

Méthode thermodynamique de mesure de l'humidité des sols

BERNARD POUYAUD
Chargé de Recherches de l'O.R.S.T.O.M.
ROGER CHARTIER
Hydrologue de l'O.R.S.T.O.M.

PREMIÈRE PARTIE

Théorie de la progression d'une perturbation thermique en milieu isotrope et homogène

par
BERNARD POUYAUD

Nous développons dans cette première partie la théorie de la progression d'une perturbation thermique en milieu isotrope et homogène dans un certain nombre de conditions aux limites du flux calorifique induisant la perturbation (fig. 1) :

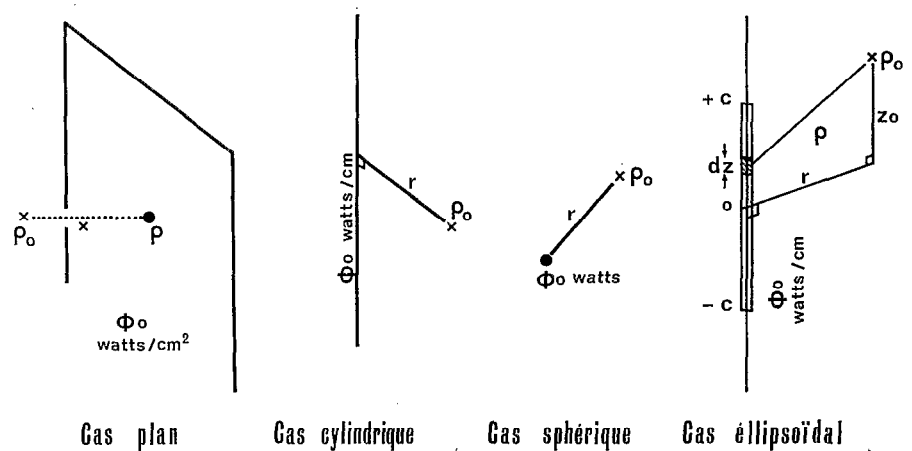
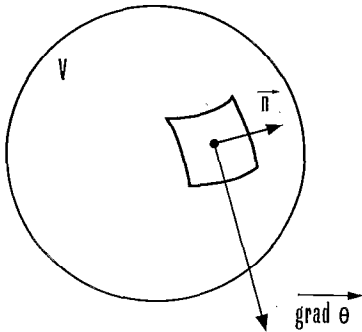


Fig. 1 — Différentes conditions aux limites traitées par le calcul

- Sur la frontière plane d'un mur semi infini : flux φ_0 par centimètre carré ;
- Sur un axe : flux φ_0 par centimètre ;
- En un point : flux Φ_0 ;
- Sur un segment de longueur $2c$: flux $\frac{\Phi_0}{2c} = \varphi_0$ par centimètre.

Les résultats théoriques qui vont apparaître permettent de calculer la conductivité thermique K , la diffusivité thermique a et la capacité calorifique volumique C , à partir d'expérimentations simples.

1.1. Mise en équation du problème général



— Soit un milieu homogène et isotrope dans lequel il n'y a pas de transformation de la chaleur en une autre forme d'énergie, ni inversement.

— Soit C : la chaleur spécifique

K : la conductivité thermique

a : la diffusivité thermique : $\frac{K}{C}$

— Soit $\Theta(x, y, z, t)$ la température en un point.

— Soit Q : la quantité d'énergie calorifique présente dans une région du milieu considéré, de frontière extérieure F_v et de volume V .

— La loi de conductibilité pour une quantité de chaleur élémentaire dQ traversant la surface F_v , s'écrit :

$$dQ = dt \iint_{F_v} K \text{ grad } \Theta \cdot \vec{\eta} \, d\sigma$$

— La loi d'échauffement du volume V s'écrit de la façon suivante :

$$dQ = \iiint_V C \, d\Theta \, dx \, dy \, dz$$

$dx \, dy \, dz$ représentant l'élément de volume de V .

Egalons les deux valeurs de dQ et appliquons la formule d'Ostrogradsky sur la frontière F_v .

$$\iiint_V C \, d\Theta \, dx \, dy \, dz = dt \iint_{F_v} K \text{ grad } \Theta \cdot \vec{\eta} \, d\sigma = dt \iiint_V K \Delta \Theta \, dx \, dy \, dz$$

Pour cela nous avons admis K constant dans tout le volume; $\Delta \Theta$ est le laplacien de Θ .

Il vient :

$$\iiint_V \left(K \Delta \Theta - C \frac{\partial \Theta}{\partial t} \right) dx \, dy \, dz = 0$$

Cette dernière équation doit être vérifiée dans le milieu, quel que soit le volume V choisi :

donc :

$$K \Delta \Theta - C \frac{\partial \Theta}{\partial t} = 0$$

ou, en introduisant la diffusivité a :

$$a \Delta \Theta - C \frac{\partial \Theta}{\partial t} = 0$$

équation connue sous le nom d'équation de la chaleur.

1.2. Propagation d'une onde thermique dans un corps homogène et isotrope

Selon la forme géométrique des conditions initiales ou aux limites imposées, nous utiliserons diverses formulations de l'équation de la chaleur.

1.2.1. CAS PLAN D'UN MUR SEMI-INFINI.

La modification de température initiale s'effectue sur un plan. Les isothermes seront donc toujours des plans parallèles à ce plan initial. Si x est la direction perpendiculaire à ces plans, l'équation de la chaleur s'écrit :

$$a \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = \frac{\partial \Theta}{\partial t}$$

La résolution théorique est classique dans deux cas intéressants :

1.2.1.1. Cas du mur semi-infini, initialement à la température zéro, sur la face duquel on maintient une température Θ_0 , pendant un temps Δt à partir de l'origine des temps.

La température $\Theta_{x,t}$ en un point x à l'instant t est donnée de façon approchée, d'autant plus exacte que t est grand vis-à-vis de Δt , par la relation :

$$\Theta_{x,t} \approx \frac{\Theta_0}{2} \frac{\Delta t}{\sqrt{\pi a t}} \frac{x}{t\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4 a t}}$$

La température $\Theta_{x,t}$ passe en chaque point par un maximum $\Theta_{\max}(x)$ au temps $t = t_{s,x}$.

$t_{s,x}$ peut être défini comme le temps mis après la perturbation à atteindre le point x considéré.

En annulant $\frac{d\Theta_{x,t}}{dt}$ on trouve : $t_{s,x} = \frac{x^2}{6 a}$

On peut aussi calculer l'étalement $\Delta t_{s,x}$ de la perturbation, défini par exemple comme le temps séparant les deux inflexions de part et d'autre du maximum, il vient :

$$\Delta t_{s,x} = \frac{\sqrt{10} x^2}{15 a}$$

Enfin, la valeur du maximum est donnée par :

$$\Theta_{s,x}^{\max} = 3\sqrt{6} \frac{\Theta_0 \Delta t a}{\sqrt{\pi e} e \frac{1}{x^2}}$$

1.2.1.2. *Cas du mur semi-infini, initialement à la température zéro, sur la face duquel on injecte un flux calorifique φ_0 (en watts/cm²) constant, pendant un temps Δt très court.*

La température $\Theta_{x,t}$ en un point x à l'instant t est :

$$\Theta_{x,t} \neq \frac{\varphi_0 \Delta t e^{-\frac{x^2}{4at}}}{\sqrt{\pi k^2} \sqrt{t}}$$

avec les mêmes approximations que précédemment.

On calcule de même :

$$t_{s,x} = \frac{x^2}{2a}$$

$$\Delta t_{s,x} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{x^2}{a}$$

Le maximum de température devient :

$$\Theta_{s,r}^{\max} = \frac{\varphi_0 \Delta t}{\sqrt{\frac{\pi^2}{2} C} \frac{1}{x}}$$

où l'on peut dès maintenant noter l'apparition de la capacité calorifique C .

1.2.2. CAS CYLINDRIQUE.

La modification initiale de température se fait uniformément sur un axe infini que nous confondrons avec l'axe des z . Les isothermes conservent donc une forme cylindrique de révolution.

L'équation de la chaleur prend dans ce cas la forme simple suivante :

$$\frac{\delta \Theta}{\delta t} = a \left(\frac{\delta^2 \Theta}{\delta r^2} + \frac{1}{r} \frac{\delta \Theta}{\delta r} \right)$$

puisque :

$$\frac{\delta \Theta}{\delta z} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\delta^2 \Theta}{\delta z^2} = 0$$

a = diffusivité thermique

$\Theta_{r,t}$ = élévation de température à l'instant t , à la distance r de l'axe des z

r = distance du point considéré à l'axe des z

1.2.2.1. *Cas de la mise en température d'un milieu, initialement à la température 0, par une source de chaleur uniformément répartie sur l'axe des z, fournissant un flux calorifique ϕ_0 en watts/cm.*

Nous allons intégrer l'équation de la chaleur dans ce cas particulier. Nous proposons le changement de variable classique :

$$\eta = \frac{r^2}{4at} \quad \text{d'où :} \quad d\eta = -\frac{r^2}{4at^2} dt + \frac{r}{2at} dr$$

Il vient donc :

$$\frac{\delta\Theta}{\delta t} = \frac{\delta\Theta}{\delta\eta} \cdot \frac{\delta\eta}{\delta t} = \frac{\delta\Theta}{\delta\eta} \left(-\frac{r^2}{4at^2} \right)$$

$$\frac{\delta\Theta}{\delta r} = \frac{\delta\Theta}{\delta\eta} \cdot \frac{\delta\eta}{\delta r} = \frac{\delta\Theta}{\delta\eta} \frac{r}{2at}$$

$$\frac{\delta^2\Theta}{\delta r^2} = \frac{\delta^2\Theta}{\delta\eta^2} \cdot \frac{r^2}{4a^2t^2} + \frac{\delta\Theta}{\delta\eta} \frac{1}{2at}$$

reportons ces valeurs dans l'expression de l'équation de la chaleur, il vient :

$$\frac{\delta\Theta}{\eta} \left(-\frac{r^2}{4at} \right) = \frac{\delta^2\Theta}{\delta\eta^2} \cdot \frac{r^2}{4at} + \frac{\delta\Theta}{\delta\eta}$$

soit :

$$\eta \frac{\delta^2\Theta}{\delta\eta^2} + (1 + \eta) \frac{\delta\Theta}{\delta\eta} = 0$$

équation différentielle à une variable.

Posons alors :

$$\alpha = \frac{\delta\Theta}{\delta\eta}$$

on obtient :

$$\eta \frac{d\alpha}{d\eta} + (1 + \eta) \alpha = g$$

ou :

$$\frac{d\alpha}{\alpha} = -\left(\frac{1}{\eta} + 1\right) d\eta$$

qui s'intègre en :

$$\text{Log } \alpha = -\text{Log } \eta - \eta + \text{Log } A$$

d'où l'on tire :

$$\alpha = \frac{\delta\Theta}{\delta\eta} = Ae^{-\eta/\eta}$$

φ_0 étant le flux de chaleur en calories par centimètre injecté le long de l'axe des z par la source chauffante, on a sur une surface isotherme située à un rayon r de l'axe, et à l'instant t :

$$\varphi_0 = -2\pi rK \frac{\delta\Theta(r, t)}{\delta r} = -2\pi rK \frac{\delta\Theta}{\delta\eta} \frac{\delta\eta}{\delta r}$$

où K désigne la conductibilité thermique du milieu.

$$\text{or : } \frac{\delta\Theta}{\delta\eta} = A(e^{-\eta/\eta}) \quad \frac{\delta\eta}{\delta r} = \frac{r}{2at} \quad \text{et} \quad \eta = \frac{r^2}{4at}$$

$$\text{d'où : } \varphi_0 = -A \cdot 4\pi K e^{-\eta}$$

Si r est assez petit et t assez grand, η est voisin de zéro et $e^{-\eta}$ voisin de 1. On a alors : $A = -\varphi_0 / 4\pi K$ et l'équation de transmission de la chaleur au droit du cylindre devient :

$$\frac{\delta\Theta}{\delta\eta} = -\frac{\varphi_0}{4\pi K} e^{-\eta/\eta} \neq -\frac{\varphi_0}{4\pi K} \frac{1}{\eta}$$

Pour r donné petit ($= r_0$) on peut intégrer entre les temps t_1 et t_2 :

$$\Theta_{r_0, t_2} - \Theta_{r_0, t_1} = -\frac{\varphi_0}{4\pi K} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{d\eta}{\eta} = -\frac{\varphi_0}{4\pi K} \text{Log} \frac{\eta_2}{\eta_1}$$

$$\text{ou : } \Theta_{r_0, t_2} - \Theta_{r_0, t_1} = \frac{\varphi_0}{4\pi K} \text{Log} \frac{t_2}{t_1}$$

formule qui permettra de mesurer la conductibilité K.

On notera que la simplification ne peut être faite que si l'on intègre entre des temps t_1 et t_2 , et pour une valeur de r tels que η soit *toujours* petit dans l'intervalle t_1, t_2 . S'il n'en est pas ainsi, et en particulier si on intègre depuis une origine $t_1 = 0$, la simplification n'est plus valable et on doit conserver l'expression entière :

$$\Theta_{r, t} = -A \int_0^{t_2} \frac{\exp(-r^2/4at)}{t} dt$$

Par contre, si t_2 et r remplissent les conditions précédentes, on peut conserver la valeur adoptée pour A. En adoptant pour simplifier la même notation pour t_2 et pour t, on pourra donc écrire :

$$\Theta_{r,t} = \frac{\varphi_0}{4 \pi K} \int_0^t \frac{\exp(-r^2/4 at)}{t} dt$$

1.2.2.2. CAS D'UNE PERTURBATION THERMIQUE.

Le flux φ_0 est maintenu, durant l'intervalle de temps Δt seulement, à partir de l'origine des temps.

Pour effectuer le calcul nous allons imaginer la succession des deux états suivants :

Premier état.

A l'instant 0, on injecte sur l'axe des z un flux calorifique $+\varphi_0$ (en watts/cm) qui dure indéfiniment.

La loi d'établissement de la température se traduit par une fonction $\Theta_1(r,t)$.

Deuxième état.

A l'instant $0 + \Delta t$, on injecte sur l'axe des z un flux calorifique $-\varphi_0$ (en watts/cm) qui dure aussi indéfiniment.

La loi d'établissement de la température est représentée par une fonction $\Theta_2(r,t)$.

Si on superpose ces deux états, on se trouve en présence d'un flux φ_0 entre l'instant 0 et l'instant $0 + \Delta t$, ainsi que nous le voulions.

La loi d'établissement de la température est :

$$\Theta(r,t) = \Theta_1(r,t) + \Theta_2(r,t)$$

avec :

$$\Theta_1 = \frac{\varphi_0}{4 \pi K} \int_0^t \frac{\exp(-r^2/4 at)}{t} dt \quad \text{et} \quad \Theta_2 = -\frac{\varphi_0}{4 \pi K} \int_0^{t-\Delta t} \frac{\exp(-r^2/4 at)}{t} dt$$

d'où :

$$\Theta(r,t) = \frac{\varphi_0}{4 \pi K} \int_{t-\Delta t}^t \frac{\exp(-r^2/4 at)}{t} dt$$

Dans tout ce qui précède, nous avons supposé Δt court. En remplaçant l'intégrale par sa valeur moyenne, il vient :

$$\Theta(r,t) = \frac{\varphi_0 \Delta t}{4 \pi K} \exp(-r^2/4 at)/t$$

Le maximum est atteint lorsque la dérivée $\frac{d\Theta}{dt}$ s'annule ; posons :

$$\lambda = \frac{r^2}{4 a}$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\varphi_0 \Delta t}{4 \pi K} \frac{e^{-\frac{\lambda}{t}}}{t^3} (\lambda - t)$$

La dérivée s'annule pour :

$$t = 0$$

$$t = \infty$$

et $t = \frac{r^2}{4a}$ qui correspond au maximum de l'élévation de température.

Le temps de transport de l'onde calorifique est donc :

$$t_{s,r} = \frac{r^2}{4a}$$

Il lui correspond un maximum :

$$\Theta_{\max}(s,r) = \frac{\varphi_0 \Delta t}{\pi C e} \frac{1}{r^2}$$

Les calculs qui précèdent sont d'autant plus justifiés que Δt est plus petit et que $t_{s,r}$ est plus grand.

Remarque.

Soit :

$$\lambda = \frac{r^2}{4a}$$

Nous avons démontré que, dans certaines conditions, dans le cas cylindrique :

$$\Theta_{\text{cyl.}}(r,t) = \frac{\varphi_0 \Delta t \exp(-\lambda/t)}{4 \pi K t}$$

Etudions de plus près la fonction : $\zeta = \exp(-\lambda/t)/t$.

Nous allons montrer que lorsque la valeur du paramètre λ varie, la courbe prend des formes géométriques variables qui peuvent se réduire à une seule courbe par quelques transformations simples.

Soit ζ_m la valeur de ζ correspondant au maximum de température, c'est-à-dire à la valeur t_s de t .

Nous savons que :

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{e^{-\lambda/t}}{t^3} (\lambda - t)$$

qui s'annule pour : $t = 0$

$$t = \lambda = t_s$$

$$t \rightarrow \infty$$

d'où :

$$\zeta_m = \frac{1}{\lambda e}$$

Comparons les valeurs de t_s et ζ_m correspondant à deux valeurs λ' et λ'' de λ :

$$\zeta'_m = \frac{1}{\lambda' e} \quad t'_s = \lambda'$$

$$\zeta''_m = \frac{1}{\lambda'' e} \quad t'' = \lambda''$$

Il apparaît immédiatement :

$$\frac{t'_s}{t''} = \frac{\lambda'}{\lambda''} \quad \text{et} \quad \frac{\zeta'_m}{\zeta''_m} = \frac{\lambda''}{\lambda'}$$

soit :

$$\frac{\zeta'_m}{\zeta''_m} = \left(\frac{t'_s}{t''} \right)^{-1}$$

ζ_m et t_s varient donc de façon inverse.

D'une façon plus générale, soit :

$$\zeta' = \exp(-\lambda'/t)/t' \quad \text{et} \quad \zeta'' = \exp(-\lambda''/t'')/t''$$

Si : $t' = \lambda' t'' / \lambda''$, il vient :

$$\zeta' = \exp\left(-\lambda' / \frac{\lambda'}{\lambda''} t''\right) / \frac{\lambda'}{\lambda''} t'' = \frac{\lambda''}{\lambda'} \zeta''$$

On a donc bien :

$$\frac{\zeta'}{\zeta''} = \left(\frac{t'}{t''} \right)^{-1} = \frac{\lambda''}{\lambda'}$$

Il suffira donc de tracer la fonction $\zeta = \frac{e^{-\lambda/t}}{t}$ pour une seule valeur du paramètre λ

les autres valeurs de ζ et t seront obtenues facilement par :

$$\zeta'' = \frac{\lambda'}{\lambda''} \zeta'$$

$$t'' = \frac{\lambda''}{\lambda'} t'$$

Nous avons calculé la fonction $\frac{e^{-\lambda}}{t}$ pour une valeur particulière du paramètre λ correspondant à $r = 1,5$ cm et $a = 10^{-2}$ cm²/s :

soit : $\lambda = 56,25$

Nous pouvons facilement passer à toute autre valeur de λ correspondant à des r et a différents ainsi que nous l'avons vu précédemment.

Le tableau de ces résultats, dont les courbes correspondantes sont représentées figure 2, est donné à la fin de la première partie.

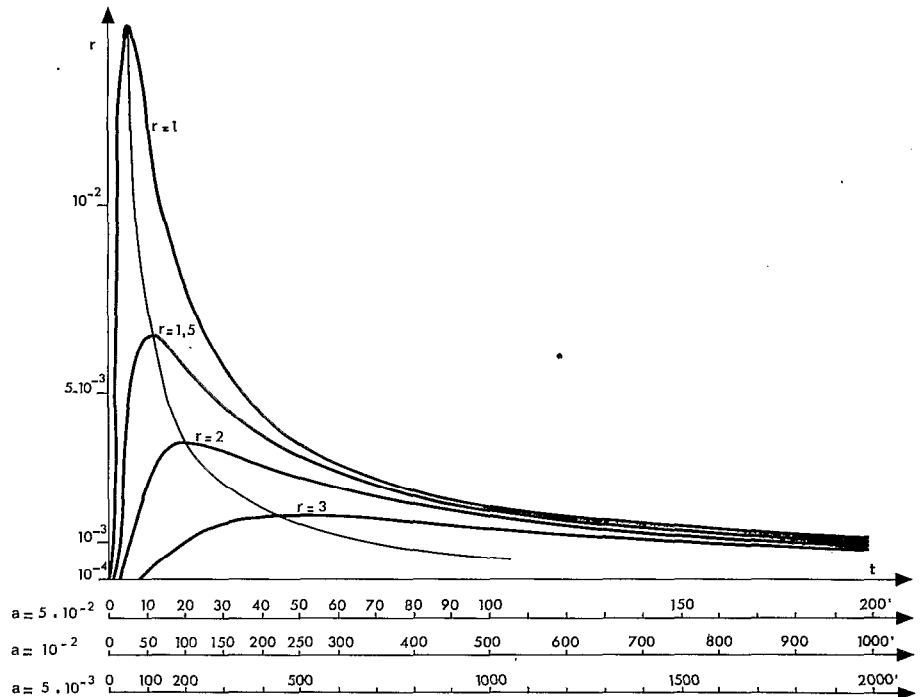


Fig. 2 — Fonction $\frac{e^{-\lambda} t}{t}$ avec $\lambda = \frac{r^2}{4a}$ pour diverses valeurs de r , a , et t .

1.2.3. CAS SPHERIQUE.

La modification initiale de température se fait ponctuellement. Les isothermes conservent donc une forme sphérique.

L'équation de la chaleur prend dans ce cas une forme simple :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right)$$

puisque les autres dérivées partielles de Θ sont nulles.

1.2.3.1. *Cas sphérique de la mise en température d'un milieu infini initialement à la température 0 par un flux de chaleur Φ_0 (en watts) émis ponctuellement.*

Reprenons le même changement de variable :

$$\eta = \frac{r^2}{4at}$$

L'équation de la chaleur devient :

$$\eta \frac{\delta^2 \Theta}{\delta \eta^2} + \frac{\delta \Theta}{\delta \eta} \left(\eta + \frac{3}{2} \right) = 0$$

Posons : $\alpha = \frac{\delta \Theta}{\delta \eta}$ il vient : $\frac{d\alpha}{\alpha} = - \left(\frac{3/2}{\eta} + 1 \right) d\eta$

d'où :

$$= \frac{d\Theta}{d\eta} = A \frac{e^{-\eta}}{\eta^{3/2}}$$

et :

$$\Theta(r,t) = A \int_{+\infty}^{\eta} \frac{e^{-\eta}}{\eta^{3/2}} d\eta + B$$

On trouve facilement que $B = 0$. Calculons le flux traversant une isotherme de rayon r :

$$\Phi_0 = 4 \pi r^2 K \frac{\delta \Theta}{\delta r} = 4 \pi r^2 K \frac{\delta \Theta}{\delta \eta} \frac{\delta \eta}{\delta r}$$

d'où :

$$\Phi_0 = 8 \pi r K A \frac{e^{-\eta}}{\eta^{1/2}}$$

Si r est petit et t grand, $\eta \rightarrow 0$ et $e^{-\eta} \rightarrow 1$, et on a :

$$A = \frac{\Phi_0}{16\pi K \sqrt{a}} \frac{1}{\sqrt{t}}$$

La présence de t peut paraître bizarre dans la « constante » A . En fait, de nombreuses approximations ont été faites au cours de ce calcul, et seule l'expérimentation sera à même de vérifier la théorie. On aurait donc, en repassant à t :

$$\Theta(r,t) = \frac{\Phi_0}{8 \pi K r \sqrt{t}} \int_0^t \frac{\exp(-r^2/4at)}{\sqrt{t}} dt$$

On a conservé la même notation t pour la variable d'intégration et pour la limite supérieure assignée à la variation de cette variable. Le t sous le signe somme n'a donc pas la même signification que celui qui est en dehors.

1.2.3.2. Cas d'une perturbation thermique.

En reprenant la même superposition de deux états d'équilibre que dans le cas cylindrique, il vient :

$$\Theta_{r,t} = \frac{\Phi_0}{8 \pi K r \sqrt{t}} \int_{t-\Delta t}^t \frac{\exp(-r^2/4 at)}{\sqrt{t}} dt$$

soit, en prenant la valeur moyenne de l'intégrale :

$$\Theta(r,t) = \frac{\Phi_0 \Delta t}{8 \pi K r} \frac{\exp(-r^2/4 at)}{t}$$

Le maximum est atteint lorsque $\frac{d\Theta}{dt}$ s'annule, soit, en posant $\lambda = \frac{r^2}{4a}$:

$$\frac{d\Theta}{dt} = \text{Cst} \frac{e^{-\lambda/t}}{t^3} (\lambda - t) = 0$$

En coordonnées cylindriques, compte tenu de la symétrie de révolution existante, l'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \right)$$

Cette équation n'a pas de solution simple.

Pour tourner la difficulté, nous allons utiliser les résultats de la 3^e partie (cas sphérique) en imaginant le schéma de calcul suivant :

L'élévation de température $\Theta_{z,r,t}$ est la somme d'élévations de température élémentaires $d\Theta_{z,r,t}$, produites par des éléments de longueur dz de la source chaude de longueur $2c$.

Chacun de ces éléments dz peut être assimilé à 1 point, on peut lui appliquer les relations obtenues dans le cas sphérique. Soit, en particulier, dans le cas de la perturbation thermique :

$$d\Theta_{z_0,r,t} = \frac{\varphi_0 \Delta t}{8 \pi K \rho} \frac{\exp(-\rho^2/4 at)}{t} dz$$

pour un point P_0 de coordonnées z_0 et r ,

où $\rho =$ distance du point considéré P_0 à l'élément dz

soit $\rho = \sqrt{r^2 + (z-z_0)^2}$; z_0 est la cote de P_0 , z la cote de l'élément dz ; $\varphi_0 dz$ joue le rôle du flux Φ_0 du cas sphérique. φ_0 s'exprime en watt/cm.

On a, en P_0 :

$$d\Theta_{z_0,r,t} = \frac{\varphi_0 \Delta t}{8 \pi K \sqrt{r^2 + (z-z_0)^2}} \frac{\exp\left(-\frac{r^2 + (z-z_0)^2}{4 at}\right)}{t} dz$$

d'où : $\lambda = t_{s,r} = r^2/4 a$

et : $\Theta_{\max}(s,r) = \frac{\Phi_0 \Delta t}{2 \pi C e} \frac{1}{r^3}$

Avec les mêmes restrictions pour l'exactitude des résultats.

Remarques.

Les courbes déterminées pour le cas cylindrique peuvent encore s'appliquer dans le cas sphérique. Seul, en effet, le terme constant est modifié.

On a : $\frac{\varphi_0 \Delta t}{4 \pi K}$ dans le cas cylindrique.

et : $\frac{\Phi_0 \Delta t}{8 \pi K r}$ dans le cas sphérique.

Il suffit donc, pour un r choisi, de rentrer dans la table avec la valeur λ de $\frac{r^2}{4 a}$ ainsi déterminée et d'en déduire les variations de $\Theta_{r,t}$ en fonction de t .

1.2.4. CAS « ELLIPSOÏDAL ».

La modification de température se fait initialement sur un segment de droite de longueur $2 c$, que nous confondrons avec l'axe des z , le centre du segment étant pris pour origine.

z variant de $-c$ à $+c$, il vient :

$$\Theta_{z_0,r,t} = \frac{\varphi_0 \Delta t}{8 \pi K} \int_{-c}^{+c} \frac{\exp\left(-\frac{r^2 + (z-z_0)^2}{4 at}\right)}{t \sqrt{r^2 + (z-z_0)^2}} dz$$

Il n'est pas question d'intégrer cette équation directement. Par contre, on peut calculer le maximum en t de $\Theta_{z_0,r,t}$. Il suffit de calculer $\frac{d\Theta}{dt}$ en dérivant en t sous le signe somme, soit :

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\varphi_0 \Delta t}{8 \pi K} \int_{-c}^{+c} \frac{d}{dt} \left(\frac{\exp\left(-\frac{r^2 + (z-z_0)^2}{4 at}\right)}{t \sqrt{r^2 + (z-z_0)^2}} \right) dz$$

Cette dernière s'annule pour :

$$\frac{\exp\left(-\frac{r^2 + (z-z_0)^2}{4at}\right)}{\sqrt{r^2 + (z-z_0)^2}} \left(\frac{r^2 + (z-z_0)^2 - 4at}{4at^3}\right) = 0$$

soit pour $t = 0$

$$t = \infty$$

et $t = \frac{r^2 + (z-z_0)^2}{4a}$ auquel correspond le maximum.

On a donc :

$$t_{s,r,z_0} = \frac{r^2 + (z-z_0)^2}{4a}$$

et :

$$\Theta_{\max(s,r,z_0)} = \frac{\varphi_0 \Delta t}{2\pi C e} \int_{-c}^{+c} \frac{dz}{(r^2 + (z-z_0)^2)^{3/2}}$$

où :

$$C = K/a$$

En intégrant, on obtient pour $r \neq 0$:

$$\Theta_{\max(s,r,z_0)} = \frac{\varphi_0 \Delta t}{2\pi C e} \left(\frac{c-z_0}{r^2} \frac{1}{\sqrt{r^2 + (c-z_0)^2}} + \frac{c+z_0}{r^2} \frac{1}{\sqrt{r^2 + (c+z_0)^2}} \right)$$

Si P_0 est situé au milieu du segment $2c$, $z_0 = 0$ et :

$$\Theta_{\max(s,r)} = \frac{\varphi_0 \Delta t}{\pi C e} \frac{1}{r^2} \frac{c/r}{\sqrt{1 + (c/r)^2}}$$

Ou, en faisant intervenir le flux total Φ_0 :

$$\Theta_{\max(s,r)} = \frac{\Phi_0 \Delta t}{2\pi C e} \frac{1}{r^3} \frac{1}{\sqrt{1 + (c/r)^2}}$$

La méthode utilisée ne permet pas de calculer le temps auquel a lieu le maximum. En effet la valeur :

$$t_{s,r,z_0} = \frac{r^2 + (z-z_0)^2}{4a}$$

n'a pas de signification physique autre que celle de traduire le temps mis par le maximum de l'onde calorifique émise par l'élément de source dz pour atteindre P_0 .

Les isothermes ne sont pas des surfaces simples. Selon les valeurs de r_0 et z_0 elles prennent des aspects caractéristiques différents :

— Si r ou $z \rightarrow \infty$, on se rapproche du cas sphérique. Les isothermes sont alors des sphères.

— Si $r \rightarrow 0$ avec $z \leq c$, les isothermes se rapprochent des cylindres.

Dans tous les autres cas, les isothermes ne sont pas des courbes simples. On pourrait déterminer le lieu des points où on observe des maximums égaux ; pour cela il suffit de faire $\Theta_{\max}(s,r,z_0) = \text{Cst}$, mais les calculs faits ne permettent pas de savoir s'il s'agit effectivement d'isothermes, puisque rien ne prouve que ces maximums soient atteints au même moment.

Néanmoins, si les $d\Theta_{\max}$ élémentaires étaient fonction de $1/t$ seulement au lieu d'être fonction de $\frac{e^{-\rho^2/4at}}{t}$, les isothermes seraient alors des ellipsoïdes ayant pour foyer les extrémités de la partie chauffante.

Pour cela il suffirait que $e^{-\frac{\rho^2}{4at}}$ soit approximativement constant et égal à 1, ce qui est vrai si $\frac{\rho^2}{4at}$ reste voisin de 0 ; ce qui exige :

— soit ρ petit, cas peu intéressant,

— soit $4at$ assez grand.

Dans le cas expérimental, nous verrons que nous sommes très près de cette dernière condition. On peut alors sensiblement assimiler les surfaces isothermes à des ellipsoïdes de foyers $+c$ et $-c$.

Le calcul de $\Theta_{\max}(r,z_0,t)$ tel que nous l'avons mené, exclut la valeur $r = 0$.

Nous allons le reprendre dans ce cas particulier, c'est-à-dire pour un point P_0 situé sur l'axe des z , en dehors du segment chauffant bien entendu.

On a :

$$\Theta(z_0,t) = \frac{\varphi_0 \Delta t}{8 \pi K} \int_{-c}^{+c} \frac{\exp(-(z_0 - z)^2/4at)}{t(z_0 - z)} dz$$

et :

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\varphi_0 \Delta t}{8 \pi K} \int_{-c}^{+c} \frac{d}{dt} \left[\frac{\exp(-(z_0 - z)^2/4at)}{t(z_0 - z)} \right] dz$$

qui s'annule pour : $t = (z_0 - z)^2/4a$

d'où :

$$\Theta_{\max}(s,z_0) = \frac{\varphi_0 \Delta t}{8 \pi K e} \int_{-c}^{+c} \frac{4a}{(z_0 - z)^3} dz$$

En intégrant et en faisant $C = K/a$, on trouve finalement :

$$\Theta_{\max}(s,z_0) = \frac{\varphi_0 \Delta t}{\pi C e} \frac{z_0 c}{(z_0^2 - c^2)^2}$$

Si $c = 0$, on revient au cas sphérique déjà traité.

Note.

Nous en étions arrivés, pour la température au temps t , à la distance r de la source chauffante $2c$ à l'expression :

$$\Theta_{z_0,r,t} = \frac{\varphi_0 \Delta t}{8 \pi K} \int_{-c}^{+c} \frac{\exp\left(-\frac{r^2 + (z-z_0)^2}{4at}\right)}{t \sqrt{r^2 + (z-z_0)^2}} dz$$

Il n'existe pas de fonction solution de cette intégrale. Nous pouvons toutefois simplifier l'expression. Plaçons-nous tout d'abord dans le plan médiateur de la source chauffante ; l'expression se simplifie en :

$$\Theta_{r,t} = \frac{\varphi_0 \Delta t}{8 \pi K} \int_{-c}^{+c} \frac{\exp\left(-\frac{r^2 + z^2}{4at}\right)}{t \sqrt{r^2 + z^2}} dz$$

La fonction sous le signe somme est une fonction paire en z . Nous avons donc :

$$\Theta_{r,t} = \frac{\varphi_0 \Delta t}{4 \pi K} \int_0^c \frac{\exp\left(-\frac{r^2 + z^2}{4at}\right)}{t \sqrt{r^2 + z^2}} dz$$

Nous pouvons mettre en facteur dans l'intégrale, et l'en sortir, la fonction de t ,

$$\frac{e^{-\frac{r^2}{4at}}}{t}$$

qui est indépendante de z , soit :

$$\Theta_{r,t} = \frac{\varphi_0 \Delta t \exp(-r^2/4at)}{4 \pi K} \int_0^c \frac{\exp(-z^2/4at)}{\sqrt{r^2 + z^2}} dz$$

Dans la première partie de l'expression, nous reconnaissons le résultat trouvé dans le cas cylindrique. Soit Θ_{cy1} cette partie de l'expression et posons :

$$\Gamma = \int_0^c \frac{\exp\left(-\frac{z^2}{4at}\right)}{\sqrt{r^2 + z^2}} dz$$

Il vient :

$$e_{11} \Theta_{r,t} = \Gamma \cdot e_{y1} \Theta_{r,t}$$

Nous avons déjà vu comment $e_{y1} \Theta_{r,t}$ pouvait être calculé. Il reste donc à calculer Γ .

Γ est une fonction de quatre paramètres :

a : diffusivité thermique,

r : distance à la source chauffante,

c : demi-longueur de cette source chauffante,
t : temps.

Il n'est pas possible d'intégrer cette équation. Nous allons donc la calculer numériquement pour certaines valeurs des paramètres.

Nous avons adopté la méthode suivante :

— Nous fixons tout d'abord r ;

— On remarque que Γ dépend de a et t sous la forme de leur produit exclusivement.

Nous fournirons pour chaque valeur de r retenue un tableau où figurent les valeurs de Γ pour des valeurs données de c et de a t. Il est facile de tracer $\Theta(t)$ lorsque les paramètres de forme (r et c), de sol (a et K) et de chauffe (φ_0 et Δt) sont fixés.

Il suffit de tracer tout d'abord $c_{y1} \Theta(t)$ ainsi que nous l'avons montré, puis de tracer $\Gamma(t)$ grâce aux tableaux et courbes fournies, ensuite d'effectuer le produit $\Gamma(t) \cdot c_{y1} \Theta(t)$ point par point.

On peut alors vérifier que la valeur du maximum trouvé correspond à la valeur calculée par :

$$\Theta_{\max}(r,t) = \frac{\varphi_0 \Delta t}{\pi C e} \frac{1}{r^2} \frac{c/r}{\sqrt{1 + (c/r)^2}}$$

Nous fournissons ci-après les tableaux et les courbes utiles à ces calculs (fig. 3).

TABLEAU DE CALCUL DE $\frac{e^{-\lambda/t}}{t}$
POUR DIVERSES VALEURS DE at ET DE r

at	r = 1,0 cm		r = 1,5 cm		r = 2,0 cm		r = 3,0 cm	
	A	B	A	B	A	B	A	B
1	5,00	$135 \cdot 10^{-5}$	11,25	$33 \cdot 10^{-7}$	20,00	0	45,00	0
2	2,500	$821 \cdot 10^{-5}$	5,625	$36 \cdot 10^{-9}$	10,00	0	22,50	0
3	1,667	$126 \cdot 10^{-4}$	3,750	$157 \cdot 10^{-5}$	6,67	0	15,00	0
4	1,250	$143 \cdot 10^{-4}$	2,812	$301 \cdot 10^{-5}$	5,00	$34 \cdot 10^{-5}$	11,25	0
5	1,000	$147 \cdot 10^{-4}$	2,250	$422 \cdot 10^{-5}$	4,00	$73 \cdot 10^{-5}$	9,00	0
6	0,833	$145 \cdot 10^{-4}$	1,875	$510 \cdot 10^{-5}$	3,33	$120 \cdot 10^{-5}$	7,50	0
8	0,625	$134 \cdot 10^{-4}$	1,405	$613 \cdot 10^{-5}$	2,50	$205 \cdot 10^{-5}$	5,62	$905 \cdot 10^{-5}$
10	0,500	$121 \cdot 10^{-4}$	1,125	$650 \cdot 10^{-5}$	2,00	$270 \cdot 10^{-5}$	4,50	$22 \cdot 10^{-5}$
12	0,417	$110 \cdot 10^{-4}$	0,939	$652 \cdot 10^{-5}$	1,67	$314 \cdot 10^{-5}$	3,75	$39 \cdot 10^{-5}$
14	0,357	$100 \cdot 10^{-4}$	0,804	$640 \cdot 10^{-5}$	1,43	$342 \cdot 10^{-5}$	3,22	$57 \cdot 10^{-5}$
16	0,312	$92 \cdot 10^{-4}$	0,704	$618 \cdot 10^{-5}$	1,25	$358 \cdot 10^{-5}$	2,81	$75 \cdot 10^{-5}$
18	0,278	$84 \cdot 10^{-4}$	0,625	$595 \cdot 10^{-5}$	1,11	$366 \cdot 10^{-5}$	2,50	$91 \cdot 10^{-5}$
20	0,250	$78 \cdot 10^{-4}$	0,562	$570 \cdot 10^{-5}$	1,00	$368 \cdot 10^{-5}$	2,25	$105 \cdot 10^{-5}$
25	0,200	$65 \cdot 10^{-4}$	0,450	$511 \cdot 10^{-5}$	0,80	$359 \cdot 10^{-5}$	1,80	$132 \cdot 10^{-5}$
30	0,167	$56 \cdot 10^{-4}$	0,375	$460 \cdot 10^{-5}$	0,67	$341 \cdot 10^{-5}$	1,50	$149 \cdot 10^{-5}$
35	0,143	$49 \cdot 10^{-4}$	0,321	$414 \cdot 10^{-5}$	0,57	$313 \cdot 10^{-5}$	1,29	$157 \cdot 10^{-5}$
40	0,125	$44 \cdot 10^{-4}$	0,281	$380 \cdot 10^{-5}$	0,50	$303 \cdot 10^{-5}$	1,12	$163 \cdot 10^{-5}$
50	0,100	$36 \cdot 10^{-4}$	0,225	$320 \cdot 10^{-5}$	0,40	$268 \cdot 10^{-5}$	0,90	$163 \cdot 10^{-5}$
60	0,083	$31 \cdot 10^{-4}$	0,187	$280 \cdot 10^{-5}$	0,33	$239 \cdot 10^{-5}$	0,75	$156 \cdot 10^{-5}$
80	0,062	$23 \cdot 10^{-4}$	0,141	$217 \cdot 10^{-5}$	0,25	$195 \cdot 10^{-5}$	0,56	$143 \cdot 10^{-5}$
100	0,050	$19 \cdot 10^{-4}$	0,112	$180 \cdot 10^{-5}$	0,20	$164 \cdot 10^{-5}$	0,45	$128 \cdot 10^{-5}$
200	0,025	$10 \cdot 10^{-4}$	0,056	$95 \cdot 10^{-5}$	0,10	$90 \cdot 10^{-5}$	0,22	$80 \cdot 10^{-5}$

TABLEAU DES DIVERSES VALEURS DE Γ POUR DIVERSES VALEURS DE a , DE c ET DE r

r cm	c cm	a 0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	4,00	5,00	7,50	10,00
1,0	0,5	0,360	0,401	0,430	0,440	0,442	0,462	0,475	0,480	0,485	0,487					
	1,0	0,390	0,520	0,600	0,640	0,675	0,760	0,820	0,830	0,840	0,850					
	1,5	0,390	0,520	0,630	0,700	0,757	0,912	1,030	1,075	1,100	1,130					
	2,0	0,390	0,520	0,630	0,310	0,782	0,960	1,150	1,240	1,280	1,310					
	3,0	0,390	0,520	0,630	0,710	0,782	0,990	1,240	1,365	1,440	1,510					
	4,0	0,390	0,520	0,630	0,710	0,782	0,990	1,265	1,420	1,525	1,610					
		0,390	0,520	0,630	0,710	0,782	0,990	1,265	1,425	1,540	1,650					
1,5	0,5	0,225	0,265	0,285	0,300	0,305	0,310	0,315	0,320	0,325	0,329	0,331	0,331	0,332	0,332	0,333
	1,0	0,260	0,355	0,420	0,465	0,485	0,543	0,585	0,600	0,612	0,620	0,625	0,626	0,630	0,631	0,632
	1,5	0,260	0,355	0,440	0,502	0,543	0,660	0,760	0,800	0,825	0,840	0,850	0,855	0,860	0,865	0,870
	2,0	0,260	0,355	0,440	0,502	0,554	0,703	0,860	0,935	0,970	0,995	1,012	1,035	1,050	1,060	1,072
	3,0	0,260	0,355	0,440	0,502	0,565	0,730	0,945	1,060	1,130	1,190	1,215	1,265	1,305	1,342	1,382
	4,0	0,260	0,355	0,440	0,502	0,565	0,730	0,955	1,110	1,190	1,265	1,310	1,400	1,454	1,520	1,575
		0,260	0,355	0,440	0,502	0,565	0,730	0,955	1,110	1,210	1,307	1,400	1,510	1,605	1,770	1,910
2,0	0,5	0,180	0,210	0,220	0,230	0,232	0,240	0,243	0,245	0,246	0,247					
	1,0	0,205	0,275	0,315	0,345	0,366	0,416	0,447	0,455	0,462	0,469					
	1,5	0,205	0,280	0,335	0,380	0,416	0,514	0,595	0,625	0,640	0,650					
	2,0	0,205	0,280	0,335	0,390	0,431	0,562	0,680	0,740	0,770	0,791					
	3,0	0,205	0,280	0,335	0,390	0,431	0,578	0,750	0,850	0,910	0,961					
	4,0	0,205	0,280	0,335	0,390	0,431	0,578	0,772	0,885	0,965	1,035					
		0,205	0,280	0,335	0,390	0,431	0,578	0,770	0,900	0,990	1,073					

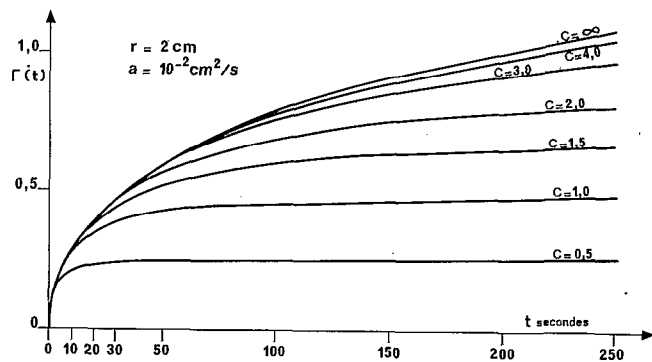
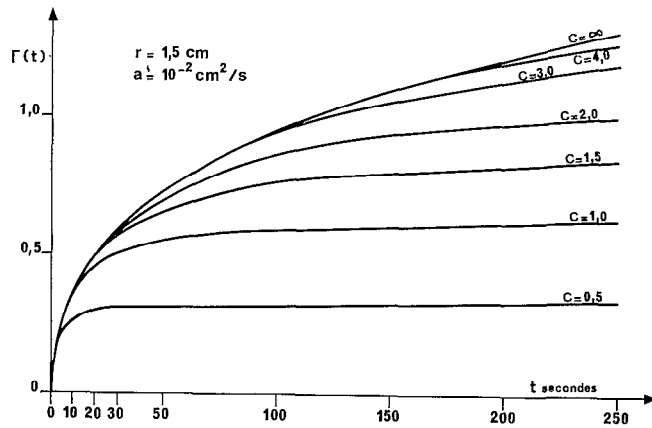
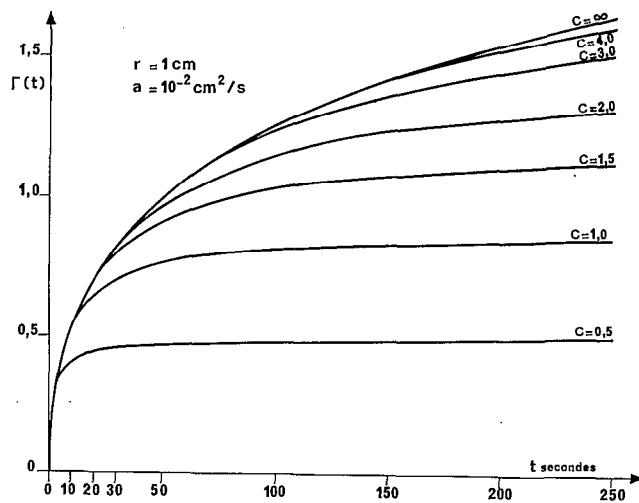


Fig. 2. — Valeur de $\Gamma(t)$ pour plusieurs valeurs de C

Utilisation de la propagation d'une perturbation thermique pour la mesure de l'humidité des sols

par

BERNARD POUYAUD

et

ROGER CHARTIER

Parmi les caractéristiques physiques d'un sol, on a, depuis longtemps déjà, usé des caractéristiques thermiques (conductibilité, diffusivité pour mesurer indirectement l'humidité.

C'est ainsi que le docteur JANSE a perfectionné une méthode de mesure de la conductibilité thermique: une source de chaleur filiforme est introduite dans le sol, elle dégage un flux de chaleur \varnothing_0/cm . On note l'élévation de température. La comparaison des températures de la sonde aux temps t et $t + \Delta t$ permet le calcul de la conductibilité K d'après les équations établies en 1.2.4. Il suffit alors de lier la conductibilité K à l'humidité par un étalonnage.

Les calculs théoriques précédents permettent également de mesurer la diffusivité thermique a en mesurant le temps $t_{s,r}$ de propagation d'un choc thermique à une distance r de la sonde. On a en effet, dans les cas cylindriques et sphériques, $t_{s,r} = \frac{4a}{r^2}$. On passe alors à l'humidité par un étalonnage.

Il nous a paru préférable d'utiliser la capacité calorifique C dont on peut exprimer facilement la variation en fonction de l'humidité. La méthode des chocs thermiques a de plus l'avantage de ne nécessiter que de faibles élévations de températures. C'est ainsi qu'une élévation de température de l'ordre du $^{\circ}C$ suffit. La mesure est rapide, elle s'effectue en 1 minute environ et peut être reproduite après 5 à 10 minutes de repos du sol. Les expériences ont prouvé sa reproductivité. Enfin la méthode est fine, elle intéresse un volume de sol limité: une sphère de 2 cm de diamètre environ. Ce volume peut d'ailleurs être réduit si nécessaire.

* * *

2.1. Description de la méthode proposée pour la mesure de l'humidité

2.1.1. VARIATION DE LA CAPACITÉ THERMIQUE D'UN SOL EN FONCTION DE SON HUMIDITÉ

Nous avons préféré la capacité thermique à la conductibilité ou à la diffusivité, pour la simplicité de sa variation en fonction de l'humidité.

En effet, soient:

Γ : la capacité calorifique massique d'un sol sec, en cal/g;

ρ_s : la masse volumique de ce même sol en g/cm³;

u : l'humidité volumique du sol, c'est-à-dire le volume d'eau par unité de volume du sol, sans dimension;

C_u : la capacité calorifique volumique d'un sol d'humidité u , en cal/cm³.

Si l'on prend 1 cal/cm³ pour la capacité calorifique volumique de l'eau, il vient:

$$C_u = \rho_s \Gamma + u$$

soit:

$$u = C_u - \rho_s \Gamma$$

Pour un sol donné, Γ dépend des matériaux constitutifs du sol, ρ_s de leur texture et de la densité de leur arrangement. $\rho_s \Gamma$ est donc une constante pour un sol en place, s'il ne subit aucune modification structurale, ne se dilate ou ne se contracte pas

Posons $\beta = \rho_s \cdot \Gamma$

C_u sera calculé par une méthode dérivée des équations des chocs thermiques.

2.1.2. MESURE DE LA CAPACITÉ CALORIFIQUE C_u D'UN SOL D'HUMIDITÉ u

Nous avons démontré qu'on a dans le cas dit « ellipsoïdal », avec les symboles définis dans la première partie:

$$\Theta_{\max_{s,r}} = \frac{\Phi_0 \Delta t}{2 \pi \epsilon C_u} \frac{1}{r^3} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{c}{r}\right)^2}}$$

Il est possible de réaliser un appareillage dont la géométrie correspond assez justement aux conditions impliquées par l'utilisation de cette formule. Il suffit pour cela d'avoir une source chauffante filiforme de longueur $2c$, et d'effectuer la mesure de température dans son plan médian à la distance r de cette source chauffante. Le flux Φ_0 sera envoyé dans la source chauffante sous la forme d'un courant électrique de tension U et d'intensité I connues, durant un temps Δt choisi. La température $\Theta_{\max_{s,r}}$ sera mesurée par l'intermédiaire de thermocouples à l'aide d'un microvoltmètre.

On a alors:

$$C_u = \frac{1}{\Theta_{\max_{s,r}}} \frac{\Phi_0 \Delta t}{2 \pi \epsilon} \frac{1}{r^3} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{c}{r}\right)^2}}$$

Posons:

$$A = \frac{1}{2\pi e} \frac{1}{r^3} \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{c}{r})^2}} \quad \text{constante géométrique}$$

$$B = \Phi_0 \Delta t \quad \text{constante de chauffe}$$

et

$$\alpha = A B$$

Il vient:

$$C_u = \frac{\alpha}{\Theta_{\max s,r}}$$

or

$$C_u = u + \beta \quad \text{avec les symboles précédents}$$

d'où

$$u = \frac{\alpha}{\Theta_{\max s,r}} - \beta$$

Notre méthode de mesure de l'humidité du sol utilise cette équation où la dépendance hyperbolique de u à l'égard de $\Theta_{\max s,r}$ est évidente.

2.1.3. ERREURS SYSTÉMATIQUES DE CETTE MÉTHODE

A. — Erreurs portant sur la définition de la constante géométrique A

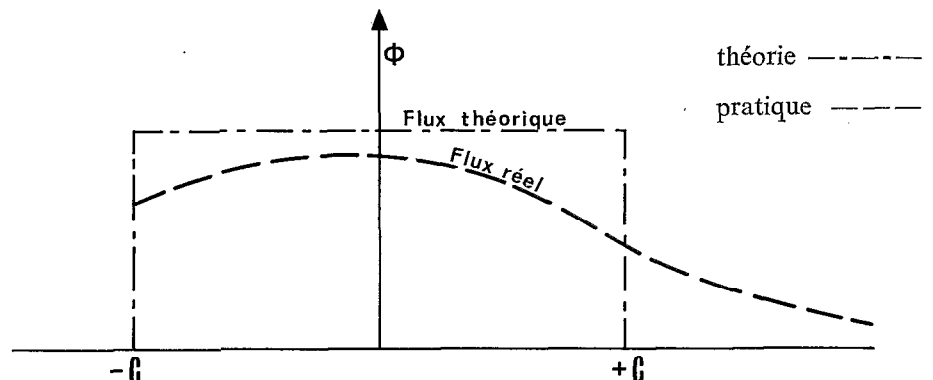
a) Distance r

Il est bien difficile de déterminer exactement la distance r , sur laquelle on fait une erreur systématique qui peut atteindre 5 à 10% d'une mesure d'étalonnage à l'autre.

Cette erreur systématique n'intervient plus pour des mesures successives sur un sol en place. Dans ce cas r reste constant, sous réserve de l'absence de déformations volumiques du sol durant les mesures.

b) Longueur c

Dans nos démonstrations théoriques, nous avons supposé que le flux Φ_0 était uniformément réparti, avec une densité linéaire $\varphi_0 = \frac{\Phi_0}{2c}$, sur la source chaude de longueur $2c$. Dans la pratique, tel n'est pas le cas; par conduction le long de la sonde, l'élévation de température de la sonde intéresse une longueur supérieure à $2c$ selon la distribution suivante:



L'élévation de température à la distance r provoquée par un même flux Φ_0 ainsi réparti est évidemment inférieure à celle du cas théorique. On lui fera correspondre une longueur fictive $2c'$ répondant aux conditions de la distribution théorique de la densité de flux φ'_0 qui, pour le même flux dissipé Φ_0 induirait à la distance r une élévation de température calculée égale à celle qu'on peut observer. On pose $C' = \lambda_1 \cdot c$

B. — Erreurs systématiques portant sur la constante de chauffe B

a) Entre autres approximations, nous avons supposé dans notre démonstration théorique que Δt était suffisamment court. Il convient donc de préciser le sens que nous donnons à ce « suffisamment ».

L'élévation de température Θ calculée est toujours supérieure à l'élévation de température mesurée Θ' à partir d'une certaine valeur de Δt , et cela d'autant plus que Δt est grand.

On pose:
$$\Theta = \lambda_2 \Theta'$$

λ_2 est une fonction croissante de Δt ; l'expérience prouvera de plus que λ_2 dépend de u , mais cette variation de λ_2 en fonction de u est liée à une autre erreur.

b) Nous supposons en effet dans la démonstration théorique un Φ_0 constant pendant le temps Δt .

Si l'on peut effectivement fournir une puissance Φ_0 constante à la résistance électrique (pas de modification dans l'alimentation et la résistance électrique), il n'en est pas de même du flux calorifique transmis de la sonde au sol environnant. A la fin de la chauffe, la sonde se refroidit et rend au sol ce qu'elle avait initialement stocké. Ce phénomène, accroissant Δt , renforce donc l'erreur que nous avons fait apparaître en a. La correction de cette erreur est incluse dans celle de a.

Lorsque l'humidité du milieu varie, le phénomène se complique. En effet, la quantité de chaleur prélevée initialement par la sonde et restituée ensuite au milieu est d'autant plus importante, proportionnellement, que la conductibilité du milieu est plus importante, donc que le sol est plus humide.

L'importance de cette erreur systématique croît donc avec l'humidité du sol. Si nous l'incluons dans le λ_2 du précédent paragraphe il faut conclure que λ_2 est une fonction croissante simultanément de Δt et de u :

$$\Theta_r = \lambda_2 (\Delta t, u) \Theta'$$

Cette erreur sera d'autant plus faible que la résistance aura moins d'inertie thermique.

Remarque.

On peut interpréter et expliquer cette erreur de façon différente. En effet, lorsque l'humidité du sol croît, le temps $t_{s,r}$, au bout duquel est observé le maximum de température $\Theta_{\max,s,r}$ diminue. Pour des Δt constants, l'erreur faite est donc d'autant plus importante que le rapport $\frac{\Delta t}{t_{s,r}}$ est grand, c'est-à-dire que $t_{s,r}$ est petit, donc que l'humidité est élevée.

c) Conclusions.

Il est extrêmement important dans l'application de la méthode de respecter les principes suivants:

- assurer la constance de la distance entre la sonde chauffante et le thermocouple de mesure;
- étalonner chaque type de résistance chauffante utilisé afin de déterminer le coefficient d'erreur. $\lambda_1 = \frac{\epsilon}{\epsilon}$
- assurer la constance du flux injecté $\Phi_0 = U I$ et s'assurer de sa mesure correcte;
- Δt doit rester constant et être le plus petit possible pour réduire dans la mesure du possible l'erreur systématique.

2.2. Description de l'appareillage

2.2.1. LA SOURCE CHAUFFANTE ET SON ALIMENTATION

On utilise une résistance chauffante électrique. La valeur de sa résistance électrique demeure la plus constante possible dans le domaine de température utilisé. La résistance est placée à l'intérieur d'un tube métallique de 1 mm de diamètre. La longueur de chauffe est d'environ 3 cm. L'inertie thermique de l'ensemble est aussi faible que possible. La puissance de la résistance est d'environ 4 watts pour un courant de 6 V (fig. 4).

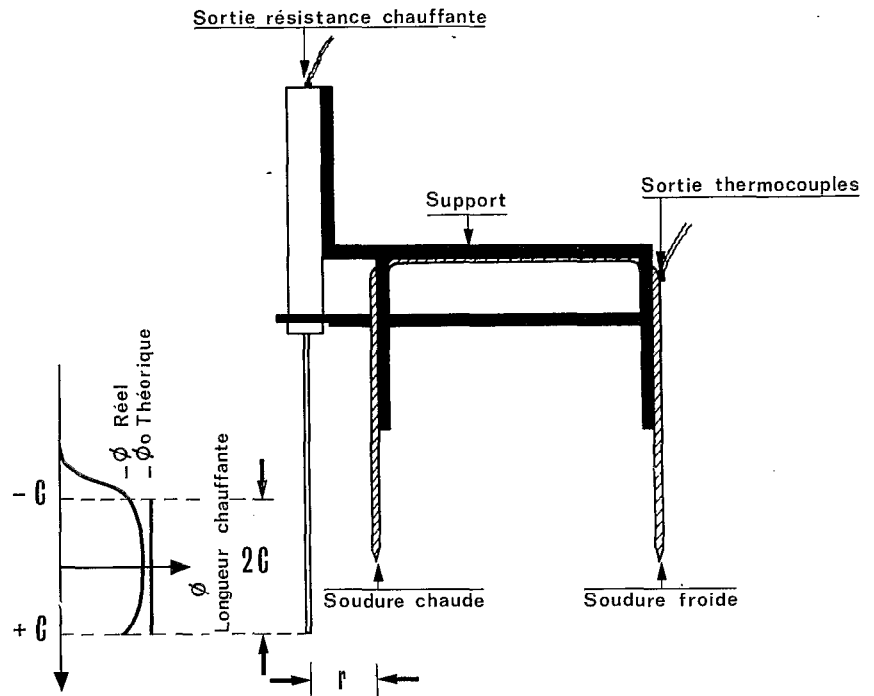


Fig. 4 — Schéma de la sonde de mesure utilisée

La résistance est alimentée en courant alternatif de bas voltage. Cette tension d'alimentation est rendue la plus constante possible par l'intermédiaire d'un régulateur. Des appareils de contrôle permettent de mesurer à tout instant la tension, l'intensité et la fréquence du courant traversant la résistance (fig. 5).

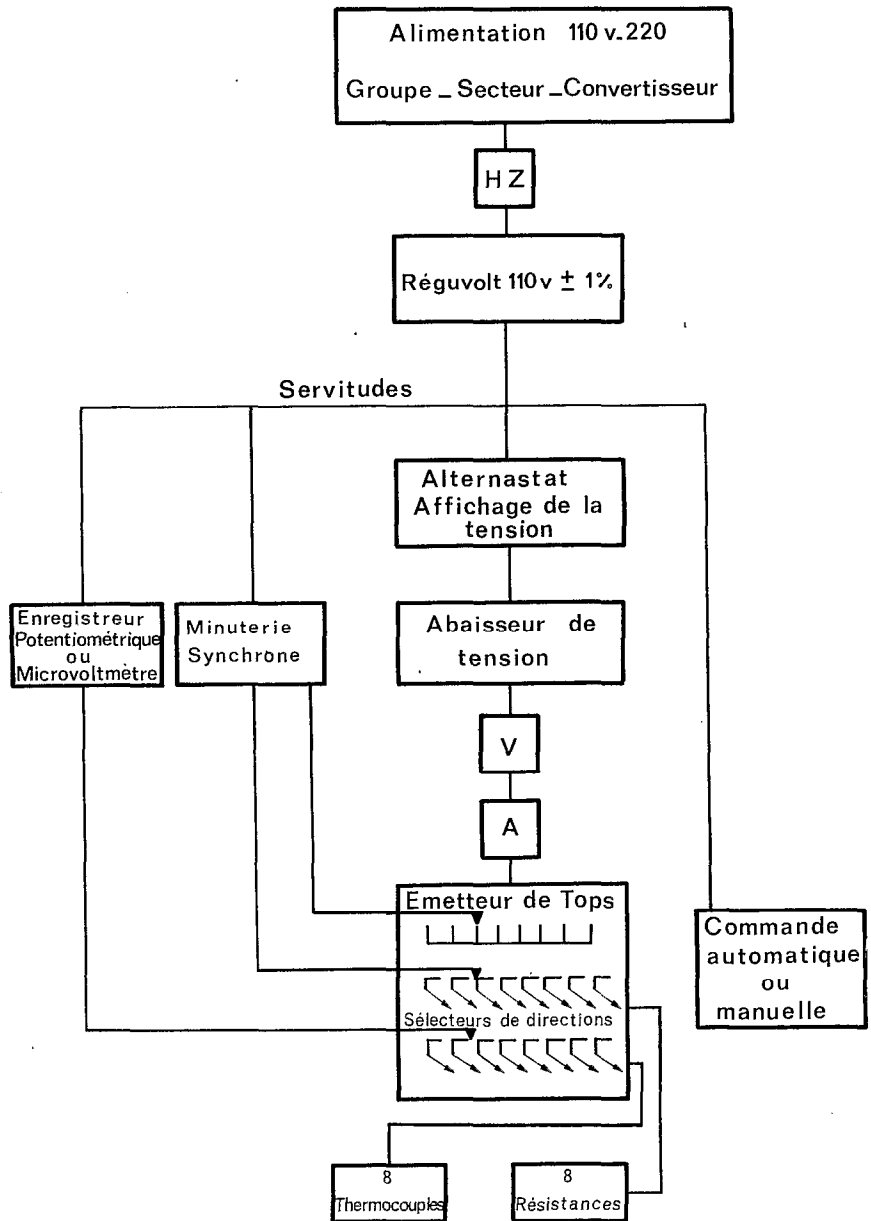


Fig. 5 — Dispositif schématique de l'appareillage

La durée de chauffe est fixée par une minuterie entraînée par un moteur électrique synchrone. La précision sur Δt est d'environ 1% pour les temps couramment utilisés.

2.2.2. LA MESURE DES TEMPÉRATURES

Les températures sont mesurées par des thermocouples cuivre-constantan dont la sensibilité est d'environ 0,040 mV par °C.

La soudure chaude est placée à une distance r de la sonde.

Les différences de potentiel apparaissant aux bornes des thermocouples sont mesurées à l'aide d'un micro-voltmètre très sensible. L'enregistrement de ces tensions peut permettre, à l'aide d'un programme approprié, de suivre automatiquement un profil d'humidité.

2.2.3. DISPOSITION DES DIFFÉRENTS ÉLÉMENTS

Les modifications thermiques naturelles du sol sont provoquées par des perturbations thermiques planes à la surface du sol, qui induisent des gradients thermiques verticaux. Les isothermes de ces perturbations sont alors grossièrement des plans horizontaux, compte tenu de l'hétérogénéité du matériau constituant le sol.

Notre méthode de mesure de l'humidité du sol introduit une perturbation parasite sous la forme d'un choc thermique, avec un gradient thermique de géométrie singulière. La mesure de certaines caractéristiques de ce gradient parasite, sur lesquelles repose notre méthode, exige que l'on soit capable de l'isoler des gradients thermiques naturels.

Une manière élégante de satisfaire à l'ensemble de ces conditions est de placer les deux extrémités (soudure froide et soudure chaude) sur une même isotherme naturelle, c'est-à-dire dans un même plan horizontal, et de placer la résistance chauffante de telle sorte que ce plan horizontal en soit simultanément le plan médiateur. De cette façon les fils des thermocouples sont sur des équipotentiels du champ parasite, ce qui permet de réduire l'importance des perturbations induites par conduction le long de ces câbles.

Une telle disposition permet de mesurer l'humidité malgré toutes les modifications naturelles des champs thermiques ou d'humidité, tant que l'homogénéité du sol est suffisante pour que les surfaces équipotentiels de ces champs soient horizontales, et qu'elles ne varient pas trop vite.

2.3. Vérifications pratiques des lois théoriques proposées

2.3.1. EXPÉRIENCE SUR LA FORME DE L'ÉQUATION

A. — La constante géométrique A reste constante

1) Variation de Φ_0 , tout étant constant par ailleurs. On remarque sur la figure 6 que les variations du flux fournissent des points expérimentaux correctement alignés. La variation de $\Theta_{\max_{s,r}}$ en fonction de Θ_0 est donc linéaire dans le domaine étudié.

2) Variation de Δt , tout étant constant par ailleurs. Nous avons effectué plusieurs expériences sur des sols d'humidité et de densité différentes. Nous fournissons plusieurs graphiques d'expérience où Δt est en abscisse et $\Theta_{\max_{s,r}}$ en ordonnée (fig. 7).

Il apparaît que la variation de $\Theta_{\max_{s,r}}$ en fonction de Δt n'est pas linéaire. Reprenons nos notations du paragraphe précédent: soit Θ' l'élévation de température mesurée, Θ l'élévation de température fictive correspondant à une loi linéaire et soit

$$\lambda_2 = \frac{\Theta}{\Theta'}$$

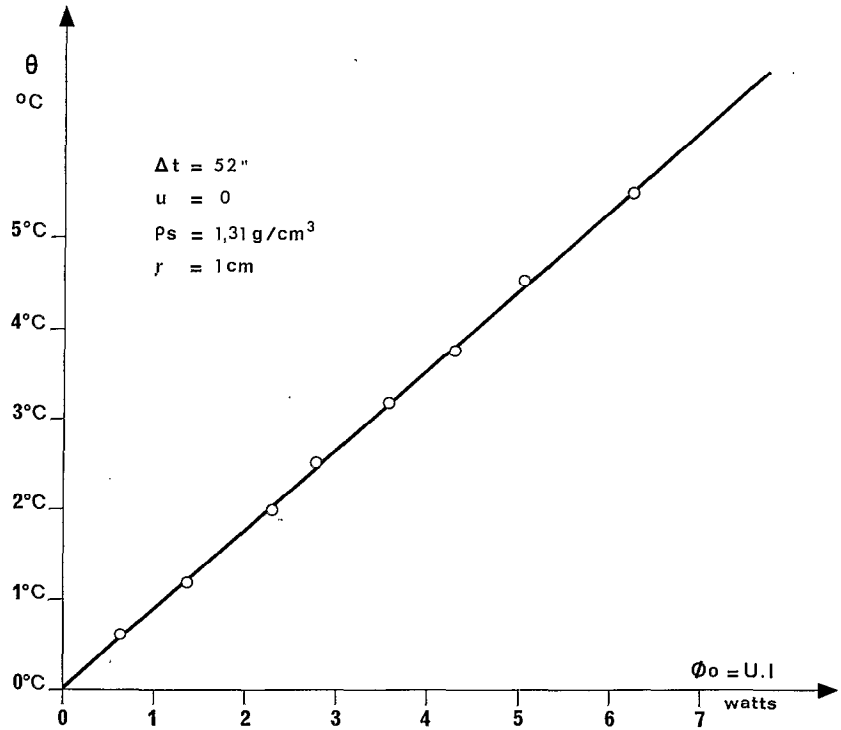


Fig. 6 — Variation de θ en fonction de Φ_0 tout étant constant par ailleurs dans cette expérience

Les différents graphiques montrent que pour des Δt égaux, λ_2 est d'autant plus grand que le sol est plus humide.

Le paramètre important est en fait $t_{s,r}$, temps mis par le maximum de température pour atteindre la distance r . Si Δt est $< t_{s,r}$, λ_2 est très voisin de 1. Ce n'est que lorsque Δt atteint et dépasse $t_{s,r}$, que λ_2 croît rapidement.

Il n'est bien entendu pas question de donner des lois générales précises de la variation de λ_2 . On pourra toujours se placer dans des conditions de Δt où λ_2 est très voisin de 1. Sinon, un étalonnage du sol permettra de connaître la variation de λ_2 en fonction de Δt , de l'humidité u , de la masse volumique du sol ρ_s .

B. — La constante de chauffe B reste constante

Nous avons pu vérifier, en prenant des valeurs de r variables (1 cm, 2, 5 et 5 cm) pour certaines valeurs de c (1,5 et 3 cm), que la loi de variation était effectivement

en:

$$\frac{1}{r^3} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{c}{r}\right)^2}}$$

2.3.2. DÉTERMINATION DES CARACTÉRISTIQUES PHYSIQUES DU SOL

La capacité calorifique massique Γ du sol sec est mesurée à l'aide d'un calorimètre de fortune constitué d'une simple bouteille thermos. Une masse M_1 de sol

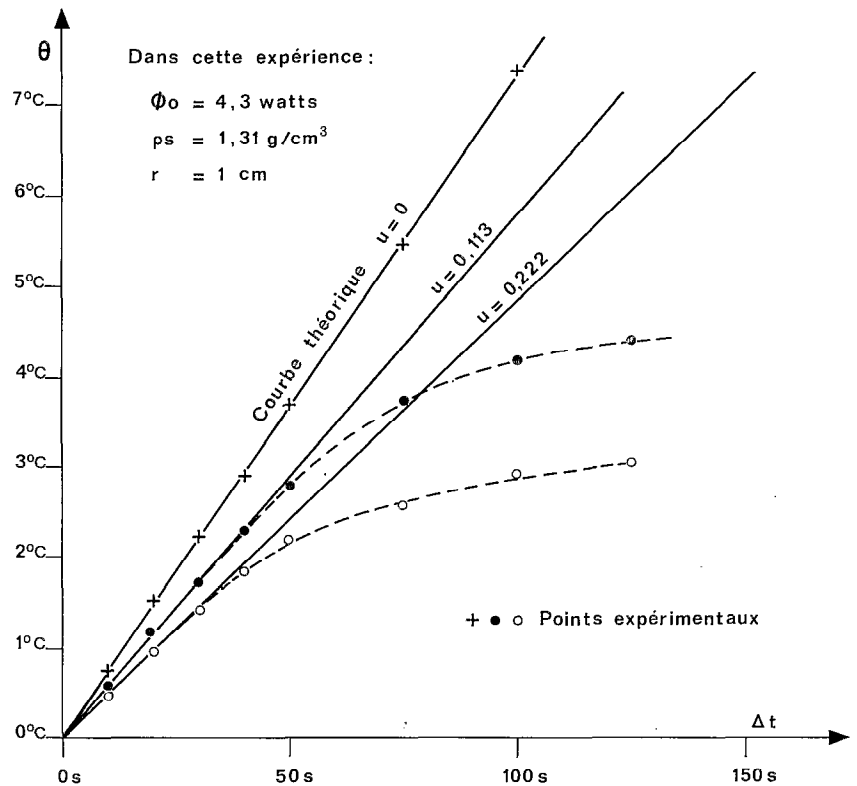


Fig. 7 — Variation de θ en fonction de Δt pour différentes humidités tout étant constant par ailleurs

étuvé porté à la température t_1 est mélangée à une masse M_2 d'eau à la température t_2 . Les températures s'équilibrent à la température t_f .

La mesure est d'autant plus précise que l'écart entre t_2 et t_1 est plus important, et que M_1 et M_2 sont plus grandes, dans la mesure où une bonne homogénéisation demeure possible dans le calorimètre sans pertes excessives.

Il vient:
$$\Gamma M_1 (t_f - t_1) = M_2 (t_2 - t_f)$$

soit:
$$\Gamma = \frac{M_2 t_2 - t_f}{M_1 t_f - t_1}$$

La masse volumique ρ_{sol} de la phase solide est obtenue en mélangeant dans une éprouvette graduée une certaine masse M de sol à de l'eau en quantité suffisante pour déborder du sol. Soit m la masse d'eau et V le volume du sol imbibé d'eau, on a:

$$V = m + \frac{M}{\rho_{sol}} \quad \text{d'où} \quad \rho_{sol} = \frac{M}{V - m}$$

Dans le cas de l'étalonnage au laboratoire, les masses volumiques ρ_s du sol sec et ρ_u du sol à l'humidité u sont mesurées par pesée du volume connu V du sol qui

constitue l'enceinte de mesure. Sur le terrain, on opère en prélevant une carotte du sol en place dans de petites boîtes de prélèvements ad hoc.

L'humidité volumique u d'un sol est égale à la masse d'eau par unité de volume du sol. On a donc: $u = \rho_u - \rho_s$.

L'humidité massique u_m d'un sol est égale à la masse d'eau par unité de masse du sol sec. On a donc: $u_m = \frac{u}{\rho_s}$.

La porosité p d'un sol est le volume des vides par unité de volume du sol. Si u_{s01} est l'humidité volumique d'un sol saturé, où l'ensemble des vides est occupé par de l'eau, on a donc:

$$u_{s01} = p$$

l'humidité relative U est définie par:

$$U = \frac{u}{u_{s01}} = \frac{u}{p}$$

2.3.3. ETALONNAGE EN LABORATOIRE D'UN SOL ET DE LA SONDE DE MESURE

On opère en laboratoire sur des échantillons du sol à étudier que l'on porte artificiellement à des humidités variables connues. La sonde de mesure est introduite dans ces échantillons.

Pour que ces résultats obtenus soient comparables, il faut se ramener à des conditions de référence correspondant à une masse volumique sèche ρ_s .

Définissons:

P'_t masse totale de l'échantillon (') d'expérience,

P'_H masse de l'eau contenue dans l'échantillon ('),

P'_s masse de l'échantillon (') sec,

V volume de l'enceinte de mesure, donc de l'échantillon,

u' humidité volumique de l'échantillon ('),

ρ'_s masse volumique sèche de l'échantillon ('),

$\Theta'_{u'}$ maximum de l'élévation de température obtenue pour l'échantillon (') dans les conditions décrites,

$C'_{u'}$ capacité calorifique volumique de l'échantillon (').

Nous allons calculer les nouvelles valeurs de ces paramètres de l'échantillon (') pour un échantillon (") répondant aux conditions de référence:

— $\rho_s'' = \rho_s$ de référence, la même pour tous les échantillons,

— le volume occupé par l'échantillon (") est toujours V ,

— l'échantillon ("), constitué par le même sol que (') conserve la même humidité massique.

Posons:

$$\gamma = \frac{\rho''_t}{\rho'_t}$$

On a évidemment aussi:
$$\gamma = \frac{\rho''_s}{\rho'_s} = \frac{\rho''_H}{\rho'_H} = \frac{u''}{u'} = \frac{\rho''_s}{\rho'_s}$$

La dernière égalité détermine γ puisque $\rho''_s = \rho_s$ de référence, et que ρ'_s est connu par l'expérience.

donc:
$$\gamma = \frac{\rho_s \text{ référence}}{\rho'_s \text{ échantillon expérimenté}}$$

Nous savons que: $\Theta'_{u'} = \frac{\alpha}{C'_{u'}}$ et $\Theta''_{u''} = \frac{\alpha}{C''_{u''}}$

donc:
$$\frac{\Theta''_{u''}}{\Theta'_{u'}} = \frac{C'_{u'}}{C''_{u''}} = \frac{\rho'_s \Gamma + u'}{\rho''_s \Gamma + u''} = \frac{1}{\gamma} \frac{\rho'_s \Gamma + u}{\rho'_s \Gamma + u} = \frac{1}{\gamma}$$

et:
$$\Theta''_{u''} = \frac{1}{\gamma} \Theta'_{u'}$$

le calcul $\Theta''_{u''}$ et des u'' pour chaque échantillon expérimenté permet ainsi de réaliser un étalonnage pour un sol de référence donné dont on s'est fixé le ρ_s .

Des essais ont été exécutés pour différents sols, aux conditions suivantes (valeurs expérimentales des paramètres):

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= 4,3 \text{ watts} \\ \Delta t &= 52 \text{ s} \\ \Gamma &\neq 1 \text{ cm} \\ C &\neq 1,5 \text{ cm} \end{aligned}$$

Il n'est pas possible de déterminer $\lambda_1 = \frac{C'}{C}$ autrement que par l'expérience.

$$\rho_s \text{ de référence} = 1,31 \text{ g/cm}^3$$

$$\Gamma = 0,328 \text{ cal/g}$$

Deux séries d'expériences sur le même sol ont donné les résultats moyens suivants:

PREMIÈRE SÉRIE

N°	γ	Θ'	u'	Θ''	u''	Observations
1	0,895	3,34	0	3,73	0	
2	1,068	3,56	0,041	3,34	0,044	
3	1,070	3,05	0,082	2,85	0,088	
4	0,994	2,62	0,132	2,64	0,131	
5	0,931	2,13	0,187	2,30	0,174	Mauvaise homogénéité de l'échantillon
6	0,950	2,15	0,229	2,24	0,218	
7	0,982	2,09	0,266	2,11	0,262	

DEUXIÈME SÉRIE

N°	γ	Θ'	u'	Θ''	u''	Observations
1	0,895	3,38	0	3,84	0	
2	1,090	2,96	0,069	2,97	0,075	
3	0,940	2,54	0,160	2,54	0,150	
4	0,960	2,24	0,234	2,21	0,225	

On voit sur la figure 8 que ces points s'ajustent assez bien à une courbe de forme hyperbolique.

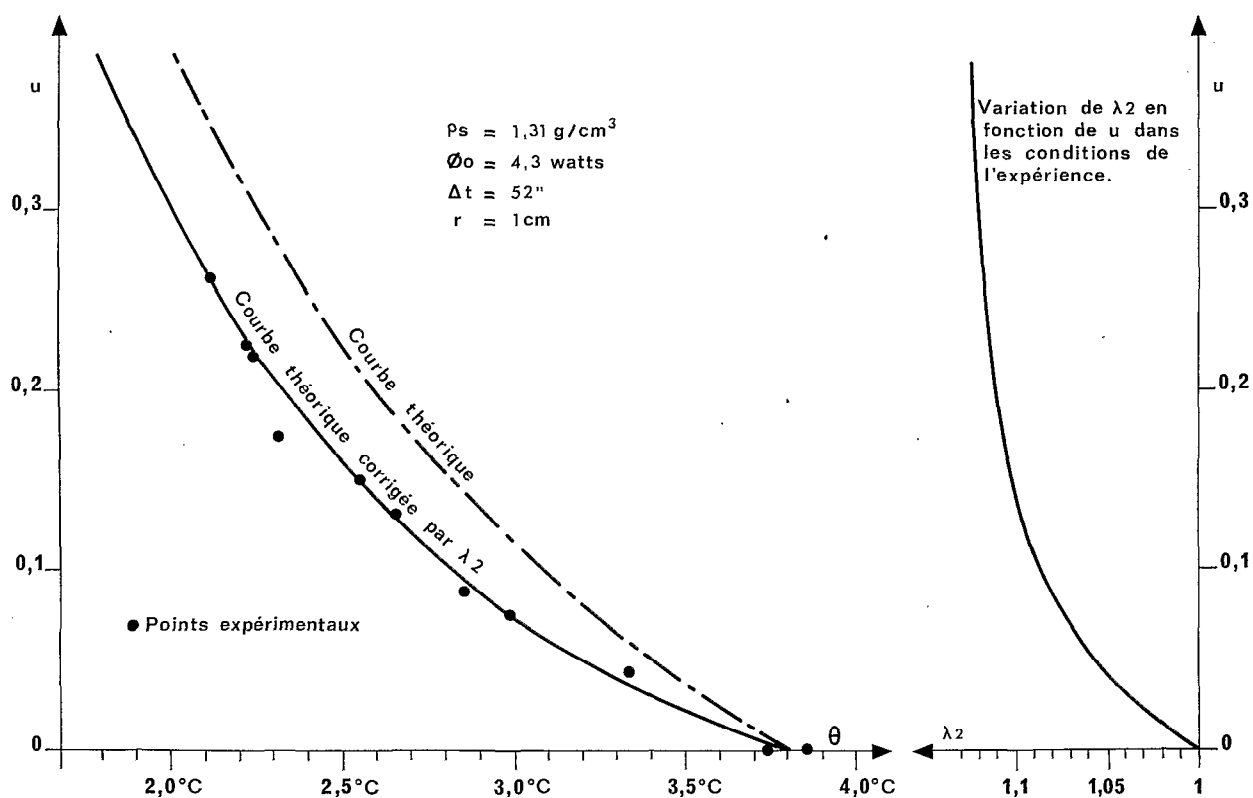


Fig. 8 — Variation de θ en fonction de u .

Nous avons trouvé expérimentalement $\Gamma = 0,328 \text{ cal/g}$,
 d'où $\beta = \rho_s \Gamma = 0,43 \text{ cal/cm}^3$

La relation entre u et Θ s'écrit: $u = \frac{\alpha}{\Theta} - \beta$

Pour un sol sec, nous avons trouvé $\Theta = \Theta' = 3,8 \text{ }^\circ\text{C}$ (en effet $\lambda \neq 1$ pour $\Delta t = 52 \text{ s}$ dans le cas d'un sol sec),

donc $u = 0$, $\Theta = 3,8 \text{ }^\circ\text{C}$, d'où $\alpha = 1,63$

l'équation théorique est donc: $u = \frac{1,63}{\Theta} = 0,43$, donnant les valeurs suivantes:

Θ	2	2,25	2,50	2,75	3,00	3,25	3,50	3,75	3,8
α/Θ	0,815	0,725	0,652	0,593	0,543	0,502	0,466	0,435	0,430
u	0,385	0,295	0,222	0,163	0,113	0,072	0,036	0,005	0

L'équation générale de la courbe théorique s'écrit:

$$u + \rho_s \cdot \Gamma = \frac{\Phi_0 \Delta t}{2 \pi e \Theta r^3} \frac{1}{\sqrt{1 + (C'/r)^2}}$$

Si nous en identifions les termes avec ceux de:

$$u = \frac{\alpha}{\Theta} - \beta,$$

il vient en particulier (pour $r = 1$): $\alpha = 1,63 = 3,12 \frac{1}{\sqrt{1 + C'^2}}$

d'où: $C'^2 = 2,35$

et: $C' = 1,63 \text{ cm}$, valeur tout à fait plausible.

On retiendra donc dans les étalonnages, pour ce type de résistance chauffante, la valeur:

$$\lambda_1 = \frac{C'}{C} = \frac{1,63}{1,5} = 1,09$$

Il convient maintenant d'introduire la correction de λ_2 sur ces élévations de température Θ calculées.

Le sol est expérimenté pour des humidités u variables et pour des temps de chauffe Δt variables, ce qui permet de déterminer la loi de variation de λ_2 en fonction de u et de Δt .

Les Θ' , élévations de températures telles qu'elles auraient pu être observées lors d'une expérience, sont calculées à partir des Θ théoriques par $\Theta' = \frac{\Theta}{\lambda_2}$

d'où le tableau de calcul:

u	0,385	0,295	0,222	0,163	0,113	0,072	0,036	0,005	0,000
λ_2	1,125	1,120	1,115	1,105	1,095	1,075	1,045	1,010	1,000
Θ	2,00	2,25	2,50	2,75	3,00	3,25	3,50	3,75	3,80
Θ'	1,78	2,01	2,24	2,49	2,73	3,02	3,35	3,72	3,80

L'ensemble des opérations (mesures et calculs) exposées dans le paragraphe 2.3.3. constitue ce que nous appellerons l'étalonnage du sol en vue de la mesure de l'humidité par choc thermique.

2.4. Mise en place et étalonnage *in situ*

Ainsi que nous l'avons déjà expliqué, l'ensemble sonde de mesure doit être introduit verticalement jusqu'à la profondeur requise.

Lorsqu'il s'agit de profondeurs faibles, cela ne pose pas de problèmes. Mais pour des profondeurs importantes, on doit opérer à partir d'une tranchée. On introduit alors les sondes dans le sol horizontalement. Les conditions d'orthogonalité du champ naturel et du champ parasite ne sont plus respectées, mais lorsqu'on s'éloigne de la surface du sol cela n'a plus grande importance, car les gradients verticaux du champ thermique et du champ d'humidité ne sont guère élevés. En toutes circonstances il convient que le sol, entre la source chauffante et le thermocouple de mesure, ne soit pas modifié car c'est sur lui que s'effectue la mesure.

Pour un étalonnage précis de la sonde *in situ*, il suffit de connaître ρ_s et Γ , ses caractères géométriques ayant été déterminés au préalable.

Il est assez facile de mesurer le Γ du sol expérimenté. Par contre la mesure de ρ_s est plus délicate et bien moins précise. On prélève une carotte du sol, sans le désagréger ou le tasser, pour en mesurer le volume, le poids humide puis sec. Ceci permet de calculer ρ_s . Si le sol est assez homogène pour qu'un volume assez important et toujours représentatif soit prélevé, le mieux est encore d'effectuer un étalonnage complet comme nous l'avons vu en 2.3.3.

Pour un étalonnage rapide on peut considérer que l'équation de définition:

$u = \frac{\alpha}{\Theta} - \beta$ comporte deux constantes α et β . Il suffit donc, en principe, de connaître deux couples (u_1, Θ_1) et (u_2, Θ_2) pour déterminer α et β .

En effet:

$$\alpha = \frac{u_1 - u_2}{\frac{1}{\Theta_1} - \frac{1}{\Theta_2}} \quad \beta = \frac{u_1 - u_2}{1 - \frac{\Theta_1}{\Theta_2}}$$

Ce faisant, nous ne tenons évidemment pas compte de l'erreur de λ_2 . Afin de la minimiser, il suffira d'opérer avec des valeurs très faibles de Δt , ou au contraire, de déterminer expérimentalement *in situ* la loi $\Theta_{\max, r} = \varphi(\Delta t, u)$ qui fixe la variation de λ_2 .

En théorie, n'importe quel couple de deux humidités suffirait donc à l'étalonnage. Cependant, il est toujours délicat de mesurer une humidité *in situ* par carottage et surtout d'avoir une valeur significative pour l'emplacement de la sonde qui ne doit surtout pas être perturbée. En sol homogène, on peut toujours estimer que l'humidité reste la même dans chaque plan horizontal, mais on n'est alors pas à l'abri d'une hétérogénéité de détail.

Il est intéressant de choisir pour ces couples des valeurs particulières.

Premier état: sol sec

$$u_1 = 0 \\ \Theta_1 = \Theta_0$$

Deuxième état: sol à saturation

$$u_2 = p$$
$$\Theta_2 = \Theta_p$$

et de calculer α et β par les relations:

$$\alpha = \frac{p}{\frac{1}{\Theta_p} - \frac{1}{\Theta_0}}$$

$$\beta = \frac{p}{1 - \frac{\Theta_p}{\Theta_0}}$$

Conclusions

Le domaine d'emploi de cette méthode est très vaste. Sa sensibilité est d'autant meilleure que la porosité p du sol est plus élevée. Elle a été mise au point sur les sols sablo-limoneux de la région de Brazzaville. Des essais sur sols humifères ont été faits et ont donné de bons résultats.

Il s'agit d'une méthode très fine, intéressant un petit volume de sol (environ 3 cm de diamètre). Elle est donc particulièrement adaptée à une approche fine de l'étude de l'humidité, mais présente l'inconvénient d'une mauvaise représentativité de la mesure en cas d'hétérogénéité de détail.

Dans le cas de sols caillouteux, on mesure non pas l'humidité moyenne du sol, mais l'humidité du sol entre les cailloux. Si n est la fraction en volume des cailloux importants, et u l'humidité volumique mesurée par cette méthode, on a évidemment pour l'humidité volumique réelle u_r :

$$u_r = u (1 - n)$$

Cette méthode pourra donc s'utiliser dans des applications fort différentes, allant de l'exploitation sur bassins versants de profils hydriques équipés par des procédés semi-automatiques, à l'étude fine en laboratoire du dessèchement ou de l'humectation de colonnes de sol reconstitué.