QUELQUES TESTS DE COMPARAISON DEUX A DEUX DES MOYENNES DE TRAITEMENTS

JEAN DEJARDIN
O.R.S.T.O.M.

et

NGUYEN NGOC QUOI
I.R.A.T.

(1964)

-I-I-I-I-I-I-I-

Dans l'analyse des essais à traitements multiples on est conduit à comparer soit plusieurs moyennes entre elles, soit une moyenne considérée comme privilégiée (traitement standard, variété témoin, etc.) à d'autres moyennes. Quelques solutions apportées à ce problème des comparaisons multiples vont être examinées dans la présente note.

Dans le premier type de comparaisons, nous appelerons v le nombre de traitements étudiés ($v > 2$) ; nous serons alors amenés à considérer les moyennes des traitements classées par ordre de grandeur croissante : nous appellerons $\bar{x}_1$ la plus petite, $\bar{x}_2$ la seconde ....., $\bar{x}_{v-1}$ l'avant dernière et $\bar{x}_v$ la plus grande. La quantité $\bar{x}_v - \bar{x}_1$ s'appelle l'étendue de la série.

Dans le second type de comparaisons nous considérerons qu'il y a v+1 moyennes ($v+1 > 2$), faisant jouer un rôle particulier à $\bar{x}_o$ la moyenne du standard.

Le carré moyen résiduel, éventuellement ajusté à $\mathcal{V}$ + degrés de liberté, sera appelé s_e^2 ; le seuil du test sera noté P et la variance estimée d'une moyenne $s_{\bar{x}}^2$. Le nombre de répétitions sera appelé r.

La théorie des tests à laquelle nous nous rattachons est la théorie de NEYMAN et PEARSON selon laquelle on fait l'hypothèse d'égalité des paramètres (les moyennes dans le cas présent) et on met cette hypothèse, appelée hypothèse nulle,

.../...

à l'épreuve des observations. Pour ce faire, on calcule la valeur observée d'une variable dont on connaît la loi de distribution dans l'hypothèse nulle et on recherche la probabilité pour que cette valeur soit atteinte ou dépassée. Si cette probabilité est suffisamment grande, c'est-à-dire si elle est supérieure au seuil P qu'on s'est fixé, on admet l'hypothèse nulle. Au contraire, si elle est trop faible (inférieure au seuil P), on la rejette.

On court donc a priori deux risques lorsqu'on fait un test :

- le risque de première espèce (I) qui est celui de refuser l'hypothèse nulle d'égalité lorsqu'elle est vraie ; on est toujours maître de ce risque qui est le seuil P du test ;

- le risque de deuxième espèce (II) qui est celui d'accepter l'hypothèse nulle d'égalité lorsqu'elle est fausse. Toutes conditions étant égales, ce risque est antagoniste du premier. On peut le rendre suffisamment petit en augmentant le nombre de répétitions.

Ceci est résumé dans le tableau suivant :

<table>
<tr><td colspan="3" rowspan="3"></td><td colspan="2">S I T U A T I O N   V R A I E</td></tr>
<tr><td colspan="2">L'hypothèse nulle d'égalité est :</td></tr>
<tr><td>V R A I E</td><td>F A U S S E</td></tr>
<tr><td rowspan="2">conclusion à laquelle conduit le test</td><td rowspan="2">l'hypothèse nulle est supposée être :</td><td>vraie</td><td>conclusion exacte</td><td>conclusion inexacte (risque II)</td></tr>
<tr><td>fausse</td><td>conclusion inexacte (risque I)</td><td>conclusion exacte</td></tr>
</table>

.../...

Le complément à 1 de la probabilité d'erreur de type (II) s'appelle la puissance du test.

Sous les conditions classiques : loi normale, variance unique, additivité des effets, indépendance des mesures, les essais peuvent être planifiés de telle façon qu'il soit possible de procéder à une analyse de variance standardisée dans la mesure où la condition d'orthogonalité est respectée.

La variable utilisée est ici le rapport s_t^2 / s_e^2 du carré moyen entre traitements au carré moyen de l'erreur, dont la loi de distribution est la loi de F dans l'hypothèse nulle d'égalité. Si la valeur observée pour ce rapport est jugée suffisamment probable, c'est-à-dire si elle est inférieure à la valeur de F au seuil P fixé, par ex. 5 %, on accepte l'hypothèse nulle. Si, au contraire, la valeur trouvée est jugée improbable, c'est-à-dire si elle est supérieure à la valeur critique de F, l'hypothèse nulle est rejetée comme conduisant à un résultat trop peu vraisemblable.

Le problème est alors de décider quels sont les traitements qui sont les meilleurs ; on se heurte ainsi à la question des comparaisons multiples lorsqu'on cherche à classer les traitements que l'on a été amené à considérer comme non équivalents.

TEST t MULTIPLE

La première solution apportée, dans l'ordre chronologique, fut l'utilisation répétée du test t de STUDENT (comparaison de deux moyennes, variance théorique inconnue) appliqué d'une manière systématique, en épuisant toutes les combinaisons deux à deux de ces moyennes (il y a C_v^2 couples de traitements). Cette façon de procéder, proposée par FISHER, est incorrecte car le test t suppose le tirage au hasard de l'indépendance des échantillons comparés.

Soit à comparer, par exemple, la plus petite moyenne $\bar{x}_1$ à la plus grande $\bar{x}_v$ à l'aide du test t. Ces deux moyennes ne sont ni prises au hasard ni indépendantes : le choix est en effet décidé au vu des résultats d'où on extrait la plus grande et la

.../...

petite des moyennes ; la loi de distribution $(\bar{x}_v - \bar{x}_1) / s_{\bar{x}}\sqrt{2}$ n'est pas la loi de t à laquelle on l'assimile pourtant en faisant le test. La probabilité pour que la variable utilisée : $(\bar{x}_v - \bar{x}_1) / s_{\bar{x}}\sqrt{2}$ dépasse dans l'hypothèse nulle la valeur critique de t au seuil qu'on a choisi, P, n'est plus ce seuil (par exemple 5 %) mais elle est plus grande. Elle croît d'ailleurs rapidement avec le nombre de moyennes comparées, c'est ainsi que si l'on fixe :

P = 5 % t = 2,02 (à 40 d. l.) on trouve une probabilité effective
de : 40 % pour 5 traitements
86 % pour 20 traitements.

Ceci revient à dire que l'on va, à la suite de ce test, déclarer significative des différences qui ne le sont pas ; ou encore : on trouvera trop de différences significatives. On prouve toutefois que ce test t convient pour la comparaison de deux moyennes adjacentes.

TEST H. S. D. DE TUKEY

Pour pallier cet inconvénient TUKEY a proposé d'utiliser la véritable loi de distribution de $q = (\bar{x}_v - \bar{x}_1) / s_{\bar{x}}$ qui a été tabulée pour des nombres de moyennes allant jusqu'à 100 (table 1 jointe en annexe). On calcule une H.S.D. = D_v en partant de la loi de q comme on calcule une p. p. d. s. en partant de la loi de t (le calcul pratique sera vu ci-dessous: test de KEULS).

Toutes les différences sont comparées à D_v ; celles qui lui sont supérieures sont déclarées significatives au seuil P.

Ce test de TUKEY a le même inconvénient que le test t multiple : la probabilité réelle est différente du seuil de signification du test lorsqu'on compare deux moyennes autres que $\bar{x}_1$ et $\bar{x}_v$. Elle est ici plus petite, alors que dans le test t

.../...

elle était plus grande. Autrement dit la H. S. D. est trop grande pour juger de la signification de la différence entre deux moyennes autres que la plus grande et la plus petite. On trouvera donc trop peu de différences significatives.

TEST DE KEULS

C'est également un test de comparaisons multiples au moyen de l'étendue. Il s'applique aussi au cas où aucune des moyennes n'est privilégiée, donc où elles sont toutes comparées entre elles.

On considère toujours l'étendue $\bar{x}_v - \bar{x}_1$, c'est-à-dire deux moyennes séparées par v - 2 moyennes, et on la compare au D_v calculé ci-dessus.

Pour les comparaisons autres que $\bar{x}_v - \bar{x}_1$ ce D_v ne convient plus comme on vient de le voir. KEULS a simplement remarqué que lorsqu'on compare la seconde moyenne à la plus grande ou la plus petite à l'avant dernière (deux moyennes séparées par v - 3 moyennes) on fait comme si l'échantillon ne contenait plus que v - 1 moyennes, il a donc proposé de prendre comme étendue D_{v-1} puis D_{v-2} pour deux moyennes séparées par v - 4 moyennes, D_{v-3} pour deux moyennes séparées par v - 5 moyennes et ainsi de suite jusqu'à D_2 pour deux moyennes adjacentes. D_2 est égale à la p. p. d. s. : on retrouve ici un résultat déjà énoncé plus haut.

Le test de KEULS est, semble-t-il, actuellement la meilleure approximation pour les comparaisons multiples deux à deux.

EXECUTION DU TEST

On calcule l'erreur-type $s_{\bar{x}} = s_e / \sqrt{r}$ à ν degrés de liberté, puis, P étant fixé, on cherche dans la table 1 les valeurs de q qui correspondent à v, v-1, ..., 2 traitements (v est appelé n dans la table). Ensuite on calcule les valeurs des

.../...

différentes étendues théoriques :

$$D_i = q_i \times s_{\bar{x}} \qquad (i = 2, 3, \ldots\ldots, v)$$

Les moyennes sont rangées par ordre décroissant :

$$\bar{x}_v, \bar{x}_{v-1}, \ldots\ldots \bar{x}_2, \bar{x}_1.$$

On commence par la comparaison de $d_{v,1} = \bar{x}_v - \bar{x}_1$ à D_v :

Si $d_{v,1} < D_v$ toutes les moyennes sont jugées non significativement différentes et le processus est arrêté.

Si $d_{v,1} > D_v$ les moyennes $\bar{x}_1$ sont subdivisées en deux sous-groupes de v-1 moyennes chacun : $\bar{x}_v$ à $\bar{x}_2$ et $\bar{x}_{v-1}$ à $\bar{x}_1$.

On recommence la comparaison sur chacun de ces sous-groupes :

Si $d_{v,2} = \bar{x}_v - \bar{x}_2 < D_{v-1}$ et $d_{v-1,1} = \bar{x}_{v-1} - \bar{x}_1 < D_{v-1}$

les moyennes des deux sous-groupes sont homogènes et le processus est arrêté.

Si $d_{v,2} > D_{v-1}$ et $d_{v-1,1} < D_{v-1}$

ou $d_{v,2} < D_{v-1}$ et $d_{v-1,1} > D_{v-1}$

ou $d_{v,2} > D_{v-1}$ et $d_{v-1,1} > D_{v-1}$

les $\bar{x}_i$ des sous-groupes correspondants sont subdivisés en sous-groupes de v-2 moyennes, respectivement : $\bar{x}_v$ à $\bar{x}_3$, ou $\bar{x}_{v-2}$ à $\bar{x}_1$, ou $\bar{x}_v$ à $\bar{x}_3$ et $\bar{x}_{v-2}$ à $\bar{x}_1$, le second sous-groupe étant, dans les deux premiers cas, compris dans un sous-groupe précedemment formé.

.../...

La comparaison se poursuit comme précédemment.

D'où la règle :

<u>La différence entre deux moyennes quelconques d'un groupe de v moyennes est significative si l'étendue observée de chacun des sous-groupes qui les contiennent dépasse l'étendue théorique correspondante.</u>

<u>Exemple numérique</u> :

Sois 8 traitements répétés 6 fois dont les moyennes sont :

N° Traitement :	1	2	3	4	5	6	7	8
Moyennes :	172	178	182	185	165	175	161	162

Carré moyen de l'erreur à 40 d. l.

$s_e^2 = 141,6$ d'où $s_{\bar{x}} = \sqrt{141,6/6} = 4,86$

$D_i = q_i . s_{\bar{x}}$

Avec P = 5 % on a (table I , ligne 40 d. l.) :

q_8	q_7	q_6	q_5	q_4	q_3	q_2
4,52	4,39	4,23	4,04	3,79	3,44	2,86

D'où les D_i

D_8	D_7	D_6	D_5	D_4	D_3	D_2
22,0	21,3	20,6	19,6	18,4	16,7	13,9

Moyennes rangées :

N° Traitement :	4	3	2	6	1	5	8	7
Moyennes	$\bar{x}_8$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_5$	$\bar{x}_4$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_1$
	185	182	178	176	172	165	162	161

.../...

Tableau des différentes valeurs de l'étendue observée :

MOYENNES	185	182	178	176	172	165	162
161	24 S	21	17	15	11	4	1
162	23 S	20	16	14	10	3	
165	20	17	13	11	7		
172	13	10	6	4			
176	9	6	2				
178	7	4					
182	3						

Dans une case figure la différence entre les deux moyennes dont les valeurs sont portées dans les marges correspondantes.

S : significatif.

On compare $d_{8,1}$ à D_8 :

$$d_{8,1} = \bar{x}_8 - \bar{x}_1 = 24 > D_8 = 22,0$$

L'étendue observée dépasse l'étendue calculée, on poursuit la comparaison sur les deux sous-groupes ordonnés : $\bar{x}_8$ à $\bar{x}_2$ et $\bar{x}_7$ à $\bar{x}_1$

$$d_{8,2} = \bar{x}_8 - \bar{x}_2 = 23 > D_7 = 21,3$$

$$d_{7,1} = \bar{x}_7 - \bar{x}_1 = 21 \not> D_7 = 21,3$$

Seul $d_{8,2}$ dépasse D_7, on poursuit la comparaison en considérant seulement le sous-groupe ordonné $\bar{x}_8$ à $\bar{x}_3$ car le sous-groupe ordonné $\bar{x}_7$ à $\bar{x}_2$ est contenu dans $\bar{x}_7$ à $\bar{x}_1$.

.../...

$$d_{8,3} = \bar{x}_8 - \bar{x}_3 = 20 < D_6 = 20,6$$

Le processus s'arrête.

CONCLUSION

L'ensemble des moyennes est hétérogène et se décompose en deux groupes homogènes. Les résultats peuvent être présentés graphiquement par un trait soulignant les sous-ensembles ordonnés dont l'étendue ne dépasse pas le D_i correspondant :

N° Traitement :	4	3	2	6	1	5	8	7
Moyennes :	185	182	178	176	172	165	162	161
	$\bar{x}_8$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_5$	$\bar{x}_4$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_1$

TEST DE DUNCAN

DUNCAN propose un test analogue à celui de KEULS, mais au lieu d'utiliser un seuil constant, P, pour les différentes étendues, il définit une valeur $\gamma_{2,p}$ appelé niveau de protection pour la comparaison de deux moyennes tel que $1 - \gamma_{2,p} = P$: $\gamma_{2,p}$ est la probabilité d'acccepter l'hypothèse nulle d'égalité alors qu'elle est vraie : c'est le complément à 1 du risque de première espèce.

Le niveau de protection pour un ensemble de v - 1 comparaisons indépendantes entre v moyennes est alors $\gamma_{v,p} = (\gamma_{2,p})^{v-1}$, d'où un risque de première espèce, c'est-à-dire le seuil, pour cet ensemble : $1 - \gamma_{v,p} = (1-P)^{v-1}$; $\gamma_{v,p}$ est le niveau de protection basé sur le nombre de degrés de liberté.

On teste comme ci-dessus les étendues de tous les sous-groupes ordonnés pouvant être formés. L'étendue réduite empirique sera ici appelée Q pour la distinguer de l'étendue réduite empirique utilisée par KEULS.

HARTER a établi des tables des valeurs de Q correspondant aux seuils 1°/oo, 5 °/oo, 1 %, 5 %, 10 % pour des nombres de moyennes allant jusqu'à 100. Ces tables sont données en annexe (table 2) pour les seuils 5 % et 1 %.

Le nombre $R_i = Q_i . s_{\bar{x}}$ est appelé la plus courte étendue significative.

PRINCIPE DU TEST

Chaque différence $\bar{x}_j - \bar{x}_k$ $(j > k)$ est significative si elle excède le R_i $(i = j - k + 1)$ correspondant ; sinon elle ne l'est pas.

Il n'y a pas de différence entre deux moyennes lorsqu'elles appartiennent toutes deux à un même sous-groupe de moyennes dont l'étendue n'est pas significative.

Il convient donc de relier par un trait toutes les moyennes d'un sous-ensemble ordonné de moyennes dont l'étendue n'est pas significative. On évite ainsi de tester les différences entre ces moyennes déjà considérées comme non significativement différentes.

EXEMPLE NUMERIQUE

Sept variétés ont donné, sur six répétitions, les rendements moyens suivants, classés par ordre de grandeur croissante :

Variétés :	A	F	G	D	C	B	E
	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_4$	$\bar{x}_5$	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$
Moyennes :	49,6	58,1	61,0	61,5	67,6	71,2	71,3

.../...

Carré moyen de l'erreur à 30 d. l.

$s_e^2 = 79,64$ soit $s_{\bar{x}} = \sqrt{79,64/6} = 3,643$

Les différentes étendues soumises au test sont :

MOYENNES	71,3	71,2	67,6	61,5	61,0	58,1
49,6	21,7 S	21,6 S	18,0 S	11,9 S	11,4 S	8,5
58,1	13,2 S	13,1 S	9,5	3,4	2,9	
61,0	10,3	10,2	6,6	0,5		
61,5	9,8	9,7	6,1			
67,6	3,7	3,6				
71,2	0,1					

Choisissons P = 5 % ; les Q_i donnés par la table 2 (ligne 30 d. l.) :

Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7
2,89	3,04	3,13	3,20	3,25	3,29

d'où les plus courtes étendues $R_i = s_{\bar{x}} \cdot Q_i$ (i = 2, 3, ..., 7)

R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7
10,53	11,07	11,40	11,66	11,84	11,99

.../...

Comparaison des étendues observées aux R_i correspondants :

$d_{7,1} = \bar{x}_7 - \bar{x}_1 = 21,7 > R_7 = 11,99$ significative

$d_{7,2} = \bar{x}_7 - \bar{x}_2 = 13,2 > R_6 = 11,84$ "

$d_{7,3} = \bar{x}_7 - \bar{x}_3 = 10,3 < R_5 = 11,66$ non significative

D'où $\bar{x}_7 - \bar{x}_4$, $\bar{x}_7 - \bar{x}_5$, et $\bar{x}_7 - \bar{x}_6$ sont aussi non significatives car ces sous-groupes sont contenus dans $\bar{x}_7$ à $\bar{x}_3$.

Ce résultat est matérialisé ci-dessous par un trait tiré en dessous du groupe ordonné de traitements G, D, C, B, E.

Les comparaisons suivantes sont :

$d_{6,1} = \bar{x}_6 - \bar{x}_1 = 21,6 > R_6 = 11,84$ significative

$d_{6,2} = \bar{x}_6 - \bar{x}_2 = 13,1 > R_5 = 11,66$ "

$d_{6,3} = \bar{x}_6 - \bar{x}_3 = 10,2 < R_4 = 11,40$ non significative, ainsi que $\bar{x}_6 - \bar{x}_4$ et $x_6 - x_5$: le sous-groupe B, C, D, G est inclus dans B, C, D, G, E : il n'est pas besoin de le souligner.

Les comparaisons se poursuivent par :

$d_{5,1} = \bar{x}_5 - \bar{x}_1 = 18,0 > R_5 = 11,66$ significative

$d_{5,2} = \bar{x}_5 - \bar{x}_2 = 9,5 < R_4 = 11,40$ non significative, ainsi que $\bar{x}_5 - \bar{x}_3$ et $\bar{x}_5 - \bar{x}_4$: le sous-groupe F, G, D, C est homogène, on le souligne.

$d_{4,1} = \bar{x}_4 - \bar{x}_1 = 11,9 > R_4 = 11,40$ significative

$d_{4,2} = \bar{x}_4 - \bar{x}_2 = 3,9 < R_3 = 11,07$ non significative, ainsi que $\bar{x}_4 - \bar{x}_3$: le sous-groupe F, G, D est homogène et inclus dans F, G, D, C..

.../...

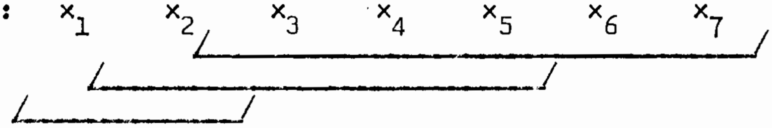
$d_{3,1} = \bar{x}_3 - \bar{x}_1 = 11{,}4 > R_3 = 11{,}07$ significative

$d_{3,2} = \bar{x}_3 - \bar{x}_2 = 3{,}9 < R_2 = 10{,}52$ non significative : F, G est homogène.

$d_{2,1} = \bar{x}_2 - \bar{x}_1 = 8{,}5 < R_2 = 10{,}52$ non significative

GRAPHIQUE

Variétés :	A	F	G	D	C	B	E
	49,6	58,1	61,0	66,5	67,6	71,2	71,3
Moyennes :	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_4$	$\bar{x}_5$	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$



Deux moyennes qui ne sont pas réunies par un même trait sont significativement différentes. Deux moyennes qui sont réunies par un même trait ne sont pas significativement différentes.

En pratique, il y a avantage à procéder un peu différemment dans le cas où les moyennes sont nombreuses.

On soustrait le plus grand des R_i de la plus grande moyenne, soit : $\bar{x}_7 - R_7 = 71{,}3 - 11{,}99 = 59{,}31$. Comme $\bar{x}_1$ et $\bar{x}_2$ sont plus petites que 59,31 on conclut que les différences $\bar{x}_7 - \bar{x}_1$ et $\bar{x}_7 - \bar{x}_2$ sont significatives. En effet on a les inégalités :

$$\bar{x}_7 - \bar{x}_1 > R_7 \quad \text{et} \quad \bar{x}_7 - \bar{x}_2 > R_7$$

de $\bar{x}_7 - \bar{x}_1 > R_7$ on conclut : $\bar{x}_7 = \bar{x}_1$.

Pour $\bar{x}_7 - \bar{x}_2$ on a : $\bar{x}_7 - \bar{x}_2 > R_7$

et : $R_7 > R_6$

d'où $\bar{x}_7 - \bar{x}_2 > R_6$ et la différence est établie.

.../...

On souligne $\bar{x}_3$ à $\bar{x}_7$

Puis $\bar{x}_6 - R_6 = 59,36$ même résultat que précédemment

$\bar{x}_5 - R_5 = 56,23 > x_1$: on souligne $\bar{x}_2$ à $\bar{x}_5$ etc..

On retrouve le graphique précédent.

Il est possible qu'un test F ne décèle pas d'hétérogénéité dans un groupe des moyennes alors que l'étendue totale observée est supérieure au R_v calculé. En effet, d'une part le test de DUNCAN n'est encore qu'une approximation alors que le test F est exact ; d'autre part, les deux tests ne sont pas identiques. Il se peut qu'ils conduisent à deux conclusions différentes, ne serait-ce que par l'existence des risques différents attachés à ces tests.

TEST DE DUNNETT

Le test de DUNNETT s'applique aux cas où l'on veut comparer v moyennes $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ ..., $\bar{x}_v$ d'un groupe de v + 1 moyennes à l'une d'elles, $\bar{x}_0$, considérée comme privilégiée (traitement témoin ou standard). La comparaison porte sur les différences $\bar{x}_1 - \bar{x}_0$, $\bar{x}_2 - \bar{x}_0$, ..., $\bar{x}_v - \bar{x}_0$ et les valeurs critiques de ces différences sont calculées à partir d'une loi de STUDENT généralisée dans laquelle toutes les différences sont considérées ensemble et non plus séparément.

Les valeurs critiques des t au seuil P sont donc données par :

$$\text{Prob.} \left\{ t_1 < d', \ t_2 < d'_2 \ \ldots\ldots, \ t_v < d'_v \right\} = 1\text{-}P$$

si on s'intéresse au signe des différences,

ou par :

$$\text{Prob.} \left\{ |t_1| < d'_1, \ |t_2| < d''_2, \ \ldots\ldots, \ |t_v| < d''_v \right\} = 1\text{-}P$$

si on ne s'intéresse pas au signe des différences.

.../...

Ceci signifie que la probabilité pour que l'on ait <u>simultanément</u>

$$t_1 < d'_1, \quad t_2 < d'_2 \;\ldots\ldots,\; t_v < d'_v$$

dans le premier cas, ou

$$|t_1| < d''_1, \quad |t_2| < d''_2, \;\ldots\ldots,\; |t_v| < d''_v$$

dans le second cas,

est égale à 1-P, par exemple 0,95 ou 0,99.

Il existe des tables donnant t_i et $|t_i|$ dans les cas où

$$d'_1 = d'_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots = d'_v = d'$$

et

$$d''_1 = d''_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots = d''_v = d''$$

avec de plus, $N_0 = N_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = N_v = N$ (les t_i sont alors constants quel que soit i) pour des valeurs de 1-P égales à 0,95 et 0,99.

Ces tables sont données en annexe : tables 3.

Lorsque les nombres d'observations de chaque série sont inégaux ($N_i = N_j$) les tables ne donnent qu'une valeur approximative des valeurs critiques de la variable.

<u>EXEMPLE NUMERIQUE</u>

$N_0 = N_i = N = 3$ $\qquad v = 3$

	Témoin	Trait. 1	Trait. 2	Trait. 3
	55	55	55	50
	47	64	49	44
	48	64	52	41
Moy.	50	61	52	45

$s_e^2 = 19$ avec 8 d. l.

.../...

Erreur type de la différence entre deux moyennes :

$s_e \sqrt{2/N} = \sqrt{19} . \sqrt{2/3} = 3,56$

On calcule $ts_e \sqrt{2/N}$ comme s'il s'agissait d'un test t classique : t est donné par la table 3 (8 d. l. et 3 traitements), P = 5 %.

Pour un test unilatéral (on s'intéresse au signe) t = 2,42

Pour un test bilatéral (on teste la différence sans s'intéresser au signe) t = 2,94

D'où $ts_e . \sqrt{2/N}$ (test unilatéral) = 2,42 x 3,56 = 8,6

Comparaisons :

<u>Traitement 1 et témoin</u>

$61 - 50 = 11 > 8,6$

<u>Traitement 2 et témoin</u>

$52 - 50 = 2 < 8,6$

<u>Traitement 3 et témoin</u>

$45 - 50 = - 5 < 8,6$

<u>CONCLUSION</u>

Seul le traitement 1 est significativement supérieur au témoin.

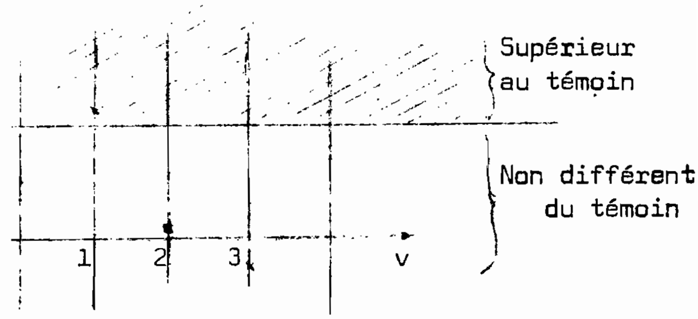
Graphiquement on peut présenter ces résultats comme suit : on trace une droite y = 50 + 8,6 = 58,6. Les traitements sont représentés par des points ayant pour ordonnée leur moyenne et pour abscisse leur n° d'ordre (1 à v).

Les traitements dont la moyenne dépasse 58,6 sont significativement supérieurs au témoin.

.../...

limite à 95 % 58,6

50



Cas du test bilatéral :

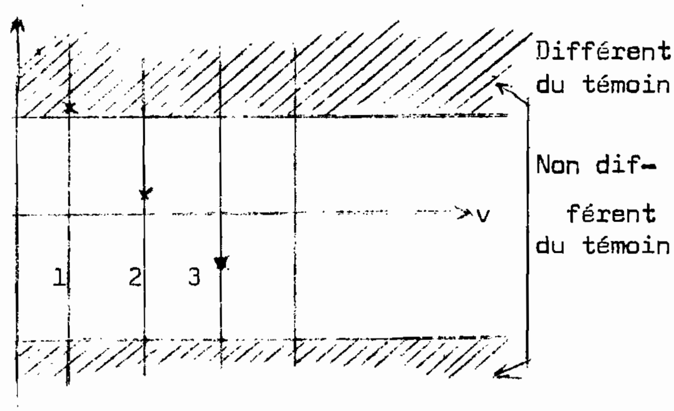
on compare $x_i - x_0$ à $\pm\ ts_e\sqrt{2/N}$

$ts_e\sqrt{2/N} = 2{,}94 \times 3{,}56 = 10{,}5$

limite supérieure à 95 % 60,5

50

limite inférieure à 95 % 39,5



Seul le traitement 1 diffère significativement du témoin.

CONCLUSION

En plus des tests cités ci-dessus, on trouve dans la littérature un certain nombre d'autres tests proposés pour résoudre le même problème, par exemple : test de SCHEFFE, test F multiple de DUNCAN, test F multiple de TUKEY etc..

Ces tests sont souvent des compromis entre plusieurs autres tests classiques et leurs propriétés sont plus au moins bien connues. De plus, ils sont très longs et fastidieux à exécuter. C'est pour cette raison qu'il n'y a pas été fait mention ici.

.../...

Le test t multiple et le test H.S.D. de TUKEY présentent des risques tels qu'on ne peut valablement les utiliser.

Le test de KEULS a le mérite de conserver la définition du test de NEYMAN (P fixé) tout en présentant une puissance plus faible que celui de DUNCAN. Ce dernier ne présente pas un risque de première espèce constant. Le niveau de protection varie avec le nombre de moyennes comparées $(1-P)^{v-1}$ alors que dans le test de KEULS il reste constant et égal à 1-P.

Le choix entre ces deux approximations (car en définitive ces tests ne sont qu'approximatifs : en fait, on procède à C_v^2 comparaisons pour v - 1 degrés de liberté seulement) reste une question d'espèce qui dépend des risques que l'on accepte de courir :

- avec le test de KEULS on court un risque plus grand d'accepter l'hypothèse nulle d'égalité alors qu'elle est fausse : risque II plus grand (test un peu trop conservateur, une différence significative peut ne pas être mise en évidence) ;
- avec le test de DUNCAN on court un risque plus grand de rejeter l'hypothèse nulle d'égalité des moyennes alors qu'elle est vraie : risque I plus grand (un peu trop de différences significatives).

On pourra par exemple, ainsi qu'on l'a vu, trouver des différences entre les moyennes extrêmes en utilisant ce dernier test alors que le test F, qui, en définitive est le seul critère valable, ne décèle pas d'hétérogénéité.

Le test de DUNNETT avec lequel on fait v comparaisons pour v degrés de liberté (entre les v + 1 moyennes) est exact et n'appelle pas de commentaire particulier. Il doit être utilisé chaque fois qu'interviennent des comparaisons à un standard.

-!-!-!-!-!-!-!-!-

TABLE I

~~TABLE 3 (Continued)~~

P = .95

ν \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	17.97	26.98	32.82	37.08	40.41	43.12	45.40	47.36	49.07
2	6.085	8.331	9.798	10.88	11.74	12.44	13.03	13.54	13.99
3	4.501	5.910	6.825	7.502	8.037	8.478	8.853	9.177	9.462
4	3.927	5.040	5.757	6.287	6.707	7.053	7.347	7.602	7.826
5	3.635	4.602	5.218	5.673	6.033	6.330	6.582	6.802	6.995
6	3.461	4.339	4.896	5.305	5.628	5.895	6.122	6.319	6.493
7	3.344	4.165	4.681	5.060	5.359	5.606	5.815	5.998	6.158
8	3.261	4.041	4.529	4.886	5.167	5.399	5.597	5.767	5.918
9	3.199	3.949	4.415	4.756	5.024	5.244	5.432	5.595	5.739
10	3.151	3.877	4.327	4.654	4.912	5.124	5.305	5.461	5.599
11	3.113	3.820	4.256	4.574	4.823	5.028	5.202	5.353	5.487
12	3.082	3.773	4.199	4.508	4.751	4.950	5.119	5.265	5.395
13	3.055	3.735	4.151	4.453	4.690	4.885	5.049	5.192	5.318
14	3.033	3.702	4.111	4.407	4.639	4.829	4.990	5.131	5.254
15	3.014	3.674	4.076	4.367	4.595	4.782	4.940	5.077	5.198
16	2.998	3.649	4.046	4.333	4.557	4.741	4.897	5.031	5.150
17	2.984	3.628	4.020	4.303	4.524	4.705	4.858	4.991	5.108
18	2.971	3.609	3.997	4.277	4.495	4.673	4.824	4.956	5.071
19	2.960	3.593	3.977	4.253	4.469	4.645	4.794	4.924	5.038
20	2.950	3.578	3.958	4.232	4.445	4.620	4.768	4.896	5.008
24	2.919	3.532	3.901	4.166	4.373	4.541	4.684	4.807	4.915
30	2.888	3.486	3.845	4.102	4.302	4.464	4.602	4.720	4.824
40	2.858	3.442	3.791	4.039	4.232	4.389	4.521	4.635	4.735
60	2.829	3.399	3.737	3.977	4.163	4.314	4.441	4.550	4.646
120	2.800	3.356	3.685	3.917	4.096	4.241	4.363	4.468	4.560
∞	2.772	3.314	3.633	3.858	4.030	4.170	4.286	4.387	4.474

ν \ n	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	50.59	51.96	53.20	54.33	55.36	56.32	57.22	58.04	58.83
2	14.39	14.75	15.08	15.38	15.65	15.91	16.14	16.37	16.57
3	9.717	9.946	10.15	10.35	10.53	10.69	10.84	10.98	11.11
4	8.027	8.208	8.373	8.525	8.664	8.794	8.914	9.028	9.134
5	7.168	7.324	7.466	7.596	7.717	7.828	7.932	8.030	8.122
6	6.649	6.789	6.917	7.034	7.143	7.244	7.338	7.426	7.508
7	6.302	6.431	6.550	6.658	6.759	6.852	6.939	7.020	7.097
8	6.054	6.175	6.287	6.389	6.483	6.571	6.653	6.729	6.802
9	5.867	5.983	6.089	6.186	6.276	6.359	6.437	6.510	6.579
10	5.722	5.833	5.935	6.028	6.114	6.194	6.269	6.339	6.405
11	5.605	5.713	5.811	5.901	5.984	6.062	6.134	6.202	6.265
12	5.511	5.615	5.710	5.798	5.878	5.953	6.023	6.089	6.151
13	5.431	5.533	5.625	5.711	5.789	5.862	5.931	5.995	6.055
14	5.364	5.463	5.554	5.637	5.714	5.786	5.852	5.915	5.974
15	5.306	5.404	5.493	5.574	5.649	5.720	5.785	5.846	5.904
16	5.256	5.352	5.439	5.520	5.593	5.662	5.727	5.786	5.843
17	5.212	5.307	5.392	5.471	5.544	5.612	5.675	5.734	5.790
18	5.174	5.267	5.352	5.429	5.501	5.568	5.630	5.688	5.743
19	5.140	5.231	5.315	5.391	5.462	5.528	5.589	5.647	5.701
20	5.108	5.199	5.282	5.357	5.427	5.493	5.553	5.610	5.663
24	5.012	5.099	5.179	5.251	5.319	5.381	5.439	5.494	5.545
30	4.917	5.001	5.077	5.147	5.211	5.271	5.327	5.379	5.429
40	4.824	4.904	4.977	5.044	5.106	5.163	5.216	5.266	5.313
60	4.732	4.808	4.878	4.942	5.001	5.056	5.107	5.154	5.199
120	4.641	4.714	4.781	4.842	4.898	4.950	4.998	5.044	5.086
∞	4.552	4.622	4.685	4.743	4.796	4.845	4.891	4.934	4.974

TABLE

~~TABLE 3 (Continued)~~

P = .95

ν \ n	20	22	24	26	28	30	32	34	36
1	59.56	60.91	62.12	63.22	64.23	65.15	66.01	66.81	67.56
2	16.77	17.13	17.45	17.75	18.02	18.27	18.50	18.72	18.92
3	11.24	11.47	11.68	11.87	12.05	12.21	12.36	12.50	12.63
4	9.233	9.418	9.584	9.736	9.875	10.00	10.12	10.23	10.34
5	8.208	8.368	8.512	8.643	8.764	8.875	8.979	9.075	9.165
6	7.587	7.730	7.861	7.979	8.088	8.189	8.283	8.370	8.452
7	7.170	7.303	7.423	7.533	7.634	7.728	7.814	7.895	7.972
8	6.870	6.995	7.109	7.212	7.307	7.395	7.477	7.554	7.625
9	6.644	6.763	6.871	6.970	7.061	7.145	7.222	7.295	7.363
10	6.467	6.582	6.686	6.781	6.868	6.948	7.023	7.093	7.159
11	6.326	6.436	6.536	6.628	6.712	6.790	6.863	6.930	6.994
12	6.209	6.317	6.414	6.503	6.585	6.660	6.731	6.796	6.858
13	6.112	6.217	6.312	6.398	6.478	6.551	6.620	6.684	6.744
14	6.029	6.132	6.224	6.309	6.387	6.459	6.526	6.588	6.647
15	5.958	6.059	6.149	6.233	6.309	6.379	6.445	6.506	6.564
16	5.897	5.995	6.084	6.166	6.241	6.310	6.374	6.434	6.491
17	5.842	5.940	6.027	6.107	6.181	6.249	6.313	6.372	6.427
18	5.794	5.890	5.977	6.055	6.128	6.195	6.258	6.316	6.371
19	5.752	5.846	5.932	6.009	6.081	6.147	6.209	6.267	6.321
20	5.714	5.807	5.891	5.968	6.039	6.104	6.165	6.222	6.275
24	5.594	5.683	5.764	5.838	5.906	5.968	6.027	6.081	6.132
30	5.475	5.561	5.638	5.709	5.774	5.833	5.889	5.941	5.990
40	5.358	5.439	5.513	5.581	5.642	5.700	5.753	5.803	5.849
60	5.241	5.319	5.389	5.453	5.512	5.566	5.617	5.664	5.708
120	5.126	5.200	5.266	5.327	5.382	5.434	5.481	5.526	5.568
∞	5.012	5.081	5.144	5.201	5.253	5.301	5.346	5.388	5.427

ν \ n	38	40	50	60	70	80	90	100
1	68.26	68.92	71.73	73.97	75.82	77.40	78.77	79.98
2	19.11	19.28	20.05	20.66	21.16	21.59	21.96	22.29
3	12.75	12.87	13.36	13.76	14.08	14.36	14.61	14.82
4	10.44	10.53	10.93	11.24	11.51	11.73	11.92	12.09
5	9.250	9.330	9.674	9.949	10.18	10.38	10.54	10.69
6	8.529	8.601	8.913	9.163	9.370	9.548	9.702	9.839
7	8.043	8.110	8.400	8.632	8.824	8.989	9.133	9.261
8	7.693	7.756	8.029	8.248	8.430	8.586	8.722	8.843
9	7.428	7.488	7.749	7.958	8.132	8.281	8.410	8.526
10	7.220	7.279	7.529	7.730	7.897	8.041	8.166	8.276
11	7.053	7.110	7.352	7.546	7.708	7.847	7.968	8.075
12	6.916	6.970	7.205	7.394	7.552	7.687	7.804	7.909
13	6.800	6.854	7.083	7.267	7.421	7.552	7.667	7.769
14	6.702	6.754	6.979	7.159	7.309	7.438	7.550	7.650
15	6.618	6.669	6.888	7.065	7.212	7.339	7.449	7.546
16	6.544	6.594	6.810	6.984	7.128	7.252	7.360	7.457
17	6.479	6.529	6.741	6.912	7.054	7.176	7.283	7.377
18	6.422	6.471	6.680	6.848	6.989	7.109	7.213	7.307
19	6.371	6.419	6.626	6.792	6.930	7.048	7.152	7.244
20	6.325	6.373	6.576	6.740	6.877	6.994	7.097	7.187
24	6.181	6.226	6.421	6.579	6.710	6.822	6.920	7.008
30	6.037	6.080	6.267	6.417	6.543	6.650	6.744	6.827
40	5.893	5.934	6.112	6.255	6.375	6.477	6.566	6.645
60	5.750	5.789	5.958	6.093	6.206	6.303	6.387	6.462
120	5.607	5.644	5.802	5.929	6.035	6.126	6.205	6.275
∞	5.463	5.498	5.646	5.764	5.863	5.947	6.020	6.085

TABLE 1

~~TABLE 3 (*Continued*)~~

P = .99

ν \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	90.03	135.0	164.3	185.6	202.2	215.8	227.2	237.0	245.6
2	14.04	19.02	22.29	24.72	26.63	28.20	29.53	30.68	31.69
3	8.261	10.62	12.17	13.33	14.24	15.00	15.64	16.20	16.69
4	6.512	8.120	9.173	9.958	10.58	11.10	11.55	11.93	12.27
5	5.702	6.976	7.804	8.421	8.913	9.321	9.669	9.972	10.24
6	5.243	6.331	7.033	7.556	7.973	8.318	8.613	8.869	9.097
7	4.949	5.919	6.543	7.005	7.373	7.679	7.939	8.166	8.368
8	4.746	5.635	6.204	6.625	6.960	7.237	7.474	7.681	7.863
9	4.596	5.428	5.957	6.348	6.658	6.915	7.134	7.325	7.495
10	4.482	5.270	5.769	6.136	6.428	6.669	6.875	7.055	7.213
11	4.392	5.146	5.621	5.970	6.247	6.476	6.672	6.842	6.992
12	4.320	5.046	5.502	5.836	6.101	6.321	6.507	6.676	6.814
13	4.260	4.964	5.404	5.727	5.981	6.192	6.372	6.528	6.667
14	4.210	4.895	5.322	5.634	5.881	6.085	6.258	6.409	6.543
15	4.168	4.836	5.252	5.556	5.796	5.994	6.162	6.309	6.439
16	4.131	4.786	5.192	5.489	5.722	5.915	6.079	6.222	6.349
17	4.099	4.742	5.140	5.430	5.659	5.847	6.007	6.147	6.270
18	4.071	4.703	5.094	5.379	5.603	5.788	5.944	6.081	6.201
19	4.046	4.670	5.054	5.334	5.554	5.735	5.889	6.022	6.141
20	4.024	4.639	5.018	5.294	5.510	5.688	5.839	5.970	6.087
24	3.956	4.546	4.907	5.168	5.374	5.542	5.685	5.809	5.919
30	3.889	4.455	4.799	5.048	5.242	5.401	5.536	5.653	5.756
40	3.825	4.367	4.696	4.931	5.114	5.265	5.392	5.502	5.599
60	3.762	4.282	4.595	4.818	4.991	5.133	5.253	5.356	5.447
120	3.702	4.200	4.497	4.709	4.872	5.005	5.118	5.214	5.299
∞	3.643	4.120	4.403	4.603	4.757	4.882	4.987	5.078	5.157

ν \ n	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	253.2	260.0	266.2	271.8	277.0	281.8	286.3	290.4	294.3
2	32.59	33.40	34.13	34.81	35.43	36.00	36.53	37.03	37.50
3	17.13	17.53	17.89	18.22	18.52	18.81	19.07	19.32	19.55
4	12.57	12.84	13.09	13.32	13.53	13.73	13.91	14.08	14.24
5	10.48	10.70	10.89	11.08	11.24	11.40	11.55	11.68	11.81
6	9.301	9.485	9.653	9.808	9.951	10.08	10.21	10.32	10.43
7	8.548	8.711	8.860	8.997	9.124	9.242	9.353	9.456	9.554
8	8.027	8.176	8.312	8.436	8.552	8.659	8.760	8.854	8.943
9	7.647	7.784	7.910	8.025	8.132	8.232	8.325	8.412	8.495
10	7.356	7.485	7.603	7.712	7.812	7.906	7.993	8.076	8.153
11	7.128	7.250	7.362	7.465	7.560	7.649	7.732	7.809	7.883
12	6.943	7.060	7.167	7.265	7.356	7.441	7.520	7.594	7.665
13	6.791	6.903	7.006	7.101	7.188	7.269	7.345	7.417	7.485
14	6.664	6.772	6.871	6.962	7.047	7.126	7.199	7.268	7.333
15	6.555	6.660	6.757	6.845	6.927	7.003	7.074	7.142	7.204
16	6.462	6.564	6.658	6.744	6.823	6.898	6.967	7.032	7.093
17	6.381	6.480	6.572	6.656	6.734	6.806	6.873	6.937	6.997
18	6.310	6.407	6.497	6.579	6.655	6.725	6.792	6.854	6.912
19	6.247	6.342	6.430	6.510	6.585	6.654	6.719	6.780	6.837
20	6.191	6.285	6.371	6.450	6.523	6.591	6.654	6.714	6.771
24	6.017	6.106	6.186	6.261	6.330	6.394	6.453	6.510	6.563
30	5.849	5.932	6.008	6.078	6.143	6.203	6.259	6.311	6.361
40	5.686	5.764	5.835	5.900	5.961	6.017	6.069	6.119	6.165
60	5.528	5.601	5.667	5.728	5.785	5.837	5.886	5.931	5.974
120	5.375	5.443	5.505	5.562	5.614	5.662	5.708	5.750	5.790
∞	5.227	5.290	5.348	5.400	5.448	5.493	5.535	5.574	5.611

TABLE

~~TABLE 3 (Continued)~~

P = .99

ν \ n	20	22	24	26	28	30	32	34	36
1	298.0	304.7	310.8	316.3	321.3	326.0	330.3	334.3	338.0
2	37.95	38.76	39.49	40.15	40.76	41.32	41.84	42.33	42.78
3	19.77	20.17	20.53	20.86	21.16	21.44	21.70	21.95	22.17
4	14.40	14.68	14.93	15.16	15.37	15.57	15.75	15.92	16.08
5	11.93	12.16	12.36	12.54	12.71	12.87	13.02	13.15	13.28
6	10.54	10.73	10.91	11.06	11.21	11.34	11.47	11.58	11.69
7	9.646	9.815	9.970	10.11	10.24	10.36	10.47	10.58	10.67
8	9.027	9.182	9.322	9.450	9.569	9.678	9.779	9.874	9.964
9	8.573	8.717	8.847	8.966	9.075	9.177	9.271	9.360	9.443
10	8.226	8.361	8.483	8.595	8.698	8.794	8.883	8.966	9.044
11	7.952	8.080	8.196	8.303	8.400	8.491	8.575	8.654	8.728
12	7.731	7.853	7.964	8.066	8.159	8.246	8.327	8.402	8.473
13	7.548	7.665	7.772	7.870	7.960	8.043	8.121	8.193	8.262
14	7.395	7.508	7.611	7.705	7.792	7.873	7.948	8.018	8.084
15	7.264	7.374	7.474	7.566	7.650	7.728	7.800	7.869	7.932
16	7.152	7.258	7.356	7.445	7.527	7.602	7.673	7.739	7.802
17	7.053	7.158	7.253	7.340	7.420	7.493	7.563	7.627	7.687
18	6.968	7.070	7.163	7.247	7.325	7.398	7.465	7.528	7.587
19	6.891	6.992	7.082	7.166	7.242	7.313	7.379	7.440	7.498
20	6.823	6.922	7.011	7.092	7.168	7.237	7.302	7.362	7.419
24	6.612	6.705	6.789	6.865	6.936	7.001	7.062	7.119	7.173
30	6.407	6.494	6.572	6.644	6.710	6.772	6.828	6.881	6.932
40	6.209	6.289	6.362	6.429	6.490	6.547	6.600	6.650	6.697
60	6.015	6.090	6.158	6.220	6.277	6.330	6.378	6.424	6.467
120	5.827	5.897	5.959	6.016	6.069	6.117	6.162	6.204	6.244
∞	5.645	5.709	5.766	5.818	5.866	5.911	5.952	5.990	6.026

ν \ n	38	40	50	60	70	80	90	100
1	341.5	344.8	358.9	370.1	379.4	387.3	394.1	400.1
2	43.21	43.61	45.33	46.70	47.83	48.80	49.64	50.38
3	22.39	22.59	23.45	24.13	24.71	25.19	25.62	25.99
4	16.23	16.37	16.98	17.46	17.86	18.20	18.50	18.77
5	13.40	13.52	14.00	14.39	14.72	14.99	15.23	15.45
6	11.80	11.90	12.31	12.65	12.92	13.16	13.37	13.55
7	10.77	10.85	11.23	11.52	11.77	11.99	12.17	12.34
8	10.05	10.13	10.47	10.75	10.97	11.17	11.34	11.49
9	9.521	9.594	9.912	10.17	10.38	10.57	10.73	10.87
10	9.117	9.187	9.486	9.726	9.927	10.10	10.25	10.39
11	8.798	8.864	9.148	9.377	9.568	9.732	9.875	10.00
12	8.539	8.603	8.875	9.094	9.277	9.434	9.571	9.693
13	8.326	8.387	8.648	8.859	9.035	9.187	9.318	9.436
14	8.146	8.204	8.457	8.661	8.832	8.978	9.106	9.219
15	7.992	8.049	8.295	8.492	8.658	8.800	8.924	9.035
16	7.860	7.916	8.154	8.347	8.507	8.646	8.767	8.874
17	7.745	7.799	8.031	8.219	8.377	8.511	8.630	8.735
18	7.643	7.696	7.924	8.107	8.261	8.393	8.508	8.611
19	7.553	7.605	7.828	8.008	8.159	8.288	8.401	8.502
20	7.473	7.523	7.742	7.919	8.067	8.194	8.305	8.404
24	7.223	7.270	7.476	7.642	7.780	7.900	8.004	8.097
30	6.978	7.023	7.215	7.370	7.500	7.611	7.709	7.796
40	6.740	6.782	6.960	7.104	7.225	7.328	7.419	7.500
60	6.507	6.546	6.710	6.843	6.954	7.050	7.133	7.207
120	6.281	6.316	6.467	6.588	6.689	6.776	6.852	6.919
∞	6.060	6.092	6.228	6.338	6.429	6.507	6.575	6.636

TABLE

TABLE 1 (*Continued*)

Critical Values for Duncan's New Multiple Range Test

Protection Level $P = (.95)^{p-1}$; Significance Level $\alpha = .05$

r \ p	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97
2	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085
3	4.501	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516
4	3.927	4.013	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033
5	3.635	3.749	3.797	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814
6	3.461	3.587	3.649	3.680	3.694	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697
7	3.344	3.477	3.548	3.588	3.611	3.622	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626
8	3.261	3.399	3.475	3.521	3.549	3.566	3.575	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579
9	3.199	3.339	3.420	3.470	3.502	3.523	3.536	3.544	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547
10	3.151	3.293	3.376	3.430	3.465	3.489	3.505	3.516	3.522	3.525	3.526	3.526	3.526	3.526	3.526	3.526	3.526	3.526
11	3.113	3.256	3.342	3.397	3.435	3.462	3.480	3.493	3.501	3.506	3.509	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510
12	3.082	3.225	3.313	3.370	3.410	3.439	3.459	3.474	3.484	3.491	3.496	3.498	3.499	3.499	3.499	3.499	3.499	3.499
13	3.055	3.200	3.289	3.348	3.389	3.419	3.442	3.458	3.470	3.478	3.484	3.488	3.490	3.490	3.490	3.490	3.490	3.490
14	3.033	3.178	3.268	3.329	3.372	3.403	3.426	3.444	3.457	3.467	3.474	3.479	3.482	3.484	3.484	3.485	3.485	3.485
15	3.014	3.160	3.250	3.312	3.356	3.389	3.413	3.432	3.446	3.457	3.465	3.471	3.476	3.478	3.480	3.481	3.481	3.481
16	2.998	3.144	3.235	3.298	3.343	3.376	3.402	3.422	3.437	3.449	3.458	3.465	3.470	3.473	3.477	3.478	3.478	3.478
17	2.984	3.130	3.222	3.285	3.331	3.366	3.392	3.412	3.429	3.441	3.451	3.459	3.465	3.469	3.473	3.475	3.476	3.476
18	2.971	3.118	3.210	3.274	3.321	3.356	3.383	3.405	3.421	3.435	3.445	3.454	3.460	3.465	3.470	3.472	3.474	3.474
19	2.960	3.107	3.199	3.264	3.311	3.347	3.375	3.397	3.415	3.429	3.440	3.449	3.456	3.462	3.467	3.470	3.472	3.473
20	2.950	3.097	3.190	3.255	3.303	3.339	3.368	3.391	3.409	3.424	3.436	3.445	3.453	3.459	3.464	3.467	3.470	3.472
24	2.919	3.066	3.160	3.226	3.276	3.315	3.345	3.370	3.390	3.406	3.420	3.432	3.441	3.449	3.456	3.461	3.465	3.469
30	2.888	3.035	3.131	3.199	3.250	3.290	3.322	3.349	3.371	3.389	3.405	3.418	3.430	3.439	3.447	3.454	3.460	3.466
40	2.858	3.006	3.102	3.171	3.224	3.266	3.300	3.328	3.352	3.373	3.390	3.405	3.418	3.429	3.439	3.448	3.456	3.463
60	2.829	2.976	3.073	3.143	3.198	3.241	3.277	3.307	3.333	3.355	3.374	3.391	3.406	3.419	3.431	3.442	3.451	3.460
120	2.800	2.947	3.045	3.116	3.172	3.217	3.254	3.287	3.314	3.337	3.359	3.377	3.394	3.409	3.423	3.435	3.446	3.457
∞	2.772	2.918	3.017	3.089	3.146	3.193	3.232	3.265	3.294	3.320	3.343	3.363	3.382	3.399	3.414	3.428	3.442	3.454

TABLE II

~~TABLE 1 (Continued)~~

Critical Values for Duncan's New Multiple Range Test

Protection Level $P = (.95)^{p-1}$; Significance Level $\alpha = .05$

ν \ p	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	50	60	70	80	90	100
1	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97	17.97
2	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085
3	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516
4	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033
5	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814
6	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697
7	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.626	3.636	3.626	3.626	3.626	3.626
8	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579
9	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.517	3.574	3.547	3.547
10	3.526	3.526	3.526	3.526	3.526	3.526	3.526	3.526	3.526	3.526	3.526	3.526	3.526	3.526	3.526	3.526	3.526
11	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510
12	3.499	3.499	3.499	3.499	3.499	3.499	3.499	3.499	3.499	3.499	3.499	3.499	3.499	3.499	3.499	3.499	3.499
13	3.490	3.490	3.490	3.490	3.490	3.490	3.490	3.490	3.490	3.490	3.490	3.490	3.490	3.490	3.490	3.490	3.490
14	3.485	3.485	3.485	3.485	3.485	3.485	3.485	3.485	3.485	3.485	3.485	3.485	3.485	3.485	3.485	3.485	3.485
15	3.481	3.481	3.481	3.481	3.481	3.481	3.481	3.481	3.481	3.481	3.481	3.481	3.481	3.481	3.481	3.481	3.481
16	3.478	3.478	3.478	3.478	3.478	3.478	3.478	3.478	3.478	3.478	3.478	3.478	3.478	3.478	3.478	3.478	3.478
17	3.476	3.476	3.476	3.476	3.476	3.476	3.476	3.476	3.476	3.476	3.476	3.476	3.476	3.476	3.476	3.476	3.476
18	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474
19	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474
20	3.473	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474	3.474
24	3.471	3.475	3.477	3.477	3.477	3.477	3.477	3.477	3.477	3.477	3.477	3.477	3.477	3.477	3.477	3.477	3.477
30	3.470	3.477	3.481	3.484	3.486	3.486	3.486	3.486	3.486	3.486	3.486	3.486	3.486	3.486	3.486	3.486	3.486
40	3.469	3.479	3.486	3.492	3.497	3.500	3.503	3.504	3.504	3.504	3.504	3.504	3.504	3.504	3.504	3.504	3.504
60	3.467	3.481	3.492	3.501	3.509	3.515	3.521	3.525	3.529	3.531	3.534	3.537	3.537	3.537	3.537	3.537	3.537
120	3.466	3.483	3.498	3.511	3.522	3.532	3.541	3.548	3.555	3.561	3.566	3.585	3.596	3.600	3.601	3.601	3.601
∞	3.466	3.486	3.505	3.522	3.536	3.550	3.562	3.574	3.584	3.594	3.603	3.640	3.668	3.690	3.708	3.722	3.735

TAB. II

~~TABLE 1 (Continued)~~

Critical Values for Duncan's New Multiple Range Test

Protection Level $P = (.99)^{p-1}$; Significance Level $\alpha = .01$

ν p	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03
2	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04
3	8.261	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321
4	6.512	6.677	6.740	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756
5	5.702	5.893	5.989	6.040	6.065	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074
6	5.243	5.439	5.549	5.614	5.655	5.680	5.691	5.701	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703
7	4.949	5.145	5.260	5.334	5.383	5.416	5.439	5.454	5.464	5.470	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472
8	4.746	4.939	5.057	5.135	5.189	5.227	5.256	5.276	5.291	5.302	5.309	5.314	5.316	5.317	5.317	5.317	5.317	5.317
9	4.596	4.787	4.906	4.986	5.043	5.086	5.118	5.142	5.160	5.174	5.185	5.193	5.199	5.203	5.205	5.206	5.206	5.206
10	4.482	4.671	4.790	4.871	4.931	4.975	5.010	5.037	5.058	5.074	5.088	5.098	5.106	5.112	5.117	5.120	5.122	5.124
11	4.392	4.579	4.697	4.780	4.841	4.887	4.924	4.952	4.975	4.994	5.009	5.021	5.031	5.039	5.045	5.050	5.054	5.057
12	4.320	4.504	4.622	4.706	4.767	4.815	4.852	4.883	4.907	4.927	4.944	4.958	4.969	4.978	4.986	4.993	4.998	5.002
13	4.260	4.442	4.560	4.644	4.706	4.755	4.793	4.824	4.850	4.872	4.889	4.904	4.917	4.928	4.937	4.944	4.950	4.956
14	4.210	4.391	4.508	4.591	4.654	4.704	4.743	4.775	4.802	4.824	4.843	4.859	4.872	4.884	4.894	4.902	4.910	4.916
15	4.168	4.347	4.463	4.547	4.610	4.660	4.700	4.733	4.760	4.783	4.803	4.820	4.834	4.846	4.857	4.866	4.874	4.881
16	4.131	4.309	4.425	4.509	4.572	4.622	4.663	4.696	4.724	4.748	4.768	4.786	4.800	4.813	4.825	4.835	4.844	4.851
17	4.099	4.275	4.391	4.475	4.539	4.589	4.630	4.661	4.693	4.717	4.738	4.756	4.771	4.785	4.797	4.807	4.816	4.824
18	4.071	4.246	4.362	4.445	4.509	4.560	4.601	4.635	4.664	4.689	4.711	4.729	4.745	4.759	4.772	4.783	4.792	4.801
19	4.046	4.220	4.335	4.419	4.483	4.534	4.575	4.610	4.639	4.665	4.686	4.705	4.722	4.736	4.749	4.761	4.771	4.780
20	4.024	4.197	4.312	4.395	4.459	4.510	4.552	4.587	4.617	4.642	4.664	4.684	4.701	4.716	4.729	4.741	4.751	4.761
24	3.956	4.126	4.239	4.322	4.386	4.437	4.480	4.516	4.546	4.573	4.596	4.616	4.634	4.651	4.665	4.678	4.690	4.700
30	3.889	4.056	4.168	4.250	4.314	4.366	4.409	4.445	4.477	4.504	4.528	4.550	4.569	4.586	4.601	4.615	4.628	4.640
40	3.825	3.988	4.098	4.180	4.244	4.296	4.339	4.376	4.408	4.436	4.461	4.483	4.503	4.521	4.537	4.553	4.566	4.579
60	3.762	3.922	4.031	4.111	4.174	4.226	4.270	4.307	4.340	4.368	4.394	4.417	4.438	4.456	4.474	4.490	4.504	4.518
120	3.702	3.858	3.965	4.044	4.107	4.158	4.202	4.239	4.272	4.301	4.327	4.351	4.372	4.392	4.410	4.426	4.442	4.456
∞	3.643	3.796	3.900	3.978	4.040	4.091	4.135	4.172	4.205	4.235	4.261	4.285	4.307	4.327	4.345	4.363	4.379	4.394

TABLE II

~~TABLE 1 (Continued)~~

Critical Values for Duncan's New Multiple Range Test

Protection Level $P = (.99)^{p-1}$; Significance Level $\alpha = .01$

r \ p	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	50	60	70	80	90	100
1	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03	90.03
2	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04	14.04
3	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321
4	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756
5	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074
6	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703
7	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472
8	5.317	5.317	5.317	5.317	5.317	5.317	5.317	5.317	5.317	5.317	5.317	5.317	5.317	5.317	5.317	5.317	5.317
9	5.206	5.206	5.206	5.206	5.206	5.206	5.206	5.206	5.206	5.206	5.206	5.206	5.206	5.206	5.206	5.206	5.206
10	5.124	5.124	5.124	5.124	5.124	5.124	5.124	5.124	5.124	5.124	5.124	5.124	5.124	5.124	5.124	5.124	5.124
11	5.059	5.061	5.061	5.061	5.061	5.061	5.061	5.061	5.061	5.061	5.061	5.061	5.061	5.061	5.061	5.061	5.061
12	5.006	5.010	5.011	5.011	5.011	5.011	5.011	5.011	5.011	5.011	5.011	5.011	5.011	5.011	5.011	5.011	5.011
13	4.960	4.966	4.970	4.972	4.972	4.972	4.972	4.972	4.972	4.972	4.972	4.972	4.972	4.972	4.972	4.972	4.972
14	4.921	4.929	4.935	4.938	4.940	4.940	4.940	4.940	4.940	4.940	4.940	4.940	4.940	4.940	4.940	4.940	4.940
15	4.887	4.897	4.904	4.909	4.912	4.914	4.914	4.914	4.914	4.914	4.914	4.914	4.914	4.914	4.914	4.914	4.914
16	4.858	4.869	4.877	4.883	4.887	4.890	4.892	4.892	4.892	4.892	4.892	4.892	4.892	4.892	4.892	4.892	4.892
17	4.832	4.844	4.853	4.860	4.865	4.869	4.872	4.873	4.874	4.874	4.874	4.874	4.874	4.874	4.874	4.874	4.874
18	4.808	4.821	4.832	4.839	4.846	4.850	4.854	4.856	4.857	4.858	4.858	4.858	4.858	4.858	4.858	4.858	4.858
19	4.788	4.802	4.812	4.821	4.828	4.833	4.838	4.841	4.843	4.844	4.845	4.845	4.845	4.845	4.845	4.845	4.845
20	4.769	4.784	4.795	4.805	4.813	4.818	4.823	4.827	4.830	4.832	4.833	4.833	4.833	4.833	4.833	4.833	4.833
24	4.710	4.727	4.741	4.752	4.762	4.770	4.777	4.783	4.788	4.791	4.794	4.802	4.802	4.802	4.802	4.802	4.802
30	4.650	4.669	4.685	4.699	4.711	4.721	4.730	4.738	4.744	4.750	4.755	4.772	4.777	4.777	4.777	4.777	4.777
40	4.591	4.611	4.630	4.645	4.659	4.671	4.682	4.692	4.700	4.708	4.715	4.740	4.754	4.761	4.764	4.764	4.764
60	4.530	4.553	4.573	4.591	4.607	4.620	4.633	4.645	4.655	4.665	4.673	4.707	4.730	4.745	4.755	4.761	4.765
120	4.469	4.494	4.516	4.535	4.552	4.568	4.583	4.596	4.609	4.619	4.630	4.673	4.703	4.727	4.745	4.759	4.770
∞	4.408	4.434	4.457	4.478	4.497	4.514	4.530	4.545	4.559	4.572	4.584	4.635	4.675	4.707	4.734	4.756	4.776

TABLE

servations in each group, observe $\overline{X}_0$ and $\overline{X}_i$ $(i=1, 2, \cdots, 5)$, calculate s^2 from equation (1), and declare any treatment superior to the control which gives a mean $\overline{X}_i$ greater than $\overline{X}_0+2.26s\sqrt{2/21}$.

TABLE 1a*

TABLE OF t FOR ONE-SIDED COMPARISONS BETWEEN p TREATMENT MEANS AND A CONTROL FOR A JOINT CONFIDENCE COEFFICIENT OF $P=95\%$

	p, Number Of Treatment Means (Excluding The Control)								
d.f.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	2.02	2.44	2.68	2.85	2.98	3.08	3.16	3.24	3.30
6	1.94	2.34	2.56	2.71	2.83	2.92	3.00	3.07	3.12
7	1.89	2.27	2.48	2.62	2.73	2.82	2.89	2.95	3.01
8	1.86	2.22	2.42	2.55	2.66	2.74	2.81	2.87	2.92
9	1.83	2.18	2.37	2.50	2.60	2.68	2.75	2.81	2.86
10	1.81	2.15	2.34	2.47	2.56	2.64	2.70	2.76	2.81
11	1.80	2.13	2.31	2.44	2.53	2.60	2.67	2.72	2.77
12	1.78	2.11	2.29	2.41	2.50	2.58	2.64	2.69	2.74
13	1.77	2.09	2.27	2.39	2.48	2.55	2.61	2.66	2.71
14	1.76	2.08	2.25	2.37	2.46	2.53	2.59	2.64	2.69
15	1.75	2.07	2.24	2.36	2.44	2.51	2.57	2.62	2.67
16	1.75	2.06	2.23	2.34	2.43	2.50	2.56	2.61	2.65
17	1.74	2.05	2.22	2.33	2.42	2.49	2.54	2.59	2.64
18	1.73	2.04	2.21	2.32	2.41	2.48	2.53	2.58	2.62
19	1.73	2.03	2.20	2.31	2.40	2.47	2.52	2.57	2.61
20	1.72	2.03	2.19	2.30	2.39	2.46	2.51	2.56	2.60
24	1.71	2.01	2.17	2.28	2.36	2.43	2.48	2.53	2.57
30	1.70	1.99	2.15	2.25	2.33	2.40	2.45	2.50	2.54
40	1.68	1.97	2.13	2.23	2.31	2.37	2.42	2.47	2.51
60	1.67	1.95	2.10	2.21	2.28	2.35	2.39	2.44	2.48
120	1.66	1.93	2.08	2.18	2.26	2.32	2.37	2.41	2.45
inf.	1.64	1.92	2.06	2.16	2.23	2.29	2.34	2.38	2.42

* Table 1a gives a solution $d_i'=t$ to equation (4) in the text for $P=.95$ for the case $\rho_{ij}=1/2$.

TABLE

TABLE 1b*

TABLE OF t FOR ONE-SIDED COMPARISONS BETWEEN p TREATMENT MEANS AND A CONTROL FOR A JOINT CONFIDENCE COEFFICIENT OF $P=99\%$

	p, Number Of Treatment Means (Excluding The Control)								
d.f.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	3.37	3.90	4.21	4.43	4.60	4.73	4.85	4.94	5.03
6	3.14	3.61	3.88	4.07	4.21	4.33	4.43	4.51	4.59
7	3.00	3.42	3.66	3.83	3.96	4.07	4.15	4.23	4.30
8	2.90	3.29	3.51	3.67	3.79	3.88	3.96	4.03	4.09
9	2.82	3.19	3.40	3.55	3.66	3.75	3.82	3.89	3.94
10	2.76	3.11	3.31	3.45	3.56	3.64	3.71	3.78	3.83
11	2.72	3.06	3.25	3.38	3.48	3.56	3.63	3.69	3.74
12	2.68	3.01	3.19	3.32	3.42	3.50	3.56	3.62	3.67
13	2.65	2.97	3.15	3.27	3.37	3.44	3.51	3.56	3.61
14	2.62	2.94	3.11	3.23	3.32	3.40	3.46	3.51	3.56
15	2.60	2.91	3.08	3.20	3.29	3.36	3.42	3.47	3.52
16	2.58	2.88	3.05	3.17	3.26	3.33	3.39	3.44	3.48
17	2.57	2.86	3.03	3.14	3.23	3.30	3.36	3.41	3.45
18	2.55	2.84	3.01	3.12	3.21	3.27	3.33	3.38	3.42
19	2.54	2.83	2.99	3.10	3.18	3.25	3.31	3.36	3.40
20	2.53	2.81	2.97	3.08	3.17	3.23	3.29	3.34	3.38
24	2.49	2.77	2.92	3.03	3.11	3.17	3.22	3.27	3.31
30	2.46	2.72	2.87	2.97	3.05	3.11	3.16	3.21	3.24
40	2.42	2.68	2.82	2.92	2.99	3.05	3.10	3.14	3.18
60	2.39	2.64	2.78	2.87	2.94	3.00	3.04	3.08	3.12
120	2.36	2.60	2.73	2.82	2.89	2.94	2.99	3.03	3.06
inf.	2.33	2.56	2.68	2.77	2.84	2.89	2.93	2.97	3.00

* Table 1b gives a solution $d_i'=t$ to equation (4) in the text for $P=.99$ for the case $\rho_{ij}=1/2$.

TABLE [illegible]

TABLE 2a*

TABLE OF t FOR TWO-SIDED COMPARISONS BETWEEN p TREATMENT MEANS AND A CONTROL FOR A JOINT CONFIDENCE COEFFICIENT OF $P = 95\%$

	p, Number Of Treatment Means (Excluding The Control)								
d.f.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	2.57	3.03	3.39	3.66	3.88	4.06	4.22	4.36	4.49
6	2.45	2.86	3.18	3.41	3.60	3.75	3.88	4.00	4.11
7	2.36	2.75	3.04	3.24	3.41	3.54	3.66	3.76	3.86
8	2.31	2.67	2.94	3.13	3.28	3.40	3.51	3.60	3.68
9	2.26	2.61	2.86	3.04	3.18	3.29	3.39	3.48	3.55
10	2.23	2.57	2.81	2.97	3.11	3.21	3.31	3.39	3.46
11	2.20	2.53	2.76	2.92	3.05	3.15	3.24	3.31	3.38
12	2.18	2.50	2.72	2.88	3.00	3.10	3.18	3.25	3.32
13	2.16	2.48	2.69	2.84	2.96	3.06	3.14	3.21	3.27
14	2.14	2.46	2.67	2.81	2.93	3.02	3.10	3.17	3.23
15	2.13	2.44	2.64	2.79	2.90	2.99	3.07	3.13	3.19
16	2.12	2.42	2.63	2.77	2.88	2.96	3.04	3.10	3.16
17	2.11	2.41	2.61	2.75	2.85	2.94	3.01	3.08	3.13
18	2.10	2.40	2.59	2.73	2.84	2.92	2.99	3.05	3.11
19	2.09	2.39	2.58	2.72	2.82	2.90	2.97	3.04	3.09
20	2.09	2.38	2.57	2.70	2.81	2.89	2.96	3.02	3.07
24	2.06	2.35	2.53	2.66	2.76	2.84	2.91	2.96	3.01
30	2.04	2.32	2.50	2.62	2.72	2.79	2.86	2.91	2.96
40	2.02	2.29	2.47	2.58	2.67	2.75	2.81	2.86	2.90
60	2.00	2.27	2.43	2.55	2.63	2.70	2.76	2.81	2.85
120	1.98	2.24	2.40	2.51	2.59	2.66	2.71	2.76	2.80
inf.	1.96	2.21	2.37	2.47	2.55	2.62	2.67	2.71	2.75

* Table 2a gives a solution $d_i'' = t$ which makes the right-hand side of inequality (11) in the text equal to .95 for the case $\rho = 1/2$. This may be used as an approximate solution to equation (5) in the text for $P = .95$ for the case $\rho_{ij} = 1/2$.

TABLE 1.

TABLE 2b*

TABLE OF t FOR TWO-SIDED COMPARISONS BETWEEN p TREATMENT MEANS AND A CONTROL FOR A JOINT CONFIDENCE COEFFICIENT OF $P=99\%$

	p, Number Of Treatment Means (Excluding The Control)								
d.f.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	4.03	4.63	5.09	5.44	5.73	5.97	6.18	6.36	6.53
6	3.71	4.22	4.60	4.88	5.11	5.30	5.47	5.61	5.74
7	3.50	3.95	4.28	4.52	4.71	4.87	5.01	5.13	5.24
8	3.36	3.77	4.06	4.27	4.44	4.58	4.70	4.81	4.90
9	3.25	3.63	3.90	4.09	4.24	4.37	4.48	4.57	4.65
10	3.17	3.53	3.78	3.95	4.10	4.21	4.31	4.40	4.47
11	3.11	3.45	3.68	3.85	3.98	4.09	4.18	4.26	4.33
12	3.05	3.39	3.61	3.76	3.89	3.99	4.08	4.15	4.22
13	3.01	3.33	3.54	3.69	3.81	3.91	3.99	4.06	4.13
14	2.98	3.29	3.49	3.64	3.75	3.84	3.92	3.99	4.05
15	2.95	3.25	3.45	3.59	3.70	3.79	3.86	3.93	3.99
16	2.92	3.22	3.41	3.55	3.65	3.74	3.82	3.88	3.93
17	2.90	3.19	3.38	3.51	3.62	3.70	3.77	3.83	3.89
18	2.88	3.17	3.35	3.48	3.58	3.67	3.74	3.80	3.85
19	2.86	3.15	3.33	3.46	3.55	3.64	3.70	3.76	3.81
20	2.85	3.13	3.31	3.43	3.53	3.61	3.67	3.73	3.78
24	2.80	3.07	3.24	3.36	3.45	3.52	3.58	3.64	3.69
30	2.75	3.01	3.17	3.28	3.37	3.44	3.50	3.55	3.59
40	2.70	2.95	3.10	3.21	3.29	3.36	3.41	3.46	3.50
60	2.66	2.90	3.04	3.14	3.22	3.28	3.33	3.38	3.42
120	2.62	2.84	2.98	3.08	3.15	3.21	3.25	3.30	3.33
inf.	2.58	2.79	2.92	3.01	3.08	3.14	3.18	3.22	3.25

* Table 2b gives a solution $d_i''=t$ which makes the right-hand side of inequality (11) in the text equal to .99 for the case $\rho=1/2$. This may be used as an approximate solution to equation (5) in the text for $P=.99$ for the case $\rho_{ij}=1/2$.

Déjardin Jean, Nguyen Ngoc Quoi. (1961).

Quelques tests de comparaison deux à deux des moyennes de traitements.

s.l. : s.n., 18 p. multigr.