

DOCUMENT DE TRAVAIL

PRESENTATION D'UNE METHODE
DE MODELISATION APPLIQUEE
AU LAGON SUD-OUEST
DE NOUVELLE CALEDONIE

Par : P. DOUILLET

MAI 1986

Remarque :

Ce texte est un document de travail. Il regroupe quelques idées personnelles de l'auteur quant au milieu à traiter, ainsi que le résumé et l'adaptation de différents articles de MM. SALOMON et LE HIR.

INTRODUCTION

Les régions littorales font l'objet d'une préoccupation grandissante. En effet, ce sont des zones naturellement sensibles. Les conditions physico-chimiques qui les caractérisent, dues notamment aux mélanges d'eaux marines salées et des eaux continentales riches en éléments nutritifs, permettent le développement de nombreux producteurs primaires induisant une chaîne trophique complète et diversifiée.

Ces conditions sont susceptibles d'être modifiées par l'apport de rejets urbains ou industriels. D'autre part la présence de ports entraîne une concentration du trafic maritime, et augmente donc les risques de pollution.

Afin de mieux cerner les problèmes spécifiques à ces régions, il est nécessaire de connaître et de comprendre les mécanismes physiques, chimiques et biologiques dont elles sont le siège.

A l'amont de toutes les disciplines scientifiques à étudier, on peut situer la physique. En effet, la compréhension des mouvements des sables et des vases en sédimentologie, de l'évolution des constituants en chimie, de la distribution des espèces et de leur dynamique en biologie et de bien d'autres phénomènes passe par la connaissance des processus physiques au sein de la zone d'étude. Les processus physiques se caractérisent principalement par la circulation des eaux. Ce sont donc essentiellement les courants que l'on va chercher à appréhender.

La zone lagunaire autour de Nouméa constitue un exemple intéressant à plusieurs titres. C'est à la fois un secteur d'activités portuaires notable, la région la plus peuplée de Nouvelle-Calédonie et l'exutoire industriel le plus important du lagon sud-ouest. En particulier on pourra se poser la question fondamentale du devenir des eaux de la zone de Nouméa. Il s'agira, par exemple, de savoir quel sera le déplacement d'un polluant rejeté en un point de cette zone.

La méthode la plus fréquemment exploitée pour l'étude des courants est la démarche expérimentale. Mais depuis l'avènement des ordinateurs, on a développé des modèles mathématiques capables de résoudre numériquement les équations du mouvement (des particules d'eau) établies quant à elles depuis fort longtemps. Ces modèles qui reconstituent la circulation dans la zone d'étude présentent, entre autres avantages, celui de

permettre une meilleure compréhension des mécanismes en jeu.

Une première étape de l'étude de la circulation dans une zone littorale est de déterminer le courant moyenné sur la profondeur: le cas du modèle bidimensionnel horizontal réalisé par SALOMON. Cependant quelques mesures récentes, effectuées dans le lagon sud-ouest, semblent montrer que le comportement du courant de surface pouvait être différent de celui du fond. Ceci peut avoir des conséquences pratiques importantes. Selon le phénomène étudié, on s'intéressera préférentiellement au mouvement des couches d'eau superficielles (par exemple, pour la dispersion d'un polluant de faible densité) ou à celui des particules près du fond (par exemple, le déplacement des sables). Cette deuxième étape peut être réalisée en utilisant un modèle développé par LE HIR. Ce schéma est pseudo-tridimensionnel, c'est à dire qu'il découple, dans les équations, le plan horizontal de la direction verticale. Pour réaliser ce découplage, on soustrait des équations générales du mouvement, les équations moyennées sur la profondeur. On obtient ainsi les équations des fluctuations du courant suivant la verticale. Ces équations de fluctuations sont simplifiées et sont résolues uniquement dans la direction verticale en tout point du maillage horizontal. Le courant total sera donné en ajoutant aux fluctuations de courant, le courant moyenné sur la verticale. Ce modèle qui n'est pas véritablement tridimensionnel offre l'avantage d'en présenter une approximation acceptable à moindres frais.

EQUATIONS DE BASE

La physique étudie la distribution des propriétés telles que la température, la salinité, la densité, qui distinguent une masse d'eau d'une autre, et étudie aussi les mouvements de l'océan en réponse aux forces agissant sur lui.

Les études physiques sont menées d'une part par l'observation directe des propriétés et des mouvements, d'autre part par l'application de principes physiques, mécanismes et thermodynamiques pour la détermination du mouvement des particules. Le trait essentiel de la deuxième approche est d'utiliser des lois physiques pour essayer d'obtenir des relations mathématiques entre les forces agissant sur l'océan et le mouvement en résultant. Les deux lois les plus importantes sont la loi de conservation de la masse et la loi de conservation de la quantité de mouvement.

La loi de conservation de la masse exprime que la masse restant constante, si un petit élément d'eau, se déplaçant, change légèrement de volume, sa densité change. L'équation est donnée par la formule suivante:

$$(1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho V) = 0$$

où ρ = densité

$V=(u,v,w)$ sont les trois composantes de la vitesse exprimée dans le repère (O,x,y,z)

Les équations du mouvement découlent directement de la seconde loi de Newton ($F=ma$). Cette relation dit que si la résultante des forces F agit sur un corps de masse m , le corps acquiert une accélération ou change de vitesse dans une proportion a . On écrit:

$$\text{accélération} = \frac{(\text{pression} + \text{gravité} + \text{friction} + \text{forces de marée} + \text{etc...})}{\text{unités de masse}}$$

Mathématiquement cette relation s'écrit:

$$(2) \quad \frac{\partial(\rho V)}{\partial t} + \nabla(\rho V V) + \rho f \times V = -\nabla P + \rho F + \mu \nabla^2 V$$

où ρ = densité

$V = (u, v, w)$ la vitesse
 $f = 2 \omega \sin \phi$: la force de coriolis
 ω = la vitesse de rotation de la terre
 ϕ = la latitude
 P = la pression
 F = les forces extérieures (pesanteur, forces astronomiques, etc...)
 μ = la viscosité moléculaire
 $\nabla = (\partial./\partial x, \partial./\partial y, \partial./\partial z)$
 $\nabla^2 = (\partial^2./\partial x^2, \partial^2./\partial y^2, \partial^2./\partial z^2)$
 \times = le produit vectoriel

On utilise le repère (O, x, y, z) lié à la terre. l'origine étant située à la surface de la mer au repos, l'axe Ox dirigé vers l'est, l'axe Oy vers le nord et l'axe Oz suivant la verticale ascendante.

Notations en valeurs moyennes

Les nombres de Reynolds atteints par la circulation en mer ou en estuaire sont extrêmement élevés, ce qui caractérise des écoulements fondamentalement turbulents.

Nombre de Reynolds : $R = \frac{V D \ell}{\mu}$

où D est une dimension de la veine de liquide, perpendiculaire au vecteur vitesse.

Outre ces phénomènes aléatoires que nous limiterons ici à des périodes de l'ordre de quelques minutes, les courants en milieu littoral sont constitués de composantes périodiques à basse fréquence tel la marée et toutes ses composantes, les cycles fluviaux, météorologiques, etc... et généralement d'un terme continu.

Les modèles actuels ne peuvent prétendre traiter de la vitesse instantanée et reproduire tous les phénomènes. Force est donc de séparer les processus aléatoires rapides des phénomènes cohérents à plus longue période qui nous intéresseront ici.

\bar{V} et $\bar{\rho}$ étant la moyenne de V et ρ sur une période de temps θ , on écrira:

$$V = \bar{V} + V' \quad \text{et} \quad \rho = \bar{\rho} + \rho'$$

La période θ étant grande devant celle des fluctuations V et ρ , mais petite par rapport à la constante de temps caractéristique du comportement du système (par exemple, période de la marée).
 θ pourra être de l'ordre de quelques minutes en milieu littoral.

En intégrant par rapport au temps sur la période θ et en divisant par θ les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, on obtient:

$$(3) \quad \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla(\bar{\rho} \bar{V}) + \nabla(\bar{\rho}' \bar{V}') = 0$$

$$(4) \quad \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \nabla(\bar{V} \bar{V}) + f \times \bar{V} = - \frac{1}{\rho} \nabla \bar{P} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \bar{V} - \nabla \bar{V}' \bar{V}'$$

On considère très généralement que l'eau de mer est incompressible, c'est à dire:

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} = - \bar{V} \nabla \bar{\rho}$$

d'où l'équation de la continuité en volume:

$$\nabla \bar{V} = 0$$

Dans le reste de ce paragraphe on posera certaines hypothèses physiques:

Hypothèse 1: il faut considérer avec Boussinesq, que les dérivées de la masse volumique sont négligeables, excepté lorsqu'elles sont multipliées par l'accélération de la pesanteur.

Les deux derniers termes de l'équation (4) représentent la dispersion de la quantité de mouvement du fait de la viscosité moléculaire et des fluctuations turbulentes de la vitesse.

Ces deux termes sont généralement regroupés en un seul:

$$- \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \bar{V} + \nabla \bar{V}' \bar{V}' = - N \nabla^2 \bar{V}$$

Ce terme appelé viscosité turbulente, est exprimé de manière analogue à la viscosité moléculaire. Celle-ci ayant des caractéristiques différentes selon les directions, on est amené à définir la viscosité turbulente sous forme d'un tenseur.

Hypothèse 2: on suppose les accélérations verticales négligeables devant l'accélération de la pesanteur. C'est l'hypothèse classique de quasi-hydrostaticité. On obtient alors:

$$(5) \quad \frac{\partial P}{\partial z} = - \rho g$$

On peut intégrer de la surface à la cote z:

$$\int_z^\zeta \frac{\partial P}{\partial z} dz = P_\zeta - P_z = \int_z^\zeta \rho g dz \text{ où } \zeta \text{ est la cote de surface,}$$

et comme $P_\zeta = P_a$ (pression atmosphérique à la surface)

$$(6) \quad P(z) = P_a + \int_z^\zeta \rho g dz$$

Une hypothèse habituelle est de considérer que la masse volumique est constante sur toute la couche d'eau ($\partial\rho/\partial z = 0$):

$$P(z) = P_a + g (\zeta - z)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P(z)}{\partial x} = \frac{\partial P_a}{\partial x} + g \frac{\partial \rho}{\partial x} (\zeta - z) + g \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

Cette hypothèse ne sera pas généralisée à toute la démonstration. Dans les parties concernées par cette hypothèse, le texte sera en petits caractères.

En estuaire, du fait des grandes variations de salinité, on définira une expression de l'équation d'état de la forme:

$$(7) \quad \rho = \rho_0 (1 + \alpha s)$$

où ρ = la masse volumique de l'eau douce
 s = la salinité
 $\alpha \approx 0.78$

Dans ce cas l'équation du mouvement ne pourra être résolue que si on lui adjoint l'équation de conservation de la masse, appliquée au sel:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = - \nabla (V s) + D \Delta s \quad \text{où } \Delta = \nabla^2$$

où D = le coefficient de diffusion moléculaire.

Considérons comme précédemment la moyenne de cette expression s, sur l'intervalle de temps θ .

$$(8) \quad \frac{\partial \bar{s}}{\partial t} + \nabla(\bar{v}s) + \nabla(v's') - D\Delta \bar{s} = 0$$

Compte tenu de l'équation de continuité en volume et en introduisant, comme dans les équations du mouvement, la diffusion turbulente K, il vient:

$$(9) \quad \frac{\partial \bar{s}}{\partial t} + \nabla(\bar{v}s) - \nabla(K\bar{v}s) = 0$$

La charge en sédiments transportés en suspension s'exprime également par une relation de la même forme que l'équation (9), mais comportant en plus un terme de décantation sous l'effet de la vitesse de chute des particules (W_s):

$$\frac{\partial \bar{C}_s}{\partial t} + \nabla(\bar{v}C_s) - \frac{\partial W_s \bar{C}_s}{\partial z} - \nabla(K_s \bar{v}C_s) = 0 \text{ où } \bar{C}_s \text{ est la concentration}$$

Finalement, on obtient le système d'équations suivant:

$$(10) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$(11) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} - f.v = - \frac{\partial P_a}{\partial x} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \int_z^\zeta \rho g dz \\ + \frac{\partial}{\partial x} (N_{xx} \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (N_{xy} \frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (N_{xz} \frac{\partial u}{\partial z})$$

$$(12) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial vw}{\partial z} + f.u = - \frac{\partial P_a}{\partial y} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial y} \int_z^\zeta \rho g dz \\ + \frac{\partial}{\partial x} (N_{yx} \frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (N_{yy} \frac{\partial v}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (N_{yz} \frac{\partial v}{\partial z})$$

$$(13) \quad \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial us}{\partial x} + \frac{\partial vs}{\partial y} + \frac{\partial ws}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} (K_x \frac{\partial s}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (K_y \frac{\partial s}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (K_z \frac{\partial s}{\partial z})$$

$$(14) \quad \rho = \rho_0 (1 + \alpha s)$$

Dans la mesure où l'on suppose la masse volumique constante sur toute la couche d'eau, on obtient les équations:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} - f \cdot v = & - \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} (\zeta - z) - g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(N_{xz} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial vw}{\partial z} + f \cdot u = & - \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial y} (\zeta - z) - g \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{yx} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(N_{yz} \frac{\partial v}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial us}{\partial x} + \frac{\partial vs}{\partial y} + \frac{\partial ws}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial s}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial s}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial s}{\partial z} \right)$$

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha s)$$

Etablissement des équations de St-Venant

(espace de calcul en x, y, t)

On est souvent confronté à des problèmes pour lesquels la structure verticale des courants ne présente pas un grand intérêt. Pour les problèmes de navigation ou de génie maritime notamment, on se contentera du niveau de la surface libre et d'une valeur du courant moyen sur une certaine épaisseur d'eau, généralement près de la surface.

On cherchera donc, chaque fois que cela est possible, à reproduire des phénomènes moyens sur la hauteur d'eau, ce qui se fera avec d'autant plus de réalisme que l'estuaire, ou la zone littorale concernée, sera mieux mélangé.

Soit donc à intégrer sur la verticale, les équations (10)-(14).

On définit \bar{u} et \bar{v} de la façon suivante:

$$\bar{u} = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\zeta} u \, dz \quad \text{et} \quad \bar{v} = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\zeta} v \, dz$$

où ζ = la côte de surface
 $-h$ = la côte du fond
 H = la hauteur totale de l'eau

Soit \tilde{u} (\tilde{v}) l'écart entre la valeur locale u (v) et la valeur moyenne \bar{u} (\bar{v}).

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} + \tilde{u} \\ v &= \bar{v} + \tilde{v} \end{aligned}$$

On définit, tout d'abord, certaines règles et conditions à respecter pour l'intégration des équations:

la règle de Leibnitz:

$$(R1) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{z_1}^{z_2} f \, dz = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial f}{\partial x_i} \, dz + f(z_2) \frac{\partial z_2}{\partial x_i} - f(z_1) \frac{\partial z_1}{\partial x_i}$$

où $x_1 = x$ et $x_2 = y$

les conditions d'imperméabilité au fond et à la surface:

$$(R2) \quad \frac{d-h}{dt} = w_{-h} = 0 + u(-h) \frac{\partial -h}{\partial x} + v(-h) \frac{\partial -h}{\partial y}$$

$$(R3) \quad \frac{d\zeta}{dt} = w_{\zeta} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u(\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v(\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

Intégration de l'équation de continuité (10):

d'après (R1):

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dz = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-h}^{\zeta} u_i dz - u_i(\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} - u_i(-h) \frac{\partial -h}{\partial x_i} \quad i=1,2$$

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial w}{\partial z} dz = w_{\zeta} - w_{-h}$$

d'ou

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{\zeta} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz &= \frac{\partial H\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial H\bar{v}}{\partial y} + w_{\zeta} - \underbrace{u_{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - v_{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y}}_{= \frac{\partial \zeta}{\partial t} \text{ d'après } R_3} + \underbrace{u_{-h} \frac{\partial -h}{\partial x} + v_{-h} \frac{\partial -h}{\partial y} - w_{-h}}_{= 0 \text{ d'après } R_2} \end{aligned}$$

L'équation de continuité en volume s'écrit donc:

$$(15) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial H\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial H\bar{v}}{\partial y} = 0$$

Intégration des équations (11) et (12):

d'après R1:

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial u_i}{\partial t} dz = \frac{\partial H\bar{u}_i}{\partial t} - u_{i,\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad i=1,2$$

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} dz = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\int_{-h}^{\zeta} u_i u_j dz \right) - u_{i,\zeta} u_{j,\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} - u_{i,-h} u_{j,-h} \frac{\partial -h}{\partial x_j} \quad i=1,2$$

où $u_1 = u$ et $u_2 = v$

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} dz = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\zeta} \bar{u}_i \bar{u}_j dz + \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\zeta} \tilde{u}_i \tilde{u}_j dz - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\int_{-h}^{\zeta} \bar{u}_i \tilde{u}_j dz + \int_{-h}^{\zeta} \tilde{u}_i \bar{u}_j dz \right] - u_{i,\zeta} u_{j,\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} - u_{i,-h} u_{j,-h} \frac{\partial -h}{\partial x_j}$$

et enfin

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial u_i w}{\partial z} dz = (u_{i,\zeta} w_{\zeta} - u_{i,-h} w_{-h}) \quad i=1,2$$

Les termes d'inertie spatiale et temporelle deviennent alors:

$$\int_{-h}^{\zeta} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i w}{\partial z} \right) dz = \frac{\partial H \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial H \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} - u_{i,\zeta} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u_{j,\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} - w_{\zeta} \right) = 0 \text{ d'après } R_3$$

$$- u_{i,-h} \left(u_{j,-h} \frac{\partial -h}{\partial x_j} - w_{-h} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\zeta} \tilde{u}_i \tilde{u}_j dz = 0 \text{ d'après } R_2$$

Pour les termes de diffusion verticale, on a:

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial z} \left(N_{x_i z} \frac{\partial u_i}{\partial z} \right) dz = \left[N_{x_i z} \frac{\partial u_i}{\partial z} \right]_{-h}^{\zeta}$$

On introduit alors les tensions de frottement en surface et au fond τ_{si} et τ_{fi} .

$$\tau_{si} = \left(N_{x_i z} \frac{\partial u_i}{\partial z} \right)_{z=\zeta} \quad \text{et} \quad \tau_{fi} = \left(N_{x_i z} \frac{\partial u_i}{\partial z} \right)_{z=-h}$$

Finalement les équations (11) et (12) s'intégreront sous la forme:

$$\frac{\partial H \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial H \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\zeta} \tilde{u}_i \tilde{u}_j dz + \varepsilon(i) f_i H \bar{u}_j = - \frac{\partial P}{\partial x_j} H - \frac{1}{\rho_0} \int_{-h}^{\zeta} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \int_z^{\zeta} \rho g dz \right) dz + \tau_{si} - \tau_{fi} + \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(N_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dz \quad \text{avec } \varepsilon(1) = -1 \text{ et } \varepsilon(2) = 1$$

en utilisant la relation $\partial H / \partial t = \partial \zeta / \partial t$, les deux premiers termes du membre de gauche s'écrivent:

$$H \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + H \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \bar{u}_i \left[\frac{\partial H \bar{u}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right]$$

= 0 d'après l'équation de continuité.

Hypothèse 3: selon l'hypothèse classique de Taylor, on néglige les transferts de diffusion dans le sens de l'écoulement moyen et on ne prend en compte que la diffusion dans le sens transversal. Ici l'écoulement moyen étant horizontal, on négligera donc les termes:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(N_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$$

On peut alors écrire les équations de la conservation de la quantité de mouvement et de continuité intégrées sur la verticale. Ces équations constituent les équations de Saint-Venant:

$$(15) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial H\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial H\bar{v}}{\partial y} = 0$$

$$(16) \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - f \cdot \bar{v} = - \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{g}{H\rho_0} \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_z^{\zeta} \rho \, dz \right) dz + \frac{\tau_{sx} - \tau_{fx}}{H} \\ - \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\zeta} \bar{u}^2 \, dz - \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\zeta} \bar{u}\bar{v} \, dz$$

$$(17) \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + f \cdot \bar{u} = - \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{g}{H\rho_0} \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_z^{\zeta} \rho \, dz \right) dz + \frac{\tau_{sy} - \tau_{fy}}{H} \\ - \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\zeta} \bar{u}\bar{v} \, dz - \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\zeta} \bar{v}^2 \, dz$$

Pour l'équation du sel on appliquera le même type d'intégration. Il vient:

$$(18) \quad \frac{\partial H\bar{s}}{\partial t} + \frac{\partial H\bar{u}s}{\partial x} + \frac{\partial H\bar{v}s}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{-h}^{\zeta} (\bar{u}\bar{s} - K_x \frac{\partial \bar{s}}{\partial x}) \, dz \right) \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{-h}^{\zeta} (\bar{v}\bar{s} - K_y \frac{\partial \bar{s}}{\partial y}) \, dz \right) = 0$$

Si l'on suppose que la masse volumique est constante sur toute la profondeur, les équations (16) et (17) s'écrivent:

$$(16') \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - f \cdot \bar{v} = - \frac{\partial P}{\partial x} - g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - g \frac{H}{2\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\tau_{sx} - \tau_{fx}}{H} \\ - \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\zeta} \bar{u}^2 \, dz - \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\zeta} \bar{u}\bar{v} \, dz$$

$$(17') \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + f \cdot \bar{u} = - \frac{\partial P_a}{\partial y} - g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + g \frac{H}{2\rho_0} \frac{\partial \zeta^2}{\partial y} + \frac{\tau_{sy} - \tau_{fy}}{H} \\ - \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\zeta} \tilde{u}\tilde{v} dz - \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\zeta} \tilde{v}^2 dz$$

Etablissement des équations de fluctuations de vitesse

Le calcul de la structure verticale du courant a surtout été envisagé sous forme analytique, l'objectif principal étant souvent la détermination du terme de frottement sur le fond utilisé dans modèle bidimensionnel intégré sur la verticale.

Le calcul de la structure verticale des courants doit permettre de compléter la connaissance bidimensionnelle du courant calculé par un modèle horizontal. On peut donc envisager au départ le problème tridimensionnel et établir les équations qui seront successivement résolues par le modèle horizontal ou le modèle vertical.

Principe: on établit les équations régissant la structure verticale des courants en soustrayant membre à membre les équations en valeurs moyennes sur la verticale (équations de Saint Venant) aux équations en valeurs ponctuelles (équations de Navier-Stokes). Les inconnues des nouvelles équations sont les fluctuations de la vitesse par rapport à la valeur moyenne (sur la verticale), qu'il suffira de leur ajouter pour obtenir la vitesse réelle.

Equations des fluctuations de vitesse

Conformément à l'hypothèse 3, on néglige les termes de diffusion horizontale dans les équations (11) et (12). Si, d'autre part, on leur soustrait l'équation de continuité sous la forme u_i * (10), (11) et (12) deviennent:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + w \frac{\partial u_i}{\partial z} + f \cdot \varepsilon(i) \cdot u_j = - \frac{\partial P_a}{\partial x_i}$$
$$+ \int_z^\zeta \rho dz + \frac{\partial}{\partial z} \left(N_{iz} \frac{\partial u_i}{\partial z} \right) \quad i=1, 2$$

On peut alors soustraire membre à membre ces équations et les équations (16)-(17), en remarquant que $\tilde{u}_i = u_i - \bar{u}_i$ et que $\partial u_i / \partial z = \partial \tilde{u}_i / \partial z$

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + (\tilde{u}_j + \bar{u}_j) \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\zeta} \tilde{u}_i \cdot \tilde{u}_j dz + \varepsilon(i) \cdot f \cdot \tilde{u}_j =$$

$$+ \frac{g}{\rho_0} \left[\frac{1}{H} \int_{-h}^{\zeta} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \int_z^{\zeta} \rho dz \right) dz - \frac{\partial}{\partial x_i} \int_z^{\zeta} \rho dz \right] + \frac{\tau_{si} - \tau_{fi}}{H} + \frac{\partial}{\partial z} \left(N_{iz} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial z} \right)$$

$$i = 1, 2$$

On peut aussi écrire ces équations sous la forme:

$$(18) \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - f \cdot \tilde{v} = A_x + G_x + T_x + \frac{\partial}{\partial z} \left(N_{xz} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right)$$

$$(19) \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + f \cdot \tilde{u} = A_y + G_y + T_y + \frac{\partial}{\partial z} \left(N_{yz} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \right)$$

avec A_i : termes d'inertie spatiale

$$-A_i = (\tilde{u} + \bar{u}) \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x} + (\tilde{v} + \bar{v}) \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial y} + \tilde{u} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial y} + w \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial z}$$

$$- \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\zeta} \tilde{u}_i \cdot \tilde{u} dz - \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\zeta} \tilde{u}_i \cdot \tilde{v} dz$$

G_i : termes de densité

$$G_i = \frac{g}{\rho_0} \left[\frac{1}{H} \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_z^{\zeta} \rho dz - \frac{\partial}{\partial x_i} \int_z^{\zeta} \rho dz \right]$$

(pour $\rho = \text{cte} = \rho_0$ on a $G_i = 0$)

T_i : termes de frottement au fond et en surface

$$T_i = \frac{\tau_{si} - \tau_{fi}}{H}$$

Changement de variable

On peut observer que la variable z a une limite supérieure variable ζ . Pour simplifier la résolution des équations, il est intéressant d'opérer un changement de variable de façon à travailler en "hauteur réduite" dont les limites sont fixes:

$$\text{Soit } \xi = \frac{z + h}{\zeta + h}$$

alors quelque soit ζ et donc t ,

ξ varie de 0 à 1.

Formule de changement de variable

Si l'on considère le nouveau système de coordonnées $X = x, Y = y, \xi, T = t$, on a:

$$(R4) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T} - \frac{\xi}{H} \frac{\partial \zeta}{\partial T} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial X_i} + \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial X_i} \left[\frac{1 - \xi}{H} \frac{\partial h}{\partial X_i} - \frac{\xi}{H} \frac{\partial \zeta}{\partial X_i} \right] \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \xi} \end{cases}$$

Par ailleurs, on va supposer que la viscosité turbulente verticale est indépendante de la direction horizontale considérée et qu'elle peut être exprimée comme le produit d'une fonction de T, X et Y et d'une fonction de ξ (cf. Bowden, 1965). On peut alors poser:

$$\frac{N_{iz}}{H^2} = \sigma(T, X, Y) \cdot \lambda(\xi) \quad (\text{NIHOUL, 1977})$$

En écrivant les équations de fluctuations dans le nouveau système (X, Y, ξ, T) , on doit résoudre:

$$(20) \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial T} - f \cdot \tilde{v} = A_X + G_X - \frac{\tau_{sx} - \tau_{fx}}{H} + \sigma \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\lambda \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} \right)$$

$$(21) \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial T} + f \cdot \tilde{u} = A_Y + G_Y - \frac{\tau_{sy} - \tau_{fy}}{H} + \sigma \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\lambda \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} \right)$$

$$(22) \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} = -H \frac{\partial(\tilde{u} + \bar{u})}{\partial X} - H \frac{\partial(\tilde{v} + \bar{v})}{\partial Y} \\ + \left[(\xi - 1) \frac{\partial h}{\partial X} + \xi \frac{\partial \xi}{\partial X} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} \right] + \left[(\xi - 1) \frac{\partial h}{\partial Y} + \xi \frac{\partial \xi}{\partial Y} \right] \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi}$$

avec:

$$A_i = - (\tilde{u}_j + \bar{u}_j) \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial X_j} - \tilde{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial X_j} + \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial X_j} \left(H \int_0^1 \tilde{u}_i \tilde{u}_j d\xi \right) \\ + \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \xi} \left[\frac{\xi - 1}{H} (\tilde{u}_j + \bar{u}_j) \frac{\partial h}{\partial X_j} + \frac{\xi}{H} (\tilde{u}_j - \tilde{u}_{j\xi}) \frac{\partial \xi}{\partial X_j} + \frac{\xi w_{\xi} - w}{H} \right]$$

$$G_i = \frac{g}{\rho_0} \left[\int_0^1 \frac{\partial}{\partial X_i} \left(H \int_0^1 \rho d\xi \right) d\xi - \frac{\partial}{\partial X_i} \left(H \int_{\xi}^1 \rho d\xi \right) \right. \\ \left. + \frac{\partial h}{\partial X_i} \left(\rho \xi - \int_0^1 \rho d\xi \right) + \frac{\partial H}{\partial X_i} \left(\int_0^1 \rho d\xi - \rho_{\xi} \xi \right) \right]$$

On remarque que les conditions d'imperméabilité au fond et en surface (R2 et R3) devront être respectées. De même la somme des fluctuations sur la verticale devra être nulle:

$$\int_0^1 \tilde{u}_i d\xi = 0$$

Enfin si l'on tient compte de la viscosité du fluide, la condition d'imperméabilité au fond se transforme en condition de vitesse nulle, d'où:

$$\tilde{u}_{i,-h} = -\bar{u}_i$$

Contraintes aux limites

Contraintes au fond

Diverses études en mer faisant appel soit à la mesure des fluctuations turbulentes de la vitesse, soit à la mesure du profil vertical des courants, ont permis de vérifier qu'une relation simple entre l'effort sur le fond et la vitesse pouvait être adoptée, à savoir:

$$\tau_f = \frac{g}{C^2} |\bar{U}| \bar{U} \quad \text{où } \bar{U} = (\bar{u}, \bar{v})$$

Cette expression, utilisée par de nombreux auteurs, est justifiée par la théorie de Prandtl et a été démontrée dans le cas schématique d'un écoulement plan depuis une zone sans friction sur le fond, dans une zone avec frottement.

On peut signaler l'expression utilisée par Nihoul qui inclut dans la tension du frottement une fraction de l'effort exercé en surface par le vent, transmis à travers l'écoulement:

$$\tau_f = \frac{g}{C^2} |\bar{U}| \bar{U} - m \tau_s$$

où m , de l'ordre de 0.1 à 0.5, dépend de la profondeur.

C dépend de la nature du fond (de la granulométrie et d'un facteur forme du lit).

Contraintes à la surface

La contrainte exercée par le vent sur la partie supérieure de l'écoulement est généralement exprimée d'une manière très semblable à ce qui vient d'être exposé pour la contrainte au fond. Cette expression est une fonction de la vitesse du vent. De nombreuses expériences ont eu lieu à ce sujet pour préciser cette relation que l'on écrit généralement sous la forme:

$$\tau_s = \rho_a C_d U^2$$

où U est la vitesse du vent à 10m. de la surface

ρ_a la densité de l'air

et $C_d = 1.5 \cdot 10^{-3}$ pour des vents faibles ($U < 15\text{m/s}$)
 $C_d = 2.4 \cdot 10^{-3}$ pour des vents forts ($U > 25\text{m/s}$)

Il apparaît critiquable que la formule précédente ne tienne pas compte de la vitesse du courant. Il est pourtant parfaitement connu que l'état de la surface de la mer est fortement dépendant de la vitesse relative du vent et du courant. On tente de rendre compte, au moins partiellement de ce phénomène en considérant la vitesse relative du vent par rapport à celle du courant, soit:

$$\tau_s = \rho_a C_d (U - \bar{U})^2$$

SCHEMA NUMERIQUE DU MODELE BIDIMENSIONNEL HORIZONTAL

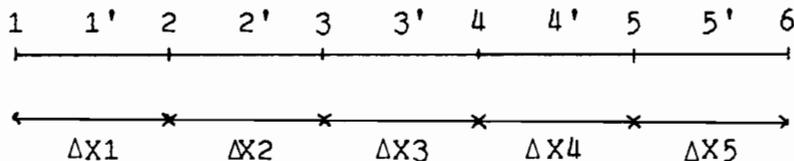
Dans ce paragraphe nous ne montrerons que la description du schéma des équations (15), (16'), (17') et (18).

Diverses méthodes numériques adaptées à la résolution de ce système d'équations, publiées depuis une quinzaine d'années environ, relevaient initialement toutes des différences finies. Actuellement on assiste à l'apparition progressive d'autres techniques dites aux éléments finis, qui ont l'avantage de proposer des solutions très élégantes aux problèmes des grilles variables, mais qui étant par essence même implicites ne semblent pas pouvoir rivaliser avec les méthodes aux différences finies.

Par ailleurs, l'expérience acquise dans l'emploi des différences finies est aujourd'hui considérable, de nombreux schémas ayant été étudiés sous l'angle des perturbations numériques, ce qui constitue un argument important dans l'optique de la présente étude, intéressée plus aux indications physiques que l'on peut retirer des simulations, qu'à des recherches d'analyse numérique proprement dite.

Avant de décrire en détail la méthode de résolution, donnons quelques explications sur les schémas dits aux différences finies. Dans les équations (15), (16') et (17') interviennent des dérivées ($\partial/\partial x$), des produits de fonctions etc... Ce que l'on sait le mieux calculer, ce sont des moyennes et des dérivées discrètes.

Pour exemple, prenons le cas d'une fonction U , à une dimension, discrétisée sur une portion de droite aux points 1, 2, 3, 4, 5, 6.



La dérivée de U entre les points 2 et 3 aura la forme:

$$\frac{U_3 - U_2}{\Delta X_2}$$

et cette dérivée sera centrée en 2'.

La dérivée seconde de U entre les points 2, 3 et 4 aura la forme:

$$\frac{\frac{U_3 - U_2}{\Delta X_2} - \frac{U_4 - U_3}{\Delta X_3}}{1/2 (\Delta X_2 + \Delta X_3)}$$

cette dérivée sera centrée en 3.

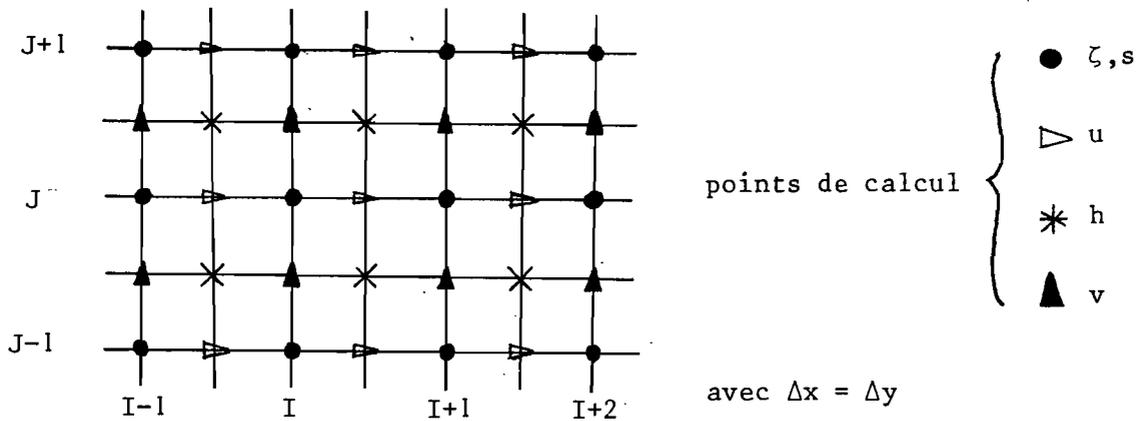
Cet exemple montre le problème du centrage des calculs. Si l'on veut centrer les dérivées premières avec les dérivées secondes, il faut alors moyenner les dérivées premières:

$$\frac{1}{2} \left[\frac{U_3 - U_2}{\Delta X_2} + \frac{U_4 - U_3}{\Delta X_3} \right]$$

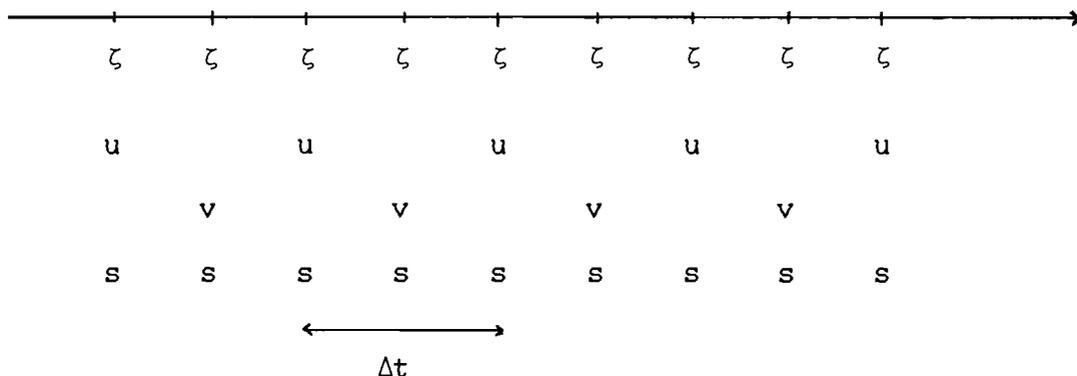
Description du schéma

Maillage

Dans le cas du schéma que l'on va construire, on travaille en deux dimensions d'espace et une dimension de temps. La grille de calcul devient alors relativement complexe. On décale les points de calcul du niveau de l'eau ζ , des composantes u et v de la vitesse et de la concentration s . Ceci permet une meilleure approximation des différentielles par des différences finies centrées, tout en réduisant autant que possible le pas spatial.



Outre ce décalage dans l'espace, le schéma introduit également un décalage dans le temps des composantes u et v de la vitesse qui sont calculées alternativement tous les demi-pas de temps:



Dans la suite de ce paragraphe on supprimera le signe "-".

On introduit les notations opérationnelles suivantes:

$$\bar{F}^x = \frac{1}{2} \left[F\left(\left(I+\frac{1}{2}\right)\Delta x, J\Delta y, n\Delta t\right) + F\left(\left(I-\frac{1}{2}\right)\Delta x, J\Delta y, n\Delta t\right) \right]$$

$$\delta_x F = \frac{1}{\Delta x} \left[F\left(\left(I+\frac{1}{2}\right)\Delta x, J\Delta y, n\Delta t\right) - F\left(\left(I-\frac{1}{2}\right)\Delta x, J\Delta y, n\Delta t\right) \right]$$

$$\bar{F} = \frac{1}{4} \left[F\left(\left(I+1\right)\Delta x, \left(J+\frac{1}{2}\right)\Delta y, n\Delta t\right) + F\left(I\Delta x, \left(J-\frac{1}{2}\right)\Delta y, n\Delta t\right) \right. \\ \left. + F\left(\left(I+1\right)\Delta x, \left(J-\frac{1}{2}\right)\Delta y, n\Delta t\right) + F\left(I\Delta x, \left(J+\frac{1}{2}\right)\Delta y, n\Delta t\right) \right]$$

$$\delta_{t/2} F = \frac{2}{\Delta t} \left[F\left(I\Delta x, J\Delta y, \left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta t\right) - F\left(I\Delta x, J\Delta y, n\Delta t\right) \right]$$

$$F^+ = F\left(I\Delta x, J\Delta y, \left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta t\right)$$

$$F^- = F\left(I\Delta x, J\Delta y, \left(n-\frac{1}{2}\right)\Delta t\right)$$

$$\bar{F}^{t/2} = \frac{1}{2} \left[F\left(I\Delta x, J\Delta y, \left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta t\right) + F\left(I\Delta x, J\Delta y, n\Delta t\right) \right]$$

Le système (15), (16') et (18) sera explicité comme suit:

$$\delta_t u - f \cdot \bar{v} + u_+ \delta_x u^x + \bar{v} \delta_y u^y + g \delta_x \zeta^t + (\bar{h}^y + \bar{\zeta}^x) \delta_x s g \frac{\alpha}{2} \\ + g \bar{u}^t \frac{(u_+^2 + \bar{v}^2)^{1/2}}{(\bar{h}^y + \bar{\zeta}^x)(\bar{c}^x)^2} + \delta_x p_a - \frac{\tau_{sx}}{\rho(\bar{h}^y + \bar{\zeta}^x)} + \epsilon(\delta_x \delta_x u^- + \delta_y \delta_y u^-) = 0$$

calcul au point: (I+-, J, n)

$$\delta_{t/2} \zeta + \delta_x ((\bar{h}^y + \bar{\zeta}^x) u_+) + \delta_y ((\bar{h}^x + \bar{\zeta}^y) v) = 0$$

calcul au point: (I, J, n)

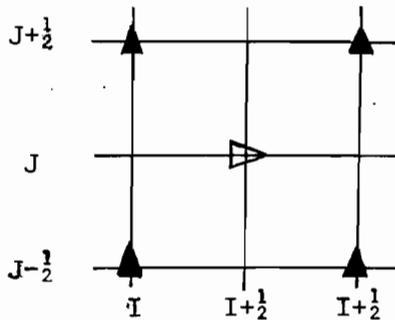
$$\delta_{t/2} (s(\bar{h} + \zeta)) + \delta_x ((\bar{h}^y + \bar{\zeta}^x) u_+ \bar{s}_+^x) + \delta_y ((\bar{h}^x + \bar{\zeta}^y) v \bar{s}_+^y)$$

$$- \delta_x ((\bar{h}^y + \bar{\zeta}^x) E_x \delta_x s_+) - \delta_y ((\bar{h}^x + \bar{\zeta}^y) E_y \delta_y s) = 0$$

calcul au point: (I, J, n)

Dans le maillage on remarque que la première composante de la vitesse u et la deuxième composante de la vitesse v ne sont pas calculées au même point. Ce décalage s'explique, comme nous l'avons dit précédemment, par un souci de centrage des calculs.

Par exemple, dans la première équation du mouvement (16'), on cherche u au point $(I+\frac{1}{2}, J)$. Intervient dans cette équation la deuxième composante v . On va chercher une moyenne de ce terme centrée au point $(I+\frac{1}{2}, J)$. C'est la moyenne des valeurs v aux points $(I, J+\frac{1}{2})$, $(I+1, J-\frac{1}{2})$, $(I, J-\frac{1}{2})$, $(I+1, J+\frac{1}{2})$.



On remarquera que les termes d'advection de l'équation de continuité ne sont pas centrés dans le temps. Il importera que le pas d'intégration soit assez petit pour que l'erreur introduite soit faible ($H^t \approx H^{t+\Delta t/2}$).

Dans l'équation de conservation du mouvement on introduit un terme de "pseudo-viscosité", dont le rôle est de dissiper l'énergie de faible longueur d'onde. On veillera à donner à ce terme ϵ des valeurs suffisamment faibles pour que le lissage des grandes longueurs d'onde qui en résulte également soit insignifiant. Il a d'ailleurs été vérifié que la condition $\epsilon = 0$, ne conduisait pas à des divergences, mais que la solution était seulement troublée par des oscillations de haute fréquence.

Procédé d'intégration

Le développement de chacun des termes des équations (15) et (16') en faisant apparaître les variables inconnues u et ζ au temps t_3 (noté 3) conduit aux relations:

$$-A_{I-1} u_{3,I-1,J} + \zeta_{3,I,J} + A_I u_{3,I,J} = B_{I,J}$$

$$D \zeta_{3,I,J} + E_I u_{3,I,J} + D \zeta_{3,I+1,J} = F_{I,J}$$

$$\text{où } A_I = \frac{\Delta t}{4\Delta x} (h_{I,J} + h_{I,J-1} + \zeta_{2,I,J} + \zeta_{2,I+1,J})$$

Discussion sur les paramètres numériques

Les paramètres numériques introduits dans le modèle lors de la schématisation des équations sont le pas de temps Δt et le pas d'espace Δx .

Ces paramètres devront être choisis de telle sorte que la méthode d'intégration introduise un minimum d'erreurs par rapport à la solution exacte.

L'approximation en différences finies du système d'équations hyperboliques (si $\varepsilon = 0$) aux dérivées partielles (15), (16') et (17'), ne peut être satisfaisante que si elle vérifie les conditions de convergence et de stabilité.

convergence: on dit que la méthode est convergente si la solution du système aux différences tend vers celle du système différentiel lorsque Δt et Δx tendent vers zéro.

stabilité: une méthode aux différences est stable si les solutions des équations sont des fonctions uniformément bornées des données initiales pour tout Δt assez petit et tout $n \Delta t$ fini.

Une autre notion est généralement employée, la consistance, qui exprime que chaque différence finie tend vers la valeur de la dérivée qu'elle représente, lorsque le pas d'intégration tend vers zéro.

Il est clair que la convergence entraîne la stabilité, LAX a pu montrer pour un schéma numérique consistant, que réciproquement la stabilité entraînait la convergence.

Plusieurs méthodes permettent de définir des critères de stabilité. On utilisera la méthode de Von Neumann.

Considérons donc un domaine d'intégration à une dimension spatiale, le schéma numérique simplifié suivant:

$$u_J^{t+\Delta t} - u_J^t + \frac{\Delta t}{2\Delta x} u (u_{J+1}^t - u_{J-1}^t) + \frac{\Delta t g |u|}{C^2 H} \frac{ (u_J^t + u_J^{t+\Delta t})}{2} = 0$$

et la propagation d'une onde sinusoïdale de la forme:

$$u = \int e^{i(\omega t + kx)}$$

Il vient:

$$\lambda - 1 + \frac{\Delta t}{2\Delta x} u (e^{ikx} - e^{-ikx}) + \frac{g \Delta t |u| (\lambda + 1)}{2 C^2 H} = 0$$

$$\text{où } \lambda = \frac{u^{t+\Delta t}}{u^t}$$

il en suit que:

$$\lambda = \frac{1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} u i \sin kx - \frac{g \Delta t}{2C^2 H} |u|}{1 + \frac{g \Delta t}{2C^2 H} |u|}$$

La stabilité ($\lambda \leq 1$) se traduit alors par:

$$\Delta t \leq \frac{2 g (\Delta x)^2}{C^2 H u}$$

condition qui ne peut être qu'indicative compte tenu des approximations faites.

Conditions aux limites ouvertes

Sur les limites ouvertes du domaine, il faudrait en toute rigueur connaître par des moyens extérieurs au modèle les fonctions $u(t)$, $v(t)$, $\zeta(t)$ et $s(t)$.

En réalité, bien que d'un point de vue théorique ce problème ne semble pas parfaitement résolu, l'expérience montre que moyennant quelques approximations, la connaissance de s n'est nécessaire que lorsque la vitesse est dirigée vers l'intérieur du modèle.

La condition hydrodynamique utilisée ici est une condition de niveau $\zeta(t)$. Les niveaux sont exprimés par la formule:

$$\zeta(x,y,t) = \zeta_0(x,y) + \sum_{i=1}^N A_i(x,y) f_i \cos(\omega_i t + (V_0+u)_i - g_i(x,y))$$

où i = indice des ondes constituant le spectre

ω_i = pulsation de chaque composante

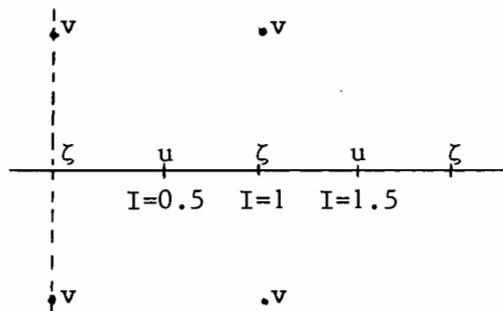
A_i et g_i = amplitude et phase de l'onde au point concerné

f_i = facteur de correction nodale
 $(V_0+u)_i$ = phase initiale de l'astre perturbateur correspondant à l'onde d'ordre i .

Détermination du niveau moyen

La détermination des niveaux instantanés à l'aide de la formule précédente implique que soit connue au long de ces limites, la cote du niveau moyen de la mer $\zeta_0(x,y)$, par rapport à un plan de référence horizontal, assimilé à une portion de géoïde. Ce niveau moyen est excessivement difficile à mesurer, il n'est même probablement pas constant (en fonction du temps) sous l'effet de phénomènes de très longue période, mal connus, tels des effets météorologiques. N'est véritablement importante que la position relative de ce niveau moyen au long des limites. On pourra donc fixer de manière arbitraire cette référence sur toute cette limite.

Calcul des courants sur la limite



Les niveaux seuls étant fournis sur la limite, l'algorithme complet détaillé au début de ce paragraphe ne peut être utilisé pour le calcul des composantes de la vitesse aux points situés sur ou adjacents à ces frontières ouvertes. Dans l'exemple ci-dessus, les composantes u sur la colonne $i = .5$ (et la composante v sur colonne $I = 0$ ne sont pas accessibles aux calculs.

Composante perpendiculaire à la limite: seul le terme $\partial u / \partial x$ ne peut être calculé de manière centrée au point $i = .5$, on pourra sans inconvénient notable soit décentrer la dérivée, soit l'extrapoler à partir de l'intérieur du domaine, soit même la supposer nulle. La première solution sera adoptée:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{I=0.5} = \frac{U_{1.5} - U_{0.5}}{\Delta X}$$

Composante parallèle à la limite: la résolution de l'équation (17') est beaucoup plus délicate que la précédente, la majeure partie des termes faisant appel à des variables extérieures au domaine d'étude.

Ici encore, on pourra exprimer chaque différence finie de manière décentrée vers l'intérieur, soit l'extrapoler à partir des valeurs adjacentes correctement évaluées, soit même extrapoler directement la composante de la vitesse que l'on recherche.

Cette dernière approche a été utilisée ici du fait de sa simplicité et de sa rapidité:

$$V_{I=0} = 2 V_{I=1} - V_{I=2}$$

Résultats du modèle

Il faut tout d'abord parler des possibilités techniques du modèle présenté. Du fait des dimensions réduites du domaine et du fait que l'on veut respecter le mieux possible sa topographie et sa géomorphologie, celles-ci influant de façon importante sur le courant, le maillage spatial sera de petite dimension. D'après la condition de stabilité (cf. Discussion des paramètres numériques) le pas de temps sera lui même relativement faible, de l'ordre de 1 à 2 minutes pour $\Delta x=500m$, $C=60MKS$, $H=10$ à 20 m et $u=0.5m$ s. Ces petites valeurs du pas d'espace et du pas de temps impliquent que le modèle ne peut intégrer le courant que sur un nombre limité de cycles de marée.

Le modèle va fournir à très peu de frais, pour différentes conditions de marée (par exemple, marée de vive eau ou marée de morte eau) et de vent, une couverture quasi-continue du courant et du niveau de la mer de la région à étudier. Nous obtenons la même couverture pour la salinité si nous résolvons l'équation (18).

La couverture quasi-continue du niveau de la mer, va nous permettre de déterminer le niveau moyen et d'en tirer des indications sur le courant.

IL faut faire une remarque générale sur le type de courants calculés, ce sont des courants eulériens, c'est à dire que l'on calcule la vitesse des particules qui passent devant un point fixe.

Bien entendu, des trajectoires (hodographes) peuvent être construites à partir des courants eulériens, qui reproduisent le déplacement de particules d'eau ou d'éléments en solution. On délimite ainsi les secteurs pouvant être atteints par un rejet donné, après un certain laps de temps.

La circulation eulérienne, représentée par le champ de vitesse à tout moment n'est pas très adaptée pour la recherche des mouvements des masses d'eau: ce sont en effet les trajectoires suivies par les particules, donc la circulation lagrangienne (vitesse liée aux particules), qu'il est nécessaire de connaître dans ce cas. Comme nous l'avons déjà dit si l'on recherche la répartition d'un polluant à partir d'un point de rejet, ce sont encore les trajectoires qu'il s'agit de déterminer. Celles-ci sont facilement déductibles des données de courant eulériennes, puisque les vitesses sont les dérivées des trajectoires. point par point à des intervalles de temps régulier, en supposant la vitesse constante et uniforme durant

le déplacement.

La marée n'est pas simplement un phénomène alternatif, de moyenne nulle, comme elle paraît être de prime abord. Elle induit elle même une courantologie à long terme que l'on dénomme résiduelle de marée. Elle est généralement très faible par rapport au courant instantané et donc difficile à mesurer par des moyens classiques peu adaptés à cet objectif. Elle est pourtant d'un grand intérêt pour qui s'intéresse aux déplacements des masses d'eau et leur contenu en substances dissoutes, aux organismes vivants. On pourra calculer à partir des courants eulériens du modèle, les courants résiduels eulériens et lagrangiens .

Le courant résiduel eulérien est défini comme étant la moyenne sur un cycle de marée des vitesses eulériennes.

La résiduelle lagrangienne est la distance séparant le point de départ d'une particule et son point d'arrivée, après son déplacement durant une marée. En divisant ce trajet résiduel, par la période de marée, on obtient la vitesse résiduelle lagrangienne.

Le modèle mathématique bidimensionnel permet de mieux connaître la courantologie de marée d'une zone littorale. Il est un outil de prédiction qui peut être utilisé pour tirer un meilleur profit des observations faites en mer et préparer une meilleure stratégie de mesure.

Modélisation de la zone de Nouméa

La détermination du domaine d'étude et des dimensions du maillage résultent, bien entendu, d'un compromis entre le désir d'obtenir une information aussi dense que possible, sur une aire aussi étendue que possible, et l'effort de calcul numérique que cela représente.

Le modèle doit recouvrir un secteur assez large pour que les conditions limites soient indépendantes des phénomènes que l'on se propose d'étudier.

Dans une première approche du lagon sud-ouest, nous allons nous limiter, aux baies de Dumbéa et de Boulari (figure 1). Cet exemple présente l'intérêt d'être à la fois un secteur d'activités portuaires notable, un exutoire industriel important et la région la plus peuplée de Nouvelle Calédonie.

Les pas Δx , Δy sont choisis égaux, puisque l'on n'entend pas privilégier, à priori, aucune des directions de la circulation.

Un pas d'espace grand ne permet pas de reproduire assez fidèlement les singularités de faible dimension géométrique, et par ailleurs le grand intervalle Δt qu'il autorise serait inacceptable sous peine de lisser exagérément les phénomènes naturels tels les pointes de flot. De ce dernier point de vue une limite supérieure de temps nous a semblé devoir être fixée à dix minutes.

Un pas d'espace représentant le meilleur compromis entre le désir d'obtenir une information cohérente et une bonne représentation de la géomorphologie du domaine nous a semblé être de $\Delta x = 500$ m.

L'application du critère de stabilité pour $\Delta x = 500$ m. indique une limite supérieure de 150 s., mais diverses études réalisées sur ce modèle (cf. SALOMON) ont montré que cette valeur pouvait être doublée sans provoquer d'instabilité. Toutefois le pas d'intégration adopté devra non seulement respecter ce critère, mais encore être tel que la solution obtenue, qui ne peut jamais être identique à la solution vraie, n'en soit pas trop différente.

Dans le modèle proposé on remarque que certaines conditions, certains coefficients ne peuvent être évalués qu'à partir de mesures de terrain. En témoigne cette phrase lue dans un article concernant ce type de modélisation:

" Les mesures de courant demeurent un outil d'investigation indispensable pour l'étude courantologique d'un secteur donné "

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent les conditions limites ouvertes sont des conditions sur le niveau de la mer. Ces mesures seront réalisées à partir de marégraphes placés en différents points aux limites du domaine, leur nombre sera de 7 (étoiles figure 1). En effet trois points permettent de définir de manière acceptable le niveau de la mer sur une droite de longueur moyenne, voir limite sud. Par contre la limite ouest est coupée par l'îlot Maître, on a supposé que cet îlot modifiait la propagation de la marée, on a donc fait le choix d'encadrer cette île par deux marégraphes. Ceci restera à vérifier par les mesures.

La condition de frottement au fond fait intervenir la force exercée par le vent. Afin d'obtenir ces informations nous placerons deux unités météorologiques au milieu des baies (unités symbolisées par des  sur la figure 1).

Pour que le modèle fournisse des informations cohérentes, il reste un certain nombre de paramètres que l'on doit fixer, le coefficient de Chézy C et le coefficient de pseudo-viscosité. Nous ne connaissons le coefficient C que de manière approximative et le paramètre est un paramètre virtuel. Pour que le modèle approche le mieux possible la réalité, il faudra faire varier légèrement ces coefficients, c'est ce qu'on appelle le calage du modèle. Pour réaliser ce calage on utilisera deux mouillages de deux courantomètres, l'un situé en surface l'autre au fond. Pour l'instant les deux mouillages seront placés aux mêmes endroits que les unités météorologiques. Ces courantomètres serviront aussi à vérifier le bien fondé de la modélisation.

Pour en terminer sur la modélisation proposée de ce domaine, il faut dire que celle ci n'en n'est qu'au stade de l'étude. Des modifications quant aux limites du domaine, l'emplacement des appareils de mesure, peuvent être réalisés. Les modifications des limites du domaine pourront intervenir par exemple pour mieux représenter le milieu, être plus liées aux problèmes posés par les biologistes. On pourra de même être amené à modifier la position des mouillages pour qu'il soit plus représentatif des courants dans cette partie du lagon.

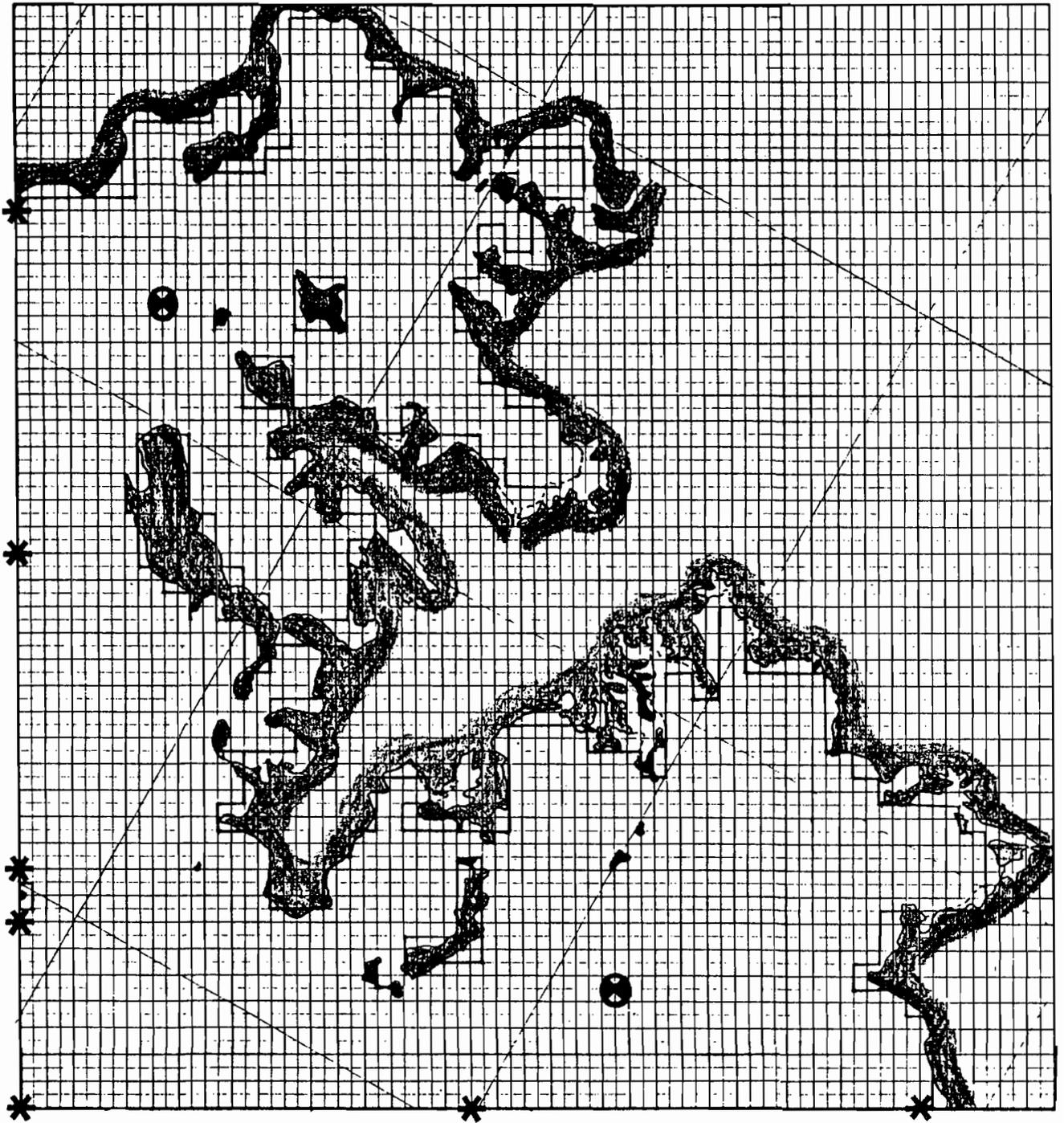


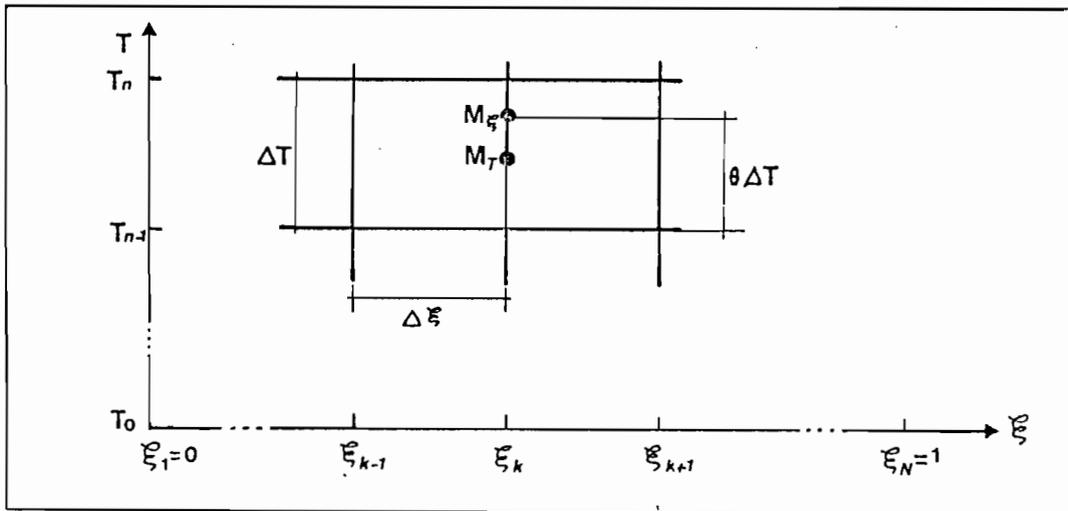
Figure 1

SCHEMATISATION DES EQUATIONS DES FLUCTUATIONS DE VITESSE

Comme pour le schéma bidimensionnel horizontal, le principe adopté est une résolution numérique progressive des équations à partir de valeurs initiales, les équations étant discrétisées selon un schéma aux différences finies.

On utilisera un schéma semi-implicite (schéma de CRANCK-NICHOLSON) qui a la particularité d'être très stable pour des équations linéaires.

Schéma de discrétisation des équations (20). (21)



Présentation du domaine d'intégration.

Si on exclut dans les équations (20). (21) les termes non-linéaires A_i et les termes de densité G_i , le système d'équations devient un système à 2 inconnues \tilde{u} et \tilde{v} fonctions de 2 variables T et ξ , ceci pour un couple (X, Y) fixé. Les dérivées en T et ξ d'une fonction f sont respectivement exprimées dans l'espace discrétisé $(nT, k\xi)$ aux points M_T et M_ξ (voir figure ci-dessus). Elles s'écrivent sous la forme suivante:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_{k, n-\frac{1}{2}} = \frac{f_{kn} - f_{kn-1}}{\Delta T}$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \right)_{k, n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{f_{k+1n} - 2f_{kn} + f_{k-1n}}{\Delta \xi^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{f_{k+1n-\theta} - 2f_{kn-1} + f_{k-1n-1}}{\Delta \xi^2} \right)$$

On remarquera que ces deux dérivées sont centrées en temps et en espace.

Le problème posé est de calculer les vitesses au temps $n\Delta t$, en tout point $k\Delta\xi$, connaissant les vitesses aux instants précédents $n-1\Delta T$, $n-2\Delta T$, ect...

Pour résoudre le problème, on écrit les équations (20), (21) à la cote k et entre les instants n et $n-1$. Afin de découpler les équations, on rend le terme de Coriolis explicite, c'est à dire connu à l'instant précédent, ceci se justifie par la faible importance de ce terme. On écrit alors:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{u}_{kn} - \tilde{u}_{kn-1}}{\Delta T} &= Q_X + f \cdot \tilde{v}_{kn-1} + \frac{\sigma}{2\Delta\xi} \left[\lambda_k^+ \frac{\tilde{u}_{k+1n} - \tilde{u}_{kn}}{\Delta\xi} - \lambda_k^- \frac{\tilde{u}_{kn} - \tilde{u}_{k-1n}}{\Delta\xi} \right] \\ &+ \frac{\sigma}{2\Delta\xi} \left[\lambda_k^+ \frac{\tilde{u}_{k+1n-1} - \tilde{u}_{kn-1}}{\Delta\xi} - \lambda_k^- \frac{\tilde{u}_{kn-1} - \tilde{u}_{k-1n-1}}{\Delta\xi} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{v}_{kn} - \tilde{v}_{kn-1}}{\Delta T} &= Q_Y - f \cdot \tilde{u}_{kn-1} + \frac{\sigma}{2\Delta\xi} \left[\lambda_k^+ \frac{\tilde{v}_{k+1n} - \tilde{v}_{kn}}{\Delta\xi} - \lambda_k^- \frac{\tilde{v}_{kn} - \tilde{v}_{k-1n}}{\Delta\xi} \right] \\ &+ \frac{\sigma}{2\Delta\xi} \left[\lambda_k^+ \frac{\tilde{v}_{k+1n-1} - \tilde{v}_{kn-1}}{\Delta\xi} - \lambda_k^- \frac{\tilde{v}_{kn-1} - \tilde{v}_{k-1n-1}}{\Delta\xi} \right] \end{aligned}$$

avec $Q_i = A_i + G_i - \frac{\tau_{si} - \tau_{fi}}{H}$

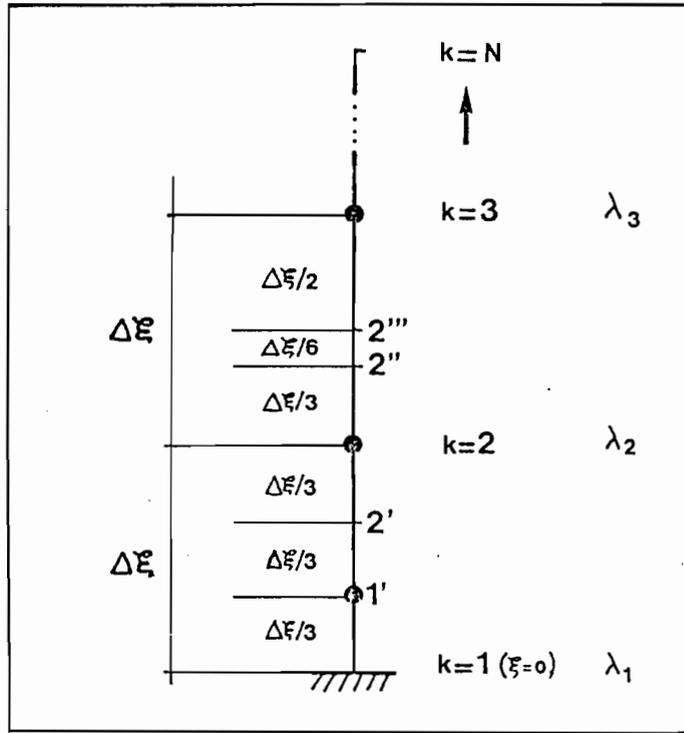
et $\lambda_k^+ = \frac{\lambda_{k+1} + \lambda_k}{2}$ et $\lambda_k^- = \frac{\lambda_k + \lambda_{k-1}}{2}$

Schématisation des conditions limites

Les conditions limites sont introduites par l'intermédiaire des équations du mouvement aux points frontières. En ces points on ne peut calculer de manière centrée:

$$\frac{\partial}{\partial\xi} \left(\lambda \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial\xi} \right)$$

les équations doivent alors être exprimées de manière particulière en effet $\partial u_i / \partial\xi$ n'a pas de sens au delà de cette limite. Pour éviter que les dérivées secondes soient excentrées, on ne résoud plus les équations à la limite ($k=1$ ou N), mais à $\Delta\xi/3$ de cette limite (voir figure ci-après).



Position des points de calcul près de la limite.
(les équations sont résolues aux points repérés
par le symbole "●")

En exprimant la condition limite en (1'), les équations (20) (21) s'écrivent sous forme discrétisée:

$$\frac{\tilde{u}_{1'n} - \tilde{u}_{1'n-1}}{\Delta T} = Q_X + f \cdot \tilde{v}_{1'n-1} + \frac{3}{4} \frac{\sigma(2\lambda_2 + \lambda_1)}{\Delta \xi^2} \left[\frac{1}{2} (\tilde{u}_{2n} - \tilde{u}_{1'n}) + \frac{1}{2} (\tilde{u}_{2n-1} - \tilde{u}_{1'n-1}) \right] - \frac{3}{2} \frac{\tau_{fx}}{H \Delta \xi}$$

$$\frac{\tilde{v}_{1'n} - \tilde{v}_{1'n-1}}{\Delta T} = Q_Y - f \cdot \tilde{u}_{1'n-1} + \frac{3}{4} \frac{\sigma(2\lambda_2 + \lambda_1)}{\Delta \xi^2} \left[\frac{1}{2} (\tilde{v}_{2n} - \tilde{v}_{1'n}) + \frac{1}{2} (\tilde{v}_{2n-1} - \tilde{v}_{1'n-1}) \right] - \frac{3}{2} \frac{\tau_{fy}}{H \Delta \xi}$$

De la même manière on obtient la forme discrétisée des équations du mouvement près de la limite supérieure (en N', située à $\Delta \xi/3$ de N):

$$\frac{\tilde{u}_{N'n} - \tilde{u}_{N'n-1}}{\Delta T} = Q_X + f \cdot \tilde{v}_{N'n-1} - \frac{3}{4} \frac{\sigma(2\lambda_{N-1} + \lambda_{N'})}{\Delta \xi^2} \left[\frac{1}{2} (\tilde{u}_{N'n} - \tilde{u}_{N-1n}) + \frac{1}{2} (\tilde{u}_{N'n-1} - \tilde{u}_{N-1n-1}) \right] + \frac{3}{2} \frac{\tau_{sx}}{H \Delta \xi}$$

$$\frac{\tilde{v}'_n - \tilde{v}'_{n-1}}{\Delta T} = Q_Y - f \cdot \tilde{u}'_{n-1} - \frac{3}{4} \frac{\sigma(2\lambda_{N-1} + \lambda_{N'})}{\Delta \xi^2} \left[\frac{1}{2} (\tilde{v}'_n - \tilde{v}'_{n-1}) + \frac{1}{2} (\tilde{v}'_{n-1} - \tilde{v}'_{n-2}) \right] + \frac{3}{2} \frac{\tau_{sy}}{H \Delta \xi}$$

Les vitesses n'étant pas calculées aux limites, les termes:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\lambda \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \xi} \right)$$

aux points voisins (k=2 et N-1) doivent être exprimés respectivement en fonction des vitesses en k=1' et k=N', on a alors pour k=2 :

$$\frac{\tilde{u}'_{2n} - \tilde{u}'_{2n-1}}{\Delta T} = Q_X + f \cdot \tilde{v}'_{2n-1} + \frac{3}{5} \frac{\sigma}{\Delta \xi^2} \left[(\lambda_3 + \lambda_2) \frac{1}{2} (\tilde{u}'_{3n} - \tilde{u}'_{3n-1}) - (\lambda_3 + 2\lambda_2 + \lambda_1) \frac{1}{2} (\tilde{u}'_{2n} - \tilde{u}'_{2n-1}) + (2\lambda_2 + \lambda_1) \frac{1}{2} (\tilde{u}'_{1'n} + \tilde{u}'_{1'n-1}) \right]$$

$$\frac{\tilde{v}'_{2n} - \tilde{v}'_{2n-1}}{\Delta T} = Q_Y - f \cdot \tilde{u}'_{2n-1} + \frac{3}{5} \frac{\sigma}{\Delta \xi^2} \left[(\lambda_3 + \lambda_2) \frac{1}{2} (\tilde{v}'_{3n} - \tilde{v}'_{3n-1}) - (\lambda_3 + 2\lambda_2 + \lambda_1) \frac{1}{2} (\tilde{v}'_{2n} - \tilde{v}'_{2n-1}) + (2\lambda_2 + \lambda_1) \frac{1}{2} (\tilde{v}'_{1'n} + \tilde{v}'_{1'n-1}) \right]$$

La forme discrétisée des équations au point N-1 est analogue.

On peut écrire les systèmes précédents en regroupant dans un premier membre les termes inconnus. le système d'équations alors obtenus peut s'écrire sous forme matricielle:

$$A U_n = B U_{n-1} + C$$

Calcul des termes explicites

termes d'advection

A partir des essais qu'il a effectué LE HIR a ajouté dans les termes A_i le premier membre de l'équation de continuité (égal à zéro), multiplié par \tilde{u} de façon à remplacer les termes

$$u_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial X_j} \quad \text{par} \quad \frac{\partial \tilde{u}_i \tilde{u}_j}{\partial X_j}$$

ceci semble améliorer les résultats, en outre les dérivées horizontales des fluctuations de vitesse. Le terme A_i devient

donc :

$$A_i = -\bar{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial X_j} - \frac{\partial \tilde{u}_i \tilde{u}_j}{\partial X_j} - \tilde{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial X_j} + \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial X_j} \left(H \int_0^1 \tilde{u}_i \tilde{u}_j d\xi \right) + \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial X_j} \left[\frac{\xi - 1}{H} (\tilde{u}_j + \bar{u}_j) \right] * \\ \left[\frac{\partial h}{\partial X_j} + \frac{\xi}{H} (\tilde{u}_j - \tilde{u}_{\xi j}) \frac{\partial \xi}{\partial X_j} \right] + \tilde{u}_i \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \xi} \left[\frac{\xi - 1}{H} \frac{\partial h}{\partial X_j} + \frac{\xi}{H} \frac{\partial \xi}{\partial X_j} \right]$$

D'une manière générale, cette expression est calculée en remplaçant les dérivées par des différences finies.

Certaines difficultés apparaissent dans l'application de cette formule, la grande variabilité de \tilde{u} au fond entraîne une imprécision dans le calcul des intégrales ou des dérivées verticales.

Pour les intégrales une solution appropriée au problème est d'intégrer les fonctions selon la méthode de SIMPSON, qui consiste à assimiler la fonction à une parabole sur 3 points, et à en évaluer la valeur exacte.

$$\int_{X_i}^{X_{i+1}} f dX = \frac{\Delta X}{3} \left[f(X_i) + 4 f(X_{i+1/2}) + f(X_{i+1}) \right]$$

Par ailleurs, le terme $\partial u_i / \partial \xi$ au point 1' qui pose certains problèmes sera évaluée de la façon suivante:

$$\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} \right)_{1'} = \frac{\tilde{u}_2 - \tilde{u}_1}{2\Delta\xi/3}$$

Termes de densité

Le calcul des termes de densité G_i repose sur la connaissance de ρ , h et ξ en tout point et tout instant. Les deux derniers termes sont fournis par le modèle intégré sur la verticale. ρ lui est calculé en fonction de la salinité s par la formule approchée:

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha s) \quad \alpha = 0.0008 \text{ pour } s \text{ en } \%$$

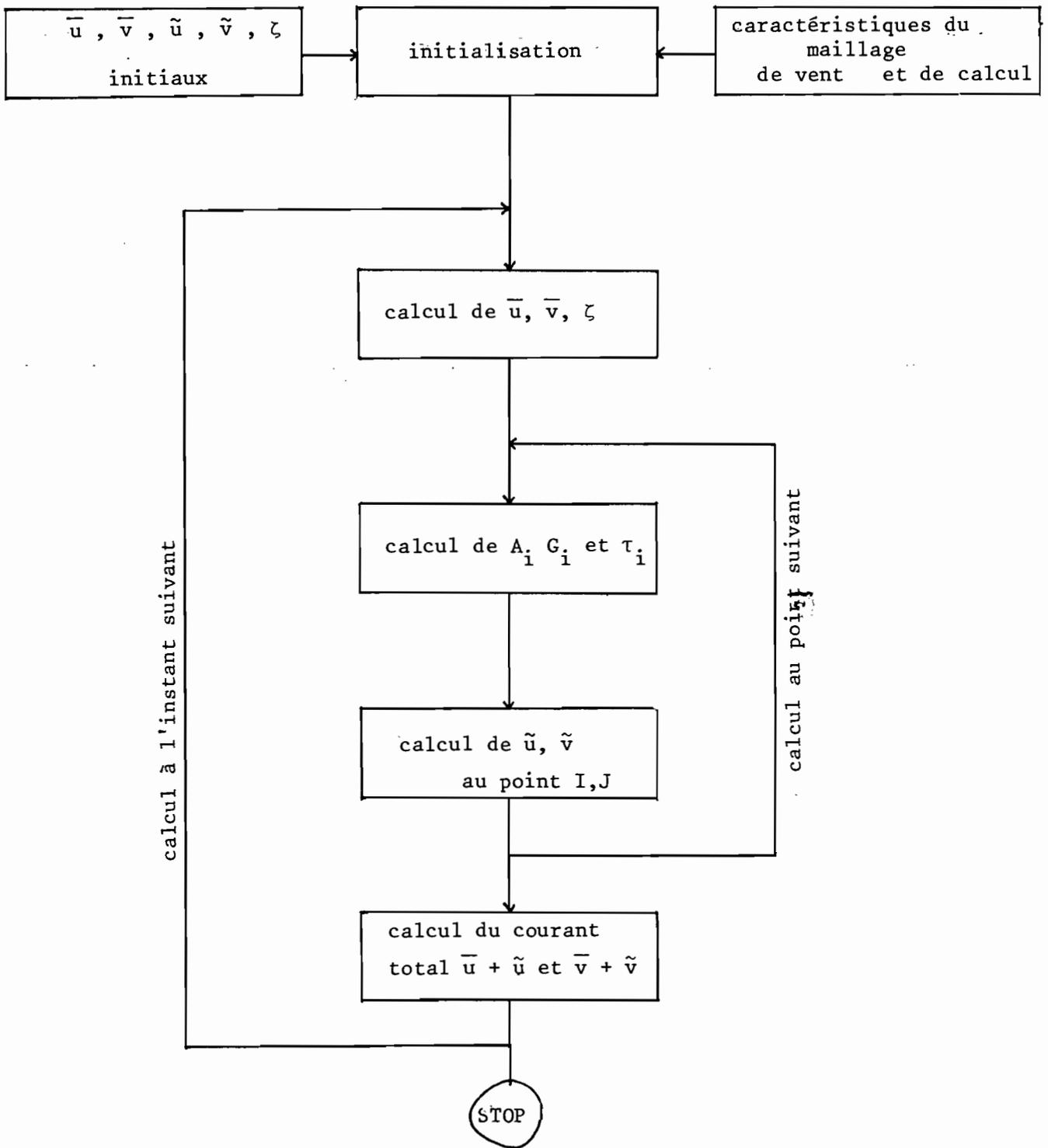
l'expression des termes de densité devient donc:

$$G_i = g \int_0^1 \frac{\partial}{\partial X_i} \left(H \int_{\xi}^1 (1 + \alpha s) d\xi \right) d\xi - \frac{\partial}{\partial X_i} \left(H \int_{\xi}^1 (1 + \alpha s) d\xi \right) + \\ \frac{\partial h}{\partial X_i} \alpha \left(s - \int_0^1 s d\xi \right) + \frac{\partial H}{\partial X_i} \left(\int_0^1 (1 + \alpha s) \xi d\xi - (1 + \alpha s) \xi \right)$$

Mode d'utilisation du modèle bidimensionnel

Le calcul de la structure verticale des courants repose en partie sur la détermination du courant moyen fourni par le modèle simulant un mouvement intégré sur la verticale.

Ce modèle horizontal utilise quatre grilles décalées les unes par rapport aux autres. Il est donc nécessaire de calculer par interpolation les valeurs des quatre variables (\bar{u} , \bar{v} , h , ζ , s) au noeud d'une grille unique (en l'occurrence celle des surélévations ζ) qui coïncide avec celle où sont calculées les fluctuations de vitesse. Il en est de même pour toutes les expressions déduites de ces valeurs.



Organigramme pour la méthode de résolution de LE HIR "pseudo tridimensionnelle"

Discussion sur les paramètres numériques

Les paramètres numériques introduits lors de la schématisation des équations sont le pas de temps ΔT , le pas d'espace $\Delta \xi$. Ces paramètres devront être choisis de telle sorte que la méthode d'intégration des équations soit convergente, c'est à dire que la solution du système différentiel lorsque ΔT et $\Delta \xi$ tendent vers zéro.

Le terme de Coriolis étant très faible pour les profondeurs du cas d'étude, nous allons examiner la stabilité du système en négligeant la force de Coriolis. Dans ce cas les équations sont découplées et peuvent s'écrire schématiquement:

$$\frac{\tilde{u}_{kn} - \tilde{u}_{kn-1}}{\Delta T} = Q + \frac{\sigma}{2\Delta \xi} \left(\lambda_k^+ \frac{\tilde{u}_{k+ln} - \tilde{u}_{kn}}{\Delta \xi} - \lambda_k^- \frac{\tilde{u}_{kn} - \tilde{u}_{k-ln}}{\Delta \xi} \right) + \frac{\sigma}{2\Delta \xi} \left(\lambda_k^+ \frac{\tilde{u}_{k+ln-1} - \tilde{u}_{kn-1}}{\Delta \xi} - \lambda_k^- \frac{\tilde{u}_{kn-1} - \tilde{u}_{k-ln-1}}{\Delta \xi} \right)$$

Examinons donc la propagation d'une onde sinusoïdale de la forme:

$$u = u_0 e^{i(\omega T + k\Delta \xi)}$$

Pour $r = \frac{u^{T+\Delta T}}{u^T}$, on a alors:

$$\frac{r - 1}{\Delta T} = \frac{Q}{U} + \frac{\sigma}{2\Delta \xi^2} \left[\lambda_k^+ (e^{ik\Delta \xi} - 1) - \lambda_k^- (1 - e^{-ik\Delta \xi}) \right]$$

Dans le cas particulier où $\lambda_k^+ = \lambda_k^- = \lambda$

$$r = \frac{1 + \frac{Q\Delta T}{U} + \frac{\sigma\lambda\Delta T}{2\Delta \xi^2} 2(\cos k\Delta \xi - 1)}{1 + \frac{\sigma\lambda\Delta T}{2\Delta \xi^2} 2(\cos k\Delta \xi - 1)}$$

Si l'on remplace Q par sa valeur, on obtient:

$$\Delta T \leq \frac{2U}{(\tau_f - \tau_s)/H - A - G}$$

ou encore dans le cas où les termes d'advection A, les termes de densité G et ceux de surface sont faibles devant le frottement sur le fond:

$$\Delta T \leq \frac{2HU}{\tau_f} = \frac{2C^2U}{g|U_f| |U_f|}$$

Pour $H = 10$ m.
 $C = 30$ m.¹²/s.
 $U = 1$ m./s.
 $g = 10$ m.s.

$T \leq 1800$ s.

Cette relation ne constitue encore qu'une condition de stabilité indicative, compte tenu des approximations effectuées.

Douillet Pascal (1986)

Présentation d'une méthode de modélisation
appliquée au lagon sud-ouest de Nouvelle-Calédonie

Nouméa : ORSTOM, 46 p. multigr.