les interactions des agents sont binaires, l'ordre 2 — une somme de valeurs d'interactions — est ainsi *a priori* intéressant.

c) La dimension du choix des fonctions f

La multiplicité des choix ouverts sur les fonctions f — pour une granularité et un ordre fixés — permet au modélisateur d'étudier plusieurs aspects différents.

Par ailleurs ces fonctions peuvent dépendre de certains paramètres, leurs valeurs s'écrivant $f\left(u^1, ..., u^n, r\right)$; *les résumés sont alors des fonctions* notées :

$$(r)\left\langle \otimes^n \{u_l\}, \left(u^1, ..., u^n\right) f\left(u^1, ..., u^n, r\right)\right\rangle$$

et non plus de simples points de l'espace $\mathbb{R}^p$. On a vu l'utilisation de cette possibilité dans la caractérisation des structures spatiales.

26. Les termes *d'eulérien* et de *lagrangien*, en ce qui concerne leur signification ici, sont transposés de la mécanique des fluides : les équations eulériennes y décrivent la dynamique de variables — telles que la densité, la vitesse du courant — prises sur les points fixes de l'espace physique. Les équations lagrangiennes décrivent la dynamique des mêmes variables, mais mesurées sur chaque particule du fluide. Ce vocabulaire a été transposé dans les années 1995-2000 (Grünbaum and Okubo 1994) aux modèles développés en écologie, essentiellement pour distinguer les modèles intégrant l'espace par le biais d'équations aux dérivées partielles, ou encore par le biais de réseaux d'automates cellulaires, d'une part, et les modèles individus-centrés d'autre part.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

9.4 CARACTÉRISER LES DYNAMIQUES

Les modèles agents sont en général stochastiques. Les comportements spécifiés déterminent, non pas *une* trajectoire, mais *un faisceau* de trajectoires dont chacune a une certaine chance de se réaliser. Le hasard intervient à chaque instant pour orienter le destin du système. L'analyse de telles dynamiques — sous l'angle des probabilités — relève de la théorie des processus stochastiques[27]

Caractériser une dynamique d'agents, c'est donc établir des statistiques sur un faisceau de trajectoires observées dans un ensemble de simulations partant d'un même état initial. : statistiques longitudinales sur la trajectoire du système obtenue dans une simulation, statistiques diachroniques sur les différentes réalisations du système au même instant dans plusieurs simulations, statistiques mixtes combinant les deux approches. C'est évidemment l'intervention du temps et l'aspect longitudinal qui constitue la spécificité de ces statistiques. De fait, une littérature très importante traite des *séries temporelles* et de leur analyse, et il ne peut être question dans cet ouvrage d'en dresser un tableau même succinct. En nous concentrant sur ce qui est spécifique aux modèles agents, nous présentons ci-après quelques notions et notations utiles pour caractériser les dynamiques de configurations ; ces notions et notations seront reprises dans le chapitre suivant, lorsqu'il s'agira, non plus de caractériser, mais de construire des modèles agrégés de ces dynamiques. Nous nous limiterons ici pour la simplicité aux systèmes ne comportant qu'une seule catégorie d'agents.

9.4.1 Résumer une trajectoire

La trajectoire, sur un point de vue u, d'un système formé d'une seule catégorie d'agents peut être assimilée à une trajectoire d'une mesure. Cette vision du destin de la configuration paraît évidemment assez abstraite. Mais la section précédente montre que cette abstraction se ramène à des représentations concrètes, par l'intermédiaire de cumuls ou de grandeurs moyennes.

Un **résumé de la trajectoire** est un ensemble de valeurs $\left\langle \otimes^{n\omega}\{u_l\}^t, f\right\rangle$, prise sur une même réalisation ω de la vie du système, sur un nombre fini d'instants t, ou encore toute statistique — moyenne, variance, — construite sur cet ensemble de valeurs.

Exemple

Dans le modèle d'attraction/répulsion, le suivi au cours du temps, sur une réalisation de la vie du système[28] identifiée par le symbole ω, des valeurs de l'énergie :

$$\frac{1}{2}\left\langle \otimes^{2\omega}\{x_l\}^t, V\left(\left|x^1 - x^2\right|\right)\right\rangle$$

27. (Capasso and Bakstein 2005)

28. En pratique une simulation.

9.4.2 Caractériser le faisceau des trajectoires

L'ensemble des valeurs $\left\langle \otimes^{n\omega}\{u_l\}^t, f\right\rangle$, indicé sur t et éventuellement sur n si plusieurs ordres sont considérés, pour une réalisation ω fixée, représente *une* trajectoire observée de la configuration.

Chercher à caractériser le faisceau amène à s'intéresser aux distributions de ces valeurs *prises sur l'ensemble des réalisations possibles* pour t et n donnés, et aux grandeurs caractérisant ces distributions. Ainsi est-on conduit à étudier les espérances $E\left\langle \otimes^{n\omega}\{u_l\}^t, f\right\rangle$ de ces distributions pour t et n fixés, $\omega \in \Omega$.

De différents types de moyennes

Il faut bien voir la différence entre trois « **prises de moyennes** » :

- $(1/N)\left\langle {}^{\omega}\{u_l\}^t, f\right\rangle$ désigne une prise de moyenne des valeurs observées chez les agents dans un état du système considéré à l'instant t. Une prise de moyenne « spatiale », si on assimile ces valeurs observées à des « positions » dans un espace ;
- La prise de moyenne « synchronique » correspondant à l'espérance $E\left\langle {}^{\omega}\{u_l\}^t, f\right\rangle$ est au contraire faite à l'instant t sur la multitude des réalisations ω possibles issues du même état initial.
- Enfin on peut prendre la moyenne « diachronique » du résumé $\left\langle {}^{\omega}\{u_l\}^t, f\right\rangle$ au titre de caractérisation d'une réalisation ω donnée, sur certain intervalle de temps. L'équivalence ou non de cette dernière moyenne avec l'espérance synchronique est en rapport avec les questions de stationnarité et d'ergodicité.

Des distinctions de même nature ont cours pour les ordres supérieurs à 1.

La théorie de la mesure et la linéarité de l'opérateur E légitiment de parler d'une mesure espérée $E\left({}^{\omega}\{u_l\}^t\right)$ à l'instant t et donc *d'une configuration espérée*, ou encore *d'un état espéré du système*. Cette remarque se généralise à tout ordre n.

La mesure $E\left(\otimes^{n\omega}\{u_l\}^t\right)$, définie par l'équation :

$$\left\langle E\left(\otimes^{n\omega}\{u_l\}^t\right), f\right\rangle = E\left\langle \otimes^{n\omega}\{u_l\}^t, f\right\rangle$$

vérifiée pour toute fonction f de n variables est le **moment espéré** à l'ordre n du système à l'instant t.

Exemple

Dans l'exemple des modèles d'attraction/répulsion, la quantité notée :

$$\frac{1}{2}\left\langle E\left(\otimes^2\{x_l\}^t\right), V\left(\left|x^1 - x^2\right|\right)\right\rangle = \frac{1}{2}E\left\langle \otimes^2\{x_l\}^t, V\left(\left|x^1 - x^2\right|\right)\right\rangle$$

est l'énergie espérée du système à l'instant t.

De même la fonction de r définie par :

$$\frac{1}{2N}E\left\langle \odot^2\{x_l\}^t, \left(x^1, x^2\right) \mathrm{H}\left(r - \left|x^1 - x^2\right|\right)\right\rangle$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

où N est le nombre d'agents, est elle la fonction $N(r)$ espérée, caractérisant la configuration spatiale espérée de la population des agents à l'instant t. Donc proportionnelle à r^p s'il s'agit d'une configuration totalement aléatoire.

9.4.3 Stationnarité, courants de probabilités, ergodicité

Considérons à nouveau l'ensemble des trajectoires ${}^{\omega}\{u_l\}$ d'un système d'agents, issues d'un même état initial $\{u_l\}^0$. Soit P^t la loi de probabilité contrôlant la distribution des états possibles du système à l'instant t.

a) Stationnarité

La dynamique du système converge vers une *dynamique stationnaire* (temporellement) si on peut écrire $\lim_{t\to\infty} P^t = P$, c'est-à-dire si au bout d'un certain temps — *le temps de relaxation* — les probabilités des différents états possibles n'évoluent plus. La théorie des probabilités et des processus stochastiques précisent les différentes définitions utilisables de telles convergences.

Exemple

Les systèmes d'agents contrôlés par un mécanisme d'attraction/répulsion basé sur la minimisation d'une fonction d'énergie évoluent vers un état stationnaire. En particulier la distribution des probabilités des différentes valeurs possibles H de l'énergie finit par se stabiliser sur une fonction proportionnelle à $e^{-\beta H}$, le coefficient β dépendant du degré d'agitation aléatoire contrariant le mécanisme.

Si l'on considère de façon imagée chaque réalisation du système — pratiquement chaque simulation possible — comme un « agent-système » déroulant sa « vie » dans l'espace des états possibles, la stationnarité s'interprète comme le fait qu'il y a en chaque point de cet espace toujours autant d'agents-système, que la densité de ces agents autour de chaque point est constante.

b) Courants de probabilités

On conçoit donc que la stationnarité puisse recouvrir des situations très différentes : une première situation serait celle, rare à vrai dire, où chacun de ces agents-système serait « gelé » dans un état dont il ne bougerait plus ; dans une telle situation, les « vrais » agents eux-mêmes, composants du système, n'évolueraient plus, restant éternellement dans l'état où les a laissés la dernière modification apportée. Une situation plus habituelle est celle où chaque agent-système se déplace selon une marche plus ou moins aléatoire, l'ensemble de ces mouvements respectant cependant à chaque instant, afin de garantir la stationnarité, la contrainte de l'égalité des arrivées et des départs dans chaque région de l'espace des états. Là encore, existe à l'évidence une grande variété de cas envisageables. Certains d'entre eux manifestent l'existence de « courants » — des *courants de probabilités* — organisés dans l'espace des états, matérialisant les trajectoires suivies par les agents-système. La réflexion sur cette

diversité est à la base des distinctions entre stationnarité d'équilibre et stationnarité hors équilibre, étudiées en physique statistique.

Ces considérations développées sur les probabilités des états $\{u_l\}^t$ du système et leurs dynamiques peuvent être également avancées sur les probabilités des valeurs possibles de tout résumé $\langle \otimes^{n\omega}\{u_l\}^t, f\rangle$, avec le bénéfice de tous les outils mathématiques utilisables dans l'espace de dimension finie $\mathbb{R}^p$.

c) Ergodicité

Au lieu de considérer la distribution des états du système — ou des valeurs d'un résumé — à un instant donné sur l'ensemble des trajectoires, on peut porter son attention sur la distribution des mêmes valeurs le long d'une trajectoire donnée. La comparaison entre ces deux distributions est à rattacher à la notion d'*ergodicité*[29]. Une dynamique se développant dans un espace X est ergodique, lorsque toute trajectoire passe par tout point de X — ergodicité forte — ou au voisinage de tout point X, ergodicité faible[30].

La théorie de la mesure couplée à celle des systèmes dynamiques vient compléter cet énoncé intuitif par des définitions rigoureuses. La notion s'applique aussi bien aux dynamiques déterministes qu'aux dynamiques stochastiques. En ce qui concerne les modèles à base d'agents, l'ergodicité du système se traduit pratiquement par le fait que, en supposant un *régime stationnaire atteint,* une statistique établie sur une simulation unique, observée suffisamment longtemps, apporte la même information qu'une statistique sur un ensemble de simulations partant du même état initial et observées sur un même et seul instant postérieur au temps de relaxation. La nature de l'équilibre stationnaire est liée à son ergodicité. Si chaque trajectoire finit par figer le système dans un état dont il ne bouge plus, il est clair qu'une telle stationnarité n'est pas ergodique. Il peut en être de même lorsqu'on desserre cette obligation d'immobilité finale absolue et qu'on autorise une certaine agitation aléatoire : La dynamique du modèle d'Ising (cf. chapitre 10) en dimension 2, en dessous de la température critique, n'est pas non plus ergodique : l'ensemble des configurations rencontrées sur *une* trajectoire donnée du système ne reflète pas l'ensemble des configurations rencontrées lorsque toutes les trajectoires possibles sont considérées. Cette même dynamique devient ergodique par contre, dès lors que la température critique est supérieure au seuil.

29. La question de l'ergodicité a été l'un des enjeux de ce qui a peut-être été la première « simulation agents » sur ordinateur effectué par Enrico Fermi et ses collègues en 1955, visant à étudier la dynamique d'un système d'atomes en interactions.

30. Wikipédia : hypothèse ergodique.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

9.5 CARACTÉRISER LES INTERACTIONS

Le terme d'interaction est transdisciplinaire : interactions entre particules en physique, interactions entre gènes en biologie, interactions entre espèces en écologie, interactions médicamenteuses en pharmacologie, interactions spatiales (entre pôles urbains) en géographie, interactions entre individus en psychologie, réseaux d'interactions dans divers domaines, sont des exemples de cet emploi scientifique quasi universel. Il a fait partie du vocabulaire de base du courant systémique (Morin 1977), a été même un des termes phares de certaines écoles de ce courant — Palo Alto en psychologie — et s'est intégré depuis dans les sciences de la complexité. Mais il est curieusement difficile d'en trouver une définition formelle.

9.5.1 Un terme polysémique

L'étude des contextes d'utilisation du terme d'*interaction* conduit au constat d'une grande diversité. Cette diversité se structure, en plusieurs pôles. Une première conception est celle d'interaction comme acte d'*échange* entre deux entités. Vient ensuite l'idée — peut-être la plus prégnante — de combinaison non additive, dans un sens large, de deux effets causaux sur le devenir d'un même objet. Puis celle — plus vague — d'influence ou d'action réciproque de deux objets ou de deux processus. Enfin le terme d'interaction est parfois considéré comme synonyme du terme d'interdépendance.

Le point commun aux significations évoquées est l'existence de plusieurs entités — au moins deux — formant système. Le fait pour ses entités « d'être ensemble », d'échanger ou de s'influencer mutuellement conduit à une corrélation entre leurs trajectoires. Ce fait d'être ensemble crée une dynamique de groupe, différente de celle qui existerait en l'absence de ces actions réciproques. En ce sens, il y a bien combinaison non additive de plusieurs dynamiques : la dynamique du groupe n'est pas la juxtaposition des dynamiques de ses parties, considérées séparément.

Face à la diversité constatée, il est utile de distinguer la manifestation des interactions dans les faits, des mécanismes qui les engendrent. Nous retenons, comme manifestation des interactions, l'interdépendance des trajectoires suivies par les agents, ou dépendance réciproque, *ce qui conduit à mesurer des corrélations entre agents.*

Il existe plusieurs manières d'aborder la question de l'interdépendance des trajectoires. Une première approche consiste à rechercher des corrélations, *sur l'ensemble des vies possibles du système* à partir d'une même situation initiale, entre ce qui se passe à l'instant t dans une partie du système et ce qui se passe au même instant, ou à des instants ultérieurs τ, dans une autre partie de ce même système. Une seconde approche consiste à évaluer les conséquences d'une *perturbation* appartenant à une classe spécifiée, affectant une partie du système à un instant t, sur les états d'une autre partie du système à des instants ultérieurs τ.

9.5.2 Mesurer des corrélations au sein d'un système d'agents

Cette première approche de l'interdépendance des trajectoires donne lieu à plusieurs variantes, selon la façon dont sont définies les parties du système dont on mesure les corrélations : agents ou groupes d'agents identifiés — variantes « lagrangiennes » selon le vocabulaire déjà introduit — ou partition d'un espace d'observables — variantes eulériennes.

a) Corrélations des états de parties du système, variantes lagrangiennes

Les variantes lagrangiennes sont faciles à mettre en œuvre lorsqu'on peut reconnaître le même agent d'une réalisation à l'autre de la vie du système. On peut alors comparer les situations d'un agent identifié, ou un groupe identifié sur plusieurs réalisations du système, observées au même instant, voire à des instants différents.

Soit ainsi i et j deux de ces agents, et les valeurs d'une fonction f calculées respectivement sur leurs états individuels u_i^t et u_j^t pris au même instant. La corrélation entre ces deux valeurs prises à l'instant t sur l'ensemble des trajectoires possibles du système s'évalue par :

$$E\left[f\left({}^{\omega}u_i^t\right) f\left({}^{\omega}u_j^t\right)\right] - E\left[f\left({}^{\omega}u_i^t\right)\right] E\left[f\left({}^{\omega}u_j^t\right)\right]$$

Exemple

Dans un modèle de polarisation de type Ising, on peut s'intéresser aux corrélations entre un site i et un site distant j, pour f donnant la valeur 1 ou -1 de l'orientation. À température très élevée, des changements d'orientation ont lieu fréquemment et indépendamment sur chacun des deux sites, et la corrélation sera proche de zéro. À basse température, les orientations des sites sont corrélées et la valeur de la corrélation est 1.

La corrélation moyenne au sein du système, observée à l'instant t, entre les valeurs de f prises sur des paires quelconques d'agents distincts est égale à :

$$\frac{1}{2N(N-1)}\left[\sum_{i\neq j} E\left[f\left({}^{\omega}u_i^t\right) f\left({}^{\omega}u_j^t\right)\right] - \sum_{i\neq j} E\left[f\left({}^{\omega}u_i^t\right)\right] E\left[f\left({}^{\omega}u_j^t\right)\right]\right]$$

soit

$$\frac{1}{2N(N-1)}\left[V\left\langle {}^{\omega}\{u_l\}^t, f\right\rangle\right] - \frac{1}{2N(N-1)}\sum_i Vf\left({}^{\omega}u_i^t\right)$$

où le premier terme est la variance du cumul sur l'ensemble des réalisations de f et le second terme le cumul des variances individuelles. Lorsque le nombre d'agents est grand et les variances individuelles bornées, une corrélation moyenne nulle implique bien une variance nulle pour le cumul de f. *L'absence de corrélations entre agents entraîne la disparition, au niveau global, de l'influence des fluctuations microscopiques constatées au niveau individuel.*

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

La corrélation moyenne entre deux groupes d'agents spécifiés, g et h, en supposant que ces deux groupes n'aient aucun agent en commun, est donnée par :

$$\frac{1}{N_g N_h}\left[E\left\langle {}^{\omega}\{u_l\}^t_{g(l)}, f\right\rangle\left\langle {}^{\omega}\{u_l\}^t_{h(l)}, f\right\rangle - E\left\langle {}^{\omega}\{u_l\}^t_{g(l)}, f\right\rangle E\left\langle {}^{\omega}\{u_l\}^t_{h(l)}, f\right\rangle\right]$$

b) Corrélations des états de parties du système, approche variantes eulériennes

Les variantes eulériennes portent sur les corrélations entre parties du système construites sur une partition d'observables, indépendamment de la présence effective des agents sur les éléments de cette partition. Leur mise en œuvre est donc plus naturelle lorsque le nombre des agents varie.

Soient ainsi deux fonctions h et k représentatives de deux parties différentes de l'ensemble d'observables U, par exemple des fonctions caractéristiques de deux parties distinctes, ou encore deux noyaux centrés sur des valeurs différentes. La corrélation des résumés de l'état du système respectivement basés sur ces deux fonctions est donnée par :

$$E\left[\left\langle {}^{\omega}\{u_l\}^t, h\right\rangle\left\langle {}^{\omega}\{u_l\}^t, k\right\rangle\right] - E\left\langle {}^{\omega}\{u_l\}^t, h\right\rangle E\left\langle {}^{\omega}\{u_l\}^t, k\right\rangle$$

Lorsque U s'assimile à un espace métrique X, l'intérêt porte souvent, non sur les corrélations entre deux parties déterminées, mais *entre deux parties quelconques séparées d'une distance* r. On considère alors *la fonction de corrélation* $g(r)$ évoquée dans la caractérisation des structures spatiales et définie à partir de la fonction de Ripley. En définissant h et k à partir d'un noyau f par :

$$h(x) = f\left(|x - \overline{x}|\right)$$
$$k(x) = f\left(|x - (\overline{x} - \Delta x)|\right)$$

un calcul[31] montre la correspondance entre les deux notions de corrélations, et justifie du même coup une estimation pratique de $g(r)$.

9.5.3 Évaluer les conséquences d'une perturbation sur les états ultérieurs du système

Dans cette seconde approche de l'interdépendance des trajectoires il s'agit de savoir, à partir de quand, sur quels agents et quels points de vue, se manifeste notablement l'effet d'une perturbation du système introduite à un instant donné[32]. Plus largement évaluer, sur la distribution des valeurs d'un résumé de l'état du système à des instants

31. Cf. Annexe (§ 9.2).

32. Un cas particulier est celui de l'étude de la dépendance du destin du système par rapport à l'état initial.

$\tau > t$, l'effet de perturbations intervenant à l'instant t. Cette approche conduit donc 1) à choisir le résumé du système, la caractéristique de la distribution de ce résumé, la distance dans cet espace de valeurs, qui vont constituer le critère d'appréciation des conséquences 2) à délimiter l'ensemble des perturbations admises et choisir un résumé du système qui permet de les quantifier.

Exemples

Dans les modèles d'Ising, une perturbation introduite sur ensemble localisé de sites modifie les probabilités des états d'un groupe de sites distants, dans un délai qui dépend de l'état du système, de la température et de la distance entre les sites perturbés et les sites testés. De telles investigations ont été menées dans le cadre d'études sur la propagation de « dommages » dans les matériaux (Amadeu and Nobre 1997) (Rubio Puzzo and Albano 2002) ou, plus généralement, sur la propagation d'influences dans des réseaux. Elles portent l'accent sur la vitesse de cette propagation et l'étendue des modifications constatées au bout du compte. Elles montrent qu'à basse température, la perturbation se « cicatrise » vite avant d'atteindre une proportion notable des sites, alors qu'au voisinage de la température critique la propagation est exponentielle. Lorsque la température est très grande au contraire, l'effet de la perturbation est immédiatement noyé dans le bruit du système et n'est à nouveau plus décelable.

Dans (Amadeu and Nobre 1997) la mesure de l'effet de la perturbation est la moyenne des différences entre les orientations de chaque site prises à l'instant τ sur une trajectoire issue du système initial et une trajectoire issue de la perturbation. Une mesure du même type quantifie la perturbation elle-même introduite à l'instant initial t en provoquant des inversions d'orientations sur une fraction de l'ensemble de sites. Seules deux trajectoires sont considérées à chaque essai[33]. Toutefois plusieurs essais sont répétés, avec des séries de nombres aléatoires communes aux deux trajectoires mais différentes d'un essai à l'autre, et une prise de moyenne de la mesure des effets est effectuée.

9.6 DES CONFIGURATIONS AUX RÉSEAUX

Dans ce chapitre, nous avons traité de la caractérisation des configurations d'agents, en privilégiant une approche issue de la théorie des processus ponctuels. L'ensemble des états individuels observables est vu comme un espace support dans lequel les agents sont plongés. On cherche alors à décrire quantitativement l'organisation spatiale des agents à chaque instant dans cet espace support, à l'aide de fonctions des valeurs d'états individuels vues comme des positions. Ces fonctions sont définies en rapport avec les interactions en œuvre dans le système, si bien qu'elles expriment, d'une certaine manière, les tensions qui le font évoluer.

33. « *Both copies ... evolve under the same dynamics and random numbers, so as to ensure that any possible difference between them should be a consequence of the initial damage.* »

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Une autre approche — complémentaire — consisterait précisément à considérer la structure des interactions, en tant qu'elles tissent des *réseaux* entre les agents, et à utiliser les outils élaborés par les travaux en ce domaine. Il existe d'ailleurs un certain parallélisme entre l'analyse des semis de points et l'analyse des réseaux : on retrouve dans ce dernier domaine la dualité présente dans le premier : descripteurs empiriques d'une part, visant à caractériser tel réseau donné — distances géodésiques, degrés de connectivité, mesures de centralité, de résilience, de corrélations — classes de réseaux d'autre part, définies à travers des propriétés énoncées *a priori* ou des méthodes de construction. On retrouve aussi le rôle de référence que joue parmi ces méthodes le mode totalement aléatoire, avec la classe des « random networks ».

Il faut noter pour terminer que l'analyse des réseaux s'investit dans les modèles d'agents, à des titres autres que ceux de la caractérisation de la structure des interactions. Les réseaux sont en effet également employés dans la représentation d'environnements complexes. Par exemple, lorsque l'espace dans lequel se déplacent les agents est, non pas continu, mais formé d'un ensemble de places reliées par des liens. Les réseaux interviennent alors, non seulement comme produits de la dynamique du système, mais comme contraintes *a priori* de cette même dynamique. Pour toutes ces raisons, la pratique et la théorie des modèles agents doivent prendre en compte les apports de ce domaine de recherche actuellement très actif[34].

34. Cf. les revues sur ce sujet, notamment (Newman 2003).

Chapitre **10**

Modéliser les dynamiques d'agents

Ce chapitre aborde les voies mathématiques qui ouvrent la possibilité d'établir les propriétés émergentes d'une dynamique d'agents à partir de l'expression des comportements individuels. Ces voies, aussi bien que leurs aboutissements, sont diverses. Elles prennent parfois la forme d'une déduction menée d'un bout à l'autre. Elles procèdent plus souvent d'une démarche mixte, dans laquelle la part déductive assume certaines conjectures vérifiées dans les simulations, mais que l'on renonce à démontrer formellement. Elles peuvent prendre un chemin direct, allant des comportements individuels aux propriétés à établir, ou indirect, en passant par des modèles dynamiques intermédiaires. Dans tous les cas, elles exploitent diverses représentations des *états du système* des agents, construits sur différents niveaux de description, en mobilisant reformulations et abstractions.

Nous appelons **réduction d'un modèle à base d'agents**[1] toute opération consistant à construire un second modèle dynamique du même système et/ou à établir une propriété, dans lequel toute référence aux identités des agents a disparu. Nous appelons le résultat de la réduction *modèle agrégé* dans le premier cas, *propriété agrégée* dans le second, quelle que soit leur nature.

La première question qui se pose à propos de telles réductions est celle du *pourquoi* : quels en sont les bénéfices, alors même que les simulations conduites sur les modèles agents paraissent fournir une représentation satisfaisante de la dynamique du système étudié. La seconde question, à laquelle il est beaucoup plus difficile de répondre, est celle du comment : qu'est-ce qui rend de telles opérations de réduction possibles, quelles sont les techniques pour le faire ?

1. En référence à la problématique générale de la réduction de la complexité des modèles.

Après une brève évocation du premier point, le chapitre expose deux exemples. L'ambition de ces exemples est d'illustrer l'apport des opérations de réductions qu'ils mettent en œuvre, et de présenter l'application dans leur cas de certaines méthodes mathématiques utilisables.

> Le premier exemple introductif concerne une dynamique de polarisation, dans laquelle la population des agents ne varie pas au cours du temps et dans laquelle l'effectif de ces agents reste donc constant. Le second superpose à la dynamique de polarisation une dynamique de reproduction/dissémination, dans laquelle les agents apparaissent et disparaissent au cours de la vie du système. Il introduit par là, à côté des dynamiques continues en œuvre dans le premier exemple, des processus générant des *événements discrets*.
>
> Dans chacun des exemples, nous examinons l'implication du nombre d'agents sur la nature des modèles agrégés obtenus. Dans les deux cas, nous avons pris le parti de présenter de façon précise les développements effectués et les notions mathématiques mises en œuvre, en renvoyant lorsque nécessaire aux annexes et aux ouvrages spécialisés.
>
> Nous assumons également, dans les deux cas, le choix d'un *temps continu*, malgré le caractère parfois difficile des formalismes utilisés. Ce choix résulte de la forme initiale donnée aux modèles concernés par leurs auteurs, lesquels ont développé leurs analyses mathématiques dans ce cadre. Un exercice utile serait de reprendre les deux exemples dans un mode discret pour en voir les conséquences tant sur leur expression, les propriétés des dynamiques, les modèles agrégés pouvant en rendre compte et les raisonnements mathématiques établissant ces modèles agrégés.

Ces exemples ne prétendent pas à l'exhaustivité. Aussi le chapitre traite-t-il ensuite de façon élargie sur les techniques de réduction, les modèles agrégés ou propriétés agrégées qui en résultent et les difficultés rencontrées. Cette partie donne également l'occasion de revenir sur les choix possibles de représentation du temps sous forme discrète ou continue. La conclusion abordera la question de savoir ce qui objectivement, dans une dynamique d'agents, rend possible une opération de réduction, et comment peut-on mesurer l'adéquation du modèle agrégé obtenu.

10.1 RÉDUCTION DES MODÈLES AGENTS : POURQUOI ?

Dans l'étude d'un phénomène, quelle peut être l'utilité de mettre en parallèle plusieurs niveaux de modélisation, se différenciant par le degré de détail dans la spécification des objets, des attributs, des mécanismes, par le degré de finesse dans la prise en compte de l'espace et du temps ? Si les équations d'un modèle mathématique global manifestent aux yeux de tous les contraintes auxquelles le système est soumis, et si les propriétés des dynamiques qu'elles engendrent sont conformes à ce qui a pu être constaté, pourquoi vouloir descendre à un niveau plus fin ? Si à l'inverse un modèle à base d'agents fournit une compréhension aisée et communicable de la dynamique étudiée, avec des résultats de simulation validés par l'observation, quel est l'intérêt d'une modélisation plus agrégée et souvent plus abstraite ?

10.1.1 Une compréhension plus « profonde »

Lorsque le modélisateur a fait le choix d'un modèle à base d'agents, la recherche de modèles agrégés peut lui paraître une préoccupation purement académique. En premier lieu, face à une réalité complexe, son effort va porter sur la ou les bonnes échelles d'espace et de temps, le ou les niveaux de description lui paraissant les plus adéquats pour spécifier les différents processus en jeu et leurs interactions. Au terme de cet effort, il souhaitera exploiter le modèle et le valider plutôt que de recommencer sur d'autres bases. En second lieu, la littérature montre que le « transfert d'échelle », le passage mathématique rigoureux, sur des systèmes pourtant bien délimités, entre un niveau microscopique de description et un niveau agrégé est un problème difficile, porteur de questions ouvertes. Les exemples qui suivent ne doivent pas de ce point de vue faire illusion.

Le souci de relier différents niveaux de modélisation est cependant une constante de l'activité scientifique. La production d'un modèle agrégé sert en effet à capturer ce qui est essentiel dans les déterminismes des dynamiques observées — par exemple la forme de l'espace ouvert aux agents, la distance d'interaction, le niveau de bruit — et à isoler ce qui est accessoire, par exemple l'état initial du système, la manière dont s'entrelacent les processus. C'est donc bien un apport à une compréhension plus profonde de la réalité. Dans l'autre sens, la construction d'un modèle à base d'agents en appui à une modélisation agrégée, permet de tester la cohérence et la plausibilité des hypothèses sur lesquelles cette modélisation est basée, et à en cerner les limites de validité.

10.1.2 La possibilité de développements analytiques

Les modèles à base d'agents, même lorsque les interactions se formulent à travers un système d'équations comme pour les dynamiques d'agrégation/répulsion, ne se prêtent généralement pas directement à des développements analytiques. Il y a nécessité, si l'on veut démontrer certaines propriétés, et non seulement les mettre en évidence par simulation, d'opérer d'abord une réduction de ces modèles, pour aboutir à des modèles agrégés. L'expression mathématique de ces modèles agrégés laisse alors espérer de plus grandes possibilités. Le premier exemple, celui concernant la dynamique de polarisation, est une illustration de cette démarche. On verra que les propriétés qui ont pu être démontrées, à partir du modèle eulérien issu de la réduction, expriment des aspects qualitatifs et quantitatifs importants des dynamiques étudiées, et permettent de les relier explicitement aux valeurs des paramètres comportementaux des agents.

10.1.3 Des simulations moins coûteuses et mieux contrôlables

Enfin, comme il a été plusieurs fois affirmé (Lerman, Galstyan et al. 2001), la disposition d'un modèle agrégé, dont on connaît les conditions d'équivalence avec le modèle

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

à base d'agents initial, permet d'effectuer des simulations à l'aide de méthodes numériques contrôlées. L'exécution de ces simulations est *a priori*[2] plus rapide que celle des simulations directes du modèle à base d'agents, et ouvre donc la voie à des explorations plus complètes du champ des paramètres.

10.2 RÉDUCTIONS D'UNE DYNAMIQUE DE POLARISATION

L'arrière-plan du premier exemple (Adioui, Treuil et al. 2003) est la modélisation de l'alignement mutuel de poissons au sein d'un banc et donc une problématique à cheval entre l'écologie et de l'éthologie. Le modèle agent considéré relève de la métaphore des forces évoquée au chapitre 10. La dynamique se rapproche d'une dynamique de polarisation de type Ising, mais les orientations sont prises dans un ensemble continu et non plus discret.

10.2.1 Le modèle agent

Le modèle met en œuvre un nombre fixe d'agents — représentant des poissons — caractérisés chacun par un seul attribut : **l'orientation** (planaire). Une première simplification dans la spécification du modèle a en effet consisté à s'abstraire de la position physique[3]. Le co-domaine des orientations observables est l'intervalle $]-\pi, +\pi]$. Ce co-domaine est un espace métrique, la distance entre deux orientations étant la valeur de l'angle aigu qu'elles forment.

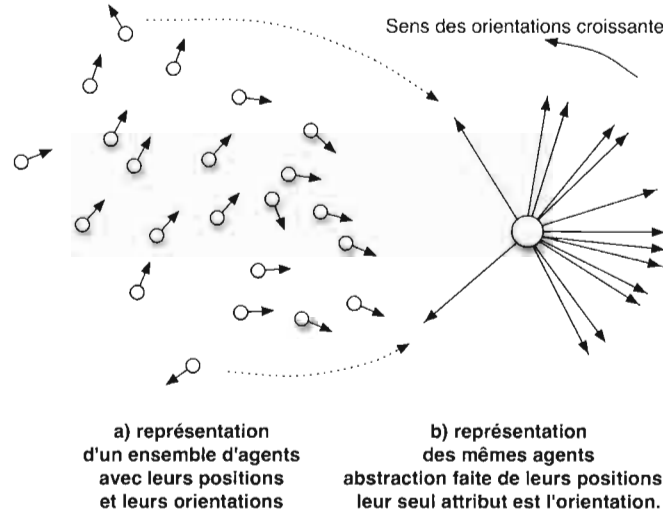


Figure 10.1 Dans le modèle d'alignement considéré, un seul attribut, l'orientation.

2. Mais cela peut être discuté — par exemple lorsque le modèle agrégé est un modèle d'équations aux dérivées partielles — et de toute façon doit être vérifié cas pas cas.

3. Cette simplification sera discutée plus loin.

a) Équations du modèle, première formulation

Le système évolue sous l'effet de deux mécanismes, un mécanisme d'alignement et un mécanisme d'agitation aléatoire. Le système d'équations de l'encadré ci-après, présente la manière dont sont calculés à chaque pas de temps $]t, t + \Delta t]$ les changements d'orientation : la modification de l'orientation de l'agent i est la résultante combinée d'un changement dans le sens des orientations majoritaires, telles que l'agent les perçoit par rapport à la sienne propre, et d'un aléa gaussien simulant une agitation brownienne.

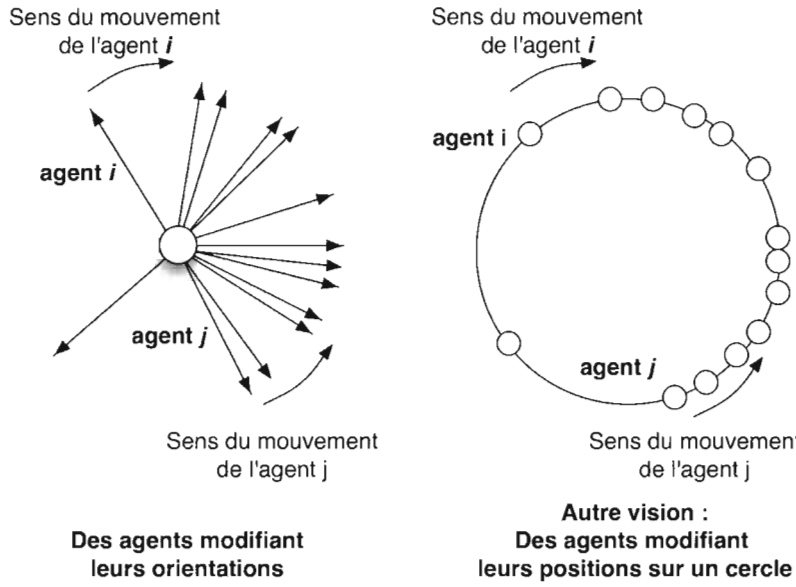


Figure 10.2 Chaque agent modifie son orientation dans le sens des orientations majoritaires.

Dynamique d'alignement : équations primitives du modèle agent

Un système de N équations[4], chacune d'elle relative à un agent i et à un intervalle de temps $]t, t + \Delta t]$

$$\Delta x_i^t = \alpha \frac{\nu_i^t - \mu_i^t}{N} \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \xi_i^t i = 1, ..., N$$

Δx_i^t : déplacement angulaire de l'agent i.

4. x_i^t représente le parcours angulaire de l'agent i depuis l'instant initial. Il s'agit d'une variable pratique car prenant ses valeurs (continues) dans $\mathbb{R}$. L'orientation θ_i^t sur l'intervalle $]-\pi, +\pi]$ s'en déduit par l'opération modulo 2π. Bien que la description primitive du système soit faite en termes d'orientations, le parcours angulaire effectué par les agents exprime un aspect important de la dynamique du système.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

N : nombre d'agents.

ν_i^t : nombre d'agents dont l'orientation — par rapport à celle de l'agent i — est davantage tournée vers la gauche (angle $\left[x_j^t, x_i^t\right]$ vérifiant $\pi > \left[x_j^t, x_i^t\right] > 0$,).

μ_i^t : nombre d'agents dont l'orientation — par rapport à celle de l'agent i — est davantage tournée vers la droite (angle $\left[x_j^t, x_i^t\right]$ vérifiant $0 > \left[x_j^t, x_i^t\right] > -\pi$).

ξ_i^t : réalisation d'une variable aléatoire normale gaussienne.

α et σ deux coefficients constants positifs.

b) Équations du modèle agent, formulation analytique

De telles équations sont assez peu « analytiques », les nombres d'agents « plus à gauche » ν_i^t et « plus à droite » μ_i^t n'étant pas reliés *explicitement* à la configuration $\{x_l\}^t$ des parcours angulaires. Mais une reformulation en termes de *champ de potentiel, puis de fonction d'énergie* permet de satisfaire cet impératif. Elle nécessite cependant l'intervention d'une *expression approchée mais dérivable*[5] de la valeur absolue de l'angle $\left[x, x'\right]$ pour tout couple de parcours angulaires. L'approximation notée $d\left(x, x'\right)$ revient à *négliger pour tout agent i, dans la détermination de la force d'alignement, les orientations exactes des autres agents, lorsque celles-ci sont trop proches de la sienne propre, ou au contraire trop proches de l'orientation opposée.*

Dynamique d'alignement : équations analytiques du modèle agent[6]

Champ de potentiel :

$$V\left(x, \{x_l\}\right) = \frac{1}{N} \sum_j d\left(x, x_j\right)$$

Fonction d'énergie :

$$H\left(x_l\right) = \frac{1}{2N} \sum_{i,j} d\left(x_i, x_j\right)$$

Équations aux différences finies (temps discret) :
Pour tout agent i :

$$\begin{aligned} \Delta x_i^t &= -\alpha \frac{\partial}{\partial x} V\left(x_i^t, \{x_l\}^t\right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \xi_i^t \\ &= -\alpha \frac{\partial}{\partial x_i} H\left(\{x_l\}^t\right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \xi_i^t \end{aligned}$$

5. La valeur absolue de l'angle $\left[x, x'\right]$ n'est en effet pas dérivable lorsque $x = x' + 2k\pi$ et lorsque $x = x' + \pi + 2k\pi$. L'expression approchée $d\left(x, x'\right)$ doit être choisie pour que ses dérivées existent et soient nulles dans ces mêmes conditions. On consultera l'Annexe (§ 10.1) pour des exemples de telles fonctions.

6. La démonstration de l'équivalence de ces équations avec la formulation précédente est liée au fait que l'on peut assimiler $\frac{v_i^t - \mu_i^t}{N}$ à $-\frac{\partial}{\partial x} V\left(x_i^t, \{x_l\}^t\right)$. On peut la consulter en Annexe (§ 10.1).

Équations différentielles stochastiques (temps continu)[7] :
Pour tout agent i :

$$dx_i^t = -\alpha \frac{\partial}{\partial x} V\left(x_i^t, \{x_l\}^t\right) dt + \sigma dW_i^t$$
$$= -\alpha \frac{\partial}{\partial x_i} H\left(\{x_l\}^t\right) dt + \sigma dW_i^t$$

écrites de façon condensée sous forme vectorielle :

$$d\{x_l\}^t = -\alpha \nabla H\left(\{x_l\}^t\right) dt + \sigma dW^t$$

Les processus contrôlés par de telles équations appartiennent à une classe très générale de processus stochastiques, celle des processus de Itô[8] ou processus de diffusion.

10.2.2 Questions sur la dynamique du système

Le système d'agents, à travers de telles équations, devient un système dynamique stochastique de dimension N. Les questions que l'on se pose classiquement en présence de tout système dynamique prennent place en rapport avec les trois paramètres que sont la force d'alignement α, l'agitation aléatoire σ et le nombre N des agents. En particulier, le système converge-t-il toujours vers une solution stationnaire ? cette solution est elle indépendante des conditions initiales ? comment cette solution stationnaire éventuelle, ainsi que le temps de relaxation nécessaire pour l'atteindre, dépend-elle des paramètres ? Quelle est plus en détail, puisqu'on se trouve en présence d'un système stochastique, la distribution des probabilités des états du système lorsque la phase stationnaire est atteinte ?

À toutes ces questions on peut répondre par des simulations systématiques. Par exemple, les simulations montrent que, dès lors que le nombre d'agents dépasse la centaine, le comportement général du système *semble* ne dépendre que du rapport $2\alpha/\sigma^2$, et qu'une discontinuité — une bifurcation — *semble* apparaître en deçà d'une certaine valeur critique de ce rapport : lorsque $2\alpha/\sigma^2$ devient inférieur à 1,6[9] environ, plus aucun début d'alignement n'apparaît, et ce quelle que soit la valeur de α. Mais les simulations, si elles permettent de constater des faits et de faire des hypothèses, n'apportent pas de certitudes absolues. Peut-on à partir des équations analytiques du système, *en déduire* les propriétés constatées expérimentalement ? Telle est la question posée ici.

7. dW_i^t représentant la variation dans un temps infinitésimal d'un processus de Wiener. (Cf. Annexe (§ 10.2))

8. Du nom du mathématicien japonais Kiyoshi Itô, l'un des fondateurs de la théorie des équations différentielles stochastiques.

9. Nous verrons plus loin que la valeur critique théorique est $\pi/2$ soit 1,570...

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

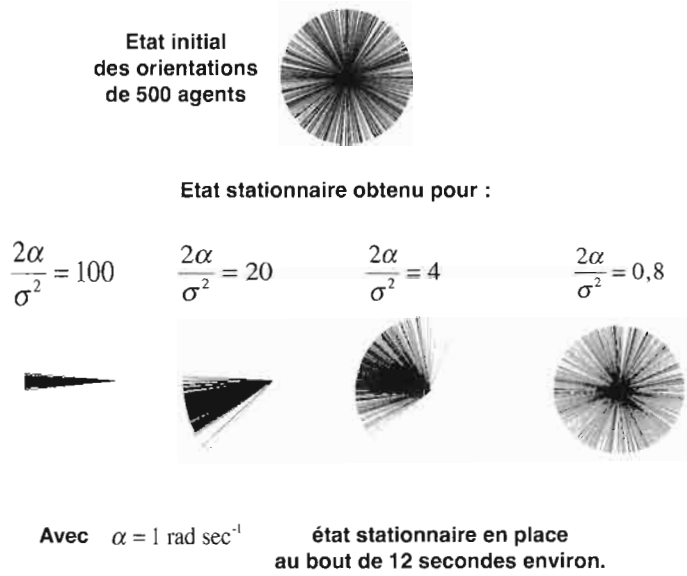


Figure 10.3 Exemples de simulation montrant la mise en place de différents états stationnaires du système.

L'objectif de toute réduction est bien de formuler des lois contrôlant la dynamique de divers résumés de l'état du système pour ensuite démontrer des propriétés. Nous présentons dans la suite de l'exposé trois types de réduction :

- Une première réduction aboutissant, lorsque le nombre d'agents est suffisamment grand, à un système d'équations aux dérivées partielles contrôlant l'évolution de la densité des agents sur l'intervalle des orientations. L'étude de ce système (Adioui, Arino et al. 2003) a permis de démontrer, notamment, l'existence de la bifurcation et d'en donner la valeur critique.
- Une seconde réduction se concentre sur le temps de relaxation et sa dépendance aux paramètres
- Une troisième réduction concerne la distribution de probabilités des valeurs possibles de l'énergie lorsque l'état stationnaire est atteint.

Ces trois réductions utilisent des reformulations des équations du système, points de départ des calculs de réduction.

10.2.3 Reformulations des équations du modèle

Ces reformulations consistent à transformer les équations stochastiques du modèle. Le premier type de transformation consiste à écrire des équations stochastiques où figurent explicitement des grandeurs résumant l'état du système. Le second type de

consiste à transformer les équations stochastiques sur les états en *équations déterministes sur des probabilités*. Dans les références citées de cet exemple, cette seconde approche n'est pas utilisée, aussi en parlerons nous pas immédiatement[10].

Soit F une fonction quelconque[11] définie sur $\mathbb{R}^N$, prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}$ et permettant donc de construire un résumé $F\left(\{x_l\}^t\right)$ de l'état du système à l'instant t.

Exemples de fonctions

Moyenne à l'instant t des parcours angulaires des différents agents :

$$F\left(\{x_l\}^t\right) = \frac{1}{N}\sum_i x_i^t$$

Variance à l'instant t des parcours angulaires des différents agents :

$$F\left(\{x_l\}^t\right) = \frac{1}{2N^2}\sum_{i,j}\left(x_i^t - x_j^t\right)^2$$

La théorie des équations différentielles stochastiques permet d'établir une équation contrôlant l'évolution de $F\left(\{x_l\}^t\right)$. Cette équation est une application au cas étudié de *la formule de Itô*[12].

Cette formule, dans sa forme différentielle, donne :

$$dF\left(\{x_l\}^t\right) = -\alpha\sum_i \frac{\partial}{\partial x} V\left(x_i^t, \{x_l\}^t\right)\frac{\partial}{\partial x_i}F\left(\{x_l\}^t\right)dt + \frac{\sigma^2}{2}\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}F\left(\{x_l\}^t\right)dt + \sigma\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}F\left(\{x_l\}^t\right)dW_i^s \quad (10.1)$$

Cette équation exprime une variation infinitésimale possible de F à partir d'un état donné du système. La théorie montre que *l'espérance du terme stochastique résiduel*, prise sur les différentes trajectoires possibles du système partant de cet état, *est nulle*. Il s'ensuit la formule suivante, donnant l'*espérance* de la variation infinitésimale du résumé *conditionnée par l'état effectivement atteint* à l'instant t :

$$E\left[dF \,\middle|\, \{x_l\}^t\right] = \left[-\alpha\sum_i \frac{\partial}{\partial x} V\left(x_i^t, \{x_l\}^t\right)\frac{\partial}{\partial x_i}F\left(\{x_l\}^t\right) + \frac{\sigma^2}{2}\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}F\left(\{x_l\}^t\right)\right]dt \quad (10.2)$$

10. Il s'agit de l'approche par l'équation maîtresse et l'équation de Fokker Planck. Son application au présent exemple est brièvement présentée au § 1.2.6 et développée dans l'Annexe (§ 10.5). Elle est reprise dans son principe général au § 10.4.1.

11. Dotée des propriétés de continuité et de dérivabilité requises pour les démonstrations.

12. On consultera l'Annexe (§ 10.2) pour la nature de cette formule et les liens avec les ouvrages spécialisés.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

L'expression entre crochet transpose au cas stochastique ce qui serait une dérivée de $F\left(\{x_l\}^t\right)$ par rapport au temps — c'est-à-dire le long de l'unique trajectoire suivie par le système — dans le cas déterministe. L'opérateur faisant passer de F à cette expression est le *générateur infinitésimal* du modèle.

Exemples

Si $F\left(\{x_l\}^t\right)$ renvoie la moyenne des parcours angulaires, l'équation (10.2) devient :

$$E\left[dF \,|\, \{x_l\}^t\right] = 0$$

Si $F\left(\{x_l\}^t\right)$ renvoie leur variance, l'équation (10.2) devient dans les conditions où $d\left(x, x'\right) \approx |x, x'|$ (les écarts angulaires entre les agents ne sont ni trop proches de π, ni trop petits) :

$$E\left[dF \,|\, \{x_l\}^t\right] = \left[-\alpha \frac{H\left(\{x_l\}^t\right)}{N} + \frac{\sigma^2}{2}\right] dt.$$

Sous la forme intégrale, nous aurons :

$$\begin{aligned} F\left(\{x_l\}^t\right) = F\left(\{x_l\}^{t_0}\right) & \\ - \int_0^t \alpha \sum_i \frac{\partial}{\partial x} V\left(x_i^s, \{x_l\}^s\right) \frac{\partial}{\partial x_i} F\left(\{x_l\}^s\right) ds & \\ + \int_0^t \frac{\sigma^2}{2} \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} F\left(\{x_l\}^s\right) ds & \\ + \int_0^t \sigma \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} F\left(\{x_l\}^s\right) dW_i^s & \quad (10.3) \end{aligned}$$

Il s'agit d'une équation donnant le résumé $F\left(\{x_l\}^t\right)$ à l'instant t en fonction de plusieurs éléments. Ces éléments sont la valeur à l'instant initial, une intégrale sur le temps[13] d'un terme d'interaction, une intégrale sur le temps d'un terme de diffusion, enfin *une intégrale stochastique*, notion définie rigoureusement dans le cadre de la théorie des processus stochastiques en temps continu. Ce dernier terme noté $M^t(F)$ est *un cumul, sur la trajectoire effective du système, de variations aléatoires constatées à chaque instant.* Sa dynamique est un processus stochastique : sa valeur à l'instant t sera différente d'une trajectoire à l'autre. On en connaît cependant les propriétés[14]. Son espérance, sur l'ensemble des trajectoires possibles du système, est

13. Sur la trajectoire effectivement suivie par le système depuis l'instant initial jusqu'à l'instant t.

14. Celles attachées aux processus stochastiques appelées *martingales,* qui se caractérisent par le fait que la valeur *constatée* à un instant t quelconque donne l'espérance de la valeur à n'importe quel instant ultérieur $t + s$ sur l'ensemble des trajectoires possibles à partir de t. On ne peut pas — en probabilité — espérer dans l'avenir faire mieux que ce qu'on a fait à l'instant présent.

nulle pour tout t. Lorsque le gradient de la composante F_k est borné sur l'ensemble des états $\{x_l\}$, ses variations, sur un temps d'observation des trajectoires fixé, sont également bornées[15]. Ces connaissances sont très précieuses dans l'étude du comportement du système, lorsque le nombre d'agents devient de plus en plus grand.

Les équations (10.1) et (10.2) sont valables pour une large classe de fonctions F. Elles se généralisent aisément où ces fonctions prennent leur valeurs non plus dans $\mathbb{R}$, mais dans un espace de dimension quelconque $\mathbb{R}^p$. Elles ne constituent nullement un modèle *fermé* de la dynamique du résumé sur lequel elles s'appliquent : la connaissance de la seule valeur $F\left(\{x_l\}^t\right)$ ne suffit nullement à déterminer le futur de la trajectoire de cette fonction, ni même son futur immédiat. Il est nécessaire pour cela de connaître le détail de l'état du système.

10.2.4 Cas d'un grand nombre d'agents : réduction à un modèle EDP

Considérons l'équation stochastique (10.3) avec une fonction F donnée par :

$$F\left(\{x_l\}\right) = \frac{1}{N}\left\langle \{x_l\}, f\right\rangle$$

où f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et prenant ces valeurs dans $\mathbb{R}$. Le résumé construit sur F est simplement *la moyenne des valeurs de la fonction* f sur l'ensemble des agents. L'équation (10.3) s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\left\langle \{x_l\}^t, f\right\rangle = \frac{1}{N}\left\langle \{x_l\}^{t_0}, f\right\rangle \\ - \frac{1}{N}\int_0^t \alpha\left\langle \{x_l\}^s, \frac{\partial}{\partial x}V\left(x, \{x_l\}^s\right)\frac{d}{dx}f(x)\right\rangle ds \\ + \frac{1}{N}\int_0^t \frac{\sigma^2}{2}\left\langle \{x_l\}^s, \frac{d^2}{dx^2}f(x)\right\rangle ds \\ + \frac{1}{N}\int_0^t \sigma\sum_i \frac{d}{dx}f\left(x_i^s\right)dW_i^s \qquad (10.4)\end{aligned}$$

L'application au cas particulier des considérations développées sur la dynamique du terme martingale $M^t(F)$ — le quatrième terme — montre que la fourchette des valeurs qu'il prend tend à augmenter avec le temps en raison de la racine carrée du temps écoulé. Elle montre également que l'espérance mathématique du carré de sa valeur maximale sur un temps d'observation $[0, T]$ est bornée par un terme qui tend vers 0 lorsque le nombre d'agents N devient de plus en plus grand.

Ainsi le terme stochastique résiduel devient-il négligeable pour des systèmes comportant un grand nombre d'agents. Reste le problème de la limite des expressions intervenant dans les intégrales d'interaction et de diffusion.

15. En probabilité. Les calculs le montrant mobilisent les *inégalités de Doob.*

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

a) Construction du modèle EDP

Lorsque les agents sont nombreux, on est intuitivement porté à assimiler la configuration $\{x_l\}^t$ à une fonction de densité dérivable $\rho^t(x)$ donnant *la proportion* d'agents dans un petit secteur de largeur δx autour de chaque valeur x. Il est clair par ailleurs que les agents n'ont effectué entre l'instant initial et l'instant t, qu'un parcours angulaire fini sur $\mathbb{R}$. La configuration $\{x_l\}^t$ n'occupe qu'un segment fini de $\mathbb{R}$ et il doit en être de même pour $\rho^t(x)$. *Cette hypothèse de convergence vers une fonction de densité permet de poser :*

$$\frac{1}{N}\left\langle \{x_l\}^t, f\right\rangle \approx \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\rho^t(x)\,\delta x$$

et

$$V\left(x, x_*^t\right) \approx v^t(x) \text{ où } v^t(x) = \int_{\mathbb{R}} d(x,\xi)\,\rho^t(\xi)\,\delta\xi$$

Appliquées à l'équation intégrale (10.4) , après élimination du terme martingale négligeable, les assimilations précédentes sont le point de départ d'un calcul rigoureux mais relativement simple[16]. Ce calcul aboutit à l'équation aux dérivées partielles sur l'évolution de la densité $u(\theta)$ donnant la *proportion* des agents autour des valeurs d'orientation, dans la forme donnée dans (Adioui, Treuil et al. 2003) :

$$\frac{\partial}{\partial t}u^t(\theta) = -\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\alpha u^t(\theta)\left[\int_{\theta'=\theta}^{\theta'=\theta+\pi} u^t\left(\theta'\right)d\theta' - \int_{\theta'=\theta-\pi}^{\theta'=\theta} u^t\left(\theta'\right)d\theta'\right]\right\} - \frac{\partial}{\partial\theta}\left\{-\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}u^t(\theta)\right\} \quad (10.5)$$

L'interprétation de cette équation peut paraître difficile, alors que les processus qu'elle traduit s'expriment simplement dans le modèle agent dont elle est issue. Elle devient plus claire, dès lors que l'on en relie le second membre aux calculs de *bilans de courants dans l'espace des orientations.*

Dynamique d'alignement : le modèle d'équation aux dérivées partielles

L'équation (10.5) contrôlant l'évolution de la densité d'agents sur chaque orientation se réécrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}u^t(\theta) = -\frac{\partial}{\partial\theta}J^t(\theta) - \frac{\partial}{\partial\theta}K^t(\theta)$$

Le terme :

$$J^t(\theta) = \alpha\rho^t(\theta)\left[\int_{\theta'=\theta}^{\theta'=\theta+\pi} u^t\left(\theta'\right)d\theta' - \int_{\theta'=\theta-\pi}^{\theta'=\theta} u^t\left(\theta'\right)d\theta'\right]$$

16. Cf. Annexe (§ 10.3). Le passage des parcours angulaires x_i^t aux orientations θ_i^t utilise la 2π périodicité des fonctions $d\left(x, x'\right)$.

est un courant résultant de la tendance des agents à adopter une orientation plus conforme à l'orientation majoritaire, telle qu'ils la perçoivent chacun à partir de leur propre orientation du moment.

Le terme :

$$K^t(\theta) = -\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}u^t(\theta)$$

est le courant de diffusion résultant des modifications aléatoires affectant les orientations des agents, tendant à rendre uniforme la distribution des densités.

b) La question de la convergence

Les calculs précédents reposent sur l'hypothèse — non formellement établie — de convergence de la distribution des orientations vers une fonction de densité. Consignons le fait que les configurations $\{x_l\}^t$ se déploient sur N agents par les notations ${}_N\{x_l\}^t$. Soit alors une suite de systèmes d'agents, suite indicée par le nombre N, dont les configurations *à l'instant initial* satisfont la propriété de convergence exprimée par :

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\left\langle {}_N\{x_l\}^0\right\rangle = \int f(x)\rho^0(x)\,dx$$

où $\rho^0(x)$ est une fonction de densité donnée partout définie. Le problème à résoudre est de savoir si une telle propriété est conservée au cours du temps. Autrement dit de savoir s'il existe à tout instant t une fonction de densité $\rho^t(x)$ partout définie permettant d'écrire :

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\left\langle {}_N\{x_l\}^t\right\rangle = \int f(x)\rho^t(x)\,dx$$

Ce problème, quoi qu'il en paraisse, est difficile et la littérature montre qu'on ne peut tenter de le traiter que cas par cas (Capasso and Bakstein 2005). Dans (Adioui et al. 2003), la convergence est simplement supposée[17]. Il ne peut être question dans le cadre de cet ouvrage d'exposer de telles démonstrations, qui font appel à la théorie des processus stochastiques et aux formalismes de la théorie de la mesure, en mobilisant un ensemble de définitions et de théorèmes fondant les notions d'espaces de mesures et de trajectoires stochastiques de valeurs prises dans ces espaces. Le lecteur se référera, pour des développements concernant des processus similaires à ceux considérés ici à l'ouvrage de V. Capasso déjà cité.

17. Cela illustre une situation assez fréquente dans la problématique de réduction des modèles agents, où l'on se trouve contraint de poser une hypothèse particulière, éventuellement vérifiée par simulation, pour franchir une étape du calcul.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

10.2.5 Les enseignements du modèle EDP

Le modèle EDP est bien une réduction : toute référence explicite aux agents a disparu. Cette réduction suppose, pour que l'on puisse poser l'hypothèse de convergence, un grand nombre d'agents ; en pratique les simulations ont montré qu'une centaine d'agents suffit largement pour que la dynamique du système, dans plusieurs de ses propriétés importantes, soit bien exprimée.

L'avantage de ce modèle mathématique est qu'il se prête à des développements analytiques. Plusieurs de ces développements sont présentés dans (Adioui, Treuil et al. 2003). Ils *démontrent* les propriétés suggérées par les simulations, en particulier celles reliant la largeur Φ du faisceau dans l'état stationnaire et les paramètres α et σ

Relation $\Phi(\alpha, \sigma)$: propriétés démontrées analytiquement

1- Quel que soit l'état initial, la répartition des densités $u'(\theta)$ évolue vers une répartition d'équilibre unique $\overline{u}(\theta)$.

2- Cette répartition d'équilibre n'est fonction que du seul rapport $\beta = 2\alpha/\sigma^2$. La largeur Φ du faisceau à l'équilibre ne dépend donc que de β.

3- Tant que l'intensité de la polarisation est faible devant la diffusion, plus exactement tant que β est inférieur à une valeur critique β_c, la répartition d'équilibre est la répartition uniforme sur $[-\pi, +\pi[$. Aucune polarisation effective ne s'observe. $\Phi(\beta)$ reste constant sur sa valeur maximale.

4- Lorsque β dépasse cette valeur critique, un rétrécissement du faisceau commence à apparaître, $\Phi(\beta)$ devenant progressivement nul lorsque $\beta \to \infty$. L'analyse permet de donner la forme de la fonction $\Phi(\beta)$ au voisinage de β_c.

La **démonstration** passe par la recherche des solutions stationnaires des équations aux dérivées partielles précédentes, et en étudiant leur stabilité respective selon la valeur du paramètre β. Ces solutions stationnaires sont les points fixes de l'opérateur fonctionnel $H(\beta, u)$ défini par :

$$H(\beta, u)(\theta) = \frac{e^{\beta \int_0^\theta g(u)(\theta')d\theta'}}{\int_{-\pi}^{+\pi} e^{\beta \int_0^\theta g(u)(\theta')d\theta'} d\theta}$$

où $g(u)(\theta)$ désigne la différence, pour une fonction de densité u donnée, entre la proportion d'agents qui se trouvent orientés plus « à gauche » de l'orientation θ et la proportion complémentaire de ceux orientés plus « à droite ». Un examen rapide montre que la répartition uniforme :

$$u(\theta) = \frac{1}{2\pi}$$

est un point fixe de l'opérateur $H(\beta, u)$ et fournit une solution « triviale » au système d'équations. Des développements ultérieurs montrent qu'au delà d'une valeur

$\beta_c = \pi/2$ cette solution devient instable, au profit d'une autre solution stationnaire stable mais non triviale et s'interprétant comme la manifestation d'un début d'alignement.

10.2.6 Apports d'autres réductions

Pour établir les propriétés précédentes le cheminement a été d'établir la validité d'un modèle agrégé ne considérant que des densités d'agents puis d'étudier analytiquement ce modèle agrégé. Mais ce second modèle n'est valide que lorsque les agents sont en grand nombre. Considérons maintenant un nombre d'agents quelconque.

a) Dynamique de la fonction d'énergie

La fonction d'énergie, dont l'expression est :

$$H\left(\{x_l\}^t\right) = \frac{1}{2N}\sum_{i,j} d\left(x_i, x_j\right)$$

fournit un résumé du second ordre de l'état du système. Un calcul simple, mené à partir de la formule de Itô appliquée à H, donne :

$$dH\left(\{x_l\}^t\right) = -\alpha\sum_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}H\left(\{x_l\}^t\right)\right)^2 dt + \frac{\sigma^2}{2}\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}H\left(\{x_l\}^t\right)dt + \sigma\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}H\left(\{x_l\}^t\right)dW_i^t \quad (10.6)$$

Considérons les situations intermédiaires où la dynamique d'alignement a conduit le système dans un état où l'écart angulaire entre les deux agents extrêmes est au plus π, sans que les agents soient encore trop proches les uns des autres. Un calcul simple[18] montre que l'équation (10.6) devient :

$$dH\left(\{x_l\}^t\right) \approx -\alpha C dt + \sigma\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}H\left(\{x_l\}^t\right)dW_i^t \quad (10.7)$$

où le coefficient C est constant dans le temps, et donc,

$$E\left[dH\left|\{x_l\}^t\right.\right] = -\alpha C dt \quad (10.8)$$

En rappelant que dans les situations intermédiaires évoquées :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}H\left(\{x_l\}^t\right) \approx -\frac{\nu_i^t - \mu_i^t}{N}$$

18. Pour les détails de la démonstration, Cf. Annexe (§ 10.4).

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

et en triant les agents dans un ordre angulaire croissant, on peut voir que N^2C est la somme des carrés d'entiers relatifs compris entre $-(N-1)$ et $+(N-1)$. Nous avons donc :

$$C = \sum_{i=1}^{i=N} \left(\frac{N-2i+1}{N} \right)^2 = \frac{1}{3} \frac{(N-1)(N+1)}{N}$$

Le terme stochastique peut être également calculé, en tant que somme de termes aléatoires indépendants de moyenne nulle et de variances connues. L'équation (10.7) prend finalement la forme d'une équation différentielle stochastique très simple :

$$dH(t) \approx -\alpha C dt + \sigma \sqrt{C} dW^t \tag{10.9}$$

Nous avons bien dans cette dernière équation, où l'élément stochastique dW^t est un scalaire, *un modèle agrégé contrôlant la dynamique de l'énergie*, séparant :

- un terme déterministe, exprimant *une simple décroissance linéaire*[19] en fonction du temps, indépendant du détail de la configuration des orientations. Le taux de cette décroissance est proportionnel à α — la décroissance de la fonction d'énergie est d'autant plus rapide que la force d'alignement est plus grande — et à N.
- un terme stochastique résiduel de moyenne nulle et d'écart-type proportionnel à σ et $\sqrt{N}$

Il faut se souvenir qu'un tel modèle agrégé ne représente correctement la dynamique du système, résumé par la valeur de l'énergie, que sur un tronçon de sa trajectoire limitée dans le temps, et dont la durée dépend de la situation initiale et des paramètres α, σ et N. En particulier, lorsque les agents sont devenus suffisamment proches, les conditions du passage de (10.6) à (10.7) ne sont plus constamment vérifiées. Les termes associés à σ^2 dans l'équation (10.6) ne sont plus nuls et deviennent de plus en plus grands. Les termes associés à $-\alpha$ deviennent de plus en plus petits. La décroissance tendancielle de l'énergie ralentit et le régime stationnaire se met en place.

Un autre enseignement étayant les résultats des simulations, peut encore être tiré des équations précédentes. Le rapport $H\left(\{x_l\}^t\right)/N$ peut être assimilé à un écart moyen entre les orientations des agents. La dynamique de cet écart moyen, toujours dans les situations intermédiaires considérées, est alors une décroissance linéaire dont la vitesse est indépendante du nombre d'agents, en valant approximativement $\alpha/3$. On peut en induire qu'une fois que l'écart angulaire entre les deux agents extrêmes est devenu inférieur à π, le temps d'établissement du régime stationnaire est indépendant du nombre d'agents.

b) Caractérisation du régime stationnaire

L'équation de Fokker Planck est une équation déterministe décrivant l'évolution des probabilités de trouver le système, à chaque instant, au voisinage des différents états

19. Observée lors des simulations.

$\{x_l\}$ *a priori* possibles. On se référera à l'Annexe (§ 10.5) pour le principe de son calcul à partir des équations stochastiques du système. Des considérations sur la 2π périodicité de $H\left(\{x_l\}\right)$ permettent de passer ici encore des parcours angulaires aux orientations. L'équation de Fokker Planck sur la dynamique des probabilités $P^t\left(\{\theta_l\}\right)$ des différentes configurations d'orientations $\{\theta_l\}$ est alors la suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}P^t\left(\{\theta_l\}\right) = \alpha\left[\sum_i \frac{\partial^2}{\partial\theta_i^2}H\left(\{\theta_l\}\right)P^t\left(\{\theta_l\}\right) + \sum_i \frac{\partial}{\partial\theta_i}H\left(\{\theta_l\}\right)\frac{\partial}{\partial\theta_i}P^t\left(\{\theta_l\}\right)\right] + \frac{\sigma^2}{2}\sum_i \frac{\partial^2}{\partial\theta_i^2}P^t\left(\{\theta_l\}\right) \quad (10.10)$$

Un calcul simple montre que la fonction $P^t\left(\{\theta_l\}\right)$ définie par :

$$P^t\left(\{\theta_l\}\right) = \frac{1}{\int e^{-2\frac{\alpha}{\sigma^2}H(\{\theta_l\})}\delta\{\theta_l\}}e^{-2\frac{\alpha}{\sigma^2}H(\{\theta_l\})}$$

fonction retournant donc pour chaque configuration $\{\theta_l\}$ une valeur constante dans le temps, est solution de l'équation (10.10). Cette solution exprime les probabilités de chaque configuration possible du système, *lorsque le régime stationnaire est atteint.* L'intégrale posée en dénominateur existe bien, la somme étant effectuée sur chacune des N composantes de $\{\theta_l\}$ entre $-\pi$ et π. Cette intégrale, notée Z et qui est fonction du rapport $\beta = 2\alpha/\sigma^2$ et de N, s'appelle en physique statistique la *fonction de partition* du système. Sa connaissance permet le calcul de l'espérance de tout résumé du système, notamment celle de l'énergie. Un calcul classique montre ainsi que l'espérance de la valeur de la fonction H est donnée par :

$$E[H] = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z(\beta, N)$$

Le calcul de cette espérance de l'énergie, lorsque le régime stationnaire est atteint, peut se conduire explicitement lorsque le système comporte deux, trois, voire quatre agents[20]. Pour des valeurs supérieures du nombre d'agents, on peut approcher les valeurs de Z et de $E[H]$, pour β et N donnés, par des *estimateurs de Monte-Carlo.* La méthode consiste à produire un échantillon de n configurations d'orientations, générées chacune de façon totalement aléatoire, et à estimer les intégrales en jeu par la moyenne empirique des sommes discrètes correspondantes. On opère alors bien par simulation, mais il s'agit d'une simulation statique, ne mettant en œuvre explicitement aucune règle comportementale. Cette simulation permet d'accéder aux propriétés stationnaires du système, sans programmation effective du modèle agent, à l'aide d'algorithmes connus et exécutables rapidement[21].

20. Cf. Annexe (§ 10.5).

21. Il se peut qu'il existe dans la littérature des formules explicites approximant $E[H]$ dans le cas d'un grand nombre d'agents.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

10.3 RÉDUCTIONS D'UNE DYNAMIQUE DE REPRODUCTION AVEC DÉPLACEMENT

Le second exemple s'inspire des travaux menés par Nadjia El Saadi (El saadi 2004) concernant la modélisation de la dynamique de population de phytoplancton. La démarche purement mathématique suivie par l'auteur considère cette population comme constituée à chaque instant d'un nombre fini de particules interagissant et se reproduisant. Elle a consisté à poser les équations du système des particules, à démontrer des propriétés de la dynamique qu'elles engendrent, puis à étudier, toujours mathématiquement, quelles pouvaient être la forme et les propriétés de modèles en densité équivalents, lorsque le nombre de particules devenait très grand. Le fait nouveau par rapport aux analyses abordées précédemment est introduit par le processus de reproduction, le nombre d'agents évoluant constamment au cours de la vie du système.

10.3.1 Le modèle agent

Les processus en œuvre sont : d'une part un processus brownien d'agitation aléatoire associé à un processus d'interaction entre particules de type agrégation/répulsion, appelé *processus de diffusion* ; d'autre part un processus de mortalité/reproduction par division, appelé *processus de branchement*. Dans le but de faciliter la compréhension en gardant le contexte et les notations de l'exemple précédent, le problème ayant fait l'objet du travail cité en référence est transposé à un système d'agents se déplaçant sur un cercle. Les positions de ces agents sont ainsi repérées par un parcours angulaire x.

Dynamique de reproduction avec déplacement : le modèle agent

Processus de diffusion : ses équations, identiques à celles de la polarisation s'écrivent, pour tout agent i :

$$dx_i^t = -\alpha \frac{\partial}{\partial x} V\left(x_i^t, \{x_l\}^t\right) dt + \sigma dW_i^t \tag{10.11}$$

avec pour la fonction potentielle les expressions déjà données.

Processus de branchement : chaque agent peut à chaque instant être affecté par un événement avec pour conséquence, à part égale, soit sa disparition pure et simple, soit sa division en deux nouveaux agents. La survenance d'un événement pour un agent donné est contrôlée par une loi de probabilité exponentielle :

La probabilité pour que — rien ne s'étant encore produit — l'événement apparaisse dans un délai inférieur à τ est $1 - e^{-\mu\tau}$.

En cas de division, les deux particules se placent au même endroit, avant de se séparer en conséquence du mécanisme décrit par les équations (10.11). La dynamique résultant des deux mécanismes est donc une succession d'épisodes se terminant par un événement affectant l'un des agents, et pendant lesquels se développe une dynamique spatiale continue, laissant le nombre d'agents constant.

Chaque agent est identifié par un entier, les deux agents issus d'une division de l'agent i recevant respectivement les identifiants $2i$ et $2i + 1$[22]. L'ensemble de tous les identifiants potentiels, donc ici l'ensemble des entiers plus grands ou égaux à 1, est noté I.

La démarche suivie par les auteurs des travaux est similaire à celle de l'exemple précédent. Elle débute par une reformulation du modèle. Cette reformulation articule mouvements continus, mouvements discrets et, fait nouveau, *événements discrets* liés à la dynamique démographique. C'est ce dernier point, la manière dont il est abordé techniquement et les conséquences qu'il entraîne au niveau de l'équation aux dérivées partielles sur les densités, qui motive l'exposé. Du fait du nombre variable d'agents, l'état $\{x_l\}^l$ du système ne peut plus être vu comme un point dans un espace de dimension fixe. Comme indiqué dans le chapitre précédent, une solution à ce problème est d'assimiler cet état à une mesure de dénombrement.

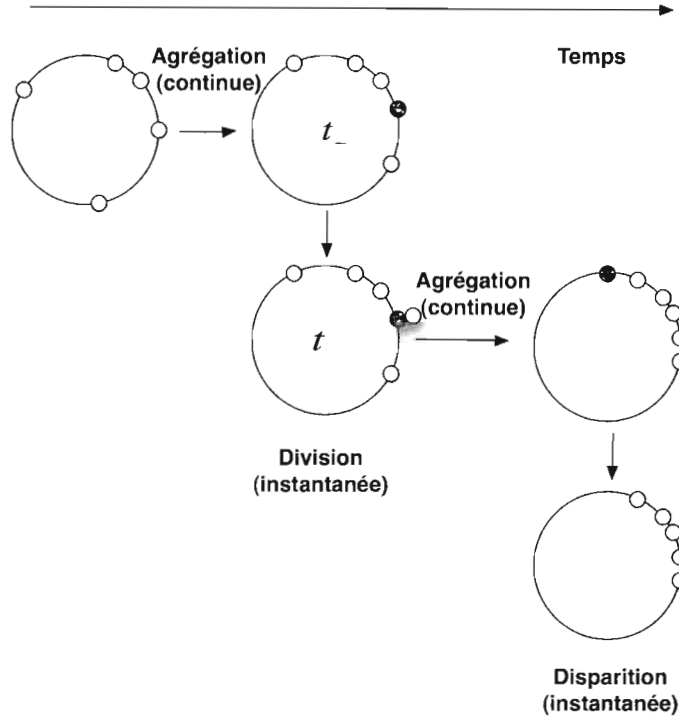


Figure 10.4 Diffusion et branchement : schéma des mécanismes en jeu.

22. En considérant la population initiale comme ayant été engendrée par divisions successives à partir d'un agent unique, un entier donné sera lié sans ambiguïté à un seul agent.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

10.3.2 Reformulation du processus de branchement

Considérons le produit cartésien $I \times T$ de l'ensemble des identifiants des agents par l'ensemble des instants. Générons sur chaque ligne $i \in I$, donc pour chaque identifiant potentiel, un semis de points $\Psi(i)$ complètement aléatoire[23] d'intensité uniforme μ. Chacun de ces points représente un *événement potentiel*, division ou disparition de l'agent identifié par i, sous réserve que cet agent existe à l'instant considéré.

Soit Ψ_- et Ψ_+ les sous-ensembles des points de ce semis respectivement associés à une disparition pure et simple et à une division. Considérons $[x, i] \in X \times I$ un couple quelconque associant une position et un identifiant. La condition pour qu'un événement « disparition d'un agent décrit par l'observation $[x, i]$ » survienne à l'instant τ est double :

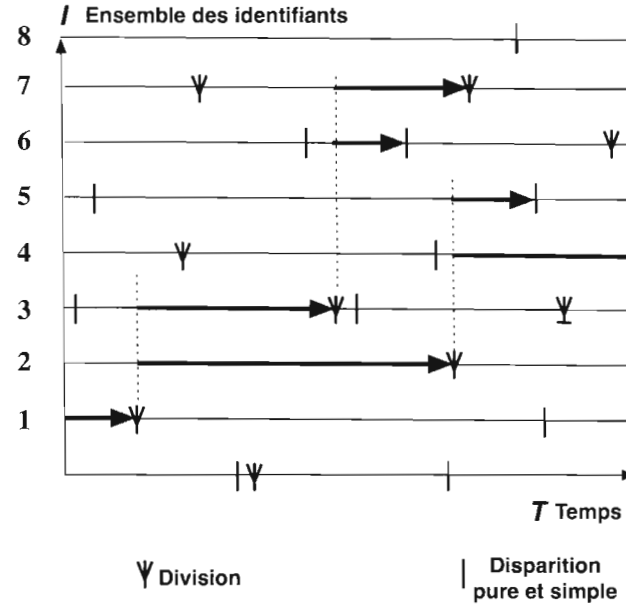


Figure 10.5 Exemple d'un semis Ψ d'événements potentiels sur $I \times T$.

- il existe à cet instant un tel agent, donc appartenance de $[x, i]$ à la configuration $\{x_l\}^{\tau-}$ en place à l'instant τ_- ;
- le point $[i, \tau]$ est l'un des points du semis, donc appartient à l'ensemble $\Psi = \Psi_- \cup \Psi_+$.

Cette double condition s'exprime par l'équation :

$$\{x_l\}^{\tau-}(\delta x \delta i)\,\Psi(i, \delta\tau) \neq 0 \tag{10.12}$$

23. Un semis de point de « Poisson » uniforme.

Dans cette écriture $\{x_l\}^{\tau-}(\delta x\,\delta i)$ est la valeur de la mesure $\{x_l\}^{\tau-}$ sur un voisinage infinitésimal $\delta x\,\delta i \in X \times I$ de $[x,i]$. La notation τ_- indique que l'état est pris juste avant l'événement éventuel. De même $\Psi(i,\delta\tau)$ est la valeur de la mesure de dénombrement induite pour l'identifiant i par le semis Ψ sur un voisinage infinitésimal $\delta\tau \in T$ de l'instant τ.

De cette condition, se déduit une équation exprimant la manière dont l'état $\{x_l\}^{\prime}$ du système varie à l'instant τ *du seul fait de la disparition des agents*. En notant $\delta_{[x,i]}$ la mesure de Dirac centrée sur $[x,i]$, cette équation, par sommation sur l'ensemble des identifiants observables et des positions observables est la suivante :

$$\{x_l\}^{\tau} = \{x_l\}^{\tau-} - \int_I \int_X \left(\{x_l\}^{\tau-}(\delta x\,\delta i)\,\Psi(i,\delta\tau)\,\delta_{[x,i]}\right) \tag{10.13}$$

Venons-en maintenant aux *entrées* dans le système. La condition pour qu'un événement « division d'un agent dans l'état $[x,i]$ » survienne à l'instant τ est :

$\{x_l\}^{\tau-}(\delta x\,\delta i)\,\Psi_+(i,\delta\tau) \neq 0$

Si un tel événement se produit, deux agents entrent dans le système, respectivement dans les états $[x,2i]$ et $[x,2i+1]$. De cette condition se déduit la variation de $\{x_l\}^{\prime}$ dans la transition en τ du fait des divisions, et au final pour l'ensemble du processus de branchement, nous avons :

$$\begin{aligned}\{x_l\}^{\tau} = \{x_l\}^{\tau-} &- \int_I \int_X \left(\{x_l\}^{\tau-}(\delta x\,\delta i)\,\Psi(i,\delta\tau)\,\delta_{[x,i]}\right) \\ &+ \int_I \int_X \left(\{x_l\}^{\tau-}(\delta x\,\delta i)\,\Psi_+(i,\delta\tau)\,\delta_{[x,2i]}\right) \\ &+ \int_I \int_X \left(\{x_l\}^{\tau-}(\delta x\,\delta i)\,\Psi_+(i,\delta\tau)\,\delta_{[x,2i+1]}\right)\end{aligned} \tag{10.14}$$

Une application de l'équation (10.14) : dynamique du nombre d'agents

La variation du nombre d'agents à l'instant τ est donnée par l'expression $\langle\{x_l\}^{\tau}, 1_{X\times I}\rangle - \langle\{x_l\}^{\tau-}, 1_{X\times I}\rangle$. Un calcul simple, faisant appel aux propriétés de la mesure de Dirac amène :

$$\langle\{x_l\}^{\tau}, 1_{X\times I}\rangle - \langle\{x_l\}^{\tau-}, 1_{X\times I}\rangle = \int_I \{x_l\}^{\tau-}(X\delta i)\left[\Psi_+(i,\delta\tau) - \Psi_-(i,\delta\tau)\right]$$

L'*espérance* de cette variation, conditionnée par la configuration $\{x_l\}^{\tau-}$, est :

$$E\left(\langle\{x_l\}^{\tau}, 1_{X\times I}\rangle \,|\, \{x_l\}^{\tau-}\right) - \langle\{x_l\}^{\tau-}, 1_{X\times I}\rangle = \int_I \{x_l\}^{\tau-}(X\delta i)\left[E\Psi_+(i,\delta\tau) - E\Psi_-(i,\delta\tau)\right]$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Les semis Ψ_+ et Ψ_- ont la même intensité : $E\Psi_+(i, \delta\tau) = E\Psi_-(i, \delta\tau)$.

Soit $$E\left(\langle\{x_l\}^{\tau}, 1_{X\times I}\rangle \,|\{x_l\}^{\tau-}\right) - \langle\{x_l\}^{\tau-}, 1_{X\times I}\rangle = 0$$

Le calcul formel confirme ce qu'on attendait intuitivement, savoir : à partir d'une situation atteinte donnée, et quelle que soit cette situation, *l'espérance de la variation immédiate du nombre d'agents est nulle.*

Un calcul du même type aboutit à l'expression de la *variance* de la variation.

10.3.3 Combinaison du branchement et de la diffusion

La donnée du semis de points Ψ détermine la séquence des temps $\tau_1, ..., \tau_k, ...$ pour lesquels la population, et donc le nombre des agents, varient. En chacun de ces instants, l'état du système subit une *discontinuité* $\{x_l\}^{\tau} - \{x_l\}^{\tau-}$, dont l'expression est donnée par l'équation (10.14). Entre deux temps successifs τ_k et τ_{k+1} l'état du système subit une *évolution continue* comportant une part aléatoire — donc non dérivable — contrôlée par les équations (10.11) du processus de diffusion.

La combinaison des deux processus s'effectue — comme dans le premier exemple — au sein d'équations stochastiques portant sur des résumés de type $\langle\{x_l\}^t, f\rangle$. La démarche est identique. Elle consiste :

- à rechercher les équations donnant la *dynamique de l'espérance mathématique* de ces résumés, espérance prise sur l'ensemble des trajectoires possibles ;
- à évaluer la dynamique du processus aléatoire résiduel $M^t(f)$.

Dans le cas du présent exemple, on est ainsi conduit[24] à étudier le comportement du processus :

$$M^t(f) = \langle\{x_l\}^t, f\rangle - \left\langle\{x_l\}^0, f\right\rangle - \int_0^t \left\langle\{x_l\}^s, -\alpha\frac{\partial}{\partial x}V\left(x, \{x_l\}^s\right)\frac{d}{dx}f(x) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{d^2}{dx^2}f(x)\right\rangle ds \quad (10.15)$$

La différence d'avec le premier exemple est que l'expression sous l'intégrale est ici sujette aux discontinuités dues au processus de branchement. On montre néanmoins que ce processus possède toujours les propriétés martingales. De plus, on connaît sa *variation quadratique*, c'est-à-dire la manière dont sa valeur, nulle au temps initial, varie aléatoirement sur $\mathbb{R}$, au fur et à mesure que le temps t avance. *Cela permet,* comme avec le terme stochastique de l'équation (10.4) dans le premier exemple, *de contrôler ce qui se passe, lorsque le nombre d'agents dans le système devient très grand et que l'on tend vers une dynamique de densités.*

24. Le principe des calculs est exposé dans l'Annexe (§ 10.6).

10.3.4 Réductions vers une dynamique de densités

L'hypothèse « d'un grand nombre d'agents » doit être précisée, puisque ce nombre est destiné à varier. Il faut se baser sur la situation à l'instant initial et préciser les normalisations mises en œuvre.

a) Normalisations

L'approche est similaire à celle utilisée dans le premier exemple. Elle considère une suite $\{1, ..., n, ...\}$ de systèmes comportant *à cet instant initial* un nombre croissant ${}_nN$. Au lieu de représenter l'état du système n à l'instant initial par la mesure ${}_n\{x_l\}^0$ donnant le *nombre* d'agents dans une partie quelconque de $B \subset X$, on considère plutôt la mesure ${}_n\{y_l\}^0$ donnant la *proportion — toujours à l'instant initial —* des agents présents dans B. L'état du système n à un instant quelconque est alors représenté par la mesure

$$ {}_n\{y_l\}^t = \frac{1}{{}_nN} {}_n\{x_l\}^t $$

où ${}_n\{y_l\}^t(B)$ décompte des agents présents dans B, chacun d'entre eux n'étant plus compté pour 1 mais pour $1/{}_nN$. Cette normalisation correspond à l'idée que la population des agents de chaque système, *lors de l'état initial*, représente *toujours une même masse* unité. La masse élémentaire de chaque agent est donc d'autant plus petite que le nombre d'agents est plus grand.

Une autre normalisation est basée sur le temps de vie moyen de la population. L'idée est encore que chaque système dispose *globalement* — en tant que système — *du même temps de vie moyen*, dans l'hypothèse où seule jouerait la mortalité. Le temps moyen de vie de chaque agent pris individuellement doit être alors d'autant plus court que le nombre initial d'agents du système est plus grand. Cela revient à prendre pour chaque système un paramètre de branchement ${}_n\mu = {}_nN\mu$ proportionnel à l'effectif initial.

Une dernière normalisation à considérer, dans de tels passages à la limite, *est la normalisation des interactions.* Plus les agents sont nombreux, plus ils sont près les uns des autres sur un même espace, et plus leurs interactions seront intenses si l'on ne modifie pas leurs paramètres. On trouve dans la littérature plusieurs types de normalisations[25], se différenciant selon la manière dont évolue, en fonction du nombre total ${}_nN$, le nombre d'agents avec lequel un agent donné est en interaction. Dans notre cas, une telle normalisation est déjà en place, puisque l'expression de ces interactions fait intervenir le facteur $1/{}_nN$.

25. *McKean-Vlasov limit, Moderate limit, Hydrodynamic limit.*

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

b) Convergences

La suite des mesures $\left\{ ....,_n \{y_l\}^0 , ... \right\}$, représentant les états initiaux de chaque système, est assumée converger vers une mesure $_\infty \{y_l\}^0$. À partir de leurs états initiaux, se développe pour chacun des systèmes un faisceau de trajectoires possibles, avec une probabilité de réalisation donnée pour chaque trajectoire particulière. La question posée est celle de la convergence de la suite de ces faisceaux, lorsque n et donc l'effectif initial devient de plus en plus grand, vers un faisceau limite dont on puisse déterminer les propriétés. Ici encore, la théorie des processus stochastiques et la théorie de la mesure précisent la notion de convergence applicable en pareil cas. Cette convergence a bien lieu. On montre que le processus stochastique engendrant ce faisceau limite est un processus « sans mémoire », un processus de Markov[26].

C'est sur ce point qu'apparaît une différence importante avec le premier exemple mettant en jeu le seul processus de diffusion. Dans cet exemple, le processus devenait de plus en plus déterministe au fur et à mesure que la taille du système augmentait. L'équation contrôlant l'évolution de $\left\langle _\infty \{y_l\}^t , f \right\rangle$ générait de façon déterministe une trajectoire unique à laquelle se réduisait donc le faisceau limite. L'intervention du processus de branchement fait qu'il n'en est plus de même ici. Les trajectoires suivies par la mesure $\left\langle _\infty \{y_l\}^t , f \right\rangle$ forment un faisceau dont la largeur n'est plus nulle et dépend de μ. La figure 10.6 illustre schématiquement cette situation.

c) Équations aux dérivées partielles de la dynamique des densités

La démarche est dans son principe similaire à celle exposée dans le premier exemple et suit les mêmes étapes ; elle commence par écrire sous sa forme intégrale l'équation, analogue à l'équation (10.4), contrôlant la dynamique du résumé $\left\langle _\infty \{y_l\}^t , f \right\rangle$. Le second membre de cette équation comprend la valeur du résumé à l'instant initial, un terme d'interaction, un terme de diffusion, et le terme stochastique résiduel qui loin de « s'évanouir », subsiste et intègre l'effet du processus de branchement

La mesure $_\infty y_*^t$ est assimilée à une densité. Des calculs du même type que ceux ayant permis de passer de (10.4) à (10.5) conduisent alors à une *équation aux dérivées partielles stochastique* contrôlant la dynamique de la densité. Avec les mêmes conventions de notations que dans le premier exemple, cette équation s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} u^t(\theta) = - \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \alpha u^t(\theta) \left[\int_{\theta'=\theta}^{\theta'=\theta+\pi} u^t(\theta')\, d\theta' - \int_{\theta'=\theta-\pi}^{\theta'=\theta} u^t(\theta')\, d\theta' \right] \right\} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ -\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} u^t(\theta) \right\} + \sqrt{\mu u^t(\theta)}\, dW^t(\theta) \quad (10.16)$$

26. Cf. Annexe (§ 10.2).

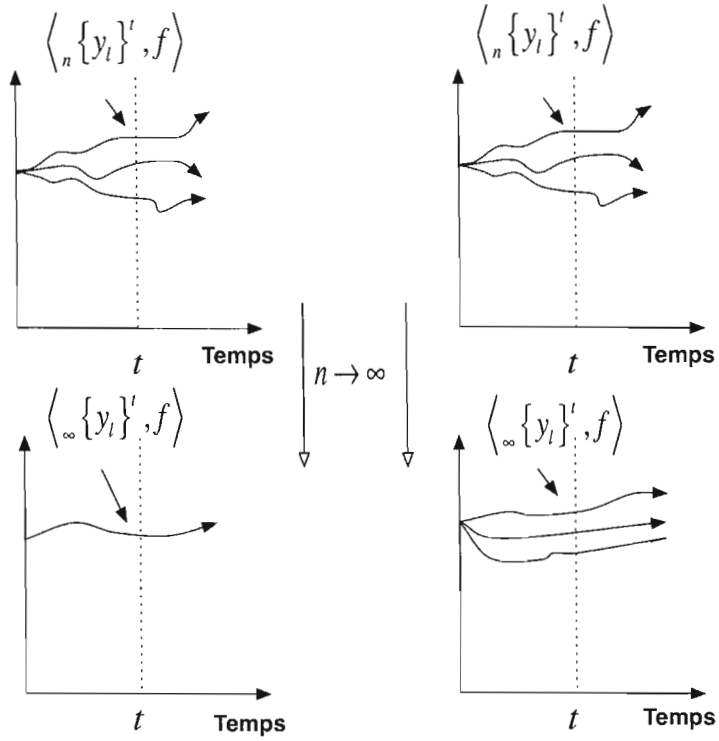


Figure 10.6 Processus limite lorsque la taille des systèmes devient infinie. À gauche, diffusion seule : le processus limite devient déterministe (faisceau réduit à une seule trajectoire). À droite diffusion plus branchement : le processus limite reste stochastique (faisceau de plusieurs trajectoires possibles).

Dynamique de reproduction avec déplacement : le modèle EDP

L'équation (10.16) mobilise, comme l'équation (10.5) du premier exemple, des bilans de courants d'agrégation et de diffusion, mais aussi *un terme supplémentaire stochastique*, traduisant le processus de branchement. On peut l'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t}u^t(\theta) = -\frac{\partial}{\partial \theta}J^t(\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta}K^t(\theta) + \sqrt{\mu u^t(\theta)}dW^t(\theta)$$

Il y a dans les mécanismes en œuvre deux sources d'aléas. Le premier, dû au bruit contrariant le mécanisme d'agrégation, s'évanouit en tant qu'aléa, lorsque le nombre d'agents devient grand, en s'intégrant dans le terme de diffusion. Le second, dû au processus de branchement, est paramétré par μ ; lorsque le nombre d'agents est grand, ce second aléa s'évanouit au niveau global : le nombre d'agents reste approximativement constant. Mais il subsiste au niveau local en tant que fluctuation aléatoire de la densité.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

10.4 RÉDUCTIONS : DIVERSITÉ ET DIFFICULTÉS RENCONTRÉES

Un modèle agrégé construit à partir d'un modèle à base d'agents est un ensemble de contraintes — se présentant sous la forme d'équations — contrôlant les trajectoires possibles d'un certain résumé $y^t = F\left(\{u_l\}^t\right)$ de l'état du système. Le modèle doit être « fermé », autrement dit exprimer le destin de ce résumé *à partir de ce résumé même* — et non à partir du détail des configurations $\{u_l\}^t$ — et de quelques paramètres constants ou évoluant de façon donnée. L'objectif de la présente section est de traiter deux points :

- la diversité des réductions possibles ; cette diversité possède au moins deux dimensions : celle de la nature des équations portant sur le résumé et celle de la nature de ce dernier.
- les difficultés rencontrées. Ici encore, plusieurs dimensions se croisent : difficulté de séparer les échelles, difficulté d'isoler la part aléatoire, difficulté de combiner dynamiques continues et processus discrets, cette dernière particulièrement liée au choix de représentation du temps.

10.4.1 Diversité des réductions : nature des équations

Les modèles agents comportant très généralement une part d'aléa, les dynamiques des résumés sont elles-mêmes stochastiques, même si une grande part de l'effort consiste à isoler la part stochastique et à en contrôler l'impact. On cherchera donc, à construire des équations stochastiques sur ces résumés, ou encore, comme dans le premier exemple, des modèles déterministes portant sur des évolutions de leurs probabilités.

a) Modèles stochastiques

L'idée est de rechercher une équation donnant l'espérance mathématique $E\left[dy\,|y^t\right]$ de la variation immédiate du résumé à partir de la valeur atteinte à l'instant t.

$$E\left[dy\,|y^t\right] = L^t y^t dt$$

dans laquelle l'opérateur L^t — afin que le modèle soit fermé — ne mobilise en dehors des paramètres pas d'autres données que celles contenues dans y^t. Cela suppose que l'on ait affaire à une dynamique markovienne, c'est-à-dire sans mémoire ou effet de retard.

On cherche ensuite à appréhender le caractère stochastique de la dynamique du résumé autour de sa moyenne — la manière dont se développe le faisceau des trajectoires possibles dans Y — en étudiant la dynamique des écarts

$$M^t = y^t - y^0 - \int_0^t L^s y^s ds$$

L'équation différentielle stochastique s'écrit alors :

$$dy = L^t y^t dt + dM^t$$

Lorsque M^t est considéré comme négligeable, le modèle agrégé se réduit à sa part déterministe et prend la forme différentielle :

$$dy = L^t y^t dt$$

b) Équation maîtresse

L'idée est de s'intéresser aux probabilités de trouver la valeur du résumé, à tel instant de sa trajectoire, au voisinage des différentes valeurs observables, et de construire la loi d'évolution de ces probabilités. *Lorsque la dynamique du résumé est markovienne,* cette loi est donnée par une équation dite *équation maîtresse*. Celle-ci prend différentes formes, selon que l'espace des valeurs du résumé est continu ou discret, que le temps est lui-même continu ou discret, et selon que l'on veuille ou non mettre en évidence le bilan qu'elle exprime (Lesne 2003), (Aslangul 2006).

Pour un temps de nature quelconque, l'équation maîtresse prend l'une des deux formes équivalentes[27] suivantes :

$$P^\tau(\delta y) - P^t(\delta y) = \int_{\delta y' \in Y} \left[W^{t,\tau}\left(\delta y \,|y'\right) P^t\left(\delta y'\right) - W^{t,\tau}\left(\delta y' \,|y\right) P^t(\delta y) \right] \tag{10.17}$$

$$P^\tau(\delta y) = \int_{\delta y' \in Y} W^{t,\tau}\left(\delta y \,|y'\right) P^t\left(\delta y'\right) \tag{10.18}$$

Dans ces équations $P^\tau(\delta y)$ et $P^\tau\left(\delta y'\right)$ sont des probabilités[28] : $P^\tau(\delta y)$ représente ainsi la probabilité de trouver à l'instant t le résumé du système dans un voisinage δy de la valeur y. De même $W^{t,\tau}\left(\delta y \,|y'\right)$ et $W^{t,\tau}\left(\delta y' \,|y\right)$ sont des probabilités de transitions. $W^{t,\tau}\left(\delta y' \,|y\right)$ représente la probabilité, dans l'intervalle de temps $]t, \tau]$ de voir le résumé passer d'une valeur y, ou proche de y, à un voisinage $\delta y'$ de y'.

27. Équivalentes car $\int_{\delta y' \in Y} W^{t,\tau}\left(\delta y' \,|y\right) = 1$.

28. Les notations $P\left(\delta y \,|y'\right)$, $W\left(\delta y \,|y'\right)$,... conformes aux probabilités conçues comme des mesures, sont préférées ici aux notations équivalentes $P(y)\,\delta y$, $W\left(y \,|y'\right)\delta y$, pour réunir en un seul formalisme le cas des valeurs y continues et discrètes.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

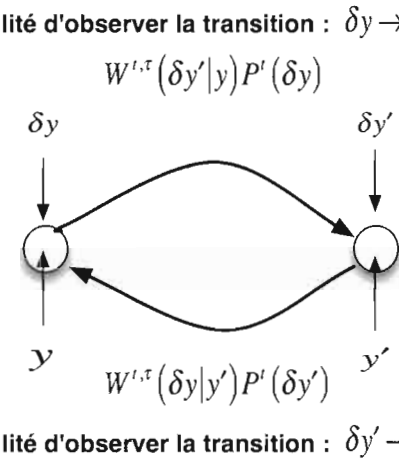


Figure 10.7 Schéma des transitions de l'équation maîtresse.

L'interprétation de la première forme est un bilan de *flux* : elle considère *individuellement* chaque réalisation possible de la vie du système, représenté par la valeur $y = F\left(\{u_l\}^t\right)$ de son résumé, comme un « macro-agent »[29] se déplaçant dans le co-domaine Y de la fonction F. Elle établit à chaque instant t le bilan des arrivées et des départs de cette « population » de macro-agents dans le voisinage de chaque valeur observable. Ce bilan indique donc comment évolue la proportion de macro-agents présents sur ou au voisinage de chaque valeur.

Considérons maintenant un temps continu. Sous certaines conditions, l'équation maîtresse prend les formes :

$$\frac{\partial}{\partial t} P^t(\delta y) = \int_{\delta y' \in Y} \left[W^t(\delta y \,|y')\, P^t(\delta y') - W^t(\delta y' \,|y)\, P^t(\delta y) \right] \qquad (10.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P^t(\delta y) = \int_{\delta y' \in Y} W^t(\delta y \,|y')\, P^t(\delta y') \qquad (10.20)$$

Dans ces formes, les quantités $W^t(\delta y \,|y')$ sont des probabilités de transitions *par unité de temps, ou taux de transitions*[30].

Pour que le modèle agrégé porté par de telles équations soit *fermé,* il faut que les grandeurs W gouvernant les transitions ne mobilisent pas, en dehors de paramètres, d'autres informations que celles résidant dans les valeurs y, y' et éventuellement dans t.

29. Notons bien qu'un tel macro-agent n'est pas un agent du système. C'est un agent qui représente le système entier dans une de ses « vies possibles ».

30. Cette définition de $W^t(\delta y \,|y')$ entraîne $\int_{\delta y \in Y} W^t(\delta y \,|y') = 0$.

c) Équation de Fokker Planck

L'équation de Fokker Planck est une approximation de l'équation maîtresse, en temps continu, utilisable sous plusieurs hypothèses relatives aux transitions (Aslangul 2006) :

- L'ensemble Y des valeurs du résumé est un espace métrique : on peut calculer une distance $|y' - y|$ entre deux résumés quelconques.
- *Hypothèse d'invariance temporelle* : les taux de transitions $W^t\left(\delta y' \,|\, y\right)$, pour y', y fixés, sont indépendantes de l'instant t, si bien que l'on peut les noter plus simplement $W\left(\delta y' \,|\, y\right)$
- *Hypothèse de dynamique lente* : les taux de transitions $W\left(\delta y' \,|\, y\right)$ ne prennent des valeurs notables que si la distance $|y' - y|$ reste petite.
- *Hypothèse de variation douce des taux de transitions sur Y*. Les taux de transitions $W\left(\delta y' \,|\, y\right)$ ne varient que lentement en fonction de la valeur y du résumé de départ, l'écart $|y' - y|$étant fixé.

d) Retour sur l'hypothèse markovienne

Les équations présentées ci-avant assument le caractère markovien de la dynamique du résumé : la loi de probabilité donnant la distribution des valeurs possibles du résumé à tout instant $\tau \geqslant t$ est censée être entièrement exprimable à partir de la valeur y^t du résumé à l'instant t. Les situations dans lesquelles cette hypothèse n'est pas vérifiée conduisent la prise en compte de délais et des modèles agrégés basés des équations à retard[31]. Un exemple d'un modèle agrégé avec de telles équations est donné dans (Lerman, Galstyan et al. 2001).

10.4.2 Diversité des réductions : nature des résumés

Les modèles agrégés se différencient — au-delà de la forme des équations recherchées — selon la manière dont est défini le résumé $y^t = F\left(\{u_l\}^t\right)$ de l'état du système. Les considérations développées au chapitre précédent ont établi quatre composantes différentes dans la construction des résumés. Celle de la dimension du codomaine Y de la fonction F, celle de l'ordre des résumés, celle de leur granularité, et enfin celle de la nature des fonctions élémentaires mises en œuvre dans ces constructions. Donnons quelques exemples de cette diversité.

a) Modèles globaux

Le terme de « global », très couramment utilisé pour qualifier les modèles, est vague. Il renvoie principalement à la granularité — taille des groupes d'agents considérés — mais aussi à l'ordre des résumés. Nous le réservons ici pour désigner des modèles dont la granularité est grossière, à savoir des modèles mobilisant des variables

31. Pour une introduction élémentaire aux différents types d'équations différentielles à retard, on peut consulter (el Abdllaoui 2004).

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

scalaires relatives à l'ensemble de la population ou à un petit nombre de groupes d'agents.

Exemples

L'archétype du modèle global d'un écosystème est le modèle de Lotka Volterra dans lequel les deux composantes y_P et y_N du résumé y désignent respectivement la biomasse totale des proies et celle des prédateurs. C'est un modèle du premier ordre : les composantes du résumé ne mobilisent que des cumuls sur des attributs individuels.

Dans l'exemple « reproduction » le modèle agrégé donnant l'évolution de l'effectif — constant en moyenne au cours du temps — est un également modèle global du premier ordre.

Dans l'exemple « polarisation », le modèle agrégé donnant l'évolution de la fonction d'énergie, qui décroît en moyenne linéairement en fonction du temps, est un modèle global : la valeur de l'énergie caractérise la population des agents prise comme un tout. C'est un modèle de second ordre : l'énergie est une somme de termes d'interactions binaires.

b) Modèles eulériens

Les modèles eulériens contrôlant la dynamique des densités de présence des agents dans l'espace des états individuels — lorsque le nombre de ces agents est suffisamment grand — ont été dans chacun des deux exemples les cibles principales des techniques présentées.

Un modèle *local* de dynamique de densité est un modèle dans lequel l'information rassemblée en chaque position suffit pour écrire les équations de la dynamique sur cette position. Par information rassemblée en une position, il faut entendre ici l'ensemble des valeurs prises sur cette position par différentes fonctions et leurs dérivées jusqu'à un certain ordre. Les modèles de dynamiques de densité considérés dans les deux exemples sont à ce titre *non locaux*[32]. Le calcul de l'évolution de la densité en une position exige en effet des intégrations de valeurs de densité sur tous les points de l'espace. Les équations de la dynamique de densité agrégées du modèle agent RIVAGE — équations de Saint Venant — sont au contraire locales : la hauteur d'eau en un point et son gradient sont les seules grandeurs hors paramètres qui interviennent dans les équations.

En se restreignant pour simplifier à un système comportant une seule catégorie d'agents, un modèle agrégé « eulérien », qu'il soit local ou non local, mobilise des résumés du premier ordre de type

$$\left\{\ldots, \left\langle \{u_l\}^t_{g(l)}, f \right\rangle, \ldots, \right\} \tag{10.21}$$

32. Pour une introduction à ces notions de modèles locaux et non locaux voir (Lee, Hoopes et al. 2001).

où les différents groupes d'agents g sont définis sur la base d'une partition d'un ensemble X de positions. Lorsque le nombre d'agents devient grand et la partition — la granularité du modèle agrégé — devient de plus en plus fine, le résumé (10.21), moyennant les normalisations adéquates, se rapproche d'un champ $\widetilde{f^t}(x)$ continu défini sur l'espace X. Le modèle agrégé cherché est alors un système d'équations aux dérivées partielles modélisant l'évolution de ce champ.

Il existe une autre manière de définir, à partir d'une configuration d'agents, un champ continu, donc susceptible d'être représenté dans sa dynamique par un système d'équations aux dérivées partielles. Cette manière ne passe pas par une partition et un passage à la limite, s'applique quel que soit le nombre d'agents et est donc plus « opératoire » que la précédente. Elle consiste à choisir un résumé paramétré[33] par une valeur de position x :

$$\widetilde{f^t}(x) = \left\langle \{u_l\}^t, (u)\, k(u,x) \right\rangle \tag{10.22}$$

Le passage d'un résumé décrit par (10.21) à un résumé décrit par (10.22) est celui mis en œuvre dans le passage des approches de type grille à des approches sans grille[34]. Pour assurer l'équivalence à la limite des champs obtenus par les deux méthodes à chaque instant — et donc l'équivalence des modèles censés représenter ces dynamiques — la fonction k doit satisfaire certaines propriétés. RIVAGE, de même que les méthodes SPH en hydrodynamique (Liu and Liu 2003), sont des exemples d'approches utilisant de tels types de résumés.

c) Modèles d'ordre supérieur.

Les modèles globaux du premier ordre visent à contrôler l'évolution de cumuls, sur la population des agents prise à un instant donné, d'une grandeur $f\left(u_i^t\right)$. Ils ignorent donc par construction une grande part de l'information disponible, et en particulier toute caractéristique de la distribution — observée à l'instant t — des valeurs u_i^t.

C'est le propos des modèles d'ordre supérieur — tels que ceux référencés dans la littérature par l'expression de *modèles de moments*[35] — que d'aller plus loin dans la prise en compte de la complexité des états du système. Revenons pour illustrer ce point au contexte du second exemple de ce chapitre. L'effectif total N^t des agents est un résumé d'ordre 1. La fonction de corrélation par paire $c^t(r)$ est un résumé d'ordre 2, caractérisant l'hétérogénéité de la distribution spatiale des agents. Réduire le modèle agents à *un modèle de moments d'ordre* 2 consiste à trouver des équations fermées sur les variables N^t et $c^t(r)$, *donc sans référence aux positions exactes des*

33. Tel qu'introduits au chapitre 9.

34. Classe des méthodes de simulations numériques référencées dans la littérature par l'expression de « *meshless methods* ».

35. *Moments methods*, ou encore, dans le cas d'un espace discret ou d'un réseau, *Pair Approximations methods*. Ces méthodes mettent de fait en équations des résumés construits sur des moments d'ordre supérieur à 1, tels la fonction de corrélation.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

agents, et rendant compte correctement de la dynamique de ces variables, *c'est-à-dire simultanément de l'évolution de l'effectif et du degré d'hétérogénéité spatiale*. Si un tel modèle satisfait son objectif, c'est qu'il a capturé une part « essentielle » de la dynamique du système, et notamment la manière dont l'espace intervient[36] ; il montre que l'on peut ignorer ce qui se passe à des niveaux de description plus fins. Plusieurs exemples de tels modèles sont donnés dans l'ouvrage de U. Dieckmann déjà cité.

10.4.3 Réductions : nature des difficultés

La réduction des modèles agents se heurte à tout un ensemble de difficultés. Dans la pratique, ces difficultés se combinent les unes aux autres, et font de la réduction des modèles agents une question ardue et très souvent sans solution. Il est d'autant plus utile de les identifier.

Les deux premières difficultés sont celles liées à la formalisation mathématique des *états du système* des agents, et à celle des processus à l'œuvre. Dire que l'état du système est un vecteur de mesures ne suffit pas. Il faut pouvoir rattacher les ensembles d'observables et leur σ-algèbres à des structures mathématiques connues. Les exemples présentés dans cette partie sont à cet égard particulièrement simples. Ont été considérés uniquement en effet des systèmes qui, hors environnement, ne comprenaient qu'une seule catégorie d'agents. De plus, les attributs concernés ont toujours été en nombre réduit et leurs ensembles d'observables bien définis. Énoncer la liste des mécanismes et en donner séparément les équations ne suffit pas non plus. Dès lors notamment qu'interviennent des événements discrets, il faut exprimer précisément comment ces mécanismes se combinent, expliciter sous une forme mathématiquement exploitable[37] la construction du processus empirique, comme dans (Champagnat, Ferrière et al. 2006), c'est-à-dire décrire mathématiquement l'algorithme de génération d'une trajectoire du système.

Une fois le modèle reformulé avec une caractérisation claire de l'espace d'états et du processus en œuvre, reste à choisir les résumés d'intérêt et à construire un modèle fermé de la dynamique de ces résumés. Les difficultés de l'entreprise sont notamment liées à la séparation des échelles, à la séparation de la part stochastique, à la nécessité de combiner processus continus et processus discrets.

a) La difficulté de séparer les échelles

Séparer les échelles signifie isoler et apprécier quantitativement l'impact du détail « microscopique » de l'état du système sur la dynamique du résumé considéré.

---

36. De tels modèles sont pertinents — et peuvent se substituer aux modèles de densités pour la prise en compte de l'influence de l'espace — lorsque la dynamique du système crée et fait évoluer des *hétérogénéités spatiales locales*, tout en maintenant une *homogénéité spatiale globale*, aucune région de l'espace n'étant à aucun moment privilégiée.

37. En permettant par exemple de montrer que le processus est bien de Markov, et de donner l'expression de son générateur infinitésimal.

Exemple

Dans l'exemple « polarisation », la formule tirée de (10.6), débarrassée de son terme stochastique résiduel, donne pour l'évolution de l'énergie :

$$dH\left(\{x_l\}^t\right) = -\alpha \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} H\left(\{x_l\}^t\right)\right)^2 dt + \frac{\sigma^2}{2} \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} H\left(\{x_l\}^t\right) dt$$

Cette équation permet de calculer pour tout état $\{x_l\}^t$ observable à l'instant t, quelle sera l'évolution immédiate de l'énergie. Mais il existe une infinité d'états ayant autour de $\{x_l\}^t$ l'énergie $H\left(\{x_l\}^t\right) + dH\left(\{x_l\}^t\right)$. L'équation délimite dans l'espace d'états du système, à partir de $\{x_l\}^t$, un faisceau de départs de trajectoires compatibles avec la variation de l'énergie ainsi calculée. Elle ne suffit pas à déterminer la trajectoire *effective* suivie par le système. Elle ne suffit pas non plus à déterminer l'évolution à long terme de H. Ce n'est pas un modèle « fermé » de la dynamique de l'énergie.

Pour que l'équation constitue un modèle fermé, il faudrait que les termes d'interactions et de diffusion soient constants ou ne dépendent de la trajectoire effective du système *que par l'intermédiaire de la valeur de H* elle-même. On a vu dans la présentation de l'exemple que tel était le cas — en fait, constance des termes — pendant une certaine période de la dynamique du système, lorsque les agents ne sont pas trop dispersés ni trop rapprochés. Dans les autres cas, séparer chacun des deux termes en expressions principales, fonctions de H, et expressions secondaires, fonctions de l'état du système, est problématique.

Illustrons cette difficulté, en considérant un modèle agent ne comportant pour simplifier aucune part de hasard, pouvant être « fermé » au niveau d'un certain point de vue u lié à un espace continu d'observables U : soit dans ces conditions T^t l'opérateur déterministe agissant sur l'état du système et permettant d'exprimer son évolution par l'équation différentielle :

$$d\{u_l\}^t = T^t\{u_l\}^t dt$$

Ceci entraîne, pour un résumé $\left\langle \{u_l\}^t, f \right\rangle$:

$$d\left\langle \{u_l\}^t, f \right\rangle = \left\langle T^t\{u_l\}^t, f \right\rangle dt$$

L'existence d'un modèle agrégé *exact :*

$$d\left\langle \{u_l\}^t, f \right\rangle = L^t\left\langle \{u_l\}^t, f \right\rangle dt$$

implique qu'à tout instant l'opérateur T^t vérifie $\left\langle T^t\{u_l\}^t, f \right\rangle = L^t\left\langle \{u_l\}^t, f \right\rangle$, donc que le détail « microscopique » de l'état $\{u_l\}^t$ du système n'ait aucune influence sur la dynamique son résumé. Il n'y a pas de répercussion du niveau « microscopique » sur la dynamique « macroscopique », analysée à travers la fonction f. Bien entendu, il n'en sera pas généralement ainsi. Ce qu'on peut éventuellement espérer, c'est établir une équation de la forme :

$$d\left\langle \{u_l\}^t, f \right\rangle = \left[L^t\left\langle \{u_l\}^t, f \right\rangle + \left\langle R^t\{u_l\}^t, f \right\rangle\right] dt$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

dans laquelle $\langle R^t \{u_l\}^t, f \rangle$ représente une part résiduelle liée au détail de l'information portée par $\{u_l\}^t$, mais dont on est assuré que son intervention reste négligeable, au moins pendant une certaine période. Une première condition pour que cette part résiduelle soit négligeable est que sa norme — rappelons qu'il s'agit d'un vecteur dans un espace $\mathbb{R}^p$ — soit nettement inférieure à celle de la part principale. Mais cette condition quantitative ne suffit pas : le cumul *sur la durée* de son influence peut devenir important. Une seconde condition est donc *l'absence de corrélation* entre les valeurs de la part résiduelle, prises d'un instant à un autre, à l'échelle de la résolution temporelle considérée. Lorsque ces conditions sont réunies, $\langle R^t \{u_l\}^t, f \rangle$ intervient comme un « bruit », une perturbation aléatoire de la dynamique principale. Le modèle fourni par l'opérateur L^t est alors une approximation de la dynamique effective de la grandeur $\langle \{u_l\}^t, f \rangle$, générant une dynamique « tangente » à cette dynamique effective et se confondant avec elle sur un temps plus ou moins long.

Ces considérations illustrées à propos de modèles du premier ordre sont valables dans la recherche de modèles agrégés quelconques. Annick Lesne dans (Lesne 2003) traite ainsi de la problématique de la séparation des échelles en partant de l'équation maîtresse de la dynamique d'un système. Cette équation maîtresse est écrite sous la forme matricielle :

$$dp^t = Wp^t dt$$

Dans cette écriture, p^t est *l'état statistique* associé au point de vue u, c'est-à-dire la *fonction* donnant pour chaque état possible du système sa probabilité d'observation à l'instant t. W est la « matrice » des taux de transitions. L'analyse spectrale de la matrice W fonde une théorie de la séparation des échelles, à la fois temporelle et « spatiale ». Séparation d'une *dynamique rapide* se manifestant au niveau microscopique, mais laissant certaines caractérisations du système quasiment inchangées à court terme, et d'une *dynamique lente* affectant ces caractérisations quasi stables. Définition consécutive de « macro-états », base d'une modélisation agrégée de la dynamique du système.

b) La difficulté d'isoler la part aléatoire

Les deux exemples présentés ont mis en avant des équations stochastiques s'écrivant

$$y^t = y^0 + \int_0^t L^s y^s ds + M^t$$

dans leur forme intégrale et

$$dy^t = L^t y^t dt + dM^t$$

dans leur forme différentielle.

Pour que de telles équations puissent être celles d'un modèle agrégé de la dynamique de y^t, il faut que l'opérateur L^s ne mobilise aucune autre information que celle contenue dans la valeur actuelle y^s, éventuellement des valeurs passées du même résumé dans le cas non markovien. Il faut aussi que le processus stochastique M^t, dont les paramètres peuvent dépendre de l'ensemble de l'information contenue dans

l'état du système, possède certaines propriétés lui conférant un caractère résiduel, reconnues et quantifiées.

Une telle décomposition, séparant sous forme additive une part déterministe et une part aléatoire, est également difficile. Les modèles agents contiennent — on l'a déjà dit — une forte part d'aléatoire. On constate même dans la pratique une tendance à inclure une part d'aléa dans chaque mécanisme, provenant sans doute des incertitudes dans lesquelles se trouvent les modélisateurs quant aux fonctionnements réels desdits mécanismes. Il devient problématique, dans ces conditions, de contrôler les devenirs possibles du système.

Par ailleurs, on a vu qu'il existe plusieurs sortes d'aléas. En se limitant à un temps continu, nous avons ainsi rencontré des aléas de type mouvement brownien, affectant en permanence la trajectoire d'un agent dans son espace d'états individuels, en maintenant la continuité mais la rendant non dérivable. De tels aléas se transposent en conservant la même nature au niveau de la trajectoire du système entier. Nous avons rencontré des aléas « événementiels » — apparitions et disparitions d'agents — constatés au niveau du système et provoquant des « sauts » brusques dans son espace d'états. De tels événements surviennent à des instants aléatoires, en l'occurrence contrôlés dans l'exemple en jeu par un processus de Poisson. Il peut également exister des aléas événementiels provoquant des sauts dans la trajectoire d'un agent au cours de son existence, et des aléas liés à des incertitudes permanentes affectant dans certaines fourchettes les valeurs des points de vue, rendant caduque la notion de trajectoire comme « ligne » dans un ensemble spatio-temporel.

c) La difficulté de combiner processus continus et processus discrets

La mention de cette difficulté implique par définition la conception d'un temps continu. En effet, dans un tel temps, et comme évoqué plus haut, toute dynamique d'agents est en toute généralité la combinaison :

- De processus générant des événements discrets, marquant des changements d'états d'une partie du système sous forme de sauts intervenant à des instants séparés ; le choix de l'instant du saut et de son amplitude peut être déterminé strictement, ou comporter une part d'aléatoire sur l'une ou sur les deux composantes.
- De processus continus générant des trajectoires dérivables voire non dérivables dans des espaces d'états eux-mêmes continus. De tels processus peuvent être déterministes ou ayant une part stochastique.
- De processus discontinus, donnant simplement à chaque instant du temps continu la probabilité de trouver telle partie du système dans tel ou tel état.

En temps discret au contraire la dynamique est la combinaison de processus plus facilement unifiables sous une même catégorie : tous opèrent en effet par sauts se déclanchant de façon déterministe ou partiellement stochastique en fonction de conditions liées à l'état du système à cet instant et à son histoire antérieure. *Il n'y a plus à propre-*

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

ment parler de processus continus, mais seulement des processus qui se déclanchent conditionnellement à chaque pas de temps[38].

Dans les modèles agents, plusieurs raisons militent pour un temps discret. Essentiellement parce que l'expression des comportements — y compris dans la mise en œuvre d'aléas — s'en trouve facilitée, en ne faisant appel qu'à des notions mathématiques élémentaires. L'examen des formalismes en usage dans la théorie des processus stochastiques en temps continu en donne au contraire une image peu accessible. Par ailleurs l'expression des comportements en temps discret est en adéquation directe avec l'écriture des programmes informatiques. À l'inverse, toute conception des processus en temps continu exige presque toujours une retranscription en temps discret pour sa mise en œuvre opérationnelle.

D'autres raisons tendent au contraire à favoriser le temps continu lorsque l'on souhaite traiter ces modèles par les mathématiques. D'abord parce que c'est dans un temps continu que sont modélisés de nombreux phénomènes, et que tant ces modèles que l'expérience vécue nous ont habitués à une telle conception. En particulier les modèles agrégés s'expriment souvent dans ce cadre, pensons par exemple aux modèles de Lotka Volterra de dynamiques prédateurs proies. Ensuite parce que les mathématiques du continu fournissent des instruments d'analyse puissants, et que l'adoption d'un temps continu permet leur utilisation. L'homogénéité de nature du temps entre le modèle agent et le modèle agrégé facilite alors techniquement l'opération de réduction.

Le second exemple a donné une idée des méthodes permettant, *au sein de l'analyse mathématique*, l'articulation d'un processus continu, le processus de diffusion, et d'un processus à événements discrets, le processus démographique de branchement. Mais à y regarder de plus prêt, il s'agit d'un cas très particulier : en effet, si la dynamique de diffusion est bien influencée par la dynamique démographique, l'inverse n'est pas vrai. Il n'y a aucune *densité dépendance* dans la démographie des agents. Cela explique que l'on ait pu utiliser, à travers les semis de points poissonien Ψ, *des plans préétablis des événements* qui affectent les agents, dès lors qu'ils ont commencé leurs existence. Ces plans sont indépendants de tous les autres aspects des trajectoires de vie des agents concernés, tels les déplacements et les interactions avec d'autres agents ou avec l'environnement.

Dans le cas général il n'en est pas ainsi, et aucun plan préétabli d'événements discrets ne peut être constitué. La démarche se généralise cependant. Elle consiste à générer, pour chaque processus et chaque identifiant d'agent, toujours par réalisation d'un semis poissonien, non plus un plan d'événements, mais un plan de ce que nous appelons ici *des potentialités de réalisations*. Ces potentialités se réalisent en événements effectifs en fonction de l'état du système.

38. Rappelons cependant que le choix de la nature du temps n'est cependant pas une simple affaire de méthode : les propriétés de la dynamique du système représenté peuvent s'en trouver qualitativement changées.

Reprenons pour illustrer le contexte du second exemple. Supposons par exemple que les taux d et b de survenance des disparitions pures et simples et des divisions à un instant s dépendent de la position de l'agent concerné relativement au reste de la configuration, respectivement par le biais de fonctions $d\left(x, \{x_l\}^{\tau-}\right)$ et $b\left(x, \{x_l\}^{\tau-}\right)$.

L'idée (Champagnat 2006) (Fournier and Méléard 2004) est cette fois de générer aléatoirement, cette fois ci non plus sur $I \times T$ mais sur $I \times T \times \mathbb{R}^+$ deux semis de points poissoniens : Ψ^- associé aux disparitions, Ψ^+ associé aux divisions. Le rôle de la valeur ϑ associée à la troisième dimension $\mathbb{R}^+$, est de conditionner la réalisation effective d'un événement. La loi de probabilité génératrice de chacun de ces deux semis est choisie de manière à ce que pour chaque identifiant i l'espérance du nombre de points sur un rectangle $[\delta\tau, \delta\vartheta]$ soit le volume $\delta\tau\delta\vartheta$[39].

Chaque point de ces semis est une potentialité de réalisation d'un événement associé. Un point (i, τ, ϑ) ne se réalisera en événement pour un agent i que *si à cet instant* τ : cet agent existe et une certaine grandeur le caractérisant est supérieure ou égale à la valeur ϑ.

Ici ces potentialités ne conduiront à la réalisation de l'événement concerné que sous la condition $\vartheta \leqslant d\left(x, \{x_l\}^{\tau-}\right)$ pour Ψ^-[40] et $\vartheta \leqslant b\left(x, \{x_l\}^{\tau-}\right)$ pour Ψ^+, x étant la position de l'agent. L'équation (10.14) devient alors (avec E fonction d'Heaviside) :

$$
\begin{aligned}
\{x_l\}^{\tau} &= \{x_l\}^{\tau-} \\
&- \int_I \int_X \int_{\mathbb{R}^+} \left(\{x_l\}^{\tau-}(\delta x \delta i)\, E\left(d\left(x, \{x_l\}^{\tau-}\right) - \vartheta\right) \Psi_-(i, \delta\tau\delta\vartheta)\, \delta_{[x,i]}\right) \\
&- \int_I \int_X \int_{\mathbb{R}^+} \left(\{x_l\}^{\tau-}(\delta x \delta i)\, E\left(b\left(x, \{x_l\}^{\tau-}\right) - \vartheta\right) \Psi_+(i, \delta\tau\delta\vartheta)\, \delta_{[x,i]}\right) \\
&+ \int_I \int_X \int_{\mathbb{R}^+} \left(\{x_l\}^{\tau-}(\delta x \delta i)\, E\left(b\left(x, \{x_l\}^{\tau-}\right) - \vartheta\right) \Psi_+(i, \delta\tau\delta\vartheta)\, \delta_{[x,2i]}\right) \\
&+ \int_I \int_X \int_{\mathbb{R}^+} \left(\{x_l\}^{\tau-}(\delta x \delta i)\, E\left(b\left(x, \{x_l\}^{\tau-}\right) - \vartheta\right) \Psi_+(i, \delta\tau\delta\vartheta)\, \delta_{[x,2i+1]}\right)
\end{aligned}
\tag{10.23}
$$

Cette équation, malgré sa complexité apparente, exprime bien l'effet sur l'état du système, codifié par la mesure de dénombrement $\{x_l\}^{\tau-}$, des différents événements densité dépendants ayant lieu une fois fixés les évaluations Ψ_- et Ψ_+ : disparitions pures et simples (premier terme), divisions (disparition de l'agent géniteur, deuxième terme, apparition de deux nouveaux agents, troisième et quatrième terme). On observera que l'on revient à l'équation (10.14) dès lors que $d\left(x, \{x_l\}\right) = b\left(x, \{x_l\}\right) = Cste = \mu/2$

De telles constructions formelles sont ensuite utilisées mathématiquement pour la détermination des générateurs infinitésimaux, par prise d'espérance sur les semis.

39. Donc intensité du processus poissonnien égale à 1 sur chaque plan i.

40. Ainsi, si le taux est constant dans le temps et uniforme dans l'espace — ayant par exemple la valeur $\overline{d}$, la probabilité pour qu'un agent disparaisse pendant un petit intervalle de temps Δt sera bien $\overline{d}\Delta t$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Mais elles peuvent également être utilisées directement dans l'implémentation informatique du modèle, sous forme de semis d'événements potentiels préétablis. Comme le montre la figure 10.8, pour un identifiant donné, la projection des semis de potentialités Ψ_- et Ψ_+ sur l'axe des temps forme deux semis *denses* de points *d'événements potentiels*, denses donc inutilisables dans le cadre d'une simulation. Si cependant les taux $d\left(x, \{x_l\}\right)$ et $b\left(x, \{x_l\}\right)$ sont bornés par d_m et b_m— il est naturel de supposer qu'ils ne peuvent devenir infinis — les semis de potentialités peuvent se limiter aux les domaines $I \times T \times [0, d_m]$ et $I \times T \times [0, b_m]$. Les deux semis d'événements potentiels sont alors discrets : ils peuvent être utilisés comme base de temps dans les simulations.

10.5 EN CONCLUSION : DE LA POSSIBILITÉ DES RÉDUCTIONS

Ce problème est au cœur des relations entre niveaux de description de la réalité. Plusieurs propriétés des dynamiques peuvent concourir à cet état de fait. Rappelons seulement ici deux situations couramment rencontrées.

a) Des mécanismes opérant à des rythmes différents

Nous avons déjà cité le cas de dynamiques mobilisant des processus opérant à des échelles de temps différentes, configuration exploitée notamment dans les méthodes *d'agrégation de variables*. C'est l'exemple de systèmes dans lesquels une migration rapide est combinée à une infection ou un processus de reproduction lent. La rapidité du processus de migration permet que s'établisse sur de courts intervalles de temps un état d'équilibre de la répartition spatiale, alors que le nombre d'individus infectés ou l'effectif total de la population n'ont significativement pas changé. L'évolution du système est considérée comme une succession d'états d'équilibre. C'est cette évolution, sous l'effet du processus lent, qui est décrite par le modèle agrégé.

b) Une homogénéité des environnements locaux

Citons également les dynamiques relevant de *l'approximation de champ moyen*. Soit, pour illustrer ce cas, un système d'agents de nature identique, dans lequel le comportement de chaque agent est déterminé par une certaine caractéristique de son environnement local. Les trajectoires des agents diffèrent les unes des autres en rapport avec leur propre état interne et celui de cet environnement. Mais il se peut que la dynamique du système amène, de par son propre mouvement, une certaine homogénéité des environnements locaux, la maintienne au cours du temps, et permette donc que l'on ait seulement à considérer un *environnement local moyen*. L'une des deux causes des différences de comportements entre agents s'en trouve éliminée. Si l'on dispose alors d'une formule permettant de calculer la caractéristique utile de cet environnement local moyen, à partir de statistiques simples sur le système, on conçoit que la

recherche d'un modèle plus simple, n'utilisant pas de référence explicite aux agents, puisse en être facilitée[41].

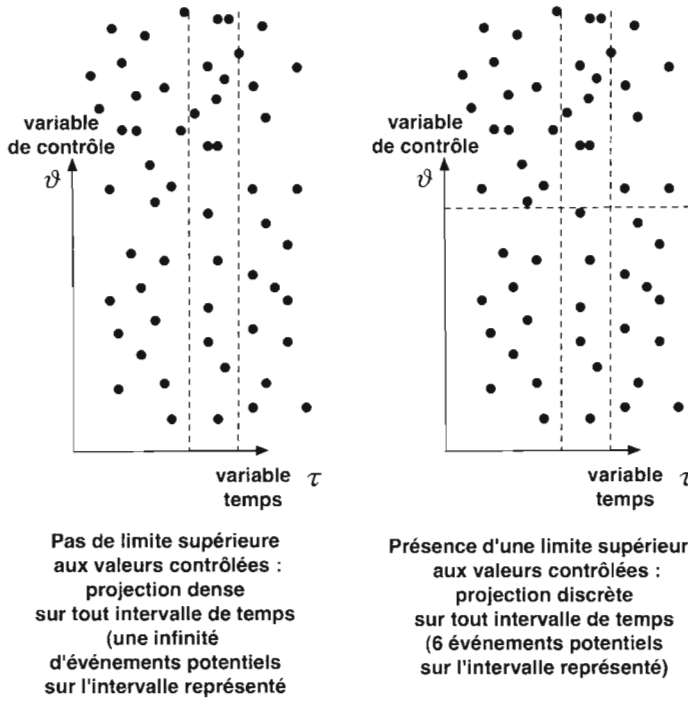


Figure 10.8 Exemple d'un semis de potentialités de réalisation pour un agent et un processus donnés.

Ces deux situations ressortent d'un phénomène général, qu'on peut appeler la perte des degrés de liberté. Considérons un modèle agrégé, que nous supposons pour simplifier déterministe. Ce modèle contrôle la dynamique d'une grandeur y appartenant à un ensemble d'observables Y. Soit ${}^{\omega}y$ la trajectoire de cette grandeur générée par le modèle agrégé, à partir d'une valeur initiale y^0. Considérons le système d'agents, sur lequel nous savons construire un résumé $\tilde{y}$ de type Y, supposé « préparé » dans son état initial de manière à ce que la valeur de son résumé $\tilde{y}^0$ soit égal à y^0. Une simulation du système va générer une trajectoire effective ${}^{\omega}\tilde{y}$ de son résumé. Il est clair que l'adéquation du modèle agrégé est mesurée par la comparaison de la trajectoire ${}^{\omega}y$ du modèle agrégé et *les* trajectoires ${}^{\omega}\tilde{y}$ engendrées à partir du même état initial par différentes simulations. Si le modèle agrégé est suffisamment représentatif de la dynamique, c'est qu'une certaine distance entre ${}^{\omega}y$ et les trajectoires simulées

41. De nombreux calculs appliquant ce principe sont effectués en physique statistique, sur les modèles d'Ising par exemple.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

$^{\omega}\widetilde{y}$, quelles qu'elles soient, reste inférieure à une certaine valeur sur une plage de temps significative. Si tel est le cas, cela signifie nécessairement que les trajectoires de l'état complet du système d'agents — son état « microscopique » — restent cantonnées dans un certain « tube » de l'espace des états théoriquement possibles.

C'est ce cantonnement, cette restriction des degrés de liberté du système qui est capturé par le modèle agrégé.

Conclusion

Des modèles individu-centrés aux simulations

Cet ouvrage est parti du constat qu'un nombre croissant de pratiques de *modélisation* où sont représentés de façon explicite les entités et leurs comportements, se sont développées depuis trente ans dans de nombreux domaines comme les sciences de la matière, du vivant, agronomiques, écologiques, humaines et sociales. La construction de ces modèles centrés sur les entités — que nous convenons d'appeler modèles à base d'agents — est le plus souvent guidée par une *question scientifique* dont la formulation est souvent naturelle à l'échelle des entités considérées. Grâce à des simulateurs, il est possible d'explorer l'espace des expérimentations *in silico* de ces modèles à base d'agents rendus opérationnels, c'est-à-dire transcrits sous forme de programmes informatiques. Les *simulations* permettent de revenir vers la question scientifique et d'affiner le modèle le cas échéant.

La première partie a permis d'illustrer cette activité de modélisation à partir des onze exemples choisis dans des domaines divers, mais où à chaque fois nous avons présenté le problème scientifique qui a été à la source de la modélisation, le ou les modèles à base d'agents conçus et les simulations qui ont contribué à une avancée dans la réponse à la question initiale.

La seconde partie a permis de proposer d'une part un langage (un méta-modèle) pour représenter la diversité des modèles à base d'agents dans le cadre d'un ensemble de concepts communs. Le méta-modèle proposé ne prétend pas avoir valeur universelle. Il vise plutôt à guider les modélisateurs dans leur démarche de conception. Du fait de leur formidable expressivité, ces modèles requièrent souvent des simulateurs *ad hoc* pour les rendre opérationnels. Nous avons passé en revue les différentes plates-formes visant à supporter cette opérationnalisation (Swarm, NetLogo...) qui montrent différents choix possibles pour l'implémentation informatique. Là encore, nous n'avons pas cherché à être exhaustif mais plutôt à guider les modélisateurs dans la compréhension des facteurs clefs qui différencient ces plates-formes.

Si nous nous sommes principalement intéressés aux modèles à base d'agents c'est qu'ils sont par essence destinés à modéliser des systèmes complexes d'entités en interaction où l'on cherche à conserver la représentation explicite de ces entités, des lois qui les régissent individuellement et des trajectoires individuelles au cours du temps. Mais historiquement les mathématiques ont été utilisées bien avant que l'on parle de modèles agents pour l'étude des systèmes d'entités en interaction. La troisième partie vise à montrer comment, dans un certain nombre de cas, on peut

effectivement écrire des représentations mathématiques de tels systèmes sous forme équationnelle ou probabiliste. Nous avons montré comment à partir de ces représentations mathématiques où les entités sont représentées individuellement, il existe des pistes pour passer à des modèles non-agent où les entités ne sont plus explicites (modèles en densité, modèles de moments, modèles populationnels globaux...). Ces formulations sont liées aux modèles classiques (à base d'équations aux dérivées partielles ou différentielles) qui ne modélisent pas les entités mais directement des grandeurs du système intégrant à un certain niveau les variations interindividuelles et sur lesquelles il est possible de faire des développements analytiques.

Mais si la modélisation mathématique d'entités et de leurs trajectoires individuelles se révèle faisable, il est indéniable que le fait de pouvoir démontrer des résultats se paye au prix d'une expressivité réduite. Il y a de fait un écart très important entre les propriétés et comportements des entités représentées dans les modèles mathématiques de la troisième partie et ceux des modèles agents présentés dans la première. L'expressivité des modélisations agent entraîne la plupart du temps la quasi-impossibilité de démontrer des résultats *a priori* sur les simulations comme on peut le faire par des analyses mathématiques des portraits de phase par exemple. Les modélisations agents ne peuvent se passer des expérimentations dont cependant le nombre toujours limité par la puissance des machines ne peut prétendre à l'exhaustivité. Il y a donc un compromis, à négocier dans chaque modèle, entre la recherche de l'expressivité et la recherche de possibilité de développements analytiques visant à certifier des propriétés et permettre des généralisations.

Les chantiers de la modélisation

Malgré l'immense succès rencontré par les approches agents, les sujets de recherches et les progrès technologiques restent nombreux dans ce domaine. Nous ne ferons qu'esquisser ici les principales questions qui nous semblent sur l'agenda des chercheurs et des praticiens de ce domaine de la modélisation. Du point de vue de la conception, il existe encore un long chemin pour pouvoir donner une spécification fonctionnelle précise aux modèles agents. Ce problème d'expression des contraintes sur le comportement et les propriétés des agents rappelle le problème des spécifications formelles dans des langages de programmation à objets. L'avantage d'une meilleure formalisation dans la représentation des agents est certainement une plus grande facilité pour générer du code et des procédures de tests.

À l'interface entre modélisation et simulation une question intéressant les thématiciens est également celle de la construction automatique d'agents au cours de la simulation du système. On touche ici toute la problématique de la notion d'échelles et de granularité dans les systèmes et de leur modélisation. Si un certain nombre de propriétés et de raisonnement se décrivent particulièrement bien à l'échelle des entités élémentaires (par exemple les agents paquets d'eau dans RIVAGE ou grain de sable dans GRANULAB) en revanche il existe toute une gradation d'entités composées qui peuvent s'avérer particulièrement puissantes pour modéliser des phénomènes à d'autres échelles (des mares dans RIVAGE, des lignes de forces dans GRANULAB).

Ces entités abstraites, agrégats d'entités élémentaires, possèdent des fonctions et une durée de vie qui leur est propre. Ce processus de construction est appelé la *réification* de structures émergentes. Il permet de représenter dans un même modèle plusieurs niveaux de description distincts et hiérarchisés en termes de résolution spatiale et temporelle, de granularité des objets, du nombre et de la nature de leurs attributs. Aujourd'hui il existe encore peu de formalisme permettant de telle construction.

Du point de vue de la simulation il y a naturellement tout un ensemble de problématiques liées à l'efficacité des algorithmes, de leur passage à l'échelle et de leur parallélisation sur des grilles de calcul. L'implémentation de modèles agents sur des machines parallèles ou des grilles de calcul un est des enjeux des appels à projet de l'Agence Nationale de la Recherche pour l'année 2007. Différents types de parallélisations sont possibles, selon que l'on parallélise chaque agent, ou chaque processus dans un agent, etc.

Un enjeu plus fondamental est celui des représentations originales simplifiées qui sont des abstractions de la représentation initiale mais qui permettent de capturer néanmoins la dynamique des systèmes modélisés. L'utilisation à cette fin de méthodes issues des mathématiques appliquées, de la physique statistique, de l'apprentissage statistique et de l'informatique fondamentale est en plein essor. Au risque de se répéter, il n'y a pas d'opposition entre modélisation mathématique et individu-centré. La troisième partie de cet ouvrage est ici pour l'attester, une modélisation mathématique au niveau des individus est envisageable dans certains cas. Il n'en reste pas moins que la définition d'approches mathématiques adaptées à ces modélisations est un domaine de recherche où beaucoup reste à faire. La représentation de l'état et de la dynamique microscopique des systèmes d'agents hétérogènes, combinant de multiples et variés processus individuels, avec des aspects déterministes ou stochastiques, temporellement continus ou opérant par sauts, est une des difficultés rencontrées. À ce propos, des techniques permettant d'exploiter la différenciation des échelles temporelles en œuvre (processus lents/processus rapides) offrent des perspectives intéressantes, et d'ailleurs déjà utilisées. De fait le récent appel à programme de l'ANR baptisé SYSCOMM[42], vise à « *exporter dans des domaines variés d'application les avancées fondamentales réalisées en mathématiques appliquées, physique statistique et informatique* » et devront « *justifier d'un couplage fort de la modélisation mathématique avec l'expérimentation ou avec des données empiriques fournies par les utilisateurs* ». Dans ce cadre les méthodes avancées développées en mathématique en physique et en informatique sont précieuses : théorie des systèmes dynamiques, équations aux dérivées partielles (possiblement stochastiques ou à retard), modèles probabilistes, modèles graphiques, théorie des graphes, méthodes inverses, assimilation de données, automates cellulaires formels, etc. Les concepts associés à ces méthodes sont aussi autant de notions clefs : transition de phase, percolation, invariants d'échelle, centralité et connectivités dans les réseaux, résilience, robustesse, etc.

42. http ://www.agence-nationale-recherche.fr/documents/aap/2008/aap-syscomm-2008.pdf

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

De la modélisation de systèmes complexes

Les approches macroscopiques ou mésoscopiques, essentiellement d'esprit mathématique, sont complémentaires des approches agents, davantage informatiques et simulatoires. Aujourd'hui un certain nombre de chercheurs explorent les possibilités de coupler différentes techniques de modélisations des systèmes complexes. Pour gérer par exemple des dynamiques à différents niveaux d'échelles spatiales, on peut envisager de combiner, dans une partie de l'espace, des modélisations agents et, dans une autre partie de l'espace, des modélisations basées sur des approches mathématiques globales. Le problème des conditions aux limites restant naturellement un point clef de la mise en œuvre de ces couplages.

On ne peut nier cependant que les communautés sont encore distinctes et les manières de modéliser, de penser les questions et de représenter les modèles sont clairement différents. Par exemple, si les tenants des approches agents pensent plus en termes d'entités, les tenants des approches macroscopiques raisonnent plus par des processus de sommation sur des mesures. Des réseaux tels que le réseau des systèmes complexes (RNSC) permettent cependant à des chercheurs de divers horizons de dialoguer, et il est clair pour les uns et les autres que l'un des enjeux est aujourd'hui de trouver les moyens de favoriser une fertilisation croisée des différentes approches.

Une autre dimension non abordée dans cet ouvrage mais qui prend une importance grandissante est celle de la *calibration* des modèles, c'est-à-dire la manière de tenir compte des données recueillies par les « utilisateurs » ou « thématiciens ». Or aujourd'hui, dans les approches agents, le modélisateur est largement démuni lorsqu'il lui faut faire assimiler ses données au modèle, c'est-à-dire faire en sorte que le modèle simulé corresponde qualitativement ou quantitativement aux données recueillies sur le terrain. Cette étape est importante pour permettre non seulement de rendre compte d'une dynamique émergente mais aussi d'utiliser de tels systèmes pour faire de la prédiction avec un certain degré de confiance. Si les modèles à base d'agents sont amenés à devenir de plus en plus incontournables dans la boîte à outils des modélisateurs, et ce en dépit de leurs lacunes actuelles, l'un des enjeux futurs majeurs sera celui de leur calibration et la possibilité d'une part d'analyser avec rigueur les résultats des simulations et d'autre part d'assimiler les données issues des systèmes complexes modélisés.

Annexe

A.1 COMPLÉMENTS DU CHAPITRE 8

A.1.1 Dynamiques d'agrégation-répulsion et fonction d'énergie (§ 8.4.3)

Dans quelles conditions une dynamique d'agrégation-répulsion induite par la réaction locale de chaque agent au gradient d'un potentiel est-elle équivalente à celle résultant de la minimisation d'une fonction de l'état du système ? Les développements suivants sont évidemment très classiques en mécanique. *Il nous est paru utile de les rappeler dans le contexte des modèles à base d'agents.*

Soit donc un système constitué de N agents $i \in (1, ...N)$ dont les positions x_i^t[43] sont contrôlées par le système d'équations

$$\frac{dx_i^t}{dt} = -\alpha_i \frac{\partial}{\partial x} U\left(x = x_i^t, \{s_l\}^t\right)$$

où $\{s_l\}^t$, avec $s_l = [x_l, \alpha_l, \beta_l, ...]$, désigne conformément à la convention adoptée, *l'état du système* à l'instant t, c'est-à-dire la configuration à cet instant des positions et des paramètres $\alpha_l, \beta_l, ...$ qualifiant chaque agent l[44]. **Dans quelles conditions existe-t-il une fonction** $H\left(\{s_l\}\right)$**, dite fonction d'énergie**, définie sur chaque état possible du système, telle que l'on puisse écrire

$$\frac{dx_i^t}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x_i} H\left(\{s_l\}^t\right) \tag{A.1}$$

où $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ désigne la dérivée partielle par rapport à la composante position de l'état $\{s_l\}^t$ relative à l'agent i ?

On ne peut répondre à cette question sans poser des hypothèses sur la structure du potentiel.

---

43. Nous considérons ici des positions sur $\mathbb{R}$.

44. Dans toutes ces annexes comme dans les chapitres qu'elles concernent, les symboles i, j, k, l désignent des identifiants d'agents.

a) Expressions du potentiel

Le potentiel sur une position x peut comporter une part indépendante de la présence des agents :

$$U\left(x, \{s_l\}\right) = u\left(x\right) + \cdots$$

Il peut ensuite — cas très fréquemment rencontré — comporter une part somme d'influences exercées par les agents indépendamment les uns des autres :

$$U\left(x, \{s_l\}\right) = u\left(x\right) + \sum_i v\left(x, x_i, \beta_i\right) + \cdots$$

Dans cette expression, β_i est le paramètre quantifiant la contribution de l'agent i à la réalisation du potentiel, par l'intermédiaire d'une fonction v identique pour tous les agents. Nous pouvons sans perdre trop de généralité, supposer que la seule influence subie par un agent i isolé soit celle du champ $u\left(x\right)$, (pas de mouvement auto-généré) ce qui conduit à écrire :

$$\alpha_i \frac{\partial}{\partial x} U\left(x_i, \{s_l\}_{l=i}\right) = \alpha_i \frac{\partial}{\partial x} u\left(x_i\right)$$

et donc :

$$\alpha_i \frac{\partial}{\partial x} v\left(x_i, x_i, \beta_i\right) = 0$$

ce qui signifie d'une façon plus large qu'un agent n'aura pas d'influence sur sa propre position et que deux agents situés exactement sur une même position n'auront pas non plus d'influence l'un sur l'autre.

Le potentiel peut aussi comporter une part supplémentaire qui soit une somme d'influences exercées par des couples ordonnés d'agents :

$$U\left(x, \{s_l\}\right) = u\left(x\right) + \sum_i v\left(x, x_i, \beta_i\right) + \sum_i \sum_{j \neq i} w\left(x, x_i, x_j, \gamma_i, \delta_j\right) + \cdots$$

où cette fois-ci γ et δ sont les paramètres des contributions respectives de l'agent intervenant en première position — disons à titre principal — et en seconde position dans la fonction w.

Ici encore, on peut supposer que les influences mutuelles des deux agents d'un couple sont prises en charge par la seule fonction v, et donc que :

$$\alpha_i \frac{\partial}{\partial x} w\left(x_i, x_i, x_j, \gamma_i, \delta_j\right) = 0$$
$$\alpha_j \frac{\partial}{\partial x} w\left(x_j, x_i, x_j, \gamma_i, \delta_j\right) = 0$$

Et ainsi de suite, on peut imaginer des influences de triplets d'agents, etc.

Il convient alors de se poser la question de la construction d'une fonction d'énergie à partir de chacun des termes de la suite précédente, sachant que la fonction d'énergie d'ensemble sera :

$$H\left(\{s_l\}\right) = H_u\left(\{s_l\}\right) + H_v\left(\{s_l\}\right) + H_w\left(\{s_l\}\right) + \cdots$$

b) Cas d'un potentiel indépendant des agents

Il est clair que pour :

$$H\left(\{s_l\}\right) = \alpha_i \sum_i u\left(x_i\right)$$

nous avons bien :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} H\left(\{s_l\}\right) = \alpha_i \frac{\partial}{\partial x} u\left(x_i\right)$$

et donc, si le potentiel se résume à sa partie indépendante des agents :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} H\left(\{s_l\}\right) = \alpha_i \frac{\partial}{\partial x} U\left(x_i, \{x_l\}\right)$$

H est bien une fonction d'énergie.

c) Cas d'un potentiel somme d'influences individuelles

Proposition : Soit un potentiel de la forme :

$$U\left(x, \{s_l\}\right) = \sum_{j=1}^{N} v\left(x, x_j, \beta_j\right)$$

où $v\left(a, b, \beta\right)$ est une fonction dérivable sur a et b vérifiant :

$$\alpha_i \frac{\partial}{\partial a} v\left(x_i, x_i, \beta_i\right) = 0$$

avec donc absence d'influence d'un agent sur sa propre position et donc de mouvement auto-engendré de cet agent.

Considérons la fonction de l'état du système définie par :

$$H\left(\{s_l\}\right) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \alpha_i v\left(x_i, x_j, \beta_j\right)$$

Cette fonction est bien l'énergie du système, contrôlant son évolution à travers les équations (A.1) *dès lors que les conditions suivantes sont réunies :*

i) le paramètre de la contribution d'un agent au potentiel est égal à sa sensibilité :

$$\forall j, \beta_j = \alpha_j$$

ii) la contribution $v\left(x, x_j, \alpha_j\right)$ de l'agent j sur une position x est donnée par :

$$v\left(x, x_j, \alpha_j\right) = \alpha_j \overline{v}\left(x, x_j\right)$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

où la fonction $\overline{v}(a,b)$ définie sur tout couple de position satisfait :

$$\overline{v}(a,b) = \overline{v}(b,a) \qquad \frac{\partial}{\partial a}\overline{v}\left(x,x'\right) = 0$$

Ces conditions étant satisfaites, $H\left(\{s_l\}\right)$ prend la forme d'une somme de *termes d'interactions binaires* $\alpha_i \alpha_j \overline{v}\left(x_i, x_j\right)$:

$$H\left(\{s_l\}\right) = \frac{1}{2}\sum_i \sum_{j\neq i} \alpha_i \alpha_j \overline{v}\left(x_i, x_j\right)$$

Démonstration :

De la forme du potentiel et de l'expression candidate proposée pour la fonction H nous déduisons :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} H\left(\{s_l\}\right) = \frac{1}{2}\sum_{j\neq i} \alpha_i \frac{\partial}{\partial a} v\left(x_i, x_j, \beta_j\right) + \frac{1}{2}\sum_{j\neq i} \alpha_j \frac{\partial}{\partial b} v\left(x_j, x_i, \beta_i\right)$$

Nous avons par ailleurs :

$$\alpha_i \frac{\partial}{\partial x} U\left(x = x_i, \{s_l\}\right) = \alpha_i \sum_j \frac{\partial}{\partial a} v\left(x_i, x_j, \beta_j\right)$$

et donc :

$$\alpha_i \frac{\partial}{\partial x} U\left(x = x_i, \{s_l\}\right) = \alpha_i \sum_{j\neq i} \frac{\partial}{\partial a} v\left(x_i, x_j, \beta_j\right)$$

en raison de l'hypothèse d'absence de mouvements auto-générés.

L'égalité requise entre $\frac{\partial}{\partial x_i} H\left(\{s_l\}\right)$ et $\alpha_i \frac{\partial}{\partial x} U\left(x, \{s_l\}\right)$ implique donc :

$$\frac{1}{2}\sum_{j\neq i} \alpha_i \frac{\partial}{\partial a} v\left(x_i, x_j, \beta_j\right) = \frac{1}{2}\sum_{j\neq i} \alpha_j \frac{\partial}{\partial b} v\left(x_j, x_i, \beta_i\right)$$

système d'équations satisfait en appariant les termes des deux membres :

$$\alpha_i \frac{\partial}{\partial a} v\left(x_i, x_j, \beta_j\right) = \alpha_j \frac{\partial}{\partial b} v\left(x_j, x_i, \beta_i\right) \tag{A.2}$$

et donc satisfait si les conditions i et ii sont remplies.

La seconde condition ii traduit une *symétrie* : le rapport entre la contribution de l'agent j à la valeur du potentiel sur la position x_i et celle de la contribution de

l'agent i à la valeur du potentiel sur la position x_j est constant, indépendant des deux positions, et égal à $\frac{\alpha_j}{\alpha_i}$.

Complétons les contraintes imposées au potentiel *par une condition d'invariance par translation.* Cette dernière entraîne :

$$\forall i, j, x_i, x_j, \beta_i, \beta_j,$$
$$\frac{\partial}{\partial a} v\left(x_j, x_i, \beta_i\right) + \frac{\partial}{\partial b} v\left(x_j, x_i, \beta_i\right) = 0$$

et donc en combinant avec (A.2) :

$$\forall i, j, x_i, x_j, \alpha_i, \alpha_j, \beta_i, \beta_j$$
$$\alpha_i \frac{\partial}{\partial a} v\left(x_i, x_j, \beta_j\right) = -\alpha_j \frac{\partial}{\partial a} v\left(x_j, x_i, \beta_i\right)$$

qui traduit la symétrie des actions des agents les uns sur les autres : l'action de l'agent j sur l'agent i est l'opposée (même intensité, mais orientation inverse) de l'action de l'agent i sur l'agent j. En particulier, *l'action d'un agent sur lui-même est nécessairement nulle , condition à vrai dire déjà imposée.*

Avec l'invariance par translation, la fonction $\overline{v}$, de même que le potentiel et l'énergie, ne dépendent que des distances entre les agents. Une propriété également classique est l'invariance du centre de gravité des positions des agents : nous avons en effet :

$$\sum_i dx_i = -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} H\left(\{s_l\}\right) dt \qquad \text{(mouvements controlés par la fonction } H\text{)}$$
$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} H\left(\{s_l\}\right) = 0 \qquad \text{(invariance par translation)}$$

d) Cas d'un potentiel somme d'influences par paires

Proposition : Considérons des potentiels d'interactions de la forme

$$U\left(x, \{s_l\}\right) = \sum_j \sum_{k \neq j} w\left(x, x_j, x_k, \gamma_j, \delta_k\right)$$

où $w(a, b, c, \gamma, \delta)$ est une fonction dérivable sur les trois variables de positions a, b, c. La valeur du potentiel sur une position x est cette fois-çi la somme d'influences exercées par des *couples* ordonnés d'agents distincts. L'influence d'un couple d'agents j, k dépend à la fois des positions de ces agents et de leurs rôles respectifs dans le couple — principal, ici j, et secondaire, ici k. Nous supposons par ailleurs en conformité avec la première section que :

$$\alpha_i \frac{\partial}{\partial a} w\left(x_i, x_i, x_j, \gamma_i, \delta_j\right) = 0$$
$$\alpha_j \frac{\partial}{\partial a} w\left(x_j, x_i, x_j, \gamma_i, \delta_j\right) = 0$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

ce qui signifie qu'une paire isolée d'agents ne subira aucun déplacement (pour qu'il y ait modification de l'état du système il faut qu'il y ait au moins trois agents).

On considère une fonction de l'état du système donnée par :

$$H\left(\{s_l\}\right) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{N}\alpha_i \sum_{j\neq i}\sum_{\substack{k\neq i\\ k\neq j}} w\left(x_i, x_j, x_k, \gamma_j, \delta_k\right)$$

Une telle fonction sera la fonction d'énergie dès lors que les conditions suivantes seront satisfaites :

i) les paramètres de contributions d'un agent au potentiel, que cet agent intervienne en premier rang ou en second rang, sont les mêmes et sont égales à sa sensibilité : $\forall l, \gamma_l = \delta_l = \alpha_l$

ii) la contribution $w\left(x, x_j, x_k, \alpha_j, \alpha_k\right)$ du couple d'agent (j,k) sur une position x est donnée par :

$$w\left(x, x_j, x_k, \alpha_j, \alpha_k\right) = \alpha_j \alpha_k \overline{w}\left(x, x_j, x_k\right)$$

dans laquelle la fonction $\overline{w}(a,b,c)$ définie sur tout triplet de positions satisfait à :

$$\overline{w}\left(x, x', x''\right) = \overline{w}\left(x'', x, x'\right) = \overline{w}\left(x', x'', x\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial a}\overline{w}\left(x, x, x'\right) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial a}\overline{w}\left(x, x', x\right) = 0$$

Ces conditions étant satisfaites, la fonction d'énergie prend la forme d'une somme de *termes d'interactions ternaires* :

$$H\left(\{x_l\}\right) = \frac{1}{3}\sum_{i}\sum_{j\neq i}\sum_{\substack{k\neq j\\ k\neq i}} \alpha_i \alpha_j \alpha_k \overline{w}\left(x_i, x_j, x_k\right)$$

Démonstration :

De l'expression proposée pour la fonction H nous déduisons :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} H\left(\{s_l\}\right) = \frac{1}{3}\sum_{j\neq i}\sum_{\substack{k\neq j\\ k\neq i}} \alpha_i \frac{\partial}{\partial a} w\left(x_i, x_j, x_k, \gamma_j, \delta_k\right)$$
$$+ \frac{1}{3}\sum_{p\neq i}\sum_{\substack{q\neq i\\ q\neq p}} \alpha_p \frac{\partial}{\partial b} w\left(x_p, x_i, x_q, \gamma_i, \delta_q\right)$$
$$+ \frac{1}{3}\sum_{r\neq i}\sum_{\substack{s\neq i\\ s\neq r}} \alpha_r \frac{\partial}{\partial c} w\left(x_r, x_s, x_i, \gamma_s, \delta_i\right)$$

Nous avons par ailleurs :

$$\alpha_i \frac{\partial}{\partial x} U\left(x = x_i, \{s_l\}\right) = \sum_{j \neq i} \sum_{\substack{k \neq j \\ k \neq i}} \alpha_i \frac{\partial}{\partial a} w\left(x_i, x_j, x_k, \gamma_j, \delta_k\right)$$

L'égalité requise implique :

$$2 \sum_{j \neq i} \sum_{\substack{k \neq i \\ k \neq j}} \alpha_i \frac{\partial}{\partial a} w\left(x_i, x_j, x_k, \gamma_j, \delta_k\right) = \sum_{p \neq i} \sum_{\substack{q \neq i \\ q \neq p}} \alpha_p \frac{\partial}{\partial b} w\left(x_p, x_i, x_q, \gamma_i, \delta_q\right) + \sum_{r \neq i} \sum_{\substack{s \neq i \\ s \neq r}} \alpha_r \frac{\partial}{\partial c} w\left(x_r, x_s, x_i, \gamma_s, \delta_i\right)$$

Une manière de réaliser cette équation est d'apparier les termes présents et *a priori* non nuls dans les deux membres de l'équation en imposant :

$$\alpha_i \frac{\partial}{\partial a} w\left(x_i, x_j, x_k, \gamma_j, \delta_k\right) = \alpha_k \frac{\partial}{\partial b} w\left(x_k, x_i, x_j, \gamma_i, \gamma_j\right) = \alpha_j \frac{\partial}{\partial c} w\left(x_j, x_k, x_i, \gamma_k, \delta_i\right)$$

contraintes qui sont réalisées si les conditions i et ii sont réalisées.

En effet nous avons bien alors :

$$\alpha_i \frac{\partial}{\partial a} w\left(x_i, x_j, x_k, \gamma_j, \delta_k\right) = \alpha_i \alpha_j \alpha_k \frac{\partial}{\partial a} \overline{w}\left(x_i, x_j, x_k\right) =$$

$$\alpha_i \alpha_j \alpha_k \lim_{dx_i \to 0} \frac{\overline{w}\left(x_i + dx_i, x_j, x_k\right) - \overline{w}\left(x_i, x_j, x_k\right)}{dx_i} =$$

$$\alpha_k \alpha_i \alpha_j \lim_{dx_i \to 0} \frac{\overline{w}\left(x_k, x_i + dx_i, x_j\right) - \overline{w}\left(x_k, x_i, x_j\right)}{dx_i} =$$

$$\alpha_k \alpha_i \alpha_j \frac{\partial}{\partial b} \overline{w}\left(x_k, x_i, x_j\right) = \alpha_k \frac{\partial}{\partial b} w\left(x_k, x_i, x_j, \gamma_i, \delta_i\right)$$

et de même pour la seconde égalité exigée.

La condition est une invariance par permutation — circulaire — des positions d'un triplet d'agents sur leur contribution conjointe à la valeur de la fonction H. On peut ajouter à cette invariance, comme dans le cas d'interactions binaires, celle d'invariance par translation. $\overline{w}(a, b, c)$ est alors une fonction attachée à la forme du triangle associé au trois positions, aucune d'elles ne jouant un rôle particulier, par exemple une fonction de son périmètre, ou de sa surface.

En combinant les deux invariances, un calcul analogue au cas binaire montre que :

$$\alpha_i \frac{\partial}{\partial a} w\left(x_i, x_j, x_k, \gamma_j, \delta_k\right) + \alpha_j \frac{\partial}{\partial a} w\left(x_j, x_k, x_i, \gamma_k, \delta_i\right) + \alpha_k \frac{\partial}{\partial a} w\left(x_k, x_i, x_j, \gamma_i, \delta_j\right) = 0$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

On a évidemment de même :

$$\alpha_i \frac{\partial}{\partial a} w\left(x_i, x_k, x_j, \gamma_k, \delta_j\right) + \alpha_k \frac{\partial}{\partial a} w\left(x_k, x_j, x_i, \gamma_j, \delta_i\right) + \alpha_j \frac{\partial}{\partial a} w\left(x_j, x_i, x_k, \gamma_i, \delta_k\right) = 0$$

et donc en sommant :

$$\begin{aligned}
&\alpha_i \frac{\partial}{\partial a} w\left(x_i, x_j, x_k, \gamma_j, \delta_k\right) + \alpha_i \frac{\partial}{\partial a} w\left(x_i, x_k, x_j, \gamma_k, \delta_j\right) + \\
&\quad \alpha_j \frac{\partial}{\partial a} w\left(x_j, x_k, x_i, \gamma_k, \delta_i\right) + \alpha_j \frac{\partial}{\partial a} w\left(x_j, x_i, x_k, \gamma_i, \delta_k\right) + \\
&\quad\quad \alpha_k \frac{\partial}{\partial a} w\left(x_k, x_i, x_j, \gamma_i, \delta_j\right) + \alpha_k \frac{\partial}{\partial a} w\left(x_k, x_j, x_i, \gamma_j, \delta_i\right) = 0
\end{aligned}$$

La somme des influences subies par chaque agent d'un triplet, consécutives aux actions des agents de ce même triplet, est nulle. On retrouve dans le cas d'interactions ternaires l'équivalent de la symétrie évoquée dans le cas d'interactions binaires. L'influence principale exercée par un agent sur lui-même , soit $\alpha_i \frac{\partial}{\partial a} u\left(x_i, x_i, x_i, \beta_i, \gamma_i\right)$, est nulle.

Le contrôle des mouvements par la fonction d'énergie couplé avec l'invariance par translation assure toujours la fixité du centre de gravité des positions de tous les agents du système.

A.1.2 Dynamiques de polarisation et fonction d'énergie (§ 8.5.4)

Dans quelles conditions une dynamique de polarisation induite par la réaction locale de chaque agent au gradient d'un potentiel est-elle équivalente à celle résultant de la minimisation d'une fonction de l'état du système ?

Soit un système de N agents $i \in \{1, \ldots N\}$ nœuds d'un réseau dont les orientations θ_i — orientations binaires $\theta_i \in \{-1, +1\}$ — sont soumises à des transitions contrôlées par des lois exponentielles de paramètres

$$\lambda_i^t = a \frac{1}{1 + e^{\frac{2\theta_i^t U_i\left(\{\theta_l\}^t\right)}{bT}}}$$

Dans quelles conditions existe-t-il une fonction $H\left(\{\theta_l\}\right)$**,** dite fonction d'énergie, définie sur chaque état possible $\{\theta_l\}$ du système, telle que l'on puisse écrire :

$$\lambda_i^t = a \frac{1}{1 + e^{\frac{H\left(T_i\{\theta_l\}^t\right) - H\left(\{\theta_l\}^t\right)}{bT}}} \tag{A.3}$$

où $H\left(T_i\{\theta_l\}^t\right) - H\left(\{\theta_l\}^t\right)$ représente la variation de l'énergie entre l'état final et l'état initial du système, lors d'une transition T_i affectant l'orientation de l'agent i ?

a) Cas de potentiels somme d'influences individuelles

Proposition : intéressons-nous d'abord aux potentiels exprimés par une combinaison linéaire de la forme :

$$U_i\left(\{\theta_l\}\right) = \sum_{j \neq i} u_{ij}\theta_j$$

et considérons la fonction de l'état du système définie par :

$$H\left(\{\theta_l\}\right) = -\frac{1}{2}\sum_i \theta_i U_i\left(\{\theta_l\}\right)$$

Cette fonction est bien l'énergie du système, contrôlant la survenance des transitions à travers la détermination des paramètres des lois de probabilité par la formule (A.3), dès lors qu'il y a symétrie des actions entre agents :$\forall i, j \neq i u_{ji} = u_{ij}$

Démonstration :

De l'expression candidate proposée pour la fonction $H\left(\{\theta_l\}\right)$ nous déduisons, l'orientation de l'agent i changeant de signe dans la transition :

$$\begin{aligned} H\left(T_i\{\theta_l\}\right) - H\left(\{\theta_l\}\right) &= -\frac{1}{2}\left(\sum_{j\neq i}\left(\theta_j U_j\left(T_i\{\theta_l\}\right) - \theta_j U_j\left(\{\theta_l\}\right)\right)\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}\left((-\theta_i)U_i\left(T_i\{\theta_l\}\right) - \theta_i U_i\left(\{\theta_l\}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(\sum_{j\neq i}\theta_j\left(U_j\left(T_i\{\theta_l\}\right) - U_j\left(\{\theta_l\}\right)\right)\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\theta_i\left(U_i\left(T_i\{\theta_l\}\right) + U_i\left(\{\theta_l\}\right)\right) \end{aligned} \tag{A.4}$$

En remplaçant les potentiels par leurs expressions comme combinaisons linéaires, il vient :

$$H\left(T_i\{\theta_l\}\right) - H\left(\{\theta_l\}\right) = \sum_{j,j\neq i}\theta_j\theta_i u_{ji} + \sum_{j,j\neq i}\theta_i\theta_j u_{ij}$$

Par ailleurs en vertu d'un calcul similaire, nous avons :

$$2\theta_i U_i\left(\{\theta_l\}\right) = 2\sum_{j,j\neq i}\theta_i\theta_j u_{ij}$$

L'égalité requise entre $H\left(T_i\{\theta_l\}\right) - H\left(\{\theta_l\}\right)$ et $2\theta_i U_i\left(\{\theta_l\}\right)$ implique donc :

$$\sum_{j,j\neq i}\theta_j\theta_i u_{ji} = \sum_{j,j\neq i}\theta_i\theta_j u_{ij}$$

et elle est bien vérifiée avec $\forall i \forall j \neq i, u_{ji} = u_{ij}$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

b) Cas de potentiels somme d'influences par paires

Proposition : intéressons-nous aux potentiels exprimés par une forme quadratique :

$$U_i\left(\{\theta_l\}\right) = \sum_{j\neq i}\sum_{\substack{k\neq j\\ k\neq i}} u_{ijk}\theta_j\theta_k$$

et considérons la fonction de l'état du système définie par :

$$H\left(\{\theta_l\}\right) = -\frac{1}{3}\sum_i \theta_i U_i\left(\{\theta_l\}\right)$$

Cette fonction est bien l'énergie du système, contrôlant par l'équation (A.3) la dynamique des transitions, dès lors que les conditions suivantes sont réalisées :

$$u_{ijk} = u_{kij} = u_{jki}$$

Démonstration :

L'expression de $H\left(T_i\{\theta_l\}\right) - H\left(\{\theta_l\}\right)$ est maintenant :

$$\begin{aligned} H\left(T_i\{\theta_l\}\right) - H\left(\{\theta_l\}\right) &= -\frac{1}{3}\left(\sum_{j\neq i}\left(\theta_j U_j\left(T_i\{\theta_l\}\right) - \theta_j U_j\left(\{\theta_l\}\right)\right)\right) \\ &\quad -\frac{1}{3}\left((-\theta_i)U_i\left(T_i\{\theta_l\}\right) - \theta_i U_i\left(\{\theta_l\}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{3}\left(\sum_{j\neq i}\theta_j\left(U_j\left(T_i\{\theta_l\}\right) - U_j\left(\{\theta_l\}\right)\right)\right) \\ &\quad +\frac{1}{3}\theta_i\left(U_i\left(T_i\{\theta_l\}\right) + U_i\left(\{\theta_l\}\right)\right) \end{aligned}$$

En remplaçant les potentiels par leurs expressions détaillées, il vient :

$$\begin{aligned} &H\left(T_i\{\theta_l\}\right) - H\left(\{\theta_l\}\right) \\ &\quad = \frac{2}{3}\left(\sum_{j\neq i}\sum_{\substack{k\neq j\\ k\neq i}} u_{jik}\theta_j\theta_i\theta_k + \sum_{j\neq i}\sum_{\substack{k\neq j\\ k\neq i}} u_{jki}\theta_j\theta_k\theta_i + \sum_{j\neq i}\sum_{\substack{k\neq j\\ k\neq i}} u_{ijk}\theta_i\theta_j\theta_k\right) \end{aligned}$$

L'égalité requise avec $2\theta_i U_i\left(\{\theta_l\}\right) = 2\sum_{j\neq i}\sum_{\substack{k\neq j\\ k\neq i}} u_{ijk}\theta_i\theta_j\theta_k$ est satisfaite par les appariements :

$$u_{ijk} = u_{kij} = u_{jki}$$

A.1.3 Dynamiques de reproduction-dissémination et fonction d'énergie (§ 8.6.2)

La question de l'assimilation d'un comportement de réaction à un stress local à la minimisation d'une fonction de l'état du système, dite fonction d'énergie, peut-elle être invoquée à propos des systèmes de reproduction-dissémination ? Autrement dit, existe-t'il une fonction dont l'évolution — et la distribution des valeurs dans un éventuel équilibre stochastique — reflète la dynamique de ces systèmes ? La littérature sur cette question, dans le cadre de la théorie des processus de Gibbs (Stoyan, Kendall et al. 1995), montre que la réponse est positive sous certaines conditions.

Ces conditions sont la vérification d'une relation entre les taux de naissance et de mort $b\left(x,\{x_l\}\right)$ et $d\left(x,\{x_l\}\right)$. Cette relation met en jeu le rapport entre ces deux taux, soit la fonction des *taux nets* de naissance $\overline{b}\left(x,\{x_l\}\right) = \dfrac{b\left(x,\{x_l\}\right)}{d\left(x,\{x_l\}\right)}$. Elle implique pour cette dernière la vérification de la propriété suivante :

$$\begin{aligned} &\forall\,\{x_l\} \text{ et } \forall i,j, \text{ nouveaux agents} \\ &\overline{b}\left(x_i,\{x_l\}\right)\overline{b}\left(x_j,\{x_l\}+x_i\right) = \overline{b}\left(x_j,\{x_l\}\right)\overline{b}\left(x_i,\{x_l\}+x_j\right) \end{aligned} \tag{A.5}$$

La relation signifie que le produit des taux nets est insensible à l'ordre d'introduction des deux nouveaux agents i et j lorsqu'on passe d'un état quelconque $\{x_l\}$ à un état $\{x_l\}+x_i+x_j$.

Soit alors $\{x_l\}^0$ une configuration de départ donnée ; une fonction $E\left(\{x_l\}\cup\{x_l\}^0\right)$ est définie pour toute configuration *complémentaire* $\{x_l\}$ en choisissant un ordre arbitraire $i_1,\ldots,i_k,\ldots,i_n$ sur les agents de la configuration $\{x_l\}$, puis en posant :

$$E\left(\{x_l\}\cup\{x_l\}^0\right) = -\ln\prod_{k=0}^{k=n-1}\overline{b}\left(x^{k+1},\{x_l\}^0+x_{i_1}+,\ldots,+x_{i_k}\right)^{45}$$

La relation (A.5) garantit une valeur *indépendante de l'ordre choisi* pour toute configuration $\{x_l\}$ venant compléter la configuration initiale $\{x_l\}^0$. Cette relation assure donc l'existence de la fonction E, appelée fonction d'énergie *conditionnelle* car sa valeur pour $\{x_l\}$ est effectivement conditionnée par la configuration de départ $\{x_l\}^0$.

Pour interpréter E considérons qu'à une certaine échelle de temps, l'observation du système au voisinage d'une position x donnée s'intéresse au *résultat net* du mécanisme de naissances et de mortalité. Autrement dit, les statistiques tenues par l'observateur consistent à établir le rapport entre le nombre de fois où il constate la présence et le nombre de fois où il constate l'absence d'un agent au voisinage d'une position choisie. On montre que la probabilité d'observer — dans le sens qui vient d'être décrit

45. Le symbole + vaut ici pour l'adjonction d'un élément à un ensemble.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

— la configuration de positions $x + \{x_l\} \cup \{x_l\}^0$ conditionnellement au maintien de $\{x_l\} \cup \{x_l\}^0$ vaut :

$$\frac{1}{1 + e^{E(x+\{x_l\}\cup\{x_l\}^0) - E(\{x_l\}\cup\{x_l\}^0)}}$$

Cette probabilité est de 0,5 lorsque l'énergie conditionnelle ne change pas entre les configurations $\{x_l\}$ et $x + \{x_l\}$ ce qui correspond, on le vérifiera aisément, à l'égalité entre le taux de naissance et le taux de mortalité sur la position x.

Elle est supérieure à 0,5 si l'énergie conditionnelle de la configuration $x + \{x_l\}$ est plus faible que celle de la configuration $\{x_l\}$. Ici encore, la probabilité de l'observation d'un état du système s'exprime en termes de variation d'énergie.

A.2 COMPLÉMENTS DU CHAPITRE 9

A.2.1 Caractérisation empirique d'organisations spatiales : quelques indicateurs courants (§ 9.2.1)

Nous présentons ci-après, de manière plus complète que dans la section citée en référence, plusieurs descripteurs couramment utilisés dans la caractérisation d'une configuration de positions d'agents dans un espace métrique $\mathbb{R}^p$.

a) Rapport Variance/moyenne

Parmi toutes les statistiques que l'on peut définir sur la répartition des effectifs sur les m cellules d'une grille régulière, un indicateur possible est le rapport entre la variance V et la moyenne $\overline{N}$[46] :

$$\frac{V}{\overline{N}} = \frac{\sum_{k=1}^{m} (N_k - \overline{N})^2}{\sum_{k=1}^{m} N_k}$$

Une valeur très différente de 1 pour ce rapport[47] signifiera qu'on est loin, à la résolution de la grille, d'une répartition des effectifs au hasard. Nettement plus grande que 1, elle traduira une forte dissymétrie de la distribution, avec un petit nombre de cellules d'effectifs très élevés et donc une tendance à une forte agrégation. Proche de zéro, elle traduit une répartition uniforme.

46. La formule est donnée ici en supposant le caractère exhaustif de la statistique établie : il s'agit de la variance constatée empiriquement sur l'ensemble des cellules de l'espace ouvert aux agents, et non d'une estimation de la variance spatiale du processus à la résolution considérée. Il faudrait sinon corriger par le facteur $m/(m-1)$.

47. La valeur 1 du rapport est celle de la loi de probabilité discrète dite « loi de Poisson ». On sait que pour une telle loi, régissant par exemple le nombre d'événements aléatoires observés dans des intervalles de temps de longueur fixée, la moyenne est égale à la variance.

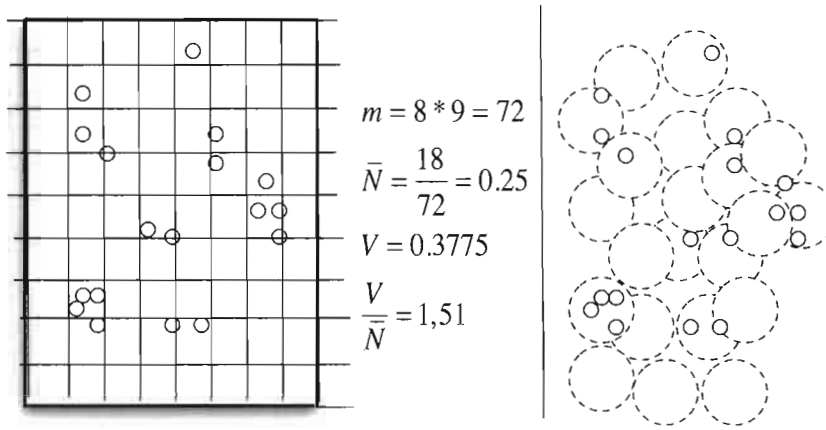


Figure A.1 Grille régulière et boules jetées au hasard dans l'analyse d'une configuration. La configuration est plus agrégée qu'une configuration aléatoire.

La courbe exprimant la variation du rapport V/N en fonction du nombre m de cellules ou de leur taille r peut être utilisée pour déterminer la résolution à laquelle une hétérogénéité spatiale apparaît. Par exemple, dans la figure A.1, le recouvrement par une grille de deux cellules nord et sud divise la configuration en deux groupes de neuf agents chacun, manifestant à cette résolution une répartition spatiale des agents uniforme. L'hétérogénéité spatiale n'apparaît qu'à des résolutions plus fines.

b) Densité globale

La **densité globale** de la configuration est calculée par le rapport entre le nombre d'agents et le volume de l'espace occupé dans $\mathbb{R}^p$. Cette définition exige de connaître ce volume occupé. Lorsque ce dernier n'est pas fixé a priori[48] lors de la conception du modèle et peut donc varier au cours du temps, il faut choisir une méthode pour en déterminer les limites à chaque instant.

Cette grandeur de densité du semis, notée λ dans la suite, est à mettre en relation avec la notion d'*intensité* du processus dans l'approche théorique.

c) Distance au plus proche voisin

La distribution des distances au plus proche voisin est un descripteur ayant un sens très concret, le plus proche voisin étant souvent l'agent avec lequel un agent donné interagira le plus fortement. On prend pour chaque agent i la distance à son plus proche voisin et on étudie ensuite la distribution obtenue : sa forme renseigne par exemple sur la fréquence d'agents isolés, déconnectés du reste de la population. On

48. Par exemple lorsque la région ouverte à l'évolution des agents est une donnée contraignante, et que cette région reste au cours du temps globalement occupée en totalité.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

représente cette distribution par la fonction notée $D(r)$ donnant la fréquence avec laquelle le plus proche voisin d'un agent choisi au hasard est à une distance de ce dernier inférieure à r.

d) Indice de Clark Evans

L'indice de Clark Evans a été proposé pour des semis dans des espaces à deux dimensions. Noté CE, il se définit par le rapport entre la distance moyenne au plus proche voisin — notons-la $\overline{r}$ — et la distance moyenne théorique — entendons la distance moyenne au plus proche voisin observable dans une répartition totalement aléatoire de même intensité. En dimension 2, cette dernière vaut deux fois la racine carrée de la densité, et l'indice de Clark Evans s'exprime donc par :

$$CE = \overline{r} 2\sqrt{\lambda}$$

Cet indice a un comportement qui rappelle celui du rapport entre moyenne et variance calculée sur une grille régulière. Mais c'est un nombre ne dépendant pas explicitement d'une résolution. Une valeur proche de 1 signifiera une configuration proche d'une configuration aléatoire. Partant d'une telle configuration aléatoire, un regroupement des agents par paquets diminue la distance au plus proche voisin et conduit donc à des valeurs de l'indice inférieures à 1. Une valeur supérieure à 1 au contraire signifie une configuration plus uniforme. Par exemple, une répartition régulière conduit à un indice de Clark Evans de valeur 2.

e) Distribution des distances

Il s'agit *de la distribution des distances calculée* sur l'ensemble des couples d'agents. Elle est représentée par une fonction $N(r)$ donnant en moyenne sur tous les agents, le nombre de voisins[49] situés à une distance inférieure à r. Il s'agit là encore, sous cette dernière forme, d'un descripteur ayant un sens très concret, par exemple dans les dynamiques où les interactions sont liées à des seuils de distance.

f) Fonction de Ripley

La fonction de Ripley notée $K(r)$ se calcule — dans sa version empirique naïve[50] — en divisant le nombre moyen de voisins à une distance inférieure à r par la densité :

$$K(r) = \frac{N(r)}{\lambda}$$

49. Ici encore on doit tenir compte des effets de bord pour les points occupant des positions limitrophes. La littérature fournit différentes heuristiques pour le faire lorsque le besoin s'en fait sentir, basées sur des principes d'élimination (de ces points limitrophes) ou de complémentation (extensions virtuelles au delà de l'espace occupé).

50. Remarque similaire : dans la présentation des indicateurs empiriques, nous avons pris le parti d'exposer des formules qui ne se rattachent en toute rigueur à leur correspondants théoriques — voir plus loin — que dans le cas d'un domaine spatial fini et illimité, donc sans effets de bords.

Le but de la normalisation par la densité est de pouvoir comparer des configurations indépendamment du nombre d'agents. Lorsque la distribution est aléatoire on peut s'attendre à ce que le nombre de voisins s'accroisse avec r proportionnellement au volume de la boule qui les englobe. De fait, l'allure de la fonction tend alors à se conformer à celle de $b_p r^p$, le coefficient désignant le volume de la boule de rayon unité dans l'espace $\mathbb{R}^p$. La recherche d'un usage pratique conduit alors à considérer la fonction :

$$L(r) = \left(\frac{K(r)}{b_p}\right)^{\frac{1}{p}} - r$$

Celle-ci est approximativement constante et de valeur nulle dans le cas d'une configuration totalement aléatoire. Une valeur positive pour de faibles valeurs du rayon signifie une tendance à l'agrégation, et une valeur négative une tendance à la répulsion.

g) Fonction de corrélation par paire

La fonction de corrélation par paire répond au souci de mesurer la corrélation de la présence d'agents dans deux régions disjointes séparées par une distance donnée. La configuration $\{x_l\}$ étant donnée, plaçons au hasard sur l'espace X une première boule de rayon ρ, puis une seconde boule de même rayon, située au hasard à une distance r de la première. On mesure alors les nombres n_1 et n_2 d'agents situés dans chacune des deux boules ainsi que leur produit. La répétition de cette opération un certain nombre de fois permet de collectionner n triplets d'observations $\left[n_1^k, n_2^k, n_1^k n_2^k\right], k = 1, ..., n$, et donc de calculer trois moyennes empiriques : celle des nombres n_1^k, celle des nombres n_2^k et celle des produits. En normalisant par le volume commun des sphères, on obtient trois densités empiriques $\lambda_1(\rho)$, $\lambda_2(\rho)$ et $\gamma_{12}(\rho, r)$.

La corrélation empirique de présence conjointe à la distance r, mesurée sur l'échantillon aléatoire de couples de boules de rayon ρ, est mesurée par le rapport :

$$c(\rho, r) = \frac{\gamma_{12}(\rho, r)}{\lambda_1(\rho)\,\lambda_2(\rho)}$$

Si la répétition des opérations est suffisante, $\lambda_1(\rho) \approx \lambda_2(\rho) \approx \lambda$. La *densité produit*[51] $\gamma_{12}(\rho, r)$ ne varie plus sensiblement avec ρ et il en est de même pour $c(\rho, r)$ que l'on peut donc écrire $c(r)$.

Cette définition faisant comprendre la nature de la fonction de corrélation par paire n'est pas opératoire. Pratiquement la fonction se calcule — sur une configuration $\{x_l\}$ donnée — à partir de la fréquence avec laquelle on rencontre des couples de points séparés d'une distance r. Comme par construction le nombre de tels couples est fini, et donc la distribution des distances est discrète, l'idée est de « lisser » à l'aide d'une fonction noyau $k\left(r', r\right)$, décroissante lorsque r' s'éloigne de r pour s'annuler à partir

51. *Product density.*

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

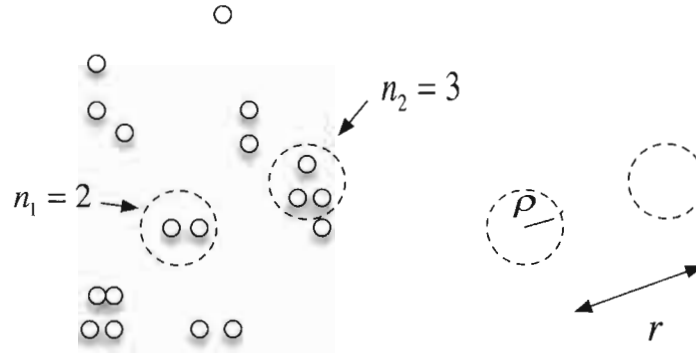


Figure A.2 Définition empirique de la fonction de corrélation par paires.

d'un certain seuil (Stoyan et al, 1995, p 137). La valeur *empirique* de la fonction de corrélation par paires, pour des valeurs de r faibles par rapport à l'espace ouvert, s'exprime par :

$$c(r) = \sum_{i \neq j} \frac{k\left(|x_i - x_j| - r\right)}{\lambda N p b_p r^{p-1}}$$

Pour des valeurs de r proches de la taille de l'espace ouvert, cette expression introduit des biais et la littérature propose des coefficients correcteurs fonction des positions relatives des agents i et j. Le lien mathématique entre l'approximation précédente et la définition de la fonction de corrélation par paire est explicité en Annexe A.2.2.

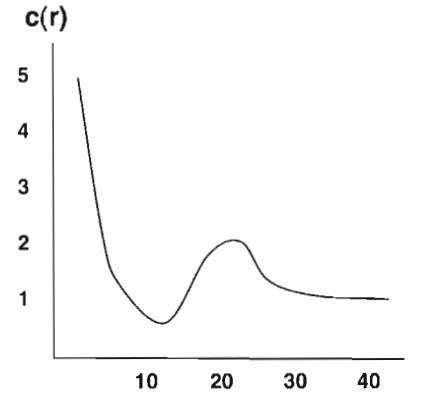


Figure A.3 Allure possible de la fonction de corrélation.
Corrélations à courte distance : agrégation en groupes de taille réduite ;
à longue distance corrélations identiques à celles d'une répartition aléatoire[53].

h) Distribution des distances d'un point quelconque de l'espace à l'agent le plus proche

Dans un contexte géographique d'aménagement du territoire, la fonction $D(r)$ a par exemple, comme arrière-plan, la distribution des distances *d'une ville donnée* à la ville la plus proche. La fonction $H_s(r)$, en question ici, concerne dans le même contexte la distribution de la distance *d'un point quelconque du territoire* à la ville la plus proche. La configuration des positions des agents étant donnée, on est en mesure de dresser une carte donnant pour chaque position $x \in X$ la valeur $d(x)$ de la distance à l'agent le plus proche. Réciproquement, on est en mesure d'identifier l'ensemble $X(r) \subset X$ de toutes les positions vérifiant $d(x) \leqslant r$. Cet ensemble est l'union des boules de rayon r centrées sur les agents. Son volume est donc calculable ainsi que son rapport à l'étendue de l'espace total. C'est ce rapport qui définit la fonction $H_s(r)$. Égal à 0 pour $r = 0$, il croît et tend évidemment vers 1 lorsque r devient grand — tous les points sont à une distance inférieure à ∞ de l'agent le plus proche.

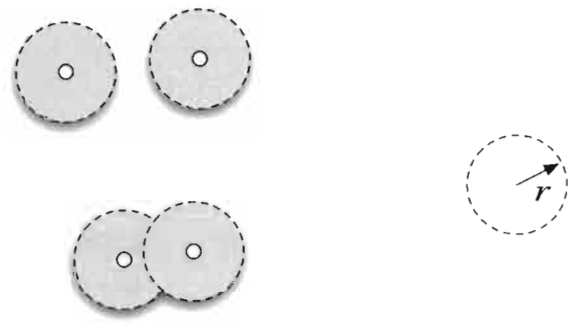


Figure A.4 Principe de calcul de la fonction $H_s(r)$.

La fonction $H_s(r)$ est appelée dans la littérature *fonction de distribution du premier contact.*

A.2.2 Fonction de corrélation sur une configuration spatiale homogène : définition et calcul (§§ 9.2.1 (b) et 9.5.2)

Soient deux fonctions g et h représentatives de deux parties différentes d'un ensemble de valeurs observables U, par exemple des fonctions caractéristiques de deux parties distinctes, ou encore deux noyaux centrés sur des valeurs différentes. Soient respectivement $\langle {}^{\omega}\{u_l\}^t, g\rangle$ et $\langle {}^{\omega}\{u_l\}^t, h\rangle$ les deux résumés du système, pris sur la même réalisation ω de la vie du système à l'instant t.

Définition : La *corrélation* de ces résumés, évaluée sur l'ensemble des trajectoires observables est donnée par :

$$E\left(\langle {}^{\omega}\{u_l\}^t, g\rangle \langle {}^{\omega}\{u_l\}^t, h\rangle\right) - \left(E\langle {}^{\omega}\{u_l\}^t, g\rangle\, E\langle {}^{\omega}\{u_l\}^t, h\rangle\right)$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Calcul : Lorsque l'on peut définir une distance entre deux valeurs observables de U, l'intérêt porte souvent, non sur les corrélations entre ce qui se passe sur deux parties déterminées, mais entre ce qui se passe entre deux parties quelconques séparées d'un écart Δu. Considérons — voir figure — donc deux fonctions g et h définies à partir d'un noyau f symétrique par :

$$g(u) = f(u - \overline{u}) \qquad h(u) = f(u - (\overline{u} + \Delta u))$$

et proposons-nous de relier, sous certaines hypothèses venant contraindre les états observés du système, la valeur de la corrélation à l'amplitude de l'écart $r = |\Delta u|$

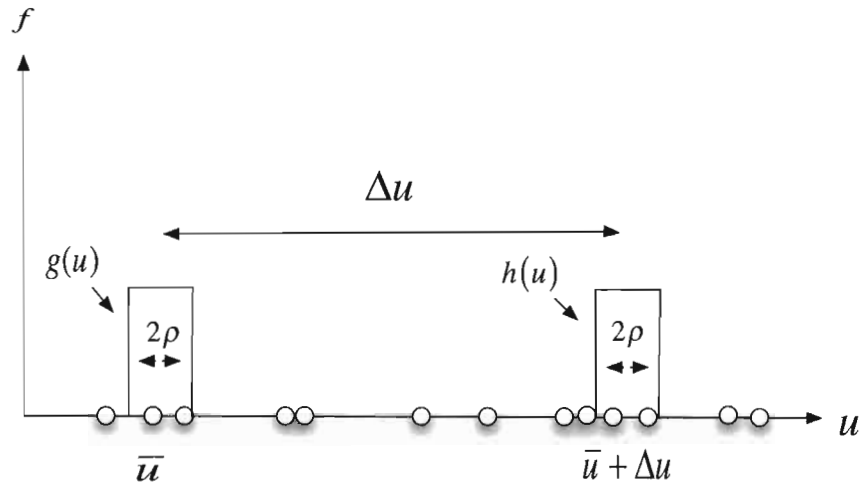


Figure A.5 Corrélation entre deux parties du système séparées par un écart donné.

La corrélation moyenne — c'est à dire intégrée sur tout l'espace U puis divisée par le volume v de cet espace supposé fini[54] —, pour une translation Δu *fixée,* est , (en laissant de côté pour alléger l'identifiant ω) :

$$C'_f(\Delta u) = \frac{1}{\nu}\int_U E\left(\langle\{u_l\}^t, g\rangle\langle\{u_l\}^t, h\rangle\right)\delta\overline{u} - \frac{1}{\nu}\int_U \left(E\langle\{u_l\}^t, g\rangle E\langle\{u_l\}^t, h\rangle\right)\delta\overline{u}$$

54. Les développements menés ici peuvent être adaptés au cas d'un espace U infini. Il est clair par ailleurs que ces développements sont indiqués ici dans leur principe, abstraction faite des conditions d'intégrabilité nécessaires.

ou, en explicitant les variables, pour faire apparaître la variable $\overline{u}$ d'intégration :

$$C_f^t(\Delta u) = \frac{1}{\nu}\int_U E\left(\left\langle\{u_l\}^t,(u)\,g\,(u-\overline{u})\right\rangle\left\langle\{u_l\}^t,(u)\,h\,(u-\overline{u}-\Delta u)\right\rangle\right)\delta\overline{u}$$
$$-\frac{1}{\nu}\int_U\left(E\left\langle\{u_l\}^t,(u)\,g\,(u-\overline{u})\right\rangle E\left\langle\{u_l\}^t,(u)\,h\,(u-\overline{u}-\Delta u)\right\rangle\right)\delta\overline{u} \quad \text{(A.6)}$$

La valeur de cette expression ne dépend que de l'instant t, de la fonction f et de la valeur de l'écart Δu. Elle exprime bien une corrélation moyenne, constatable d'une trajectoire du système à une autre, entre les valeurs des deux résumés construits à partir de f et se déduisant par une translation Δu.

L'expression d'une corrélation moyenne *à une distance r* s'obtient par intégration sur tous les Δu tels que $r \leqslant |\Delta u| < r + \Delta r$. Si $B\,(2\Delta r)$ désigne le volume de la partie de U ainsi délimitée (zone entre les deux boules de même centre, et respectivement de rayons $r - \Delta r$ et $r + \Delta r$ dans U) , la formule de cette corrélation est la suivante :

$$\overline{C}_f^t(r) = \lim_{\Delta r\to 0}\frac{1}{B\,(2\Delta r)}\int_{r\leqslant|\Delta u|<r+\Delta r} C_f^t(\Delta u)\,\delta\Delta u \quad \text{(A.7)}$$

Admettons alors, *pour la distribution des configurations possibles à l'instant t, la propriété d'homogénéité,* telle qu'elle a été définie dans la première section du chapitre 9. Une telle hypothèse peut être posée lorsqu'aucune valeur — ou aucune partie — de l'espace U n'est *a priori* privilégiée par les mécanismes en jeu, et que les seules hétérogénéités pouvant apparaître dans la répartition des agents sont des *hétérogénéités locales*. En vertu de cette homogénéité à grande échelle, la mesure $E\,\{u_l\}^t$ est invariante pour tout déplacement.

Sous ces hypothèses supposant l'homogénéité spatiale à grande échelle de l'état du système à tout instant t, l'expression de la corrélation moyenne à une distance r $C_f^t(r)$ *s'exprime par :*

$$\overline{C}_f^t(r) = \frac{1}{\nu}E\left\langle\otimes^2\{u_l\}^t,(u,u')\,k_f\,(u-u',r)\right\rangle - \left(E\left\langle\{u_l\}^t,f_0\right\rangle\right)^2 \quad \text{(A.8)}$$

où $k_f\,(u-u',r)$ est un noyau (intégrale sur la variable $u-u'$ valant 1) défini par :

$$k_f\,(u-u',r) = \lim_{\Delta r\to 0}\frac{1}{B\,(2\Delta r)}\int_{r\leqslant|\Delta u|<r+\Delta r}\int_U f\,(u-u'-\overline{u})\,f\,(-\overline{u}-\Delta u)\,\delta\overline{u}\,\delta\Delta u$$

et $f_0(u) = (u)\,f\,(u-\overline{u}_0)$, $\overline{u}_0$ étant une valeur *fixe arbitraire* considérée comme l'origine.

Ainsi se trouvent reliées, dans le cas de configurations spatialement homogènes, la définition de la fonction de corrélation (A.7)*, et une expression mobilisant un noyau* (A.8). Ce lien justifie par exemple le calcul approché de la fonction de corrélation par paires $c\,(r)$, donné au § 11.2.1 g).

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

La donnée de f puis de k_f permet alors de donner une estimation de la corrélation $\overline{C}'_f(r)$ par le calcul de l'expression

$$\frac{1}{\nu}\sum_{i,j} k_f\left(u_i - u_j, r\right) - \sum_{i,j} f\left(u_i\right) f\left(u_j\right)$$

Exemples :

Soit $u \in [-\pi, +\pi[$ l'attribut désignant la position sur un cercle (pour disposer d'un espace U fini, ici de volume 2π, sans effet de bord). La fonction $k_f\left(u - u', r\right)$ se calcule dans ces conditions à partir alors du noyau f par :

$$k_f\left(u - u', r\right) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} f\left(u - u' - \overline{u}\right) f\left(-\overline{u} - r\right) \delta\overline{u} + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} f\left(u - u' - \overline{u}\right) f\left(-\overline{u} + r\right) \delta\overline{u}$$

Supposons comme sur la figure précédente f à support borné d'amplitude 2ρ. Les valeurs de $\overline{u}$ pour lesquelles les termes sous intégrale ne sont pas nuls vérifient :

$$-\rho + u - u' \leqslant \overline{u} \leqslant \rho + u - u' \text{ et } -\rho - r \leqslant \overline{u} \leqslant \rho - r$$

soit

$$\max\left(-\rho + u - u', -\rho - r\right) \leqslant \overline{u} \leqslant \min\left(\rho + u - u', \rho - r\right)$$

pour le premier terme et :

$$-\rho + u - u' \leqslant \overline{u} \leqslant \rho + u - u' \text{ et } -\rho + r \leqslant \overline{u} \leqslant \rho + r$$

soit

$$\max\left(-\rho + u - u', -\rho + r\right) \leqslant \overline{u} \leqslant \min\left(\rho + u - u', \rho + r\right)$$

pour le second.

Dans les conditions où la distance r est supérieure à l'amplitude 2ρ, l'existence d'une plage de variation pour $\overline{u}$ est conditionnée pour le premier terme par :

$$r - 2\rho \leqslant u' - u \leqslant r + 2\rho$$

et pour le second par :

$$r - 2\rho \leqslant u - u' \leqslant r + 2\rho$$

En définitive, les conditions requises pour que $k_f\left(u - u', r\right) \neq 0$ sont :

$$r - 2\rho \leqslant |u - u'| \leqslant r + 2\rho$$

Dans l'expression (A.8) de la corrélation à une distance r, k_f ne prend en compte que les agents dont la distance est égale à r, à $\pm 2\rho$ près. C'est bien l'objectif dévolu à une telle fonction. On pourra vérifier que si la répartition des agents sur U est contrôlé par un processus totalement aléatoire, la corrélation calculée en appliquant la formule (A.8) est bien nulle, chacun des deux termes qui la composent valant $\left(\frac{EN^t}{2\pi}\right)^2$ avec EN^t espérance du nombre d'agents à l'instant t.

Démonstration :

1) Commençons par remarquer que :

$$\int_U f(u-\overline{u})\, f\left(u'-\overline{u}-\Delta u\right)\delta\overline{u} = \int_U f\left(u-u'-\overline{u}\right) f(-\overline{u}-\Delta u)\,\delta\overline{u}$$

$k_f\left(u-u',r\right)$ que nous avons défini par :

$$k_f\left(u-u',r\right) = \lim_{\Delta r\to 0}\frac{1}{B(2\Delta r)}\int_{r\leqslant|\Delta u|<r+\Delta r}\left(\int_U f\left(u-u'-\overline{u}\right) f(-\overline{u}-\Delta u)\,\delta\overline{u}\right)\delta\Delta u$$

vaut donc aussi :

$$\lim_{\Delta r\to 0}\frac{1}{B(2\Delta r)}\int_{r\leqslant|\Delta u|<r+\Delta r}\left(\int_U f(u-\overline{u})\, f\left(u'-\overline{u}-\Delta u\right)\delta\overline{u}\right)\delta\Delta u$$

Il vient alors :

$$\lim_{\Delta r\to 0}\frac{1}{B(2\Delta r)}\int_{r\leqslant|\Delta u|<r+\Delta r}\frac{1}{v}\left(\int_U\left\langle\{u_l\}^t,g\right\rangle\left\langle\{u_l\}^t,h\right\rangle\delta\overline{u}\right)\delta\Delta u =$$

$$\lim_{\Delta r\to 0}\frac{1}{B(2\Delta r)}\int_{r\leqslant|\Delta u|<r+\Delta r}\frac{1}{v}\left(\int_U\int_{U^2} f(u-\overline{u})\, f\left(u'-\overline{u}-\Delta u\right)\{u_l\}^t(\delta u)\{u_l\}^t\left(\delta u'\right)\delta\overline{u}\right)\delta\Delta u =$$

$$\lim_{\Delta r\to 0}\frac{1}{B(2\Delta r)}\int_{r\leqslant|\Delta u|<r+\Delta r}\frac{1}{v}\left(\int_{U^2}\int_U f(u-\overline{u})\, f\left(u'-\overline{u}-\Delta u\right)\delta\overline{u}\,\{u_l\}^t(\delta u)\{u_l\}^t\left(\delta u'\right)\right)\delta\Delta u =$$

$$\frac{1}{\nu}\int_{U^2} k_f\left(u-u',r\right)\{u_l\}^t(\delta u)\{u_l\}^t\left(\delta u'\right) =$$

$$\frac{1}{\nu}\left\langle\otimes^2\{u_l\}^t,(u,u')\,k_f\left(u-u',r\right)\right\rangle$$

et donc, en passant aux espérances mathématiques :

$$\lim_{\Delta r\to 0}\frac{1}{B(2\Delta r)}\int_{r\leqslant|\Delta u|<r+\Delta r}\frac{1}{v}\int_U E\left(\left\langle\{u_l\}^t,g\right\rangle\left\langle\{u_l\}^t,h\right\rangle\right)\delta\overline{u}\delta\Delta u$$

$$= E\lim_{\Delta r\to 0}\frac{1}{B(2\Delta r)}\int_{r\leqslant|\Delta u|<r+\Delta r}\frac{1}{v}\int_U\left(\left\langle\{u_l\}^t,g\right\rangle\left\langle\{u_l\}^t,h\right\rangle\right)\delta\overline{u}\delta\Delta u$$

$$= \frac{1}{\nu}E\left\langle\otimes^2\{u_l\}^t,k_f\right\rangle$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

2) Posons $f_0(u) = f(u - \overline{u}_0)$. La mesure $E\{u_l\}^t$ étant assumée invariante pour tout déplacement, il vient pour toutes valeurs de $\overline{u}$ et Δu :

$$E\left\langle \{u_l\}^t, g\right\rangle = E\left\langle \{u_l\}^t, h\right\rangle = E\left\langle \{u_l\}^t, f_0\right\rangle.$$

On a donc :

$$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{1}{B(2\Delta r)} \int_{r \leqslant |\Delta u| < r+\Delta r} \frac{1}{v} \int_U E\left\langle \{u_l\}^t, g\right\rangle E\left\langle \{u_l\}^t, h\right\rangle \delta\overline{u}\delta\Delta u =$$
$$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{1}{B(2\Delta r)} \int_{r \leqslant |\Delta u| < r+\Delta r} \frac{1}{v} \int_U \left(E\left\langle \{u_l\}^t, f_0\right\rangle\right)^2 \delta\overline{u}\delta\Delta u = \left(E\left\langle \{u_l\}^t, f_0\right\rangle\right)^2$$

A.3 COMPLÉMENTS DU CHAPITRE 10

A.3.1 Dynamique de polarisation : tropisme vers les orientations majoritaires et champ de potentiel (§ 10.2.1)

Comment passer d'une formulation du déplacement angulaire d'un agent i en terme de dénombrement des agents « plus à gauche » (v_i) et « plus à droite » (μ_i) à une formulation analytique en terme de gradient d'un potentiel.

a) Orientations et parcours angulaires.

Le caractère particulier de l'espace des observables — l'ensemble des orientations dans le plan, où encore l'ensemble des points d'un cercle — oblige à certaines précautions : à côté de l'orientation $\theta \in]-\pi, +\pi]$, considérons un second attribut x prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}$ et appelé ici *parcours angulaire*. La valeur de cet attribut à l'instant t pour un agent i est donnée par l'intégrale :

$$x_i^t = \theta_i^0 + \int_0^t \delta\theta_i^t$$

somme algébrique de tous les déplacements angulaires infinitésimaux effectués par l'agent depuis l'instant initial. La relation entre les valeurs des deux attributs se complète dans l'autre sens par $\theta_i^t = \theta\left(x_i^t\right)$ où la fonction périodique $\theta(x)$ est définie par une opération modulo :

$$\theta(x) = x - 2k(x)\pi \text{ avec}$$
$$k(x) = k\,|(k \in \mathbb{Z}) \wedge (-\pi < x - 2k\pi \leqslant \pi)$$

Dans ce qui suit $-\pi \leqslant \left[\theta', \theta\right] < \pi$ désigne le déplacement angulaire d'amplitude minimale, nécessaire pour aller de l'orientation θ à l'orientation θ'. $0 \leqslant |\theta', \theta| < \pi$ est l'amplitude de ce déplacement, angle aigu entre les deux orientations.

Nous définissons de même $[x', x] = [\theta'(x), \theta(x)]$ et $|x', x| = |\theta'(x), \theta(x)|$ comme étant respectivement 1) le déplacement angulaire passant de l'orientation $\theta(x)$ à l'orientation $\theta(x')$ et 2) l'amplitude de ce même déplacement.

Le parcours angulaire réellement effectué par chaque agent exprime objectivement un aspect important de la dynamique du système. Mais considérer $x \in \mathbb{R}$ à côté de $\theta \in [-\pi, \pi[$ a aussi des avantages techniques, facilitant des développements à l'issue desquels il est cependant nécessaire de revenir à la « vraie » description du système en terme d'orientations. Cette démarche est utilisable dans tous les cas où les agents se déploient dans un espace refermé sur lui-même — cercle, sphère, tore — comme c'est le cas, pour éviter les effets de bord, dans de nombreux modèles.

b) Du dénombrement des agents à l'expression d'un potentiel

Le mécanisme de polarisation décrit dans l'exemple du chapitre en référence lie la vitesse du déplacement angulaire de chaque agent à la quantité $\frac{\nu_i^t - \mu_i^t}{N}$ avec

$$\nu_i^t = \text{card}\left\{ j \,|\, [x_j^t, x_i^t] > 0 \right\}$$
$$\mu_i^t = \text{card}\left\{ j \,|\, 0 > [x_j^t, x_i^t] > -\pi \right\}$$

Considérons la fonction suivante, définie pour un agent i sur l'ensemble des configurations possibles des parcours angulaires par :

$$U_i\left(x, \{x_l\}\right) = \frac{1}{N} \sum_{j \,\Big|\, \substack{x_j \neq x_i \\ x_j \neq x_i + \pi}} |x, x_j|$$

qu'on peut encore écrire :

$$U_i\left(x, \{x_l\}\right) = -\frac{1}{N} \sum_{j \in D_i} [x_j, x] + \frac{1}{N} \sum_{j \in G_i} [x_j, x]$$
$$\text{avec } D_i = \left\{ j \,|\, 0 > [x_j, x_i] > -\pi \right\} \text{ et } \mathrm{G}_i = \left\{ j \,|\, [x_j, x_i] > 0 \right\}$$

La fonction associant à x la valeur $[x_j, x]$ est dérivable pour tout x vérifiant $[x_j, x] > -\pi$ et la valeur, négative[55], de cette dérivée est -1 ; la fonction $U_i\left(x, \{x_l\}\right)$ est donc elle même dérivable en $x = x_i$ et la valeur de sa dérivée est donc :

$$\frac{+(\text{card } D_i) - (\text{card } \mathrm{G}_i)}{N}$$

On peut donc écrire en définitive :

$$\frac{\nu_i^t - \mu_i^t}{N} = -\alpha \frac{\partial}{\partial x} U_i\left(x = x_i^t, \{x_l\}^t\right)$$

55. Puisque $[x_j, x]$ décroît lorsque x augmente, en se rapprochant de x_j lorsque $[x_j, x] > 0$ et en s'en éloignant dans le cas contraire.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Cherchons maintenant s'il existe une fonction $V\left(x,\{x_l\}\right)$ telle que :

$$\frac{\partial}{\partial x}V\left(x=x_i,\{x_l\}\right)=\frac{\partial}{\partial x}U_i\left(x=x_i,\{x_l\}\right)$$

Nous sommes tenté de prendre :

$$V\left(x,\{x_l\}\right)=\frac{1}{N}\sum_j|x,x_j|$$

soit

$$V\left(x,\{x_l\}\right)=U_i\left(x,\{x_l\}\right)+\frac{1}{N}\sum_{j|x_j=x_i}|x,x_j|+\frac{1}{N}\sum_{j|x_j=x_i+\pi}|x,x_j|$$

L'égalité requise des dérivées ne peut être réalisée car les termes complémentaires dans l'expression ci dessus ne sont précisément pas dérivables en $x=x_i$. Plus exactement il y a discontinuité de la dérivée, qui passe d'une valeur -1 à la valeur 1 lorsque x traverse la valeur $x_j=x_i$ ou la valeur $x_j=x_i+\pi$. Pour pallier à cette discontinuité, on peut substituer aux termes $|x,x_j|$ des termes $d\left(x,x_j\right)$ dérivables qui en constituent des approximations pour $\pi-\varepsilon\gg|x,x_j|\gg\varepsilon$ et dont la dérivée devient nulle lorsque $x=x_j$ et $x=x_j+\pi$. Par exemple des termes construits sur une fonction $d\left(a,b\right)$ construite de la manière suivante :

$$0\leqslant|a,b|\leqslant\varepsilon \qquad d\left(a,b\right)=\frac{|a,b|^2}{2\varepsilon}$$

$$\varepsilon<|a,b|<\pi-\varepsilon \qquad d\left(a,b\right)=|a,b|-\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\pi-\varepsilon\leqslant|a,b|\leqslant\pi \qquad d\left(a,b\right)=\frac{\left(\pi-|a,b|\right)^2}{2\varepsilon}$$

Soit donc le champ de potentiel défini par :

$$V\left(x,\{x_l\}\right)=\frac{1}{N}\sum_j d\left(x,x_j\right)$$

nous avons :

$$V\left(x,\{x_l\}\right)=\frac{1}{N}\sum_{j\left|\begin{smallmatrix}x_j\neq x_i\\x_j\neq x_i+\pi\end{smallmatrix}\right.}d\left(x,x_j\right)+\frac{1}{N}\sum_{j|x_j=x_i}d\left(x,x_j\right)+\frac{1}{N}\sum_{j|x_j=x_i+\pi}d\left(x,x_j\right)$$

et par conséquent :

$$\frac{\partial}{\partial x}V\left(x=x_i,\{x_l\}\right)=\frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial x}\sum_{j\left|\begin{smallmatrix}x_j\neq x_i\\x_j\neq x_i+\pi\end{smallmatrix}\right.}d\left(x=x_i,x_j\right)$$

Il est donc clair que

$$\frac{\partial}{\partial x} V\left(x = x_i, \{x_l\}\right) \approx \frac{\partial}{\partial x} U_i\left(x = x_i, \{x_l\}\right)$$

la différence n'excédant pas — dans le cas de la fonction d choisie, la fraction du nombre d'agents j tels que $|x_i, x_j| \leqslant \varepsilon$ ou $|x_i, x_j| \geqslant \pi - \varepsilon$.

Nous pouvons poser alors :

$$\frac{\nu_i^t - \mu_i^t}{N} \approx -\alpha \frac{\partial}{\partial x} V\left(x_i^t, \{x_l\}^t\right)$$

A.3.2 Processus stochastiques et formule d'Itô (§ 10.2.3)

Dans l'exemple d'une dynamique d'alignement présenté au chapitre 10, les équations contrôlant l'évolution des orientations des agents sont des *équations différentielles stochastiques*. De telles équations ressortent de la *théorie des processus stochastiques en temps continu* et à travers elle, de la théorie des probabilités. De nombreux ouvrages et cours y sont consacrés. On peut s'interroger sur la pertinence du concept de temps continu pour les modèles à base d'agents. D'une part ces modèles sont destinés à être simulés sur ordinateur, et le temps machine, discret, constitue souvent le support du temps du monde simulé. Par ailleurs, les formalismes mathématiques utilisés dans ces théories sont moins accessibles pour les non-mathématiciens que ceux convenant à un temps discret. Plusieurs raisons militent cependant en faveur du temps continu. C'est d'ailleurs le parti pris de notre ouvrage, et *il nous a paru utile de présenter le minimum de définitions simplifiées nécessaires pour mieux comprendre l'exemple des dynamiques d'alignement. Nous le ferons pour l'essentiel dans le cas de processus unidimensionnels — donc prenant leurs valeurs dans* $\mathbb{R}$*— en n'abordant qu'en fin de section le cas multi-dimensionnel qui est celui des processus stochastiques en œuvre dans l'exemple.*

a) Processus stochastiques

La définition d'un processus stochastique mobilise un espace d'états X et un « temps », ensemble ordonné d'instants T. On considère l'ensemble des fonctions appliquant T dans X, ensemble qui est habituellement noté X^T. *Un processus stochastique* est défini par *la donnée d'une loi de probabilité sur* X^T. La définition rigoureuse, conformément à la théorie des probabilités, exige que l'on choisisse sur X^T une σ-algèbre $\mathcal{X}$, c'est-à-dire un certain ensemble de sous-ensembles de X, fermé par complémentation et union. Nous nous restreindrons ici pour simplifier à la σ-algèbre la plus fine, celle générée à partir de l'union des éléments de X.

L'interprétation de ce formalisme est simple : les fonctions — les éléments de X^T— sont les trajectoires possibles d'un système dans son espace d'états ; la loi détermine la probabilité d'observer une trajectoire ayant telle ou telle propriété — c'est-à-dire appartenant à tel ou tel sous-ensemble de la σ-algèbre. La valeur prise par le processus à l'instant t, notons là x^t, est une variable aléatoire sur l'espace d'états

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

X, et le processus lui-même peut être vu comme une suite de variables aléatoires sur X, suite indicée par t. D'où la notation $\left(x^t\right)_{t\in T}$ habituellement utilisée pour désigner le processus. On peut aussi dans cette notation voir x comme désignant un élément de X^T (donc une trajectoire), et x^t comme la projection de cet élément sur la composante t.Toutes ces manières équivalentes de considérer et noter un processus, et d'autres encore plus générales, sont présentées dans les ouvrages les concernant.

b) Temps discret, temps continu

Dans ce qui précède, la structure de l'ensemble des instants est générale : ce peut être par exemple une suite finie de nombre entiers consécutifs (un cas particulier de temps discret), ce peut être au contraire l'ensemble des réels positifs ou nuls (un cas particulier de temps continu). Se donner opérationnellement une loi de probabilité lorsque le temps est continu est évidemment problématique, aussi a-t-on cherché à se ramener à des *lois de probabilités sur des séquences finies* d'instants. C'est l'objet du théorème de *Kolmogorov-Bochner*. Ce théorème affirme que se donner une loi de probabilité sur l'ensemble des n-uples d'états du système observables sur toute séquence *finie* d'instants $t_1, ..., t_k, ..., t_n$ équivaut à se donner une loi de probabilité sur X^T. Bien entendu, plusieurs conditions doivent être réunies pour que ce théorème soit valide : certaines conditions générales sur l'espace des états, et des conditions de cohérence entre les lois de probabilités que l'on se donne sur les séquence finies d'instants.

c) Processus de Wiener.

La théorie des processus stochastiques s'est attachée à définir précisément et à étudier les propriétés de classes de processus susceptibles d'être utilisés dans les modèles. Mentionnons ici la classe générale des *processus de Markov*, processus répondant à la propriété d'être « sans mémoire » : la probabilité de voir à l'instant t l'état du système satisfaire une certaine propriété, *connaissant la valeur de cet état* à un instant *antérieur* s, est indépendante de la trajectoire suivie jusqu'à l'instant s.

Un *processus de Wiener* modélise le mouvement brownien. Noté ici $\left(W^t\right)_{t\in T}$ il est défini — ici dans le cas unidimensionnel, W prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}$— par une valeur nulle à l'instant initial et par les propriétés de ses incréments $W^t - W^s$:

- *Incréments indépendants* : pour toute séquence finie d'instants $t_1, ..., t_k, ..., t_n$, les incréments — différences entre deux valeurs successives — $W^{t_{k+1}} - W^{t_k}$, sont des variables aléatoires indépendantes.
- *Loi normale* : la probabilité contrôlant les valeurs des incréments $W^t - W^s$, $0 \leqslant s < t$, est une loi normale de moyenne nulle et de variance $t - s$.

On montre qu'il possède en outre les propriétés suivantes :

- Espérance nulle : $\forall t, E\left[W^t\right] = 0$
- Variance augmentant linéairement avec le temps : $\text{var}\left[W^t\right] = t$

- Covariance de deux valeurs prises à des instants différents :

$$\forall s, t, s < t, \ \text{cov}\left[W^s, W^t\right] = \text{var}\left[W^s\right] = s.$$

On montre en outre qu'un processus de Wiener est un processus de Markov, et que c'est un *processus continu*, au sens des probabilités : lorsque Δt tend vers 0, la probabilité pour que $\left|W^{t+\Delta t} - W^t\right|$ dépasse une certaine valeur tend vers zéro, quelle que soit cette valeur aussi petite soit elle.

d) Processus de diffusion

Les processus de diffusion sont au centre des deux exemples donnés dans le chapitre (avec les processus de saut pour le second). Aussi est-il utile d'en donner une définition, sans toutefois entrer dans trop de détails formels ;

Considérons donc un processus de Markov avec *sa fonction de probabilité de transition* $W^{t,t+\Delta t}\left(dy \,|x\right)$, donnant la probabilité de voir le système passer sur l'intervalle de temps $t, t + \Delta t$ de l'état x à un état situé dans le voisinage dy de l'état y. Un tel processus est un *processus de diffusion* s'il satisfait à des conditions concernant

- la probabilité de transition elle-même : elle tend vers 0 lorsque Δt tend vers 0, pour tout état y différent de x (absence de possibilité de saut instantané, donc processus continu).
- l'espérance — conditionnellement à l'état x — de l'écart $y - x$ et celle du carré de cet écart $(y - x)^2$ lorsque Δt tend 0 : la limite de ces espérances rapportées à Δt existe et sont des fonctions de x et éventuellement de t dans le cas d'un processus temporellement non homogène. Ces fonctions que nous noterons $a^t(x)$ pour $\lim_{\Delta t \to 0} E\left(\frac{y-x}{\Delta t} \,|x\right)$ et $b^t(x)$ pour $\lim_{\Delta t \to 0} E\left(\frac{(y-x)^2}{\Delta t} \,|x\right)$ sont appelées respectivement le coefficient de « *drift* » et le coefficient de diffusion.

e) Forme et interprétation intuitive d'une équation différentielle stochastique

Une équation différentielle stochastique modélise la superposition d'une dynamique déterministe, s'exprimant sous forme différentielle, et d'un mouvement brownien dont l'intensité peut elle-même varier au cours du temps. En se limitant au cas unidimensionnel, une telle équation se présente sous la forme générale :

$$dx^t = a^t\left(x^t\right) dt + b^t\left(x^t\right) dW^t \qquad x \in R$$

dans laquelle W^t est un processus de Wiener. On y distingue bien dans l'expression de la variation de x pendant le petit intervalle de temps dt la part déterministe $a^t(x)\,dt$ et la part aléatoire $b^t(x)\,dW^t$, où dW^t est une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et de variance dt. Une solution de cette équation différentielle stochastique, si elle existe, est un processus stochastique $\left(x^t\right)_{t \in R^+}$, c'est-à-dire une loi de probabilité

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

sur un ensemble de trajectoires. On montre que c'est en fait un processus de diffusion, au sens défini plus haut, avec $a^t(x)$ et $b^t(x)$ respectivement comme drift et coefficient de diffusion.

f) Équations intégrales stochastiques

Bien sûr, il faut donner un sens mathématique rigoureux à une telle équation. Par analogie avec le cas déterministe, la forme différentielle précédente doit être équivalente à la forme intégrale :

$$x^t = x^0 + \int_0^t a^s\left(x^s\right) ds + \int_0^t b^s\left(x^s\right) dW^s$$

Donner un sens à la forme différentielle, c'est donner un sens à l'intégrale $\int_0^t b^s\left(x^s\right) dW^s$ portant sur les incréments infinitésimaux du processus de Wiener. Le terme ci dessus, s'il a un sens, est nécessairement *une variable aléatoire* : en particulier la fonction $b^s\left(x^s\right)$, considérée comme fonction du temps s, dépend de la trajectoire effectivement suivie par x^s entre $s = 0$ et $s = t$. Il en est ainsi même lorsque b^s ne dépend pas explicitement du temps.

g) Intégrales stochastiques d'Itô

Soit un système sur lequel on observe les trajectoires de deux processus, un processus de Wiener W^t et un second processus stochastique f^t, lui aussi prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}$.

La théorie des intégrales d'Itô s'attache à définir des variables aléatoires de la forme $I_a^b = \int_a^b f^s dW^s$. Elle commence par le faire pour des processus f qui, pour chaque réalisation ω de la vie du système, ont des trajectoires prenant la forme de fonctions *constantes par morceaux*, avec des points de discontinuité $s_0 = a, \ldots, s_i, s_{i+1}, \ldots, s_n = b$ délimitant les morceaux *fixes* d'une réalisation à une autre. La valeur ${}^{\omega}I_a^b$ prise par I_a^b pour une réalisation ω est alors *par définition :*

$${}^{\omega}I_a^b = \sum_{i=1}^{i=n-1} \left({}^{\omega}f^{s_i}\right)\left({}^{\omega}W^{s_{i+1}} - {}^{\omega}W^{s_i}\right)$$

où ${}^{\omega}f^{s_i}$ est valeur prise dans la réalisation ω par le processus f sur l'intervalle de temps $[s_i, s_{i+1}[$. La théorie généralise ensuite, en passant des processus constants par morceaux à une classe générale de processus f, répondant à la condition

$$\int_a^b E\left|f^s\right|^2 ds < \infty$$

Elle établit alors les propriétés remarquables suivantes sur les moments :

- espérance nulle : $E\left[\int_a^b f^s dW^s\right] = 0$
- valeur de la variance : $E\left[\left(\int_a^b f^s dW^s\right)^2\right] = \int_a^b E\left[\left(f^s\right)^2\right] ds$
- plus généralement : $E\left[\int_a^b f^s dW^s \int_a^b g^s dW^s\right] = \int_a^b E\left[f^s g^s\right] ds$

h) Formule d'Itô

Une fois donné un sens au terme $\int_0^t b^s\left(x^s\right) dW^s$, l'écriture de l'équation d'un processus stochastique combinant dynamique déterministe et mouvement brownien, que ce soit sous sa forme différentielle :

$$dx^t = a^t\left(x^t\right) dt + b^t\left(x^t\right) dW^t \qquad x \in R$$

ou intégrale :

$$x^t = x^0 + \int_0^t a^s\left(x^s\right) ds + \int_0^t b^s\left(x^s\right) dW^s$$

devient légitime. La théorie de ces équations s'attache à étudier les conditions de l'existence et de l'unicité d'une solution d'une telle équation assortie de conditions initiales exprimées sous forme d'une loi de probabilité contrôlant les valeurs de l'état initial x^0. Cette solution est un processus stochastique (en fait, comme déjà dit, un processus de diffusion) contrôlant les trajectoires possibles de la variable x.

Le problème abordé maintenant est le suivant : étant donné une équation sur le processus x, quelle est l'équation sur le processus $F(x)$. Dans le cas d'une dynamique déterministe gouvernée par $dx^t = a^t\left(x^t\right) dt$, la forme différentielle contrôlant l'évolution de $F(x)$ s'écrit :

$$dF\left(x^t\right) = a^t\left(x^t\right) F'\left(x^t\right) dt$$

la forme intégrale étant par conséquent :

$$F\left(x^t\right) = F\left(x^0\right) + \int_0^t a^s\left(x^s\right) F'\left(x^s\right) ds$$

La formule d'Itô — sous ses formes différentielles et intégrales — est une transposition aux processus stochastiques des équations précédentes. Elle fait intervenir cependant deux termes supplémentaires. Le premier mobilise les dérivées secondes de la fonction F, et donc des variations de second ordre de cette dernière prenant en compte une part de l'aléatoire. Le second terme est un terme stochastique résiduel : l'équation sur $F(x)$ est alors — sous sa forme différentielle :

$$dF\left(x^t\right) = \left[a^t\left(x^t\right) F'\left(x^t\right) + \frac{1}{2}\left(b^t\left(x^t\right)\right)^2 F''\left(x^t\right)\right] dt + b^t\left(x^t\right) F'\left(x^t\right) dW^t$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

i) Passage au cas multi-dimensionnel

Dans le premier exemple développé au chapitre 10 sur N agents, l'espace d'états X dans lequel se développe le processus stochastique affectant le système n'est pas R mais R^N. Les équations de ce processus s'y écrivent :

$dx_i^t = a_i\left(\{x_l\}^t\right)dt + b dW_i^t \qquad x_i^t \in R, i = 1, ..., N, b$ constante

C'est un cas particulier d'un système d'*équations stochastiques multi-dimensionnelles,* dont la forme la plus générale est :

$$dx_i^t = a_i^t\left(\{x_l\}^t\right)dt + \sum_{j=1}^{m} b_{ij}^t\left(\{x_l\}^t\right)dW_j^t \qquad x_i^t \in R, i \in \{1, ..., N\}\ j \in \{1, ..., m\}$$

Dans ces équations, la dynamique déterministe se développant dans R^N se combine avec m processus de Wiener indépendants. Dans cette expression générale, on le voit, les parts stochastiques affectant les trajectoires variables x_i ne sont pas nécessairement indépendantes entre elles.

La formule d'Itô multi-dimensionnelle donnant l'équation contrôlant l'évolution d'une fonction $F\left(\{x_l\}^t\right)$ prenant ses valeurs dans R est :

$$dF\left(\{x_l\}^t\right) = \left[\sum_{i=1}^{N} a_i^t\left(\{x_l\}^t\right)\frac{\partial}{\partial x_i}F\left(\{x_l\}^t\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} b_{ik}^t\left(\{x_l\}^t\right)b_{jk}^t\left(\{x_l\}^t\right)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}F\left(\{x_l\}^t\right)\right]dt + \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{N} b_{ik}^t\left(\{x_l\}^t\right)\frac{\partial}{\partial x_i}F\left(\{x_l\}^t\right)dW_k^t$$

Revenons à la forme particulière et simple des équations stochastiques du processus de polarisation. Les fonctions *drift* et de diffusion, a_i^t et b_{ik}^t, restent les mêmes au cours du temps , avec en plus $b_{ik} = 0$ pour $i \neq k$ et $b_{ii} = b$. On prend pour fonction F une somme de valeurs prises sur chacun des agents :

$$F\left(\{x_l\}^t\right) = \sum_i f\left(x_i^t\right)$$

La dynamique de $F\left(\{x_l\}^t\right)$ s'exprime alors par :

$$dF\left(\{x_l\}^t\right) = \left[\sum_{i=1}^{N} a_i\left(\{x_l\}^t\right)\frac{d}{dx}f\left(x_i^t\right) + \frac{1}{2}\sum_i b^2\frac{d^2}{dx^2}f\left(x_i^t\right)\right]dt + \sum_{i=1}^{N} b\frac{d}{dx}f\left(x_i^t\right)dW_k^t$$

A.3.3 Réduction d'une dynamique de polarisation : de la formule d'Itô au modèle EDP (§ 10.2.4)

Considérons à nouveau le modèle à base d'agents d'une dynamique de polarisation donné au chapitre 10. La moyenne — sur les N agents — d'une fonction quelconque f définie sur le parcours angulaire x est contrôlée par l'équation suivante, application directe de la formule d'Itô multi-dimensionnelle aux équations stochastiques régissant les déplacements angulaires des agents :

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\left\langle \{x_l\}^t, f\right\rangle = \frac{1}{N}\left\langle \{x_l\}^{t_0}, f\right\rangle \\ - \frac{1}{N}\int_0^t \alpha\left\langle \{x_l\}^s, \frac{\partial}{\partial x} V\left(x, \{x_l\}^s\right)\frac{d}{dx} f(x)\right\rangle ds \\ + \frac{1}{N}\int_0^t \frac{\sigma^2}{2}\left\langle \{x_l\}^s, \frac{d^2}{dx^2} f(x)\right\rangle ds \\ + \frac{1}{N}\int_0^t \sigma \sum_i \frac{d}{dx} f\left(x_i^s\right) dW_i^s \end{aligned} \quad \text{(A.9)}$$

Lorsque N est grand et que l'on fait l'hypothèse d'une convergence de l'état du système vers une fonction de densité, on est conduit à poser :

$$\frac{1}{N}\left\langle \{x_l\}^t, f\right\rangle \approx \int_{\mathbb{R}} f(x)\rho^t(x)\,\delta x$$

et

$$V\left(x, \{x_l\}^t\right) \approx v^t(x) \text{ où } v^t(x) = \int_{\mathbb{R}} d(x,\xi)\rho^t(\xi)\,\delta\xi$$

Appliquées à l'équation (A.9), après élimination du terme martingale négligeable, les assimilations précédentes conduisent à :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x)\rho^t(x)\,\delta x = \int_{\mathbb{R}} f(x)\rho^0(x)\,\delta x \\ - \int_0^t \alpha\left\{\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} v^s(x)\frac{d}{dx} f(x)\rho^s(x)\,\delta x\right\} ds \\ + \int_0^t \frac{\sigma^2}{2}\left\{\int_{\mathbb{R}} \frac{d^2}{dx^2} f(x)\rho^s(x)\,\delta x\right\} ds \end{aligned} \quad \text{(A.10)}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

L'intégration par partie des termes d'interaction et de diffusion transforme (A.10) en :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\rho^t(x)\,\delta x = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\rho^0(x)\,\delta x + \int_0^t \alpha \left\{ \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho^s(x) \frac{\partial}{\partial x} v^s(x) \right] \delta x \right\} ds + \int_0^t \frac{\sigma^2}{2} \left\{ \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho^s(x)\,\delta x \right\} ds \quad \text{(A.11)}$$

L'équation (A.11) est valable pour toute fonction f ayant les propriétés requises par la formule d'Itô. La dérivation par rapport au temps puis l'élimination de $f(x)$ conduisent alors à :

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho^t(x) = +\alpha \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \rho^t(x) \frac{\partial}{\partial x} v^t(x) \right\} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho^t(x) \quad \text{(A.12)}$$

Pour quitter la description du système en termes de parcours angulaires et revenir à une description en termes d'orientations, posons :

$$u^t(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \rho^t(x + 2k\pi)$$

Cette nouvelle fonction est définie pour tout x car la fonction ρ^t solution de (A.12) reste à chaque instant à support borné[56] . Elle est 2π périodique. Sa valeur pour tout $x = \theta + 2k\pi$ avec $\theta \in [-\pi, +\pi[$ *est la densité des agents possédant à l'instant t l'orientation* θ, quel qu'ait été leur parcours angulaire les ayant amené à cette orientation.

Le caractère également 2π périodique de la fonction v^t fait que l'équation contrôlant la dynamique u^t est identique à celle contrôlant ρ^t.

$$\frac{\partial}{\partial t}u^t(x) = +\alpha \frac{\partial}{\partial x} \left\{ u^t(x) \frac{\partial}{\partial x} v^t(x) \right\} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u^t(x)$$

En remplaçant $v^t(x)$ par son expression comme intégrale des distances $d\left(x, x'\right)$ et en prenant en compte la valeur limite de ces dernières, on aboutit à la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t}u^t(x) = -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \alpha u^t(x) \left[\int_{x'=x}^{x'=x+\pi} u^t\left(x'\right) dx' - \int_{x'=x-\pi}^{x'=x} u^t\left(x'\right) dx' \right] \right\} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} u^t(x) \right\}$$

56. Cela traduit le fait qu'aucun agent ne peut avoir parcouru un parcours angulaire infini en un temps fini.

que l'on peut écrire aussi en remplaçant x par θ, compte tenu de la signification de la fonction u^t.

A.3.4 Réduction d'une dynamique de polarisation : dynamique de la fonction d'énergie (§ 10.2.6)

Considérons à nouveau le modèle agent d'une dynamique de polarisation présenté au chapitre 8. L'évolution de la fonction d'énergie $H\left(\{x_l\}^t\right)$ est donnée par l'équation suivante, obtenue par application de la formule d'Itô aux équations stochastiques du système :

$$dH\left(\{x_l\}^t\right) = -\alpha \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} H\left(\{x_l\}^t\right)\right)^2 dt + \frac{\sigma^2}{2} \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} H\left(\{x_l\}^t\right) dt + \sigma \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} H\left(\{x_l\}^t\right) dW_i^t$$

Considérons une séquence de la trajectoire du système pendant laquelle les conditions suivantes restent vérifiées :

$$\forall i, j \quad \pi - \varepsilon \gg |x_i, x_j| \gg \varepsilon$$

Une telle séquence s'observe lorsque la dynamique de polarisation a conduit le système dans un état où l'écart angulaire entre les deux agents extrêmes est au plus π, sans que les agents soient encore trop proches les uns des autres. Nous avons alors :

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i} d\left(x_i, x_j\right)\right| \approx 1 \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} d\left(x_i, x_j\right) \approx 0 \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} d\left(x_i, x_j\right) \approx 0$$

Il s'en suit :

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} H\left(\{x_l\}^t\right) \approx 0 \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} H\left(\{x_l\}^t\right) \approx 0 \quad \frac{d}{dt} \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} H\left(\{x_l\}^t\right)\right)^2 \approx 0$$

La dynamique de H au cours d'une telle séquence se réduit bien à :

$$dH(t) \approx -\alpha C dt + \sigma \sqrt{C} dW^t$$

C dont l'expression est :

$$C = \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} H\left(\{x_l\}^t\right)\right)^2$$

restant alors constant.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

La valeur de cette constante se calcule en se rappelant que dans les conditions de cette séquence, nous avons :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} H\left(\{x_l\}^t\right) = -\frac{\nu_i^t - \mu_i^t}{N}$$

Toujours dans les conditions de la séquence, toutes les orientations des agents peuvent être repérées après translation adéquate sur un intervalle $[0, \pi[$ et permettent de trier les agents selon l'ordre dans lequel ils sont alors placés sur cet intervalle. Soit alors $k(i) - 1 \leqslant k(i) \leqslant N$– rang de l'agent i dans cette succession. On a :

$$\begin{aligned} -\frac{\nu_i - \mu_i}{N} &= -\frac{v_{k(i)} - \mu_{k(i)}}{N} \\ &= -\frac{[N - k(i)] - [k(i) - 1]}{N} \\ &= -\frac{N - 2k(i) + 1}{N} \end{aligned}$$

$\frac{\partial}{\partial x_i} H\left(\{x_l\}^t\right)$ prend donc toutes les valeurs de type $-\frac{N - 2k + 1}{N}$ avec $k \in [1, ..., N]$.
Nous avons donc :

$$C = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{N - 2k + 1}{N}\right)^2$$

A.3.5 Réduction d'une dynamique de polarisation : des équations différentielles stochastiques à l'équation de Fokker Planck (§ 10.2.6)

Le passage d'un système d'équations différentielles stochastiques à l'équation de Fokker Planck associée est classique et abondamment traité dans la littérature concernant les processus de diffusion. Il ne s'agit ici que d'introduire ce passage de façon intuitive, dans la perspective de son application aux modèles à base d'agents.

Considérons les équations différentielles stochastiques de la dynamique de polarisation prise comme exemple.
Pour tout agent i :

$$\begin{aligned} dx_i^t &= -\alpha \frac{\partial}{\partial x} V\left(x_i^t, \{x_l\}^t\right) dt + \sigma dW_i^t \\ &= -\alpha \frac{\partial}{\partial x_i} H\left(\{x_l\}^t\right) dt + \sigma dW_i^t \end{aligned}$$

que l'on peut écrire « vectoriellement » :

$$d\{x_l\} = -\alpha \nabla H\left(\{x_l\}^t\right) dt + \sigma dW^t$$

a) Équation maîtresse sur une configuration d'agents

Considérons : $P\left(\{x_l\}^t = \{x_l\} \middle| \{x_l\}^{t_0} = \{x_l\}^0\right) \delta\{x_l\}$ ou de façon simplifiée $P^t\left(\{x_l\}\right) \delta\{x_l\}$ la probabilité que le système d'agents soit à l'instant t dans un certain voisinage (de volume) $\delta\{x_l\}$ autour de la configuration $\{x_l\}$, sachant que la configuration initiale était $\{x_l\}^0$. $P^t\left(\{x_l\}\right)$ est la *densité de probabilité* au voisinage de $\{x_l\}$.

La dynamique de l'état du système engendrée par les équations du modèle est une dynamique markovienne[57] : dans la détermination des évolutions possibles à partir d'un instant quelconque le passé n'intervient que par l'intermédiaire de l'état effectif du système à cet instant. L'équation contrôlant la dynamique des probabilités d'états s'appelle alors *l'équation maîtresse*. On peut l'écrire :

$$P^{t+\Delta t}\left(\{x_l\}\right) \delta\{x_l\} = \int \left[\left(W^{t,t+\Delta t}\left(\{x_l\} \middle| \{x_l\}'\right) \delta\{x_l\}\right) P^t\left(\{x_l\}'\right)\right] \delta\{x_l\}'$$

soit en éliminant le volume du voisinage $\delta\{x_l\}$ de l'état $\{x_l\}$

$$P^{t+\Delta t}\left(\{x_l\}\right) = \int \left[W^{t,t+\Delta t}\left(\{x_l\} \middle| \{x_l\}'\right) P^t\left(\{x_l\}'\right)\right] \delta\{x_l\}'$$

la somme étant faite sur tous les états du système $\{x_l\}'$ possibles.

Dans cette équation $W^{t,t+\Delta t}\left(\{x_l\} \middle| \{x_l\}'\right) \delta\{x_l\}$ est la probabilité de voir le système passer, dans l'intervalle de temps considéré Δt, de l'état $\{x_l\}'$à un état situé dans le voisinage (de volume) $\delta\{x_l\}$ de $\{x_l\}$. Notons bien que $W^{t,t+\Delta t}\left(\{x_l\} \middle| \{x_l\}'\right)$ est également une densité de probabilité, puisqu'il faut la multiplier par le volume d'un voisinage pour obtenir une probabilité. L'expression de cette fonction à partir d'un modèle agent est évidemment cruciale pour l'écriture de l'équation maîtresse de ce modèle. Pour la classe générale des processus de diffusion dont ressort notre exemple, les conditions d'existence de ces densités de probabilités de transitions sont bien établies.

L'équation maîtresse peut également s'écrire :

$$P^{t+\Delta t}\left(\{x_l\}\right) = \int \left[W^{t,t+\Delta t}\left(\{x_l\} \middle| \{x_l - \Delta x_l\}\right) P^t\left(\{x_l - \Delta x_l\}\right)\right] \delta\{\Delta x_l\}$$

$\Delta\{x_l\}$ représentant un changement d'état entre l'instant t et l'instant $t + \Delta t$, l'intégrale étant prise sur tous les changements d'états possibles.

57. Très exactement on démontre que sous certaines conditions, la solution d'un système d'équations différentielles stochastiques est un processus de diffusion, classe particulière de processus de Markov, et que réciproquement, un processus de diffusion peut être considéré comme solution d'un système d'équations différentielles stochastiques.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

b) Équation de Fokker Planck à « N corps »

Une approximation de l'équation maîtresse est l'équation de Fokker Planck[58]. Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles donnant sur un temps continu l'évolution des densités de probabilités. Pour l'obtenir, on effectue d'abord un développement de Taylor — centré sur $\{x_l + \Delta x_l\}$— du terme sous l'intégrale dans l'expression précédente de l'équation maîtresse. Ce développement prend donc la forme :

$$W^{t,t+\Delta t}\left(\{x_l\}\,|\{x_l - \Delta x_l\}\right) P^t\left(\{x_l - \Delta x_l\}\right) = W^{t,t+\Delta t}\left(\{x_l + \Delta x_l\}\,|\{x_l\}\right) P^t\left(\{x_l\}\right)$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \times$$
$$\sum_{l_1,\ldots,l_k,\ldots,l_n} \Delta x_{l_1} \ldots \times \Delta x_{l_2}, \ldots \times \Delta x_{l_n} \frac{\partial^n}{\partial x_{l_1} \ldots, \partial x_{l_k}, \ldots, \partial x_{l_n}} \left[W^{t,t+\Delta t}\left(\{x_l + \Delta x_l\}\,|\{x_l\}\right) P^t\left(\{x_l\}\right)\right]$$

Puis on fait tendre Δt vers 0.

En posant (moments d'ordre n de la loi de probabilités des transitions) :

$$M^n_{l_1,\ldots,l_2,\ldots,l_n}\left(\{x_l\}\right)$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{n!} \frac{1}{\Delta t} \int \Delta x_{l_1} \ldots \times \Delta x_{l_k} \ldots \times \Delta x_{l_n} W^{t,t+\Delta t}\left(\{x_l + \Delta x_l\}\,|\{x_l\}\right) \delta\Delta\,\{x_l\}$$

la somme étant faite sur toutes les modifications $\Delta\,\{x_l\}$ dont la probabilité $W^{t,t+\Delta t}$ n'est pas nulle, on obtient l'équation suivante contrôlant l'évolution des densités de probabilité à l'instant t pour l'ensemble des états possibles $\{x_l\}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} P^t\left(\{x_l\}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sum_{l_1,\ldots,l_k,\ldots,l_n} \frac{\partial^n}{\partial x_{l_1} \ldots \partial x_{l_k} \ldots \partial x_{l_n}} \left[M^n_{l_1,\ldots,l_2,\ldots,l_n}\left(\{x_l\}\right) P^t\left(\{x_l\}\right)\right]$$

Puis on limite ce développement[59] à l'ordre 2 pour obtenir l'équation de Fokker Planck.

c) Application à la dynamique de polarisation

Dans le cas étudié, il faut donc calculer les moments d'ordre 1 et d'ordre 2 de la loi contrôlant les transitions. À savoir :

$$M^1_i\left(\{x_l\}\right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int (\Delta x_i)\, W^{t,t+\Delta t}\left(\{x_l + \Delta x_l\}\,|\{x_l\}\right) \delta\Delta\,\{x_l\}$$
$$M^{ii}_2\left(\{x_l\}\right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta t} \int (\Delta x_i)^2\, W^{t,t+\Delta t}\left(\{x_l + \Delta x_l\}\,|\{x_l\}\right) \delta\Delta\,\{x_l\}$$
$$M^{ij}_2\left(\{x_l\}\right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta t} \int \left(\Delta x_i \Delta x_j\right) W^{t,t+\Delta t}\left(\{x_l + \Delta x_l\}\,|\{x_l\}\right) \delta\Delta\,\{x_l\}$$

58. Ici équation de Fokker Planck multi-dimensionnelle (Many body Fokker Planck equation).
59. Développement de Kramers Moyal.

Une manière intuitive de calculer ces moments est de poser :

$$\Delta x_i \approx -\alpha \frac{\partial}{\partial x_i} H\left(\{x_l\}\right) \Delta t + \sigma \Delta W_i\left(\{\Delta x_l\}\right)$$
$$\Delta x_j \approx -\alpha \frac{\partial}{\partial x_j} H\left(\{x_l\}\right) \Delta t + \sigma \Delta W_j\left(\{\Delta x_l\}\right)$$

où $\Delta W_i\left(\Delta\{x_l\}\right)$ est la modification de la variable aléatoire affectant le parcours angulaire de l'agent i lors de la transition $\Delta\{x_l\}$. En substituant ces expressions dans les moments, et en se rappelant que :

- l'espérance des ΔW_i, sur l'ensemble des réalisations partant de l'état $\{x_l\}$, est nulle ;
- que les ΔW_i et les ΔW_j sont des variables aléatoires *indépendantes*, et donc que l'espérance de leur produit sur l'ensemble des réalisations est également nulle ;
- que la variance des ΔW_i est $\sigma^2 \Delta t$.

On obtient :

$$M_i^1\left(\{x_l\}\right) = -\alpha \frac{\partial}{\partial x_i} H\left(\{x_l\}\right)$$
$$M_{ij}^2\left(\{x_l\}\right) = 0 \text{ lorsque } i \neq j$$
$$M_{ii}^2\left(\{x_l\}\right) = \frac{\sigma^2}{2}$$

On démontrerait de même que les moments d'ordre 3 (et supérieurs) sont nuls
En reportant ces expressions des moments dans l'équation générale, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} P^t\left(\{x_l\}\right) = \alpha \left[\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} H\left(\{x_l\}\right) P^t\left(\{x_l\}\right) + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} H\left(\{x_l\}\right) \frac{\partial}{\partial x_i} P^t\left(\{x_l\}\right) \right] + \frac{\sigma^2}{2} \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} P^t\left(\{x_l\}\right)$$

Notons bien que cette équation représente toujours une reformulation des équations stochastiques initiales. Les agents restent explicitement représentés, chacun d'eux étant associé à l'une des composantes de la configuration $\{x_l\}$. Cette équation exprime des courants de probabilités dans l'espace des états du système.

Notons qu'un autre calcul peut être conduit à travers l'expression explicite des densités $W^{t,t+\Delta t}\left(\{x_l + \Delta x_l\} | \{x_l\}\right)$. La nature du vecteur dW^t comme vecteur de variables gaussiennes indépendantes amène en effet à écrire (vectoriellement) :

$$W^{t,t+\Delta t}\left(\{x_l + \Delta x_l\} | \{x_l\}\right) \approx \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma\sqrt{\Delta t}}\right)^N \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2 \Delta t}\left[\left(\Delta\{x_l\}\right) + \alpha \nabla H\left(\{x_l\}\right) \Delta t\right]^2\right)$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

On peut alors développer en tenant compte que Δt est petit et donc que les termes en $\left(\alpha \frac{\partial}{\partial x_i} H\left(\{x_l\}\right)\right)^2$ disparaissent. L'intégration est possible et on retrouve l'expression des moments donnée ci-avant.

A.3.6 Générateur infinitésimal de la combinaison d'un processus de branchement et d'un processus de diffusion (§ 10.3.3 et références associées)

Les considérations suivantes, qui viennent en appui du modèle multi-agents, combinant processus de diffusion et processus de branchement, exposé au chapitre 10, sont très largement inspirés de la thèse de Nadja El saadi « Modélisation et études mathématique et informatique de populations structurées par des variables aléatoires. Application à l'agrégation du phytoplancton » et des articles associés. Nous n'avons fait ici qu'exposer le principe des développements analytiques, et les adapter aux notations utilisées dans l'ouvrage.

On considère un système d'agents dont la dynamique des états $\{x_l\}^t$ est contrôlée par un processus de diffusion :

$$dx_i^t = -\alpha \frac{\partial}{\partial x} V\left(x_i^t, \{x_l\}^t\right) dt + \sigma dW_i^t$$

et un processus de branchement amenant les agents, à des instants aléatoires contrôlés par une loi de Poisson d'intensité μ, à probabilité égale à se diviser ou à disparaître.

Pour combiner les deux processus, on s'attache d'abord à l'étude du générateur infinitésimal de résumés de la forme :

$$F\left(\{x_l\}^t\right) = \prod_i \psi\left(x_i^t\right) = \exp\left(\left\langle \{x_l\}^t, \ln \psi \right\rangle\right)$$

avec ψ fonction continue et positive sur $\mathbb{R}$.

Soit ainsi F une de ces fonctions, $F\left(\{x_l\}^t\right)$ sa valeur sur un état donné du système, et $E\left[F\left(\{x_l\}^{t+\Delta t}\right) \middle| \{x_l\}^t\right]$ la moyenne des valeurs à l'instant $t + \Delta t$ sur l'ensemble des trajectoires issues de l'état $\{x_l\}^t$.

Des théorèmes permettent alors d'établir les points suivants :

L'expression $\dfrac{E\left[F\left(\{x_l\}^{t+\Delta t}\right) \middle| \{x_l\}^t\right] - F\left(\{x_l\}^t\right)}{\Delta t}$ tend vers une limite lorsque Δt tend vers 0 par valeurs décroissantes ; l'opérateur permettant de passer de F à cette limite est le *générateur infinitésimal* du processus pour l'ensemble des fonctions considérées. Il est noté $\mathcal{L}$ et vérifie par définition :

$$\mathcal{L}F\left(\{x_l\}^t\right) = \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{E\left[F\left(\{x_l\}^{t+\Delta t}\right) \middle| \{x_l\}^t\right] - F\left(\{x_l\}^t\right)}{\Delta t}$$

Ce générateur $\mathcal{L}$ est la *somme* de deux générateurs infinitésimaux $\mathcal{L}_B$ et $\mathcal{L}_D$ respectivement associés au processus de branchement et au processus de diffusion, *considérés séparément*. On connaît l'expression analytique de chacun d'eux.

L'existence de ce générateur et la connaissance de son expression permettent de poser une équation contrôlant l'espérance mathématique de la variation de valeur de $F\left(\{x_l\}^t\right)$ sur un petit intervalle de temps dt et indiquant donc comment cette valeur va évoluer en moyenne dans un futur proche :

$$E\left[dF\left|\{x_l\}^t\right.\right] = \mathcal{L}F\left(\{x_l\}^t\right)dt$$

La dynamique des écarts $M^t(F) = F\left(\{x_l\}^t\right) - F\left(\{x_l\}^0\right) - \int_0^t \mathcal{L}F\left(x_*^s\right)\delta s$ est une dynamique stochastique markovienne se développant dans $\mathbb{R}$ et possédant les propriétés martingales. En particulier son espérance mathématique est nulle.

Les expressions des générateurs sont données par les formules suivantes :

Pour le processus de branchement :

$$\mathcal{L}_B F\left(\{x_l\}\right) = \left\langle \{x_l\}, (x)\, \frac{\mu\left[\Phi\left(\psi(x)\right) - \psi(x)\right]}{\psi(x)} \right\rangle \exp\left(\left\langle \{x_l\}, (x) \log \psi(x) \right\rangle\right)$$

avec $\Phi(a) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}a^2$, fonction caractéristique de la loi de probabilité de reproduction.

Pour le processus de diffusion :

$$\mathcal{L}_D F\left(\{x_l\}\right) = \left\langle \{x_l\}, (x)\, \frac{\left[\mathcal{L}_d\left(\{x_l\}\right)\psi\right](x)}{\psi(x)} \right\rangle \exp\left(\left\langle \{x_l\}, (x) \log \psi(x) \right\rangle\right)$$

avec $\mathcal{L}_d$ opérateur correspondant au processus de diffusion d'un seul agent, défini par :

$$\left[\mathcal{L}_d\left(\{x_l\}\right)\psi\right](x) = -\alpha \frac{\partial}{\partial x} V\left(x, \{x_l\}\right) \frac{d}{dx}\psi(x) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)$$

La mise en place de ces expressions dans celle de $M^t(F)$ avec une fonction ψ ayant pour forme :

$$\psi(x) = \exp(-\lambda f(x))$$

puis dérivation par rapport à λ mène à conclure :

- que le processus résiduel :

$$M^t(f) = \left\langle \{x_l\}^t, f \right\rangle - \left\langle \{x_l\}^0, f \right\rangle - \int_0^t \left\langle \{x_l\}^s, -\alpha \frac{\partial}{\partial x} V\left(x, \{x_l\}^s\right) \frac{d}{dx} f(x) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{d^2}{dx^2} f(x) \right\rangle ds$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

possède les propriétés martingales (en particulier, espérance nulle). C'est la dérivation par rapport à λ qui permet d'éliminer l'intervention explicite du terme factorisé par μ et lié au processus de branchement.

- que son processus de variation quadratique (le cumul du carré de ses variations entre l'instant initial et l'instant courant) est donné par :

$$\int_0^t \left\langle \{x_l\}^s, (x) \left[\sigma^2 \left(\frac{d}{dx} f(x) \right)^2 + 2\mu \frac{\Phi(\exp(-f(x)) - \exp(-f(x)))}{\exp(-f(x))} \right] \right\rangle ds$$

C'est la présence du terme factorisé par μ dans cette expression — alors que, on le remarquera, le terme d'interaction a disparu — qui entraîne après normalisation la non-disparition de fluctuations aléatoires locales dans l'équation contrôlant l'évolution de la densité, lorsque le nombre d'agents devient très grand.

Bibliographie

ADIOUI, M. B., O. ARINO, W. V. SMITH et J.-P. TREUIL (2003). *A mathematical analysis of a fish school model*. Journal of Differential Equations 188(2) : 406-446.

ADIOUI, M. b., J.-P. TREUIL et O. ARINO (2003). *Alignment in a fish school : a mixed Lagrangian-Eulerian approach*. Ecological Modelling(167) : 19-32.

AMADEU, A. J. et D. F. NOBRE (1997). *Damage spreading in the fully frustrated square-lattice Ising model*. Physica A(243) : 58-66.

ASLANGUL, C. (2006). *(Cours) Physique Statistique des Fluides Classiques* (NP 116). Paris université Pierre et Marie Curie : 150 p.

AUGER, P. et R. BRAVO de la Parra (2000). *Methods of aggregation of variables in population dynamics*. CR Académie des Sciences de la Vie 323(8) : 665-674.

BARRETEAU, O., P. D'AQUINO, F. BOUSQUET et C. LE PAGE (2001). *Le jeu de rôles à l'interface entre systèmes réel et virtuel pour la gestion de ressources renouvelables*. Exemples d'application au Sénégal. *Actes du séminaire international sur les Zones Inter-Tropicales humides*, Bamako, Mali, IRD éditions colloques et séminaires

BAUER, B., J.-P. MÜLLER et O. J. (2001). *Agent UML : A Formalism for Specifying Multiagent Interaction*. Agent-Oriented Software Engineering, Springer : 91-103

BEN SAID, L. (2003). *Simulation Multi-Agents des Comportements des Consommateurs dans un Contexte Concurrentiel*. Laboratoire d'Informatique de Paris VI. Paris, Thèse de doctorat, université Pierre et Marie Curie : 182 p.

BERNSTEIN, D. S., R. GIVAN, N. IMMERMAN et S. ZILBERSTEIN (2002). *The complexity of Decentralized Control of Markov Decision Processes*. Mathematics of operations Research 27(4) : 819-840.

BOISSEAU, S. (2005) *Co-evolution of a research question and methodological development : an example of companion modeling in northern Vietnam*. F. Bousquet & G. Trebuil (eds.) Companion modeling and multi-agent systems for integrated natural resources management in Asia. Metro Manila, IRRI editions

BONABEAU, E. et G. THÉRAULAZ (1994). *Intelligence Collective*. Paris, Hermès : 288 p.

BOUSQUET, F., R. LIFRAN, M. TIDBALL, S. THOYER et M. ANTONA (2001) *Agent-based modelling, game theory and natural resource management*. Journal of Artificial Societies and Social Simulation 4(2), 20 p.

BRETON, L. (2002). *GranuLab : un système d'aide à la découverte scientifique pour la physique des milieux granulaires*. Informatique, télécommunications et électronique. Paris, Thèse de doctorat, université Pierre et Marie Curie : 193 p.

BRETON, L., P. CLAUDIN, E. Clément et J. D. Zucker (2002). *Stress Response Function to two-dimensional ordered packing of frictional beads*. Europhysics Letter 60(6) : 813-819.

BRETON, L., J. D. ZUCKER et E. CLÉMENT (1999). *Une approche multi-agents pour la résolution d'équations en physique des milieux granulaires*. Journées Francophones de L'Intelligence Artificielle Distribuée et des Systèmes multi-agents. La Réunion, France, Hermès : 281-293

BRETON, L., J. D. ZUCKER et E. CLÉMENT (2000). A *multi-agent based simulation of sand piles in a static equilibrium*. Multi-Agent Based Simulation Workshop. 1979 : 108-118.

BRETON, L., J.-D. ZUCKER et E. CLÉMENT (2000). *Un laboratoire virtuel d'expérimentations pour la physique des milieux granulaires*. Paris, RFIA'2000 : 599-606

BRONSHTEIN, I. N., K. A. SEMENDYAYEV, G. MUSIOL et H. MUEHLIG (2003). *Handbook of Mathematics*, 4 th Ed. Springer, 1153 p.

BUONSANTE, P., R. BURIONI, D. CASSI and A. VEZZANI (2002). *Diffusive thermal dynamics for the Ising ferromagnet*. Physical Review E 66(036121).

CAPASSO, V. et D. BAKSTEIN (2005). *An introduction to Continuous-Time Stochastic Processes. Theory, Models, and Applications to Finance, Biology, and Medecine*. Boston, Birkhaüser, 343 p.

CASTLE, C. J. E. and A. T. CROOKS (2006). *Principles and concepts of agent-based modelling for developing geospatial simulations*. Centre for Advanced Spatial Analysis (University College London) UK : Working paper 121.

CHAMPAGNAT, N. (2006). *A microscopic interpretation for adaptative dynamics trait substitution sequence models*. Stochastic processes and their applications 116 : 1127-1160.

CHAMPAGNAT, N., R. FERRIÈRE et S. MÉLÉARD (2006). *Unifying evolutionary dynamics : From individual stochastic processes to macroscopic models*. Theoretical Population Biology 69(3) : 297-321.

CLAUS, C. et C. BOUTILIER (1998). *The dynamics of reinforcement learning in cooperative multi-agent systems*. Proceedings of the Fifteenth National Conference on Artificial Intelligence, Menlo Park, CA ,AAAI Press : 746-752.

D'AQUINO, P. (2002). *Accompagner une maîtrise ascendante des territoires - Prémices d'une géographie de l'action territoriale* Marseille, université de Provence, Aix-Marseille I. Habilitation à diriger des recherches : 342 p.

DARBOUX, F., P. DAVY et C. GASCUEL-ODOUX (2002). *Effect of depression storage capacity on overland-flow generation for rough horizontal surfaces : Water transfer distances and scaling*. Earth Surface Processes and Landforms 27(2) : 177-191.

DENNETT, D. C. (1991). *Consciousness explained*, Little, Brown and Company : 528 p.

DIECKMANN, U. et R. LAW (2000). *Relaxation Projections and the Method of Moments. The Geometry of Ecological Interactions. Simplifying Spatial Complexity*. U. Dieckman, R. Law and J. A. J. Metz, Cambridge University Press : 412-455.

DIECKMANN, U., R. LAW et J. A. J. METZ, Eds. (2000). *The Geometry of Ecological Interactions. Simplifying Spatial Complexity*. Cambridge Studies in Adaptative Dynamics, Cambridge University Press : 580 p.

DROGOUL, A. (1993). *De la Simulation multi-agents à la résolution collective de problèmes*. Laboratoire LAFORIA. Paris, Thèse de doctorat, université Pierre et Marie Curie : 437 p.

DROGOUL, A. and A. COLLINOT (1997). Entre réductionisme méthodologique et stratégie intentionnelle, l'éthologie, un modèle alternatif pour l'I.A.D. ? JFIADSMA'97, Hermès : 307-322.

DROGOUL, A. and D. FRESNEAU (1998). Métaphore du fourragement et modèle d'exploitation collective de l'espace pour des colonies de robots autonomes mobiles. JFIADSMA'98, Pont-A-Mousson, France, Hermes : 16 p.

DROGOUL, A., D. VANBERGUE et T. MEURISSE (2003). *Multi-agent Based Simulation : Where Are the Agents ? Multi-Agent-Based Simulation II*. Berlin / Heidelberg, Springer. 2581/2003 : 43-49.

EL HADOUAJ, S. (2004). *Conception de comportements de résolution de conflits et de coordination : Application à une simulation multi-agents du trafic routier*. LIP6. Paris,Thèse de doctorat, université Pierre et Marie Curie.

EL SAADI, N. (2004). *Modélisation et études mathématiques et informatique de populations structurées par des variables aléatoires. Application à l'agrégation du phytoplancton*. Mathématiques Appliquées. Pau, Thèse de doctorat, université de Pau et des Pays de l'Adour. : 192 p.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

EPSTEIN, J. M. et R. W. AXTELL (1996). *Growing Artificial Societies : Social Science from the Bottom Up*. Boston, Brookings Institution Press and MIT Press : 228 p.

ESPIÉ, S. (2005). *Driving simulators : foundations, uses and limitations. Workshop Research applications and market perspectives of driving simulators and instrumented vehicles*, Naples, Italie.

FANNADER, R. (1999). *UML, Principes de modélisation*. Paris, Dunod : 304 p.

FERBER, J. (1995). *Les Systèmes multi-agents : Vers une intelligence collective*. Paris, InterEditions : 522 p.

FERBER, J., O. GUTKNECHT et M. F. (2003). *From Agents to Organizations : an Organizational View of MultiAgent Systems*. Agent-Oriented Software Engineering (AOSE) IV, Melbourne, LNCS Springer : 185-202.

FIPA. (2007). *Standard Status Specifications*. from http://www.fipa.org/repository/standardspecs.html.

FOURNIER, N. et S. MÉLÉARD (2004). « A microscopic probabilistic description of a locally regulated population process. » Ann.Appl.Probab. 14 : 1880-1919.

FRIGG, R. et S. HARTMANN (2005). *Scientific models*. The philosophy of Science : An encyclopedia. S. Sarkar et al, eds. London, Routledge : 740-749.

GALLER, H. P. et M. University of Canberra National Centre for Social and Economic (1997). *Discrete-time and Continuous-time Approaches to Dynamic Microsimulation Reconsidered*, National Centre for Social and Economic Modelling.

GARCIA, F. (2001). *Apprentissage par renforcement : Introduction. (Tutoriel)*, INRA, unité de biométrie et intelligence artificielle, Castanet Tolosan : 52 p.

GARCIA, F. (2001). *Apprentissage par Renforcement : Méthodes. (Tutoriel)*, INRA, unité de biométrie et intelligence artificielle. Castanet-Tolosan : 59 p.

GARCIA, F. (2001). *Apprentissage par renforcement : Systèmes multi-agents. (Tutoriel)*, INRA, unité de biométrie et intelligence artificielle. Castanet Tolosan : 28 p.

GILBERT, N. et K. G. TROITZSCH (2005). *Simulation for the Social Scientist*, 2nd edition Maidenhead : Open University Press : 312 p.

GLENNAN, S. (2005). *Modeling Mechanisms*. Studies in the History and Philosophy of the Biological and Biomedical Sciences 2(36) : 375-388.

GOLDMAN, C. V.et S. ZILBERSTEIN (2004). *Decentralized Control of Cooperative Systems : Categorization and Complexity Analysis*. Journal of Artificial Intelligence Research(22) : 143-174.

GOREAUD, F. et P. COUTERON (2006). *(Tutoriel) Les processus ponctuels : un outil pour décrire et modéliser la structure spatiale d'ensemble de points*. Application aux peuplements forestiers. Clermont, Cemagref : 72 p.

GOUAICH, A., Y. GUIRAUD et M. FABIEN (2003). *Mic* : An agent formal environnement*. 7th World Multiconference on Systemics, Cybernetics and Informatics (SCI 2003), Orlando USA.

GREENSHIELD, B. D. (1935). *A Study of Traffic Capacity*. Highway Research Board Proceedings 14 : 448-477.

GRIMM, V. et S. RAILSBACK (2005). *Individual-based Modeling and Ecology*, Princeton University Press : 480 p.

GRÜNBAUM, D. (1998). *Schooling as a strategy for taxis in a noisy environment*.. Evolutionary Ecology(12) : 503-522.

GRÜNBAUM, D. et A. OKUBO (1994). *Modelling social animal aggregations. Frontiers in Theoretical Biology*. A. A. Levin ed, Springer. 100 : 296-325.

GUÉRIN-PACE, F., H. MATHIAN, D. PUMAIN, L. SANDERS et S. BURA (1996). *Les systèmes multi-agents pour modéliser l'émergence des systèmes urbains*. L'analyse spatiale de données biodémographiques, Libbey, Ined : 281-309.

HEMELRIJK, C. K. (2000). *Towards the integration of social dominance and spatial structure*. Animal Behaviour 59 : 1035-1048.

HEMELRIJK, C. K. (2002). *Despotic Societies, Sexual Attraction and The Emergence of Male "Tolerance" : An Agent-Based Model.* Behaviour 139 : 729-747.

HEMELRIJK, C. K., J. WANTIA et D. MARC (2004). *Female C0-Dominance in a Virtual World : Ecological, Cognitive, Social and Sexual Causes*. Behaviour 140 (1247-1273).

HOGEWEG, P. (1988). *MIRROR beyond MIRROR, puddles of LIFE*. Artificial life, SFI studies in the sciences of complexity. C. Langton. Redwood City, CA, Adisson-Wesley Publishing Co. : 297-316.

HUGGETT, J., P. FREON, C. MULLON et P. PENVEN (2003). *Modelling the transport success of anchovy Engraulis encrasicolus eggs and larvae in the southern Benguela : the effect of spatio-temporal spawning patterns*. Marine Ecology Progress Series 250 : 247-262.

JAISSON, P. (1993). *La fourmi et le sociobiologiste*. Paris, Odile Jacob : 315 p.

KAUFFMAN, S. A. (1989). *Adaptation on Rugged Fitness Landscapes*. Lectures in The Sciences of Complexity. D. L. Stein, Addison-Wesley Publishing Company : 527-618.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

KAUFFMAN, S. A. (1989). *Principles of Adaptation in Complex Systems*. Lectures in the Sciences of Complexity. D. L. Stein, Addison-Wesley Publishing Company : 619-712.

KOESTLER, A. (1967). *The ghost in the machine*. London, Arkana : 400 p.

KOSTOVA, T., T. CARLSEN and J. KERCHER (2004). *Individual-based spatially-explicit model of an herbivore and its resource : the effect of habitat reduction and fragmentation*. C.R Biologies 327(3) : 261-276.

KREFT, J.-U., G. BOOTH and J. W. T. WIMPENY (1998). *Bacsim, a simulator for individual-based modelling of bacterial colony growth*. Microbiology 144 : 3275-3287.

KREFT, J.-U., C. PICIOREANU, J. W. T. WIMPENY et M. C. M. VAN LOOSDRECHT (2001). *Individual-based modelling of biofilms*. Microbiology 147 : 2897-2912.

LANGTON, C., Ed. (1995). *Artificial Life : An Overview*. Cambridge, MA, MIT Press : 340 p.

LARDON, L. (2001). *Modélisation des biofilms de digestion anaérobie par systèmes multi-agents*, École nationale supérieure agronomique - Montpellier : 79 p.

LECLERCQ, L. (2002). *Modélisation dynamique du trafic et applications à l'estimation du bruit routier*. Lyon, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon : 317 p.

LEE, C. T., M. F. HOOPES, J. DIELHL, W. GILLILAND, G. HUXEL, E. V. LEAVER, K. MCCANN, J. UMBANHOWAR et A. MOGLINER (2001). *Non-local Concepts and Models in Biology*. Journal of Theoretical Biology(210) : 201-219.

LEONARD, J., E. PERRIER et G. de MARSILY (2001). *A model for simulating the influence of a spatial distribution of large circular macropores on surface runoff*. Water Resources Research 37(12) : 3217-3225.

LERMAN, K., A. GALSTYAN, A. MARTINOLI and A. JAN IJSPEERT (2001). *A macroscopic analytical model of collaboration in distributed robotic systems*. Artificial life : 375-393.

LESNE, A. (2003). *Approches multi-échelles en physique et en biologie. Laboratoire de Physique Théoriques des Liquides*, UMR 7600. Paris, université Pierre et Marie Curie. Habilitation à Diriger des Recherches : 330 p.

LETT, C., C. ROY, A. LEVASSEUR, C. D. VAN DER LINGEN et C. MULLON (2006). *Simulation and quantification of enrichment and retention processes in the southern Benguela upwelling ecosystem*. Fisheries Oceanography 15(5) : 363-372.

LIGHTHILL, M. J. et G. B. WHITHAM (1955). *On kinematic waves : II. a theory of traffic flow on long crowded roads*. Proceedings of the Royal Society 229(Series A) : 317-345.

LIU, G. R. and M. B. LIU (2003). *Smoothed Particle Hydrodynamics : A Meshfree Particle Method.* Singapore, World Scientific Publishing : 455 p.

LORENZ, K. (1981). *The Foundations of Ethology*, New York, Springer : 380 p.

LORENZ, K. (1984). *Les fondements de l'éthologie.* Paris, Flammarion : 430 p.

MARILLEAU, N. (2006). *Méthodologie, formalismes et outils de modélisation-simulation pour l'étude des systèmes complexes : application à la mobilité géographique.* Besançon, Thèse de doctorat, université de Franche-Comté : 163 p.

MAZZAG, B. C., I. B. ZHULIN et A. MOGILNER (2003). *Model of Bacterial Band Formation in Aerotaxis.* Biophysical Journal 85 : 3558-3574.

MEURISSE, T. (2004). *Simulation multi-agents : du modèle à l'opérationnalisation.* LIP6. Paris, Thèse de doctorat, université Pierre et Marie Curie.

MEURISSE, T. et D. VANBERGUE (2001). *Et maintenant, à qui le tour ? : aperçu de problématiques de conception de Simulations Multi-Agents.* Colloque ALCAA : Agents logiciels, coopération, apprentissage & activité humaine, Biarritz, France.

MOGILNER, A. et L. EDELSTEIN-KESHET (1996). *Spatio-angular order in populations of self-aligning objects : formation of oriented patches.* Physica D(89) : 346-367.

MOGILNER, A., L. EDELSTEIN-KESHET, L. BENT et A. SPIROS (2003). *Mutual Interactions, potentials, and individual distance in a social aggregation.* Journal of Mathematical Biology(47) : 353-389.

MONAGHAN, J. (1992). *Smoothed particle hydrodynamics.* Annu.Rev.Astron.Astrophys. 30 : 543-574.

MORIN, E. (1977). *La Méthode.* Tome 1 : La Nature de la nature, Ed. du Seuil : 399 p.

MOUSSA, R., M. VOLTZ et P. ANDRIEUX (2002). *Effects of the spatial organiszation of agricultural management on the hydrological behaviour of a farmed catchment during flood events.* Hydrological Processes 16(2) : 393-412.

MULLON, C., P. CURY et P. PENVEN (2002). *Evolutionary individual-based model for the recruitment of anchovy(Engraulis capensis) in the southern Benguela.* Canadian Journal of Fisheries and Aquatic Sciences 59(5) : 910-922.

NEWMAN, M.E.J. (2003). *The Structure and Functions of Complex Networks.* SIAM Review, 45(2) 167-256

NIWA, H.-S. (1996). *Newtonian Dynamical Approach to Fish Schooling.* Journal of Theoretical Biology(181) : 47-63.

PAQUET, S. (2004). DAMAS-Rescue web page, Online.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

PAQUET, S., N. BERNIER et B. CHAIB-DRAA (2004). *DAMAS-Rescue Description Paper*. Proceedings of RoboCup-2004 : Robot Soccer World Cup VIII, Springer Verlag, Berlin : 12 p.

PAQUET, S., L. TOBIN et B. CHAIB-DRAA (2005). *An online POMDP algorithm for complex multiagent environments*. Proceedings of the fourth international joint conference on Autonomous agents and multiagent systems : 970-977.

PARRISH, J. K. et W. M. HAMMER, Eds. (1997). *Animal Groups in Three Dimensions*, Cambridge University Press : 384 p.

PARUNAK, H. V. D., R. SAVIT et R. L. RIOLO (1998). *Agent-Based Modeling vs. Equation-Based Modeling : a Case Study and Users'Guide*. Multi-Agent Systems and Agent-Based Simulation. J. S. Sichman, R. Conte and N. Gilbert, Springer-Verlag : 16 p.

PICIOREANU, C., J.-U. KREFT et M. C. M. VAN LOOSDRECHT (2004). *Particle-Based Multidimensional Multispecies Biofilm Model*. Applied and Environnemental Microbiology : 3024-3040.

PICIOREANU, C., M. C. M. VAN LOOSDRECHT et HEIJNEN (1998). *A new combined differential-discrete cellular automaton approach for biofilm modeling : application for growth in gel beads*. Biotechnol. Bioeng. 57 : 718-731.

QIN, X. et J. L. BAER (1995). *A comparative study of conservative and optimistic trace-driven simulations*. Simulation Symposium, 1995. Proceedings of the 28th Annual : 42-50.

RAILSBACK, S., F., S. LYTINEN, L. and K. JACKSON STEPHEN (2006). *Agent-based Simulation Platforms : Review and Development Recommendations*. Simulation 82(9) : 609-623.

RICHARDS, P. I. (1956). *Shock waves on the highway*. Operations Research 4 : 42-51.

ROBERT, F. (1995). *Les systèmes dynamiques discrets*, Springer. Mathématiques et Applications : 296 p.

RUBIO PUZZO, L. et E. V. ALBANO (2002). *The role of interfaces in the propagation of damage in magnetic materials*. Journal of Magnetism and Magnetic Materials(241) : 110-117.

SCHWEITZER, F. (1997). *Active Brownian Particles : Artificial Agents in Physics. Stochastic Dynamics*. L. Schimansky-Geier and T. Pöschel. Berlin, Springer. 484 : 358-371.

SCHWEITZER, F. (2003). *Brownian Agents and Active particle, On the Emergence of Complex Behavior in the Natural and Social Sciences*. Springer : 420 p.

SCHWEITZER, F. et J. ZIMMERMANN (2001). *Communication and Self Organization in Complex Systems. Knowledge, Complexity and Innovation Systems*. M. M. Fischer and J. Fröhlich. Berlin, Springer : 275-296.

SERVAT, D. (1998). *When agents emerge from agents : Introducing multi-scale viewpoints in multi-agents simulations. Multi-agent systems and agent-based simulation*, Springer Verlag : 183-198.

SERVAT, D. (2000). *Modélisation de dynamiques de flux par agents. Application aux processus de ruissellement, infiltration et érosion*. Paris, Thèse de doctorat, université Pierre et Marie Curie : 162 p.

SHANNON, R., E. (1998). *Introduction to the art and science of simulation. Proceedings of the 1998 Winter Simulation Conference*. Washington, D.C., United States, IEEE Computer Society Press Vol 1 : 7-14

SHOHAM, Y., R. POWERS et T. GRENAGER (2003). *Multi-Agent Reinforcement Learning : a critical survey*. Technical Report, Computer Science Department, Standford University : 13 p.

SIMPSON, J. (2006). *Simulations are not models*. Models and simulations conference, Paris, Center for philosophy of Natural and Social Science, London School of Economics.

STOYAN, D., W. S. KENDALL et J. MECKE (1995). *Stochastic Geometry and its Applications*, Second Edition, John Wiley & Sons : 435 p.

SUTTON, R. S, Ed. (1992). *Reinforcement Learning*,Boston, Kluwer : 172 p.

SUTTON, R. S. et A. G. BARTO (1998). *Reinforcement Learning, An Introduction*, Cambdridge, MA., MIT Press : 342 p.

THÉRAULAZ, G. (1991). *Morphogenèse et auto-organisation des comportements dans les colonies de guêpes*. Polistes dominilus (Christ). Marseille, Thèse de doctorat, université d'Aix-Marseille I.

THOMAS, V. (2005). *Proposition d'un formalisme pour la construction automatique d'interactions dans les systèmes multi-agents réactifs*. Laboratoire lorrain de recherche en informatique et ses applications - UMR 7503. Nancy, Thèse de doctorat, université Henri Poincaré - Nancy 1 : 246 p.

THOMPSON, W. (1884). *Notes of Lectures on Molecular Dynamics and the Wave Theory of Light*. Baltimore, Johns Hopkins University : 48 p.

TREUIL, J.-P., C. LOBRY, C. MILLIER, J.-P. MÜLLER et D. HERVÉ (2007). *De l'équation mathématique au programme informatique dialogue entre mathématique et informatique*. Nature Sciences Sociétés.

TRICK, M. (1996). *An Introduction to Simulation*. from http ://mat.gsia.cmu.edu/simul/.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

UHRMACHER, A., M. (1997). *Concepts of object- and agent-oriented simulation.* Trans. Soc. Comput. Simul. Int. 14(2) : 59-67.

WALDROP, M. (1992). *Complexity : the Emerging Science at the Edge of Order and Chaos*, Simon & Schuster : 384 p.

WOLPERT, D. H. et K. TURNER (2006). *An Introduction to Collective Intelligence*, NASA Ames Research Center : 88 p.

WOOLDRIDGE, M., N. R. JENNINGS et D. KINNY (2004). T*he Gaia Methodology for Agent-Oriented Analysis and Design.* Autonomous Agents and Multi-Agent Systems 3(3) : 285-312.

XAVIER, J. B., C. PICIOREANU et M. C. M. VAN LOOSDRECHT (2005). *A framework for multidimensional modelling of activity and structure of multispecies biofilms.* Environmental Microbiology 7(8) : 1085-1103.

ZUCKER, J. D. (2001). *Changements de Représentation, Abstractions et Apprentissages.* Laboratoire d'Informatique de Paris 6. Paris, université Pierre et Marie Curie. Habilitation à Diriger des Recherches : 135 p.

Index

A

agent, 13, 121, 150
  capacité de communication, 13
  capacité de perception, 13, 120
  complexité, 104
  comportement, 13, 109, 120
  contrôle (capacité de décision), 109, 120, 121
  corps, 120
apprentissage, 196
  Q-learning, 196
attribut, 13, 120, 150
  ensemble de valeurs observables, 150
  valeur, 13, 150
automates cellulaires *voir* dynamiques d'agents

B

birth death processes *voir* dynamiques d'agents

C

caractérisation d'une configuration, 199
  spatiale, 201
caractérisation d'une dynamique, 216
  d'un faisceau de trajectoires, 217
  d'une trajectoire, 216
caractérisation des interactions, 220
catégories (d'agents), 150
champ
  de forces, 162
  de potentiel, 162
  moyen (approximation de), 262
classe de configurations spatiales
  de Poisson, 204
  homogène (ou uniforme), 203
  totalement aléatoire, 204
concepts de modélisation, 2
configuration
  espérée, 217
  et états, 152
configuration d'un point de vue
  sur le système, 152
  sur un groupe d'agents, 152
convergence (questions de), 237, 248
courant de probabilité, 218

D

dynamique
  ergodique, 219
  stationnaire, 218

dynamiques d'agents
agrégation/répulsion, 169
alignement ou polarisation, 176
interaction avec un potentiel, 161
jeux à N joueurs, 191
proies/prédateurs, 185
reproduction/dissémination, 181
dynamiques d'agents (et)
automates cellulaires, 179
modèles d'Ising, 176
NK modèles, 180

E

énergie (fonction d')
agrégation/répulsion, 173
polarisation, 180
reproduction/dissémination, 185
environnement, 112, 122, 150
et places, 120
et réseau, 76, 93, 116
multiple, 116
équation
de Fokker Planck, 240, 253
différentielle stochastique, 164
maîtresse, 251
espèce (d'agent), 121
état
changement d'$\sim$, 129
d'un agent, 13, 120, 152
d'un groupe d'agents, 152
du système, 13, 152
et configurations, 152
microscopique, 13
événement, 154
potentiel, 244, 262
expérimentation, 4, 136

F

famille de modèles, 13
fonction
d'utilité, 194
de corrélation, 202
de partition, 241
de perception, 175
de préférence, 195
de réponse, 191
de Ripley, 202
de Ripley multi-niveaux, 214
formule d'Itô, 233

G

générateur infinitésimal, 234

I

identifiant, 153
intégrale stochastique, 234

L

langage de modélisation, 2
lignée de modèles, 12

M

martingales, 234
mécanisme *voir* processus (définition)
meshless methods, 255
mesure, 207
de dénombrement, 207
de Dirac, 208
méta-modèle, 8, 121
mode opératoire, 156
modèle, 1
à base d'agents, 13, 120
abstrait, 1
agrégé, 225
conceptuel, 11
déterministe, 9
de moments, 255
de référence, 2, 10, 130
dynamique, 3
entrées, 8
et théorie, 2
eulérien, 254
famille de $\sim$, 13
fermé, 235
global, 253
lignée de $\sim$, 12

opérationnel, 9, 12, 129, 130
paramètres, 8
physique, 1
sorties, 8
statique, 3
stochastique, 9
modélisation, 1
d'accompagnement, 82
moment (*moment measure*)
empirique, 212
espéré, 217
moment factoriel, 212
Monte-Carlo, 241

N

normalisation, 247
noyau, 184

O

objectif, 193
permanent, 194
observation (définition), 151
ordonnancement, 156
asynchrone, 156
des actions, 133
des agents, 131
synchrone, 156

P

plate-forme, 135
Cormas, 143
Mason, 142
NetLogo, 137
Repast, 140
Swarm, 139
point de vue, 151
exhaustif, 151
identificateur, 153
politique, 196
potentiel (exemples de fonctions), 184
attraction/répulsion, 171
polarisation, 177, 181
reproduction/dissémination, 184
processus (définition), 150
processus (exemples de)
de branchement, 242
de diffusion, 231, 242
de Markov, 248, 253
de Wiener, 164, 231
processus ponctuels, 200
de Cox, 204
de Gibbs, 204
de Neyman Scott, 204
Hard Core, 204

R

réalisation, 154
réduction d'un modèle à base d'agents, 225
réseau *voir* environnement
réseaux d'interactions, 223
résumé (d'une configuration spatiale), 202
densité ou intensité globale, 202
distances au plus proche voisin, 202
distances aux autres agents, 202
distances de premier contact, 203
fonction de corrélation, 202
fonction de Ripley, 202
indice de Clark Evans, 202
résumé (d'une configuration), 199
d'ordre 1 (ou du premier ordre), 210
d'ordre n, 212
de type eulérien, 215
de type lagrangien, 215
prenant la forme d'une fonction, 215

S

sigma algèbre, 207
simulateur, 6, 135
simulation, 3, 5, 9
à base d'agents, 13, 129
définitions, 4
objectifs, 5
participative, 82
usages, 7

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

SMA (Systèmes multi-agents), 13
stimulus, 115
système de référence, 1

T

temps (modélisation du), 130
    temps continu, 130
    temps discret, 130
temps de relaxation, 218
trajectoire, 154

U

UML, 10, 119

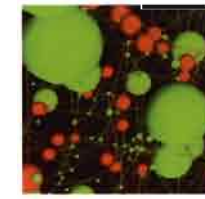
050216 - (I) - (1) - OSB 80° - PUB - VCT

Achevé d'imprimer sur les presses de
SNEL Grafics sa
Z.I. des Hauts-Sarts - Zone 3
rue Fond des Fourches 21 – B-4041 Vottem (Herstal)
Tél +32(0)4 344 65 60 - Fax +32(0)4 286 99 61
août 2008 – 45344

Dépôt légal : août 2008

Imprimé en Belgique

SCIENCES SUP



Jean-Pierre Treuil
Alexis Drogoul
Jean-Daniel Zucker
Préface de Paul Bourgine et Édith Perrier

MODÉLISATION ET SIMULATION À BASE D'AGENTS

Cet ouvrage s'adresse aux étudiants de master des universités et aux élèves des écoles d'ingénieurs ainsi qu'aux mathématiciens, informaticiens et chercheurs de diverses disciplines qui sont amenés à créer des modèles dans leur domaine.

La **modélisation informatique à base d'agents** permet de modéliser, à l'échelle macroscopique, des systèmes complexes à partir du comportement à l'échelle microscopique d'un grand nombre de leurs composants.

L'objectif de ce livre se décline en cinq points complémentaires :

- Présenter au lecteur un panorama des approches de modélisation et simulation à base d'agents sous la forme de **11 exemples représentatifs** puisés dans différents domaines scientifiques et technologiques.
- Proposer un **cadre commun** de définitions et une ébauche de démarche de conception qui permettent de fournir, au-delà de leur diversité apparente, une base sinon théorique du moins pratique de ces approches.
- Présenter les **outils informatiques** existants pour concevoir, spécifier, programmer et exploiter ces modèles.
- Introduire des **approches mathématiques** pour spécifier les comportements individuels des agents, caractériser leur comportement global, et effectuer les changements d'échelle concernés.
- Aborder, enfin, les **questions de recherche** soulevées par l'usage de ces approches dans le cadre de la modélisation des systèmes complexes.

Chaque chapitre a été conçu pour répondre aux questions que peuvent se poser les lecteurs qui découvrent ce nouveau paradigme ou à ceux qui le connaissent mais souhaitent aller plus loin.

JEAN-PIERRE TREUIL
est l'ex-directeur du LIA de l'IRD. Il est membre honoraire de l'UR GEODES de l'IRD.

ALEXIS DROGOUL
est directeur de recherches à l'IRD, il est membre de l'UR GEODES de l'IRD.

JEAN-DANIEL ZUCKER
est directeur de recherches à l'IRD, spécialiste de fouille de données complexes et bioinformatique. Il est directeur adjoint de l'UR GEODES de l'IRD.

LICENCE | MASTER | DOCTORAT
1 2 3 4 5 6 7 8

MATHÉMATIQUES
PHYSIQUE
CHIMIE
SCIENCES DE L'INGÉNIEUR
INFORMATIQUE
SCIENCES DE LA VIE
SCIENCES DE LA TERRE

9 782100 502165

6494561
ISBN 978-2-10-050216-5

IRD
Institut de recherche pour le développement

www.dunod.com

DUNOD