

PRESENTATION DE QUELQUES METHODES DE LA MORPHOLOGIE MATHEMATIQUE PERMETTANT DE CARACTERISER UNE STRUCTURE SUR UNE IMAGE BINAIRE

Catherine MERING

RESUME

Certains types d'objets au sol peuvent être identifiés sur les images satellitaires en fonction de leur mode d'organisation spatiale et non de leur radiométrie. Certaines études thématiques effectuées à l'aide des images de télédétection posent notamment le problème de la caractérisation quantitative de cette organisation. Nous exposerons ici quelques méthodes déjà classiques en analyse quantitative d'image permettant d'envisager une telle caractérisation, en utilisant les outils de la Morphologie Mathématique. Dans cette approche, nous supposons que l'image à analyser est déjà classée: le problème revient donc à analyser l'organisation spatiale des entités connexes sur une image binaire. Un premier objectif consiste à étudier la *distribution de taille* des éléments de la structure analysée. Dans ce cas, nous faisons appel aux principes et aux méthodes de l'*analyse granulométrique* bidimensionnelle. L'autre objectif envisagé est la caractérisation de la *dispersion spatiale* des éléments composant une structure. L'approche morphologique (érosion par le bi-point) est dans le cas général bien adaptée à l'étude des états de dispersion.

I. TEXTURE ET STRUCTURE : PHOTO-ANALYSE ET ANALYSE QUANTITATIVE D'IMAGE

Depuis l'avènement et le perfectionnement des techniques de prise de vue aériennes puis satellitaires, les thématiciens appartenant aux disciplines directement concernées par l'observation à grande échelle de la surface terrestre, telles que la géographie, la géologie, l'archéologie, ont mis au point des démarches et des procédés d'analyse et d'interprétation de ces

documents, qu'ils soient aériens ou spatiaux. Nous nous référerons principalement ici à la phase analytique de la démarche qu'ils proposent pour exploiter les photographies aériennes puis les images satellitaires. Cette phase, désignée dans de nombreux ouvrages sous le terme de *photo-identification* [CHEVALLIER 71], correspond à l'analyse visuelle du document visant obtenir une première identification des objets. Notre but étant de fournir des outils d'analyse quantitative des images, nous n'essayons pas a priori de simuler la vision. Néanmoins, notre objectif final étant le même que celui de la photo-identification, nous nous sommes demandés dans quelle mesure on pouvait trouver une formulation quantitative des critères utilisés par les spécialistes de la photo-interprétation pour identifier les objets sur l'image. Parmi ces critères, nous en avons retenu deux: la *texture*¹ et la *structure*². A ce stade, nous nous sommes demandés quelles étaient les informations accessibles sur une image numérique permettant de caractériser la *texture* et la *structure*.

D'une façon générale, l'image numérique est constituée d'unités élémentaires dénommées *pixels*. On conviendra d'appeler *région* un groupement de pixels formant une entité connexe et *objet*, un ensemble quelconque composé de régions.

La définition que donnent les photo-interprètes de la texture met en jeu plusieurs descripteurs à la fois: la *taille*, la *forme*, la *densité*, la *tonalité* des *éléments texturaux*. (cf note 1). Il faut d'abord savoir quels sont les éléments de l'image numérique pouvant être assimilés aux éléments texturaux de la photo-identification. On remarquera tout d'abord que les informations concernant la *densité* et la *tonalité* ne peuvent être appréhendées directement sur l'image numérique, où seul est donné un *niveau de gris* pour chaque pixel. Le *niveau de gris* est effectivement un attribut relatif aux les *pixels* mais il ne peut décrire ni les *régions* ni les *objets*, ces entités possédant chacune plusieurs niveaux de gris différents. Seule une approche statistique permet de caractériser *régions* et *objets* à l'aide de l'ensemble de leurs niveaux de gris. Dans ce cas, les descripteurs définis sur la base de statistiques effectuées sur les niveaux de gris ne rendent pas trivialement compte de la *densité* ni de la *tonalité*. D'autre part, s'il est envisageable d'évaluer la *taille*, voire la *forme* des entités, il ne peut s'agir de descripteurs des pixels, ceux-ci ayant tous la même taille et la même forme (ie le point). Nous ne savons donc pas définir sans ambiguïté à partir de l'image numérique un ensemble formé d'entités et descripteurs correspondant directement aux éléments texturaux et à leurs quatre attributs qui sont à la base de la définition que donnent les photo-interprètes de la *texture*.

Nous avons par contre signalé qu'il était possible de décrire l'organisation des niveaux de gris au sein de *régions* à l'aide de statistiques ponctuelles [HARRALICK 78] ou spatiales [SERRA 88]. C'est cette caractérisation de la texture qui a été généralement adoptée en traitement d'image [DESACHY 80], et sur laquelle nous ne reviendrons pas ici.

La définition de la *structure* (2) est également basée sur la notion d'*éléments texturaux*. La notion de *principe d'organisation* utilisée dans cette définition laisse cependant une plus grande liberté d'interprétation et de transposition en termes quantitatifs. Nous considérons que les *éléments texturaux*, qui correspondent, dans notre terminologie à des *régions* ont été délimités lors

¹ La texture: "toute image est composée d'unités élémentaires que l'on nomme éléments texturaux. Les éléments texturaux peuvent être dénombrés et décrits: ils ont une forme, une taille, une densité, une tonalité. Un ensemble d'éléments texturaux identiques, continus et répétés forme une texture" ("Télédétection Techniques et applications cartographiques" de Jean-Léonard Dizier et Olivier Léo)

² La structure: "La structure est un principe d'organisation de la texture ou d'éléments texturaux" ("Télédétection Techniques et applications cartographiques" de Jean-Léonard Dizier et Olivier Léo)

d' une analyse antérieure. On s'attachera alors uniquement à caractériser leur organisation spatiale. Pratiquement, l'image numérique analysée n'est donc pas une image en niveaux de gris mais une image *binaire*¹ résultant par exemple du seuillage d'une image à niveaux de gris ou d'une classification préalable à partir de plusieurs images en niveaux de gris (par exemple une classification multispectrale). L'ensemble ainsi défini sur l'image correspond à une valeur unique du seuil ou à une classe unique, généralement associée à un thème ou à une catégorie d'objets (eau, végétation,...) .

Nous avons donc vu que les définitions de la photo-interprétation n'étaient pas immédiatement utilisables dans le cadre de l'analyse quantitative. Nous avons également montré que l'on pouvait trouver une formulation de la *texture* et de la *structure* définies à l'aide de primitives de l'image numérique, tout en restant fidèles aux objectifs de la photo-identification.

II. ANALYSE DE L'ORGANISATION SPATIALE D'UN THEME

Comme nous venons de le voir plus haut, nous analysons une image binaire. On appelle X l'ensemble des points de l'image ayant la valeur 1. L'ensemble X correspond à l'ensemble des *éléments texturaux*, ou au *thème* dont on cherche à caractériser l'organisation spatiale. Pour atteindre cet objectif, nous utiliserons les méthodes de la Morphologie Mathématique ([M.M] en notation abrégée)[SERRA 82].

II.1. Analyse morphologique et quantification de l'information structurale par la Morphologie Mathématique

En [M.M] , l'analyse quantitative de l'image , et plus particulièrement, l'analyse de la structure spatiale d'un ensemble X appartenant à l'espace $\mathbf{R}^2$ se fait en deux étapes :

- l'analyse morphologique proprement dite de l'ensemble X qui permet d'accéder à l'information structurale
- la quantification de l'information structurale

L'analyse morphologique de X s'effectue par l'intermédiaire de transformations ensemblistes *Ψ en tout ou rien* à l'aide d'un *élément structurant* de géométrie simple tels que : le cercle, le segment, l'hexagone. Pour effectuer ces transformations, on déplace l'élément structurant B de façon à ce que son centre X occupe toutes les positions de l'espace. Pour chaque position, on vérifie si B et X vérifient un certain type de relation ensembliste, cette relation étant exprimée en terme d'*union*, d'*intersection* ou d'*inclusion*. Le résultat de cette vérification s'exprime par une réponse positive ou négative, d'où le nom de *transformations en tout ou rien* . Par exemple, pour effectuer une *érosion*, on vérifiera pour chaque point X de l'espace , si B , centré en X , est inclus dans X . De la même façon pour effectuer une *dilatation*, on vérifiera si B , centré en X rencontre X (ie si l'intersection entre B et X est différent de l'ensemble vide). L'ensemble des points X de l'espace pour lesquels la relation est vérifiée forme un nouvel ensemble, $\Psi(X)$. L'ensemble *érodé* de X , noté $E^B X$ aura une surface plus petite que

¹ Image binaire : image dont les pixels n'ont que deux valeurs possibles: 0 ou 1.

celle de X , tout en conservant la même structure. L'ensemble *dilaté* de X , noté $D^B X$ aura une surface plus grande que celle de X , tout en conservant la même structure. On observera sur les figures 2 et 3 les effets respectifs de l'érosion puis de la dilatation par un élément structurant hexagonal d'un ensemble A_1 initial représenté sur la figure 1.

A partir de l'érosion et de la dilatation, on définit deux autres transformations *en tout ou rien* qui sont l'ouverture X_B et la fermeture X^B , de la façon suivante ¹:

$$X_B = D^B(E^B X)$$

$$X^B = E^B(D^B X)$$

où:

$\overset{v}{B}$ est l'élément transposé de B , c'est à dire symétrique de B par rapport à son origine ²

L'ensemble X_B est plus régulier, moins riche en détail, et moins étendu que l'ensemble initial X ³. L'ouverture a adouci les contours, coupé les isthmes étroits, supprimé les petites îles et les caps étroits. Les figures 4, 5 et 6, qui représentent respectivement l'ensemble initial A_2 l'ensemble ouvert par un hexagone de taille 1 et l'ensemble ouvert par un hexagone de taille 4, illustrent les effets de cette transformation.

L'ensemble X^B est également plus régulier et moins riche en détail que l'ensemble initial, tout en étant plus étendu que celui-ci ⁴. La fermeture bouche les canaux étroits, supprime les petits lacs et les golfs étroits.

Si les transformations *en tout ou rien* permettent d'accéder à une information structurale, la mesure constitue la quantification de cette information. On utilise successivement deux types d'applications ensemblistes: une application Ψ de $\mathbf{R}^2$ dans lui-même, telle qu'une transformation *en tout ou rien*, suivie d'une application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$, qui correspondra à une mesure de l'ensemble $\Psi(X)$ (telle que sa surface) conformément au schéma suivant:

$$\mathbf{R}^2 \text{ -----} > \mathbf{R}^2 \text{ -----} > \mathbf{R}$$

$$X \text{ -----} > \Psi(X) \text{ -----} > p = \mu(\Psi(X))$$

C'est à l'aide d'une ou de plusieurs mesures p , que l'on va analyser quantitativement la structure de l'ensemble X . Cette analyse peut avoir plusieurs volets: il peut s'agir de caractériser la taille de l'ensemble, son orientation, ou encore son état de dispersion.

¹ Pour plus de détails concernant les définitions et les propriétés de ces transformations, on se reportera à l'ouvrage de J. SERRA: "Image Analysis and Mathematical Morphology" (Academic Press, London, 1982).

² Si l'élément structurant possède un centre de symétrie qui est pris comme origine (ex : le cercle), $\overset{v}{B}$ est identique à B .

³ On démontre que X_B est inclus dans X

⁴ On démontre que X est inclus dans X^B



Figure 1 : ensemble A_1^1



Figure 4 : ensemble A_2



Figure 2 : Erode de A_1 par un hexagone taille 1



Figure 5 : Ouvert de A_2 par un hexagone de taille 1



Figure 3 : Dilaté de A_1 par un hexagone de taille 1

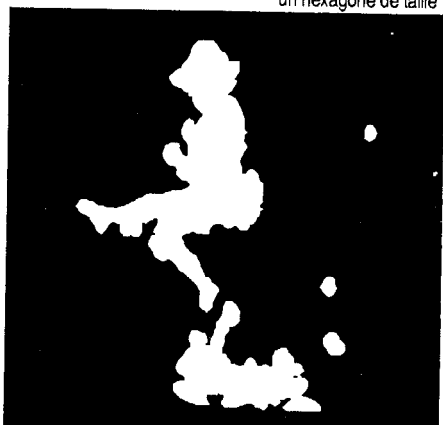


Figure 6 : Ouvert de A_2 par un hexagone de taille 4

¹ Les clichés de cette page nous ont été communiqués par Messieurs Ch. Lantuejoul et B. Lay du Centre de Morphologie Mathématique de l'Ecole des Mines de Paris.

II.2. Les différents types d'analyse

Pour décrire un ensemble X qui n'est pas connexe, on peut décider d'analyser séparément les ensembles connexes qui le composent. Chaque ensemble connexe, encore appelé composante connexe, sera mesuré séparément. C'est ce que l'on appelle en [M.M], l'*analyse individuelle*.

Si au contraire, tous les points de l'ensemble sont analysés simultanément, on dit que l'on effectue l'*analyse texturale* de l'ensemble ¹.

Pour caractériser l'organisation spatiale de l'ensemble X , nous choisissons d'effectuer une *analyse texturale*.

En analyse d'image, un autre problème surgit, conduisant à d'autres choix : toute image, en effet, est analysée à l'intérieur d'un cadre Z de dimension finie (par exemple l'écran de visualisation). Ce cadre est appelé le *masque de mesure*. Si l'on suppose que l'ensemble X tout entier est accessible à la mesure, on dit que l'on effectue une *analyse globale*. Si l'on suppose, au contraire, que l'ensemble à analyser s'étend au delà du *masque de mesure*, on dit que l'on effectue une *analyse locale* sur une partie Y de X telle que :

$$Y = X \cap Z$$

Le problème consiste alors donc à évaluer le biais introduit par le *masque de mesure* Z . Une manière de s'affranchir de ce biais est d'appliquer, lorsque c'est possible, le théorème du masque de mesure qui dit que, "Pour toute transformation *en tout ou rien* faisant intervenir un élément structurant B , le résultat de la transformation n'est connu sans biais que dans le masque Z' , qui est l'érodé de Z par B ".

III. L' ANALYSE GRANULOMETRIQUE D'UNE IMAGE BINAIRE

III.1. Critère de taille

L'un des moyens de caractériser une structure spatiale est de décrire la taille de cet ensemble à l'aide d'un critère qui soit sensible, non seulement à la surface totale de cet ensemble, mais à la surface de ses composantes connexes. Dans ce cas la taille sera décrite non par une somme ou une moyenne mais par une distribution. Pour définir un critère de taille, les théoriciens de la [M.M] [MATHERON 75] se sont inspirés de l'analyse des matériaux pulvérulents. Une des techniques classiques utilisée dans ce cas consiste à effectuer un tamisage de taille variable du matériau puis à peser le contenu de chaque tamis. Pour étudier la distribution de taille d'un ensemble de $\mathbf{R}^2$, ils ont appliqué le même principe, et ils ont utilisé le terme de *granulométrie* pour qualifier la distribution de taille en analyse d'image.

G. Matheron a ainsi défini une granulométrie sur un ensemble X en définissant une famille de transformations ensemblistes $\psi_\lambda(X)$, où λ est un paramètre positif, par analogie avec une famille de tamis de taille variable.

¹Cette terminologie n'est évidemment pas à rapprocher de celle de la photo interprétation.

Ces transformations ensemblistes doivent satisfaire un certain nombre de règles pour constituer une bonne granulométrie au sens de Matheron.¹ Parmi les granulométries possibles, on démontre qu'une famille de transformations générée par les *ouvertures* d'un ensemble X à l'aide d'éléments structurants convexes² de taille croissante λ satisfait les axiomes de Matheron. C'est à l'aide des granulométries par ouverture bidimensionnelle que nous avons envisagé l'étude de la taille d'un ensemble quelconque de $\mathbf{R}^2$.

III.2. Granulométrie par ouverture bidimensionnelle

Le principe de l'analyse granulométrique de X par ouverture bidimensionnelle consiste à mesurer, après chaque ouverture par un élément structurant convexe bidimensionnel de taille λ , la surface de l'ensemble transformé $X_{\lambda B}$, par analogie avec un tamisage à l'aide d'un tamis circulaire. On obtient ainsi une distribution que l'on appelé *distribution en mesure* car elle est basée sur la mesure (ie la surface, ou plus précisément le nombre de pixels dans le cas d'une image digitale) de l'ensemble transformé. La fonction de distribution en mesure $G(\lambda)$, dans le cas d'une analyse globale, est définie de la façon suivante:

$$G(\lambda) = \frac{1 - A(X_{\lambda B})}{A(X)} \quad \lambda \geq 0$$

où :

$A(X)$ représente la surface de X

$X_{\lambda B}$ représente l'ouverture de X par un élément B de taille λ

La loi de distribution de taille $G(\lambda)$ correspond donc à la proportion des pixels de X qui ont été éliminés après l'ouverture par l'élément structurant λB . Par définition cette distribution croît en fonction de λ , et prend des valeurs allant de 0 (pour $\lambda=0$, aucun pixel n'est encore éliminé) à 1 (pour une certaine valeur positive de λ , tous les pixels sont éliminés).

A titre d'exemple, on a calculé les distributions en mesure à l'aide d'un élément structurant hexagonal, de deux ensembles nommés respectivement C_1 (fig 7) et C_2 (fig8), en nous plaçant dans le cas d'une analyse globale. En portant sur le même graphique ces deux distributions (fig 9), on peut aisément les comparer : la distribution G_1 calculée à partir de C_1 , qui est composé d'entités connexes de taille différente, est sensiblement plus étalée que la distribution G_2 , calculée à partir de C_2 , composé d'entités de taille presque similaire. La pente à l'origine de G_1 est également plus faible que celle de G_2 .

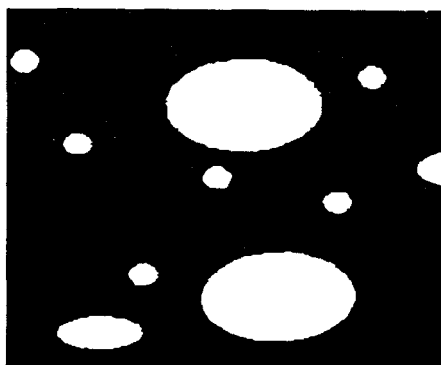
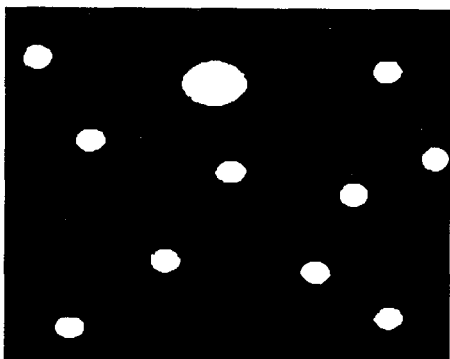
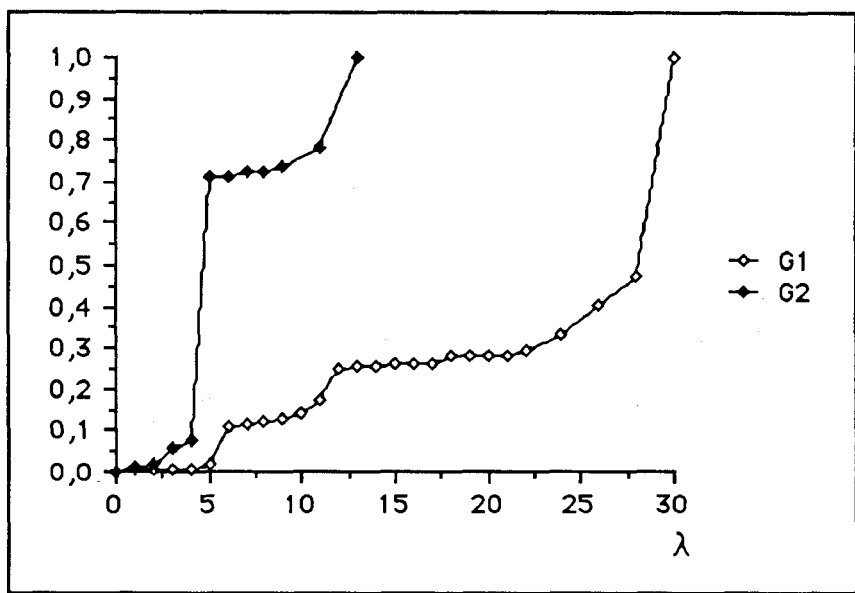
¹ Un critère de taille y_1 au sens de Matheron doit satisfaire les axiomes suivants:

$$1) \psi_{\lambda}(X) \subseteq X \quad \forall \lambda \geq 0$$

$$2) X \subseteq Y \Rightarrow \psi_{\lambda}(X) \subseteq \psi_{\lambda}(Y) \quad \forall \lambda \geq 0$$

$$3) \psi_{\lambda}(\psi_{\mu}(X)) = \psi_{\mu}(\psi_{\lambda}(X)) = \psi_{\sup(\lambda, \mu)}(X) \quad \forall \lambda, \mu \geq 0$$

² Un ensemble convexe X de $\mathbf{R}^2$ est un ensemble tel que tout segment joignant deux points quelconques de X est entièrement inclus dans X.

Figure 7 : Ensemble C_1 Figure 8 : Ensemble C_2 Figure 9 : Distribution en mesure de C_1 (courbe G_1) et de C_2 (courbe G_2)

On peut également définir une *distribution en nombre* basée sur le comptage des entités connexes éliminées après une ouverture λB . La fonction de distribution en nombre $F(\lambda)$, dans le cas d'une analyse globale, est définie de la façon suivante:

$$F(\lambda) = \frac{1 - N_2(X_{\lambda B})}{N_2(X)}$$

où :

$N_2(X)$ représente le nombre de connexité de X dans $\mathbf{R}^2$ ¹

$X_{\lambda B}$ représente l'ouverture de X par un élément B de taille λ

Il faut noter cependant que si les entités connexes de X ne sont pas

¹ Le nombre de connexité dans $\mathbf{R}^2$ est égal au nombre d'entités connexes disjointes diminué du nombre de trous.

convexes, $N_2(X)$ ne décroît pas sûrement lorsque λ augmente. L'analogie avec l'analyse granulométrique par tamisage n'existe plus, puisque la distribution en nombre peut ne pas suivre une décroissance monotone. On a représenté à titre d'exemple sur la figure 10 les distributions en nombre F_1 et F_2 calculées respectivement à partir des deux ensembles C_1 et C_2 à l'aide d'un élément structurant hexagonal.

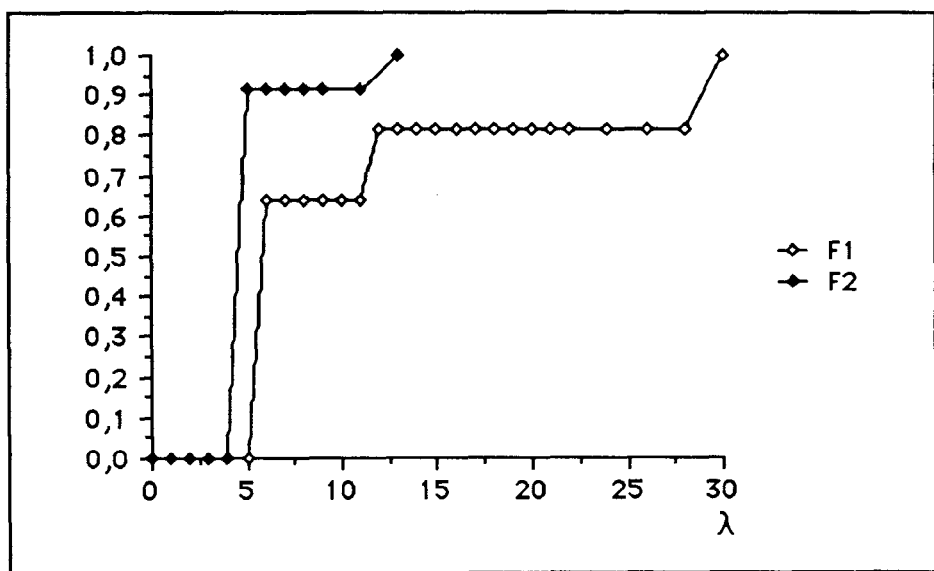


Figure 10: Distribution en nombre de C_1 (courbe F_1) et de C_2 (courbe F_2)

Une autre façon d'effectuer l'analyse de la taille consiste à évaluer non pas la distribution de taille proprement dite mais les variations entre deux tamisages successifs. La fonction $g(\lambda)$ permettant d'évaluer ces variations, appelée fonction de *densité granulométrique en mesure*¹, est définie de la façon suivante:

$$g(\lambda) = A(X_{(\lambda-1)B}) - \frac{A(X_{\lambda B})}{A(X)} \quad \lambda \in \mathbb{N}^+$$

La fonction densité en mesure $g(\lambda)$ correspond à la proportion de pixels éliminés entre deux ouvertures successives effectuées à l'aide d'éléments structurants de taille croissante, valant respectivement $(\lambda-1)$ et λ .

On a représenté sur le même graphique (fig. 11) les deux courbes de densité granulométrique g_1 et g_2 calculées à l'aide d'un hexagone de taille croissante, sur les ensembles C_1 et C_2 . Sur la courbe relative à g_1 , on distingue trois modes correspondant respectivement aux intervalles suivants:

$$3 < \lambda < 6$$

$$9 < \lambda < 12$$

¹ On peut de la même façon définir une fonction de *densité granulométrique en nombre* $f(\lambda)$ de la façon suivante:

$$f(\lambda) = \frac{N_2(X_{(\lambda-1)B}) \cdot N_2(X_{\lambda B})}{N_2(X)} \quad \lambda \geq 1$$

$$25 < \lambda < 30$$

Ces trois intervalles permettent de décrire statistiquement la taille de C_1 qui est formé de trois groupes d'entités de dimensions différentes.

Sur la courbe relative à g_2 on distingue deux modes correspondant aux deux intervalles suivants:

$$3 < \lambda < 5$$

$$9 < \lambda < 12$$

C_2 est composé de deux groupes d'entités de dimensions différentes.

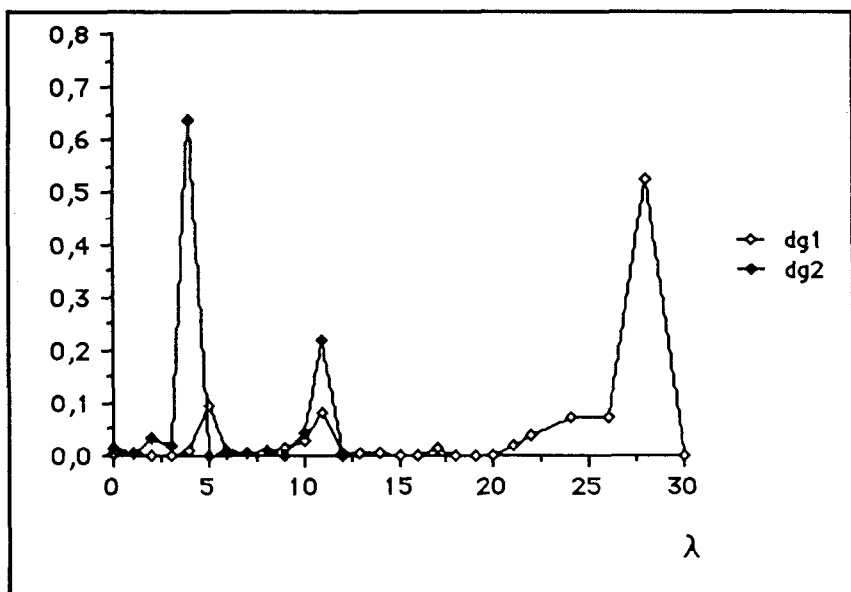


Figure 11 : Densité granulométrique en mesure de C_1 (courbe dg1) et de C_2 (courbe dg2)

III.3. Applications de l'analyse granulométrique par ouverture

L'une des applications possibles de l'analyse granulométrique par ouverture est la caractérisation des structures en "grains", c'est à dire composée d'entités connexes convexes assimilables à des grains. Cette caractérisation peut se faire directement à l'aide des *distributions en mesure et en nombre*, et des *densités granulométriques* calculées à partir des ensembles considérés. C'est précisément cette approche qui nous a servi à caractériser l'organisation spatiale du couvert ligneux en zone sahélienne à partir des images du satellite SPOT [MERING 88]. Si l'on veut utiliser l'information obtenue à la suite de l'analyse granulométrique sous une forme plus synthétique, il est possible de déterminer différents paramètres statistiques à partir des fonctions de distribution et des fonctions de densité. On peut par exemple caractériser une structure à l'aide de la *médiane* ou des *quantiles* calculés à partir des distributions $G(\lambda)$ ou $F(\lambda)$ ou encore des *modes* calculés à partir des fonctions de densité $g(\lambda)$ ou $f(\lambda)$.

Enfin, on peut imaginer de décrire l'organisation spatiale d'un ensemble X quelconque en calculant la proportion de pixels éliminés entre deux

ouvertures ainsi que la proportion de pixels ajoutés entre deux fermetures, à l'aide d'éléments structurants de taille croissante, suivant une technique dite *d'ouverture-fermeture à deux dimensions*. On peut itérer l'opération jusqu'à élimination complète de la structure (en effectuant des ouvertures de taille croissante) ou jusqu'à envahissement complet de l'espace (ou du masque de mesure) par la structure (en effectuant des fermetures de taille croissante). C'est ainsi que J.Serra a procédé pour décrire quantitativement par l'analyse d'image, différents échantillons de matériaux poreux ¹.

IV. ETUDE DE LA DISPERSION PAR LA FONCTION COVARIANCE

IV.1. Définition de la fonction covariance

On peut souhaiter décrire l'état de dispersion d'une structure indépendamment de la distribution de taille de celle-ci. C'est ainsi qu'on distingue des structures anisotropes, périodiques ou pseudo-périodiques, emboîtées, etc... Pour analyser un état de dispersion, il faut disposer d'une méthode d'analyse qui permette de caractériser quantitativement une relation entre deux points quelconques de la structure, séparés par une distance h , indépendamment de ce qui se passe entre ces deux points. Les théoriciens de la [M.M.] ont proposé un outil simple à mettre en oeuvre, la *Covariance*, destiné à effectuer l'analyse quantitative des états de dispersion.

La Covariance globale $K(X, h)$ d'un ensemble quelconque X est égale à la mesure de l'érodé de X par un bipoint de longueur h , c'est à dire un élément structurant constitué par les extrémités d'un vecteur de module h et de direction quelconque α :

$$K(X, h) = \text{Mes}(E^h(X))$$

où:

h est un bipoint de longueur h et de direction α

L'érodé $E^h(X)$ d'un ensemble X par un bipoint h s'obtient en effectuant l'intersection entre l'ensemble X et le translaté de X selon h :

$$E^h(X) = X \cap \Xi_{-h}$$

En *analyse locale*, on ne peut mesurer l'état de dispersion qu'à travers un masque de mesure Z . On utilise donc une version probabiliste de la covariance, la *fonction covariance* notée $C(X, h)$ pour étudier les états de dispersion, en supposant que X est un ensemble aléatoire stationnaire. La fonction covariance est alors définie comme la probabilité pour qu'un point X et un point $X+h$ appartiennent à X , soit:

$$C(X, h) = P\{x \in X, X+h \in X\} \quad (I)$$

Pour X défini dans $\mathbf{R}^2$, à travers un masque de mesure Z , on aura:

¹ On trouvera une description approfondie de cette méthode appliquée à l'analyse des dolérites caucasiennes dans "Image Analysis and Mathematical Morphology" de J.Serra, pages 339-344.

$$C(X, h) = A_A E^h(X \cap Z)$$

où :

$A_A(X \cap Z)$ est fraction surfacique de $X \cap Z$ ¹

En appliquant le théorème du masque de mesure (cf § II.2), on obtient :

$$C(X, h) = \frac{A(E^h(X) \cap E^h(Z))}{A(E^h(Z))} \quad (II)$$

IV.2. Principales propriétés de la fonction covariance

La fonction covariance possède un ensemble de propriétés mathématiques qui permettront d'effectuer l'interprétation des covariogrammes. Parmi celles-ci nous rappellerons les propriétés suivantes:

$$C(X, 0) = A_A(X) \quad (III)$$

A l'origine (ie lorsque h vaut 0), la fonction covariance est égale à la mesure de X . Pour toute valeur finie de h , elle sera inférieure ou égale à la mesure de X , comme l'indique l'inégalité suivante (facile à vérifier en utilisant la relation II):

$$C(X, h) = C(X, -h) \leq C(X, 0) \quad (IV)$$

D'autre part, lorsque h tend vers l'infini, on considère que les deux événements (au sens probabiliste du terme) $X \in X$ et $(x+h) \in X$ sont indépendants. En appliquant la relation (I), on en déduit la relation suivante:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} C(X, h) = (A_A(X))^2 \quad (V)$$

La fonction covariance admet donc une valeur asymptotique théorique égale au carré de la fraction surfacique de X . Si cette limite peut être pratiquement atteinte pour une valeur $h=p$, les points de la structure distants d'au moins p seront très peu ou pas corrélés. Cette distance est appelée *portée de la covariance*, et peut être estimée par calcul ².

La fonction covariance renseigne également sur l'anisotropie de X . En particulier la dérivée de la fonction à l'origine et dans une direction α donnée est directement liée au nombre de connexité spécifique $N_L(X, \alpha)$ ³ dans cette direction:

$$N_L(X, \alpha) = -C'(X, 0, \alpha) \quad (VI)$$

où

$N_L(X, \alpha)$ est le nombre de connexité spécifique dans la direction α

¹La fraction surfacique d'un ensemble aléatoire borné est égale à la proportion d'espace occupé par cet ensemble

²On trouvera des algorithmes permettant d'estimer la *portée* dans l'ouvrage "Précis d'Analyse d'Images" de M. Coster et J.L.Chermant (Paris, CNRS, 1985), p231.

³On trouvera le détail de la méthode de calcul du nombre spécifique $N_L(X, \alpha)$ dans l'espace R^1 suivant une direction α , dans "Image Analysis and Mathematical Morphology" de J Serra, aux pages 133-135.

$C'(X, 0, \alpha)$ est la dérivée à l'origine de la fonction covariance calculée suivant la direction α

On peut donc établir une relation entre la pente à l'origine de la fonction covariance et la finesse de la structure: en effet, le nombre de connexité permet de caractériser la finesse d'une structure dans une direction donnée.

IV.3. Interprétation des covariogrammes

Les propriétés que nous venons d'évoquer nous fournissent des aides précieuses pour interpréter les covariogrammes:

Notons d'abord que la valeur de la fonction à l'origine est d'autant plus élevée que la fraction surfacique est importante (cf relation III) et qu'à fraction surfacique égale, la pente à l'origine est d'autant plus élevée que la structure est fine (cf relation VI).

Les variations entre l'origine et la valeur asymptotique (cf relation V) de la fonction dépendent uniquement de l'état de dispersion. En particulier si la structure présente des périodicités, le covariogramme présentera des oscillations. Ces oscillations sont d'autant plus accentuées que la périodicité est plus marquée. Des paliers intermédiaires apparaissent pour des superpositions de structures d'échelles différentes.

D'autre part, la portée, si elle existe, nous renseigne sur la taille de la structure. Lorsque la fonction covariance n'atteint pas sa valeur asymptotique, cela signifie qu'il existe une macro-structure à plus grande échelle.

Enfin, le caractère directionnel de la fonction covariance permet d'analyser l'anisotropie de la structure, en comparant les covariogrammes correspondant à différentes directions du plan.

A titre d'exemple on a représenté sur les figures 14 et 15 deux portions de covariogrammes ¹ obtenus respectivement par calcul de la fonction covariance dans la direction horizontale du plan, de deux ensembles nommés D_1 et D_2 (représentés sur les figures 12 et 13).

On fait les constatations suivantes:

La valeur à l'origine du covariogramme de D_1 est sensiblement plus élevée que celle du covariogramme de D_2 : l'ensemble D_1 est sensiblement plus étendu que D_2 .

D'autre part les deux structures sont pseudo-périodiques, ce que révèle bien les courbes. On note cependant que le covariogramme de D_2 révèle une structure emboîtée (entre les valeurs 30 et 40 de h) que ne révèle pas le covariogramme de D_1 .

¹ La fonction covariance a été calculée pour les premières valeurs de h entre 0 et 100.

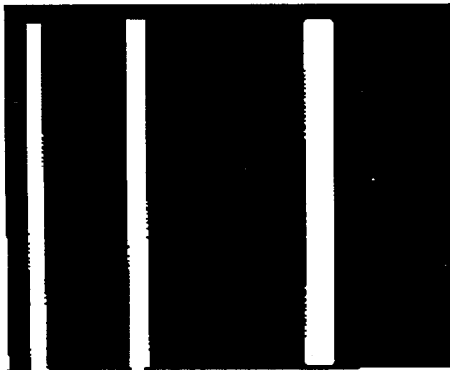


Figure 12 : Ensemble D_1

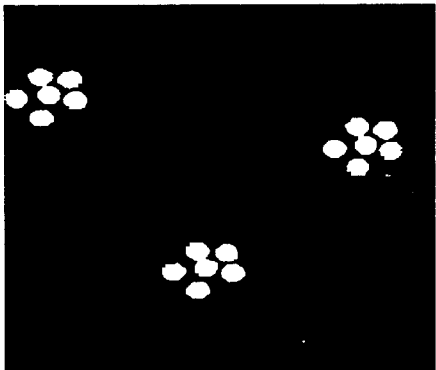


Figure 13 : Ensemble D_2

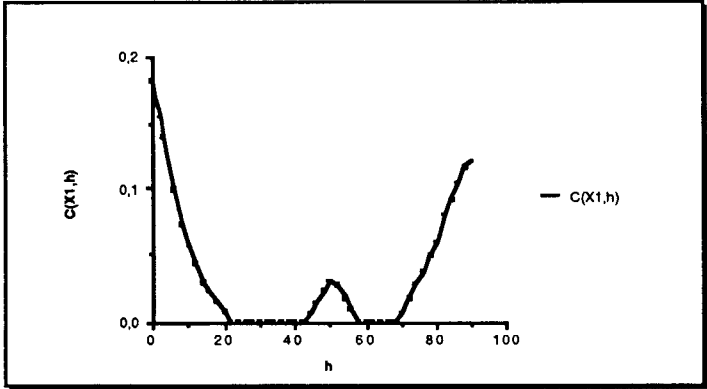


Figure 14 : Covariogramme de D_1

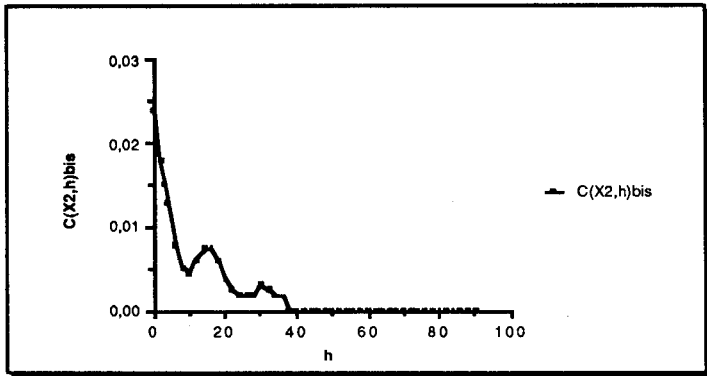


Figure 15: Covariogramme de D_2

IV.4. Modèles et analyse descriptive de la dispersion

L'une des possibilités d'utilisation et d'interprétation de la covariance consiste à avoir recours, lorsque c'est possible, à des modèles. Ces modèles permettent d'obtenir les valeurs théoriques de grandeurs que l'on pourra comparer aux valeurs expérimentales correspondantes.

Un des modèles simples consiste à décrire la structure comme une structure périodique amortie. P. Camart, J.L. Chermant et M.Coster [CAMART et al 78] ont proposé un paramètre b caractérisant l'amortissement. On utilise ce paramètre pour modéliser une structure périodique amortie à l'aide de l'équation théorique suivante:

$$C(X,h) = C^2(X,0) + f(h)e^{-bh}$$

où

$f(h)$ représente une fonction périodique

b est le paramètre d'amortissement

On estime b en effectuant un ajustement exponentiel sur les maxima de la fonction de covariance.

On peut également essayer de décrire la structure à l'aide d'un modèle probabiliste de la dispersion. Parmi ces modèles, le plus connu est le modèle booléen.[SERRA 82] Celui-ci s'avère bien adapté à la description de structures de morphologies diverses où n'apparaissent pas de regroupement en amas. Le modèle booléen se construit de la façon suivante:

- on plante des points suivant un processus de Poisson de densité θ ¹
- En chaque point on plante un grain A_i' primaire dont on connaît la forme. La taille de ce grain peut être fixe ou aléatoire. Il peut y avoir interpénétration des grains entre eux

Si l'on appelle $X = \cup_i A_i'$, l'union de tous les grains primaires, X constitue un ensemble booléen.

On démontre que les propriétés morphologiques de l'ensemble complémentaire X^C obtenues à partir d'un ensemble structurant quelconque B sont liées aux caractéristiques du grain primaire par la relation suivante:

$$Q(X,B) = \exp - \theta(\text{Mes}(D^B(A')))$$

où

$Q(X,B)$ est la probabilité pour qu'un élément B appartiennent à l'ensemble complémentaire X^C

On démontre alors² que la fonction covariance de l'ensemble complémentaire de X obéit à la relation suivante:

$$C(X^C,h) = A_A(X^C)^2 \exp(\theta K(A',h)) \quad (\text{VII})$$

où:

X^C est l'ensemble complémentaire de X

θ est la densité du processus de Poisson

$K(A',h)$ la covariance globale du grain primaire A'

Si l'on fait l'hypothèse que le grain primaire est convexe, on peut tester

¹Pour cela on tire au sort des coordonnées suivant une loi uniforme.

²On trouvera la démonstration complète dans "Précis d'Analyse d'Images" de M. Coster et J.L. Chermant, P253-254.

l'hypothèse du modèle booléen $1.C(X^C, h)$ étant accessible expérimentalement, on pourra alors évaluer la covariance globale du grain primaire convexe $K(A', h)$ à l'aide de la relation VII. Pour décrire le modèle, on recherchera parmi les grains convexes celui qui a la même covariance globale.

Comme nous venons de le voir le recours à des modèles nécessite un grand nombre d'hypothèses initiales. Jusqu'ici, dans le cas de l'analyse des images de télédétection, nous avons rencontré peu de cas nous donnant l'occasion d'émettre de telles hypothèses.

Au cours de l'analyse de la structure du couvert végétal en zone sahélienne à partir des images SPOT [MERING 88] [JACQUEMINET 89], que nous avons effectuée à l'aide des outils décrits plus haut, nous n'avons pas envisagé de recourir à un modèle mais plutôt d'utiliser directement les éléments résultant du calcul de la covariance tels que:

- la pente à l'origine
- la portée (si elle existe)
- la distance entre les maxima (dans le cas d'une fonction pseudo-périodique)
- la hauteur des pics (dans le cas d'une fonction pseudo-périodique)

Nous pensons néanmoins que dans le cadre du suivi systématique d'un phénomène bien circonscrit et reconnaissable sur les images de télédétection (ex : évolution du couvert végétal, de l'occupation du sol, de l'habitat) l'utilisation de modèles d'organisation d'une structure pourrait fournir à l'avenir des éléments complétant les observations in situ, de façon plus satisfaisante que la simple étude descriptive de l'image.

V. FONCTION DE VOISINAGE ENTRE DEUX ENSEMBLES X_i ET X_j

Lorsqu'une image de télédétection est classée, il peut être intéressant d'évaluer quantitativement l'organisation relative d'une classe particulière relativement à une autre classe (il peut s'agir par exemple d'étudier la répartition de la végétation relativement à un réseau hydrographique). L'une des solutions consiste à calculer la fonction *covariance rectangle* entre l'ensemble X_i correspondant à l'une des classes et l'ensemble X_j correspondant à l'autre classe. Elle correspond à la probabilité pour qu'un point X appartienne à X_i et que le point $X+h$ appartienne à X_j . Les propriétés de la *covariance rectangle* sont analogues à celles de la *covariance* (cf § IV.2). Une autre manière d'étudier les relations spatiales entre deux classes consiste à étudier le pourcentage des points d'un ensemble X_i situé à une distance λ d'un ensemble X_j . Ce pourcentage peut être accessible en effectuant des *dilatations conditionnelles* de X_j par rapport à X_i ². On définit alors la fonction de voisinage de X_i par rapport à X_j de la façon suivante:

¹ Dans le cas du grain primaire on démontre que la fonction: $P(X^C, l) = \frac{A\{E^l(X^C) \cap E^l(Z)\}}{E^l(Z)}$ où l est un élément structurant linéaire, obéit à une loi exponentielle.

² Effectuer la dilatation conditionnelle d'un ensemble X par rapport à un ensemble Y revient à réaliser l'intersection entre $D^B(X)$, le dilaté de X , et Y .

$$G(X_i: X_j, \lambda) = \frac{\text{Mes}(D^{\lambda B}(X_i) \cap X_j)}{\text{Mes}(X_j)}$$

On a représenté sur les figures 18 et 19 les courbes correspondant aux fonctions de voisinages calculées à partir des configurations représentées respectivement sur les figures 16 et 17. Dans les deux cas on a calculé la fonction de voisinage de l'ensemble linéaire Y (en blanc sur l'image) par rapport à l'ensemble formé d'ellipses (en gris sur l'image) nommés respectivement E_1 et E_2 .

VI. CONCLUSIONS

Nous avons présenté ici quelques méthodes quantitatives permettant d'analyser à partir d'une image satellitaire numérique ce que les photo-interprètes nomment la structure.

Dans ce but, nous avons examiné différents outils qu'offre la Morphologie Mathématique binaire pour analyser quantitativement une organisation spatiale délimitée à partir d'une image quelconque, et donc en particulier d'une image satellitaire préalablement classée. De tels outils permettent l'accès à une paramétrisation de la taille et de l'état de dispersion d'une structure spatiale. Ils permettent également d'effectuer l'analyse complète et systématique des structures discontinues telles que les structures en *grains* ou en *bandes*. D'autre part, la relation spatiale entre deux structures peuvent également être étudiées quantitativement. Enfin l'approche quantitative et ensembliste de l'analyse d'image qui est celle de la Morphologie Mathématique a permis de proposer des modèles probabilistes permettant de décrire certains types d'organisations spatiales.

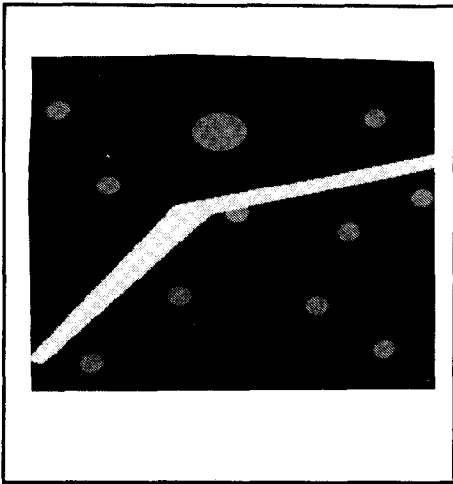


Figure 16 : Ensemble Y (ligne blanche)
et E₁ (ellipse grises)

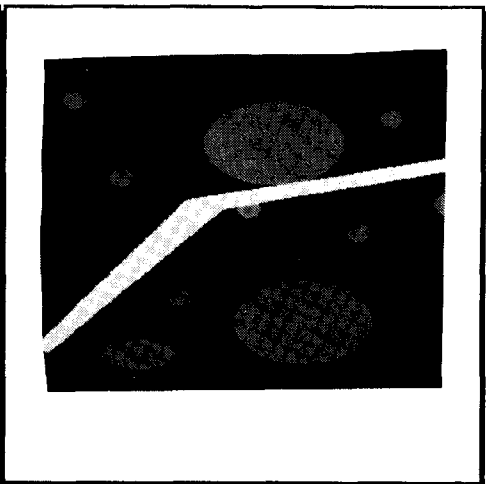


Figure 17 : Ensemble Y (ligne blanche)
et E₂ (ellipses grises)

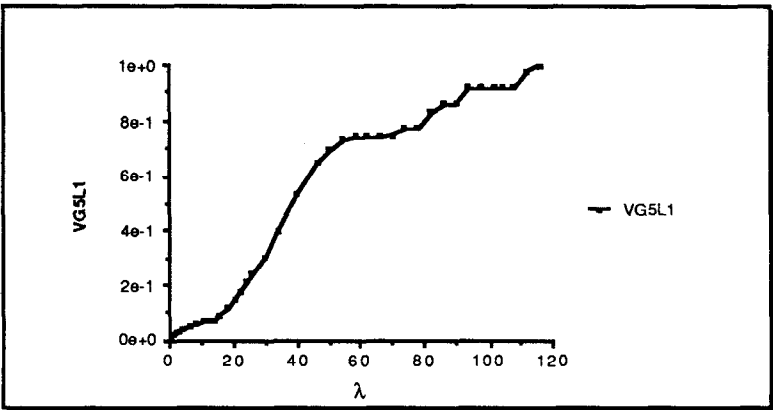


Figure 18 : Fonction de voisinage de Y (ligne blanche) par rapport à E₁ (ellipses grises)

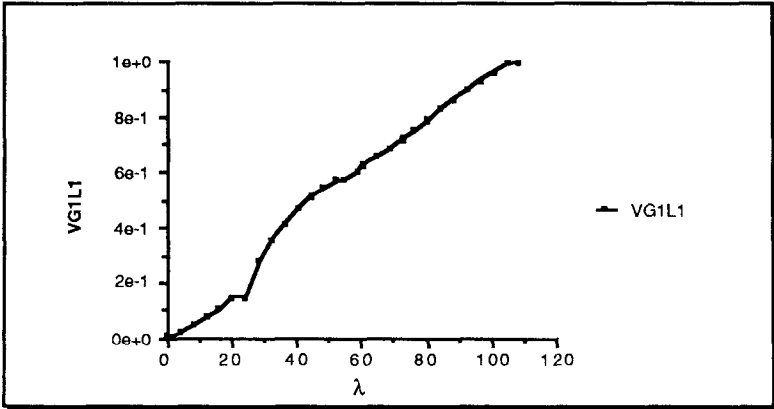


Figure 19 : Fonction de voisinage de Y (ligne blanche) par rapport à E₂ (ellipses grises)

BIBLIOGRAPHIE

- Camart, J.L. Chermant, M. Coster. *Pract. Met.*, 1978, S8, 126. [CAMART et al 78 P].
- Chevallier, R. : "La photographie aérienne". Armand Colin, Paris 1971. [CHEVALLIER 71]
- Coster, M. et Chermant, J.L.: "Précis d'Analyse d'Images", CNRS, Paris, 1985. [COSTER 85]
- Desachy, J. : "Contribution à l'étude de la texture en télédétection". Thèse d'Etat. Univ. Paul Sabatier, Toulouse 1980. [DESACHY 80] J
- Haralick, R.M : "Statistical and structural approaches to texture." Dept of computer science. University of Kansas. *Proceedings IEEE*, 67, 1978. pp786-804. [HARALICK 78]
- Jacqueminet, Ch., Mering C. "Caractérisation de l'organisation spatiale du couvert ligneux sur images SPOT à l'aide de paramètres quantitatifs. In "Apports de la télédétection spatiale à l'étude des paysages et des systèmes agraires tropicaux", Table ronde CNRS-CEGET, 25-27 octobre 1989, Talence (à paraître) [JACQUEMINET 89].
- Leo, O. et Dizier, J.L. "Télédétection. Techniques et applications cartographiques". Forhom, Paris, 1987 [LEO 87]
- Matheron, G. : "Random sets and integral geometry", J.Wiley, 1975. [MATHERON 75]
- Mering, C., Jacqueminet, Ch.: "Use of SPOT satellite images for the inventory and follow-up of ligneous resources in the Sahel". *Acts of 22nd International Symposium of Remote Sensing for Environment*, Abidjan, 1988. [MERING 88]
- Serra, J.: "Image analysis and mathematical morphology." Academic Press, London, 1982. [SERRA 82]
- Serra, J.: "Image analysis and mathematical morphology. Vol2. Theoretical Advances" Academic Press, London, 1988. [SERRA 88]