

# Distribution exponentielle généralisée

Y. BRUNET-MORET

Ingénieur Hydrologue de l'ORSTOM

## RÉSUMÉ

*Etude de la distribution exponentielle généralisée (loi de Weibull, de Goodrich, de Frechet) spécialement axée sur les méthodes de détermination des valeurs des paramètres d'après un échantillon observé, supposé tiré au hasard d'une population-mère répartie suivant une distribution exponentielle généralisée : méthodes graphiques, méthodes par les moments, méthodes du maximum de vraisemblance (avec sous-programmes FORTRAN).*

## ABSTRACT

*Study of the exponential generalized distribution (law of Weibull, Goodrich, Frechet) specially focussed on the determination methods of parameters values of existent sample, extracted by random sampling from a parent population in accordance with an exponential generalized distribution : graphical methods, moments methods, maximum likelihood methods (with FORTRAN subprograms).*

## SOMMAIRE

### Introduction

#### 1. Expressions mathématiques

- 1.1. Fonction de répartition
- 1.2. Fonction de densité
- 1.3. Cas particulier  $\delta \rightarrow 0$
- 1.4. Distributions tronquées

#### 2. Moments, cumulants, valeurs centrales

- 2.1. Moments non centrés
- 2.2. Cumulants
- 2.3. Asymétrie, aplatissement
- 2.4. Valeurs centrales
- 2.5. Compléments

#### 3. Estimation des paramètres par les moments

- 3.1. Généralités
- 3.2. Trois paramètres calculés
- 3.3. Paramètre de position connu a priori
- 3.4. Paramètre de forme connu a priori
- 3.5. Paramètres de position et de forme connus a priori
- 3.6. Répartitions tronquées

4. *Estimation des paramètres par le maximum de vraisemblance*

- 4.1. Equations et expressions
- 4.2. Trois paramètres calculés
- 4.3. Paramètre de position connu a priori
- 4.4. Paramètre de forme connu a priori
- 4.5. Paramètres de position et de forme connus a priori
- 4.6. Répartitions tronquées  $\delta > 0$
- 4.7. Répartitions tronquées  $\delta < 0$
- 4.8. Taille d'échantillon inconnue

5. *Compléments divers*

- 5.1. Comportement asymptotique
- 5.2. Répartition des valeurs extrêmes
- 5.3. Répartition de l'inverse
- 5.4. Répartition d'un quotient
- 5.5. Intervalles de confiance
- 5.6. Méthodes graphiques de détermination des paramètres

6. *Sous-programmes en FORTRAN*

- 6.1. Fonctions de distribution et inversions
- 6.2. Calcul des paramètres, échantillons sans troncatures
- 6.3. Calcul des paramètres, échantillons à seuil de troncature
- 6.4. Calcul des intervalles de confiance
- 6.5. Utilisation des programmes

- Annexe 1.* Exemple d'ajustement par les moments  
Distribution non tronquée, sans troncature
- Annexe 2.* Exemple d'ajustement par les moments  $\delta > 0$   
Distribution tronquée, avec troncature des observations
- Annexe 2 bis.* Calcul des moments par classes de précipitations
- Annexe 3.* Exemple d'ajustement graphique  $\delta > 0$   
Distribution non tronquée, sans troncature
- Annexe 4.* Exemple d'ajustement graphique  $\delta < 0$   
Distribution non tronquée, sans troncature
- Annexe 5.* Exemple d'ajustement graphique  $\delta > 0$   
Distribution tronquée, avec troncature des observations
- Annexe 6.* Exemple d'ajustement graphique  $\delta < 0$   
Distribution tronquée, avec troncature des observations
- Annexe 7.* Exemple d'ajustement par le maximum de vraisemblance  
Distribution non tronquée, sans troncature
- Annexe 8.* Exemple d'ajustement par le maximum de vraisemblance  
Taille d'échantillon inconnue, troncature des observations

*Tableau 1.* Fonction de densité, asymétrie, aplatissement, valeurs centrales

*Table A.* Valeurs pour ajustements par les moments —  $0,75 < \delta < 1,50$

*Table B.* Valeurs pour ajustements par les moments  $0,50 < \delta < 2,00$

*Liste C.* Sous-programmes en FORTRAN

## INTRODUCTION

Nous étudions ci-après, la distribution exponentielle généralisée dont deux formes, Goodrich et Frechet, sont souvent utilisées. Dans cette étude quasi exhaustive, nous insistons particulièrement sur les déterminations des valeurs des paramètres car ce point est important dans la pratique.

Ayant un échantillon homogène de valeurs observées (supposées sans erreurs systématiques), nous choisissons une forme mathématique que nous supposons a priori être la forme mathématique de la distribution de la population-mère d'où provient l'échantillon, d'après lequel nous déterminons les valeurs des paramètres qui ajustent à l'échantillon la forme mathématique de la population-mère. Les valeurs des paramètres résument (pour la forme mathématique choisie, avec des conditions et des possibilités imposées par cette forme) l'information contenue dans l'échantillon, et un point très important est de ne perdre que le moins possible de cette information.

En hydrologie, comme dans beaucoup d'autres disciplines, nous n'en sommes pas encore à concevoir des formes mathématiques incluant tous les phénomènes naturels et les conditions de leurs interactions, puis à déduire de ces formes des fonctions de distributions. Pour un échantillon de valeurs données, par exemple modules annuels dont on doit étudier la répartition, on cherchera la forme mathématique qui s'adapte le mieux à l'échantillon, sous certaines conditions (ce choix est un problème que nous ne traiterons pas ici, non plus que des « conditions »). Il se peut que l'on adopte une distribution de Goodrich à paramètre de position négatif, ce qui entraîne que l'ensemble des modules négatifs n'ait pas une probabilité nulle : résultat inconcevable, si l'on prétend que les modules annuels suivent une distribution de Goodrich. Mais si la probabilité totale des modules négatifs est petite, de récurrence grande par rapport à la durée que l'on peut concevoir de la stabilité des phénomènes climatiques de l'atmosphère et morphologiques du bassin, on peut parfaitement, à notre sens, garder cette distribution à paramètre de position négatif comme représentation de l'échantillon (et par extension, de la population-mère).

## 1. EXPRESSIONS MATHÉMATIQUES

## 1.1. FONCTION DE RÉPARTITION

Nous l'écrivons :

$$F(x) = \frac{\sigma + 1}{2} - \sigma \exp\left(-u^{\frac{1}{\delta}}\right) \quad \text{avec } u = \frac{x - x_0}{s}$$

$\sigma$  étant égal à 1 avec le signe de ( $s\delta$ ),

$F$  = fréquence au non-dépassement : lorsque  $u$  croît de 0 à  $+\infty$ ,  $F(u)$  croît de 0 à 1, c'est-à-dire lorsque,  $s$  étant positif,  $x$  croît de  $x_0$  à  $+\infty$ , ou lorsque,  $s$  étant négatif,  $x$  croît de  $-\infty$  à  $x_0$ ,  $F(x)$  croît de 0 à 1.

## 1.1.1. Paramètres

$x_0$  est le paramètre de position : borne inférieure de l'intervalle de définition de la variate si  $s$  est positif (ou borne supérieure si  $s$  est négatif).

$s$  est le paramètre d'échelle, différent de zéro, ayant les mêmes dimensions que  $x_0$  et  $x$ .

$\delta$  est le paramètre de forme, différent de zéro.

La distribution exponentielle généralisée correspond si  $s$  et  $\delta$  sont positifs : à la loi de Goodrich ; si  $s$  est positif et  $\delta$  négatif : à la loi de Frechet ; si le produit  $s\delta$  est négatif : aux lois de Jenkinson.

## 1.1.2. Calculs de la probabilité et de son inversion

Les valeurs des paramètres  $x_0$ ,  $s$  et  $\delta$  étant connues, si le produit  $s\delta$  est positif :

$$F(x) \text{ au non-dépassement} = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x - x_0}{s}\right)^{\frac{1}{\delta}}\right]$$

$$F_1(x) \text{ au dépassement} = \exp\left[-\left(\frac{x - x_0}{s}\right)^{\frac{1}{\delta}}\right]$$

et en logarithmes décimaux :

$$\log |x - x_0| = \log |s| + \delta \left[ 0,36221 + \log \left( \log \frac{1}{F_1} \right) \right]$$

Si le produit  $s\delta$  est négatif :

$$F(x) \text{ au non-dépassement} = \exp \left[ - \left( \frac{x - x_0}{s} \right)^{\frac{1}{\delta}} \right]$$

$$F_1(x) \text{ au dépassement} = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{x - x_0}{s} \right)^{\frac{1}{\delta}} \right]$$

et en logarithmes décimaux :

$$\log |x - x_0| = \log |s| + \delta \left[ 0,36221 + \log \left( \log \frac{1}{F} \right) \right]$$

## 1.2. FONCTION DE DENSITÉ

Elle s'écrit :

$$f(x) = \frac{1}{|s\delta|} u^{\frac{1}{\delta} - 1} \exp \left( - u^{\frac{1}{\delta}} \right)$$

La dérivée première de la fonction de densité est :

$$f'(x) = \frac{1}{s^2 \delta^2} u^{\frac{1}{\delta} - 2} \left[ (1 - \delta) - u^{\frac{1}{\delta}} \right] \exp \left( - u^{\frac{1}{\delta}} \right)$$

qui s'annule pour  $u = (1 - \delta)^\delta$ .

La dérivée seconde est :

$$f''(x) = \frac{1}{|s^3 \delta^3|} u^{\frac{1}{\delta} - 3} \left[ (1 - \delta)(1 - 2\delta) - 3(1 - \delta)u^{\frac{1}{\delta}} + u^{\frac{2}{\delta}} \right] \exp \left( - u^{\frac{1}{\delta}} \right)$$

qui s'annule pour  $u = \left( \frac{1}{2} [3(1 - \delta) \pm \sqrt{(1 - \delta)(5 - \delta)}] \right)^\delta$ , d'où les différentes formes des représentations graphiques de la fonction de densité (fig. 1, tabl. 1, p. 238).

$\delta < 1/2$  (y compris  $\delta < 0$  mais non compris  $\delta = 0$ ) : densité de probabilité nulle à  $u = 0$  avec tangente nulle. Deux points d'inflexion encadrant le mode  $u = (1 - \delta)^\delta$ . Courbe « en cloche ».

$\delta = 1/2$  : densité de probabilité nulle à  $u = 0$  avec tangente  $2/s^2$ . Mode à  $u = 1/\sqrt{2}$  et un seul point d'inflexion à  $u = \sqrt{3/2}$ . Courbe « en toboggan ».

$1/2 < \delta < 1$  : densité de probabilité nulle à  $u = 0$  avec tangente infinie. Mode à  $u = (1 - \delta)^\delta$  et un point d'inflexion à  $u = \left( \frac{1}{2} [3(1 - \delta) + \sqrt{(1 - \delta)(5 - \delta)}] \right)^\delta$ . Courbe en « toboggan ».

$\delta = 1$  : loi exponentielle simple : densité de probabilité  $1/|s|$  à  $u = 0$  avec tangente  $-1/s^2$ . Pas de mode réel ni de points d'inflexion (mode observé à  $u = 0$ ). Courbe « en J ».

$1 < \delta$  : densité de probabilité infinie à  $u = 0$  avec tangente infinie. Pas de mode réel ni de points d'inflexion (mode observé à  $u = 0$ ). Courbe « en J ».

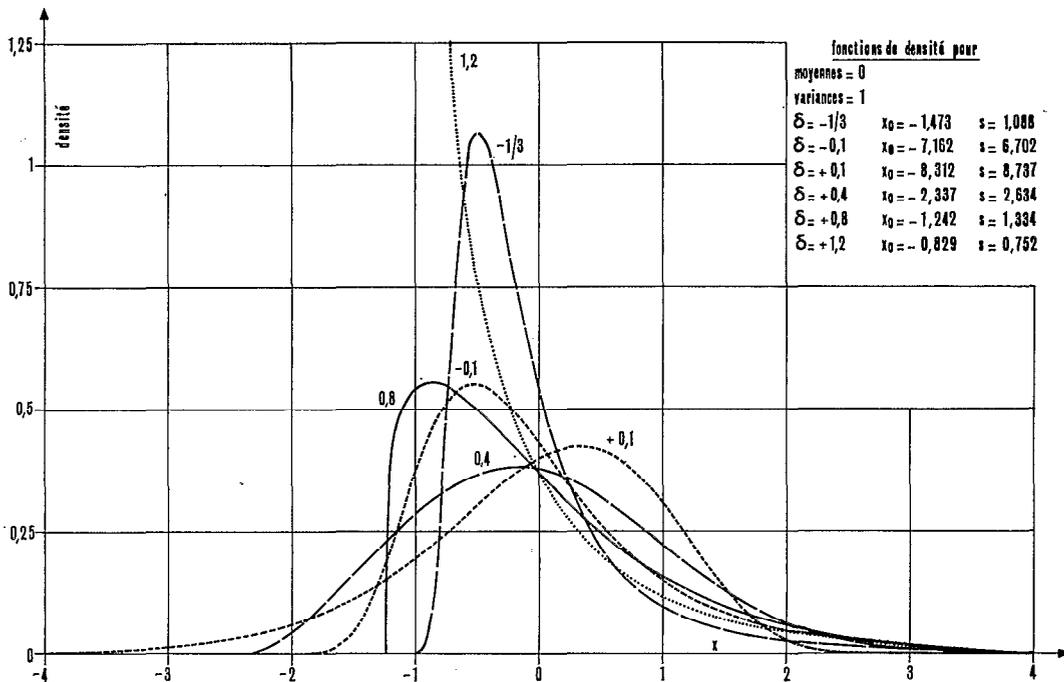


Fig. 1. — Fonction de densité

1.3. CAS PARTICULIER  $\delta \rightarrow 0$

Si la valeur du paramètre de forme  $\delta$  tend vers zéro, par valeurs positives ou négatives, les cumulants de la distribution tendent :

$$K_1 \text{ vers } x_0 + s - \delta s \zeta \quad (\zeta \text{ constante d'Euler})$$

$$K_i \text{ vers } (-1)^i s^i \delta^i (i - 1)! \zeta(i) \quad (\zeta(i) \text{ fonction de Rieman})$$

Si la valeur absolue de  $s$  croît lorsque la valeur absolue de  $\delta$  décroît de façon que le produit  $s\delta$  tende vers une limite  $s'$  finie, positive ou négative mais différente de zéro, et si la valeur absolue de  $x_0$  croît de façon que la somme  $x_0 + s = y_0$  reste finie (pouvant être nulle) la distribution exponentielle généralisée tend vers une distribution de Gumbel de paramètres de position  $y_0$  et d'échelle  $-s'$  : distribution de Gumbel ordinaire, étalée sur la droite si  $s$  et  $\delta$  sont de signes contraires.

Si la valeur du paramètre de forme  $\delta$  tend vers zéro,  $s$  et  $x_0$  restant finis, la valeur de la fonction de densité tend vers zéro quelque soit  $x$ , sauf pour la valeur modale ( $x_0 + s$ ) pour laquelle la valeur de la fonction de densité tend vers l'infini (variable « certaine »).

1.4. DISTRIBUTIONS TRONQUÉES EN FRÉQUENCE

Nous ne nous intéresserons qu'aux distributions tronquées inférieurement en fréquence au non-dépassement, avec paramètre d'échelle positif. Ce tronquage correspond au cas où la borne inférieure  $x_0$  (paramètre de position) est connue à l'avance, et où la variate peut prendre cette valeur exacte avec une probabilité non nulle  $F_0$  : paramètre de tronquage.

La fonction de répartition s'écrit alors, au non-dépassement :

$$F(x) = F_0 + (1 - F_0) \left[ \frac{\sigma + 1}{2} - \sigma \exp \left( -u^{\frac{1}{\delta}} \right) \right]$$

avec :

$$u = \frac{x - x_0}{s}$$

$$\sigma = + 1 \text{ si } \delta \text{ est positif,}$$

$$\sigma = - 1 \text{ si } \delta \text{ est négatif.}$$

Les distributions tronquées ne s'utilisent guère que dans le cas où il est difficile de départager les observations pour lesquelles  $x$  est vraiment égal à  $x_0$  d'avec les observations en nombre relatif non négligeable, pour lesquelles  $x$  est peu différent de  $x_0$  (et inférieur au seuil de troncature  $x_h$ ) mais non discerné comme différent. Dans un échantillon tiré au hasard d'une distribution tronquée, le nombre exact de valeurs strictement égales à  $x_0$  est inconnu.

1.4.1. Dans la pratique, on utilise une distribution tronquée avec un échantillon pour lequel la répartition des valeurs supérieures au seuil de troncature a une forme « en J ». Pour  $\delta \geq 1$  toute la fonction de densité de la distribution exponentielle généralisée a cette forme « en J ». Pour  $\delta < 1$ , la fonction de densité n'a cette forme que pour  $u$  supérieur ou égal à  $u_i$  : abscisse du point d'inflexion de plus grande abscisse. Pour fixer les idées, le tableau ci-dessous donne quelques valeurs de  $u_i$  :

	u moyen	$u_i$	F ( $u_i$ ) pour $F_0 = 0$
0,9	0,962	0,507	0,375
0,7	0,909	1,012	0,639
0,5	0,886	1,223	0,777
— 0,1	1,069	1,080	0,628
— 0,3	1,298	1,143	0,527
— 0,5	1,772	1,109	0,443
— 0,7	2,992	1,004	0,370
— 0,9	9,514	0,863	0,308

#### 1.4.2. Calculs de la probabilité et de son inversion

Les valeurs des paramètres  $x_0$ ,  $s$  positif et  $\delta$  étant connues :

—  $\delta$  positif :

$$F(x) \text{ au non-dépassement} = 1 - (1 - F_0) \exp \left[ - \left( \frac{x - x_0}{s} \right)^{\frac{1}{\delta}} \right] \quad \text{pour } x > x_0$$

$$= F_0 \quad \text{pour } x \leq x_0$$

$$F_1(x) \text{ au dépassement} = (1 - F_0) \exp \left[ - \left( \frac{x - x_0}{s} \right)^{\frac{1}{\delta}} \right] \quad \text{pour } x > x_0$$

$$= 1 - F_0 \quad \text{pour } x \leq x_0$$

et en logarithmes décimaux, pour  $F_1 = 1 - F < 1 - F_0$  :

$$\log (x - x_0) = \log s + \delta \left[ 0,362 \, 21 + \log \left( \log \frac{1 - F_0}{F_1} \right) \right]$$

—  $\delta$  négatif :

$$F(x) \text{ au non-dépassement} = F_0 + (1 - F_0) \exp \left[ - \left( \frac{x - x_0}{s} \right)^{\frac{1}{\delta}} \right] \quad \text{pour } x > x_0$$

$$= F_0 \quad \text{pour } x \leq x_0$$

$$F_1(x) \text{ au dépassement} = (1 - F_0) \left[ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{x - x_0}{s} \right)^{\frac{1}{\delta}} \right] \right] \quad \text{pour } x > x_0$$

$$= 1 - F_0 \quad \text{pour } x \leq x_0$$

et en logarithmes décimaux, pour  $F_1 = 1 - F < 1 - F_0$ :

$$\log(x - x_0) = \log s + \delta \left[ 0,362\,21 + \log \left( \log \frac{1 - F_0}{F - F_0} \right) \right]$$

## 2. MOMENTS, CUMULANTS, VALEURS CENTRALES

### 2.1. MOMENTS NON CENTRÉS DE LA DISTRIBUTION

Le moment non centré d'ordre  $i$  de la variable réduite  $u$  est  $m_i = \Gamma(i\delta + 1)$  ( $\Gamma$  = fonction gamma d'Euler) qui n'existe que pour  $i\delta + 1 > 0$ . Si  $\delta$  est positif, tous les moments existent, mais si  $\delta$  est négatif, ils n'existent pas tous. L'espérance mathématique de  $u$  (moyenne de la population mère) n'a plus de sens pour  $\delta \leq -1$  (cf. *Nota*, p. 253).

De la formule précédente on peut déduire le moment non centré d'ordre  $i \geq 1$  de la variable non réduite en faisant la transformation  $u = \frac{x - x_0}{s}$ . Si le paramètre de position est nul,  $m_{si} = s^i m_i(u)$ .

### 2.2. CUMULANTS DE LA DISTRIBUTION

Les moments centrés et les cumulants de la distribution exponentielle généralisée ne peuvent qu'être calculés d'après les formules générales en partant des moments non centrés.

La variance en cumulant d'ordre 2 est pour  $\delta > -1/2$ :

$$K_2 = s^2 [\Gamma(2\delta + 1) - (\Gamma(\delta + 1))^2]$$

Le cumulant d'ordre 3 est pour  $\delta > -1/3$ :

$$K_3 = s^3 [\Gamma(3\delta + 1) - 3\Gamma(2\delta + 1)\Gamma(\delta + 1) + 2(\Gamma(\delta + 1))^3]$$

Le cumulant d'ordre 4 est pour  $\delta > -1/4$ :

$$K_4 = s^4 [\Gamma(4\delta + 1) - 4\Gamma(3\delta + 1)\Gamma(\delta + 1) - 3(\Gamma(2\delta + 1))^2 + 12\Gamma(2\delta + 1)(\Gamma(\delta + 1))^2 - 6(\Gamma(\delta + 1))^4]$$

### 2.3. ASYMÉTRIE, APLATISSEMENT DE LA DISTRIBUTION (fig. 2, tabl. 1, p. 308)

Les coefficients d'asymétrie  $\gamma_1 = K_3/K_2^{3/2}$  et  $\gamma_2 = K_4/K_2^2$  d'aplatissement sont d'expressions compliquées. Le premier n'a plus de sens pour  $\delta \leq -1/3$  et le second pour  $\delta \leq -1/4$ .

$-1/4 < \delta < 0$	$\gamma_1$ positif, distribution (de $u$ ) étalée sur la droite $\gamma_2$ positif, distribution moins aplatie que la normale
$0 < \delta < 0,173$	$\gamma_1$ négatif $\gamma_2$ positif
$0,173 < \delta < 0,277\,456$	$\gamma_1$ négatif $\gamma_2$ négatif, distribution plus aplatie que la normale
$0,277\,5 < \delta < 0,443$	$\gamma_1$ positif, distribution étalée sur la droite $\gamma_2$ négatif
$0,443 < \delta$	$\gamma_1$ positif $\gamma_2$ négatif

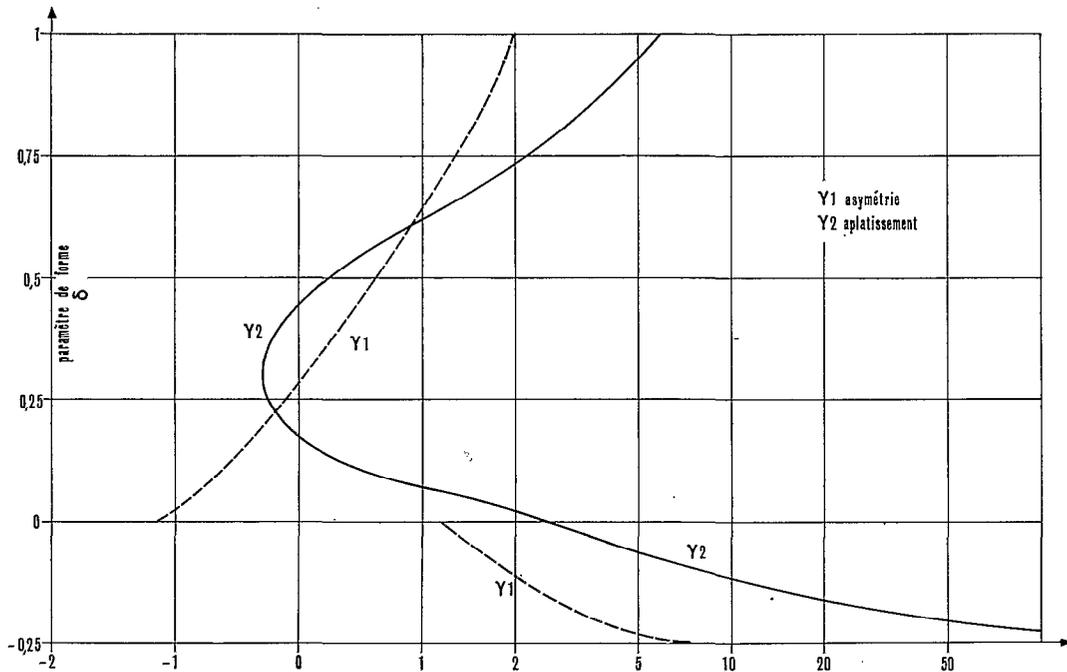


Fig. 2. — Asymétrie, aplatissement

2.4. VALEURS CENTRALES DE LA DISTRIBUTION

L'espérance mathématique (moyenne) est  $x_0 + s \Gamma(\delta + 1)$  pour  $\delta > -1$ .

La médiane est  $x_0 + s (\log 2)^\delta = x_0 + s (0,693\ 147)^\delta$ .

Le mode est  $x_0 + s (1 - \delta)^\delta$  pour  $\delta < 1$ , et sa fréquence est  $\frac{\sigma + 1}{2} - \sigma \frac{e^\delta}{e}$ .

2.4.1. Leurs positions relatives sont les suivantes (fig. 3, tabl. 1, p. 308) :

$-1 < \delta < 0$	mode < médiane < moyenne
$0 < \delta < 0,290\ 727$	moyenne < médiane < mode
$\delta = 0,290\ 727$	moyenne = médiane = $0,898\ 925 < \text{mode}$
$0,290\ 727 < \delta < 0,301\ 884$	médiane < moyenne < mode
$\delta = 0,301\ 884$	médiane < moyenne = mode = $0,897\ 189\ 5$
$0,301\ 884 < \delta < 0,306\ 853$	médiane < mode < moyenne
$\delta = 0,306\ 853$	médiane = mode = $0,893\ 628 < \text{moyenne}$
$0,306\ 853 < \delta$	mode < médiane < moyenne

2.4.2. La distribution exacte de la moyenne d'un échantillon de taille  $n$  tiré d'une population-mère répartie suivant une distribution exponentielle généralisée dont les valeurs numériques des paramètres sont exactement connues ne peut être écrite que grâce à une distribution en développement limité, en partant des cumulants de la distribution de la moyenne  $= \frac{1}{n^{i-1}}$  cumulants de la variate.

Cependant, si  $0 < \delta < 1/2$  et même lorsque  $n$  n'est pas très grand, on peut admettre que la moyenne de l'échantillon est répartie normalement autour de la valeur centrale  $x_0 + s \Gamma(\delta + 1)$  avec une variance :

$$\frac{s^2}{n} [\Gamma(2\delta + 1) - (\Gamma(\delta + 1))^2]$$

2.5. COMPLÉMENTS (fig. 3)

La moyenne harmonique de la variable réduite est  $\frac{1}{\Gamma(1-\delta)}$  qui n'a de sens que pour  $\delta < 1$ . L'inverse de la moyenne harmonique est  $\Gamma(1-\delta)$  dont la variance  $\Gamma(1-2\delta) - (\Gamma(1-\delta))^2$  n'a de sens que pour  $\delta < 1/2$ . Si le paramètre de position est nul, la valeur de la moyenne harmonique de la variable non réduite est  $\frac{s}{\Gamma(1-\delta)}$ .

La moyenne logarithmique de la variable réduite est  $-\delta c$  (avec  $c = 0,5772\dots$ ) et sa variance est de  $\frac{\delta^2 \pi^2}{6}$ . La moyenne géométrique de la variable réduite est  $e^{-\delta c} = (0,56142\dots)^\delta$ . Si le paramètre de position est nul, la valeur de la moyenne géométrique de la variable non réduite est  $se^{-\delta c}$ .

*Nota.* — Les tables A et B donnent les valeurs de  $\Gamma(\gamma + 1)$  pour  $\gamma$  compris entre  $-0,75$  et  $+2$ . La formule de récurrence du calcul de la fonction  $\Gamma$  est :

$$\Gamma(\gamma + n + 1) = (\gamma + n)(\gamma + n - 1) \dots (\gamma + 1) \Gamma(\gamma + 1)$$

Ainsi pour  $\delta = 1,12$  :

$$\begin{aligned} \Gamma(4\delta + 1) &= \Gamma(4,48 + 1) = \Gamma(1,48 + 3 + 1) \\ &= 4,48 \ 3,48 \ 2,48 \ \Gamma(1,48 + 1) \end{aligned}$$

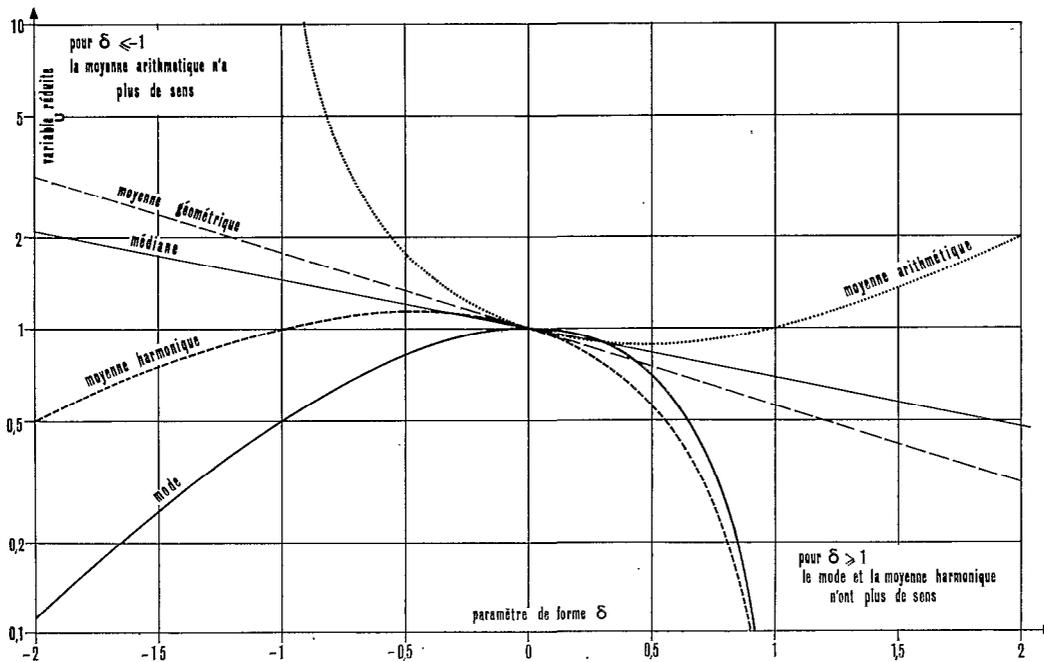


Fig. 3. — Valeurs centrales

### 3. ESTIMATION DES PARAMÈTRES PAR LES MOMENTS (OU CUMULANTS) D'APRÈS UN ÉCHANTILLON DE TAILLE $n$

#### 3.1. GÉNÉRALITÉS

3.1.1. Nous allons examiner différents cas de calculs des valeurs des paramètres par la méthode des moments ou des cumulants, sans épuiser tous les cas possibles. Nous rechercherons dans certains de ces cas l'efficacité globale de cette méthode par rapport à celle du maximum de vraisemblance.

Cette efficacité se mesure par le rapport des variances généralisées asymptotiques (pour  $n$  tendant vers l'infini) : au numérateur la variance généralisée déduite de la méthode du maximum de vraisemblance (valeur du déterminant de la matrice des variances et covariances, calculée par cette méthode) au dénominateur la variance généralisée déduite de la méthode des moments (valeur du déterminant de la matrice des variances et covariances des paramètres déduites de cette méthode).

Ce calcul ne sera pleinement développé que dans le cas le plus compliqué, où tous les paramètres sont à calculer.

3.1.2. Nous n'avons pas recherché si les déterminations des paramètres par la méthode des moments étaient biaisées. Elles le sont très probablement. Le principe de cette recherche de biais est simple : nous l'emploierons dans la méthode du maximum de vraisemblance. Nous avons pensé que l'application de cette recherche dans le cas présent aurait été trop coûteuse en temps d'ordinateur étant données les fortes variances des estimations des paramètres.

3.1.3. En utilisant la méthode des moments, nous faisons l'hypothèse de base suivante :

Les valeurs observées correspondent à des variables aléatoires, indépendantes, connues sans erreurs d'observation. L'échantillon observé est représentatif d'une population-mère distribuée suivant une loi exponentielle généralisée (dont il est possible que l'on connaisse a priori les valeurs — ou seulement les signes — de certains paramètres).

Si les variables observées ne sont pas strictement indépendantes, on suppose que la taille de l'échantillon est suffisamment grande — suivant le degré de dépendance — pour qu'il reste représentatif de la population-mère.

Si les variables observées sont entachées d'erreurs d'observation, on suppose que ces erreurs sont aléatoires, indépendantes entre elles, indépendantes des valeurs numériques des observations distribuées, avec une moyenne nulle, un moment centré d'ordre 3 nul, une variance constante (homoscedasticité), petite par rapport à la variance de l'échantillon.

Soient  $x'_i$  les valeurs que l'on aurait dû observer sans erreur et  $x_i$  les valeurs observées avec les erreurs  $\varepsilon_i$ .

— La moyenne (moment et cumulant d'ordre 1) s'écrit :

$$\frac{1}{n} \sum x_i = \frac{1}{n} \sum x'_i + \frac{1}{n} \sum \varepsilon_i$$

La moyenne calculée sur l'échantillon est connue sans erreur si l'hypothèse  $\frac{1}{n} \sum \varepsilon_i = 0$  est strictement respectée dans l'échantillon.

— Le moment non centré d'ordre 2 s'écrit :

$$\frac{1}{n} \sum x_i^2 = \frac{1}{n} \sum (x'_i + \varepsilon_i)^2 = \frac{1}{n} \sum x_i'^2 + \sigma_\varepsilon^2$$

Le moment non centré d'ordre 2, calculé sur les valeurs observées « erronées » est entaché d'une erreur  $\sigma_\varepsilon^2$  (variance des erreurs d'observation) si l'hypothèse  $\sum \varepsilon_i x'_i = 0$  est strictement respectée dans l'échantillon.

— Le cumulant d'ordre 2 (variance) s'écrit :

$$\frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x'_i + \varepsilon_i - \bar{x}')^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x'_i - \bar{x}')^2 + \frac{n}{n-1} \sigma_\varepsilon^2$$

Le cumulatif d'ordre 2, calculé sur les valeurs observées « erronées » est entaché d'une erreur  $\frac{n}{n-1} \sigma_\varepsilon^2$  si les hypothèses  $\Sigma \varepsilon_i = 0$  et  $\Sigma \varepsilon_i x'_i = 0$  sont strictement respectées dans l'échantillon.

— Le moment non centré d'ordre 3 s'écrit :

$$\frac{1}{n} \sum x_i^3 = \frac{1}{n} \sum (x'_i + \varepsilon_i)^3 = \frac{1}{n} \sum x_i'^3 + 3 \bar{x}' \sigma_\varepsilon^2$$

Le moment non centré d'ordre 3, calculé sur les valeurs observées « erronées » est entaché d'une erreur  $3 \bar{x}' \sigma_\varepsilon^2$  si les hypothèses  $\Sigma x_i'^2 \varepsilon_i = 0$  et  $\Sigma \varepsilon_i^3 = 0$  sont strictement respectées dans l'échantillon.

— Le cumulatif d'ordre 3 s'écrit :

$$\frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum (x_i - \bar{x})^3 = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum (x'_i + \varepsilon_i - \bar{x}')^3 = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum (x'_i - \bar{x}')^3$$

Le cumulatif d'ordre 3 est connu sans erreur si les hypothèses  $\Sigma \varepsilon_i = 0$ ,  $\Sigma \varepsilon_i^3 = 0$ ,  $\Sigma \varepsilon_i (x'_i - \bar{x}')^2 = 0$  sont strictement respectées dans l'échantillon.

Si les valeurs observées sont entachées d'erreurs systématiques, ces erreurs se répercuteront sur le paramètre de position et/ou le paramètre d'échelle.

### 3.2. TROIS PARAMÈTRES CALCULÉS

Il faut choisir a priori le signe  $s_i$  du paramètre d'échelle  $s$ , suivant que l'on désire trouver une borne (paramètre de position  $x_0$ ) inférieure ( $s > 0$ ,  $s_i = +1$ ) ou supérieure ( $s < 0$ ,  $s_i = -1$ ) de l'intervalle de définition de la variate.

Le calcul conduit à une valeur du paramètre de forme  $\delta$  supérieure à  $-1/3$ .

3.2.1. En utilisant les trois premiers moments de l'échantillon  $x_1 \dots x_i \dots x_n$  :

$$S_1 = \frac{1}{n} \sum x_i \quad S_2 = \frac{1}{n} \sum x_i^2 \quad S_3 = \frac{1}{n} \sum x_i^3$$

nous obtenons le système d'équations provenant de l'écriture des cumulants :

$$s \Gamma(\delta + 1) = S_1 - x_0$$

$$s^2 \left[ \Gamma(2\delta + 1) - (\Gamma(\delta + 1))^2 \right] = \frac{n}{n-1} (S_2 - S_1^2) = c_2$$

$$s^3 \left[ \Gamma(3\delta + 1) - 3 \Gamma(2\delta + 1) \Gamma(\delta + 1) + 2 (\Gamma(\delta + 1))^3 \right] = \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} (S_3 - 3 S_2 S_1 + 2 S_1^3) = c_3$$

On élimine d'abord le paramètre d'échelle en passant par le coefficient d'asymétrie  $\gamma_1$  :

$$\frac{\sqrt{n(n-1)} S_3 - 3 S_2 S_1 + 2 S_1^3}{n-2} \frac{S_1}{(S_2 - S_1^2)^{3/2}} s_i = \gamma_1 = \frac{\Gamma(3\delta + 1) - 3 \Gamma(2\delta + 1) \Gamma(\delta + 1) + 2 (\Gamma(\delta + 1))^3}{[\Gamma(2\delta + 1) - (\Gamma(\delta + 1))^2]^{3/2}} = \frac{K_3}{K_2^{3/2}}$$

équation qui permet de déterminer par approximations successives ou en utilisant le tableau A qui donne  $\gamma_1$  en fonction de  $\delta$  pour  $\delta$  compris entre  $-0,25$  et  $1,00$ .

$s$  est calculé par :

$$s = \frac{s_i \sqrt{\frac{n}{n-1}} \sqrt{S_2 - S_1^2}}{\sqrt{\Gamma(2\delta + 1) - (\Gamma(\delta + 1))^2}}$$

Les valeurs de  $K_2 = \sqrt{\Gamma(2\delta + 1) - (\Gamma(\delta + 1))^2}$  sont données dans le tableau A.  $x_0$  est calculé par :

$$x_0 = S_1 - s \Gamma(\delta + 1)$$

Les valeurs de  $K_1 = \Gamma(\delta + 1)$  sont données dans le tableau A.

Un exemple (Annexe 1) montre la suite des calculs.

### 3.2.2. Efficacité (cf. 3.1.)

En posant  $c_1 = S_1$

$$c_2 = S_2 - S_1^2$$

$$c_3 = S_3 - 3S_2S_1 + 2S_1^3$$

$c_1, c_2$  et  $c_3$  étant les trois premiers cumulants calculés d'après un échantillon de grande taille, nous réécrivons les équations du paragraphe précédent sous la forme :

$$(1) \quad -c_1 + x_0 + s \Gamma(\delta + 1) = 0$$

$$(2) \quad -c_2 + s^2 [\Gamma(2\delta + 1) - (\Gamma(\delta + 1))^2] = 0$$

$$(3) \quad -c_3 [\Gamma(2\delta + 1) - (\Gamma(\delta + 1))^2]^{3/2} + s_1 c_2^{3/2} [\Gamma(3\delta + 1) - 3\Gamma(2\delta + 1)\Gamma(\delta + 1) + 2(\Gamma(\delta + 1))^3] = 0$$

en posant, pour simplifier l'écriture :

$$\Gamma_1 = \Gamma(\delta + 1) \quad \text{de dérivée} \quad \Gamma_1\psi_1 \quad \text{avec} \quad \psi_1 = \psi(\delta + 1)$$

$$\Gamma_2 = \Gamma(2\delta + 1) \quad \Gamma_2\psi_2 \quad \psi_2 = \psi(2\delta + 1)$$

$$\Gamma_3 = \Gamma(3\delta + 1) \quad \Gamma_3\psi_3 \quad \psi_3 = \psi(3\delta + 1)$$

la fonction  $\psi$  étant la dérivée logarithmique de la fonction  $\Gamma$ .

En dérivant chacune des équations (1) (2) et (3) par rapport à  $c_1, c_2$  et  $c_3$  :

— dérivée de (1) par rapport à  $c_1$  :

$$\frac{\partial x_0}{\partial c_1} + \Gamma_1 \frac{\partial s}{\partial c_1} + s\Gamma_1\psi_1 \frac{\partial \delta}{\partial c_1} = 1$$

— dérivée de (1) par rapport à  $c_2$  :

$$\frac{\partial x_0}{\partial c_2} + \Gamma_1 \frac{\partial s}{\partial c_2} + s\Gamma_1\psi_1 \frac{\partial \delta}{\partial c_2} = 0$$

— dérivée de (1) par rapport à  $c_3$  :

$$\frac{\partial x_0}{\partial c_3} + \Gamma_1 \frac{\partial s}{\partial c_3} + s\Gamma_1\psi_1 \frac{\partial \delta}{\partial c_3} = 0$$

— dérivée de (2) par rapport à  $c_1$  :

$$2s \left[ \Gamma_2 - \Gamma_1^2 \right] \frac{\partial s}{\partial c_1} + s^2 \left[ 2\Gamma_2\psi_2 - 2\Gamma_1^2\psi_1 \right] \frac{\partial \delta}{\partial c_1} = 0$$

— dérivée de (2) par rapport à  $c_2$  :

$$2s \left[ \Gamma_2 - \Gamma_1^2 \right] \frac{\partial s}{\partial c_2} + s^2 \left[ 2\Gamma_2\psi_2 - 2\Gamma_1^2\psi_1 \right] \frac{\partial \delta}{\partial c_2} = 1$$

— dérivée de (2) par rapport à  $c_3$  :

$$2s \left[ \Gamma_2 - \Gamma_1^2 \right] \frac{\partial s}{\partial c_3} + s^2 \left[ 2\Gamma_2\psi_2 - 2\Gamma_1^2\psi_1 \right] \frac{\partial \delta}{\partial c_3} = 0$$

— dérivée de (3) par rapport à  $c_1$  :

$$\frac{\partial \delta}{\partial c_1} \left( -c_3 \frac{3}{2} \left[ \Gamma_2 - \Gamma_1^2 \right]^{1/2} \left[ 2\Gamma_2 \psi_2 - 2\Gamma_1^2 \psi_1 \right] + s_1 c_2^{3/2} \left[ 3\Gamma_3 \psi_3 - 3\Gamma_2 \Gamma_1 (2\psi_2 + \psi_1) + 6\Gamma_1^3 \psi_1 \right] \right) = 0$$

— dérivée de (3) par rapport à  $c_2$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta}{\partial c_2} \left( -c_3 \frac{3}{2} \left[ \Gamma_2 - \Gamma_1^2 \right]^{1/2} \left[ 2\Gamma_2 \psi_2 - 2\Gamma_1^2 \psi_1 \right] + s_1 c_2^{3/2} \left[ 3\Gamma_3 \psi_3 - 3\Gamma_2 \Gamma_1 (2\psi_2 + \psi_1) + 6\Gamma_1^3 \psi_1 \right] \right) = \\ = -s_1 \frac{3}{2} c_2^{1/2} (\Gamma_3 - 3\Gamma_2 \Gamma_1 + 2\Gamma_1^3) \end{aligned}$$

— dérivée de (3) par rapport à  $c_3$  :

$$\frac{\partial \delta}{\partial c_3} \left( -c_3 \frac{3}{2} \left[ \Gamma_2 - \Gamma_1^2 \right]^{1/2} \left[ 2\Gamma_2 \psi_2 - 2\Gamma_1^2 \psi_1 \right] + s_1 c_2^{3/2} \left[ 3\Gamma_3 \psi_3 - 3\Gamma_2 \Gamma_1 (2\psi_2 + \psi_1) + 6\Gamma_1^3 \psi_1 \right] \right) = (\Gamma_2 - \Gamma_1^2)^{3/2}$$

Le système d'équations (2) et (3) nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} c_2 &= s^2 (\Gamma_2 - \Gamma_1^2) \\ c_3 &= s^3 (\Gamma_3 - 3\Gamma_2 \Gamma_1 + 2\Gamma_1^3) \end{aligned}$$

d'où les solutions du système des 9 équations aux dérivées partielles après avoir posé :

$$A = \Gamma_3 \psi_3 (\Gamma_2 - \Gamma_1^2) + \Gamma_2 \psi_2 (\Gamma_2 \Gamma_1 - \Gamma_3) + \Gamma_1 \psi_1 (\Gamma_3 \Gamma_1 - \Gamma_2^2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta}{\partial c_1} = 0 & \quad \frac{\partial \delta}{\partial c_2} = -\frac{1}{2s^2} (\Gamma_3 - 3\Gamma_2 \Gamma_1 + 2\Gamma_1^3) / A & \quad \frac{\partial \delta}{\partial c_3} = \frac{1}{3s^3} (\Gamma_2 - \Gamma_1^2) / A \\ \frac{\partial s}{\partial c_1} = 0 & \quad \frac{\partial s}{\partial c_2} = \frac{1}{2s} \left[ \Gamma_3 \psi_3 - 2\Gamma_2 \psi_2 \Gamma_1 - \Gamma_1 \psi_1 (\Gamma_2 - 2\Gamma_1^2) \right] / A & \quad \frac{\partial s}{\partial c_3} = -\frac{1}{3s^2} (\Gamma_2 \psi_2 - \Gamma_1^2 \psi_1) / A \\ \frac{\partial x_0}{\partial c_1} = 1 & \quad \frac{\partial x_0}{\partial c_2} = -\frac{\Gamma_1}{2s} \left[ \Gamma_3 \psi_3 - 2\Gamma_2 \psi_2 \Gamma_1 + \psi_1 (2\Gamma_2 \Gamma_1 - \Gamma_3) \right] / A & \quad \frac{\partial x_0}{\partial c_3} = \frac{\Gamma_1}{3s^2} \Gamma_2 (\psi_2 - \psi_1) / A \end{aligned}$$

Les variances et covariances, asymptotiques pour  $n$  tendant vers l'infini, se calculent par les expressions générales :

$$\begin{aligned} \text{var}(\delta) &= \left( \frac{\partial \delta}{\partial c_1} \right)^2 \text{var}(c_1) + \left( \frac{\partial \delta}{\partial c_2} \right)^2 \text{var}(c_2) + \left( \frac{\partial \delta}{\partial c_3} \right)^2 \text{var}(c_3) + 2 \frac{\partial \delta}{\partial c_1} \frac{\partial \delta}{\partial c_2} \text{covar}(c_1, c_2) \\ &+ 2 \frac{\partial \delta}{\partial c_2} \frac{\partial \delta}{\partial c_3} \text{covar}(c_2, c_3) + 2 \frac{\partial \delta}{\partial c_1} \frac{\partial \delta}{\partial c_3} \text{covar}(c_1, c_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{covar}(s, \delta) &= \frac{\partial s}{\partial c_1} \frac{\partial \delta}{\partial c_1} \text{var}(c_1) + \frac{\partial s}{\partial c_2} \frac{\partial \delta}{\partial c_2} \text{var}(c_2) + \frac{\partial s}{\partial c_3} \frac{\partial \delta}{\partial c_3} \text{var}(c_3) + \left( \frac{\partial s}{\partial c_1} \frac{\partial \delta}{\partial c_2} + \frac{\partial s}{\partial c_2} \frac{\partial \delta}{\partial c_1} \right) \text{covar}(c_1, c_2) \\ &+ \left( \frac{\partial s}{\partial c_2} \frac{\partial \delta}{\partial c_3} + \frac{\partial s}{\partial c_3} \frac{\partial \delta}{\partial c_2} \right) \text{covar}(c_2, c_3) + \left( \frac{\partial s}{\partial c_1} \frac{\partial \delta}{\partial c_3} + \frac{\partial s}{\partial c_3} \frac{\partial \delta}{\partial c_1} \right) \text{covar}(c_1, c_3) \end{aligned}$$

$K_1, K_2 \dots K_i$  étant les cumulants de la distribution exponentielle généralisée réduite ( $x_0 = 0, s = 1$ ) la valeur de  $c_i$  est  $s^i K_i$  ( $i \neq 1$ ) et le déterminant de la matrice des variances et covariances des paramètres s'écrit :

$$\begin{aligned} D &= \frac{s^4}{36 A^2} \left[ \text{var}(K_1) \text{var}(K_2) \text{var}(K_3) - \text{var}(K_1) [\text{covar}(K_2, K_3)]^2 - \text{var}(K_2) [\text{covar}(K_1, K_3)]^2 \right. \\ &\quad \left. - \text{var}(K_3) [\text{covar}(K_1, K_2)]^2 + 2 \text{covar}(K_1, K_2) \text{covar}(K_2, K_3) \text{covar}(K_1, K_3) \right] \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \text{var} (K_1) &= K_2 / n & \text{covar} (K_1, K_2) &= K_3 / n \\ \text{var} (K_2) &= (K_4 + 2 K_2^2) / n & \text{covar} (K_1, K_3) &= K_4 / n \\ \text{var} (K_3) &= (K_6 + 9 K_4 K_2 + 9 K_3^2 + 6 K_2^3) / n & \text{covar} (K_2, K_3) &= (K_5 + 6 K_3 K_2) / n \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} K_2 &= \Gamma_2 - \Gamma_1^2 \\ K_3 &= \Gamma_3 - 3 \Gamma_2 \Gamma_1 + 2 \Gamma_1^3 \\ K_4 &= \Gamma_4 - 4 \Gamma_3 \Gamma_1 - 3 \Gamma_2^2 + 12 \Gamma_2 \Gamma_1^2 - 6 \Gamma_1^4 \\ K_5 &= \Gamma_5 - 5 \Gamma_4 \Gamma_1 - 10 \Gamma_3 \Gamma_2 + 20 \Gamma_3 \Gamma_1^2 + 30 \Gamma_2^2 \Gamma_1 - 60 \Gamma_2 \Gamma_1^3 + 24 \Gamma_1^5 \\ K_6 &= \Gamma_6 - 6 \Gamma_5 \Gamma_1 - 15 \Gamma_4 \Gamma_2 + 30 \Gamma_4 \Gamma_1^2 - 10 \Gamma_3^2 + 120 \Gamma_3 \Gamma_2 \Gamma_1 - 120 \Gamma_3 \Gamma_1^3 + 30 \Gamma_2^3 \\ &\quad - 270 \Gamma_2^2 \Gamma_1^2 + 360 \Gamma_2 \Gamma_1^4 - 120 \Gamma_1^6 \end{aligned}$$

La variance généralisée (asymptotique) du système des trois paramètres calculés par la méthode du maximum de vraisemblance est (4.1.) :

$$\Delta = \frac{s^4 \delta^6}{n^3} \left/ \left[ (1 - \delta)^2 \psi'(1) [\Gamma(1 - 2\delta) - (\Gamma(1 - \delta))^2] - [\Gamma(1 - \delta) (\psi(2) - \delta\psi(1)) - \psi(2 - \delta)]^2 \right] \right.$$

Sur la figure 4 nous avons représenté l'efficacité en taille relative  $\sqrt[3]{\Delta/D}$  qui représente le rapport des tailles d'échantillons nécessaires pour arriver à la même variance généralisée (asymptotique) : au numérateur taille dans le cas de détermination par le maximum de vraisemblance, au dénominateur taille dans le cas de détermination par la méthode des moments.

### 3.2.3. Conclusion

Au point de vue efficacité, la méthode des moments pour déterminer les trois paramètres de forme, d'échelle et de position est toujours médiocre. Elle est inutilisable pour les petites valeurs de  $\delta$  car elle ne peut aboutir qu'à une valeur de  $\delta$  supérieure à  $-1/3$ . Elle peut être dangereuse pour  $\delta > 1/2$  car on risque de trouver une valeur  $x_0$  du paramètre de position telle qu'elle soit supérieure à la plus petite valeur observée (paramètre d'échelle choisi positif) ou inférieure à la plus grande valeur observée (paramètre d'échelle choisi négatif).

L'exemple donné en annexe montre que, pour des échantillons de petites tailles, il est inutile d'interpoler entre les valeurs de  $\delta$  de la table A, suivant les valeurs de  $\gamma_1$  : la représentation de la distribution varie peu lorsque  $\delta$  varie, compte tenu du fait que  $s$  et  $x_0$  ne sont déterminés qu'après  $\delta$ .

## 3.3. PARAMÈTRE DE POSITION CONNU A L'AVANCE

Si la valeur  $x_0$  du paramètre de position est connue, ou choisie, a priori, le signe du paramètre d'échelle est imposé (positif  $x_0$  est une borne inférieure, négatif  $x_0$  est une borne supérieure).

Le calcul conduit à une valeur du paramètre de forme  $\delta$  supérieure à  $-1/2$ .

3.3.1. Il est plus simple de passer par les rapports des moments non centrés pour le calcul des paramètres :

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{n} \sum (x_i - x_0) = s\Gamma(\delta + 1) = S_1 \\ R_2 &= \frac{\sum (x_i - x_0)^2}{\sum (x_i - x_0)} = s \frac{\Gamma(2\delta + 1)}{\Gamma(\delta + 1)} = \frac{S_2}{S_1} \end{aligned}$$

d'où l'équation déterminant  $\delta$  par approximations successives ou en utilisant le tableau A qui donne  $R_2/R_1$  en fonction de  $\delta$  :

$$\frac{\Gamma(2\delta + 1)}{(\Gamma(\delta + 1))^2} = \frac{R_2}{R_1}$$

$s$  est calculé par (cf. tabl. A) :

$$s = R_1 / \Gamma(\delta + 1)$$

### 3.3.2. Efficacité

Nous réécrivons les équations du paragraphe précédent sous la forme :

$$(1) \quad s \Gamma(\delta + 1) - s_1 = 0$$

$$(2) \quad s_2 (\Gamma(\delta + 1))^2 - s_1^2 \Gamma(2\delta + 1) = 0$$

En dérivant chacune de ces équations par rapport à  $S_1$  et  $S_2$  on obtient le système d'équations donnant  $\frac{\partial \delta}{\partial S_1}, \frac{\partial \delta}{\partial S_2}, \frac{\partial s}{\partial S_1}, \frac{\partial s}{\partial S_2}$  d'où les variances et covariances des paramètres (cf. 3.2.2.) et le déterminant de la matrice de ces variances et covariances qui représente la variance généralisée (asymptotique) du système des deux paramètres calculés par la méthode des moments :

$$D = \frac{s^2}{4n^2 \Gamma_1^2 \Gamma_2^2 (\psi_1 - \psi_2)} \left[ \Gamma_4(\Gamma_2 - \Gamma_1^2) - \Gamma_3^2 - \Gamma_2^3 + 2\Gamma_3 \Gamma_2 \Gamma_1 \right]$$

où  $\Gamma_i = \Gamma(i\delta + 1)$ , et  $\psi_i = \psi(i\delta + 1)$ .

La variance généralisée (asymptotique) du système des deux paramètres calculés par la méthode du maximum de vraisemblance est (4.1.) :

$$\Delta = \frac{s^2 \delta^4}{n^2} \psi'(1)$$

Sur la figure 4 nous avons représenté en fonction de  $\delta$  l'efficacité en taille relative  $\sqrt{\Delta/D}$  qui représente le rapport des tailles d'échantillons nécessaires pour obtenir la même variance généralisée (asymptotique) : au numérateur taille dans le cas de détermination par le maximum de vraisemblance, au dénominateur taille dans le cas de détermination par la méthode des moments.

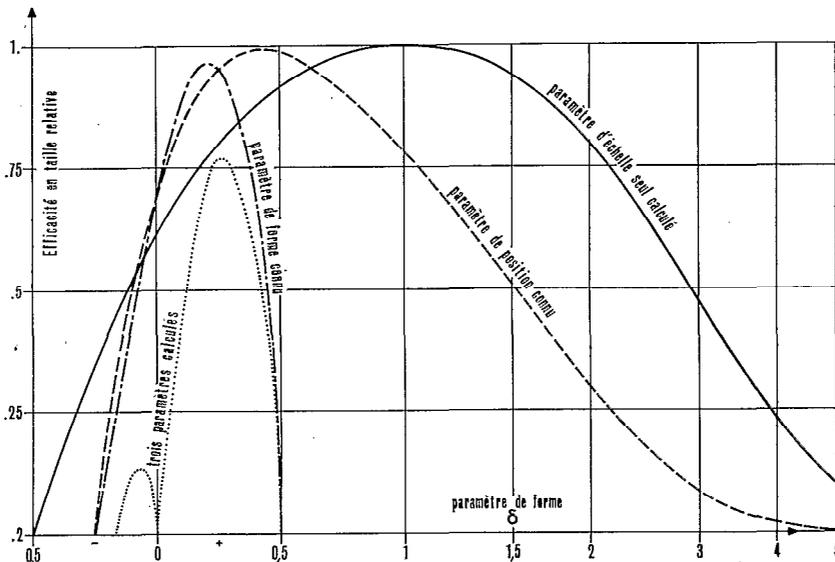


Fig. 4. — Efficacité par la méthode des moments

## 3.3.3. Conclusion

Au point de vue efficacité, la méthode des moments pour déterminer les paramètres d'échelle et de forme (le paramètre de position étant connu) est acceptable lorsque la valeur du paramètre de forme de la population mère est de l'ordre de 1/2, médiocre si cette valeur est inférieure à 0,05 ou supérieure à 1. Elle est inutilisable si cette valeur est inférieure à -1/2 car elle ne peut conduire qu'à des valeurs de  $\delta$  supérieures à -1/2.

Pour des échantillons de petites tailles, il est inutile d'interpoler entre les valeurs de  $\delta$  de la Table A, suivant les valeurs de  $R_2/R_1$  : la représentation de la distribution varie peu lorsque  $\delta$  varie, compte tenu du fait que  $s$  n'est déterminé qu'après  $\delta$ .

## 3.3.4. Autre méthode

On peut faire la transformation logarithmique :

$$y = \log |x - x_0|$$

et la variable  $y$  est répartie suivant une distribution de Gumbel de paramètre de position  $y_0 = \log |s|$  et de paramètre d'échelle  $-1/\delta$ .

En posant :

$$S_1 = \sum \log |x_i - x_0|$$

$$S_2 = \sum (\log |x_i - x_0|)^2$$

il vient :

$$\delta^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{\pi}\right)^2 \frac{1}{n-1} \left[ S_1 - \frac{1}{n} (S_1)^2 \right] \quad \left( \frac{\sqrt{6}}{\pi} = 0,779\ 696\ 8 \right)$$

et le signe de  $\delta$  ayant été choisi :

$$\log |s| = \frac{1}{n} S_1 + \delta c \quad (c = 0,577\ 215\ 7)$$

le signe de  $s$  étant celui de  $(x_i - x_0)$ .

Cette méthode est utilisable même si  $\delta \leq -1/2$ .

## 3.4. PARAMÈTRE DE FORME CONNU A L'AVANCE

Si la valeur  $\delta$  du paramètre de forme est connue ou choisie a priori, il faut choisir le signe  $s_1$  du paramètre d'échelle, suivant que l'on désire trouver une borne (paramètre de position  $x_0$ ) inférieure ( $s > 0$ ,  $s_1 = +1$ ) ou supérieure ( $s < 0$ ,  $s_1 = -1$ ) de l'intervalle de définition de la variate.

Le calcul ne peut être effectué que si la valeur de  $\delta$  est supérieure à -1/2.

3.4.1. En utilisant les deux premiers moments de l'échantillon :

$$S_1 = \frac{1}{n} \sum x_i \quad S_2 = \frac{1}{n} \sum x_i^2$$

nous obtenons le système d'équations provenant de l'écriture des cumulants :

$$s \Gamma(\delta + 1) = S_1 - x_0$$

$$s \sqrt{\Gamma(2\delta + 1) - (\Gamma(\delta + 1))^2} = \sqrt{\frac{n}{n-1}} s_1 \sqrt{S_2 - S_1^2} = s_1 \sqrt{c_2}$$

Cette dernière équation permet de déterminer  $s$  en utilisant, si on veut, le tableau A qui donne :

$$\sqrt{K_2} = \sqrt{\Gamma(2\delta + 1) - (\Gamma(\delta + 1))^2}$$

en fonction de  $\delta$ .

$x_0$  est ensuite calculé par :

$$x_0 = S_1 - s \Gamma(\delta + 1) \text{ (cf. tabl. A).}$$

### 3.4.2. Efficacité

Nous réécrivons les équations du paragraphe précédent sous la forme :

$$(1) \quad s \Gamma(\delta + 1) + x_0 - S_1 = 0$$

$$(2) \quad s \sqrt{K_2} - s_1 \sqrt{c_2} = 0$$

En dérivant chacune de ces équations par rapport à  $S_1$  et à  $C_2$ , on obtient le système d'équations donnant  $\frac{\partial x_0}{\partial S_1}$ ,  $\frac{\partial x_0}{\partial c_2}$ ,  $\frac{\partial s}{\partial S_1}$ ,  $\frac{\partial s}{\partial c_2}$ , d'où les variances et covariances des paramètres (3.2.2.) et le déterminant de la matrice de ces variances et covariances qui représente la variance généralisée (asymptotique) du système des deux paramètres calculés par la méthode des moments.

$$D = \frac{s_4}{4n^2 (\Gamma_2 - \Gamma_1^2)^2} \left[ \Gamma_4(\Gamma_2 - \Gamma_1^2) - \Gamma_3^2 - \Gamma_2^3 + 2\Gamma_3\Gamma_2\Gamma_1 \right]$$

où  $\Gamma_1 = \Gamma(\delta + 1)$ .

La variance généralisée (asymptotique) du système des deux paramètres calculés par la méthode du maximum de vraisemblance est (4.1.) :

$$\Delta = \frac{s^4 \delta^4}{n^2 (1 - \delta)^2} / \left[ \Gamma(1 - 2\delta) - (\Gamma(1 - \delta))^2 \right]$$

Sur la figure 4, nous avons représenté en fonction de  $\delta$  l'efficacité en taille relative  $\sqrt{\Delta/D}$  qui représente le rapport des tailles d'échantillons nécessaires pour obtenir la même variance généralisée (asymptotique) : au numérateur taille dans le cas de détermination par le maximum de vraisemblance, au dénominateur taille dans le cas de détermination par la méthode des moments.

### 3.4.3. Conclusion

Au point de vue efficacité, la méthode des moments pour déterminer les paramètres de position et d'échelle (le paramètre de forme étant connu) est acceptable lorsque la valeur du paramètre de forme est de l'ordre de 1/5, médiocre si cette valeur est inférieure à 0,05 ou supérieure à 0,35. Elle est inutilisable si  $\delta$  est inférieur à  $-1/2$ . Ajoutons que lorsque  $\delta$  est supérieur à 1/2, on court un risque croissant avec la valeur de  $\delta$ , de calculer une valeur de la borne  $x_0$  comprise entre la plus petite et la plus grande valeur observée, quel que soit le signe de  $s$ .

Pour des échantillons de petites tailles, il est inutile d'interpoler dans la table A, et il vaut mieux arrondir la valeur de  $\delta$ , car la représentation de la distribution varie peu lorsque  $\delta$  varie, compte tenu du fait que  $s$  et  $x_0$  sont calculés après ce choix de  $\delta$ .

## 3.5. PARAMÈTRES DE POSITION ET DE FORME CONNUS A L'AVANCE

3.5.1. Le signe du paramètre d'échelle est alors imposé : et le calcul de sa valeur n'est possible que pour  $\delta > -1$ .

En utilisant le premier moment de l'échantillon :

$$S_1 = \frac{1}{n} \sum x_i$$

on calcule :

$$s = \frac{(S_1 - x_0)}{\Gamma(\delta + 1)}$$

$\Gamma(\delta + 1)$  étant donné dans la table A en fonction de  $\delta$ .

La dérivée de  $s$  par rapport à  $S_1$  est :

$$\frac{\partial s}{\partial S_1} = \frac{1}{\Gamma(\delta + 1)}$$

et la variance du paramètre d'échelle est :

$$D = \left( \frac{\partial s}{\partial S_1} \right)^2 \text{var } S_1 = \frac{s^2}{n (\Gamma(\delta + 1))^2} \left[ \Gamma(2\delta + 1) - (\Gamma(\delta + 1))^2 \right]$$

La variance du paramètre d'échelle calculé par la méthode du maximum de vraisemblance est (4.1.) :

$$\Delta = \frac{s^2 \delta^2}{n}$$

Sur la figure 4 nous avons représenté en fonction de  $\delta$ , l'efficacité  $\Delta/D$  qui représente le rapport des tailles d'échantillons nécessaire pour obtenir la même variance du paramètre : au numérateur taille dans le cas de détermination par le maximum de vraisemblance, au dénominateur taille dans le cas de détermination par la méthode des moments.

### 3.5.2. Autre méthode

On peut faire la transformation logarithmique  $y = \log |x - x_0|$  et la variable  $y$  est répartie suivant une distribution de Gumbel de paramètre d'échelle connu  $-1/\delta$  et de paramètre de position  $y_0 = \log |s|$ .

En posant  $S'_1 = \Sigma \log |x_i - x_0|$ , il vient :

$$\log |s| = \frac{1}{n} S'_1 + \delta c \quad (c = 0,577 \ 215 \ 7)$$

le signe de  $s$  étant celui de  $x_i - x_0$ .

Cette méthode est utilisable même si  $\delta \leq -1$ .

## 3.6. RÉPARTITIONS TRONQUÉES AVEC TRONCATURES

Nous nous plaçons dans le cas de lois en « J », paramètre de forme  $\delta > 1$ , paramètre de position  $x_0$  connu, paramètre d'échelle  $s > 0$  (ou négatif).

$N$  est le nombre total d'observations égales à ou différentes de  $x_0$ . Nous posons :

$$S_1 = \Sigma (x_i - x_0) \quad S_2 = \Sigma (x_i - x_0)^2 \quad S_3 = \Sigma (x_i - x_0)^3$$

Deux cas de troncatures peuvent être envisagés :

— Premier cas : il est possible d'utiliser toutes les observations disponibles sans faire de troncature à un seuil supérieur à celui qui est imposé par la sensibilité de l'appareil de mesure ou de la méthode (par exemple : étude des précipitations par averses à partir de pluviogrammes). Si ce seuil  $x_h$  est suffisamment bas, les erreurs commises sur  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$ , en remplaçant par  $x_0$  les valeurs  $x_i$ , inférieures à  $x_h$ , qui auraient dû être observées, sont négligeables.

— Deuxième cas : on sait (cas fréquent dans l'étude des précipitations journalières) qu'en dessous d'une certaine valeur  $x_h$  les observations ne sont pas utilisables. Il faut alors ajouter à

$$S'_1 = \sum_{x_i \geq x_h} (x_i - x_0) \quad S'_2 = \sum_{x_i \geq x_h} (x_i - x_0)^2 \quad S'_3 = \sum_{x_i \geq x_h} (x_i - x_0)^3$$

des termes correctifs qui permettent une approximation convenable de  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$ . Nous n'avons étudié ces termes correctifs que pour l'étude des précipitations journalières (Annexe 2).

### 3.6.1. En partant de :

$$R_2 = S_2/S_1 = s \Gamma(2\delta + 1) / \Gamma(\delta + 1)$$

$$R_3 = S_3/S_2 = s \Gamma(3\delta + 1) / \Gamma(2\delta + 1)$$

on obtient :

$$\Gamma(3\delta + 1) \Gamma(\delta + 1) / (\Gamma(2\delta + 1))^2 = R_3/R_2$$

équation qui ne contient que  $\delta$  et qui peut se résoudre par approximations successives ou à l'aide du tableau B.

Le paramètre d'échelle  $s$  est calculé par :

$$s = R_2 \Gamma(\delta + 1) / \Gamma(2\delta + 1)$$

Le nombre « théorique » d'observations  $x_1 \neq x_0$  qui auraient dû être comptées s'il n'y avait pas eu troncature est :

$$M = \frac{S_1}{s \Gamma(\delta + 1)}$$

d'où la valeur du paramètre de tronquage  $F_0$  :

$$F_0 = (N - M) / N$$

$N$  étant l'effectif total de l'échantillon, valeurs inférieures à  $x_h$  ou égales à  $x_0$  comprises.

Un exemple (Annexe 2) montre la suite des calculs.

3.6.2. Nous n'avons pas étudié l'efficacité de la méthode des moments appliqués aux répartitions tronquées à cause de la complexité du problème. Cette efficacité est probablement très analogue à celle que nous avons étudiée en 3.3. : c'est-à-dire relativement médiocre pour les lois en « J » avec  $\delta > 1$ .

Comme dans les cas précédents, il est inutile d'interpoler entre les valeurs de  $\delta$  du tableau B, suivant les valeurs de  $R_3/R_2$ . La représentation de la distribution varie peu lorsque  $\delta$  varie, compte tenu du fait que  $F_0$  et  $s$  ne sont déterminés qu'après  $\delta$ .

3.6.3. Si l'on suppose  $\delta$  négatif, la méthode des moments ne peut conduire qu'à une détermination de  $\delta$  supérieure à  $-1/3$ , et pour ces valeurs de  $\delta$  on ne peut assimiler la représentation de la fonction de densité à celle d'une loi en « J », cas des précipitations journalières par exemple.

Cependant, si on se trouve dans le premier cas de troncature ci-dessus, les erreurs commises sur  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$ , en remplaçant par  $x_0$  les valeurs  $x_1$  qui auraient dû être observées, supérieures à  $x_0$  et inférieures au seuil de troncature  $x_h$ , sont facilement négligeables si la probabilité  $\int_{x_0}^{x_h} f(x) dx$  est petite par rapport à la probabilité

$\int_{x_0}^{\infty} f(x) dx = 1 - F_0$  : ce qui n'est pas le cas dans l'étude de précipitations journalières où souvent  $\int_{x_0}^{x_h} f(x) dx$  est de l'ordre de  $\frac{1}{2} (1 - F_0)$ .

3.6.4. Si la taille de l'échantillon est inconnue (voir le paragraphe 4.8. pour la définition exacte de ce cas) la méthode des moments n'est pas utilisable, quel que soit le signe choisi pour le paramètre de forme.

#### 4. ESTIMATION DES PARAMÈTRES PAR LE MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE D'APRÈS UN ÉCHANTILLON DE TAILLE $n$

##### 4.1. EQUATIONS ET EXPRESSIONS

Pour une valeur  $x_i$  de la variable, la fonction de densité s'écrit, en posant  $u_i = \frac{x_i - x_0}{s}$  :

$$\frac{1}{s\delta} u_i^{\frac{1}{\delta}-1} \exp(-u_i^{1/\delta})$$

et son logarithme :

$$\mathcal{L} = -\log |s\delta| + \left(\frac{1}{\delta} - 1\right) \log u_i - u_i^{1/\delta}$$

4.1.1. Les dérivées premières de  $\mathcal{L}$  sont, quels que soient les signes de  $s$  et de  $\delta$  :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_0} = -\left(\frac{1}{\delta} - 1\right) \frac{u_i^{-1}}{s} + \frac{1}{\delta} \frac{u_i^{\frac{1}{\delta}-1}}{s} \quad \text{condition } \delta < 1$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = -\frac{1}{\delta s} + \frac{1}{\delta s} u_i^{1/\delta}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta} = -\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta^2} \log u_i + \frac{1}{\delta^2} u_i^{1/\delta} \log u_i$$

4.1.2. Les dérivées partielles secondes de  $\mathcal{L}$  s'écrivent :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_0^2} = -\left(\frac{1}{\delta} - 1\right) \frac{1}{s^2} \left[ u_i^{-2} + \frac{1}{\delta} u_i^{\frac{1}{\delta}-2} \right] \quad \text{condition } \delta < 1/2$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial s^2} = \frac{1}{\delta s^2} \left[ 1 - \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) u_i^{1/\delta} \right]$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \delta^2} = \frac{1}{\delta^2} \left[ 1 + \frac{2}{\delta} \log u_i - \frac{2}{\delta} u_i^{1/\delta} \log u_i - \frac{1}{\delta^2} u_i^{1/\delta} \log^2 u_i \right]$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_0 \partial s} = -\frac{1}{\delta^2 s^2} u_i^{\frac{1}{\delta}-1}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_0 \partial \delta} = \frac{1}{\delta^2 s} \left[ u_i^{-1} - u_i^{\frac{1}{\delta}-1} - \frac{1}{\delta} u_i^{\frac{1}{\delta}-1} \log u_i \right]$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial s \partial \delta} = \frac{1}{\delta^2 s} \left[ 1 - u_i^{1/\delta} - \frac{1}{\delta} u_i^{1/\delta} \log u_i \right]$$

Les espérances mathématiques sont :

$$E \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_0^2} = \frac{-1}{s^2 \delta^2} (1 - \delta)^2 \Gamma(1 - 2\delta)$$

$$E \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial s^2} = \frac{-1}{s^2 \delta^2}$$

$$E \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \delta^2} = \frac{-1}{\delta^2} \left[ 1 + \psi'(2) + \psi^2(2) \right]$$

$$E \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_0 \partial s} = \frac{-1}{s^2 \delta^2} (1 - \delta) \Gamma(1 - \delta)$$

$$E \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_0 \partial \delta} = \frac{-1}{s \delta^2} \left[ \psi(2 - \delta) - \delta \Gamma(1 - \delta) \right]$$

$$E \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial s \partial \delta} = \frac{-1}{s \delta^2} \psi(2)$$

4.1.3. La matrice d'information s'écrit :

$$\frac{n}{s^2 \delta^2} \begin{bmatrix} (1-\delta)^2 \Gamma(1-2\delta) & (1-\delta) \Gamma(1-\delta) & s [\psi(2-\delta) - \delta \Gamma(1-\delta)] \\ (1-\delta) \Gamma(1-\delta) & 1 & s \psi(2) \\ s [\psi(2-\delta) - \delta \Gamma(1-\delta)] & s \psi(2) & s^2 [\psi'(1) + \psi^2(2)] \end{bmatrix}$$

La matrice des variances et covariances des paramètres a pour termes ceux de l'inverse de cette matrice.

Le déterminant de la matrice des variances et covariances, qui représente la variance généralisée (asymptotique) du système des paramètres calculés par la méthode du maximum de vraisemblance, a pour valeur, les trois paramètres  $x_0$ ,  $s$  et  $\delta$  calculés :

$$\Delta = \frac{s^4 \delta^6}{n^3} \left/ \left[ (1-\delta)^2 \psi'(1) \left[ \Gamma(1-2\delta) - (\Gamma(1-\delta))^2 \right] - \left[ \Gamma(1-\delta) [\psi(2) - \delta \psi(1)] - \psi(2-\delta) \right]^2 \right] \right.$$

paramètre de position connu,  $s$  et  $\delta$  calculés :

$$\Delta = \frac{s^2 \delta^4}{n^2} \left/ \psi'(1) \right.$$

paramètre de forme connu,  $x_0$  et  $s$  calculés :

$$\Delta = \frac{s^4 \delta^4}{n^2 (1-\delta)^2} \left/ \left[ \Gamma(1-2\delta) - (\Gamma(1-\delta))^2 \right] \right.$$

paramètres de position et de forme connus,  $s$  calculé :

$$\Delta = \frac{s^2 \delta^2}{n}$$

avec :

$$\begin{aligned} \psi(1) &= -0,577\ 215\ 664\ 9 \\ \psi(2) &= 0,422\ 784\ 335\ 1 \\ \psi'(1) &= 1,644\ 934\ 066\ 8 \end{aligned}$$

4.1.4. En utilisant la méthode du maximum de vraisemblance nous faisons l'hypothèse de base suivante :

Les valeurs observées correspondent à des variables aléatoires, indépendantes, connues sans erreurs d'observation. L'échantillon observé est représentatif d'une population-mère distribuée suivant une loi exponentielle généralisée (dont il est possible que l'on connaisse a priori les valeurs — ou seulement les signes — de certains paramètres).

Si les variables observées ne sont pas strictement indépendantes on n'a pas le droit, en principe, d'écrire l'expression du maximum de vraisemblance. Cependant on peut utiliser la méthode si la taille de l'échantillon est suffisamment grande et si la dépendance séquentielle est suffisamment petite pour que l'échantillon soit représentatif de la population-mère.

Si les variables observées sont entachées d'erreurs d'observation (erreurs non systématiques qui, elles, se répercuteront sur le paramètre de position et/ou le paramètre d'échelle), la méthode peut être utilisée :

— soit lorsque l'erreur à craindre sur les valeurs observées est répartie avec une moyenne nulle et une variance indépendante de la valeur qui aurait dû être observée ;

— soit lorsqu'elle est répartie avec une moyenne nulle et un écart type proportionnel à la valeur qui aurait dû être observée.

Dans ces deux cas, on ne suppose pas que la fonction de répartition de l'erreur soit gaussienne, mais qu'elle conserve la même formulation mathématique avec les mêmes valeurs des paramètres de forme quelle que soit la valeur observée

## 4.2. TROIS PARAMÈTRES CALCULÉS

Le système d'équations déterminant  $x_0$ ,  $s$  et  $\delta$  s'écrit (cf. 4.1.1.), après simplifications :

— dérivée par rapport à  $x_0$  :

$$-(1 - \delta) \sum \frac{1}{|x_i - x_0|} + |s|^{-1/\delta} \sum |x_i - x_0|^{\frac{1}{\delta}-1} = 0$$

— dérivée par rapport à  $s$  :

$$-n |s|^{1/\delta} + \sum |x_i - x_0|^{1/\delta} = 0$$

— dérivée par rapport à  $\delta$  :

$$-n\delta - \sum \log |x_i - x_0| + |s|^{-1/\delta} \sum |x_i - x_0|^{1/\delta} \log |x_i - x_0| = 0$$

Notons tout de suite que la première équation n'est pas utilisable pour  $\delta \geq 1$ . On peut alors la remplacer par une équation basée sur la moyenne arithmétique :

$$\sum |x_i - x_0| = n |s| \Gamma(\delta + 1)$$

ou par une équation basée sur la moyenne logarithmique, dont le coefficient de variation est inférieur à celui de la moyenne arithmétique pour  $\delta > 2$  :

$$\sum \log |x_i - x_0| = n (\log |s| - \delta c) \quad (c = 0,577\ 21\dots)$$

4.2.1. En posant :

$$\begin{aligned} SD &= \frac{1}{n} \sum |x_i - x_0|^{1/\delta} & SE &= \frac{1}{n} \sum |x_i - x_0|^{\frac{1}{\delta}-1} & SH &= \frac{1}{n} \sum \frac{1}{|x_i - x_0|} \\ SL &= \frac{1}{n} \sum \log |x_i - x_0| & SM &= \frac{1}{n} \sum |x_i - x_0|^{1/\delta} \log |x_i - x_0| \end{aligned}$$

et en supposant  $\delta < 1$ , le système d'équations s'écrit :

$$\begin{aligned} |s| &= (SD)^\delta \\ \delta &= SM/SD - SL \\ \delta &= 1 - SE / (SH \cdot SD) \end{aligned}$$

Ces deux dernières équations, implicites et transcendantes, ne contiennent que  $x_0$  et  $\delta$  comme inconnues ; la méthode qui semble la meilleure pour résoudre ce système est de choisir d'abord les signes de  $\delta$  et de  $s$  ( $s$  positif si on désire une borne inférieure,  $s$  négatif si on désire une borne supérieure de l'intervalle de définition de la variate) de choisir une valeur pour  $x_0$ , et de calculer :

$$\begin{aligned} \delta_y &= 1 - SE / (SH \cdot SD) \\ \delta_z &= SM/SD - SL \end{aligned}$$

$\delta_z$  dépendant de  $\delta$ , il faut d'abord trouver une valeur  $\delta_e$  de  $\delta$  telle que  $\delta_z/\delta_e = 1$  avec l'erreur relative acceptée : si  $\left(\frac{\delta_z}{\delta_e} - 1\right)$  est positif il faut faire croître  $\delta_e$  en valeur absolue, et si  $\left(\frac{\delta_z}{\delta_e} - 1\right)$  est négatif il faut faire décroître  $\delta_e$  en valeur absolue.

Ce premier point résolu, la comparaison de  $\delta_y$  et de  $\delta_z$  permet de savoir dans quel sens il faut faire varier  $x_0$  : si  $\left(\frac{\delta_y}{\delta_z} - 1\right)$  est positif,  $x_0$  doit varier en sens inverse du signe de  $s$  (croître si  $s$  est négatif, décroître si  $s$  est positif), si  $\left(\frac{\delta_y}{\delta_z} - 1\right)$  est négatif,  $x_0$  doit varier dans le sens du signe de  $s$ .

Une nouvelle valeur de  $x_0$  étant choisie, on cherche la valeur  $\delta_e$  de  $\delta$  telle que  $\delta_z/\delta_e = 1\dots$  etc., et on procède par approximations successives sur  $x_0$  jusqu'à trouver  $\delta_y/\delta_z = 1$  avec l'erreur relative acceptée.

Si on arrive à essayer des valeurs de  $\delta$  :  $1 \leq \delta_e \leq 2$ ,  $\delta_y$  est alors la solution, si elle existe, de :

$$\Gamma(\delta_{y_1} + 1) = \sum \frac{|x_i - x_0|}{n} / (SD)^{\delta_e}$$

ou est donnée par :

$$\delta_{y_2} = SL / (\log SD - c) \quad (c = \text{constante d'Euler})$$

cette autre détermination de  $\delta_y$  étant préférable à la première si  $\delta_e > 2$ .

La comparaison de  $\delta_z/\delta_{y_1}$  ou  $\delta_{y_2}/\delta_z$  avec 1, donne, comme plus haut, le sens de variation de  $x_0$ .

4.2.2. Il y a, pour un échantillon donné, quatre ajustements possibles par la méthode du maximum de vraisemblance (et son complément pour  $\delta > 1$ ).

$\delta$ choisi positif	$s$ choisi positif	$x_0$ borne inférieure
$\delta$ choisi négatif	$s$ choisi positif	$x_0$ borne inférieure
$\delta$ choisi positif	$s$ choisi négatif	$x_0$ borne supérieure
$\delta$ choisi négatif	$s$ choisi négatif	$x_0$ borne supérieure

La méthode du maximum de vraisemblance peut s'appliquer, avec son complément, quelle que soit la valeur du paramètre  $\delta$  de la population-mère. Cependant si  $\delta$  est supérieur à 1, on peut avoir des observations  $x_i$  de valeurs non discernées de celle de la borne  $x_0$ , et pour ces observations  $\log(x_i - x_0)$  n'aura plus de sens. En fait pour  $\delta > 1$  la fonction de densité est en « J » et on doit connaître a priori la valeur du paramètre de position.

Il semble bien qu'une fois choisis les signes des paramètres de forme et d'échelle, la solution du système des équations du maximum de vraisemblance soit unique. Cette remarque est également valable pour les cas des paragraphes suivants : 4.3., 4.4. et 4.5.

En annexe 7, nous donnons un exemple de traitement par le maximum de vraisemblance, avec calculs d'intervalles de confiance, des mêmes données qui font l'objet de l'exemple de traitement par la méthode des moments.

#### 4.2.3. Biais

Nous avons fait quelques tirages au hasard pour rechercher les biais (même démarche qu'en 4.3.3.) sans pouvoir les déterminer complètement car cela aurait pris trop de temps d'ordinateur. Il semble que les biais soient de l'ordre de  $\alpha/n^2$  sur le paramètre de forme, de  $s\beta/n^2$  sur le paramètre d'échelle et de  $s\gamma/n^2$  sur le paramètre de position :  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  étant des fonctions de  $\delta$ .

#### 4.3. PARAMÈTRE DE POSITION CONNU A L'AVANCE

La valeur  $x_0$  du paramètre de position étant connue ou choisie a priori, le signe du paramètre d'échelle est imposé : positif si  $x_0$  est borne inférieure, négatif si  $x_0$  est borne supérieure.

Le système d'équations déterminant  $s$  et  $\delta$  s'écrit (cf. 4.1.1.) après simplifications :

— dérivée par rapport à  $s$  :

$$-n |s|^{1/\delta} + \sum |x_i - x_0|^{1/\delta} = 0$$

— dérivée par rapport à  $\delta$  :

$$-n\delta - \sum \log |x_i - x_0| + |s|^{-1/\delta} \sum |x_i - x_0|^{1/\delta} \log |x_i - x_0| = 0$$

##### 4.3.1. En posant :

$$SD = \frac{1}{n} \sum |x_i - x_0|^{1/\delta}$$

$$SL = \frac{1}{n} \sum \log |x_i - x_0|$$

$$SM = \frac{1}{n} \sum |x_i - x_0|^{1/\delta} \log |x_i - x_0|$$

$$SN = \frac{1}{n} \sum |x_i - x_0|^{1/\delta} (\log |x_i - x_0|)^2$$

le système d'équations s'écrit, une fois le signe de  $\delta$  choisi :

$$|s| = (SD)^\delta$$

$$\delta = \frac{SM}{SD} - SL$$

Cette dernière équation ne contient que  $\delta$  comme inconnue. La méthode qui semble la plus rapide pour la résoudre est de passer par la tangente :  $\delta_z = SM/SD - SL$  est une fonction de la valeur  $\delta_e$  qui a servi à calculer SM et SD, la tangente au point  $\delta_z$ ,  $\delta_e$  coupe la première bissectrice au point  $\delta_s$ ,  $\delta_s$  nouvelle valeur à prendre pour  $\delta_e$  pour une nouvelle itération :

$$\frac{\delta_s - \delta_z}{\delta_s - \delta_e} = \delta_z^1(\delta_e) = (SM^2/SD^2 - SN/SD) / \delta_e^2$$

On arrête les itérations lorsque  $\delta_z/\delta_e = 1$  avec l'erreur relative acceptée.

4.3.2. Il y a pour un échantillon donné deux ajustements possibles par la méthode du maximum de vraisemblance :  $\delta$  choisi positif,  $\delta$  choisi négatif.

La méthode peut s'appliquer quelle sur soit la valeur du paramètre  $\delta$  de la population-mère. Cependant, si  $\delta$  est supérieur à 1, on peut avoir des observations  $x_i$  de valeurs non discernées de celle de la borne  $x_0$  et pour des observations  $\log |x_i - x_0|$  n'aura plus de sens.

#### 4.3.3. Biais

Nous avons recherché les biais des déterminations des paramètres de forme et d'échelle par la méthode générale de comparaison des estimations obtenues sur l'échantillon de taille  $n$  et des moyennes des  $n$  estimations obtenues sur les  $n$  sous-échantillons créés en supprimant l'une après l'autre une valeur de l'échantillon de taille  $n$ .

L'étude a été faite en prenant 36 échantillons de taille 10 et de taille 20 tirés au hasard (méthode de Monte-Carlo) dans chacune des populations-mères de paramètres de forme :

$$\delta = -1,6; -0,8; -0,4; -0,2; -0,1; +0,1; +0,2; +0,4; +0,8; +1,6.$$

Le biais sur le paramètre d'échelle  $s$  est de l'ordre de  $1/n^2$ . Plus exactement il semble que l'on puisse écrire:

$$\text{estimation améliorée de } s = \left( \text{estimation de } s \text{ d'après l'échantillon de taille } n \right) \left( 1 + \frac{c\delta}{(n-1)^2} (\delta - \log 2) \right)$$

avec  $c = 0,577\dots$

Le biais sur le paramètre de forme  $\delta$  est également de l'ordre de  $1/n^2$ . Plus exactement il semble que l'on puisse écrire :

$$\text{estimation améliorée de } \delta = \left( \text{estimation de } \delta \text{ d'après l'échantillon de taille } n \right) \left( -\frac{3}{4(n-1)^2} + 1 \right)$$

#### 4.4. PARAMÈTRE DE FORME CONNU A L'AVANCE

La valeur du paramètre de forme étant connue ou choisie a priori, il faut choisir le signe du paramètre d'échelle : positif si on désire trouver une borne inférieure, négatif si on désire trouver une borne supérieure de la distribution.

Le système d'équations déterminant  $s$  et  $\delta$  s'écrit (cf. 4.1.1.) après simplifications :

— dérivée par rapport à  $x_0$  :

$$-(1 - \delta) \sum \frac{1}{|x_i - x_0|} + |s|^{-1/\delta} \sum |x_i - x_0|^{1/\delta - 1} = 0$$

— dérivée par rapport à  $s$  :

$$-n |s|^{1/\delta} + \sum |x_i - x_0|^{1/\delta} = 0$$

La première équation n'est pas utilisable pour  $\delta \geq 1$  : les paramètres doivent alors être déterminés par la méthode des moments.

4.4.1. En posant :

$$SD = \frac{1}{n} \sum |x_i - x_0|^{1/\delta} \quad SE = \frac{1}{n} \sum |x_i - x_0|^{\frac{1}{\delta}-1} \quad SH = \frac{1}{n} \sum \frac{1}{|x_i - x_0|}$$

le système d'équations s'écrit, une fois le signe de  $s$  choisi :

$$|s| = (SD)^\delta \\ \delta = 1 - SE / (SH \cdot SD)$$

Cette dernière équation ne contient que  $x_0$  comme inconnue. La méthode qui semble la plus simple pour la résoudre consiste à choisir une valeur pour  $x_0$ , à calculer :

$$\delta_y = 1 - SE / (SH \cdot SD)$$

et à comparer  $\delta_y$  à la valeur connue  $\delta$  du paramètre de forme. Si  $\left(\frac{\delta_y}{\delta} - 1\right)$  est positif, il faut faire varier  $x_0$  en sens inverse du signe de  $s$  (croître si  $s$  est négatif, et décroître si  $s$  est positif), si  $\left(\frac{\delta_y}{\delta} - 1\right)$  est négatif, il faut faire varier  $x_0$  dans le sens du signe de  $s$ . On procède par approximations successives sur  $x_0$  jusqu'à trouver  $\frac{\delta_y}{\delta} = 1$  avec une erreur relative acceptée.

4.4.2. Il y a pour un échantillon donné deux ajustements possibles par la méthode du maximum de vraisemblance :  $s$  choisi positif,  $s$  choisi négatif.

La méthode ne s'applique pleinement que pour une valeur du paramètre  $\delta$  inférieure à 1. En fait pour  $\delta \geq 1$  la fonction de densité est en « J » et on doit connaître a priori la valeur du paramètre de position.

4.4.3. *Biais*

Nous avons recherché les biais des déterminations des paramètres de position et d'échelle par la méthode générale de comparaison des estimations obtenues sur l'échantillon de taille  $n$  et des moyennes des  $n$  estimations obtenues sur les  $n$  sous-échantillons créés en supprimant l'une après l'autre une valeur de l'échantillon de taille  $n$ .

L'étude a été faite en prenant 36 échantillons de taille 10 et de taille 20 tirés au hasard (méthode de Monte-Carlo) dans chacune des populations-mères de paramètres de forme  $-0,8$ ;  $-0,4$ ;  $-0,2$ ;  $-0,1$ ;  $+0,1$ ;  $+0,2$ ;  $+0,4$ ;  $+0,8$ . Les biais sont de l'ordre de  $1/n^2$ ; on peut écrire approximativement, sans précision car l'étude n'a pas été poussée assez loin (échantillonnage insuffisant).

$$\text{Estimation améliorée de } s = \left( \text{estimation de } s \text{ d'après l'échantillon de taille } n \right) \left( 1 - \frac{4}{5n(n-1)} \right).$$

$$\text{Estimation améliorée de } x_0 = \left( \text{estimation de } x_0 \text{ d'après l'échantillon de taille } n \right) + \frac{se}{3n(n-1)}.$$

#### 4.5. PARAMÈTRES DE POSITION ET DE FORME CONNUS A L'AVANCE

Seul le paramètre d'échelle est à calculer, son signe est imposé : positif si le paramètre de position  $x_0$  est borne inférieure, négatif si  $x_0$  est borne supérieure.

La dérivée de la vraisemblance par rapport à  $s$  est :

$$-n |s|^{1/\delta} + \sum |x_i - x_0|^{1/\delta} = 0$$

en posant :

$$SD = \frac{1}{n} \sum |x_i - x_0|^{1/\delta}$$

il vient :

$$|s| = (SD)^\delta$$

La méthode est applicable quelle que soit la valeur de  $\delta$ .

L'étude du biais par la méthode générale de comparaison (cf. 4.4.3.) conduit à écrire :

$$\text{Estimation améliorée de } s = \left( \text{estimation de } s \text{ d'après l'échantillon de taille } n \right) \left( 1 + \frac{c \delta (\delta - 1)}{n^2} \right) \quad c = 0,5772\dots$$

#### 4.6. RÉPARTITIONS TRONQUÉES $\delta > 0$

Nous nous plaçons dans le cas où le paramètre de position  $x_0$  est connu, borne inférieure, paramètre d'échelle  $s > 0$  à déterminer, ainsi que le paramètre de forme  $\delta > 0$  et le paramètre de tronquage  $F_0$ .

$N$  est le nombre total d'observations égales à ou différentes de  $x_0$ .

$x_h$  est le seuil de troncature, soit choisi en fonction du peu de confiance que l'on a dans les valeurs observées inférieures à  $x_h$  et dans leur nombre observé, soit déterminé par la sensibilité de l'appareil de mesure ou de la méthode.

$n$  est le nombre d'observations supérieures ou égales à  $x_h$ .

4.6.1. On applique la méthode du maximum de vraisemblance aux  $n$  observations conservées, dont la probabilité totale est :

$$(1 - F_0) \exp \left[ - \left( \frac{x_h - x_0}{s} \right)^{1/\delta} \right]$$

Le logarithme naturel du maximum de vraisemblance s'écrit :

$$-n \log \delta - \frac{n}{\delta} \log s + \left( \frac{1}{\delta} - 1 \right) \sum \log (x_i - x_0) - s^{-1/\delta} \sum (x_i - x_0)^{1/\delta} + s^{-1/\delta} n (x_h - x_0)^{1/\delta}$$

En annulant les dérivés par rapport à  $s$  et à  $\delta$  après avoir posé :

$$SD = \frac{1}{n} \sum (x_i - x_0)^{1/\delta} \qquad SL = \frac{1}{n} \sum \log (x_i - x_0)$$

$$SM = \frac{1}{n} \sum (x_i - x_0)^{1/\delta} \log (x_i - x_0)$$

$$HD = (x_h - x_0)^{1/\delta} \qquad HL = \log (x_h - x_0)$$

il vient :

$$S = (SD - HD)^\delta$$

$$\delta = \frac{SM - HL \cdot HD}{SD - HD} - SL$$

Cette dernière équation contient  $\delta$  comme seule inconnue. La méthode qui semble la plus simple pour la résoudre est de choisir une valeur  $\delta_e$ , de calculer :  $\delta_z = \frac{SM - HL \cdot HD}{SD - HD} - SL$ , de comparer  $\delta_z$  et  $\delta_e$  : si  $\delta_z - \delta_e$  est positif, il faut prendre une nouvelle valeur de  $\delta_e$  supérieure à la précédente. Si  $\delta_z - \delta_e$  est négatif, il faut prendre une nouvelle valeur de  $\delta_e$  inférieure à la précédente. On arrête les itérations lorsque  $\delta_z/\delta_e = 1$  avec l'erreur relative acceptée.

Le paramètre de tronquage se calcule par :

$$F_0 = 1 - \frac{n}{N \exp \left[ - \left( \frac{x_h - x_0}{s} \right)^{1/\delta} \right]}$$

4.6.2. Le principe de la troncature fait que l'on doit trouver des valeurs du paramètre de forme  $\delta$  supérieures à 0,5 : pour des valeurs de  $\delta$  inférieures à 0,5 la probabilité d'observations non discernables de  $x_0$  est quasiment nulle.

4.6.3. La fréquence calculée, une fois les valeurs des paramètres connus, est celle qui correspond à la définition de l'événement. Si on a adapté, par exemple, une répartition tronquée sur la somme des précipitations de  $J$  jours consécutifs, cette somme  $x$  de fréquence  $\Phi_1$  au dépassement, d'une fois en  $T$  années sera définie par :

$$\Phi_1 = 1/T$$

$$F_1(x) = \frac{J}{T \cdot 365,25} = (1 - F_0) \exp \left[ - \left( \frac{x - x_0}{s} \right)^{1/\delta} \right]$$

#### 4.7. RÉPARTITIONS TRONQUÉES $\delta < 0$

Nous nous plaçons dans le cas où le paramètre de position  $x_0$  est connu, borne inférieure, avec paramètre d'échelle  $s > 0$  à déterminer, ainsi que le paramètre de forme  $\delta < 0$  et le paramètre de tronquage  $F_0$ .

$N$  est le nombre total d'observations égales à ou différentes de  $x_0$ .

$x_h$  est le seuil de troncature, soit choisi en fonction du peu de confiance que l'on a du nombre et des valeurs des observations inférieures à  $x_h$ , soit déterminé par la sensibilité de l'appareil ou de la méthode de mesure.

$n$  est le nombre d'observations supérieures ou égales à  $x_h$ .

4.7.1. On applique la méthode du maximum de vraisemblance aux  $n$  observations conservées dont la probabilité totale est :

$$(1 - F_0) \left( 1 - \exp \left[ - \left( \frac{x_h - x_0}{s} \right)^{1/\delta} \right] \right)$$

Le logarithme naturel du maximum de vraisemblance s'écrit :

$$-n \log(-\delta) - \frac{n}{\delta} \log s + \left( \frac{1}{\delta} - 1 \right) \sum \log(x_i - x_0) - s^{-1/\delta} \sum (x_i - x_0)^{1/\delta} - n \log \left( 1 - \exp \left[ - \left( \frac{x_h - x_0}{s} \right)^{1/\delta} \right] \right)$$

En annulant les dérivées par rapport à  $s$  et à  $\delta$  après avoir posé :

$$SD = \frac{1}{n} \sum (x_i - x_0)^{1/\delta} \qquad SL = \frac{1}{n} \sum \log(x_i - x_0)$$

$$SM = \frac{1}{n} \sum (x_i - x_0)^{1/\delta} \log(x_i - x_0)$$

$$HD = (x_h - x_0)^{1/\delta} \qquad HL = \log(x_h - x_0)$$

il vient :

$$s = \left( \frac{HL \cdot SD - SM}{HL - SL - \delta} \right)^\delta$$

$$\delta = - \frac{\left[ SD \cdot SL - SM - \frac{HD}{\Phi} (HL - SL) \right]}{\left( SD + \frac{HD}{\Phi} \right)}$$

avec :

$$\Phi = \exp(HD \cdot DA) - 1$$

$$DA = \frac{HL - SL - \delta}{HL \cdot SD - SM}$$

Cette dernière équation  $\delta = \dots$  contient  $\delta$  comme seule inconnue. La méthode qui semble la plus simple pour la résoudre est de choisir une valeur  $\delta_e$ , de calculer :

$$\delta_z = \frac{\left( SM + \frac{HD}{\Phi} (HL - SL) - SD \cdot SL \right)}{\left( SD + \frac{HD}{\Phi} \right)}$$

de comparer  $\delta_z$  et  $\delta_e$ . Si  $\delta_z - \delta_e$  est positif, il faut essayer une nouvelle valeur  $\delta_e$  supérieure à la précédente, si  $\delta_z - \delta_e$  est négatif, il faut essayer une nouvelle valeur de  $\delta_e$  inférieure à la précédente. On arrête les itérations lorsque  $\frac{\delta_z}{\delta_e} = 1$  avec l'erreur relative acceptée.

Lorsque  $\delta$  est inférieur à 1, il semble qu'il y ait plusieurs solutions, du moins d'après les essais que nous avons faits en arrêtant les itérations à une erreur relative de  $\delta_z$  par rapport à  $\delta_e$  de  $10^{-5}$ , mais il semble aussi que les solutions qui ne conviennent pas correspondent à une valeur négative de  $(SD - HD)$  rendant le calcul de  $s$  impossible.

Le paramètre de tronçage se calcule par :

$$F_0 = 1 - \frac{n}{N \left( 1 - \exp \left[ - \left( \frac{x_h - x_0}{s} \right)^{1/\delta} \right] \right)}$$

4.7.2. Le principe de la tronçature fait que l'on doit trouver des valeurs du paramètre de forme inférieures à  $-1$ , pour des valeurs de  $\delta$  supérieures à  $-1$ , la probabilité d'observations non discernables de  $x_0$  est très faible.

Dans le cas d'étude de pluviométrie journalière par exemple, on sera conduit à prendre un seuil de tronçature élevé, par tâtonnements, de façon à se trouver dans la partie en « J » de la fonction de densité (cf. 1.4.1.).

4.7.3. La fréquence calculée, une fois les valeurs des paramètres connues est celle qui correspond à la définition de l'événement. Si on a adapté, par exemple, une répartition tronçquée sur la somme des précipitations de J jours consécutifs, cette somme  $x$  de fréquence  $\Phi_1$  au dépassement, d'une fois en T années sera définie par :

$$\Phi_1 = \frac{1}{T}$$

$$\text{et : } F_1 = \frac{J}{T \cdot 365,25} = (1 - F_0) \left( 1 - \exp \left[ - \left( \frac{x - x_0}{s} \right)^{1/\delta} \right] \right)$$

#### 4.8. TAILLE D'ÉCHANTILLON INCONNUE

On peut assimiler au cas des distributions tronçquées un cas particulier où la taille de l'échantillon est inconnue. Par exemple, on désire étudier les débits maximaux de crues à une station : les observations dont on dispose couvrent quatre années hydrologiques complètes dans lesquelles on a trouvé  $n = 37$  crues considérées comme indépendantes dont les débits maximaux, connus,  $x_i$  sont supérieurs ou égaux à un seuil de tronçature  $x_h = 20 \text{ m}^3/\text{s}$ .

On ne connaît pas le nombre total dans ces quatre années des événements « crues indépendantes ».

4.8.1. Le maximum de vraisemblance s'écrit dans ce cas :

$$\mathcal{L} = \prod_1^n f(x_i) / \left[ 1 - F(x_h) \right]^n$$

et dans le cas des distributions tronçquées :

$$\mathcal{L} = \prod_1^n (1 - F_0) f(x_i) / \left[ (1 - F_0) (1 - F(x_h)) \right]^n$$

On retombe sur les mêmes expressions que précédemment du logarithme du maximum de vraisemblance et si la valeur du paramètre de position  $x_0$  est connue a priori, sur les mêmes méthodes de solution (dans l'exemple ci-dessus on pourrait prendre  $x_0 = 0$ , car le débit de base est négligeable, bien inférieur au  $m^3/s$ , par rapport aux débits de pointe).

4.8.2. Les valeurs des paramètres  $x_0$ ,  $s$  et  $\delta$  une fois connus ( $\delta$  choisi positif ou  $\delta$  choisi négatif a priori) on peut déterminer le nombre total  $N'$  d'événements que l'on aurait dû observer :

$$N' = n / (1 - F(x_h))$$

( $N'$  pouvant très bien ne pas être un nombre entier) ce qui permet de calculer la valeur de la variate correspondant à une probabilité donnée (et inversement) car la fréquence calculée  $F(x)$  pour une valeur  $x$ , avec les valeurs des paramètres est celle qui correspond à la définition de l'événement. Pour reprendre l'exemple ci-dessus le débit de pointe de fréquence au dépassement une fois en  $T$  années (défini par  $\Phi_1(x) = \frac{1}{T}$ ) c'est-à-dire une fois sur  $\frac{N' T}{A}$  événements ( $A$  nombre d'années d'observations) est calculé par inversion de :

$$F(x) = 1 - \frac{A}{N' T} = 1 - \frac{A}{N'} \Phi_1(x)$$

$F(x)$  étant, nous le répétons, la probabilité au non dépassement dans la loi exponentielle généralisée dont les valeurs des paramètres sont  $x_0$ ,  $s$  et  $\delta$ .

En Annexe 8 nous donnons un exemple de traitement avec calculs d'intervalles de confiance.

## 5. COMPLÉMENTS DIVERS

### 5.1. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

5.1.1. Si les paramètres de forme  $\delta$  et d'échelle  $s$  sont de mêmes signes, la fréquence au non dépassement est :

$$- F = 1 - \exp(-u^{1/\delta}) \quad \left( u \text{ variable réduite} = \frac{x - x_0}{s} \right)$$

$$\text{si } F \text{ tend vers } 1, \text{ en posant } T \text{ (récurrence)} = \frac{1}{1 - F} \frac{x - x_0}{s} = (\log T)^\delta$$

$$\text{si } F \text{ tend vers } 0, \text{ en posant } T \text{ (récurrence)} = \frac{1}{F} \frac{x - x_0}{s} \text{ tend vers } T^{-\delta}.$$

5.1.2. Si les paramètres de forme  $\delta$  et d'échelle  $s$  sont de signes contraires, la fréquence au non dépassement est :

$$- F = \exp(-u^{1/\delta}) \quad \left( u \text{ variable réduite} = \frac{x - x_0}{s} \right)$$

$$\text{si } F \text{ tend vers } 1, \text{ en posant } T \text{ (récurrence)} = \frac{1}{1 - F} \frac{x - x_0}{s} \text{ tend vers } T^{-\delta}$$

$$\text{si } F \text{ tend vers } 0, \text{ en posant } T \text{ (récurrence)} = \frac{1}{F} \frac{x - x_0}{s} = (\log T)^\delta.$$

### 5.2. RÉPARTITION ASYMPTOTIQUE DES VALEURS EXTREMES

5.2.1. Si le paramètre d'échelle est positif et le paramètre de forme également positif (distribution du type « Goodrich ») lorsque la variable réduite  $u$  tend vers  $+\infty$ , définie dans la population-mère par la récurrence  $T$  :

$$u = (\log T)^\delta$$

pour  $T$  fixé la distribution de la plus forte valeur  $u_n$  d'échantillons de taille  $n = T$  tirés d'une population-mère de paramètres connus, tend vers une distribution de Gumbel de paramètres de position  $(\log n)^\delta$  et d'échelle  $\delta / (\log n)^{1-\delta}$ .

5.2.2. Si le paramètre d'échelle est positif et le paramètre de forme  $\delta$  négatif (distribution du type « Frechet ») lorsque la variable réduite  $u$  tend vers  $+\infty$ , définie dans la population-mère par la récurrence  $T$  :

$$u \neq T^{-\delta}$$

pour  $T$  fixé, la distribution de la plus forte valeur  $u_n$  d'échantillons de taille  $n = T$  tirés d'une population-mère de paramètres connus, tend vers une distribution de Frechet, de même paramètre de forme  $\delta$ , de paramètre de position zéro et de paramètre d'échelle  $n^{-\delta}$ .

### 5.3. RÉPARTITION DE L'INVERSE

La répartition de  $y = \frac{1}{x}$  est, si le paramètre de position de la distribution exponentielle généralisée suivie par  $x$  est nul, une distribution exponentielle généralisée de même paramètre d'échelle  $\frac{1}{s}$  et de paramètre de forme  $\zeta = -\delta$ .

### 5.4. RÉPARTITION D'UN QUOTIENT

Si deux variables aléatoires, indépendantes  $x$  et  $y$  sont réparties suivant des distributions exponentielles généralisées de mêmes paramètres de forme  $\delta$ , de mêmes paramètres de position zéro et de paramètres d'échelle  $s$  pour  $X$  et  $r$  pour  $Y$ ,  $s$  et  $r$  de mêmes signes, le quotient  $z = x/y$  est réparti suivant la distribution :

$$F(z) = 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{r} z\right)^{1/\delta}}$$

si  $\delta$  est positif

ou :

$$F(z) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{r} z\right)^{1/\delta}}$$

si  $\delta$  est négatif.

### 5.5. INTERVALLES DE CONFIANCE

Nous ne nous intéresserons ici qu'aux intervalles de confiance liés à une valeur de la variable calculée pour une probabilité connue, avec les valeurs des paramètres déterminés d'après l'échantillon : par exemple, nous désirons connaître l'intervalle de confiance (centré) à 80% du module décennal fort (de fréquence au non-dépassement 0,9). Par définition, il y aura 10% de chances que le véritable module décennal soit inférieur à la valeur limite inférieure de l'intervalle de confiance, également 10% de chances qu'il soit supérieur à la valeur supérieure de l'intervalle et 80% de chances qu'il soit compris entre ces deux valeurs.

Cet intervalle de confiance dépend :

- de la forme mathématique choisie pour la fonction de répartition ;
- de la taille de l'échantillon observé ;
- des valeurs numériques des paramètres d'ajustement de la fonction de répartition à l'échantillon.

Il dépend également du mode de calcul des paramètres ; pratiquement, il faut utiliser la méthode la plus efficace, celle du maximum de vraisemblance.

Dans le cas de la distribution exponentielle généralisée, la seule méthode de détermination d'intervalle de confiance est la méthode générale : on considère qu'une fois choisie la forme mathématique de la fonction de répartition, et calculées les valeurs numériques des paramètres d'ajustement, la loi de distribution ainsi déterminée est celle de la population-mère d'où provient l'échantillon observé de taille  $n$ . On tire au hasard dans cette population-mère un grand nombre d'échantillons de taille  $n$  — mettons 100 000 échantillons ; on calcule pour chaque

échantillon : les valeurs numériques des paramètres d'ajustement de la forme mathématique de la distribution ; puis le module décennal d'après ces valeurs numériques. Ces 100 000 valeurs de modules décennaux sont rangées en ordre croissant et l'intervalle de confiance à 80% est défini, avec une très bonne approximation, entre la 10 000<sup>e</sup> et la 90 000<sup>e</sup> valeur.

5.5.1. Il serait possible de construire des abaques donnant, en variables réduites  $u$ , les valeurs des intervalles de confiance. Cette construction serait très onéreuse malgré les possibilités des ordinateurs étant donné qu'il y a 4 grandeurs variables :

- taille de l'échantillon ;
- paramètre de forme de la loi exponentielle généralisée ;
- fréquence au non-dépassement à laquelle on s'intéresse ;
- étendue en probabilité de l'intervalle de confiance.

Il nous a semblé préférable d'écrire des sous-programmes permettant d'effectuer dans chaque cas particulier un calcul suffisamment approximatif pour les besoins courants, de l'intervalle de confiance : en tirant  $m$  échantillons de taille  $n$  de la « population-mère ». Une fois rangées, en ordre croissant, les  $m$  valeurs de la variable de fréquence au non-dépassement choisie à l'avance déduites de ces  $m$  échantillons (cf. ci-dessus), la valeur de rang  $i$

pour probabilité « observée » dans l'échantillon de taille  $m$  :  $\frac{i-0,5}{m}$  et celle de rang  $(m+1-i)$  :  $\frac{m-i+0,5}{m}$ .

Après essais, nous pensons que les valeurs de rang  $i = 10$  et de rang  $(m-9)$  représentent avec une approximation suffisante les bornes de l'intervalle de confiance d'étendue en probabilité  $\frac{m+1-2i}{m} = \frac{m-19}{m}$ . Les valeurs intéressantes de  $m$  sont :

$m$	38	57	76	95	190	380	950	1900
étendue	0,5	2/3	3/4	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99

#### 5.5.2. Cas des échantillons sans troncature ni tronçage

Il ne se pose aucun problème de tirage des  $m$  échantillons, tous de taille  $n$ .

#### 5.5.3. Cas des échantillons de taille connue, à seuil de troncature, en distribution tronquée

Il ne se pose pas plus de problème.

Les  $m$  échantillons sont de taille  $n$ , mais les nombres de valeurs supérieures au seuil de troncature sont variables suivant les échantillons.

#### 5.5.4. Cas des échantillons de taille « inconnue », à seuil de troncature

On a calculé, au premier ajustement sur l'échantillon « observé » une taille fictive  $n'$  (4.3.2.) qui n'est pas forcément un nombre entier, et on est obligé de prendre comme taille de chacun des  $m$  échantillons le nombre entier le plus proche de  $n'$ . Les nombres de valeurs supérieures au seuil de troncature sont variables suivant les échantillons.

### 5.6. MÉTHODES GRAPHIQUES DE DÉTERMINATION DES PARAMÈTRES

Il est possible d'utiliser des méthodes graphiques pour déterminer approximativement les valeurs des paramètres.

Si on n'a pas d'ordinateur à sa disposition (ce qui élimine en fait la possibilité d'utilisation du maximum de vraisemblance), la détermination par la méthode des moments est préférable à la détermination graphique dans le cas de répartitions non tronquées et impose moins de calculs. Dans le cas de répartitions à paramètres de forme négatifs, la méthode des moments n'est pas toujours applicable (elle ne couvre pas toutes les valeurs possibles du paramètre de forme) et il peut être nécessaire de passer par une méthode graphique, au moins pour contrôle.

Si on n'a pas d'ordinateur à sa disposition, la méthode graphique est la seule utilisable dans le cas de répartition « en J » tronquée sur laquelle on veut adapter une loi exponentielle généralisée à paramètre de forme négatif avec seuil de troncature à déterminer, ou dans le cas de répartition à taille d'échantillon inconnue.

Bien que les méthodes graphiques que nous allons décrire reposent sur une liaison linéaire, il ne faut pas, en principe (non-homoscedasticité) en déduire une méthode de calcul des paramètres par les moindres carrés.

### 5.6.1. Observations sans troncature ni tronquage

5.6.1.1. Paramètres de position, d'échelle positif, de forme positif à déterminer (le même schéma peut être utilisé lorsque les paramètres d'échelle et de forme sont tous les deux négatifs).

Les  $n$  observations  $x_i$  étant rangées en ordre décroissant, nous associons à chacune d'elle la probabilité au dépassement  $F_{1i} = \frac{i - 0,5}{n}$ .

La fonction de probabilité au dépassement  $F_1 = \exp(-u^{1/\delta})$  peut s'écrire en logarithmes décimaux :

$$\frac{1}{\delta} \left[ \log(x - x_0) - \log s \right] = \log \left( \log \frac{1}{F_1} \right) - \log 0,434 3$$

La méthode consiste à porter sur un graphique log-log, les points de coordonnées  $\log(1/F_{1i})$  et  $(x_i - x_0)$  en faisant varier  $x_0$  de façon à obtenir le meilleur alignement possible. Un exemple donné en annexe 3 explicite la marche à suivre. Une fois la valeur de  $x_0$  choisie, celle de  $s$  est  $(x_s - x_0)$  qui, sur la droite de l'alignement, correspond à  $\log(1/F_s) = 0,434 3$ . La valeur de  $\delta$  est celle de la pente de la droite.

5.6.1.2. Paramètres de position, d'échelle positif, de forme négatif à déterminer (le même schéma peut être utilisé lorsque le paramètre d'échelle est négatif et le paramètre de forme positif).

Les  $n$  observations  $x_i$  étant rangées en ordre croissant, nous associons à chacune d'elle la probabilité au non-dépassement  $F_i = \frac{i - 0,5}{n}$ .

La fonction de probabilité au non-dépassement  $F = \exp(-u^{1/\delta})$  peut s'écrire en logarithmes décimaux :

$$\frac{1}{\delta} \left[ \log(x - x_0) - \log s \right] = \log \left( \log \frac{1}{F} \right) - \log 0,434 3$$

La méthode consiste à porter sur un graphique log-log les points de coordonnées  $\log(1/F_i)$  et  $(x_i - x_0)$  en faisant varier  $x_0$  de façon à obtenir le meilleur alignement possible. Un exemple donné en Annexe 4 explicite la marche à suivre. Une fois la valeur de  $x_0$  choisie, celle de  $s$  est  $(x_s - x_0)$  qui, sur la droite de l'alignement, correspond à  $\log(1/F_s) = 0,434 3$ . La valeur de  $\delta$  est celle de la pente de la droite.

### 5.6.2. Observations correspondant à une distribution « en J » avec tronquage et troncature

La valeur du paramètre de position  $x_0$  est connue a priori. Il faut déterminer les valeurs des paramètres d'échelle positif, de forme et de tronquage. On peut, de plus, déterminer le seuil de troncature qui fournit le meilleur alignement.

#### 5.6.2.1. Paramètre de forme choisi positif a priori

$N$  étant le nombre total d'observations possibles, supérieures ou égales à  $x_0$  (la probabilité  $F_0$  d'observations égales à la borne inférieure  $x_0$  n'est pas nulle), les observations sont rangées en ordre décroissant et à l'observation de rang  $R_i$  nous associons la probabilité au dépassement  $F_{1i} = \frac{R_i - 0,5}{N(1 - F_0)}$ .

La fonction de probabilité au dépassement  $F_1 = (1 - F_0) \exp(-u^{1/\delta})$  peut s'écrire en logarithmes décimaux :

$$\frac{1}{\delta} \left[ \log(x - x_0) - \log s \right] = \log \left( \log \frac{1}{F_1} \right) - \log 0,434 3$$

La méthode consiste à porter sur un graphique log-log les points de coordonnées  $\log \frac{N(1-F_0)}{R_i - 0,5}$  et  $(x_i - x_0)$  en faisant varier  $F_0$  de façon à obtenir le meilleur alignement possible pour les points  $x_i \geq x_h$ ,  $x_h$  étant le seuil de troncature que l'on choisira, en principe, le plus bas possible. Un exemple donné en Annexe 3 explicite la marche à suivre.

Une fois la valeur de  $F_0$  choisie, celle de  $s$  est  $(x_s - x_0)$  qui, sur la droite de l'alignement, correspond à  $\log \frac{N(1-F_0)}{R_s - 0,5} = 0,4343$ . La valeur de  $\delta$  est celle de la pente de la droite.

Lorsque le nombre d'observations  $x_i \geq x_h$  est grand, on peut sans faire une grosse erreur, associer à l'observation de rang  $R_i$  la probabilité au dépassement  $F'_{1i} = \frac{R_i}{N(1-F_0)}$ .

### 5.6.2.2. Paramètre de forme choisi négatif a priori

$N$  étant le nombre total d'observations possibles supérieures ou égales à  $x_0$  (la probabilité  $F_0$  d'observations égales à la borne inférieure  $x_0$  n'est pas nulle), les observations sont rangées en ordre décroissant et à l'observation de rang  $R_i$ , nous associons la probabilité au dépassement  $F_{1i} = \frac{R_i - 0,5}{N(1-F_0)}$ .

La fonction de probabilité au dépassement  $F_1 = (1 - F_0) [1 - \exp(-u^{1/\delta})]$  peut s'écrire en logarithmes décimaux :

$$\frac{1}{\delta} [\log(x - x_0) - \log s] = \log \left[ -\log(1 - F_1) \right] - \log 0,4343$$

La méthode consiste à porter sur un graphique log-log les points de coordonnées  $-\log \left( 1 - \frac{R_i - 0,5}{N(1-F_0)} \right)$  et  $(x_i - x_0)$  en faisant varier  $F_0$  de façon à obtenir le meilleur alignement possible pour les points  $x_i \geq x_h$ ,  $x_h$  étant le seuil de troncature que l'on choisira, en principe, le plus bas possible. Un exemple donné en Annexe 6 explicite la marche à suivre.

Une fois la valeur de  $F_0$  choisie, celle de  $s$  est  $(x_s - x_0)$  qui, sur la droite de l'alignement, correspond à  $-\log \left[ 1 - \frac{R_s - 0,5}{N(1-F_0)} \right] = 0,4343$ . La valeur de  $\delta$  est celle de la pente de la droite.

Lorsque le nombre d'observations  $x_i \geq x_h$  est grand, on peut, sans faire une grosse erreur, associer à l'observation de rang  $R_i$  la probabilité au dépassement  $F'_{1i} = \frac{R_i}{N(1-F_0)}$ .

### 5.6.3. Observations avec troncature, taille d'échantillon inconnue

Un exemple d'échantillon correspondant à cette définition est donné au paragraphe 4.8.

On suppose le paramètre de position connu  $x_0$  et en partant d'un échantillon de  $n$  valeurs  $x_i \geq x_h$  seuil de troncature, rangées en ordre décroissant, on veut déterminer les valeurs des paramètres de forme et d'échelle.

En appelant  $N'$  le nombre total  $\geq n$  d'événements que l'on aurait dû observer, nous associons à l'observation de rang  $R_i$  la probabilité au dépassement  $F_{1i} = \frac{R_i - 0,5}{N'}$  et nous sommes ramenés au cas du paragraphe 5.2. où le produit  $N(1-F_0)$  joue le même rôle que  $N'$ .

5.6.4. Dans ce qui précède, nous n'avons considéré que des cas où il y avait trois paramètres à déterminer. Il est facile d'utiliser une méthode graphique si l'on n'a que deux ou un paramètre non connu a priori.

On peut même l'étendre au cas de 4 paramètres à déterminer, observations avec troncature, taille d'échantillon inconnue, paramètres de position, d'échelle et de forme inconnus.

## 6. SOUS-PROGRAMME EN FORTRAN

### 6.1. FONCTION DE DISTRIBUTION ET INVERSION

#### 6.1.1. *FUNCTION FEXGE (X, DE, S, XØ) simple précision*

Calcul de la probabilité au non-dépassement FEXGE correspondant à la valeur  $x$  de la variate.

Aucun autre sous-programme n'est à adjoindre.

*Arguments à fournir* : valeur  $X$  de la variable, paramètre de forme  $DE$  positif ou négatif, paramètre d'échelle  $S$  positif ou négatif, paramètre de position  $XØ$  (borne).

*Conditions* : la valeur  $X$  doit être telle que  $(X - XØ) / S > 0$ .  $DE$  et  $S$  ne doivent pas être nuls.

*Fonctionnement* : le sous-programme utilise la fonction de bibliothèque  $DEXP$ . FEXGE compris entre 0 et 1 est calculé avec au moins 7 chiffres derrière la virgule. Le sous-programme est si court qu'il peut facilement être intégré dans le programme principal.

#### 6.1.2. *FUNCTION VEXGE (F, DE, S, XØ) simple précision*

Calcul de la valeur VEXGE de la variable correspondant à la probabilité  $F$  au non-dépassement.

Aucun autre sous-programme n'est à adjoindre.

*Arguments à fournir* : probabilité  $F$  au non-dépassement, paramètre de forme  $DE$  positif ou négatif, paramètre d'échelle  $S$  positif ou négatif, paramètre de position  $XØ$  (borne).

*Conditions* :  $0 < F < 1$ ,  $DE$  et  $S$  ne doivent pas être nuls.

*Fonctionnement* : le sous-programme utilise la fonction de bibliothèque  $DLOG$ . VEXGE supérieur à  $XØ$  est donné avec au moins 7 chiffres significatifs. Le sous-programme est si court qu'il peut facilement être intégré dans le programme principal.

#### 6.1.3. *FUNCTION FEXGET (X, DE, S, XØ, FØ) simple précision*

Calcul de la probabilité (distribution tronquée  $\delta > 0$ ) au non-dépassement FEXGET correspondant à la valeur  $X$  de la variable.

Aucun autre sous-programme n'est à adjoindre.

*Arguments à fournir* : valeur  $X$  de la variable, paramètre de forme  $DE$  positif, paramètre d'échelle  $S$  positif, paramètre de position  $XØ$  (borne inférieure), paramètre de tronquage  $FØ$ .

*Conditions* :  $DE$  et  $S$  ne doivent pas être nuls,  $0 \leq FØ < 1$ .

*Fonctionnement* : le sous-programme utilise la fonction de bibliothèque  $DEXP$ . Si  $(X - XØ) / S$  est inférieur à  $\left(\frac{1}{10}\right)^{178}$  la fréquence calculée est pratiquement  $FØ$ . FEXGET compris entre  $FØ$  et 1 est donné au moins avec 7 chiffres derrière la virgule. Le sous-programme est si court qu'il peut facilement être intégré dans le programme principal.

#### 6.1.4. *FUNCTION VEXGET (F, DE, S, XØ, FØ) simple précision*

Calcul de la valeur VEXGET de la variable correspondant à la probabilité  $F$  au non-dépassement (distribution tronquée  $\delta > 0$ ).

Aucun autre sous-programme n'est à adjoindre.

*Arguments à fournir* : probabilité  $F$  au non-dépassement, paramètre de forme  $DE$  positif, paramètre d'échelle  $S$  positif, paramètre de position  $XØ$  (borne inférieure), paramètre de tronquage  $FØ$ .

*Conditions* :  $0 < F < 1$ ,  $DE$  et  $S$  ne doivent pas être nuls,  $0 \leq FØ < 1$ .

*Fonctionnement* : le sous-programme utilise la fonction de bibliothèque  $DLOG$ . Si  $F$  est inférieur à  $FØ + 10^{-16}$  la valeur de la variable est pratiquement  $XØ$ . VEXGET est donné avec pratiquement 7 chiffres significatifs. Le sous-programme est si court qu'il peut facilement être intégré dans le programme principal.

6.1.5. *FUNCTION FEXGEU (X, DE, S, XØ, FØ) simple précision*

Calcul de la probabilité (distribution tronquée  $\delta < 0$ ) au non-dépassement FEXGEU correspondant à la valeur X de la variable.

Aucun autre sous-programme n'est à adjoindre.

*Arguments à fournir* : valeur X de la variable, paramètre de forme DE négatif, paramètre d'échelle S positif, paramètre de position XØ (borne inférieure), paramètre de tronquage FØ.

*Conditions* : DE et S ne doivent pas être nuls,  $0 \leq F < 1$ .

*Fonctionnement* : le sous-programme utilise la fonction de bibliothèque DEXP. Si  $(X - XØ) / S$  est inférieur à  $\left(\frac{1}{10}\right)^{178}$  la fréquence calculée est pratiquement FØ. FEXGEU compris entre FØ et 1 est donné avec au moins 7 chiffres derrière la virgule. Le sous-programme est si court qu'il peut facilement être intégré dans le programme principal.

6.1.6. *FUNCTION VEXGEU (F, DE, S, XØ, FØ) simple précision*

Calcul de la valeur VEXGEU de la variable correspondant à la probabilité F au non-dépassement (distribution tronquée  $\delta < 0$ ).

Aucun autre sous-programme n'est à adjoindre.

*Arguments à fournir* : probabilité F au non-dépassement, paramètre de forme DE négatif, paramètre d'échelle S positif, paramètre de position XØ (borne inférieure), paramètre de tronquage FØ.

*Conditions* :  $0 < F < 1$ , DE et S ne doivent pas être nuls,  $0 \leq FØ < 1$ .

*Fonctionnement* : le sous-programme utilise la fonction de bibliothèque DLOG. Si F est inférieur à  $FØ + 10^{-16}$  la valeur calculée de la variable est pratiquement XØ. VEXGEU est donné avec pratiquement 7 chiffres significatifs. Le sous-programme est si court qu'il peut être facilement intégré dans le programme principal.

6.2. DÉTERMINATION DES PARAMÈTRES PAR LE MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE.  
ECHANTILLONS SANS TRONCATURES6.2.1. *SUBROUTINE PEXGES (X, DE, S, XØ, XM, N)*

Calcul de la moyenne XM de l'échantillon et de la valeur du paramètre d'échelle S.

Aucun autre sous-programme n'est à adjoindre.

*Arguments à fournir* : la taille N de l'échantillon et les valeurs X de l'échantillon en vecteur X(N), les valeurs des paramètres de forme DE, de position XØ (borne).

*Conditions* : DE ne doit pas être nul,  $XØ >$  ou  $<$  toutes valeurs X.

*Fonctionnement* : le sous-programme suit la marche indiquée en 4.5., le signe du paramètre d'échelle est déterminé par celui de  $(XM - XØ)$  et il est donné avec probablement 6 chiffres significatifs. Le sous-programme est si court qu'il peut facilement être intégré dans le programme principal.

6.2.2. *SUBROUTINE PEXGEF (X, DE, S, XØ, XM, N, BJ)*

Calcul de la moyenne XM de l'échantillon et des valeurs des paramètres d'échelle S et de position XØ (borne).

Aucun autre sous-programme n'est à adjoindre.

*Arguments à fournir* : la taille N de l'échantillon et les valeurs X de l'échantillon en vecteur X(N), la valeur du paramètre de forme DE et la valeur limite BJ que l'on admet pour le paramètre de position par exemple si tous les X sont positifs et si  $BJ = 0$ , la valeur de XØ sera plus grande ou égale à BJ et inférieure à la plus petite valeur des X. Si on ne veut pas limiter le champ de détermination de X, il faut donner à BJ une valeur raisonnable d'après l'échantillon, sans poser, par exagération  $BJ = \pm 10.**75$ .

*Conditions* : DE ne doit pas être nul. BJ doit être inférieur à toutes les valeurs de l'échantillon si on désire trouver une borne inférieure XØ (paramètre d'échelle S positif) ou supérieur à toutes les valeurs de l'échantillon si on désire trouver une borne supérieure (S négatif).

*Fonctionnement* : le sous-programme utilise les fonctions de bibliothèque GAMMA, DLOG.

Si DE est inférieur à 1, le sous-programme suit la marche indiquée en 4.4.1., les valeurs essayées pour XØ sont comprises entre BJ et la plus petite (ou la plus grande) valeur X. Les itérations sont arrêtées lorsque  $\frac{\delta_y}{\delta_e} = 1 \pm 1/10^5$  ou lorsque XØ est pratiquement égal à BJ ou à la plus petite (ou plus grande) valeur X.

Si DE est supérieur ou égal à 1, la méthode du maximum de vraisemblance n'est plus utilisable. Plutôt que d'utiliser brutalement la méthode des moments qui conduit facilement à une détermination de XØ comprise entre les valeurs extrêmes des X, nous utilisons la méthode suivante développée pour S positif: la valeur moyenne de la plus petite valeur observée dans un échantillon de taille N est, pour la variable réduite u :

$$u_1 = \int_0^{\infty} u \, dG \quad \text{avec} \quad dG = N(1 - F)^{N-1} f \, du$$

$$F = 1 - \exp(-u^{1/\delta}) \quad f = \frac{1}{|\delta|} u^{\delta-1} \exp(-u^{1/\delta})$$

d'où :

$$u_1 = \Gamma(1 + \delta) / N^\delta = \frac{XJ - XØ}{S} \quad (\text{XJ plus petite valeur des X})$$

qui, avec la moyenne  $\frac{XM - XØ}{S} = \Gamma(1 + \delta)$  conduit aux équations écrites dans le sous-programme pour DE  $\geq 1$ .

S et XØ sont donnés avec 4 ou 5 chiffres significatifs.

### 6.2.3. SUBROUTINE PEXGEP (X, DE, S, XØ, XM, N, DS)

Calcul de la moyenne XM de l'échantillon et des valeurs des paramètres de forme DE et d'échelle S.

Aucun autre sous-programme n'est à adjoindre.

*Arguments à fournir* : la taille N de l'échantillon et les valeurs X de l'échantillon en vecteur X(N), la valeur du paramètre de position XØ (borne) et le signe DS = + 1 ou DS = - 1 choisi pour le paramètre de forme DE.

*Conditions* : XØ doit être inférieur ou supérieur à toutes les valeurs X.

*Fonctionnement* : le sous-programme utilise la fonction de bibliothèque DLOG. Le sous-programme suit la marche indiquée en 4.3.1. après détermination du signe SS du paramètre d'échelle. Les itérations de détermination de DE sont arrêtées lorsque  $\frac{\delta_y}{\delta_e} = 1 \pm 1/10^5$ .

S et DE sont donnés avec 4 ou 5 chiffres significatifs.

### 6.2.4. SUBROUTINE PEXGE (X, DE, S, XØ, XM, N, BJ, DS)

Calcul de la moyenne XM de l'échantillon et des valeurs des paramètres de forme DE, d'échelle S, de position XØ (borne).

Aucun sous-programme n'est à adjoindre.

*Arguments à fournir* : la taille N de l'échantillon et les valeurs X de l'échantillon en vecteur X(N), le signe DS = + 1 ou DS = - 1 choisi pour le paramètre de forme DE, et la valeur limite BJ que l'on admet pour le paramètre de position : par exemple si tous les X sont positifs et si BJ = 0, la valeur de XØ sera plus grande ou égale à BJ et inférieure à la plus petite valeur des X. Si on ne veut pas limiter le champ de détermination de XØ il faut donner à BJ une valeur raisonnable d'après l'échantillon sans poser, par exagération, BJ =  $\pm 10$ . \*\*75.

*Condition* : BJ doit être inférieur à toutes les valeurs de l'échantillon si on désire trouver une borne inférieure (paramètre d'échelle S positif) ou supérieur à toutes les valeurs de l'échantillon si on désire trouver une borne supérieure (paramètre d'échelle S négatif).

*Fonctionnement* : le sous-programme utilise les fonctions de bibliothèque DSQRT et DLOG. Il suit la marche indiquée en 4.2.1., mais nous y imposons  $|DE| \leq 4$ . Ce qui donne un champ de détermination bien suffisant dans la pratique. Les itérations de détermination de DE sont arrêtées lorsque  $\frac{\delta_y}{\delta_e} = 1 \pm 1/10^5$ .

XØ, S et DE sont donnés avec 4 ou 5 chiffres significatifs.

### 6.3. DÉTERMINATION DES PARAMÈTRES PAR LE MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE. ECHANTILLONS A SEUIL DE TRONCATURE

#### 6.3.1. SUBROUTINE PEXGET (X, DE, S, XØ, FØ, N, XH)

Calcul des valeurs des paramètres de forme DE positif, d'échelle S positif et de tronquage FØ.

Aucun autre sous-programme n'est à adjoindre.

*Arguments à fournir* : la taille N de l'échantillon (qui comprend les valeurs inférieures à XH, et les valeurs égales à XØ) et les valeurs X de l'échantillon en vecteur X(N), le seuil de troncature XH, et le paramètre de position XØ (borne inférieure).

*Conditions* : XH supérieur à XØ et différent de XØ.

*Fonctionnement* : le sous-programme utilise les fonctions de bibliothèque DLOG, ALOG et EXP. Il suit la marche indiquée en 4.6.1., les itérations de détermination de DE sont arrêtées lorsque  $\frac{\delta_z}{\delta_e} = 1 \pm 1/10^4$ . Nous y imposons  $0 < \delta < 6$ , ce qui est bien suffisant dans la pratique.

DE, S et FØ sont donnés avec environ 4 chiffres significatifs.

Si la valeur donnée pour FØ est négative, cela veut dire qu'au seuil de troncature choisi il n'est pas possible d'adapter à l'échantillon une loi exponentielle généralisée tronquée à paramètre de forme positif.

#### 6.3.2. SUBROUTINE PEXGEU (X, DE, S, XØ, FØ, N, XH)

Calcul des valeurs des paramètres de forme DE négatif, d'échelle S positif et de tronquage FØ.

Aucune autre sous-programme n'est à adjoindre.

*Arguments à fournir* : la taille N de l'échantillon (qui comprend les valeurs inférieures à XH et les valeurs égales à XØ) et les valeurs X de l'échantillon en vecteur X(N), le seuil de troncature XH, et le paramètre de position XØ (borne inférieure).

*Conditions* : XH supérieur à XØ, et différent de XØ.

*Fonctionnement* : le sous-programme utilise les fonctions de bibliothèque DLOG, DEXP et EXP. Il suit la marche indiquée en 4.7.1., les itérations de détermination de DE sont arrêtées lorsque  $\frac{\delta_z}{\delta_e} = 1 \pm 1/10^4$ . Nous y imposons  $-6 < \delta < 0$ , ce qui est bien suffisant dans la pratique.

DE, S et FØ sont donnés avec environ 4 chiffres significatifs.

Si l'échantillon étudié a une distribution « en J », il faut s'assurer que le mode de la répartition adaptée est bien inférieur à XH. Sinon recommencer l'essai en augmentant la valeur du seuil de troncature.

#### 6.3.3. SUBROUTINE PEXGEV (X, DE, S, XØ, VN, N, XH)

Calcul des valeurs des paramètres de forme DE positif, d'échelle S positif et du nombre VN d'événements qui auraient dû être observés.

Aucun autre sous-programme n'est à adjoindre.

*Arguments à fournir* : la taille N de l'échantillon observé et les valeurs X de l'échantillon en vecteur X(N), le seuil de troncature XH, et le paramètre de position XØ (borne inférieure).

*Conditions* : XH supérieur à XØ, toutes les valeurs X(i) supérieures ou égales à XH.

*Fonctionnement* : le sous-programme utilise les fonctions de bibliothèque DLOG, ALOG et EXP. Il suit la marche indiquée en 4.8. et 4.6.1. Les itérations de détermination de DE sont arrêtées lorsque  $\frac{\delta_z}{\delta_e} = 1 \pm 1/10^4$ . Nous y imposons  $0 < \delta < 6$ , ce qui est bien suffisant dans la pratique.

DE, S et VN sont donnés avec environ 4 chiffres significatifs.

#### 6.3.4. SUBROUTINE PEXGEW (X, DE, S, XØ, VN, N, XH)

Calcul des valeurs des paramètres de forme DE négatif, d'échelle S positif et du nombre VN d'événements qui auraient dû être observés.

Aucun autre sous-programme n'est à adjoindre.

*Arguments à fournir* : la taille N de l'échantillon observé et les valeurs X de l'échantillon en vecteur X(N), le seuil de troncature XH et le paramètre de position XØ (borne inférieure).

*Conditions* : XH supérieur à XØ, et toutes les valeurs X(i) supérieures ou égales à XH.

*Fonctionnement* : le sous-programme utilise les fonctions de bibliothèque DLOG, ALOG, DEXP et EXP. Il suit la marche indiquée en 4.8. et 4.7.1. Les itérations de détermination de DE sont arrêtées lorsque  $\frac{\delta_z}{\delta_e} = 1 \pm 1/10^4$ . Nous y imposons  $-6 < \delta < 0$ , ce qui est bien suffisant dans la pratique.

DE, S et VN sont donnés avec environ 4 chiffres significatifs.

### 6.4. CALCUL DES INTERVALLES DE CONFIANCE

Les sous-programmes effectuant ces calculs seront basés sur le principe du paragraphe 6.5.1. et présentent peu de différences entre eux.

#### 6.4.1. Arguments en sortie, communs à tous les sous-programmes

Valeurs de la variate pour la borne inférieure BC (1) et pour la borne supérieure BC (2) de l'intervalle de confiance. La variable qui, dans l'appel, correspond à la variable muette BC des sous-programmes doit être dimensionnée à 2 dans le programme principal.

#### 6.4.2. Arguments à fournir, communs à tous les sous-programmes

Valeurs des paramètres de forme DE, d'échelle S, de position XØ, qui sont soit (en partie) connus à l'avance, soit (tous ou en partie), calculés d'après une des sous-routines des paragraphes 6.2. et 6.3.

Valeur F de la fréquence au non-dépassement pour laquelle on demande l'intervalle de confiance d'étendue, centrée en probabilité CØ, valeur XF de la variate correspondant à la fréquence F et aux valeurs DE, S et XØ des paramètres dans la répartition exponentielle généralisée (et de plus à la valeur FØ du paramètre de tronquage dans le cas de distributions tronquées).

#### 6.4.3. Conditions générales $0 < F < 1$

Il est recommandé de choisir pour CØ l'une des valeurs : 0,5 ; 2/3 ; 0,75 ; 0,8 ; 0,9 ; 0,95.

#### 6.4.4. Spécifications propres à chaque sous-programme

##### 6.4.4.1. SUBROUTINE CEXGES

A utiliser dans le cas où la seule valeur du paramètre d'échelle est calculée par le maximum de vraisemblance. Aucun autre sous-programme n'est à adjoindre.

*Argument supplémentaire à fournir* : taille N de l'échantillon qui a servi à calculer le paramètre d'échelle.

##### 6.4.4.2. SUBROUTINE CEXGEF

A utiliser dans le cas où les valeurs des paramètres d'échelle et de position ont été calculées par le maximum de vraisemblance.

Adjoindre la SUBROUTINE PEXGEF.

*Arguments supplémentaires à fournir* : taille N de l'échantillon qui a servi à calculer les paramètres d'échelle et de position.

$\gamma$  : la variable qui correspond dans l'appel à la variable muette de la sous-routine doit être dimensionnée à N (ou plus grand) dans le programme principal. On peut utiliser (pour cette variable) dans l'appel le vecteur dimensionné N des valeurs de l'échantillon, mais la sous-routine détruira ces valeurs.

BJ : valeur limite admise pour le paramètre de position, valeur utilisée dans la sous-routine PEXGEF.

#### 6.4.4.3. SUBROUTINE CEXGEP

A utiliser dans le cas où les valeurs des paramètres d'échelle et de forme ont été calculées par le maximum de vraisemblance.

Adjoindre la SUBROUTINE PEXGEP.

*Argument supplémentaire à fournir* : taille N de l'échantillon qui a servi à calculer les paramètres d'échelle et de forme.

$\gamma$  : voir ci-dessus 6.4.4.2.

DS : signe du paramètre de forme, utilisé dans la sous-routine PEXGEP.

#### 6.4.4.4. SUBROUTINE CEXGE

A utiliser dans le cas où les valeurs des paramètres d'échelle, de position et de forme ont été calculées par le maximum de vraisemblance.

Adjoindre la SUBROUTINE PEXGE.

*Arguments supplémentaires à fournir* : taille N de l'échantillon qui a servi à calculer les trois paramètres.

$\gamma$  : voir ci-dessus 6.4.4.2.

BJ : valeur limite admise pour le paramètre de position, et

DS : signe du paramètre de forme. Ces deux valeurs sont utilisées dans la sous-routine PEXGE de calcul des paramètres.

#### 6.4.4.5. SUBROUTINE CEXGET

A utiliser dans le cas où les valeurs des paramètres d'échelle (positif) de forme (positif) et de tronquage ont été calculées par le maximum de vraisemblance.

Adjoindre la SUBROUTINE PEXGET.

*Arguments supplémentaires à fournir* : seuil de troncature XH, taille N de l'échantillon (voir sous-routine PEXGET), valeur calculée du paramètre de tronquage F $\emptyset$ .

$\gamma$  : voir ci-dessus 6.4.4.2.

F : ne pas oublier que la fréquence à fournir est celle qui correspond à la définition de l'événement (4.6.3.).

#### 6.4.4.6. SUBROUTINE CEXGEU

A utiliser dans le cas où les valeurs des paramètres d'échelle (positif), de forme (négatif) et de tronquage ont été calculées par le maximum de vraisemblance.

Adjoindre la SUBROUTINE PEXGEU.

*Arguments supplémentaires à fournir* : seuil de troncature XH, taille N de l'échantillon (voir sous-routine PEXGEU), valeur calculée du paramètre de tronquage F $\emptyset$ .

$\gamma$  : voir ci-dessus 6.4.4.2.

F : ne pas oublier que la fréquence à fournir est celle qui correspond à la définition de l'événement (4.7.3.).

#### 6.4.4.7. SUBROUTINE CEXGEV

A utiliser dans le cas où les valeurs des paramètres d'échelle (positif), de forme (positif) et de taille « vraie » de l'échantillon (4.8.) ont été calculées par le maximum de vraisemblance.

Adjoindre la SUBROUTINE PEXGEV

*Arguments supplémentaires à fournir* : seuil de troncature XH, taille « vraie » de l'échantillon c'est-à-dire entier NV le plus proche du nombre VN (6.3.3.).

F : ne pas oublier que la fréquence à fournir est celle qui correspond à la définition de l'événement (4.8.2.).

*Nota.* — La variable  $\gamma$  ne figure pas en argument. Elle doit être dimensionnée dans le sous-programme à un nombre  $\geq$  NV.

#### 6.4.4.8. SUBROUTINE CEXGEW

A utiliser dans le cas où les valeurs des paramètres d'échelle (positif), de forme (négatif) et la taille « vraie » de l'échantillon (4.8.) ont été calculées par le maximum de vraisemblance.

Adjoindre la SUBROUTINE PEXGEW.

*Arguments supplémentaires à fournir* : seuil de troncature XH, taille « vraie » de l'échantillon c'est-à-dire entier NV le plus proche du nombre VN (6.3.4.).

F : ne pas oublier que la fréquence à fournir est celle qui correspond à la définition de l'événement (4.8.2.).

*Nota.* — La variable  $\gamma$  ne figure pas en argument. Elle doit être dimensionnée dans le sous-programme à un nombre  $\geq NV$ .

6.4.4.9. Remarque importante : le calcul des intervalles de confiance est long à l'ordinateur et d'autant plus long que cet intervalle est plus grand : 10 fois plus long pour l'intervalle à 95% que pour l'intervalle à 50%.

Pour fixer les idées, le traitement de l'Annexe 7 a pris 8 mn 05 s sur IBM 370-168 dont 8 mn 03 s pour le calcul de 6 intervalles de confiance à 50% ; le traitement de l'annexe 8 a pris 13,4 s dont plus de 13 s pour le calcul de 6 intervalles de confiance à 50%.

#### 6.5. UTILISATION DES SOUS-PROGRAMMES

6.5.1. Ces sous-programmes sont écrits en FORTRAN IV, niveau G (ou H) utilisé sur les ordinateurs IBM 360 et 370. Il peut être nécessaire de leur changer quelques instructions si on utilise d'autres ordinateurs.

6.5.2. Les fonctions FEXGE et VEXGE s'utilisent avec les paramètres déterminés par les sous-routines PEXGES, PEXGEP, PEXGEF et PEXGE ainsi que par les sous-routines PEXGEV, PEXGEW. Il ne faut pas oublier que dans ces deux derniers cas « échantillons de taille inconnue » FEXGE et VEXGE correspondent à des probabilités de l'événement, compte tenu de la taille d'échantillon calculée : si on utilise une probabilité définie par une autre référence voir paragraphe 4.8.2.

6.5.3. Les fonctions FEXGET et VEXGET, FEXGEU et VEXGEU s'utilisent respectivement avec les paramètres déterminés par les sous-routines PEXGET et PEXGEU. Il ne faut pas oublier que dans ces cas de distributions tronquées les fonctions correspondent à des probabilités d'événement, compte tenu de la taille de l'échantillon : si on utilise une probabilité définie par une autre référence voir paragraphe 4.6.3. ou 4.7.3.

6.5.4. *Nota.* — Les sous-programmes ont été écrits pour des valeurs de grandeur raisonnable. Si besoin, il faut faire un changement d'origine et/ou d'échelle sur les valeurs de l'échantillon de façon que la valeur absolue de la moyenne soit inférieure à 1 000 et que la variance soit inférieure à 100 000.

## ANNEXE 1

## EXEMPLE D'AJUSTEMENT A UNE LOI EXPONENTIELLE GÉNÉRALISÉE

## PRÉCIPITATIONS ANNUELLES (ANNÉES CALENDAIRES) A BOUAFLE (Côte d'Ivoire)

(Taille de l'échantillon  $n = 50$ , en mm)

1920		1930 1 061	1940 1 224	1950 1 271	1960 1 469	1970 1 193
1921		1931 1 429	1941 1 144	1951 1 376	1961 1 027	1971 1 447
1922		1932 1 027	1942 1 203	1952 1 325	1962 1 398	1972 1 523
1923		1933 1 487	1943 1 358	1953 1 340	1963 1 930	1973 1 076
1924 1 694		1934 1 255	1944 1 089	1954 1 464	1964 1 341	
1925 1 613		1935 1 300	1945 1 221	1955 1 704	1965 1 252	
1926 1 223		1936 1 180	1946 1 101	1956 1 283	1966 1 537	
1927 1 236		1937 1 332	1947 1 263	1957 1 720	1967 995	
1928 1 609		1938 1 525	1948 1 340	1958 1 000	1968 1 913	
1929 1 514		1939 1 094	1949 1 898	1959 1 600	1969 1 118	

## RANGEMENT DES OBSERVATIONS

Rang $i$	$x_i$	Réurrence observée $n/(i - 0,5)$	$x_i$		
1	995	100,0	1 930	calculs directs	
2	1 000	33,3	1 913		
3	1 027	20,0	1 898	$50 S_1 = \sum x_i$	67 722
4	1 027	14,3	1 720	$50 S_2 = \sum x_i^2$	94 529 570
5	1 061	11,1	1 704	$50 S_3 = \sum x_i^3$	136 053 298 900
6	1 076	9,1	1 694	moyenne	
7	1 089	7,7	1 613	$S_1 = 1 354,44$	
8	1 094	6,7	1 609	variance	
9	1 101	5,9	1 600	$C_2 = 57 228,251$	$\sqrt{C_2} = 239,224$
10	1 118	5,26	1 537	cumulant d'ordre 3	
11	1 144	4,76	1 525	$C_3 = 8 981 066,115$	
12	1 180	4,35	1 523	coefficient d'asymétrie	
13	1 193	4,00	1 514	$\gamma_1 = C_3/C_2^{3/2} = + 0,656 013$	
14	1 203	3,70	1 487	valeur imposant $\delta > 0$	
15	1 221	3,45	1 469		
16	1 223	3,23	1 464		
17	1 224	3,03	1 447		
18	1 236	2,86	1 429		
19	1 252	2,70	1 398		
20	1 255	2,56	1 376		
21	1 263	2,44	1 358		
22	1 271	2,33	1 341		
23	1 283	2,22	1 340		
24	1 300	2,13	1 340		
25	1 325	2,04	1 332		

## DÉTERMINATION DES PARAMÈTRES

En interpolant dans la table A, la valeur de  $\gamma_1$  correspond à  $\delta = 0,5093$  si on a choisi positif le signe du paramètre d'échelle  $s$ . Nous choisissons la valeur ronde  $\delta = 0,51$ .

Pour cette valeur de  $\delta$ , la table fournit  $\sqrt{K_2} = 0,471 78$  d'où :

$$s = \sqrt{c_2} / \sqrt{K_2} = + 507,067$$

La table fournit également  $\Gamma(\delta + 1) = 0,886\ 59$  d'où :

$$x_0 = S_1 - s \Gamma(\delta + 1) = 904,879 \text{ (borne inférieure)}$$

Avec ces valeurs des paramètres, nous calculons quelques points de la distribution ajustée :

Réurrence	Fréquence	Hauteur mm	Fréquence	Hauteur mm
1/100	.01	953,4	.99	2 009,8
50	.02	974,2	.98	1 921,6
20	.05	1 016,4	.95	1 792,2
10	.1	1 065,8	.9	1 680,8
8	.125	1 086,5	.875	1 641,5
6,25	.16	1 112,9	.84	1 595,5
5	.2	1 140,8	.8	1 551,2
4	.25	1 173,5	.75	1 503,9
3,33	.3	1 204,6	.7	1 462,3
2,50	.4	1 264,9	.6	1 389,8
2	.5	1 325,5	médiane	mode 1 257,3
1/1 000	.001	919,8	.999	2 263,6

La figure 5 montre l'ajustement.

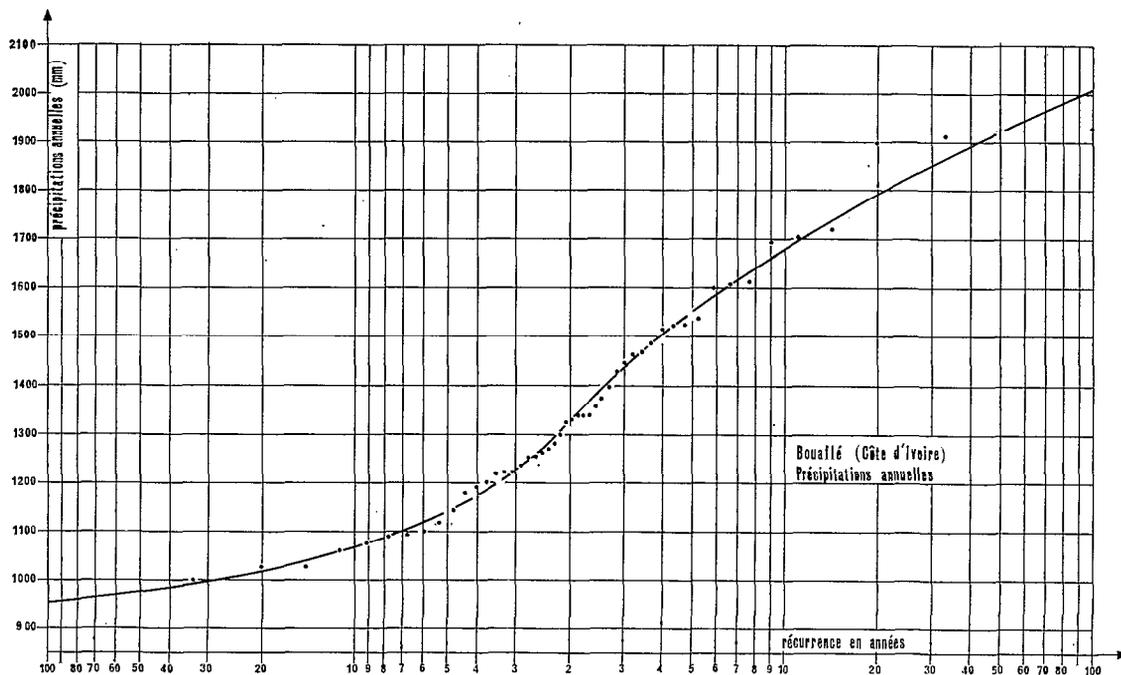


Fig. 5

Remarques. — Si nous avons choisi  $\delta = 0,50$  la table nous aurait conduit à  $s = + 516,404$  et  $x_0 = 896,787$  d'où les hauteurs de fréquence 0,001 : 913,1 mm,

$$0,999 : 2\ 254,0 \text{ mm}$$

peu différentes des hauteurs de mêmes fréquences obtenues avec  $\delta = 0,51$ .

Si nous avons choisi négatif le signe du paramètre d'échelle,  $\gamma_1 = - .656\ 013$  donne par interpolation  $\delta = 0,0958$ . En prenant  $\delta = .09$  il vient  $s = - 2\ 299,349$  et  $x_0 = 3\ 551,376$  et les hauteurs de récurrence 1/1 000 : 815,2 et 2 316,5 mm. En prenant  $\delta = .10$  il vient  $s = - 2\ 090,025$  et  $x_0 = 3\ 342,785$  et les hauteurs de récurrence 1/1 000 : 807,2 et 2 295,2 mm.

Nous allons calculer les valeurs de  $\chi^2$  pour différents nombres de classes d'égales probabilités. Le graphique facilite le décompte du nombre d'observations par classes. Ainsi pour 11 classes d'égales probabilités, il suffit de compter le nombre de points observés entre les ordonnées définies par les points de la courbe représentative

d'abscisses 11 ans,  $\frac{11}{2}$  ans,  $\frac{11}{3}$  ans,  $\frac{11}{4}$  ans...

11 classes, observations par classes 4 6 2 6 5 6 3 4 5 4 5 :

$\chi^2 = 3,68$  pour  $11 - 3 - 1 = 7$  degrés de liberté (trois paramètres calculés, égalité des effectifs « observé » et « théorique »). Cette valeur de  $\chi^2$  a une probabilité de  $0,81 = 81\%$  d'être dépassée par le simple fait du hasard si l'échantillon provient d'une population-mère répartie suivant une loi exponentielle généralisée.

10 classes, observations par classes 5 5 4 7 4 5 4 7 3 6 :

$\chi^2 = 3,20$  pour  $10 - 4 = 6$  degrés de liberté. Probabilité 0,78.

9 classes, observations par classes 6 5 6 6 7 3 7 4 6 :

$\chi^2 = 2,56$  pour  $9 - 4 = 5$  degrés de liberté. Probabilité 0,77.

8 classes, observations par classes 6 5 7 7 7 5 7 6 :

$\chi^2 = 0,88$  pour  $8 - 4 = 4$  degrés de liberté. Probabilité 0,97.

7 classes, observations par classes 8 5 10 7 6 8 6 :

$\chi^2 = 2,36$  pour  $7 - 4 = 3$  degrés de liberté. Probabilité 0,50.

6 classes, observations par classes 9 8 8 8 8 3 :

$\chi^2 = 0,16$  pour  $6 - 4 = 2$  degrés de liberté. Probabilité 0,92.

En faisant un autre découpage en 7 classes presque égales, de bornes en probabilité au non-dépassement 0 0,144 0,260 0,392 0,528 0,704 0,856 et 1 on obtient un  $\chi^2$  de 8,39 qui, avec 3 degrés de liberté, correspond à une probabilité de 0,04 !

## ANNEXE 2

## EXEMPLE D'AJUSTEMENT A UNE LOI EXPONENTIELLE GÉNÉRALISÉE

## PRÉCIPITATIONS JOURNALIÈRES A ABIDJAN-VILLE (COTE D'IVOIRE)

33 années de relevés 1932-1964, soit 12 054 jours = N.

Total des précipitations : 67 727 mm pour 4 993 jours de pluies observés.

Moyennes annuelles : 2 052,3 mm pour 151,3 jours.

Nombre total de jours de pluies  $\geq 10,1$  mm = 1 689 soit 51,2 par an.

## PRÉCIPITATIONS HORS CLASSES (arrondies au mm)

Hauteur $X_i$ (mm)	Rang	Hauteur $X_i$ (mm)	Rang
275	1	221	8
247	2	218	9
241	3	195	10
232	4	193	11
231	5	191	12
229	6	186	13
224	7		

## PRÉCIPITATIONS CLASSÉES

Classe (mm)	Nombre $n_i$	Moyenne $Y_i$ (mm)	Rang de la borne supérieure de la classe	Rang de la borne inférieure de la classe
de 160,1 à 170,0	4	164,5	14	17
150,1 160,0	4	154,5	18	21
140,1 150,0	3	144,5	22	24
130,1 140,0	7	134,5	25	31
120,1 130,0	15	124,5	32	46
110,1 120,0	23	114,5	47	69
100,1 110,0	18	104,5	70	87
90,1 100,0	25	94,5	88	112
80,1 90,0	24	84,5	113	136
70,1 80,0	32	74,5	137	168
60,1 70,0	48	64,5	169	216
50,1 60,0	103	54,5	217	319
40,1 50,0	130	44,5	320	449
30,1 40,0	190	34,5	450	639
20,1 30,0	380	24,5	640	1 019
10,1 20,0	670	14,5	1 020	1 689
0,1 10,0	(1 992 = $n_0$ )	4,5	1 690	(3 681)

## VALEURS CHOISIES POUR L'AJUSTEMENT

Paramètre de position  $X_0 = 0$  (borne inférieure de la distribution), seuil de troncature  $X_h = 10,1$  mm : dans la classe de 0,1 à 10 mm il y a en fait 3 304 observations comprenant de nombreuses rosées.

Pour pouvoir appliquer la méthode des moments, nous allons d'abord recalculer un nombre  $n_0$  « acceptable »

d'observations dans la dernière classe en utilisant le total des précipitations et les valeurs moyennes dans les classes (cf. Annexe 2 bis) :

$$S_1 = 67\,727 = \sum X_i + \sum n_i Y_i + n_0 \cdot 4,5 \quad (n_0 = 1\,992)$$

Nous avons conservé quelques valeurs hors classes étant donné leur poids important. Nous calculons ensuite :

$$S_2 = 3\,769\,997 = \sum X_i^2 + \sum n_i Y_{i2} + n_0 Y_{12}$$

$$S_3 = 396\,745\,789 = \sum X_i^3 + \sum n_i Y_{i3} + n_0 Y_{13}$$

( $Y_{ij}$  est la valeur moyenne de la puissance  $j$  dans la classe  $i$  et les valeurs de  $Y_{i2}$  et  $Y_{i3}$  suivant les classes sont données dans l'annexe) ;

$$R_2 = S_2/S_1 = 55,663$$

$$R_3 = S_3/S_2 = 105,238$$

$$R_3/R_2 = 1,8906$$

Le tableau donne pour  $\delta = 1,45$   $R_3/R_2 = 1,8840$   
 $\delta = 1,46$   $R_3/R_2 = 1,8937$ .

Nous choisissons  $\delta = 1,46$  d'où la valeur de  $s$  :

$$s = R_2 \frac{\Gamma(\delta + 1)}{\Gamma(2\delta + 1)} = 55,663 \cdot 0,238\,06 = 13,251$$

et

$$F_0 = 1 - \frac{S_1}{N s \Gamma(\delta + 1)} = 1 - \frac{67\,727}{12\,054 \times 13,251 \times 1,29298} = 0,672$$

D'après l'ajustement le nombre moyen de jours de pluies par an ( $> 0$ ) est  $(1 - F_0) \times 365,25 = 119,8$  soit 3 954 pour 33 ans.

La probabilité, au dépassement, de la précipitation journalière « annuelle » est :

$$\frac{1}{(1 - F_0) \times 365,25} = \frac{1}{119,8} = F_1$$

et la hauteur de cette précipitation est calculée par :

$$1 - F_1 = 1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{s}\right)^{1/\delta}\right)$$

c'est-à-dire :

$$\delta \log(\log(1/F_1)) + \log s = \log x.$$

La probabilité, au dépassement, de la précipitation journalière de probabilité 1 fois en  $r$  années est  $\frac{F_1}{r}$  d'où les valeurs suivantes :

Probabilité	Précipitation journalière (mm)	Dépassée ou égale en 33 ans d'observations
une fois par an	130,3	31 fois
en 2 ans	158,8	18
en 5 ans	199,0	9
en 10 ans	231,2	5
en 20 ans	265,0	1
en 50 ans	311,7	0
en 100 ans	348,7	0

*Remarque.* — En choisissant  $\delta = 1,45$  on calcule  $s = 13,489$  ;  $F_0 = 0,676$  ;  $1/F_1 = 118,3$  et les précipitations journalières de probabilité 1 fois par an : 130,1 mm ; une fois en 100 ans : 346,4 mm, peu différentes des valeurs données ci-dessus.

Pour visualiser graphiquement l'ajustement calculé, nous calculons les probabilités  $F_t$ , au dépassement, des bornes  $x_t$  inférieures des classes :

$$F_t = (1 - F_0) \exp \left( - \left( \frac{x_t}{s} \right)^{1/\delta} \right)$$

Le nombre de jours  $\geq x_t$  qui auraient dû être observés en 33 ans est :  $F_t \cdot 12\ 054$ .

$F_t \cdot 12\ 054$	$x_t$	$F_t \cdot 12\ 054$	$x_t$
3 817	0,1	72,8	100,1
1 723	10,1 (soit 52,2 jours par an $\geq 10,1$ mm)	42,8	120,1
1 045	20,1	25,9	140,1
684	30,1	16,0	160,1
466	40,1	10,07	180,1
329	50,1	6,44	200,1
236	60,1	4,18	220,1
173	70,1	2,74	240,1
128	80,1	1,82	260,1
96,1	90,1	1,22	280,1

La figure 6 explicite la précision de l'ajustement : nous y avons tracé la fonction ajustée grâce aux points calculés dans le tableau ci-dessus  $F_t \cdot 12\ 054$  et porté les points observés au rang  $(r - 0,5)$  qui correspond à la fréquence observée  $\frac{r - 0,5}{N}$ .

Le calcul de  $\chi^2$  est relativement facile grâce aux différents tableaux donnés ci-dessus.

Classe	Nombre observé	Nombre calculé	Différence
10 à 20	670	678	8
20 30	380	361	19
30 40	190	218	28
40 50	130	137	7
50 60	103	93	10
60 70	48	63	15
70 80	32	45	13
80 90	24	31,9	7,9
90 100	25	23,3	1,7
100 120	41	30,0	11
120 140	22	16,9	5,1
140 160	7	9,9	2,9
160 180	4	5,93	1,93
180 200	4	3,63	0,37
200 240	6	3,70	2,30
240 et plus	5	2,74	2,26

$\chi^2 = 25,88$  pour 16 classes et 13 degrés de liberté car il y a eu 3 paramètres calculés  $\delta$ ,  $s$  et  $F_0$ , mais on n'a pas cherché à réaliser l'égalité des nombres observés et calculés de précipitation supérieures à 10 mm.

Cette valeur de  $\chi^2$  n'a qu'une probabilité de 0,02 soit 2% d'être dépassée par le simple fait du hasard si l'échantillon de 33 années de précipitations journalières provient d'une population-mère répartie suivant une loi exponentielle généralisée.

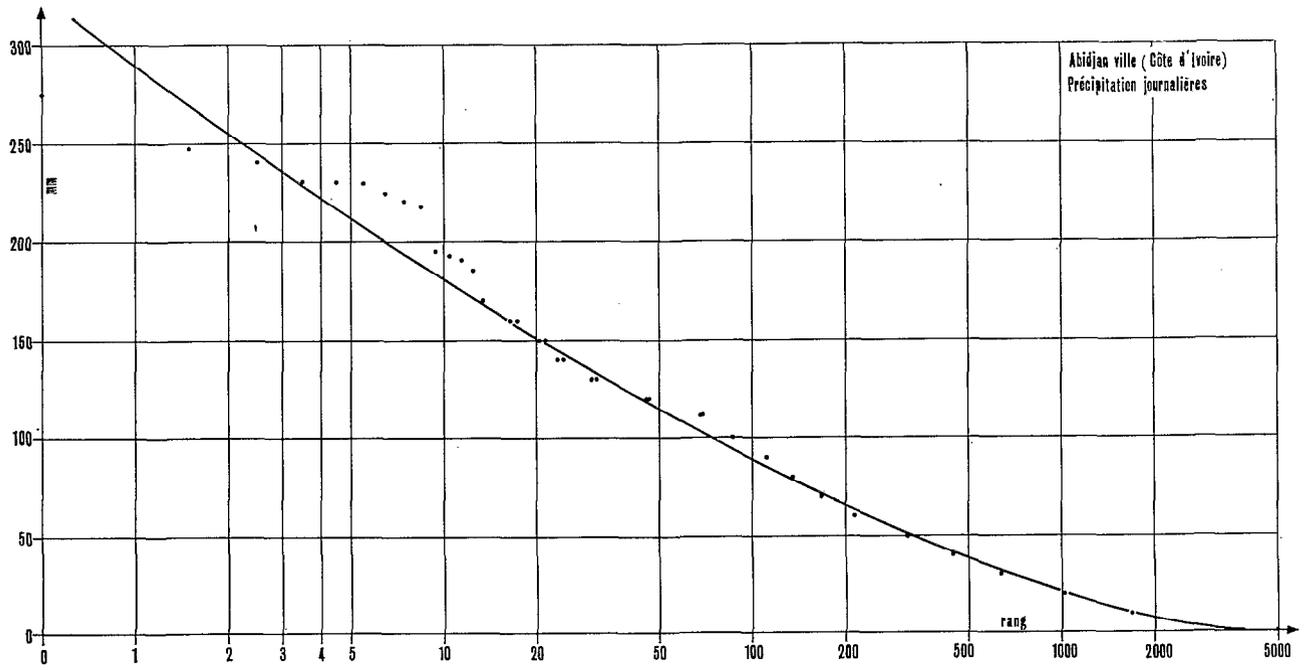


Fig. 6

## ANNEXE 2 bis

CALCUL DE  $\Sigma x_1^k$  PAR CLASSES DE PRÉCIPITATIONS (JOURNALIÈRES)

1) Dans la tranche de A à A + b mm, nous assimilons la répartition à une exponentielle simple, pour laquelle la fréquence au dépassement s'écrit (hauteurs rangées en ordre décroissant) :

$$F = e^{-\frac{x}{\alpha}} = \frac{r}{R_0} \quad (\alpha \text{ positif})$$

r = rang de l'observation x ;

$R_0$  = rang de la plus petite observation possible ( $x \neq 0$ )

$r_1$  = rang de la plus forte observation (possible) dans la classe ;

$r_0$  = rang de la plus petite observation (possible) dans la classe  $r_0 > r_1$ .

$$\Delta F = \frac{r_0}{R_0} - \frac{r_1}{R_0} = e^{-\frac{A}{\alpha}} - e^{-\frac{A+b}{\alpha}} = \left(1 - \frac{r_1}{r_0}\right) e^{-\frac{A}{\alpha}}$$

d'où :

$$\alpha = b / \log \frac{r_0}{r_1}$$

La valeur moyenne de  $x_1$  dans la classe est :

$$\bar{x} = \frac{1}{\Delta F} \int_{A+b}^A x df = A + a \quad \text{avec } a = \alpha - b \frac{r_1/r_0}{1 - r_1/r_0}$$

En posant  $s_k$  = valeur moyenne de  $x^k$  dans la classe de  $x = \bar{x} + \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  variant de  $\varepsilon_0 = -a$  pour  $r = r_0$  à  $\varepsilon_1 = b - a$  pour  $r = r_1$  :

$$s_k = \frac{\alpha^k}{\Delta F} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_0} e^{-\frac{\bar{x} + \varepsilon}{\alpha}} \left(\frac{\bar{x} + \varepsilon}{\alpha}\right)^k d\frac{\varepsilon}{\alpha} \quad \text{avec } \Delta F = \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_0} e^{-\frac{\bar{x} + \varepsilon}{\alpha}} d\frac{\varepsilon}{\alpha}$$

d'où :

$$s_2 = \bar{x}^2 + E_2 \quad E_2 = \frac{\varepsilon_0^2 - \varepsilon_1^2 r_1/r_0}{1 - r_1/r_0}$$

$$s_3 = \bar{x}^3 + 3\bar{x} E_2 + E_3 \quad E_3 = \frac{\varepsilon_0^3 - \varepsilon_1^3 r_1/r_0}{1 - r_1/r_0} + 3\alpha E_2$$

2) Lorsqu'on utilise des tranches de 10 mm, de A à A + 10 mm, le rapport  $r_1/r_0$  est en général voisin de 0,55. Pour des valeurs de ce rapport comprises entre 0,4 et 0,75 on peut prendre, sans risque d'erreurs graves  $a = 4,5$ ;  $E_2 = 8$ ;  $E_3 = 4$  d'où :

valeur moyenne de la hauteur	A + 4,5
valeur moyenne du carré	(A + 4,5) <sup>2</sup> + 8
valeur moyenne du cube	(A + 4,5) <sup>3</sup> + 24(A + 4,5) + 4

Lorsqu'on utilise des tranches de 5 mm, de A' à A' + 5 mm, le rapport  $r_1/r_0$  est en général voisin de 0,75. Pour des valeurs de ce rapport comprises entre 0,65 et 0,85, on peut prendre sans risque d'erreurs graves  $a = 2,4$ ;  $E_2 = 2,1$ ;  $E_3 = 0,3$  et  $3 \cdot E_2 = 6,2$  d'où :

valeur moyenne de la hauteur	A' + 2,4
valeur moyenne du carré	(A' + 2,4) <sup>2</sup> + 2,1
valeur moyenne du cube	(A' + 2,4) <sup>3</sup> + 6,2(A' + 2,4) + 0,3

3) Le tableau joint a été calculé :

— pour des tranches de 10 mm et  $r_1/r_0 = 0,55$ , tranches de précipitations de 0,1 à 10,0 mm, 10,1 à 20,0 mm etc., les intégrations étant faites de 0,05 à 10,05 mm, 10,05 à 20,05 mm etc. ;

— pour des tranches de 5 mm et  $r_1/r_0 = 0,75$ , tranches de précipitations de 0 à 4,9 mm, 5,0 à 9,9 mm etc., les intégrations étant faites de 0 à 4,95 mm, 4,95 à 9,95 mm etc.

## PRÉCIPITATIONS JOURNALIÈRES

Valeurs moyennes par classes de 10 mm : 10,1 à 20,0 etc. des hauteurs                      des carrés                      des cubes			Valeurs moyennes par classes de 5 mm : 10,0 à 14,9 etc. des hauteurs                      des carrés                      des cubes		
4.55	29.	210.	2.33	7.	27.
14.55	220.	3 441.	7.33	56.	440.
24.55	611.	15 402.	12.33	154.	1 951.
34.55	1 202.	42 093.	17.33	302.	5 313.
44.55	1 993.	89 515.	22.33	501.	11 273.
54.55	2 984.	163 666.	27.33	749.	20 584.
64.55	4 175.	270 547.	32.33	1 047.	33 993.
74.55	5 566.	416 158.	37.33	1 396.	52 252.
84.55	7 157.	606 499.	42.33	1 794.	76 111.
94.55	8 948.	847 570.	47.33	2 242.	106 319.
104.55	10 939.	1 145 370.	52.33	2 740.	143 627.
114.55	13 130.	1 505 901.	57.33	3 289.	188 784.
124.55	15 521.	1 935 162.	62.33	3 887.	242 541.
134.55	18 112.	2 439 152.	67.33	4 535.	305 647.
144.55	20 903.	3 023 873.	72.33	5 234.	378 853.
154.55	23 894.	3 695 325.	77.33	5 982.	462 908.
164.55	27 085.	4 459 506.	82.33	6 780.	558 563.
174.55	30 476.	5 322 417.	87.33	7 629.	666 567.
184.55	34 067.	6 290 058.	92.33	8 527.	787 670.
194.55	37 858.	7 368 429.	97.33	9 475.	922 624.

## ANNEXE 3

EXEMPLE D'AJUSTEMENT GRAPHIQUE A UNE LOI EXPONENTIELLE GÉNÉRALISÉE,  
AVEC PARAMÈTRE DE FORME POSITIFPRÉCIPITATIONS ANNUELLES A BIR MOGHREIM (MAURITANIE)  
(Taille de l'échantillon  $n = 18$ , en mm)

1955	21,1	1960	11,1	1965	80,2	1970	18,2
1956	55,2	1961	5,0	1966	57,7	1971	52,8
1957	128,7	1962	28,3	1967	74,8	1972	16,5
1958	9,9	1963	10,5	1968	8,5		
1959	34,5	1964	19,6	1969	143,2		

PRÉCIPITATIONS RANGÉES  $P_i = \frac{i - 0,5}{n}$ 

Rang	Hauteur (mm)	$1/P_i$	$\log 1/P_i$	$x_0 = 4,7$ $x_i - x_0$ (mm)
1	143,2	36/1	1,556	138,5
2	128,7	36/3	1,079	124,0
3	80,2	36/5	0,857	75,5
4	74,8	36/7	0,711	70,1
5	57,7	36/9	0,602	53,0
6	55,2	36/11	0,515	50,5
7	52,8	36/13	0,442	48,1
8	34,5	36/15	0,380	29,8
9	28,3	36/17	0,326	23,6
10	21,1	36/19	0,278	16,4
11	19,6	36/21	0,234	14,9
12	18,2	36/23	0,195	13,5
13	16,5	36/25	0,158	11,8
14	11,1	36/27	0,125	6,4
15	10,5	36/29	0,0939	5,8
16	9,9	36/31	0,0649	5,2
17	8,5	36/33	0,0378	3,8
18	5,0	36/35	0,0122	0,3

## DÉTERMINATION DES PARAMÈTRES

Nous avons fait un premier essai avec  $x_0 = 0$  (cf. fig. 7) dans un graphique log-log en portant en ordonnées  $\log(1/P_i)$  et en abscisses la précipitation correspondant au rang  $i$ . La figure montre que pour  $x_0 = 0$  l'alignement n'est pas satisfaisant : le sens de la courbure de la courbe dessinée par les points représentatifs montre qu'il faut faire croître  $x_0$  pour améliorer l'alignement.

Nous avons fait divers autres essais et retenu la valeur 4,7 mm pour le paramètre de position  $x_0$  en prenant comme critère de choix de la droite représentative de chercher celle qui recoupe le plus souvent la ligne brisée joignant les points « observés » et répondant aux conditions suivantes :

Nous cherchons à tracer deux droites à peu près parallèles s'appuyant sur des points représentatifs, les moins distantes l'une de l'autre dans leurs parties correspondant à ces points et à enfermer entre ces deux droites la majeure partie de ces points représentatifs des observations. La droite représentative (qui doit répondre au premier critère de choix ci-dessus) est à peu près parallèle à la bissectrice de ces deux droites et laisse de part et d'autre

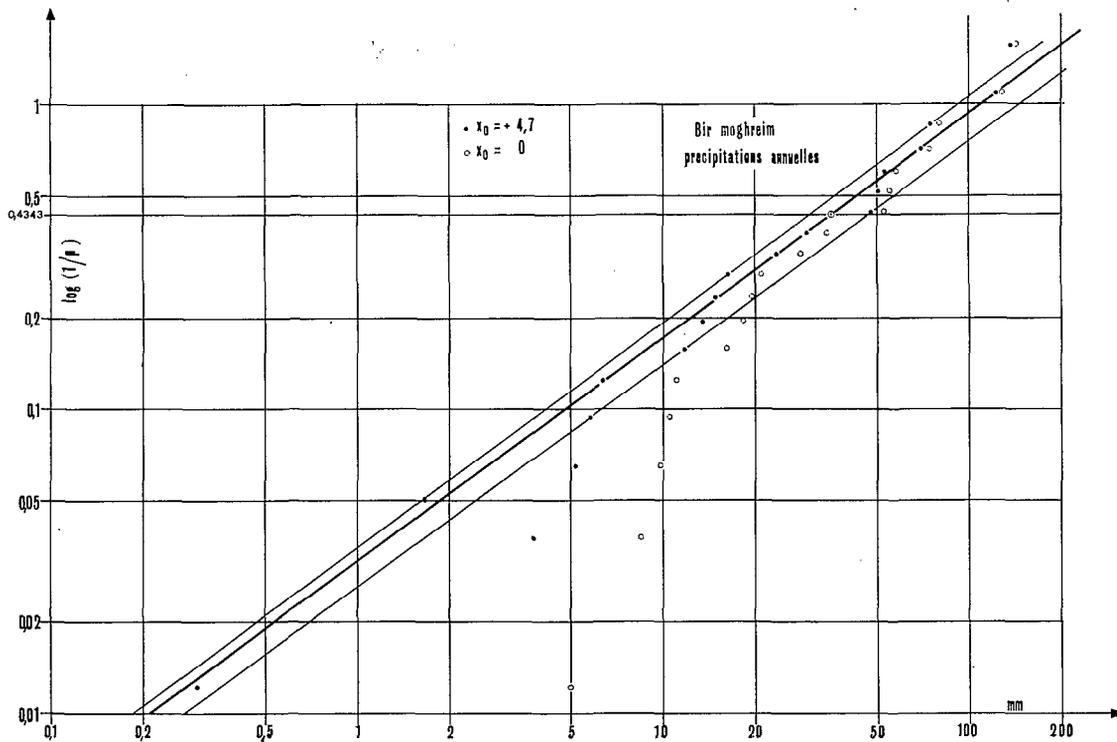


Fig. 7

le même nombre de points « observés ». Ce procédé n'a pas de fondement mathématique, il revient, en gros, à estimer que l'erreur d'échantillonnage sur une valeur de rang  $i$  est proportionnelle à  $(x_i - x_0)$ .

Comme la droite correspond à l'équation

$$\log \left[ \log \frac{1}{P} \right] - \log 0,4343 = \frac{1}{\delta} \left[ \log (x - x_0) - \log s \right]$$

pour :

$$\log \frac{1}{P_s} = 0,4343$$

on a :

$$s = x_s - x_0$$

d'où :

$$s = 35,5 \text{ mm}$$

et :

$$\frac{1}{\delta} = \frac{\text{différence en mm entre ordonnées } 0,01 \text{ et } 1}{\text{différence en mm entre abscisses correspondantes}} = \frac{250}{340,5} = 1/1,36$$

d'où la fonction de répartition au non-dépassement :

$$F = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{x - 4,7}{35,5} \right)^{1/1,36} \right] = 1 - P$$

qui nous donne :

— pour précipitation moyenne annuelle :  $4,7 + 35,5 \Gamma(1,36 + 1) = 47,7 \text{ mm}$  (la moyenne observée sur 18 ans étant de 43,1 mm) ;

— pour précipitation annuelle médiane : 26,2 mm (la médiane observée étant comprise entre 21,1 et 28,3 mm) ;

— pour les précipitations de récurrences 1 fois en 10 ans      6,4 mm et 115,1 mm,  
1 fois en 100 ans      4,8 mm et 288,0 mm.

## ANNEXE 4

EXEMPLE D'AJUSTEMENT GRAPHIQUE A UNE LOI EXPONENTIELLE GÉNÉRALISÉE,  
AVEC PARAMÈTRE DE FORME NÉGATIFPRÉCIPITATIONS ANNUELLES A BIR MOGHREIM (MAURITANIE)  
(Taille de l'échantillon  $n = 18$ , en mm)

1955	21,1	1960	11,1	1965	80,2	1970	18,2
1956	55,2	1961	5,0	1966	57,7	1971	52,8
1957	128,7	1962	28,3	1967	74,8	1972	16,3
1958	9,9	1963	10,5	1968	8,5		
1959	34,5	1964	19,6	1969	143,2		

PRÉCIPITATIONS RANGÉES  $F_i = \frac{i - 0,5}{n}$ 

Rang	Hauteur (mm)	$1/F_i$	Log $1/F_i$	$x_0 = -18,0$ $x_i - x_0$ (mm)
1	5,0	36/1	1,556	18,0
2	8,5	36/3	1,079	21,5
3	9,9	36/5	0,857	22,9
4	10,5	36/7	0,711	23,5
5	11,1	36/9	0,602	24,1
6	16,5	36/11	0,515	29,5
7	18,2	36/13	0,442	31,2
8	19,6	36/15	0,380	32,6
9	21,1	36/17	0,326	34,1
10	28,3	36/19	0,278	41,3
11	34,5	36/21	0,234	47,5
12	52,8	36/23	0,195	65,8
13	55,2	36/25	0,158	68,2
14	57,7	36/27	0,125	70,7
15	74,8	36/29	0,0939	87,8
16	80,2	36/31	0,0649	93,2
17	128,7	36/33	0,0378	141,7
18	143,2	36/35	0,0122	156,2

## DÉTERMINATION DES PARAMÈTRES

Nous avons fait un premier essai avec  $x_0 = 0$  (fig. 8) sur un graphique log-log en portant en ordonnées  $\log(1/F_i)$  et en abscisses la précipitation correspondant au rang  $i$ . La figure montre que pour  $x_0 = 0$  l'alignement n'est pas satisfaisant : le sens de la courbure de la courbe dessinée par les points représentatifs montre qu'il faut faire décroître  $x_0$  pour améliorer l'alignement.

Nous avons fait divers autres essais et retenu la valeur  $-13,0$  mm pour le paramètre de position  $x_0$  en prenant comme critère de choix de la droite représentative de chercher celle qui recoupe le plus souvent la ligne brisée joignant les points « observés » et répondant aux conditions suivantes :

Nous cherchons à tracer deux droites à peu près parallèles, s'appuyant sur des points représentatifs, les moins distantes l'une de l'autre dans leurs parties correspondant à ces points et à enfermer entre ces deux droites la majeure partie de ces points représentatifs des observations. La droite représentative (qui doit répondre au premier critère de choix ci-dessus) est à peu près parallèle à la bissectrice de ces deux droites et laisse de part et d'autre

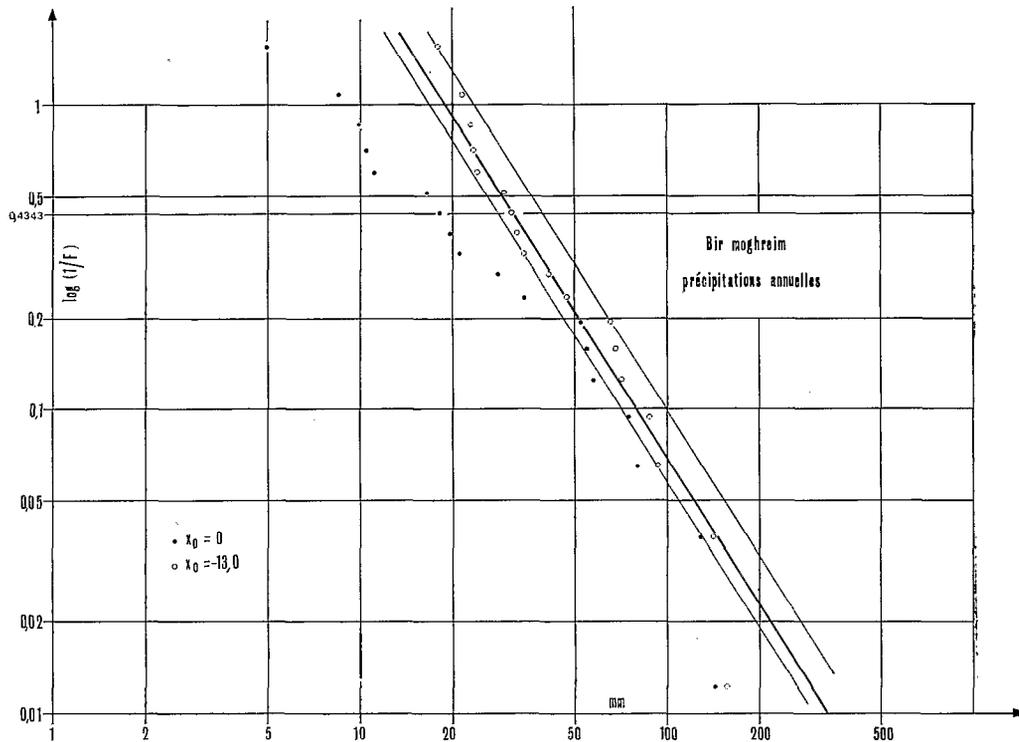


Fig. 8

le même nombre de points « observés ». Ce procédé n'a pas de fondement mathématique, et revient, en gros, à estimer que l'erreur d'échantillonnage sur une valeur de rang  $i$  est proportionnelle à  $(x_i - x_0)$ .

Comme la droite correspond à l'équation :

$$\log \left[ \log 1/F \right] - \log 0,4343 = \frac{1}{\delta} \left[ \log (x - x_0) - \log s \right]$$

pour :

$$\log \frac{1}{F_s} = 0,4343$$

on a :

$$s = x_s - x_0$$

d'où :

$$s = 31,8 \text{ mm}$$

et :

$$\frac{1}{\delta} = \frac{\text{différence en mm entre ordonnées } 0,01 \text{ et } 1}{\text{différence en mm entre abscisses correspondantes}} = \frac{250}{156} = -1/0,625$$

d'où la fonction de répartition au non-dépassement :

$$F = \exp \left[ - \left( \frac{x + 13,0}{31,8} \right)^{-1/0,625} \right]$$

qui nous donne :

— pour précipitation annuelle moyenne : 62,5 mm (la variance de cette moyenne étant infinie car  $\delta < -0,5$ , et la moyenne observée sur 18 ans étant de 43,1 mm) ;

— pour précipitation annuelle médiane : 27,0 mm (la médiane observée étant comprise entre 21,1 et 28,3 mm) ;

— pour les précipitations annuelles de récurrences 1 fois en 10 ans 5,9 mm et 116,8 mm,  
1 fois en 100 ans 0 mm et 550,7 mm.

## ANNEXE 5

## EXEMPLE D'AJUSTEMENT GRAPHIQUE A UNE LOI EXPONENTIELLE GÉNÉRALISÉE TRONQUÉE, AVEC PARAMÈTRE DE FORME POSITIF

## PRÉCIPITATIONS HORS CLASSES (ARRONDIES AU mm)

Rang	Hauteur (mm)	$N/(R - 0,5)$	$F_0 = 0,288$ $\log \left( \frac{N(1 - F_0)}{R - 0,5} \right)$	$F_0 = 0$ $\log \left( \frac{N(1 - F_0)}{R - 0,5} \right)$
1	341	27 028	4,284	4,432
2	299	9 009,3	3,807	3,955
3	238	5 405,6	3,585	3,734
4	157	3 861,1	3,439	3,587
5	156	3 003,1	3,330	3,496
6	152	2 457,1	3,243	3,391
7	149	2 079,1	3,170	3,318

## PRÉCIPITATIONS CLASSÉES

8	< 140	1 801,9		3,256
10	≥ 130	1 422,5	3,006	3,153
11	< 130	1 287,0		3,109
11	≥ 120	1 287,0	2,962	3,109
12	< 120	1 175,1		3,070
13	≥ 110	1 081,1	2,886	3,034
14	< 110	1 001,0		3,001
17	≥ 100	819,03	2,766	2,914
18	< 100	772,23		2,889
24	≥ 90	575,06	2,612	2,760
25	< 90	551,59		2,742
39	≥ 80	351,01	2,398	2,546
40	< 80	342,13		2,535
66	≥ 70	206,32	2,167	2,315
67	< 70	203,22		2,309
95	≥ 60	143,005	2,008	2,155
96	< 60	141,508		2,151
176	≥ 50	77,003	1,739	1,886
177	< 50	76,567		1,884
292	≥ 40	46,360	1,519	1,665
293	< 40	46,202		1,664
500	≥ 30	27,055	1,285	1,432
919	≥ 20	14,713	1,020	1,167
2 157	≥ 10	6,267	0,650	0,797
9 617	≥ 0,1			

## DÉTERMINATION DES PARAMÈTRES

— La valeur du paramètre de position  $x_0$  a été choisie, évidemment, égale à zéro.

— Nous avons fait un premier essai avec  $F_0 = 0,288 =$  nombre de jours de précipitations supérieures ou égales à 0,1 mm divisé par N, et nous avons porté sur un graphique log-log (fig. 9) en abscisses  $\log \left[ \frac{N(1 - F_0)}{R - 0,5} \right]$ , en ordonnées la précipitation correspondant au rang R, N étant le nombre total de jours de la période d'observation. Seuil de troncature choisi 10 mm : nous n'avons pas reporté le point correspondant à 0,1 mm.

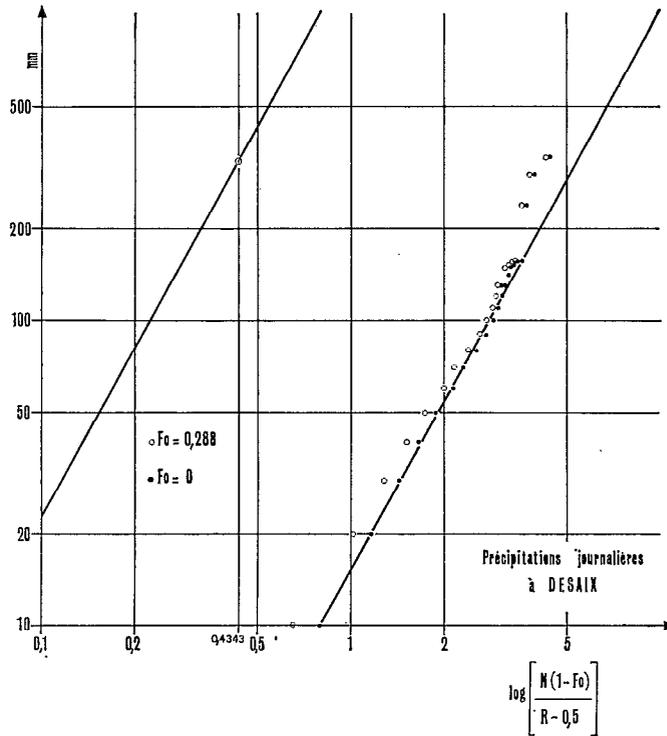


Fig. 9

La figure montre que pour la valeur choisie de  $F_0$ , l'alignement des points n'est pas satisfaisant : le sens de la courbure de la courbe qu'ils dessinent pour  $R$  grand, montre qu'il faut faire décroître  $F_0$  pour améliorer l'alignement.

— Nous avons fait un second essai avec  $F_0 = 0$  : l'alignement des points représentatifs est bien amélioré pour  $R$  grand, à peine pour les fortes précipitations. Comme cela n'a pas de sens de prendre  $F_0$  négatif (cela revient à prendre un nombre total de jours d'observation  $N' > N$ ) nous sommes obligés de nous contenter du graphique tel qu'il est, et de tracer à l'œil une droite qui respecte le mieux possible les points et leur pondération (d'autant plus forte que la précipitation est petite).

— Comme la droite correspond à l'équation :

$$\log \left( \log \left[ \frac{N(1 - F_0)}{r} \right] \right) - \log 0,4343 = \frac{1}{\delta} \left[ \log (x - x_0) - \log s \right]$$

pour :

$$\log \left[ \frac{N(1 - F_0)}{r} \right] = 0,4343$$

on a :

$$s = (x - x_0)$$

d'où :

$$s = 3,30$$

et :

$$\delta = \frac{\text{différence en mm entre ordonnées 10 et 1 000}}{\text{différence en mm entre abscisses correspondantes}} = \frac{250}{137} = 1,825$$

$$\frac{1}{\delta} = 0,55$$

d'où la fonction de répartition au non-dépassement :

$$F = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{x}{3,30} \right)^{0,55} \right]$$



## ANNEXE 6

## EXEMPLE D'AJUSTEMENT GRAPHIQUE A UNE LOI EXPONENTIELLE GÉNÉRALISÉE TRONQUÉE, AVEC PARAMÈTRE DE FORME NÉGATIF

## PRÉCIPITATIONS JOURNALIÈRES A DESAIX (FORT-DE-FRANCE, MARTINIQUE)

37 années de relevés soit  $N = 13\ 514$  jours.  
Moyenne annuelle des précipitations : 2 024 mm.

## PRÉCIPITATIONS HORS CLASSES (ARRONDIES AU mm)

Rang	Hauteur (mm)	$(R - 0,5)/N$	$-\log \left( 1 - \frac{F_0 = 0,8}{N(1 - F_0)} \frac{R - 0,5}{N} \right)$	$-\log \left( 1 - \frac{F_0 = 0,95}{N(1 - F_0)} \frac{R - 0,5}{N} \right)$
1	341	0,000 037	0,000 080	0,000 321
2	299	0,000 111	0,000 241	0,000 967
3	238	0,000 185	0,000 402	0,001 61
4	157	0,000 259	0,000 563	0,002 26
5	156	0,000 333	0,000 724	0,002 90
6	152	0,000 407	0,000 885	0,003 55
7	149	0,000 481	0,001 046	0,004 19

## PRÉCIPITATIONS CLASSÉES

8	< 140	0,000 555		0,004 85
10	≥ 130	0,000 703	0,001 53	0,006 15
11	< 130	0,000 777		0,006 80
11	≥ 120	0,000 777	0,001 69	0,006 80
12	< 120	0,000 851		0,007 45
13	≥ 110	0,000 925	0,002 01	0,008 11
14	< 110	0,000 999		0,008 77
17	≥ 100	0,001 221	0,002 66	0,010 8
18	< 100	0,001 295		0,011 4
24	≥ 90	0,001 739	0,003 79	0,015 4
25	< 90	0,001 813		0,016 1
39	≥ 80	0,002 849	0,006 23	0,025 5
40	< 80	0,002 923		0,026 2
66	≥ 70	0,004 847	0,010 66	0,044 3
67	< 70	0,004 921		0,045 1
95	≥ 60	0,006 993	0,015 5	0,065 5
96	< 60	0,007 067		0,066 3
176	≥ 50	0,012 987	0,029 2	0,131
177	< 50	0,013 061		0,132
292	≥ 40	0,021 570	0,049 6	0,246
293	< 40	0,021 644		0,247
500	≥ 30	0,036 962	0,088 7	0,585
919	≥ 10	0,067 967	0,180 3	—
2 157	≥ 10	0,159 575	0,694	—
9 617	≥ 0,1	0,711 6		

## DÉTERMINATION DES PARAMÈTRES

— La valeur du paramètre de position  $x_0$  a été choisie, évidemment, égale à zéro.

— Nous avons fait un premier essai avec  $F_0 = 0,8$  (cf. tableau ci-dessus) en portant sur un graphique log-log (fig. 10), en abscisses  $-\log \left( 1 - \frac{R - 0,5}{N(1 - F_0)} \right)$ , en ordonnées la précipitation correspondant au rang R, N étant

le nombre total de jours de la période d'observation. Le seuil de troncature est de 10 mm, car pour cette valeur  $\frac{R - 0,5}{N(1 - F_0)} < 1$ .

La figure montre que pour cette valeur choisie de  $F_0$ , l'alignement des points n'est pas satisfaisant et qu'ils dessinent, pour R grand, une courbe à courbure négative : donc, pour améliorer l'alignement il faut faire croître  $F_0$ .

En effet, le développement en série de  $-\log \left( 1 - \frac{R - 0,5}{N(1 - F_0)} \right)$  est :

$$0,4343 \left[ \frac{R'/N}{1 - F_0} + \frac{1}{2} \left( \frac{R'/N}{1 - F_0} \right)^2 + \dots \right] \text{ avec } R' = R - 0,5$$

et tant que  $R'$  est petit, l'expression

$$\log \left[ -\log \left( 1 - \frac{R'/N}{1 - F_0'} \right) \right] - \log \left[ -\log \left( 1 - \frac{R'/N}{1 - F_0} \right) \right]$$

peut s'écrire approximativement :

$$\log (1 - F_0) - \log (1 - F_0')$$

du signe de  $F' - F_0$ .

Lorsque  $R'$  croît, il faut garder plus d'un terme dans le développement de  $-\log \left( 1 - \frac{R'/N}{1 - F_0} \right)$  et en deuxième approximation, l'expression peut s'écrire :

$$\log (1 - F_0) - \log (1 - F_0') + A$$

avec  $A \approx \frac{1}{2} \frac{R'}{N} \left( \frac{1}{1 - F_0'} - \frac{1}{1 - F_0} \right)$  du signe de  $F_0' - F_0$  et croissant avec  $R'$ .

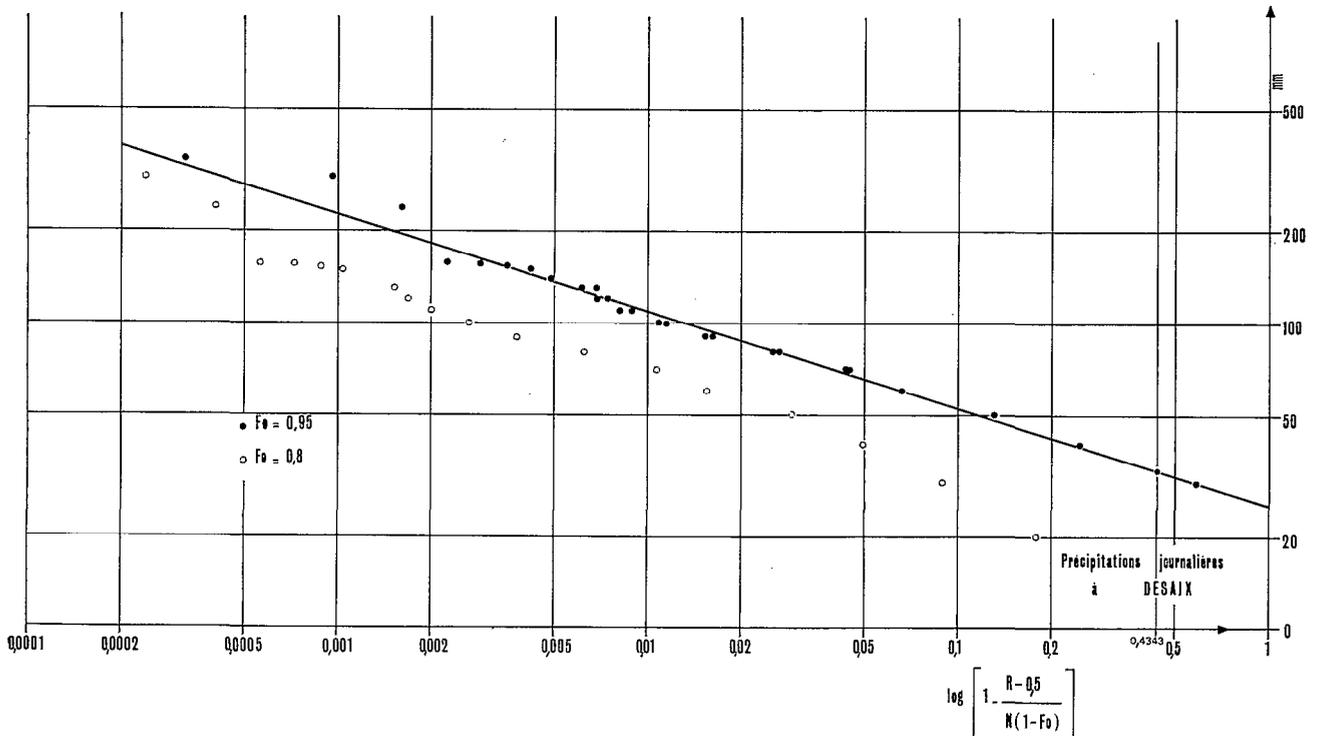


Fig. 10

C'est-à-dire qu'en choisissant une nouvelle valeur  $F_0'$  supérieure à  $F_0$  les nouveaux points représentatifs seront d'autant plus éloignés à droite des premiers points que  $R$  sera grand (et la précipitation petite).

— Nous avons fait un second essai avec  $F_0 = 0,9$  (non représenté) et qui n'était pas satisfaisant.

— Et nous avons fait un dernier essai avec  $F_0 = 0,95$  qui nous oblige à prendre un seuil de troncature de 30 mm (pour 20 mm  $\frac{R - 0,5}{N(1 - F_0)} > 1$ ).

Cet essai semble donner un résultat satisfaisant. A part les points représentatifs correspondant aux 3 plus fortes précipitations, les autres, pour une abscisse donnée (c'est-à-dire une fréquence donnée) sont au plus à 7% en hauteur de précipitation de celle lue sur la droite.

Comme la droite correspond à l'équation :

$$\log \left[ -\log \left( 1 - \frac{r/N}{1 - F_0} \right) \right] - \log (0,4343) = \frac{1}{\delta} (\log (x - x_0) - \log s)$$

pour :

$$-\log \left( 1 - \frac{r/N}{1 - F_0} \right) = 0,4343$$

on a :

$$s = (x - x_0)$$

d'où :

$$s = 32,8$$

et :

$$1/\delta = - \frac{\text{différence en mm entre abscisses 0,01 et 1}}{\text{différence en mm entre ordonnées correspondantes}} = \frac{-250}{79,5} = -3,15$$

$$\delta = -0,318$$

d'où la fonction de répartition au non-dépassement :

$$F = 0,95 + 0,05 \exp \left[ - \left( \frac{x}{32,8} \right)^{-3,15} \right] \quad (x \text{ précipitation/jour en mm})$$

qui peut s'écrire, au dépassement,  $r$  étant le rang :

$$r = N(1 - F_0) \left( 1 - \exp \left[ - \left( \frac{x}{32,8} \right)^{-3,15} \right] \right)$$

c'est-à-dire :

$$1 - \frac{r}{675,7} = \exp \left[ - \left( \frac{x}{32,8} \right)^{-3,15} \right]$$

d'où  $x = 81,8$  mm pour la précipitation de fréquence 1 fois par an ( $r = 37$ )

$x = 171,2$  mm 1 fois en 10 ans ( $r = 3,7$ )

$x = 355,8$  mm 1 fois en 100 ans ( $r = 0,37$ ).

— Remarquons que pour  $s = 32,8$  et  $\delta = -0,318$  la valeur du mode est de 30,04 mm, la troncature des observations se trouve avoir été faite à la valeur minimale possible.

## ANNEXE 7

## EXEMPLE D'AJUSTEMENT PAR LE MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

Nous avons repris les données de l'annexe 1, précipitations annuelles à Bouaffé (C.I.) pour les traiter par la méthode du maximum de vraisemblance en utilisant le sous-programme PEXGE, et le sous-programme CEXGE pour calculer des intervalles de confiance.

Le programme principal, ci-joint, est court et donne en sortie, ci-jointe :

- pour faciliter la représentation graphique des observations : leurs récurrences en fonction des précipitations rangées,
- les valeurs de la précipitation moyenne observée et les valeurs des paramètres d'ajustement : le paramètre d'échelle ayant été choisi positif a priori et le paramètre de forme également choisi positif a priori,
- les valeurs des précipitations calculées pour certaines récurrences, d'après les valeurs des paramètres, pour faciliter la représentation graphique,
- les intervalles de confiance à 50% pour certaines fréquences au non-dépassement. Dans le cas des fréquences 0,01 et 0,001 des étoiles ont été imprimées : la borne inférieure de l'intervalle de confiance est pratiquement X0 paramètre de position.

A7 2

```

1 FORMAT(#1#,20X,#PRECIPITATIONS ANNUELLES EN MM A BOUAFLE (CI) 192
24-73#//20X,#ECHANTILLON DE TAILLE N#,I3,# TRAITÉ EN DISTRIBUTION
3DE GOODRICH#//20X,# PRECIPITATIONS OBSERVEES RANGEES#//20X,#RANG
4 HAUTEUR RECUR OBS HAUTEUR#)
2 FORMAT(20X,I3,F13.0,F14.2,F12.0)
3 FORMAT(/20X,# MOYENNE OBSERVEE#,F9.1//20X,#VALEURS DES PARAMETRES
2PAR MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE#//20X,# PARAMETRE DE FORME #,F10.4/
332X,#D ECHELLE #,F8.2/32X,#DE POSITION#,F8.2//20X,# PRECIPITATIO
4NS CALCULEES#//20X,#FREQ HAUTEUR RECURRENCE HAUTEUR#)
4 FORMAT(21X,F3.2,F13.1,F13.2,F13.1)
5 FORMAT(/20X,#INTERVALLES DE CONFIANCE A#,F6.2//20X,#FREQ HAUTE
2UR BORNE INF BORNE SUP#)
6 FORMAT(20X,F4.3,3(F13.1))
DIMENSION X(50),BC(2),F(9)
DATA X/995.,1000.,1027.,1061.,1076.,1089.,1094.,1101.,1118.,
21144.,1180.,1193.,1203.,1221.,1223.,1224.,1236.,1252.,1263.,
31271.,1283.,1300.,1325.,1332.,1340.,1340.,1341.,1358.,1376.,1398.,
41429.,1447.,1464.,1469.,1487.,1514.,1523.,1525.,1537.,1600.,1609.,
51613.,1694.,1704.,1720.,1898.,1913.,1930./
DATA F/.01,.02,.05,.1,.2,.25,.3,.4,.5/,BJ/0./,DS/1./,CO/.5/,R/1./
N=50
WRITE(6,1)N
M=N/2
DO 10 I=1,M
T=N/(I-.5)
10 WRITE(6,2)I,X(I),T,X(N+1-I)
CALL PEXGE(X,DE,S,XO,XM,N,BJ,DS)
WRITE(6,3)XM,DE,S,XO
DO 12 I=1,9
T=1./F(I)
A=XO+S*(-ALOG(1.-F(I)))**DE
B=XO+S*(ALOG(T))**DE
12 WRITE(6,4)F(I),A,T,B
WRITE(6,5)CO
DO 14 K=1,3
R=R/10.
T=3.*R-1.
DO 14 J=1,2
T=T+1.-2.*R
XF=XO+S*(-ALOG(1.-T))**DE
CALL CEXGE(DE,S,XO,N,BJ,DS,T,XF,CO,BC,X)
14 WRITE(6,6)T,XF,BC
STOP
END

```

## PRÉCIPITATIONS ANNUELLES EN mm A BOUAFLE (COTE D'IVOIRE) 1924-1973

Echantillon de taille  $n = 50$  traité en distribution de Goodrich.

## PRÉCIPITATIONS OBSERVÉES RANGÉES

Rang	Hauteur	Récurrence observée	Hauteur	Rang	Hauteur	Récurrence observée	Hauteur
1	995.	100.00	1 930.	14	1 203.	3.70	1 487.
2	1 000.	33.33	1 913.	15	1 221.	3.45	1 469.
3	1 027.	20.00	1 898.	16	1 223.	3.23	1 464.
4	1 027.	14.29	1 720.	17	1 224.	3.03	1 447.
5	1 061.	11.11	1 704.	18	1 236.	2.86	1 429.
6	1 076.	9.09	1 694.	19	1 252.	2.70	1 398.
7	1 089.	7.69	1 613.	20	1 255.	2.56	1 376.
8	1 094.	6.67	1 609.	21	1 263.	2.44	1 358.
9	1 101.	5.88	1 600.	22	1 271.	2.33	1 341.
10	1 118.	5.26	1 537.	23	1 283.	2.22	1 340.
11	1 144.	4.76	1 525.	24	1 300.	2.13	1 340.
12	1 180.	4.35	1 523.	25	1 325.	2.04	1 332.
13	1 193.	4.00	1 514.				

Moyenne observée : 1 354.4

## VALEURS DES PARAMÈTRES PAR MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

Paramètre de forme	0.6209
d'échelle	425.01
de position	972.44

## PRÉCIPITATIONS CALCULÉES

Fréquence	Hauteur	Récurrence	Hauteur
.01	996.9	100.00	2 069.4
.02	1 010.1	50.00	1 963.7
.05	1 039.7	20.00	1 812.4
.10	1 077.5	10.00	1 685.8
.20	1 139.9	5.00	1 543.5
.25	1 168.5	4.00	1 493.0
.30	1 196.5	3.33	1 449.4
.40	1 252.5	2.50	1 375.0
.50	1 310.9	2.00	1 310.9

## INTERVALLES DE CONFIANCE A 0.50

Fréquence	Hauteur	Borne inférieure	Borne supérieure
.100	1 077.5	1 064.9	1 101.6
.900	1 685.8	1 626.4	1 727.9
.010	996.9*****		1 031.8
.990	2 069.4	2 063.2	2 253.8
.001	978.3*****		1 011.0
.999	2 383.4	2 257.6	2 613.7

## ANNEXE 8

EXEMPLE D'AJUSTEMENT PAR LE MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE.  
TAILLE D'ÉCHANTILLON INCONNUE

Cet exemple traite les débits maximaux de 37 crues, complexes ou non, considérées comme indépendantes, supérieures à 20 m<sup>3</sup>/s, observées pendant quatre années consécutives à la station du Rocher des Pigeons (Algérie), par la méthode du maximum de vraisemblance en utilisant le sous-programme PEXGEV (paramètres de forme et d'échelle choisis a priori positifs) et le sous-programme CEXGEV pour calculer des intervalles de confiance.

Le programme principal, ci-joint, est court et donne en sortie, ci-jointe :

- pour faciliter la représentation graphique des observations (fig. 11) leurs récurrences en années en fonction de la taille « calculée » de l'échantillon,
- les valeurs des paramètres d'ajustement, dont le paramètre de position choisi égal à zéro a priori,
- les valeurs de débits maximaux calculés d'après les valeurs de paramètres et certaines récurrences en années, pour faciliter la représentation graphique (fig. 11). Les intervalles de confiance ont été calculés pour certaines récurrences.

## DÉBITS MAXIMAUX DE CRUES AU ROCHER DES PIGEONS (ALGÉRIE)

Echantillon en m<sup>3</sup>/s de taille 37 sur 4 années, traité en distribution de Goodrich.

## DÉBITS OBSERVÉS RANGÉS

Rang	Fréq./VN	Récurr./an	Débit	Rang	Fréq./VN	Récurr./an	Débit
1	0.007 1	8.000	824.0	20	0.276 3	0.205	71.7
2	0.021 3	2.667	819.0	21	0.290 5	0.195	68.9
3	0.035 4	1.600	411.0	22	0.304 6	0.186	63.3
4	0.496 0	1.143	403.0	23	0.318 8	0.178	57.8
5	0.063 8	0.889	403.0	24	0.333 0	0.170	47.3
6	0.077 9	0.727	324.0	25	0.347 2	0.163	47.3
7	0.092 1	0.615	250.0	26	0.361 3	0.157	43.8
8	0.106 3	0.533	229.0	27	0.375 5	0.151	42.2
9	0.120 4	0.471	198.0	28	0.389 7	0.145	39.6
10	0.134 6	0.421	189.0	29	0.403 8	0.140	38.7
11	0.148 8	0.381	182.0	30	0.418 0	0.136	37.0
12	0.162 9	0.348	156.0	31	0.432 2	0.131	37.0
13	0.177 1	0.320	153.0	32	0.446 3	0.127	30.9
14	0.191 3	0.296	136.0	33	0.460 5	0.123	29.4
15	0.205 5	0.276	89.0	34	0.474 7	0.119	29.0
16	0.219 6	0.258	89.0	35	0.488 8	0.116	27.5
17	0.233 8	0.242	77.4	36	0.503 0	0.113	23.1
18	0.248 0	0.229	76.0	37	0.517 2	0.110	21.2
19	0.262 1	0.216	71.7				

## VALEURS DES PARAMÈTRES PAR MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

Paramètre de forme	1.9219
d'échelle	46.35
choisi de position	0.0
Taille calculée	70.57

## DÉBITS CALCULÉS DE RÉCURRENCE

10 fois par an	15.62
5	72.37
2	206.76
1	351.70

## INTERVALLES DE CONFIANCE A 0.50

	Borne inférieure	Borne supérieure
1 fois en 2 ans	533.	579.
5	827.	930.
10	1 091.	1 187.
20	1 389.	1 556.
50	1 836.	2 248.
100	2 214.	3 425.

```

1 FORMAT(1#,20X, #DEBITS MAXIMAUX DE CRUES AU ROCHER DES PIGEONS (AL
2G) #//20X, #ECHANTILLON EN M3S DE TAILLE 37 SUR 4 ANNEES TRAITÉ EN
3DISTRIBUTION #/76X, #DE GOODRICH #/20X, # DEBITS OBSERVES RANGES #/20X,
4#RANG FREQ/VN RECURRENCE/AN DEBIT#)
2 FORMAT(20X, I3, F9.4, F11.3, F13.1)
3 FORMAT(/20X, #VALEURS DES PARAMETRES PAR MAXIMUM DE VRATSEMBLANCE #/
220X, # PARAMETRE DE FORME #, F10.4/32X, #D ECHELLE #, F8.2/25X, #CH
30ISI DE POSITION #, F8.2/27X, #TAILLE CALCULEE #, F7.2//20X, # DEBITS CA
4LCULES DE RECURRENCE #)
4 FORMAT(20X, I2, # FOIS PAR AN #, F12.2)
5 FORMAT(20X, #1 FOIS EN #, I4, # ANS #, F7.0, 9X, F7.0, 5X, F7.0)
6 FORMAT(20X, #INTERVALLES DE CONFIANCE A .50 BORNE INF BORNE SU#)
DIMENSION X(37), BC(2), IT(10)
DATA X/824., 819., 411., 403., 403., 324., 250., 229., 198., 189., 182., 156.
2, 153., 136., 89., 89., 77.4, 76., 71.7, 71.7, 68.9, 63.3, 57.8, 47.3, 47.3, 43.
38, 42.2, 39.6, 38.7, 37.0, 37.0, 30.9, 29.4, 29.0, 27.5, 23.1, 21.2/, X0/0./
DATA AN/4./, XH/20./, N/37/, CO/.5/, IT/10, 5, 2, 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100/
WRITE(6, 1)
CALL PEXGEV(X, DE, S, X0, VN, N, XH)
DO 10 I=1, N
F=(I-.5)/VN
R=AN/(I-.5)
10 WRITE(6, 2) I, F, R, X(I)
WRITE(6, 3) DE, S, X0, VN
DO 12 I=1, 4
XF=S*(ALOG(VN/AN/IT(I)))**DE
12 WRITE(6, 4) IT(I), XF
NV=VN*.5
DO 14 I=5, 10
F=1.-AN/VN/IT(I)
XF=S*(ALOG(VN/AN*IT(I)))**DE
CALL CEXGEV(DE, S, X0, NV, XH, F, XF, CO, BC)
14 WRITE(6, 5) IT(I), XF, BC
WRITE(6, 6)
STOP
END

```

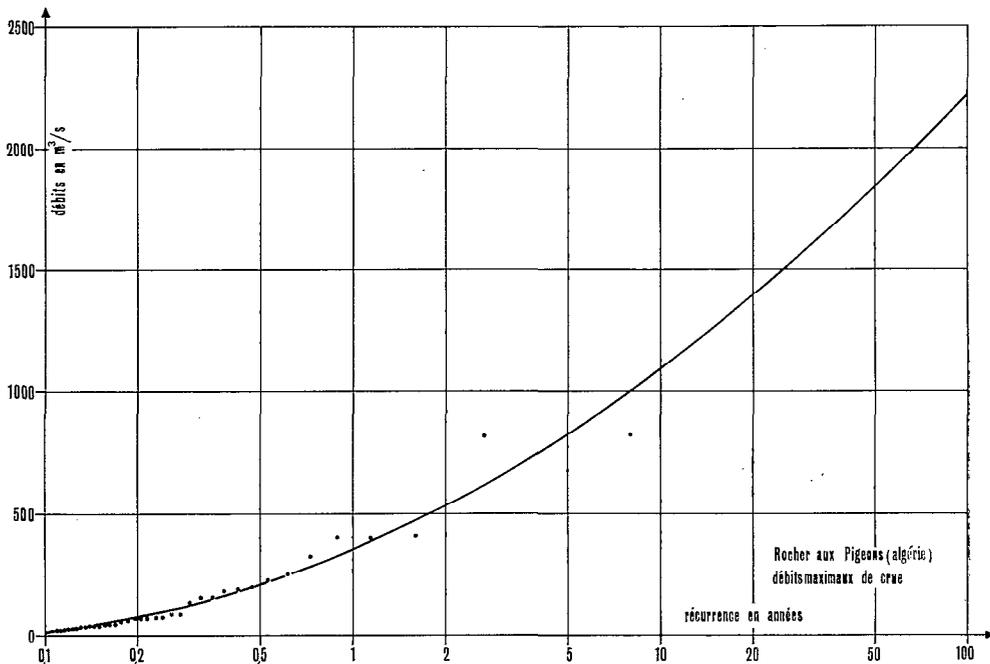


Fig. 11

TABLEAU 1

DISTRIBUTION EXPONENTIELLE GÉNÉRALISÉE  
FORMES DE LA FONCTION DE DENSITÉ

$\delta$	Allure	$\gamma_1$ ( $s > 0$ )	$\gamma_2$	
$\left. \begin{array}{l} - .333\ 3 \\ - .25 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} \text{en cloche} \\ \text{mode réel} \\ 2 \text{ points d'inflexion} \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} \text{sans} \\ \text{signification} \\ 0 < \gamma_1 \\ 0 < \gamma_1 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} \text{sans} \\ \text{signification} \\ 0 < \gamma_2 \\ 0 < \gamma_2 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{moyenne sans signification} \\ \text{mode} < \text{médiane} < \text{moyenne} \\ \\ \\ \text{mode} < \text{médiane} < \text{moyenne} \end{array} \right.$
0 = dégénérée en distribution de Gumbel				
$\left. \begin{array}{l} .173 \\ .277 \\ .290\ 7 \\ .301\ 8 \\ .306\ 8 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} \text{en cloche} \\ \\ \\ \text{mode réel} \\ \\ \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} \gamma_1 < 0 \\ \\ \\ \gamma_1 < 0 \\ \gamma_1 = 0 \\ 0 < \gamma_1 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} 0 < \gamma_2 \\ 0 < \gamma_2 \\ \gamma_2 = 0 \\ \gamma_2 < 0 \\ \\ \\ \\ \gamma_2 < 0 \\ \gamma_2 = 0 \\ 0 < \gamma_2 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} \text{moyenne} < \text{médiane} < \text{mode} \\ \\ \\ \text{moyenne} < \text{médiane} < \text{mode} \\ \text{moyenne} = \text{médiane} < \text{mode} \\ \text{médiane} < \text{moyenne} < \text{mode} \\ \text{médiane} < \text{moyenne} = \text{mode} \\ \text{médiane} < \text{mode} < \text{moyenne} \\ \text{médiane} = \text{mode} < \text{moyenne} \\ \text{mode} < \text{médiane} < \text{moyenne} \end{array} \right.$
.443	2 points d'inflexion		$\left. \begin{array}{l} \gamma_2 < 0 \\ \gamma_2 = 0 \\ 0 < \gamma_2 \end{array} \right\}$	
.5	$\left\{ \begin{array}{l} \text{en toboggan, mode réel} \\ 1 \text{ point d'inflexion} \end{array} \right.$			
.1	$\left\{ \begin{array}{l} \text{en J, pas de mode réel} \\ \text{pas de points d'inflexion} \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ 0 < \gamma_1 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ 0 < \gamma_2 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{mode} < \text{médiane} < \text{moyenne} \\ \text{il n'existe plus de mode réel} \end{array} \right.$

*Nota.* — Lorsque le paramètre d'échelle est positif, la borne est une borne inférieure et la distribution est étalée sur la droite, quel que soit le signe de  $\gamma_1$ . Lorsque le paramètre d'échelle est négatif, la distribution est étalée sur la gauche.

TABLE A

La table A donne pour des valeurs de  $\delta$  comprises entre — 0,75 et 1,50 et variant de 0,01 :

— en colonne 2 : les valeurs de  $\gamma_1$  coefficient d'asymétrie, quand il est calculable ;

— en colonne 3 :  $\sqrt{\Gamma(2\delta + 1) - [\Gamma(\delta + 1)]^2}$  ;

— en colonne 4 :  $\Gamma(\delta + 1)$  ;

— en colonne 5 :  $\Gamma(2\delta + 1) / [\Gamma(\delta + 1)]^2$  ;

Les différences sont calculées de façon à faciliter l'interpolation, si besoin.

## DISTRIBUTION EXPONENTIELLE GENERALISEE

	4
DELTA	
-0.75	3.62561
DIF	.14716
-0.74	3.47845
DIF	.13585
-0.73	3.34260
DIF	.12575
-0.72	3.21685
DIF	.11671
-0.71	3.10014
DIF	.10857
-0.70	2.99157
DIF	.10123
-0.69	2.89034
DIF	.09458
-0.68	2.79575
DIF	.08855
-0.67	2.70720
DIF	.08304
-0.66	2.62416
DIF	.07802
-0.65	2.54615
DIF	.07341
-0.64	2.47273
DIF	.06919
-0.63	2.40355
DIF	.06529
-0.62	2.33825
DIF	.06171
-0.61	2.27655
DIF	.05839
-0.60	2.21816
DIF	.05532
-0.59	2.16284
DIF	.05247
-0.58	2.11037
DIF	.04982
-0.57	2.06055
DIF	.04736
-0.56	2.01319
DIF	.04506
-0.55	1.96814
DIF	.04291
-0.54	1.92523
DIF	.04090
-0.53	1.88433
DIF	.03902
-0.52	1.84531
DIF	.03725
-0.51	1.80805
DIF	.03560
-0.50	1.77245

## DISTRIBUTION EXPONENTIELLE GENERALISEE

	3	4	5
DELTA			
-0.50	*****	1.77245	*****
DIF	*****	.03404	*****
-0.49	6.81321	1.73841	16.36020
DIF	*****	.03257	*****
-0.48	4.64230	1.70584	8.40609
DIF	.98974	.03119	*****
-0.47	3.65257	1.67465	5.75713
DIF	.60441	.02988	*****
-0.46	3.04816	1.64477	4.43450
DIF	.42106	.02865	.79207
-0.45	2.62710	1.61612	3.64243
DIF	.31637	.02748	.52677
-0.44	2.31073	1.58864	3.11566
DIF	.24966	.02638	.37515
-0.43	2.06107	1.56226	2.74052
DIF	.20389	.02533	.28036
-0.42	1.85718	1.53693	2.46015
DIF	.17079	.02434	.21716
-0.41	1.68638	1.51259	2.24300
DIF	.14588	.02340	.17290
-0.40	1.54050	1.48919	2.07010
DIF	.12654	.02250	.14070
-0.39	1.41397	1.46669	1.92940
DIF	.11114	.02165	.11654
-0.38	1.30283	1.44504	1.81286
DIF	.09863	.02084	.09794
-0.37	1.20421	1.42420	1.71493
DIF	.08829	.02007	.08331
-0.36	1.11592	1.40413	1.63161
DIF	.07962	.01933	.07160
-0.35	1.03630	1.38479	1.56001
DIF	.07227	.01863	.06208
-0.34	0.96403	1.36616	1.49794
DIF	.06597	.01796	.05422
-0.33	0.89806	1.34820	1.44371
DIF	.06051	.01732	.04767
-0.32	0.83755	1.33088	1.39604
DIF	.05576	.01671	.04214
-0.31	0.78179	1.31418	1.35389
DIF	.05158	.01612	.03744
-0.30	0.73021	1.29805	1.31646
DIF	.04788	.01556	.03339
-0.29	0.68233	1.28249	1.28306
DIF	.04460	.01502	.02990
-0.28	0.63774	1.26747	1.25316
DIF	.04166	.01451	.02685
-0.27	0.59607	1.25297	1.22632
DIF	.03903	.01401	.02417
-0.26	0.55705	1.23895	1.20215
DIF	.03665	.01354	.02181
-0.25	0.52039	1.22542	1.18034

## DISTRIBUTION EXPONENTIELLE GENERALISEE

DELTA	2	3	4	5
-0.25	5.60514	0.52039	1.22542	1.18034
DIF	.58068	.03450	.01308	.01971
-0.24	5.02446	0.48589	1.21234	1.16063
DIF	.47328	.03255	.01264	.01784
-0.23	4.55118	0.45333	1.19969	1.14279
DIF	.39419	.03078	.01222	.01616
-0.22	4.15698	0.42256	1.18747	1.12663
DIF	.33423	.02915	.01182	.01465
-0.21	3.82275	0.39340	1.17566	1.11197
DIF	.28768	.02767	.01143	.01329
-0.20	3.53507	0.36573	1.16423	1.09869
DIF	.25079	.02630	.01105	.01205
-0.19	3.28428	0.33943	1.15318	1.08664
DIF	.22106	.02505	.01069	.01092
-0.18	3.06322	0.31438	1.14249	1.07572
DIF	.19673	.02389	.01034	.00989
-0.17	2.86649	0.29049	1.13216	1.06583
DIF	.17657	.02282	.01000	.00894
-0.16	2.68992	0.26767	1.12216	1.05690
DIF	.15967	.02183	.00967	.00806
-0.15	2.53025	0.24584	1.11248	1.04883
DIF	.14535	.02091	.00936	.00726
-0.14	2.38490	0.22492	1.10312	1.04157
DIF	.13312	.02006	.00906	.00651
-0.13	2.25178	0.20486	1.09407	1.03506
DIF	.12258	.01927	.00876	.00582
-0.12	2.12921	0.18559	1.08531	1.02924
DIF	.11343	.01853	.00848	.00517
-0.11	2.01578	0.16705	1.07683	1.02407
DIF	.10544	.01785	.00820	.00457
-0.10	1.91034	0.14921	1.06863	1.01945
DIF	.09841	.01721	.00794	.00401
-0.09	1.81192	0.12200	1.06069	1.01549
DIF	.09221	.01661	.00768	.00348
-0.08	1.71972	0.11599	1.05302	1.01201
DIF	.08669	.01605	.00743	.00298
-0.07	1.63302	0.09925	1.04559	1.00903
DIF	.08177	.01552	.00718	.00251
-0.06	1.55125	0.08383	1.03840	1.00652
DIF	.07737	.01503	.00695	.00207
-0.05	1.47388	0.06880	1.03145	1.00445
DIF	.07340	.01457	.00672	.00165
-0.04	1.40049	0.05422	1.02473	1.00280
DIF	.06982	.01414	.00650	.00125
-0.03	1.33067	0.04008	1.01822	1.00155
DIF	.06657	.01373	.00628	.00087
-0.02	1.26410	0.02635	1.01195	1.00068
DIF	.06362	.01335	.00608	.00051
-0.01	1.20048	0.01300	1.00587	1.00017
DIF	.06093	.01300	.00587	.00017
0.0	1.13955	0.0	1.00000	1.00000

## DISTRIBUTION EXPONENTIELLE GENERALISEE

	2	3	4	5
DELTA				
0.25	-0.08729	0.25429	0.90640	1.07870
DIF	.03206	.00859	.00201	.00578
0.26	-0.05523	0.26288	0.90440	1.08449
DIF	.03152	.00854	.00189	.00595
0.27	-0.02371	0.27141	0.90250	1.09044
DIF	.03114	.00849	.00178	.00613
0.28	0.00744	0.27990	0.90072	1.09657
DIF	.03079	.00844	.00168	.00630
0.29	0.03823	0.28835	0.89904	1.10287
DIF	.03049	.00841	.00157	.00647
0.30	0.06872	0.29675	0.89747	1.10933
DIF	.03018	.00837	.00147	.00663
0.31	0.09890	0.30512	0.89600	1.11596
DIF	.02984	.00834	.00136	.00680
0.32	0.12874	0.31346	0.89464	1.12277
DIF	.02954	.00832	.00126	.00697
0.33	0.15828	0.32178	0.89338	1.12973
DIF	.02931	.00830	.00116	.00713
0.34	0.18759	0.33008	0.89222	1.13686
DIF	.02903	.00828	.00106	.00730
0.35	0.21662	0.33836	0.89115	1.14416
DIF	.02885	.00827	.00097	.00746
0.36	0.24547	0.34663	0.89018	1.15162
DIF	.02855	.00826	.00087	.00763
0.37	0.27402	0.35489	0.88931	1.15925
DIF	.02841	.00826	.00078	.00779
0.38	0.30243	0.36315	0.88854	1.16704
DIF	.02819	.00826	.00068	.00795
0.39	0.33062	0.37141	0.88785	1.17499
DIF	.02801	.00826	.00059	.00811
0.40	0.35862	0.37967	0.88726	1.18310
DIF	.02783	.00827	.00050	.00828
0.41	0.38646	0.38793	0.88676	1.19138
DIF	.02767	.00828	.00041	.00844
0.42	0.41413	0.39621	0.88636	1.19982
DIF	.02755	.00829	.00032	.00860
0.43	0.44168	0.40451	0.88604	1.20842
DIF	.02737	.00831	.00023	.00877
0.44	0.46905	0.41282	0.88581	1.21719
DIF	.02728	.00833	.00014	.00893
0.45	0.49633	0.42115	0.88566	1.22612
DIF	.02714	.00836	.00006	.00909
0.46	0.52348	0.42951	0.88560	1.23522
DIF	.02705	.00839	.00003	.00926
0.47	0.55053	0.43790	0.88563	1.24447
DIF	.02695	.00842	.00011	.00942
0.48	0.57747	0.44631	0.88575	1.25390
DIF	.02685	.00845	.00020	.00959
0.49	0.60432	0.45476	0.88595	1.26348
DIF	.02677	.00849	.00029	.00976
0.50	0.63110	0.46325	0.88623	1.27324

## DISTRIBUTION EXPONENTIELLE GENERALISEE

	2	3	4	5
DELTA				
0.50	0.63110	0.46325	0.88623	1.27324
DIF	.02672	.00853	.00036	.00992
0.51	0.65782	0.47178	0.88659	1.28316
DIF	.02663	.00857	.00045	.01009
0.52	0.68445	0.48035	0.88704	1.29325
DIF	.02657	.00862	.00053	.01025
0.53	0.71102	0.48897	0.88757	1.30350
DIF	.02654	.00867	.00061	.01042
0.54	0.73755	0.49764	0.88818	1.31392
DIF	.02648	.00872	.00069	.01059
0.55	0.76404	0.50636	0.88887	1.32452
DIF	.02643	.00878	.00077	.01077
0.56	0.79047	0.51513	0.88964	1.33528
DIF	.02644	.00883	.00085	.01093
0.57	0.81691	0.52397	0.89049	1.34622
DIF	.02639	.00890	.00093	.01111
0.58	0.84330	0.53286	0.89142	1.35733
DIF	.02638	.00896	.00101	.01128
0.59	0.86968	0.54182	0.89243	1.36861
DIF	.02636	.00903	.00109	.01146
0.60	0.89604	0.55085	0.89352	1.38006
DIF	.02638	.00909	.00117	.01163
0.61	0.92242	0.55994	0.89468	1.39170
DIF	.02635	.00917	.00124	.01181
0.62	0.94877	0.56911	0.89592	1.40351
DIF	.02637	.00924	.00132	.01199
0.63	0.97514	0.57835	0.89724	1.41549
DIF	.02638	.00932	.00140	.01217
0.64	1.00152	0.58767	0.89864	1.42766
DIF	.02642	.00940	.00147	.01235
0.65	1.02794	0.59708	0.90012	1.44001
DIF	.02642	.00949	.00155	.01253
0.66	1.05436	0.60656	0.90167	1.45254
DIF	.02644	.00957	.00163	.01272
0.67	1.08080	0.61614	0.90330	1.46526
DIF	.02649	.00966	.00170	.01290
0.68	1.10728	0.62580	0.90500	1.47816
DIF	.02654	.00975	.00178	.01309
0.69	1.13383	0.63555	0.90678	1.49124
DIF	.02656	.00985	.00186	.01328
0.70	1.16039	0.64540	0.90864	1.50452
DIF	.02662	.00995	.00193	.01347
0.71	1.18701	0.65535	0.91057	1.51799
DIF	.02668	.01005	.00201	.01366
0.72	1.21368	0.66540	0.91258	1.53164
DIF	.02674	.01015	.00208	.01385
0.73	1.24042	0.67555	0.91467	1.54549
DIF	.02679	.01026	.00216	.01405
0.74	1.26721	0.68581	0.91683	1.55954
DIF	.02686	.01037	.00224	.01424
0.75	1.29407	0.69618	0.91906	1.57379

## DISTRIBUTION EXPONENTIELLE GENERALISEE

	2	3	4	5
DELTA				
0.75	1.29407	0.69618	0.91906	1.57379
DIF	.02693	.01048	.00231	.01444
0.76	1.32100	0.70666	0.92137	1.58823
DIF	.02700	.01060	.00239	.01464
0.77	1.34801	0.71726	0.92376	1.60287
DIF	.02709	.01071	.00246	.01484
0.78	1.37510	0.72797	0.92623	1.61772
DIF	.02718	.01084	.00254	.01505
0.79	1.40228	0.73881	0.92877	1.63277
DIF	.02727	.01096	.00262	.01526
0.80	1.42954	0.74977	0.93136	1.64803
DIF	.02735	.01109	.00269	.01547
0.81	1.45690	0.76085	0.93408	1.66349
DIF	.02746	.01122	.00277	.01568
0.82	1.48436	0.77207	0.93684	1.67917
DIF	.02756	.01135	.00285	.01589
0.83	1.51192	0.78342	0.93969	1.69506
DIF	.02767	.01149	.00292	.01610
0.84	1.53959	0.79491	0.94261	1.71116
DIF	.02777	.01163	.00300	.01632
0.85	1.56736	0.80654	0.94561	1.72749
DIF	.02790	.01177	.00308	.01654
0.86	1.59525	0.81831	0.94869	1.74403
DIF	.02801	.01192	.00315	.01676
0.87	1.62326	0.83023	0.95184	1.76079
DIF	.02814	.01207	.00323	.01699
0.88	1.65140	0.84229	0.95507	1.77778
DIF	.02825	.01222	.00331	.01721
0.89	1.67965	0.85451	0.95838	1.79499
DIF	.02840	.01238	.00339	.01744
0.90	1.70805	0.86689	0.96177	1.81243
DIF	.02852	.01254	.00346	.01767
0.91	1.73657	0.87942	0.96523	1.83011
DIF	.02866	.01270	.00354	.01791
0.92	1.76523	0.89212	0.96877	1.84801
DIF	.02880	.01286	.00362	.01814
0.93	1.79403	0.90499	0.97240	1.86616
DIF	.02896	.01303	.00370	.01838
0.94	1.82299	0.91802	0.97610	1.88454
DIF	.02910	.01321	.00378	.01862
0.95	1.85210	0.93123	0.97988	1.90316
DIF	.02926	.01339	.00386	.01887
0.96	1.88135	0.94461	0.98374	1.92203
DIF	.02941	.01357	.00394	.01912
0.97	1.91076	0.95818	0.98768	1.94115
DIF	.02958	.01375	.00402	.01936
0.98	1.94035	0.97193	0.99171	1.96051
DIF	.02974	.01394	.00410	.01962
0.99	1.97009	0.98587	0.99581	1.98013
DIF	.02991	.01413	.00419	.01987
1.00	2.00000	1.00000	1.00000	2.00000

## DISTRIBUTION EXPONENTIELLE GENERALISEE

	2	3	4	5
DELTA				
1.00	2.00000	1.00000	1.00000	2.00000
DIF	.03009	.01433	.00427	.02013
1.01	2.03009	1.01433	1.00427	2.02013
DIF	.03026	.01453	.00435	.02039
1.02	2.06035	1.02885	1.00862	2.04052
DIF	.03045	.01473	.00444	.02065
1.03	2.09080	1.04358	1.01306	2.06117
DIF	.03063	.01494	.00452	.02092
1.04	2.12143	1.05852	1.01758	2.08210
DIF	.03082	.01515	.00460	.02119
1.05	2.15225	1.07367	1.02218	2.10328
DIF	.03101	.01537	.00469	.02146
1.06	2.18326	1.08904	1.02687	2.12475
DIF	.03122	.01559	.00477	.02174
1.07	2.21448	1.10462	1.03164	2.14649
DIF	.03142	.01581	.00486	.02202
1.08	2.24590	1.12043	1.03650	2.16851
DIF	.03161	.01604	.00495	.02230
1.09	2.27751	1.13648	1.04145	2.19081
DIF	.03183	.01627	.00504	.02259
1.10	2.30934	1.15275	1.04648	2.21340
DIF	.03205	.01651	.00512	.02288
1.11	2.34139	1.16926	1.05161	2.23628
DIF	.03226	.01676	.00521	.02317
1.12	2.37365	1.18602	1.05682	2.25944
DIF	.03247	.01700	.00530	.02347
1.13	2.40613	1.20302	1.06212	2.28291
DIF	.03271	.01725	.00539	.02376
1.14	2.43883	1.22027	1.06751	2.30667
DIF	.03294	.01751	.00548	.02407
1.15	2.47177	1.23779	1.07300	2.33074
DIF	.03318	.01777	.00558	.02437
1.16	2.50495	1.25556	1.07857	2.35512
DIF	.03339	.01804	.00567	.02469
1.17	2.53834	1.27360	1.08424	2.37980
DIF	.03366	.01831	.00576	.02499
1.18	2.57200	1.29191	1.09000	2.40480
DIF	.03389	.01859	.00585	.02532
1.19	2.60589	1.31050	1.09585	2.43011
DIF	.03415	.01887	.00595	.02564
1.20	2.64004	1.32937	1.10180	2.45575
DIF	.03439	.01916	.00604	.02596
1.21	2.67443	1.34853	1.10785	2.48171
DIF	.03465	.01945	.00614	.02629
1.22	2.70908	1.36799	1.11399	2.50801
DIF	.03492	.01975	.00624	.02662
1.23	2.74400	1.38774	1.12023	2.53463
DIF	.03519	.02006	.00634	.02696
1.24	2.77919	1.40780	1.12657	2.56159
DIF	.03545	.02037	.00644	.02731
1.25	2.81464	1.42817	1.13300	2.58889

## DISTRIBUTION EXPONENTIELLE GENERALISEE

	2	3	4	5
DELTA				
1.25	2.81464	1.42817	1.13300	2.58889
DIF	.03573	.02068	.00654	.02764
1.26	2.85037	1.44885	1.13954	2.61654
DIF	.03602	.02101	.00664	.02800
1.27	2.88639	1.46985	1.14618	2.64453
DIF	.03629	.02133	.00674	.02835
1.28	2.92268	1.49119	1.15292	2.67289
DIF	.03658	.02167	.00684	.02871
1.29	2.95926	1.51286	1.15976	2.70159
DIF	.03687	.02201	.00695	.02907
1.30	2.99614	1.53486	1.16671	2.73066
DIF	.03717	.02236	.00705	.02944
1.31	3.03331	1.55722	1.17376	2.76010
DIF	.03748	.02271	.00716	.02981
1.32	3.07079	1.57993	1.18092	2.78991
DIF	.03778	.02307	.00727	.03018
1.33	3.10857	1.60300	1.18819	2.82009
DIF	.03809	.02343	.00738	.03056
1.34	3.14666	1.62643	1.19557	2.85065
DIF	.03841	.02381	.00749	.03095
1.35	3.18507	1.65024	1.20305	2.88160
DIF	.03873	.02419	.00760	.03134
1.36	3.22380	1.67444	1.21065	2.91293
DIF	.03905	.02458	.00771	.03173
1.37	3.26285	1.69902	1.21836	2.94466
DIF	.03938	.02497	.00782	.03213
1.38	3.30223	1.72399	1.22618	2.97679
DIF	.03972	.02538	.00794	.03253
1.39	3.34195	1.74937	1.23412	3.00933
DIF	.04006	.02579	.00805	.03294
1.40	3.38201	1.77516	1.24217	3.04227
DIF	.04040	.02621	.00817	.03335
1.41	3.42241	1.80136	1.25034	3.07562
DIF	.04074	.02663	.00829	.03377
1.42	3.46315	1.82800	1.25862	3.10940
DIF	.04111	.02707	.00841	.03420
1.43	3.50426	1.85506	1.26703	3.14360
DIF	.04146	.02751	.00853	.03463
1.44	3.54572	1.88257	1.27556	3.17822
DIF	.04183	.02796	.00865	.03506
1.45	3.58754	1.91053	1.28421	3.21329
DIF	.04220	.02842	.00877	.03550
1.46	3.62974	1.93895	1.29298	3.24879
DIF	.04257	.02889	.00890	.03595
1.47	3.67231	1.96784	1.30188	3.28473
DIF	.04295	.02936	.00902	.03640
1.48	3.71526	1.99720	1.31090	3.32113
DIF	.04333	.02985	.00915	.03685
1.49	3.75859	2.02705	1.32006	3.35799
DIF	.04372	.03034	.00928	.03732
1.50	3.80231	2.05739	1.32934	3.39531

## TABLE B

La table B donne pour des valeurs de  $\delta$  comprises entre 0,50 et 2,00 et variant de 0,01 :

— en colonne 2:  $\Gamma(\delta + 1)$ ;

— en colonne 3:  $\Gamma(\delta + 1) / \Gamma(2\delta + 1)$ ;

— en colonne 4:  $\Gamma(3\delta + 1) \Gamma(\delta + 1) / [\Gamma(2\delta + 1)]^2$

Les différences sont calculées de façon à faciliter l'interpolation, si besoin.

## DISTRIBUTION EXPONENTIELLE GENERALISEE

	2	3	4
DELTA			
0.50	0.886227	0.886227	1.178096
DIF	.000365	.007213	.005383
0.51	0.886592	0.879014	1.183479
DIF	.000447	.007296	.005426
0.52	0.887039	0.871718	1.188906
DIF	.000529	.007374	.005471
0.53	0.887568	0.864344	1.194377
DIF	.000610	.007446	.005521
0.54	0.888178	0.856898	1.199898
DIF	.000691	.007514	.005564
0.55	0.888868	0.849385	1.205462
DIF	.000771	.007578	.005606
0.56	0.889639	0.841807	1.211067
DIF	.000851	.007635	.005655
0.57	0.890490	0.834172	1.216722
DIF	.000930	.007690	.005696
0.58	0.891420	0.826482	1.222419
DIF	.001009	.007739	.005741
0.59	0.892428	0.818743	1.228160
DIF	.001087	.007784	.005783
0.60	0.893515	0.810958	1.233943
DIF	.001165	.007825	.005829
0.61	0.894681	0.803133	1.239772
DIF	.001243	.007864	.005869
0.62	0.895924	0.795270	1.245641
DIF	.001320	.007895	.005914
0.63	0.897244	0.787374	1.251554
DIF	.001398	.007925	.005958
0.64	0.898642	0.779449	1.257512
DIF	.001475	.007950	.006001
0.65	0.900117	0.771499	1.263513
DIF	.001552	.007972	.006041
0.66	0.901668	0.763528	1.269553
DIF	.001628	.007990	.006083
0.67	0.903296	0.755537	1.275636
DIF	.001705	.008005	.006126
0.68	0.905001	0.747533	1.281762
DIF	.001781	.008015	.006169
0.69	0.906782	0.739518	1.287931
DIF	.001857	.008024	.006209
0.70	0.908639	0.731494	1.294141
DIF	.001933	.008028	.006254
0.71	0.910571	0.723466	1.300395
DIF	.002009	.008030	.006294
0.72	0.912580	0.715436	1.306689
DIF	.002085	.008028	.006337
0.73	0.914665	0.707408	1.313026
DIF	.002161	.008024	.006376
0.74	0.916826	0.699384	1.319403
DIF	.002237	.008017	.006422
0.75	0.919063	0.691368	1.325825

## DISTRIBUTION EXPONENTIELLE GENERALISEE

	2	3	4
DELTA			
0.75	0.919063	0.691368	1.325825
DIF	.002312	.008006	.006461
0.76	0.921375	0.683361	1.332286
DIF	.002388	.007994	.006503
0.77	0.923763	0.675367	1.338789
DIF	.002464	.007978	.006546
0.78	0.926227	0.667389	1.345335
DIF	.002540	.007961	.006588
0.79	0.928768	0.659429	1.351923
DIF	.002616	.007940	.006629
0.80	0.931384	0.651489	1.358552
DIF	.002693	.007918	.006670
0.81	0.934076	0.643571	1.365222
DIF	.002769	.007892	.006714
0.82	0.936845	0.635678	1.371936
DIF	.002845	.007866	.006755
0.83	0.939690	0.627813	1.378691
DIF	.002922	.007836	.006799
0.84	0.942612	0.619976	1.385489
DIF	.002999	.007806	.006836
0.85	0.945611	0.612171	1.392325
DIF	.003076	.007772	.006883
0.86	0.948687	0.604399	1.399208
DIF	.003153	.007737	.006922
0.87	0.951840	0.596661	1.406130
DIF	.003230	.007700	.006967
0.88	0.955071	0.588961	1.413096
DIF	.003309	.007662	.007007
0.89	0.958379	0.581300	1.420103
DIF	.003387	.007621	.007051
0.90	0.961766	0.573678	1.427155
DIF	.003465	.007580	.007092
0.91	0.965231	0.566099	1.434246
DIF	.003543	.007536	.007133
0.92	0.968774	0.558563	1.441380
DIF	.003623	.007491	.007176
0.93	0.972397	0.551071	1.448556
DIF	.003702	.007445	.007223
0.94	0.976099	0.543627	1.455779
DIF	.003782	.007397	.007261
0.95	0.979881	0.536229	1.463040
DIF	.003862	.007348	.007305
0.96	0.983742	0.528881	1.470345
DIF	.003943	.007299	.007349
0.97	0.987685	0.521582	1.477695
DIF	.004023	.007246	.007393
0.98	0.991708	0.514336	1.485087
DIF	.004105	.007195	.007434
0.99	0.995813	0.507141	1.492521
DIF	.004187	.007141	.007479
1.00	1.000000	0.500000	1.500000

## DISTRIBUTION EXPONENTIELLE GENERALISEE

DELTA	2	3	4
1.00	1.000000	0.500000	1.500000
DIF	.004269	.007086	.007521
1.01	1.004269	0.492914	1.507521
DIF	.004352	.007032	.007565
1.02	1.008620	0.485883	1.515086
DIF	.004436	.006975	.007609
1.03	1.013056	0.478908	1.522696
DIF	.004519	.006918	.007653
1.04	1.017575	0.471990	1.530349
DIF	.004603	.006859	.007697
1.05	1.022179	0.465131	1.538046
DIF	.004689	.006801	.007740
1.06	1.026868	0.458329	1.545786
DIF	.004774	.006742	.007786
1.07	1.031642	0.451588	1.553572
DIF	.004861	.006682	.007831
1.08	1.036503	0.444906	1.561402
DIF	.004947	.006621	.007873
1.09	1.041450	0.438285	1.569275
DIF	.005035	.006560	.007920
1.10	1.046485	0.431725	1.577195
DIF	.005123	.006498	.007965
1.11	1.051608	0.425227	1.585160
DIF	.005213	.006436	.008010
1.12	1.056821	0.418791	1.593170
DIF	.005301	.006373	.008053
1.13	1.062121	0.412417	1.601223
DIF	.005392	.006311	.008101
1.14	1.067513	0.406107	1.609324
DIF	.005483	.006247	.008144
1.15	1.072996	0.399859	1.617469
DIF	.005575	.006184	.008192
1.16	1.078571	0.393676	1.625661
DIF	.005666	.006120	.008236
1.17	1.084237	0.387556	1.633897
DIF	.005761	.006055	.008286
1.18	1.089998	0.381501	1.642183
DIF	.005855	.005991	.008328
1.19	1.095853	0.375510	1.650512
DIF	.005949	.005927	.008377
1.20	1.101802	0.369583	1.658889
DIF	.006044	.005862	.008422
1.21	1.107846	0.363721	1.667311
DIF	.006142	.005797	.008468
1.22	1.113988	0.357924	1.675778
DIF	.006240	.005732	.008519
1.23	1.120228	0.352192	1.684298
DIF	.006338	.005667	.008565
1.24	1.126566	0.346524	1.692863
DIF	.006436	.005603	.008610
1.25	1.133002	0.340922	1.701472

## DISTRIBUTION EXPONENTIELLE. GENERALISEE

	2	3	4
DELTA			
1.25	1.133002	0.340922	1.701472
DIF	.006537	.005537	.008659
1.26	1.139540	0.335385	1.710132
DIF	.006639	.005473	.008709
1.27	1.146178	0.329912	1.718841
DIF	.006741	.005408	.008755
1.28	1.152919	0.324504	1.727595
DIF	.006845	.005343	.008803
1.29	1.159763	0.319162	1.736399
DIF	.006948	.005278	.008851
1.30	1.166711	0.313884	1.745250
DIF	.007053	.005214	.008901
1.31	1.173764	0.308670	1.754150
DIF	.007160	.005149	.008950
1.32	1.180924	0.303521	1.763101
DIF	.007268	.005085	.009000
1.33	1.188192	0.298435	1.772100
DIF	.007376	.005021	.009047
1.34	1.195568	0.293415	1.781147
DIF	.007485	.004957	.009099
1.35	1.203053	0.288457	1.790246
DIF	.007597	.004894	.009149
1.36	1.210650	0.283564	1.799395
DIF	.007709	.004831	.009196
1.37	1.218359	0.278733	1.808591
DIF	.007821	.004767	.009246
1.38	1.226180	0.273966	1.817837
DIF	.007936	.004705	.009299
1.39	1.234117	0.269262	1.827136
DIF	.008052	.004642	.009349
1.40	1.242168	0.264619	1.836485
DIF	.008169	.004580	.009401
1.41	1.250338	0.260040	1.845886
DIF	.008286	.004518	.009448
1.42	1.258624	0.255522	1.855334
DIF	.008407	.004457	.009503
1.43	1.267031	0.251065	1.864838
DIF	.008528	.004396	.009554
1.44	1.275558	0.246669	1.874392
DIF	.008650	.004335	.009606
1.45	1.284208	0.242334	1.883998
DIF	.008773	.004274	.009658
1.46	1.292981	0.238060	1.893656
DIF	.008899	.004215	.009709
1.47	1.301880	0.233845	1.903365
DIF	.009025	.004155	.009764
1.48	1.310905	0.229690	1.913129
DIF	.009153	.004096	.009816
1.49	1.320058	0.225594	1.922945
DIF	.009282	.004037	.009869
1.50	1.329340	0.221557	1.932814

## DISTRIBUTION EXPONENTIELLE GENERALISEE

	2	3	4
DELTA			
1.50	1.329340	0.221557	1.932814
DIF	.009413	.003979	.009922
1.51	1.338753	0.217578	1.942736
DIF	.009545	.003921	.009975
1.52	1.348298	0.213656	1.952711
DIF	.009680	.003864	.010030
1.53	1.357978	0.209792	1.962741
DIF	.009815	.003807	.010083
1.54	1.367793	0.205985	1.972824
DIF	.009952	.003751	.010137
1.55	1.377745	0.202235	1.982961
DIF	.010092	.003695	.010194
1.56	1.387836	0.198540	1.993155
DIF	.010232	.003640	.010248
1.57	1.398068	0.194900	2.003403
DIF	.010374	.003585	.010302
1.58	1.408442	0.191315	2.013704
DIF	.010517	.003530	.010357
1.59	1.418960	0.187785	2.024061
DIF	.010664	.003476	.010414
1.60	1.429624	0.184309	2.034475
DIF	.010811	.003423	.010469
1.61	1.440434	0.180886	2.044945
DIF	.010962	.003370	.010527
1.62	1.451396	0.177516	2.055471
DIF	.011110	.003318	.010580
1.63	1.462506	0.174198	2.066051
DIF	.011266	.003266	.010642
1.64	1.473772	0.170932	2.076694
DIF	.011419	.003215	.010693
1.65	1.485191	0.167717	2.087386
DIF	.011578	.003164	.010756
1.66	1.496769	0.164553	2.098142
DIF	.011735	.003113	.010812
1.67	1.508504	0.161440	2.108953
DIF	.011896	.003064	.010867
1.68	1.520400	0.158376	2.119821
DIF	.012060	.003015	.010929
1.69	1.532460	0.155361	2.130750
DIF	.012225	.002966	.010985
1.70	1.544685	0.152394	2.141735
DIF	.012390	.002918	.011045
1.71	1.557076	0.149476	2.152780
DIF	.012562	.002871	.011103
1.72	1.569637	0.146606	2.163882
DIF	.012733	.002824	.011165
1.73	1.582370	0.143782	2.175047
DIF	.012907	.002777	.011222
1.74	1.595277	0.141005	2.186269
DIF	.013083	.002731	.011283
1.75	1.608359	0.138273	2.197552

## DISTRIBUTION EXPONENTIELLE GENERALISEE

	2	3	4
DELTA			
1.75	1.608359	0.138273	2.197552
DIF	.013259	.002686	.011342
1.76	1.621618	0.135588	2.208894
DIF	.013441	.002641	.011402
1.77	1.635059	0.132946	2.220296
DIF	.013624	.002597	.011466
1.78	1.648684	0.130349	2.231762
DIF	.013810	.002553	.011524
1.79	1.662494	0.127796	2.243286
DIF	.013995	.002510	.011584
1.80	1.676489	0.125286	2.254870
DIF	.014188	.002467	.011651
1.81	1.690677	0.122819	2.266521
DIF	.014380	.002425	.011708
1.82	1.705057	0.120394	2.278230
DIF	.014576	.002384	.011774
1.83	1.719633	0.118010	2.290004
DIF	.014772	.002342	.011837
1.84	1.734406	0.115667	2.301841
DIF	.014974	.002302	.011896
1.85	1.749379	0.113365	2.313737
DIF	.015178	.002262	.011963
1.86	1.764557	0.111103	2.325700
DIF	.015384	.002223	.012029
1.87	1.779941	0.108880	2.337729
DIF	.015591	.002184	.012090
1.88	1.795531	0.106696	2.349818
DIF	.015804	.002146	.012156
1.89	1.811336	0.104550	2.361974
DIF	.016018	.002108	.012215
1.90	1.827353	0.102443	2.374188
DIF	.016236	.002070	.012282
1.91	1.843590	0.100372	2.386471
DIF	.016455	.002033	.012350
1.92	1.860044	0.098339	2.398821
DIF	.016680	.001997	.012409
1.93	1.876724	0.096341	2.411230
DIF	.016907	.001962	.012485
1.94	1.893631	0.094380	2.423715
DIF	.017136	.001926	.012546
1.95	1.910767	0.092453	2.436260
DIF	.017366	.001891	.012609
1.96	1.928133	0.090562	2.448869
DIF	.017605	.001857	.012684
1.97	1.945738	0.088705	2.461553
DIF	.017843	.001824	.012748
1.98	1.963581	0.086881	2.474300
DIF	.018086	.001790	.012816
1.99	1.981668	0.085091	2.487117
DIF	.018332	.001758	.012881
2.00	2.000000	0.083333	2.499998

LISTE C  
SOUS PROGRAMMES EN FORTRAN

FUNCTION FEXGE(X,DE,S,XO)	F	1
FEXGE=.S+SIGN(1.,(S*DE))*(.5-DEXP(-((X-XO)/S)**(1.D0/DE)))	F	2
RETURN	F	3
END	F	4
FUNCTION VEXGE(F,DE,S,XO)	V	1
VEXGE=XO+S*(-DLOG(DMAX1(1.D-8,.5D0+SIGN(1.,S*DE)*(1.D0-F))))**DE	V	2
RETURN	V	3
END	V	4
FUNCTION FEXGET(X,DE,S,XO,F0)	FT	1
FEXGET=1.-(1.-F0)*DEXP(-(AMAX1(1.E-17**DE,(X-XO)/S))**1.D0/DE)	FT	2
RETURN	FT	3
END	FT	4
FUNCTION VEXGET(P,DE,S,XO,F0)	VT	1
VEXGET=XO+S*(DLOG(DMAX1(1.+1.D-16,(1.-F0)/(1.-F+1.D-60))))**DE	VT	2
RETURN	VT	3
END	VT	4
FUNCTION FEXGEU(X,DE,S,XO,F0)	FU	1
FEXGEU=F0+(1.-F0)*DEXP(-(AMAX1(1.E17**DE,(X-XO)/S))**1.D0/DE)	FU	2
RETURN	FU	3
END	FU	4
FUNCTION VEXGEU(P,DE,S,XO,F0)	VU	1
VEXGEU=XO+S*(-DLOG(DMAX1(1.D-60,(F-F0-1.D-16)/(1.-F0))))**DE	VU	2
RETURN	VU	3
END	VU	4
SUBROUTINE PEXGES(X,DE,S,XO,XM,N)	PS	1
DIMENSION X(N)	PS	2
S=0.	PS	3
XM=0.	PS	4
DO 1 I=1,N	PS	5
XM=XM+X(I)/N	PS	6
1 S=S+(ABS(X(I)-XO))**1./DE)/N	PS	7
S=S**DE*SIGN(1.,(XM-XO))	PS	8
RETURN	PS	9
END	PS	10

```

SUBROUTINE PEXGEF(X,DE,S,XO,XM,N,BJ)
REAL*8 SM(3),A,C,X*4(N),B*4(2),T
SS=SIGN(1.,(X(1)-BJ))
B(2)=X(1)*SS
XM=X(1)/N
DO 1 I=2,N
B(2)=AMIN1((X(I)*SS),B(2))
1 XM=XM+X(I)/N
IF(DE.GE.1.)S=(XM-B(2)*SS)/GAMMA(DE+1.)/(1.-1./N**DE)
IF(DE.GE.1.)XO=XM-S*GAMMA(DE+1.)
IF(DE.GE.1.)RETURN
XO=BJ
2 DY=-1.
3 B((3+IFIX(SIGN(1.,DY)))/2)=XO*SS
XO=(1.+B(1)+B(2)-1.)/2.*SS
IF((B(1)-XO*SS)*(B(2)-XO*SS).GE.0.)GO TO 7
DO 4 I=1,3
4 SM(I)=0.D0
DO 6 I=1,N
A=SS*(X(I)-XO)
IF(IDINT(DLOG(A)/ABS(DE)/50.D0))7,5,2
5 C=A**(1.D0/DE)
SM(1)=SM(1)+C/N
SM(2)=SM(2)+C/A/N
6 SM(3)=SM(3)+1./A/N
DY=(1.-SM(2)/SM(3)/SM(1))/DE-1.
T=SM(1)
IF(AINT(DY*1.E5).NE.0.)GO TO 3
7 S=SS*T**DE
RETURN
END

```

PF 1  
PF 2  
PF 3  
PF 4  
PF 5  
PF 6  
PF 7  
PF 8  
PF 9  
PF 10  
PF 11  
PF 12  
PF 13  
PF 14  
PF 15  
PF 16  
PF 17  
PF 18  
PF 19  
PF 20  
PF 21  
PF 22  
PF 23  
PF 24  
PF 25  
PF 26  
PF 27  
PF 28  
PF 29  
PF 30  
PF 31

```

SUBROUTINE PEXGEP(X,DE,S,XO,XM,N,DS)
REAL*8 SM(4),E,C,X*4(N)
XM=0.
DO 1 I=1,N
1 XM=XM+X(I)/N
SS=SIGN(1.,(XM-XO))
2 DE=DS
DO 3 I=1,4
3 SM(I)=0.D0
DO 4 I=1,N
E=DLOG(SS*(X(I)-XO)*1.D0)
C=(SS*(X(I)-XO)*1.D0)**(1.D0/DE)
SM(1)=SM(1)+C/N
SM(2)=SM(2)+E/N
SM(3)=SM(3)+E*E*C/N
4 SM(4)=SM(4)+E*C/N
DY=(SM(4)/SM(1)-SM(2))/DE-1.
DS=DE-DE*DY/((SM(4)/SM(1)*SM(4)-SM(3))/SM(1)/DE/DE-1.)
IF(AINT(DY*1.E5).NE.0.)GO TO 2
S=SS*SM(1)**DE
RETURN
END

```

PP 1  
PP 2  
PP 3  
PP 4  
PP 5  
PP 6  
PP 7  
PP 8  
PP 9  
PP 10  
PP 11  
PP 12  
PP 13  
PP 14  
PP 15  
PP 16  
PP 17  
PP 18  
PP 19  
PP 20  
PP 21  
PP 22

SUBROUTINE PEXGE(X,DE,S,XO,XM,N,BJ,DS)	P	1
REAL*8 SM(5),A,E,C,X*4(N),B*4(2),D*4(2),VGA,T	P	2
VGA(A)=-.369063*A-.701192+DSQRT(-.0370667*A*A+3.831352*A+.4916701)	P	3
SS=SIGN(1.,(X(1)-BJ))	P	4
B(2)=X(1)*SS	P	5
XM=X(1)/N	P	6
DO 1 I=2,N	P	7
B(2)=AMIN1((X(I)*SS),B(2))	P	8
1 XM=XM+X(I)/N	P	9
XO=BJ	P	10
2 DY=-1.	P	11
3 B((3+IFIX(SIGN(1.,DY)))/2)=XO*SS	P	12
XO=(1.+B(1)+B(2)-1.)/2.*SS	P	13
IF((B(1)-XO*SS)*(B(2)-XO*SS).GE.0.)GO TO 9	P	14
D(2)=4.*DS	P	15
DE=0.	P	16
DZ=1.	P	17
4 D((3-IFIX(SIGN(1.,DZ)))/2)=DE	P	18
DE=(1.+D(1)+D(2)-1.)/2.	P	19
IF((D(1)-DE)*(D(2)-DE).GE.0.)GO TO 8	P	20
DO 5 I=1,5	P	21
5 SM(I)=0.D0	P	22
DO 7 I=1,N	P	23
A=SS*(X(I)-XO)	P	24
E=DLOG(A)	P	25
IF(IDINT(E/DE*DS/50.D0))9,6,2	P	26
6 C=A**(1.D0/DE)	P	27
SM(1)=SM(1)+C/N	P	28
SM(2)=SM(2)+C/A/N	P	29
SM(3)=SM(3)+E/N	P	30
SM(4)=SM(4)+1./A/N	P	31
7 SM(5)=SM(5)+E*C/N	P	32
DZ=(SM(5)/SM(1)-SM(3))/DE-1.	P	33
T=SM(1)	P	34
IF(AINT(DZ*1.E5).NE.0.)GO TO 4	P	35
8 IF(DE.LT.1.)DY=(1.-SM(2)/SM(4)/SM(1))/DE-1.	P	36
IF(DE.GE.1.)DY=DE/(VGA((XM-XO)*SS/SM(1))*DE-1.)+1.)-1.	P	37
IF(DE.GT.2.)DY=SM(3)/(DLOG(SM(1))-5772156649)/DE-1.	P	38
IF(AINT(DY*1.E5).NE.0.)GO TO 3	P	39
9 S=SS*T**DE	P	40
RETURN	P	41
END	P	42

SUBROUTINE PEXGET(X,DE,S,XO,F0,N,XH)	PT 1
REAL*8 SM(3),A,C,X*4(N),D*4(2)	PT 2
PH=0.	PT 3
DO 1 I=1,N	PT 4
IF(X(I).GE.XH)PH=PH+1.	PT 5
1 CONTINUE	PT 6
DE=0.	PT 7
D(2)=6.	PT 8
DZ=1.	PT 9
2 D((3-IFIX(SIGN(1.,DZ)))/2)=DE	PT 10
DE=(1.+D(1)+D(2)-1.)/2.	PT 11
IF((DE-D(1))*(D(2)-DE).LE.0.)GO TO 5	PT 12
DO 3 I=1,3	PT 13
3 SM(I)=0.D0	PT 14
DO 4 I=1,N	PT 15
IF(X(I).LT.XH)GO TO 4	PT 16
A=(X(I)-XO)**(1.D0/DE)	PT 17
C=DLOG((X(I)-XO)*1.D0)	PT 18
SM(1)=SM(1)+C/PH	PT 19
SM(2)=SM(2)+A/PH	PT 20
SM(3)=SM(3)+A*C/PH	PT 21
4 CONTINUE	PT 22
C=(XH-XO)**(1.D0/DE)	PT 23
DZ=((SM(3)-ALOG(XH-XO)*C)/(SM(2)-C)-SM(1))/DE-1.	PT 24
IF(AINT(DZ*1.E4).NE.0.)GO TO 2	PT 25
5 S=(SM(2)-C)**DE	PT 26
F0=1.-PH/N/EXP(-((XH-XO)/S)**(1./DE))	PT 27
RETURN	PT 28
END	PT 29

SUBROUTINE PEXGEU(X,DE,S,X0,F0,N,XH)	PU 1
REAL*8 SM(3),A,C,X*4(N),D*4(2)	PU 2
B=-1.	PU 3
PH=0.	PU 4
DO 1 I=1,N	PU 5
IF(X(I).GE.XH)PH=PH+1.	PU 6
1 CONTINUE	PU 7
2 B=B+2.	PU 8
DE=0.	PU 9
D(2)=-6./B	PU 10
DZ=1.	PU 11
3 D((3-IFIX(SIGN(1.,DZ)))/2)=DE	PU 12
DE=(1.+D(1)+D(2)-1.)/2.	PU 13
IF((DE-D(1))*(D(2)-DE).LE.0.)GO TO 6	PU 14
DO 4 I=1,3	PU 15
4 SM(I)=0.D0	PU 16
DO 5 I=1,N	PU 17
IF(X(I).LT.XH)GO TO 5	PU 18
A=(X(I)-X0)**(1.D0/DE)	PU 19
C=DLOG((X(I)-X0)*1.D0)	PU 20
SM(1)=SM(1)+C/PH	PU 21
SM(2)=SM(2)+A/PH	PU 22
SM(3)=SM(3)+A*C/PH	PU 23
5 CONTINUE	PU 24
A=DLOG((XH-X0)*1.D0)	PU 25
C=(XH-X0)**(1.D0/DE)	PU 26
A=(A-SM(1)-DE)/(A*SM(2)-SM(3))	PU 27
C=C/(DEXP(C*A)-1.D0)	PU 28
DZ=(SM(3)-SM(2)*SM(1)-C*(SM(1)-DLOG(XH-X0*1.D0)))/(SM(2)+C)/DE-1.	PU 29
IF(AINT(DZ*1.E4).NE.0.)GO TO 3	PU 30
6 IF(A.LE.0.U0)GO TO 2	PU 31
S=1./A**DE	PU 32
F0=1.-PH/N/(1.-EXP(-((XH-X0)/S)**(1./DE)))	PU 33
RETURN	PU 34
END	PU 35

SUBROUTINE PEXGEV(X,DE,S,X0,VN,N,XH)	PV 1
REAL*8 SM(3),A,C,X*4(N),D*4(2)	PV 2
DE=0.	PV 3
D(2)=6.	PV 4
DZ=1.	PV 5
1 D((3-IFIX(SIGN(1.,DZ)))/2)=DE	PV 6
DE=(1.+D(1)+D(2)-1.)/2.	PV 7
IF((DE-D(1))*(DE-D(2)).GE.0.)GO TO 4	PV 8
DO 2 I=1,3	PV 9
2 SM(I)=0.D0	PV 10
DO 3 I=1,N	PV 11
A=(X(I)-X0)**(1.D0/DE)	PV 12
C=DLOG((X(I)-X0)*1.D0)	PV 13
SM(1)=SM(1)+C/N	PV 14
SM(2)=SM(2)+A/N	PV 15
3 SM(3)=SM(3)+A*C/N	PV 16
C=(XH-X0)**(1.D0/DE)	PV 17
DZ=((SM(3)-ALOG(XH-X0)*C)/(SM(2)-C)-SM(1))/DE-1.	PV 18
IF(AINT(DZ*1.E4).NE.0.)GO TO 1	PV 19
4 S=(SM(2)-C)**DE	PV 20
VN=N/EXP(-((XH-X0)/S)**(1./DE))	PV 21
RETURN	PV 22
END	PV 23

SUBROUTINE PEXGEW(X,DE,S,X0,VN,N,XH)	PW 1
REAL*8 SM(3),A,C,X*4(N),D*4(2)	PW 2
B=-1.	PW 3
1 B=B+2.	PW 4
DE=0.	PW 5
D(2)=-6./B	PW 6
DZ=1.	PW 7
2 D((3-IFIX(SIGN(1.,DZ)))/2)=DE	PW 8
DE=(1.+D(1)+D(2)-1.)/2.	PW 9
IF((DE-D(1))*(DE-D(2)).GE.0.)GO TO 5	PW 10
DO 3 I=1,3	PW 11
3 SM(I)=0.D0	PW 12
DO 4 I=1,N	PW 13
A=(X(I)-X0)**(1.D0/DE)	PW 14
C=DLOG((X(I)-X0)*1.D0)	PW 15
SM(1)=SM(1)+C/N	PW 16
SM(2)=SM(2)+A/N	PW 17
4 SM(3)=SM(3)+A*C/N	PW 18
A=(ALOG(XH-X0)-SM(1)-DE)/(ALOG(XH-X0)*SM(2)-SM(3))	PW 19
C=(XH-X0)**(1./DE)/(DEXP(A*(XH-X0)**(1./DE))-1.D0)	PW 20
DZ=(SM(3)-SM(2)*SM(1)-C*(SM(1)-ALOG(XH-X0)))/(SM(2)+C)/DE-1.	PW 21
IF(AINT(DZ*1.E4).NE.0.)GO TO 2	PW 22
5 IF(A.LE.0.00)GO TO 1	PW 23
S=1./A**DE	PW 24
VN=N/(1.-EXP(-((XH-X0)/S)**(1./DE)))	PW 25
RETURN	PW 26
END	PW 27

```

SUBROUTINE CEXGES(DE,S,XO,N,F,XF,CO,BC)
DIMENSION BC(2),B(11,2)
IX=5+IABS((INT(S/(XF-XO)/F+(XF-XO)/(1.-F)/S)*819+IX)*8)
M=19.001/(1.-CO)
DO 1 K=1,2
DO 1 L=1,10
1 B(L,K)=(1.5-K)*10.E70
DO 5 J=1,M
SY=0.
DO 2 I=1,N
IX=IX*65539
IF(IX.LT.0)IX=IX+2147483647+1
2 SY=SY+DLOG(2147483653.D0/DFLOAT(IX))/N
A=XO+S*(-DLOG(.5D0+SIGN(1.,S*DE)*(1.5D0-F)))*SY**DE
K=1.6-SIGN(.5,XF-A)
DO 4 L=1,10
IF(A*(1.5-K).GT.(1.5-K)*B(L,K))GO TO 4
DO 3 I=L,10
3 B(11+L-I,K)=B(10+L-I,K)
B(L,K)=A
GO TO 5
4 CONTINUE
5 BC(K)=B(10,K)
RETURN
END

```

CS 1  
CS 2  
CS 3  
CS 4  
CS 5  
CS 6  
CS 7  
CS 8  
CS 9  
CS 10  
CS 11  
CS 12  
CS 13  
CS 14  
CS 15  
CS 16  
CS 17  
CS 18  
CS 19  
CS 20  
CS 21  
CS 22  
CS 23  
CS 24  
CS 25

```

SUBROUTINE CEXGEF(DE,S,XO,N,BJ,F,XF,CO,BC,Y)
DIMENSION BC(2),B(11,2),Y(N)
IX=5+IABS((INT(S/(XF-XO)/F+(XF-XO)/(1.-F)/S)*819+IX)*8)
M=19.001/(1.-CO)
DO 1 K=1,2
DO 1 L=1,10
1 B(L,K)=(1.5-K)*10.E70
DO 5 J=1,M
DO 2 I=1,N
IX=IX*65539
IF(IX.LT.0)IX=IX+2147483647+1
2 Y(I)=XO+S*(DLOG(2147483653.D0/DFLOAT(IX)))*DE
CALL PEXGEF(Y,DE,SY,XY,XU,N,BJ)
A=XY+SY*(-DLOG(.5D0+SIGN(1.,S*DE)*(1.5D0-F)))*DE
K=1.6-SIGN(.5,XF-A)
DO 4 L=1,10
IF(A*(1.5-K).GT.(1.5-K)*B(L,K))GO TO 4
DO 3 I=L,10
3 B(11+L-I,K)=B(10+L-I,K)
B(L,K)=A
GO TO 5
4 CONTINUE
5 BC(K)=B(10,K)
RETURN
END

```

CF 1  
CF 2  
CF 3  
CF 4  
CF 5  
CF 6  
CF 7  
CF 8  
CF 9  
CF 10  
CF 11  
CF 12  
CF 13  
CF 14  
CF 15  
CF 16  
CF 17  
CF 18  
CF 19  
CF 20  
CF 21  
CF 22  
CF 23  
CF 24  
CF 25

SUBROUTINE CEXGEP(DE,S,XO,N,DS,F,XF,CO,BC,Y)	CP 1
DIMENSION BC(2),B(11,2),Y(N)	CP 2
IX=5+IABS((INT(S/(XF-XO)/F+(XF-XO)/(1.-F)/S)*819+IX)*8)	CP 3
M=19.001/(1.-CO)	CP 4
DO 1 K=1,2	CP 5
DO 1 L=1,10	CP 6
1 B(L,K)=(1.5-K)*10.E70	CP 7
DO 5 J=1,M	CP 8
DO 2 I=1,N	CP 9
IX=IX*65539	CP 10
IF(IX.LT.0)IX=IX+2147483647+1	CP 11
2 Y(I)=XO+S*(DLOG(2147483653.D0/DFLOAT(IX)))*DE	CP 12
CALL PEXGEP(Y,DY,SY,XO,XU,N,DS)	CP 13
A=XO+SY*(-DLOG(.5D0+SIGN(1.,S*DE)*(.5D0-F)))*DY	CP 14
K=1.6-SIGN(.5,XF-A)	CP 15
DO 4 L=1,10	CP 16
IF(A*(1.5-K).GT.(1.5-K)*B(L,K))GO TO 4	CP 17
DO 3 I=L,10	CP 18
3 B(11+L-I,K)=B(10+L-I,K)	CP 19
B(L,K)=A	CP 20
GO TO 5	CP 21
4 CONTINUE	CP 22
5 BC(K)=B(10,K)	CP 23
RETURN	CP 24
END	CP 25

SUBROUTINE CEXGE(DE,S,XO,N,BJ,DS,F,XF,CO,BC,Y)	C 1
DIMENSION BC(2),B(11,2),Y(N)	C 2
IX=5+IABS((INT(S/(XF-XO)/F+(XF-XO)/(1.-F)/S)*819+IX)*8)	C 3
M=19.001/(1.-CO)	C 4
DO 1 K=1,2	C 5
DO 1 L=1,10	C 6
1 B(L,K)=(1.5-K)*10.E70	C 7
DO 5 J=1,M	C 8
DO 2 I=1,N	C 9
IX=IX*65539	C 10
IF(IX.LT.0)IX=IX+2147483647+1	C 11
2 Y(I)=XO+S*(DLOG(2147483653.D0/DFLOAT(IX)))*DE	C 12
CALL PEXGE(Y,DY,SY,XY,XU,N,BJ,DS)	C 13
A=XY+SY*(-DLOG(.5D0+SIGN(1.,S*DE)*(.5D0-F)))*DY	C 14
K=1.6-SIGN(.5,XF-A)	C 15
DO 4 L=1,10	C 16
IF(A*(1.5-K).GT.(1.5-K)*B(L,K))GO TO 4	C 17
DO 3 I=L,10	C 18
3 B(11+L-I,K)=B(10+L-I,K)	C 19
B(L,K)=A	C 20
GO TO 5	C 21
4 CONTINUE	C 22
5 BC(K)=B(10,K)	C 23
RETURN	C 24
END	C 25

```

SUBROUTINE CEXGET(DE,S,X0,F0,N,XH,F,XF,CO,BC,Y)
DIMENSION BC(2),B(11,2),Y(N)
IX=5+IABS((INT(S/(XF-X0)/F+(XF-X0)/(1.-F)/S)*819+IX)*8)
M=19.001/(1.-CO)
DO 1 K=1,2
DO 1 L=1,10
1 B(L,K)=(1.5-K)*10.E70
DO 5 J=1,M
DO 2 I=1,N
IX=IX*65539
IF(IX.LT.0)IX=IX+2147483647+1
2 Y(I)=X0+S*(DLOG(DMAX1(1.+1.D-16,(1.-F0)/(1.-DFLOAT(IX)/2147483653.
2D0+1.D-60))))**DE
CALL PEXGET(Y,DY,SY,X0,FY,N,XH)
A=X0+SY*(ALOG((1.-FY)/(1.-F)))*DY
K=1.6-SIGN(.5,XF-A)
DO 4 L=1,10
IF(A*(1.5-K).GT.(1.5-K)*B(L,K))GO TO 4
DO 3 I=L,10
3 B(11+L-I,K)=B(10+L-I,K)
B(L,K)=A
GO TO 5
4 CONTINUE
5 BC(K)=B(10,K)
RETURN
END

```

CT 1  
CT 2  
CT 3  
CT 4  
CT 5  
CT 6  
CT 7  
CT 8  
CT 9  
CT 10  
CT 11  
CT 12  
CT 13  
CT 14  
CT 15  
CT 16  
CT 17  
CT 18  
CT 19  
CT 20  
CT 21  
CT 22  
CT 23  
CT 24  
CT 25  
CT 26

```

SUBROUTINE CEXGEU(DE,S,X0,F0,N,XH,F,XF,CO,BC,Y)
DIMENSION BC(2),B(11,2),Y(N)
IX=5+IABS((INT(S/(XF-X0)/F+(XF-X0)/(1.-F)/S)*819+IX)*8)
M=19.001/(1.-CO)
DO 1 K=1,2
DO 1 L=1,10
1 B(L,K)=(1.5-K)*10.E70
DO 5 J=1,M
DO 2 I=1,N
IX=IX*65539
IF(IX.LT.0)IX=IX+2147483647+1
2 Y(I)=X0+S*(-DLOG(DMAX1(1.D-60,(DFLOAT(IX)/2147483653.D0-F0-1.D-16)
2/(1.-F0))))**DE
CALL PEXGEU(Y,DY,SY,X0,FY,N,XH)
A=X0+SY*(ALOG((1.-FY)/(F-FY)))*DY
K=1.6-SIGN(.5,XF-A)
DO 4 L=1,10
IF(A*(1.5-K).GT.(1.5-K)*B(L,K))GO TO 4
DO 3 I=L,10
3 B(11+L-I,K)=B(10+L-I,K)
B(L,K)=A
GO TO 5
4 CONTINUE
5 BC(K)=B(10,K)
RETURN
END

```

CU 1  
CU 2  
CU 3  
CU 4  
CU 5  
CU 6  
CU 7  
CU 8  
CU 9  
CU 10  
CU 11  
CU 12  
CU 13  
CU 14  
CU 15  
CU 16  
CU 17  
CU 18  
CU 19  
CU 20  
CU 21  
CU 22  
CU 23  
CU 24  
CU 25  
CU 26

```

SUBROUTINE CEXGEV(DE,S,XO,NV,XH,F,XF,CO,BC)
DIMENSION BC(2),B(11,2),Y(500)
IX=5+IABS((INT(S/(XF-XO)/F+(XF-XO)/(1.-F)/S)*819+IX)*8)
M=19.001/(1.-CO)
DO 1 K=1,2
DO 1 L=1,10
1 B(L,K)=(1.5-K)*10.E70
DO 5 J=1,M
N=0
DO 2 I=1,NV
IX=IX*65539
IF(IX.LT.0)IX=IX+2147483647+1
Y(N+1)=XO+S*(DLOG(2147483653.D0/DFLOAT(IX)))*DE
IF(Y(N+1).LT.XH)N=N-1
2 N=N+1
CALL PEXGEV(Y,DY,SY,XO,VY,N,XH)
A=XO+SY*(-DLOG(NV/VY*(1.D0-F)))*DY
K=1.6-SIGN(.5,XF-A)
DO 4 L=1,10
IF(A*(1.5-K).GT.(1.5-K)*B(L,K))GO TO 4
DO 3 I=L,10
3 B(11+L-I,K)=B(10+L-I,K)
B(L,K)=A
GO TO 5
4 CONTINUE
5 BC(K)=B(10,K)
RETURN
END

```

CV 1  
CV 2  
CV 3  
CV 4  
CV 5  
CV 6  
CV 7  
CV 8  
CV 9  
CV 10  
CV 11  
CV 12  
CV 13  
CV 14  
CV 15  
CV 16  
CV 17  
CV 18  
CV 19  
CV 20  
CV 21  
CV 22  
CV 23  
CV 24  
CV 25  
CV 26  
CV 27  
CV 28

```

SUBROUTINE CEXGEW(DE,S,XO,NV,XH,F,XF,CO,BC)
DIMENSION BC(2),B(11,2),Y(500)
IX=5+IABS((INT(S/(XF-XO)/F+(XF-XO)/(1.-F)/S)*819+IX)*8)
M=19.001/(1.-CO)
DO 1 K=1,2
DO 1 L=1,10
1 B(L,K)=(1.5-K)*10.E70
DO 5 J=1,M
N=0
DO 2 I=1,NV
IX=IX*65539
IF(IX.LT.0)IX=IX+2147483647+1
Y(N+1)=XO+S*(DLOG(2147483653.D0/DFLOAT(IX)))*DE
IF(Y(N+1).LT.XH)N=N-1
2 N=N+1
CALL PEXGEW(Y,DY,SY,XO,VY,N,XH)
A=XO+SY*(-DLOG(1.D0-NV/VY*(1.D0-F)))*DY
K=1.6-SIGN(.5,XF-A)
DO 4 L=1,10
IF(A*(1.5-K).GT.(1.5-K)*B(L,K))GO TO 4
DO 3 I=L,10
3 B(11+L-I,K)=B(10+L-I,K)
B(L,K)=A
GO TO 5
4 CONTINUE
5 BC(K)=B(10,K)
RETURN
END

```

CW 1  
CW 2  
CW 3  
CW 4  
CW 5  
CW 6  
CW 7  
CW 8  
CW 9  
CW 10  
CW 11  
CW 12  
CW 13  
CW 14  
CW 15  
CW 16  
CW 17  
CW 18  
CW 19  
CW 20  
CW 21  
CW 22  
CW 23  
CW 24  
CW 25  
CW 26  
CW 27  
CW 28